Q.e.d.

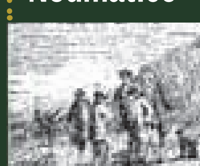
Ciencias duras en palabras blandas

Septiembre 2008
Año 1 | N°1

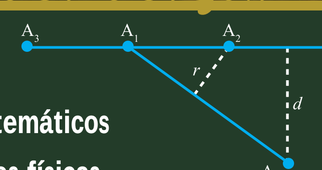
όπερ έδει δείξαι

Teorema de Sylvester - Gallai

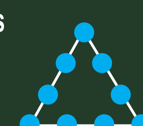
Vacío Neumático



Arquímedes siempre vuelve



- Juegos matemáticos
- Curiosidades físicas
- Demostraciones visuales
- Ingravidez simulada
- Sumas interminables



EN LA UBA SE ENSEÑA,
SE APRENDE, SE INVESTIGA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
MÁS UNIVERSIDAD PARA TODOS

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
www.uba.ar

Editorial

Año primero, número uno

Igual que ocurre con las primeras jornadas de cualquier actividad, que a menudo son también las únicas, las revistas que sólo alcanzan el primer número representan el 97 por ciento del total. Ésa es un bendición del ser humano, que se sabe finito y actúa, sin embargo, como si reinara en la eternidad.

Hallemos consuelo en la muy baja probabilidad de que este proyecto prospere. A lo mejor lectores y lectoras nos hacen saber en unos días que lo que pretendemos ya ha sido hecho; y que además funciona y es más útil cauce para nuestros desvelos que esta publicación.

La biblioteca de Babel, imaginada por Jorge Luis Borges en 1941, contiene todos los libros posibles que se pueden escribir con las combinaciones de veinticinco signos en cuatrocientas diez páginas, cada una de cuarenta renglones de ochenta letras. Eso está dicho, naturalmente, en una de esas obras; aunque muchos otros volúmenes perdidos en un mar de textos inextricables lo nieguen con ardor. Aquella visión de la cuantiosa producción intelectual que había en el mundo cuarenta años antes de Internet, enseña que casi todo lo que se pueda decir ya ha sido dicho, con numerosas y felices variantes, y casi tan bien como aquí.

Con prudencia entonces, pero a la vez con empecinamiento y expectativa, ofrecemos este primer número de Q.e.d., revista de divulgación científica, a personas interesadas en las ciencias, las artes y la cultura, aunque carezcan de formación especializada; por ejemplo estudiantes, maestros, profesores, periodistas y público en general.

El editor Brian Whitt advirtió al físico Stephen Hawking que cada fórmula que introdujese en su Breve historia del tiempo reduciría la cantidad de lectores a la mitad. Puesto que el mundo tiene seis mil millones de habitantes y aspiramos conservar al menos un lector o lectora, tenemos el derecho de poner aquí hasta treinta y dos fórmulas. Pero nos limitaremos a diez.

Agustín Rela

***Q.e.d.*, Quod erat demonstrandum,** *es una expresión latina que significa:*

lo que se quería demostrar

Tiene su origen en la frase griega όπερ έδει δείξαι (óper édei deíjai), que usaron muchos matemáticos, entre ellos Euclides y Arquímedes, para señalar que habían alcanzado la demostración que buscaban.

Staff

Q.E.D.
Ciencias duras en palabras blandas©

Revista trimestral de divulgación
Año I, número 1

Universidad de Buenos Aires
Ciclo Básico Común (CBC)
Departamento de Ciencias Exactas
Pabellón 3, Ciudad Universitaria,
Buenos Aires, Argentina

Directores:
Agustín Rela
Juan Carlos Pedraza

Editor:
Carlos Borches

Redacción:
Iliana Pisarro

Diseño:
Pablo Gabriel González

Consejo editorial:
Cecilia di Risio
Eduardo Laplagne
Flora Gutiérrez
Patricia Fauring
Silvia Reich

Agradecemos la colaboración de
Alexia Yavícoli
Fernando Demarco
Jorge Salvetti
Marcelo Luda
Matías Cveczilberg

Impresa en La Copia

revistaqed@cbc.uba.ar
www.qed.cbc.uba.ar

+54 11 4789-6000, interno 6083
+54 11 4781-0706
© 2008 ISSN 950-29-&070-8.

Qed

Artículos

Secciones

Juan C. Pedraza
CBC-UBA

El teorema de Sylvester – Gallai

o cómo alinear árboles en un huerto

> ***Esperaba que fuera un problema sencillo, pero para mi gran sorpresa y desencanto, no pude encontrar una demostración***
>
> ***Paul Erdös***

El trabajo matemático consiste en formular problemas o tratar de resolverlos. En esta tarea, se van desarrollando ideas que prueban ser eficaces en múltiples situaciones. Estas ideas, son para el matemático, como las herramientas para el artesano y, como ocurre con éste, las más simples suelen ser las más potentes.

SOBRE EL QUEHACER MATEMÁTICO Y EL OBJETIVO DE ESTE ARTÍCULO

Hay profesiones difíciles de describir. Todos sabemos (o imaginamos) qué hace un médico, un arquitecto o un colchonero. Pero, ¿qué hace un matemático? ¿No está acaso todo inventado o descubierto en cuestión de números?

Se puede decir que el trabajo de un matemático consiste en formular problemas y/o tratar de resolverlos. La tarea de formular problemas interesantes es tan importante como la tarea de resolverlos. A veces, los problemas que se plantean tienen soluciones sencillas y rápidas. Otras veces quedan largo tiempo sin poder ser resueltos, impulsando el desarrollo de ramas complejas de la ciencia.

En esta tarea de formular y resolver problemas, el matemático va desarrollando estrategias de pensamiento que prueban ser eficaces en diversas situaciones. Estas ideas son para el matemático, como las herramientas para el artesano, donde las estrategias más simples, muchas veces son las más potentes.

En este artículo haremos uso de una de estas herramientas para mostrar una solución a un problema que resistió el ataque de matemáticos célebres, a pesar de tener una formulación simple y de fácil comprensión.

Parte del atractivo de los problemas de formulación simple consiste en suponer que deberían tener una solución igualmente simple. Pero no siempre es así: para algunos, se encuentran soluciones después de mucho tiempo de planteados y empleando poderosas estructuras teóricas o herramientas sofisticadas (tal es el caso del último Teorema de Fermat, formulado en 1637 y resuelto por Andrew Wiles en 1994 en un trabajo de más de doscientas páginas y sólo accesible a un puñado de especialistas; ver [a]); otros permanecen aún sin respuesta. Pero hay problemas que resisten un tiempo considerable el ataque de matemáticos reconocidos y que, de pronto, encuentran una solución elemental y bella. Este es el caso del Teorema de Sylvester – Gallai que presentamos a continuación.

James Joseph Sylvester

Tibor Gallai

EL PROBLEMA. ALINEANDO ÁRBOLES EN EL HUERTO

Don José es dueño de un huerto y tiene ideas muy excéntricas a la hora de plantar árboles en el mismo. Instruye al jardinero Jacinto:

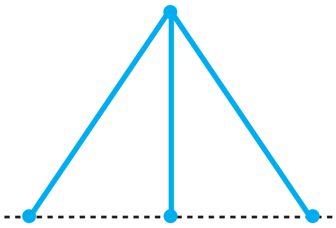
— Plantá los árboles que hagan falta pero procurá que estén alineados de a tres o más árboles.

— Señor, ¿podría colocarlos a todos en una misma línea?

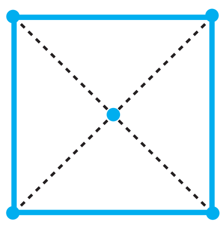
— No Jacinto. Me gustaría un diseño más atractivo. A ver si me explico: no quiero a los árboles todos en una línea, pero cada vez que una línea recta pase por sólo dos árboles, planta otro árbol en esa línea para que haya tres.

Jacinto comenzó su tarea diseñando posibles esquemas para realizar la plantación de árboles. Pronto comprendió que no podría hacerlo sembrando unos pocos árboles. En la *Figura 1* se ven los primeros esquemas de Jacinto en los que ha marcado los árboles con puntos celestes, con el mismo color las líneas con sólo dos árboles y con una línea negra punteada aquellos líneas que contienen tres árboles.

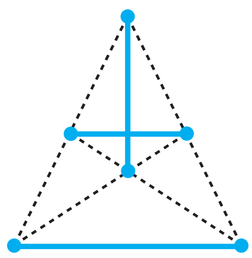
El jardinero observó que, a medida que iba agregando árboles para eliminar una línea con dos árboles, otras nuevas líneas con dos árboles aparecían. A los pocos días, descorazonado, Jacinto presentó su renuncia.



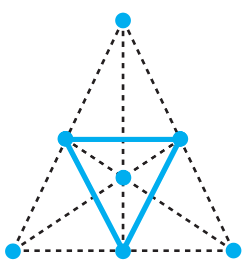
4 árboles



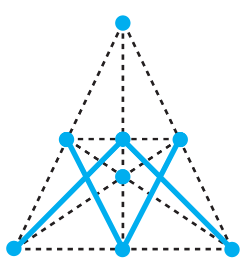
5 árboles



6 árboles



7 árboles



8 árboles

Figura 1

HISTORIA DEL PROBLEMA. MEDIO SIGLO DE INTENTOS

En 1893 James Joseph Sylvester propuso este problema en una revista de Educación [9]. La formulación de Sylvester en forma de pregunta, fue la siguiente:

Considere un conjunto finito de puntos (los árboles) en el plano (el huerto) con la propiedad de que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera contiene a un tercero del conjunto. ¿Deberán todos los puntos estar sobre una recta?

Sylvester, junto con Caley, es considerado padre del álgebra moderna por sus contribuciones a la teoría de matrices y determinantes y en la teoría de invariantes entre otras muchas. Sylvester cumplió un papel importante en el desarrollo de la matemática en Estados Unidos, fundando la *American Journal of Mathematics*, la primera publicación de su clase en América.

Cuando planteó este problema contaba con 73 años y su prestigio estaba extendido por toda la comunidad científica. No hay registro de que haya encontrado una solución al problema. Es destacable (por lo poco frecuente hoy en día) que un matemático de la estatura científica de Sylvester se haya preocupado por la divulgación de problemas interesantes en revistas de educación matemática.

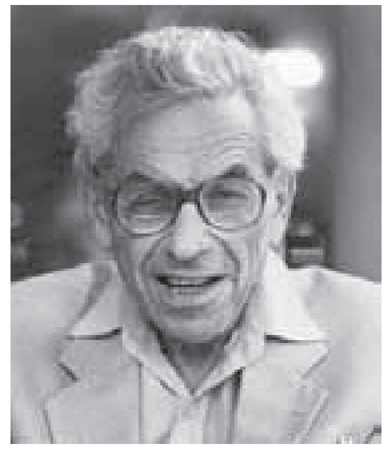
El problema parece haber caído en el olvido hasta que en 1933 otro grande, Paul Erdös, lo rescató en forma de conjetura:

Si un conjunto finito de puntos en el plano no está sobre una línea recta, entonces hay una recta que pasa exactamente por dos puntos del conjunto.

Con su afirmación, Erdös le quita al jardinero de nuestra historia toda esperanza de que pudiera cumplir con el deseo del dueño del huerto.

Paul Erdös vivió entre 1913 y 1996. Nació en Hungría pero nunca residió demasiado tiempo en ningún lugar. Fue un príncipe resolviendo problemas y un verdadero monarca planteándolos. Algunos lo han llamado el “Euler de nuestro tiempo” por la cantidad y calidad de su producción científica. Fue el fundador de lo que hoy conocemos como *matemática discreta*. El prestigio de Erdös se ha difundido de tal manera en la comunidad matemática, que a algunos les gusta presumir sobre su relación con él, citando su “número de Erdös”: una persona que ha publicado en colaboración con Erdös tiene número de *Erdös 1*; alguien que ha publicado con un número de *Erdös 1,* tiene número de *Erdös 2*, etc. Se cuentan más de 450 colaboradores directos (*Erdös 1*). (ver [b]).

Diez años después de formular su conjetura (ignorando que el problema planteado por Sylvester cumplía 50 años), Paul Erdös decidió publicarlo como desafío, en la revista *The American Mathematical Monthly* [4]. Un año después, en 1944, un compatriota suyo, T. Gallai, publicó la primera solución en la misma revista [6]. Años después, en 1982, Erdös publicó: "*Esperaba que fuera un problema sencillo, pero para mi gran sorpresa y desencanto, no pude encontrar una demostración".* Esta confesión en boca de Paul Erdös ha hecho de este problema uno de los emblemáticos de la matemática discreta. Hoy se lo conoce como Teorema de Sylvester – Gallai, en honor tanto del que formuló el problema como del que lo resolvió 51 años después.



Paul Erdös

La solución de Gallai apela a argumentos de geometría proyectiva que escapan al carácter elemental que prometimos en la presentación. Recién en 1948, L. Kelley hace uso de una de esas herramientas simples de las que hablábamos al comienzo y publica una bella demostración del Teorema de Sylvester – Gallai.

LA HERRAMIENTA. EL PRINCIPIO DEL MÍNIMO

La herramienta que utilizaremos es el llamado Principio del Mínimo:

De todo conjunto de números naturales, hay uno que es menor o igual que todos los demás.

Por ejemplo, si consideramos todos los números pares {2,4,6,….} el menor de ellos es 2; si, en cambio, consideramos los múltiplos de 3 con cuatro o más cifras: {1002,1005,1008,….}, el mínimo de este conjunto es 1002.

Como se puede apreciar, el Principio del Mínimo es una "verdad de Perogrullo" y cuesta creer que pueda ser útil para solucionar un problema. Pero lo mismo podríamos pensar de un clavo si no lo viéramos en acción.

EL PRINCIPIO DEL MÍNIMO EN ACCIÓN. PROBLEMA DEL HUERTO INFINITO

Volvamos al huerto y supongamos que el dueño Don José le da una nueva oportunidad al jardinero Jacinto y le plantea un nuevo desafío.

— Mi huerto es tan grande – dice José – que podemos pensar que es infinito. Divídelo en parcelas iguales como un inmenso tablero de ajedrez y planta en cada parcela, una cantidad de árboles que sea igual al promedio de los árboles plantados en las cuatro parcelas vecinas. Trata, eso sí, de que el número de árboles de cada parcela sea lo más variado posible. Es decir no me pongas la misma cantidad de árboles en cada parcela.

— Descuide Don José, procuraré que sea lo más variado que se pueda.

En la *Figura 2*, Jacinto ha plantado en una parcela 5 árboles que resulta ser el promedio de los árboles plantados en las cuatro parcelas vecinas:

$$5 = \frac{7 + 3 + 9 + 1}{4}$$

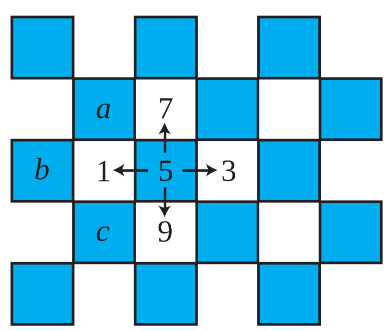
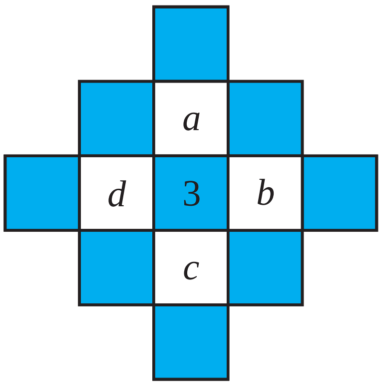


Figura 2

Pero el jardinero, al intentar avanzar en su trabajo, encuentra dificultades insalvables. Por ejemplo, en las tres parcelas señaladas con a, b y c no hay forma de plantar árboles de modo que 1 resulte ser el promedio de los árboles plantados en las cuatro parcelas vecinas pues los 5 árboles de la parcela derecha son demasiados:

$$\frac{5 + a + b + c}{4} > 1$$

Una vez más Jacinto se encuentra en problemas.



3 es el mínimo de árboles plantados por parcela

Figura 3

AYUDANDO A JACINTO.
SOLUCIÓN AL PROBLEMA DEL HUERTO INFINITO

Supongamos por un momento que Jacinto ha logrado su objetivo: cada parcela del huerto infinito tiene un número de árboles igual al promedio de la cantidad de árboles plantados en las parcelas vecinas.

El Principio del Mínimo (y el sentido común) nos asegura que alguna parcela tiene la menor cantidad de árboles. Llamemos a este número mínimo con la letra m aunque, para fijar ideas, pensemos que, por ejemplo $m=3$ (o cualquier otro número). Concentremos nuestra atención en las cuatro parcelas vecinas a esta parcela.

Cada uno de los números a, b, c y d es mayor o igual que el mínimo $m=3$ *(Figura 3)*. Además 3 es el promedio de estos cuatro números. Es decir:

$$m=3=\frac{a+b+c+d}{4}\geq\frac{3+3+3+3}{4}=3$$

Observe que la igualdad solo es posible si $a=b=c=d=3$ ya que si en alguna de las cuatro parcelas plantamos más de 3 árboles el promedio no se realiza. Entonces, la única forma es la indicada en la *Figura 4*.

Pero si nos “paramos” en la parcela “a” y repetimos el mismo razonamiento, obtenemos que sus vecinos también tienen que tener 3 árboles *Figura 4*.

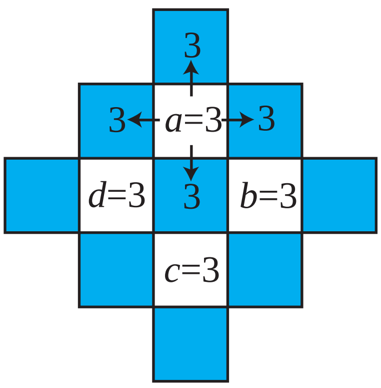


Figura 4

Así podemos recorrer todo el huerto y concluir que la única forma de satisfacer el deseo de Don José, es plantar la misma cantidad de árboles en cada parcela (3 o cualquier otro número).

El Principio del Mínimo tiene una versión aún más simple:

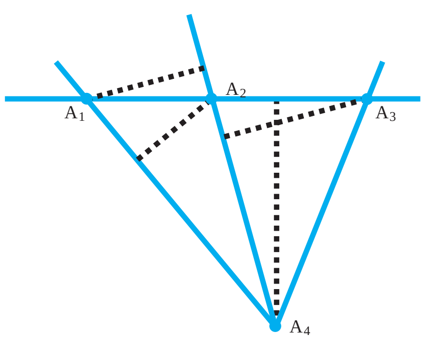
> *En todo conjunto finito de números hay uno que es menor o igual que todos los demás.*

y es ésta la herramienta que usaremos a continuación para dar una demostración del Teorema de Sylvester – Gallai.

LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA O LOS DESEOS IMPOSIBLES DE DON JOSÉ

Recordemos que el dueño del huerto pretendía ubicar los árboles en su huerto de manera que cada línea recta que pasara por dos árboles también pasara por un tercer árbol. De la misma forma que en el *Problema del huerto infinito*, supongamos que el jardinero se ha salido con la suya y ha logrado ubicar una cantidad de árboles de manera que cada línea recta que pasa por dos árboles pasa, en realidad por tres o más árboles ([1]). Recordemos además que no están todos en una misma línea recta.

Dibujamos en el huerto los árboles plantados y las líneas que pasan por dos o más árboles. Desde cada árbol, calculamos la distancia a la línea trazada más cercana. Por ejemplo, para cuatro árboles la *Figura 5* muestra esta situación.



Distancias de los árboles a la recta más cercana

Figura 5

Habrá una de estas distancias que es menor o igual que el resto de las distancias calculadas. (En la *Figura 5* ésta distancia mínima es la que va del árbol A_2 a la recta que pasa por A_1 y A_4).

Concentremos la atención en esa distancia mínima (*d* en la *Figura 6*), en el árbol (A en la *Figura 6*) y en la recta más cercana que estamos suponiendo tiene tres o más árboles (A_1, A_2 y A_3 en la *Figura 6*). La *Figura 6* esquematiza todas las situaciones que se pueden presentar

Vemos que cualquiera sea la posición de los tres árboles sobre la recta, siempre encontramos una distancia *r* (de A_2 a una recta del huerto) que es menor que *d*, contradiciendo que d es la menor. Debe entonces haber una recta con sólo dos árboles.

1 He aquí otra de las estrategias del matemático: suponer el problema resuelto y razonar en consecuencia.

En otras palabras, es imposible acceder a los deseos de Don José y como nos gusta decir a los matemáticos, el Teorema de Sylvester – Gallai queda demostrado, o mejor aún **Q.e.d.**

UN PROBLEMA INTERESANTE O LA REVANCHA DEL JARDINERO

El Teorema de Sylvester – Gallai admite muchas generalizaciones [1]. Nos detendremos un momento en la que me parece más interesante y que me permite plantearle al lector un desafío, cumpliendo, de alguna manera ese doble rol del matemático que comenté al comienzo: no sólo resuelve, sino plantea problemas.

El Teorema de Sylvester – Gallai dice que, plante como plante los árboles Jacinto, siempre habrá una línea recta que pasa por sólo dos árboles (salvo que estén todos alineados). A tal línea recta la llamaré *recta de Erdös* (en la literatura se la llama *recta ordinaria* pero me gusta más *recta de Erdös*). Así podemos enunciar el teorema diciendo que dado un conjunto finito de puntos en el plano no alineados siempre hay una recta de Erdös.

Si observamos nuevamente los primeros intentos del jardinero (*Figura 1*), vemos que en todos ellos hay tres o más rectas de Erdös. Cabe preguntarse pues, cuál es la cantidad de rectas de Erdös que hay cuando son n los puntos no alineados en el plano.

Este problema se viene estudiando desde los años ´50. La primera conjetura que se formuló aseguraba que la cantidad de rectas de Erdös es, por lo menos $n/2$. Pero esta conjetura falla cuando n=7 (ver *Figura 1*) y también cuando n=13. En 1958 Kelley y Moser [8] prueban que tal cantidad es por lo menos $3n/7$. En 1993, Csina y Sawyer [3] mejoran la estimación, probando que hay por lo menos $6n/13$ rectas de Erdös. Las demostraciones de estos hechos no son elementales.

El desafío que le proponemos al lector lo llamaremos *La revancha del Jardinero* y se puede enunciar así:

> *Si un conjunto finito de puntos no está sobre una línea recta, entonces hay por lo menos tres rectas de Erdös, es decir, rectas por la que pasan exactamente dos puntos del conjunto.*

Esperamos que el lector interesado pueda encontrar una prueba bella de este hecho. Hasta donde sé no hay demostraciones generales y elementales de este resultado. Usted puede dar la suya.

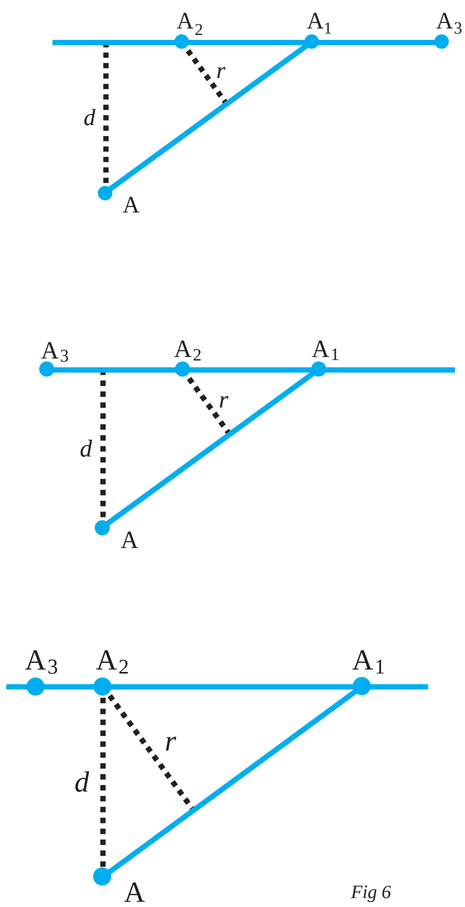


Fig 6

PROBLEMAS DE DESPEDIDA

Hemos dicho al comienzo que hacer matemática es formular y resolver problemas. Podríamos agregar que matemática se aprende haciendo matemática.

Mostramos la potencia de una herramienta simple para resolver uno de los problemas emblemáticos de la matemática elemental (ver [10]) y presentamos un problema que, está a la espera de una solución bella (si fuera posible).

A modo de despedida y para ser consecuente con lo dicho, le proponemos al lector dos problemas donde el Principio del Mínimo, una vez más, puede ser una herramienta eficaz.

UN HUERTO NO TAN GRANDE

Pensemos que el huerto de Don José ha sido dividido en 64 parcelas (8x8) como si fuera un tablero de ajedrez. En cada parcela debemos plantar una cantidad de árboles que sea el promedio de los árboles plantados en dos parcelas vecinas cualesquiera (en la *Figura 7* hay algunos ejemplos).

Se quiere, como en el *Problema del huerto infinito*, que la cantidad de árboles sea lo más variada posible. En aquel problema sólo se podía resolver si se colocaba la misma cantidad de árboles en cada parcela. ¿Será posible lograr mayor variación en la cantidad de árboles por parcela? (ver [5])

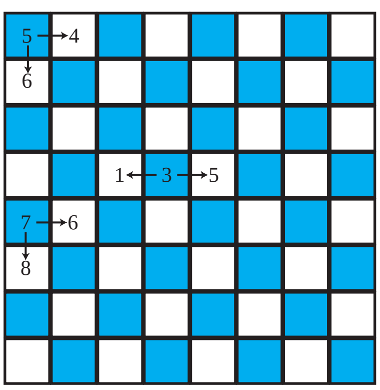


Figura 7

Gabinete inspirado en la solución de Duijvestijn construído por Bob Mackay. A la derecha, la solución alcanzada por Duijvestijn en 1978.

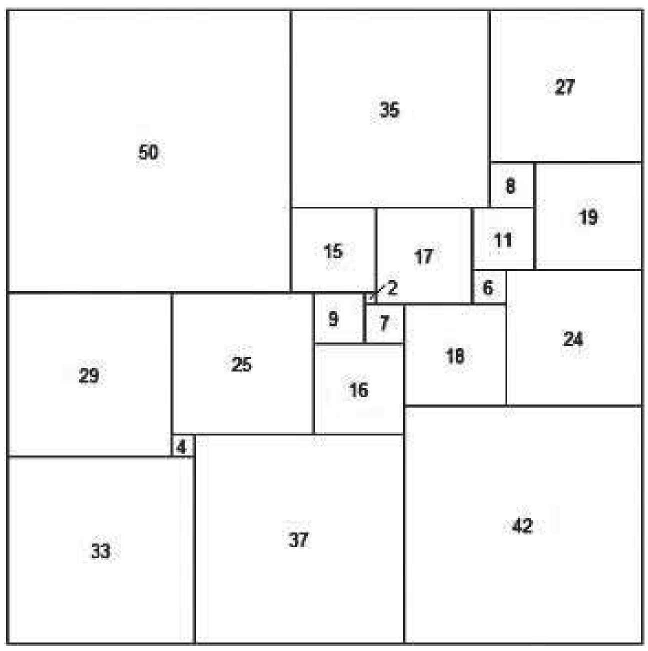
EL ROMPECABEZAS EN 3D IMPOSIBLE

En 1936, cuatro estudiantes del legendario Trinity College de Cambridge, se propusieron el problema de dividir un cuadrado en cuadraditos todos distintos entre sí. En 1939 Roland Sprague encontró una solución. Se presentó el problema de encontrar una descomposición del cuadrado usando la menor cantidad de cuadraditos (siempre distintos entre sí). En 1978, Duijvestijn encontró una descomposición usando 21 cuadraditos. Unos años antes se había probado que no había descomposiciones con 20 o menos cuadraditos. Este problema de formulación simple, permaneció abierto durante 42 años y para su solución hubo que apelar a potentes programas de computación.

El problema que le proponemos al lector es probar que lo que es posible en el plano para el cuadrado, es imposible de lograrlo en tres dimensiones con un cubo. Más precisamente:

No es posible armar un cubo con un número finito de cubos diferentes entre sí.

Espero que el lector pueda experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo en la solución de estos problemas. (Ver [2], [7])



BIBLIOGRAFÍA

[1] Abrego Lerma, B. *El Teorema de Sylvester.* Miscelánea Matemática. Nro 23(1996).

[2] Alsina, C. *Sorpresas Geométricas*. Red Olímpica (2000).

[3] Csina, J. – Sawyer, E. *There exist* 6n/13 *ordinary points.* Disc. and Comput. Geom. 9, 187 – 202 (1993)

[4] Erdös, P. *Problem 4065.* American Mathematical Monthly 50, 65. (1943)

[5] Fauring, P. – Gutiérrez, F. *Olimpíada Matemática Argentina. Problemas 7*. Red Olímpica (1997).

[6] Gallai, T. *Solution to Problem 4065.* American Mathematical Monthly 50, 169-171. (1944)

[7] Honsberger, R. *El ingenio en las matemáticas.* La Tortuga. Nro. 4 (1984).

[8] Kelley, L. – Moser, W. *On the number of ordinary lines determined by* n *points.* Canad. J. of Math, 10: 210 – 219 (1958)

[9] Sylvester, J.J. *Mathematical Question 11851.* Educational Times 59, 98. (1893)

[10] Ziegler, G. – Aigner, *Proof from The Book*. Springer – Verlag (1998).

LECTURAS RECOMENDADAS

[a] S. Singh. El último teorema de Fermat. Editorial Norma (1999).

[b] P. Hoffman. El hombre que sólo amaba los números. Paul Erdös. Ediciones Granica (2000).

Juegos numéricos

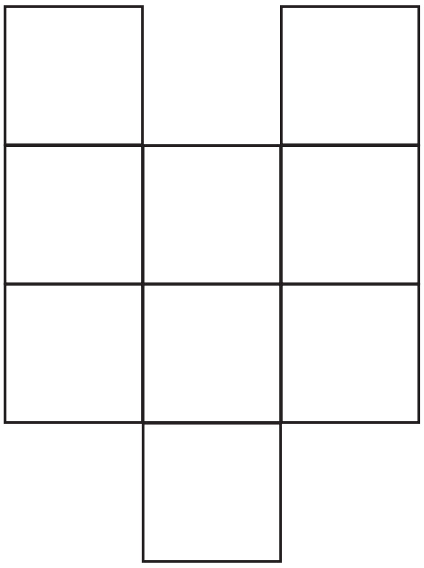
“Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento.”

George Polya

Múltiplos vecinos

Cada casillero representa una casa donde vive una familia del barrio Multi. No hay dos familias que tengan la misma cantidad de miembros. Además, dos familias vecinas (que viven en casas adyacentes) tienen un número de miembros que es uno múltiplo del otro.

El desafío es ubicar en cada casillero la cantidad de personas que viven en esa casa, respetando las condiciones de arriba y tratando que la totalidad de los habitantes del barrio Multi sea la menor posible.



4		1
12	3	9
2	6	18
	24	

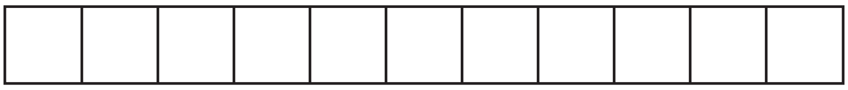
Ejemplo:

En el siguiente ejemplo ubicamos 79 habitantes (4+1+12+3+9+2+6+18+24=79) en el barrio Multi. Hay ejemplos con menos habitantes.

Envianos tu solución.

Cadena de divisores

Hay que elegir 11 números distintos, del 1 al 13 y ubicarlos en el tablero de forma que cada número sea un múltiplo o un divisor del número anterior. Hay más de una solución.

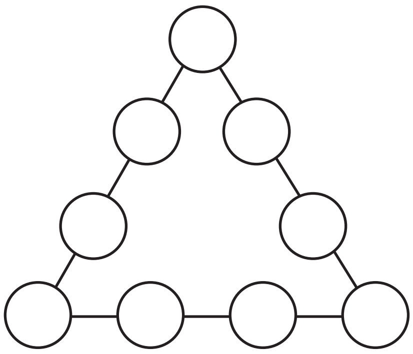


Triángulo mágico

Hay que ubicar los números del 1 al 9, sin repetir ninguno, en los casilleros circulares.

El objetivo es lograr que la suma de los números ubicados en cada uno de los tres lados sea siempre la misma.

¿Qué sumas son posibles de conseguir en los lados?



Vacío neumático

Agustín Rela
CBC-UBA

La idea del vacío, a veces extraña, inquietante o confusa, fue discutida e incomprendida hasta que Evangelista Torricelli y Vicenzo Viviani comprendieron en el siglo XVII que hacer el vacío no es tirar del aire, sino dejar de empujarlo.

Ante la interesada mirada del perro y la indiferencia de clérigos y dignatarios, Étienne Perier, cuñado de Blaise Pascal, mide la presión atmosférica en la cima del Puy de Dôme.

QUÉ ES EL VACÍO

Hemos acotado, desde el título, el significado de la palabra. Para la neumática, o estudio de los gases, el vacío es la ausencia de aire u otro gas. El diccionario de nuestra lengua recoge, sin embargo, otros sentidos usuales en diversos ámbitos:

vacío, a. (Del lat. vacīvus).

1. adj. Falto de contenido físico o mental.

2. adj. Dicho de una hembra: Que no puede tener cría.

3. adj. Dicho de un sitio: Que está con menos gente de la que puede concurrir a él.

4. adj. Hueco, o falto de la solidez correspondiente.

5. adj. Vano (arrogante, presuntuoso).

6. adj. p. us. Vano, sin fruto, malogrado.

7. adj. p. us. Ocioso, o sin la ocupación o ejercicio que pudiera o debiera tener.

8. m. Concavidad o hueco de algunas cosas.

9. m. Cavidad entre las costillas falsas y los huecos de las caderas.

10. m. Abismo, precipicio o altura considerable.

11. m. Movimiento de la danza española, que se hace levantando un pie con violencia y bajándolo después naturalmente.

12. m. Falta, carencia o ausencia de alguna cosa o persona que se echa de menos.

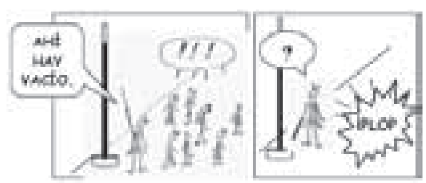
13. m. Fís. Espacio carente de materia.

14. m. desus. vacante (cargo sin proveer).

Al vacío.

1. loc. adj. Dicho de una forma de envasar: Sin aire. U. t. c. loc. adv.

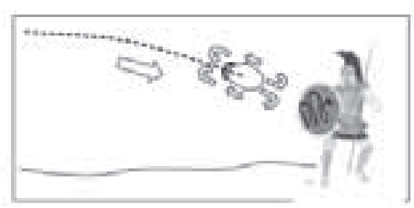
Sólo esta última expresión, *al vacío*, coincide con la nuestra, aunque la número 12, la física, se acercaría bastante si no fuera porque al hablar de materia en general y no de gases específicamente, a veces se la interpreta de una manera rígida. Hay quienes entienden, por *espacio carente de materia*, una escasez tan absoluta de cosas que no sólo queda excluido el aire; tampoco habría un recipiente que impida su ingreso; ni luz para observar; ni astros, gravedad u otros campos; no habría nada de nada, ni siquiera un observador. Y según esa idea, el vacío implicaría también la ausencia de un espacio en el que se pueda manifestar. Ésta última fue, justamente, la interpretación de Aristóteles, para quien el vacío era, por eso, una contradicción.



Vacio Fundamentalista

VACÍO ABSOLUTO VERSUS PLENO

Para Aristóteles, toda porción del espacio estaba ocupada por materia. Esa idea del pleno, opuesta a la del vacío, armonizaba con su mecánica, según la cual para que un cuerpo se mantuviese en movimiento era necesaria una fuerza. La física actual, con su principio de inercia introducido por Galileo en 1638, acepta en cambio que aún cuando no actúe ninguna fuerza, un cuerpo puede permanecer en movimiento, en este caso recto y de velocidad constante.



Explicación aristotélica del movimiento de un proyectil. El aire desplazado vuelve y empuja por atrás a la piedra para que siga avanzando.

Si Aristóteles hubiera aceptado, como otros filósofos de su época hace dos mil trescientos años ([1]), que el vacío es posible, le habría resultado inexplicable el movimiento de los astros, que imaginaba transmitido por esferas materiales; o el de un proyectil, porque el sabio sostenía que una piedra continuaba moviéndose una vez abandonada por la mano que la lanzó y le hacía fuerza, porque el aire desplazado le dejaba sitio adelante, iba hacia atrás, daba la vuelta y la empujaba ([2]).

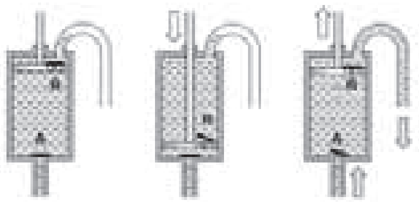
1 Demócrito (460 al 370 adC) y su maestro Leucipo (415 al 370 adC) sostenían la existencia de átomos de materia que se mueven en el vacío. Asombra la similitud de esa especulación sin base experimental, con parte de las ideas actuales físicas y químicas; aunque quizá vacío y átomo tuvieran entonces significados distantes de los de hoy.

2 La física actual retorna a la imposibilidad de un vacío absoluto. En ausencia de luz y otros campos, y en el cero absoluto de temperatura, existe la energía del punto cero. Se ha logrado medir la fuerza de Casimir, una verdadera fuerza de la nada asociada con el vacío cuántico o mar de Dirac. Así, el vacío absoluto no existe ni siquiera en ausencia de toda materia ordinaria. Pero la densidad de esa falta de vacío absoluto es insignificante frente a la de los gases residuales del mejor vacío que exista en un laboratorio, o en el espacio intergaláctico.

AGUA EN POZOS PROFUNDOS

A los mineros del siglo XVI les intrigaba la imposibilidad de succionar agua desde más de diez metros y medio de altura, y no porque las bombas careciesen de potencia suficiente; sino por un efecto propio de esa longitud de columna de agua, y mayores.

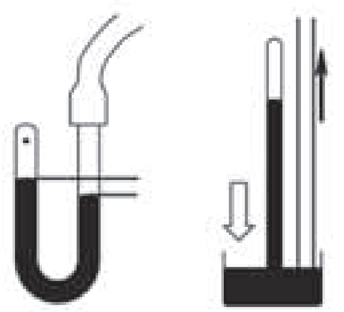
Galileo experimentaba con gente de pueblo; mineros, trabajadores del vidrio y artesanos. Quizás aquella práctica en contra de la tradición científica le valió también odios, como los que despertaban sus ideas heliocéntricas



Cuando el pistón baja, la válvula A se cierra; B se abre y deja pasar el agua. Al subir (ahora), B se cierra y el pistón expulsa el agua; la válvula A se abre y deja entrar más líquido. Pero eso sólo extrae agua que esté a menos de diez metros y medio de profundidad.

Se interesó mucho en el límite de profundidad del bombeo por succión, pero no lo pudo explicar. Cometió el error de todos, de creer que el pistón de la bomba tira del agua hacia arriba, y que ésta no es lo bastante resistente a la tracción para acompañarlo, tal como un alambre o columna de mármol colgante se rompe cuando, de tan largos, sus pesos exceden cierta fuerza que son capaces de sostener. Si la columna, de tan larga –decía–, pesaba más que lo que podía soportar la sección del caño, aquélla se rompía. ([3]) Pero ¿por qué la columna de agua rota se quedaba ahí cerca, y no caía al fondo de la mina? Galileo no respondió esa pregunta. Y tampoco se la hizo. Se interesó, en cambio, en la resistencia de los materiales, campo en el que hizo avances tan notables como en cinemática. Así nacieron sus célebres *Diálogos: Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos nuevas ciencias*.

Es de Galileo la idea de los *ignícoli*, unas supuestas partículas invisibles que separan las partes de un sólido cuando éste se funde. Y de sus contemporáneos, los *funículi* (en latín, *funicula ([4])*), unos supuestos alambres invisibles en tensión, que unían el pistón de una bomba con la parte superior de la columna de agua fragmentada.



Medidor de vacío en U. En el espacio marcado con un punto hay vacío. El desnivel mide, en unidades torr, o milímetros de mercurio, la presión en el tubo flexible. Una atmósfera equivale a 760 torr, o 101.300 pascales. Un pascal es un newton por metro cuadrado. Y 9,81 newtons equivalen a un kilogramo de fuerza.

SOLUCIÓN DEL ENIGMA

El joven Torricelli (1608-1647), tras la muerte de su maestro Galileo, se dio cuenta de que vivimos en el fondo de un mar de aire que ejerce una fuerza de unas diez toneladas por cada metro cuadrado, aquí abajo. Es la que hace subir el agua por el tubo de succión de una bomba cuando se quita el aire que la empuja por el otro extremo.

El barómetro (en griego, medidor de presión) se basa en el mismo efecto. En un tubo cerrado lleno de mercurio ([5]), invertido sobre una cubeta, el líquido alcanza una altura de 760 milímetros. Su peso vale lo mismo que el de una columna de aire de igual grosor, y alta como la atmósfera.

---

3 Era un rasgo típico de Galileo cambiar de interés durante el curso de las investigaciones. (Quizás eso era parte de su genialidad.) Estudió la aceleración de una bola que rodaba sobre un plano, y el valor que midió contradijo sus expectativas. Pulió la bola, puso la tabla de canto para que no se curvase, la forró de fino pergamino, y persistió la diferencia. Intuyó, genialmente, que el efecto que le incomodaba tenía que ver con la rotación de la esfera mientras caía. (Hoy sabemos que el factor de corrección vale cinco séptimos.) Cambió el plano inclinado por un péndulo, para que la bola girase menos, ...y abandonó ese estudio ¡porque descubrió la constancia de las oscilaciones de un péndulo! Eso le permitió inventar el *horologium*, o reloj. El primer viaje a América fue un siglo antes de ese hallazgo; de otro modo Colón habría sabido por qué meridiano estaba navegando, en vez de hacer casi todo su viaje prácticamente a ciegas.

4 *Funiculi, funiculà* es la famosa canción de Peppino Turco y Luigi Denza con la que se festejó en 1880 la puesta en servicio en el Vesubio de su primer funicular o carro en riel de alambre. Richard Strauss la plagió después involuntariamente, y debió pagar derechos.

5 Algunos dicen que usó mercurio en vez de agua, cuya densidad es 13,6 veces menor, para poder hacer el experimento en privado y no exponerse a que lo acusaran de brujería.

EL ARTE SE ANTICIPA A LA CIENCIA

La sensibilidad artística a veces antecede en decenas y hasta centenares de años el conocimiento científico; otras lo sigue y refuerza.

“El aire es tanto más o menos grueso, cuanto más o menos próximo de la tierra sea; y así estando cerca de la tierra la vista y el objeto, entonces lo grosero del aire interpuesto alterará mucho el color que tenga éste. Pero si ambos se hallan muy elevados y remotos de la tierra, como ya es el aire muy delgado y sutil, será poca la variación que reciba el color del objeto” ([6]) Se cree que Leonardo usó en su arte ideas mucho más antiguas que las propias: “Cuanto más cercano a la tierra está el aire, más denso es.” Así lo había escrito Séneca ([7]) (4 aC - 65 dC) hace casi veinte siglos. En las obras de este filósofo hay también referencias a la teoría atómica y a la electricidad.

Con todo, es curiosa la clara noción de la atmósfera, y de su densidad variable con la altura, que tenía Leonardo da Vinci (1452-1519), más de un siglo antes del trabajo de 1643 de Evangelista Torricelli, considerado el descubridor de la atmósfera.

CHURRO ALIENÍGENA

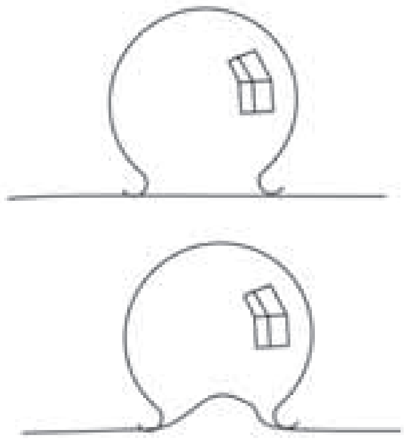
En la película Alien Resurrection (Jean-Pierre Jeunet, 1997) la navegante Ripley arroja una gota de su corrosiva sangre a una escotilla; el vidrio se perfora y el vacío del espacio succiona con violencia a un monstruo hermano de ella (resultado de un experimento espantoso), que pasa hecho papilla por el agujero. Esa escena, aparte de exagerada y fantástica, contiene un error conceptual. No importa cuán intenso sea el vacío; aun si fuera absoluto y perfecto, su presión valdría cero, pero nunca tendría un valor negativo. Por eso, la única fuerza que hizo pasar al monstruo por el orificio fue la generada por la presión de la cabina, no muy diferente de un kilogramo por centímetro cuadrado, puesto que estaba acondicionada para el viaje de humanos. Para extrudir un churro hace falta una presión cinco o diez veces mayor.

En una fábrica de artículos de plástico probaban una bomba de vacío nueva que habían comprado, muy grande y poderosa. El técnico que la puso en marcha colocó su dedo en la boca de succión para saber si andaba, y los presentes se abalanzaron para impedírselo, alarmados, en la creencia de que sería chupado con violencia o pudiera sufrir heridas. Eso ilustra nuestra tendencia a considerar el vacío, erróneamente, como una fuerza de atracción.

6 Ésa y otras notas de Leonardo fueron ordenadas por su discípulo Pablo Melzi en una colección que llamó Tratado de la pintura, a su muerte abandonado, desmembrado y perdido en parte, hasta que el Vaticano lo reunió en el Códice Urbino.

7 A pesar de la donación de sus bienes al Estado y de haber escrito una obra laudatoria sobre Nerón, éste lo condenó a muerte por sospecha de traición. “*Decretó una vez el Senado que los esclavos se distinguiesen de los libres en el vestido; inmediatamente se vio el peligro que amenazaba si nuestros esclavos empezaban a contarnos.*” Esta frase del filósofo es una muestra de lo incómoda que era su filosofía para el poder:

VENTOSAS TERAPÉUTICAS



Hasta mediados del siglo pasado el resfrío era muy común. (A los niños se les decía mocosos.) En los lugares públicos había salivaderas y carteles que ordenaban usarlas para cuidar la higiene del suelo. Quizás el uso generalizado del sombrero o la gorra en ese tiempo tuviera que ver con la necesidad de proteger la cabeza del frío y mantener así más altas las defensas.

Como remedio casero para combatir el pasmo, se aplicaban ventosas con vasos o tazas, o más profesionalmente, con recipientes especiales de vidrio de bordes redondeados que vendían en las farmacias. Se calentaba el aire del interior de la ampolla con un unas gotas de alcohol o un hisopo encendidos, y se apoyaba sobre la espalda del paciente untada con aceite para que el borde sellase bien contra la piel. Cuando el aire se enfriaba, en el interior disminuía la presión, y así la atmósfera, que actúa en todo el resto del cuerpo, empuja la dermis hacia el interior de la ampolla.

El efecto curativo se daba por la dilatación de los vasos capilares y la mejora de la irrigación sanguínea local. Durante algunas horas quedaban unas marcas como de besos fuertes ([8]), y hasta hematomas a veces. La práctica cayó tan en desuso como la de tirar del cuerito, de utilidad semejante, aunque aún se vendan equipos con copas de plástico conectadas a una pequeña bomba de succión de motor eléctrico.

CHUPONES DE PULPO

El ataque –o defensa– de un pulpo de las profundidades puede causar heridas graves. Las ventosas de esos moluscos a veces arrancan trozos de piel. Lo que llamamos fuerza de succión no es otra cosa que la falta de toda fuerza. Es la presión de la atmósfera, sumada a la de la columna de agua a la profundidad de buceo, la que empuja la carne del lado opuesto a la ventosa del animal. Por cada diez metros de descenso se experimenta una atmósfera extra de presión. A treinta metros de profundidad el agarre máximo de un pulpo cuadruplica el de superficie.

CLIMA ENRARECIDO

El aire enrarecido, como el de las alturas, o el de las ampollas curativas, es aire falto de densidad. Raro significa escaso, como cuando se habla, por ejemplo, de una rara virtud. Sin embargo es cada vez más frecuente que se emplee el término en el sentido opuesto, como si se significara no la falta de aire, sino la presencia de gases tóxicos o molestos. Éste, el inverso, es el uso más habitual en las metáforas físicas del discurso político.

8 La depresión que se puede hacer con la cavidad bucal es de aproximadamente media atmósfera, sobre una máxima teórica de una. (Ni siquiera Superman, con su mítica súper succión, podría drenar un valle inundado desde una altura superior a los diez metros y medio sobre el nivel del líquido).

Intrigas neumáticas

¿Error conceptual de diseño en los extractores eólicos?

Entre los diversos modelos de extractores eólicos, algunos impulsan un ventilador de eje vertical de aspas horizontales; otros en cambio carecen de aspas extractoras, y sus partes se reducen a las visibles.

Pero ¿son más efectivos que una simple abertura en el techo?

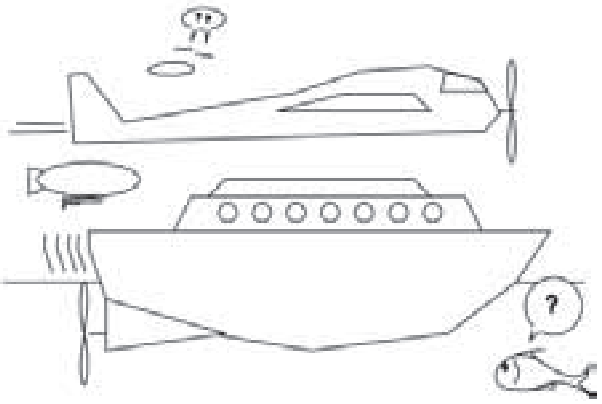
El efecto Bernoulli consiste en una disminución de la presión de un fluido en la parte de su recorrido en la que tiene mayor velocidad. Entonces, como el aire exterior se desplaza y el del interior del edificio está prácticamente quieto; hay una diferencia de presión que bastaría para la extracción, sin necesidad de mecanismos móviles que en vez de aportar la energía del viento, al contrario la disminuyen un poco, por el rozamiento.

Posiblemente una simple abertura techada tendría la misma eficacia, o mayor, al evitar todo obstáculo a la circulación. Pero esos aparatos se ven instalados en todo el mundo. ¿Se habrán hecho mediciones en túneles de viento, o en condiciones reales? ¿Realmente sirven? ¿Hay algo que se nos escapa? ¿Alguien puede aportar datos?

Respuesta: Pendiente.

¿Por qué los aviones tienen la hélice adelante, y los barcos atrás?

(Demos una pista: los dirigibles, a pesar de que son vehículos aéreos como los aviones, tienen la hélice atrás como los barcos.)



Respuesta: Los barcos flotan en el agua, mientras que los aviones no flotan en el aire; se mantienen en él por efectos dinámicos. Si se pusieran las hélices (y los pesados motores de explosión) en la parte de atrás de los aviones, quedarían desequilibrados, porque la sustentación de las alas tiene que estar más o menos en el centro de gravedad de la nave. Con los motores atrás habría que atrasar las alas, y quedaría un avión muy narigón e inestable. En cuanto a los barcos, si bien es cierto que podrían tener la hélice y el motor en otro sitio, parece razonable ponerlos donde la turbulencia que genera la hélice quede atrás y no afecte al casco. Por otra parte, en las lanchas veloces conviene que la proa quede algo levantada para tener un ángulo de ataque positivo contra el oleaje.

Carlos Borches
CBC - UBA

Hay libros que se dejan leer de un tirón y otros que se resisten. Entre estos últimos, algunos son portadores de ideas oscuras y escurridizas, y en otros casos es el autor quien madura durante años su obra y atrapa a los lectores con entregas parciales que reclaman su continuación.

De todas formas, que un libro escrito hace más de dos mil años nos sorprenda con novedades es por cierto un hecho extraordinario, y es la historia de un mohoso ejemplar que arriba al siglo XXI después de superar incendios, saqueos, robos, borrados parciales y las pinceladas de un falsificador mientras, a su alrededor, trascurrían las cruzadas, nacían y se derrumbaban imperios y los nazis sembraban el terror por el viejo continente.

Arquímedes siempre vuelve

EN UN RINCÓN DE SIRACUSA

La evolución de la matemática encontró en el mundo griego un salto fenomenal. Si bien es cierto que existían importantes desarrollos matemáticos previos, en la mayoría de los casos se reducían a un conjunto de resultados y procedimientos prácticos presentados como colecciones de problemas y sus correspondientes soluciones.

Pero en Grecia se cocinaba algo distinto. "El ser y el pensar son la misma cosa (…) Mira firmemente a las cosas que, aunque lejos, están sin embargo presentes en tu mente", cantaba Parménides, y quienes podían entenderlo salían corriendo para tratar de comprender al mundo a través de la razón, despreciando a las "masas indecisas" condenadas al uso de los sentidos. Estaban desarrollando un punto de vista distinto, donde la lógica era la herramienta exclusiva para llegar a la verdad, y la geometría un magnífico escenario para lucir la fuerza de la razón.

Pero esta revolución intelectual contenía una trampa, un *corset* que se ajustaba firmemente sobre la creación matemática cada vez que alguien quería apartarse del esquema clásico. "En todas las ciencias llamadas matemáticas, como en pulidos y lisos espejos, aparecen huellas e imágenes de la verdad de las cosas inteligibles, pero sobre todo en la geometría principio y metrópolis de las demás, que eleva y dirige la mente, como liberada y purificada de la sensación. Por ello también el propio Platón reprochó a Eudoxo, Arquitas y Menecmo, que se empeñaban en trasladar la duplicación del cubo a medios instrumentales y mecánicos al margen de la razón; pues así se perdía y destruía el bien de la geometría, que regresaba de nuevo a las cosas sensibles y no se dirigía hacia arriba", contaba Plutarco justificando el reproche platónico.

Pero el rigor que la Academia Platónica irradiaba desde Atenas y luego desde Alejandría comenzó a ser cuestionado por la periferia. En Siracusa, unos doscientos años antes de la Era Cristiana, Arquímedes no tenía empacho en demostrar teoremas a la usanza tradicional al tiempo que construía máquinas. Era una permanente fusión: usar la matemática para describir un problema físico y la física para obtener resultados matemáticos, desprendiendo lo que hoy llamaríamos producción de tecnología. Algo que habría desencadenado un síncope cardíaco en el rigorista de Platón.

Se sabe que la biblioteca de Alejandría recibió muchos de los trabajos "teóricos" de Arquímedes. Los expertos de la época quedaron asombrados con las proporciones que expresaban los volúmenes y áreas de esferas y otros cuerpos novedosos. Había estimaciones del valor de π, e incluso problemas relacionados con cuerpos en equilibrio donde la geometría aparecía como el lenguaje natural de la realidad. En ocasiones, Arquímedes mandaba a Alejandría sólo los resultados geométricos para ver si alguno era capaz de encontrar una demostración, pero se imponía una pregunta ¿Cómo llegó Arquímedes a esos resultados?

La duda flotaba en el ambiente alejandrino hasta que Eratóstenes recibió correspondencia de Siracusa. "De Arquímedes a Eratóstenes, ¡Salud!", se leía en la primera línea del rollo.

En esa época se escribía todo con mayúscula y de corrido. Imaginemos que Eratóstenes avanzó en la lectura, donde el siracusano le recordaba los enunciados enviados y adelantaba que ahora iban las demostraciones, y luego aparecía una advertencia reveladora: "he creído conveniente exponerte por escrito e ilustrarte en este libro la particularidad de un método según el cual te permitirá captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos" Eratóstenes tenía en sus manos un texto que se adelantaba muchos siglos en el desarrollo de la ciencia.

Desde el presente podemos preguntarnos ¿Qué impacto tuvo El Método a lo largo de la historia de la Ciencia? Prácticamente ninguno. ¿Qué opinaron de él Eratóstenes y sus colegas? Casi no hay referencias, y las pocas están más relacionadas con los resultados expuestos que con el método. ¿Cuáles fueron los juicios sobre El Método de parte de personajes de la talla de Tartaglia, Leonardo, Galileo, Newton o Fourier? Ninguno, porque el libro estuvo perdido para todos los protagonistas de la Revolución Científica.

EL MUNDO SE DERRUMBA Y NOSOTROS HACEMOS MATEMÁTICA

El texto original que Arquímedes le envió a Eratóstenes estaba escrito sobre un rollo de papiro, el papel de la época fabricado con los tallos de la planta acuática homónima, muy abundante en el delta del Nilo. Se podía escribir de un solo lado y se enrollaba alrededor de un soporte de madera. Para tener una idea: el papiro de Rhind (una colección de problemas matemáticos egipcios del s. –XVII que actualmente se conserva en el Museo Británico) mide 33 centímetros de ancho por 6 metros de largo.

Sabemos que Eratóstenes recibió el trabajo de Arquímedes y seguramente hizo una copia que fue guardada en la Biblioteca de Alejandría, tal como se desprende del testimonio de Herón, autor de un trabajo relacionado con la arquitectura, escrito durante el siglo I de la Era Cristiana.

Pero el mundo había comenzado a cambiar. Por un lado, una nueva tecnología remplazaba al papiro: el pergamino. Este nuevo soporte de la escritura se fabricaba con la piel de res. Era más flexible, durable y por si fuera poco estaba mejor adaptado a las nuevas condiciones políticas.

El centro político del Mediterráneo se había trasladado a Roma donde el clima húmedo atentaba contra la duración de los papiros. La solución vino de los talleres de la ciudad de Pérgamo, haciendo con el papiro lo que los *CDs* hicieron con los *cassettes*. Al principio, los pergaminos siguieron con el mismo formato de los imponentes rollos de papiros, hasta que alguien tuvo la brillante idea de aprovechar las características del material y empezó a escribir de los dos lados, lo que seguramente motivó que se abandonara el formato de rollo para cortar al papiro en piezas rectangulares más chicas atadas entre dos tapas de madera, que llamaron códice (codex), que no es otra cosa que el padre de nuestros libros.

Los bibliotecarios y archivistas tiemblan con cada cambio de soporte. La mudanza de un formato a otro implica muchas horas de trabajo y el riesgo de pérdidas de información, errores de copiado, etc. Para el siglo IV, un ejército de copistas había terminado la tarea. El *codex* reinaba en esto de conservar la palabra escrita y todo lo que interesaba se había mudado a los códices. Pero, ¿La matemática interesaba?

Como suele suceder, los cambios tecnológicos van en línea con los cambios políticos. Así como Roma fue promotora de la mudanza del papiro al pergamino, la Iglesia encontró en el códice una buena oportunidad para tomar distancia de sus orígenes judíos, cuyos libros estaban afectivamente ligados a los rollos. Cuando los ejércitos de amanuenses estaban al servicio de Roma todo libro merecía una copia en la capital del Imperio. Pero al llegar la Iglesia al poder, su objetivo estaba más ligado a preservar y difundir en los códices su propia cosmovisión. De esta manera los saberes del mundo griego ya no tenían un lugar seguro en el nuevo mundo de la Roma cristiana, a excepción de dos obras que en toda biblioteca que se preciara debían estar: los poemas homéricos y los Elementos de Euclides.

La voz de Eutocio de Ascalón nos llega desde el siglo VI denunciando lo difícil que era encontrar libros de Arquímedes sanos y sin errores de los copistas. Eutocio contribuyó a preservar el pensamiento de Arquímedes editando versiones comentadas de algunos trabajos del siracusano, pero con El Método no se metió, o al menos no se conoce que lo haya hecho.

En los tiempos de Eutocio, el centro cultural del Mediterráneo se había vuelto a mudar. Constantinopla había iniciado un programa cultural formidable bajo el impulso de Teodosio II. En el año 425 fundaron lo que algunos reconocen como la primera Universidad (Auditorium) donde los profesores alcanzaban la dignidad de los nobles después de veinte años de servicio. Un ejército de copistas y traductores estaban al servicio de todas las tradiciones intelectuales conocidas por esos pagos. Pero lo más importante: la ciudad estaba rodeada por imponentes murallas que la hacían inexpugnable por tierra y por mar

Johan Ludvig Heiberg, filólogo e historiador dinamarqués nacido en 1854.
Fue profesor de filosofía en la Universidad de Copenhagen donde desarrolló una invalorable obra estudiando y traduciendo a lenguas modernas los trabajos de Euclides, Arquímedes, Apolonio de Perga, Herón de Alejandría y Serenus Antissensis, estudios que por su calidad no han perdido vigencia.

Mientras que las invasiones y saqueos arrasaban con las ciudades del Mediterráneo, los muros de Teodosio protegieron la actividad intelectual durante casi un milenio. En ese escenario se tradujo toda la obra de Arquímedes al griego moderno, con minúsculas, a dos columnas, en tres grandes tomos que se conocen como los Códices A, B y C de Arquímedes. Todo iba bien hasta que un cataclismo cayó sobre Constantinopla.

En abril de 1204, los cruzados atravesaron los inexpugnables muros de Teodosio. Las luchas políticas de Constantinopla habían sumado a los cruzados al juego provocando la destrucción de la ciudad que conservaba la herencia intelectual del mundo antiguo.

Se sabe que los Códices A y B llegaron a Italia donde merecieron traducciones al latín de parte de Guillermo de Moerbeke, arzobispo de Corinto y destacado estudioso de los clásicos. Incluso Leonardo da Vinci cuenta con entusiasmo como accedió a copias de esos trabajos. Pero el Códice C, que contenía El Método, se había perdido.

¿QUÉ ESCONDEN TUS REZOS?

En 1906, el danés Johan Ludvig Heiberg, filólogo e historiador de la matemática, recibió de un colega una noticia prometedora: en el monasterio de San Sabas, cerca de Jerusalén, habían encontrado un palimpsesto con textos matemáticos.

Cuando tenemos que grabar un archivo en la memoria saturada del pendrive (o de un viejo disquete) borramos lo que ya no nos interesa sin preocuparnos demasiado. Con los pergaminos pasaba lo mismo: eran lavados, cuando no raspados, para poder ser reutilizados, dando lugar a folios de pergamino con dos informaciones superpuestas, algo que los arqueólogos llaman palimpsesto Este fue el destino que tuvo el códice C. Se lo desarmó, cortó y reencuadernó con otro formato para contener información que en ese momento se consideró más útil: las bendiciones para el pan de Pascuas, para los matrimonios e incluso el exorcismo de San Gregorio para los espíritus impuros.

Desde Dinamarca, Heiberg pidió el envío del palimpsesto pero fue negado celosamente por las autoridades turcas que por entonces reinaban sobre Jerusalén, de modo que Heiberg viajó a San Sabas y tuvo el extraño privilegio de leer un texto que había sido negado por siglos a todos los grandes maestros de la ciencia moderna.

La tarea de Heiberg fue más que brillante, hizo todo lo que estuvo a su alcance para comprender el rompecabezas y en 1907 lo editó sabiendo que aún quedaba mucho por comprender y desentrañar de la lectura del palimpsesto.

Para la historia de la matemática los festejos terminaron pronto. La Primera Guerra Mundial acabó con el Imperio Otomano, Turquía pasó a ser una república laica y los ingleses se hicieron cargo del control de Jerusalén.

Sabedores que las revoluciones no siempre benefician a los libros, la Iglesia Ortodoxa Griega se apresuró por sacar su colección de 890 códices perfectamente censados, pero en la mudanza se perdieron 67, entre ellos el palimpsesto de Arquímedes.

No se sabe con certeza qué sucedió con el palimpsesto durante el siglo XX hasta que apareció en una subasta neoyorquina en octubre de 1998 bajo el código "Eureka-9058". Allí se libró la última batalla por la propiedad del Códice, esta vez en el terreno judicial. Intervinieron el gobierno griego, autoridades turcas y el patriarca ortodoxo griego de Jerusalén, pero los derechos de propiedad recayeron sobre su último propietario y permitieron que un misterioso filántropo pagara dos millones doscientos mil dólares por un mohoso y chamuscado códice que fue dejado en custodia en el Museo de Arte Walters, en Baltimore.

Lamentablemente, el siglo XX dejó una marca imborrable sobre el códice. En 1906, Heiberg había tomado una serie de fotos y registrado escrupulosamente cada página, de modo que se puede comprobar un deterioro general, la pérdida de una hoja y por si fuera poco, algunos de los antiguos textos de Arquímedes están ahora cubiertos por una falsa pintura bizantina realizada durante el siglo XX.

William Noel, curador del Walters, quien ha estudiado los avatares del palimpsesto junto al historiador Reviel Netz (ambos autores del *Código de Arquímedes*, un libro ineludible para quienes quieran profundizar en esta historia) tiene sus sólidas conjeturas sobre las vicisitudes vividas por el códice durante el siglo XX.

Gracias a unas cartas recientemente descubiertas, sabemos que en 1937 el palimpsesto estaba en manos de Salomón Guerson, un anticuario de París, quien se lo había ofrecido a un historiador de la Universidad de Chicago.

Guerson no había podido venderlo y cuando los nazis entraron a París lo escondió junto con unas pocas piezas. Toda su colección fue confiscada por los nazis, catalogada y despachada a Berlín, salvo tesoros que Guerson decidió llevarse consigo, entre ellos el palimpsesto.

La muerte de Arquímedes. Un antiguo mosaico que describe el asesinato del matemático siguiendo el relato de Plutarco. Durante mucho tiempo se pensó que el mosaico era renacentista; actualmente se piensa que es una copia o falsificación del siglo XVIII. La obra se encuentra en la Städtische Galerie Liebieghaus, Frankfurt, Alemania.

Escondido y buscando cómo transformar esas piezas en dinero para poder salir del infierno en el que estaba metido, Guerson habría sumado al códice bizantino unas falsas ilustraciones. El engaño valorizó la pieza y Guerson pudo escapar del nazismo mientras el palimpsesto era víctima de los hongos en un sótano parisino.

Ahora, a simple vista, se puede ver menos que Heiberg, pero los copistas de antaño fueron remplazados por técnicos y científicos expertos en imágenes que, utilizando fluorescencia de rayos X, pudieron acceder a un mundo de ideas que Heiberg ni imaginó.

La obra de Arquímedes vuelve a ofrecer novedades, pero eso será tema de las próximas notas.

En los próximos números de Q.e.d.:
- El Método y el valor de las imágenes en la matemática de Arquímedes
- Arquímedes y los problemas de combinatoria
- Arquímedes bajo los rayos X

Ingravidez simulada

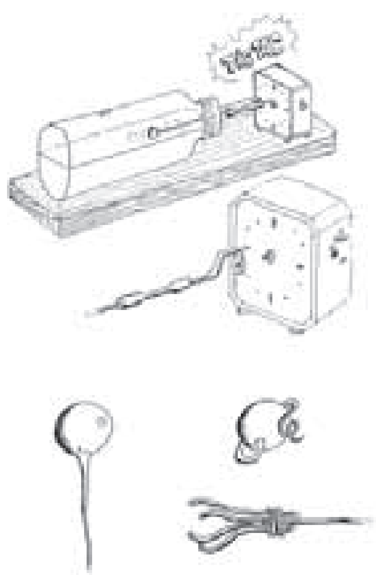
Los experimentos espaciales muestran que aunque la gravedad influye en el crecimiento de las plantas, no es indispensable para la germinación ni su desarrollo. Una semilla brota cuando falta la gravedad, y también en condiciones equivalentes, atada al segundero de un reloj.

La ingravidez o falta de gravedad –y más propiamente, la *microgravedad*– ocurre cuando un cuerpo se encuentra bastante lejos de planetas, estrellas u objetos astronómicos de masa importante que ejerzan fuerzas sobre él. En tales condiciones no hay arriba ni abajo como en la superficie terrestre.

Por semejanza de efectos, se llama ingravidez aparente a la que experimentan personas y objetos en una nave en órbita; aunque tengan peso (si así no fuera, seguirían en línea recta por la tangente en vez de orbitar), sino porque en tal caso desaparece la fuerza que los aprieta contra el suelo. Lo mismo sucede en una cabina de un ascensor que por accidente estuviera en caída libre, o en una caja arrojada al aire con una piedra en su interior. Esos cuerpos pesan, pero no hacen fuerza contra superficies; por eso parecen ingrávidos.

Ciertos juegos de feria dejan caer a los participantes desde lo alto de una torre, atados a sus sillas, para simular durante pocos segundos la sensación de microgravedad. Muchas escenas de Apolo XIII (Ron Howard, 1995) se rodaron a bordo de un avión en la llamada maniobra de gravedad cero. En esa película los actores se mueven siempre con vivacidad para disimular las pequeñas sacudidas generadas por las inevitables turbulencias de esos vuelos.

En vuelo parabólico, el movimiento del avión iguala el de un proyectil sin resistencia del aire. Al inicio y al fin de esa maniobra, llamada de gravedad cero, los ocupantes experimentan un peso aparente mucho mayor que el propio, pero no sienten pesantez durante el resto intermedio de la maniobra.



Influencia de la gravedad en la germinación. La semilla quieta desarrolla su radícula hacia abajo, normalmente y bastante derecha.

La representación de la ingravidez estuvo menos lograda en Solaris (Andrei Tarkovski, 1972), filme soviético basado en un libro de 1961 del semiólogo polaco Stanislav Lem. En lo que parecen intentos de comunicación, un planeta pensante materializa recuerdos, deseos y temores de los humanos que se le acercan. En una poética escena, el psicólogo de la misión terrestre y una réplica solarística de su esposa, que se había suicidado hacía mucho[1] flotan ingrávidos con libros, copas y un candelabro que habían encendido para una reunión de gala.

1 El planeta la copió tan fielmente de la mente del psicólogo, que tiene en su brazo la marca de la inyección con la que había puesto fin a su vida. (Se vuelve a suicidar varias veces, y revive.)

Las llamas de las velas bailaban amarillas y vivaces hacia un arriba arbitrario e independiente de la inclinación del candelabro, en vez de hacerse esféricas, tenues y azules cuando la convección térmica desaparece con la gravedad. Ya rota con eso la magia de la escena, se ven las piernas de la actriz rígidas como troncos mientras se mantiene en difícil equilibrio colgada de cables invisibles para la filmación. Su cabeza vaga muy bien, lánguida e imponderable como en una propaganda de champú, pero su pelo suelto señala hacia abajo como una plomada inapelable. Terminada la maniobra de ingravidez, la nave, en forma de rosquilla, reanuda su giro para generar gravedad artificial. Pero los personajes, en vez de caminar por su interior sobre el diámetro mayor del toro y con la cabeza hacia el centro de giro, como en 2001 Odisea del espacio[2] lo hacen sobre uno de los laterales, con sus cuerpos paralelos al supuesto eje de rotación. A pesar de esas incongruencias físicas, se disfruta esa fantasía acerca de cómo podrían comunicarse inteligencias muy diferentes, como no sea al principio a través de actos elementales de imitación, como los de un bebé que devuelve una sonrisa aunque aún no entienda lo que se le dice.

Para experimentar la influencia de la gravedad en el crecimiento de una planta se puede usar un reloj de dos o tres pesos, a cuyo segundero se adhiere un eje solidario con una arveja que se mantiene húmeda. Al lado, y como testigo, se pone otra semilla idéntica también húmeda, pero fija.

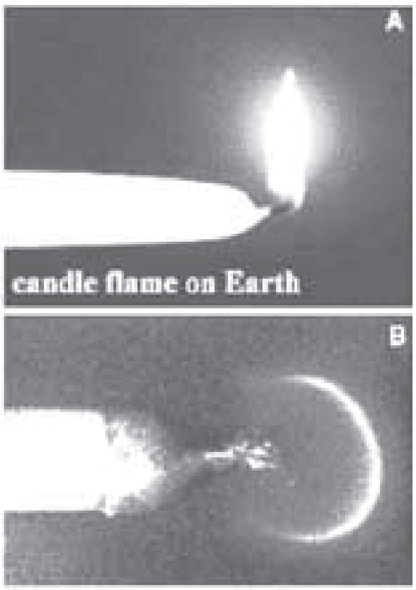
Algunos de estos experimentos fracasan por usarse arvejas estériles por hibridación, tostado o radiación. Conviene usar semillas de fertilidad comprobada, de huerta casera, o compradas en casas de jardinería.

La semilla fija desarrolla su radícula en unos tres días; la giratoria tarda más, y a veces sólo se hincha y se deshace, putrefacta.

Después de varios intentos se consigue que germine una arveja giratoria. Al quedar neutralizada la separación gravitatoria de sustancias que dan lugar al geotropismo, o crecimiento especial de la raíz hacia abajo, la raíz de la semilla giratoria suele crecer en forma helicoidal. Eso es simplemente el resultado de la falta de gravedad aparente, y de alguna asimetría en la velocidad de crecimiento. Precisamente, la arveja es una enredadera trepadora; no es que la radícula se retuerza por causa del giro; con ingravidez verdadera también lo hace[3].

Para reponer el agua evaporada con menor frecuencia se puede usar una botella de plástico que se mantiene cerrada y horizontal. Se perfora su tapa de rosca con un clavo caliente y se pasa por el orificio un alambre de cobre de medio milímetro de diámetro rematado en unas pinzas hechas del mismo alambre para sujetar la semilla. Las pinzas son lo bastante blandas como para acompañar la hinchazón. En el costado de la botella que queda hacia arriba se practica un orificio de un centímetro de diámetro, por el que se echa el agua y se descuelga el testigo. El agujero de la tapa es excéntrico para facilitar el ajuste de altura del eje en relación con el del reloj. La fijación del alambre al segundero se hace con adhesivo anaeróbico de cianoacrilato[4].

Es práctico dividir el eje en dos partes acopladas con un segmento de aislación del alambre, y usar un par de sujetadores para evitar que la botella ruede.



Arriba, llama con gravedad normal. La combustión es incompleta, con humo y hollín, por la intensa convección. Abajo, en la microgravedad de una nave espacial, la llama parece la del gas de la cocina. (Foto: NASA)

Diversión que ofrece Signature Air, a 3500 dólares por pasajero, en el aeropuerto internacional McCarran, Nevada, Estados Unidos de América. Un Boeing 707 sin butacas y adaptado brinda a mayores de 12 años un servicio de 15 viajes parabólicos de medio minuto cada uno.

ENLACES

http://www.cienciapopular.com/n/Experimentos/Gravedad_Cero
http://ciencia.astroseti.org/nasa

2 Aunque el relato original de Arthur Clarke es interesante, Odisea del espacio (Stanley Kubrick, 1968), es muy aburrida. Los efectos visuales de sus largas escenas, alardes informáticos de su época, hoy apenas alcanzan el atractivo de un salvapantallas.

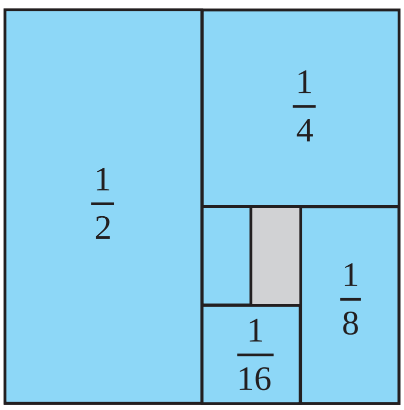
3 Es difundida la creencia de que el crecimiento en espiral de algunas plantas obedecería a la rotación terrestre, y que tendría sentidos opuestos en uno y otro hemisferio. Pero no hay tal cosa, los efectos de la rotación terrestre se notan sólo con grandes desplazamientos y velocidades.

4 Más conocido por sus nombres comerciales La Gotita, Loctite, Pegamil o Arons.

Sumas Interminables

Una demostración es una actividad social en la que se señala a alguien algo verdadero de modo que lo pueda deducir de otras cosas que sepa y tenga por ciertas. Hay deducciones de vistazo y ¡ajá! que equivalen a cientos de palabras.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots$$

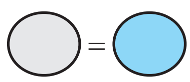


El área del cuadrado es de un metro cuadrado. Su mitad es medio metro cuadrado. La mitad de la segunda mitad es un cuarto; partida ésta por el medio resulta un octavo, y así indefinidamente.

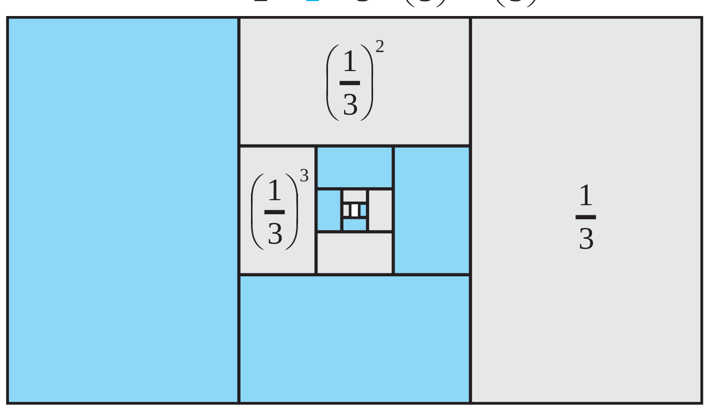
No importa cuánto se agregue, la suma nunca supera un metro cuadrado, y se aproxima todo lo que se quiera a este valor.

Por eso, cuando la cantidad de términos tiende a infinito la suma de arriba tiende a uno.

Lucía Pedraza propone esta elegante demostración de que la suma de todas las



$$=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots$$



potencias enteras de un tercio tiende a un medio.[1]

La tercera parte de un tercio es lo mismo que un tercio por un tercio, o sea un noveno, o un tercio al cuadrado.

Y un tercio al cubo es un tercio de un tercio de un tercio: una parte en veintisiete.

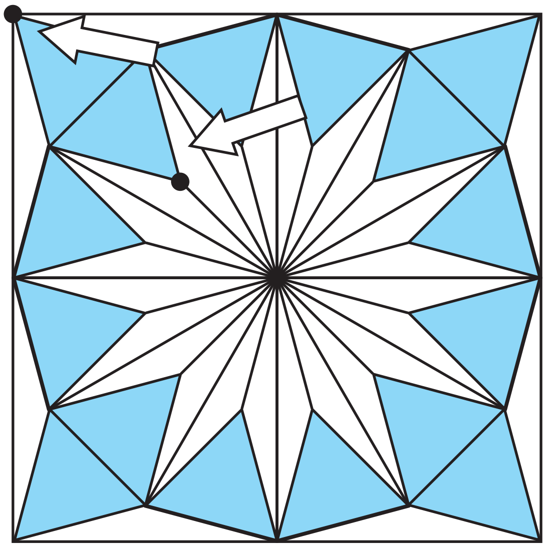
1 Una serie es la suma de una sucesión infinita de términos. Los dos ejemplos de esta página corresponden a series *geométricas*. Geométrica significa, en este contexto, que cada término de la sucesión se obtiene mediante el producto del término anterior por una cantidad fija llamada razón; un medio en el primer caso, y un tercio en el otro. En las series *aritméticas*, en vez de multiplicarse el término anterior por una cantidad fija, se le suma. Las series aritméticas carecen de límite, y las geométricas lo tienen siempre que la razón esté comprendida entre –1 y +1, exclusive los dos.

DODECÁGONO

Un dodecágono regular ocupa las tres cuartas partes del cuadrado en el que está inscrito. (Javier García Gómez, Proyecto Talento Matemático, 2003 a 2005.)

Dentro del dodecágono hay veinticuatro triángulos claros y doce oscuros. Afuera de él, ocho claros y cuatro oscuros, o sea un tercio de los que hay adentro.

Del centro de la figura parten 24 rayos, así el ángulo menor de un triángulo claro vale 15 grados, y 150 el mayor[2]. En una esquina de 90 grados se ve que el ángulo del triángulo oscuro tiene que ser de 60 grados, para que sume 90 con los dos pequeños. El vértice de un triángulo oscuro que apunte hacia el centro tiene que tener, también, 60 grados, para que sumados a dos de 150 arrojen 360 grados. (Véanse los puntos en la figura.) Entonces los triángulos oscuros son equiláteros e iguales. Aunque quizá falte demostrar algo; de todos modos la figura ordena mucho el pensamiento.

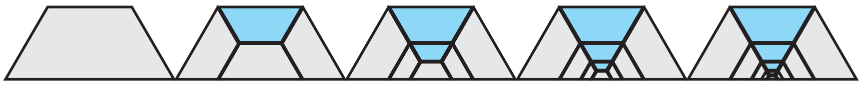


$$4=3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\ldots$$

TRAPECIOS

Supongamos que la figura de abajo tiene un área igual a tres. Ese trapecio, unido a todos los otros del mismo color y con la misma orientación que aparecen en las otras figuras infinitas, permiten armar un triángulo grande de área cuatro. Pero cada trapecio tiene la cuarta parte del área de su antecesor. Entonces:

Si dividimos todo por tres, y después por cuatro, obtenemos esta fórmula, un poco más simple:



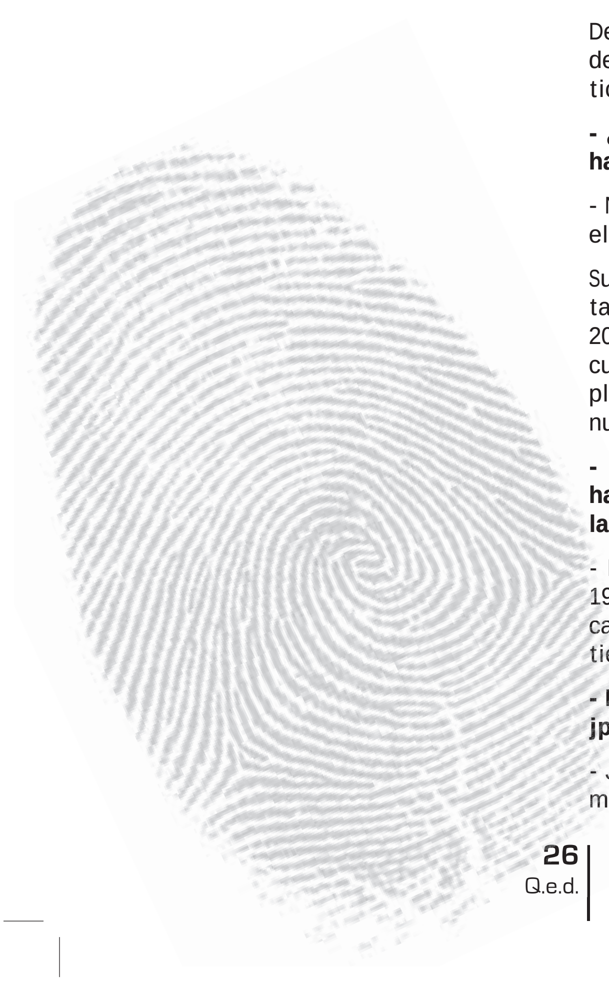
$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots=\frac{1}{3}$$

2 Los tres ángulos internos de un triángulo cualquiera suman 180 grados, como se comprueba con papel y tijera, o con un razonamiento que omitimos, pero que se basa en que si a dos cosas iguales se les suma lo mismo, los dos resultados son iguales.

Tras las huellas de Fourier

Carlos Borches
CBC - UBA

Para mucha gente, la matemática es un conjunto de saberes inmutables provenientes de tiempos remotos que algunos elegidos llegan a manejar con pericia. En estos diálogos, el predicador matemático lucha a brazo partido para que el profano entienda que la matemática es una disciplina viva presente en incontables detalles de la vida cotidiana.



- En 1891, los habitués de los bares porteños no dejaban de comentar el espeluznante crimen de dos niños ocurrido en Quequén, Provincia de Buenos Aires. Francisca Rojas, madre de los chicos, había acusado desde el primer momento a un antiguo amante que fue inmediatamente arrestado. Siguiendo los procedimientos tan caros a las tradiciones policiales, el acusado fue severamente torturado aunque nunca dejó de proclamar su inocencia.

La evocación de este espantoso suceso comienza a conectarse con la matemática cuando el inspector Álvarez, a cargo de la investigación, decidió remplazar al látigo por un procedimiento un tanto más racional. Álvarez recordó las charlas con un entusiasta colega de La Plata que había comenzado a registrar en pequeñas fichas las huellas dactilares de 23 presos. El metódico Juan Vucetich, de él se trata, creía firmemente que cada persona arrastraba de por vida esas señales únicas e inmutables. Una interesante función biyectiva.

Dispuesto a probar algo nuevo, Álvarez serruchó una puerta del lugar del crimen que tenía impresa varias huellas sobre manchas de sangre, reunió las marcas dactilares de todos los sospechosos y le mandó el paquete a Vucetich. Sin necesidad de golpes, la madre se derrumbó cuando le informaron que "científicamente" se la encontraba culpable.

Desde ese momento, el método quedó consagrado y a fines de 1891 la Oficina de Estadística de la policía comenzó a llevar registros dactilares en una práctica que se extendió por todo el mundo.

- ¿Y dónde está la matemática en todo esto? ¿No me digas que es porque hay una función inyectiva?

- No, no, un poco de paciencia. Matemática, y de la buena, aparecerá cuando el problema se complique.

Sucede que un siglo después de Vucetich, la pasión por registrar huellas digitales se ha desbocado. La colección que el FBI comenzó en 1924 superó las 200 millones de tarjetas (y eso porque sólo guardan las fichas de los "repeat customers") Las tarjetas ocupan casi cinco mil metros cuadrados en el Complejo Edgar Hoover de Washington, y diariamente se suman entre 30 y 50 mil nuevas tarjetas.

- ¡Ah! Ya sé. Scanneamos todas las fichas y dejamos que la computadora haga las búsquedas y ya está. Como la computadora usa numeritos ahí está la matemática.

- La cuestión es más sutil. El FBI empezó la digitalización en la década de 1990 pero aparecieron nuevos problemas: cada ficha generaba un archivo de casi 10 megabytes, con lo cual se necesitaría un disco de 2000 tera bytes. Y los tiempos de búsqueda se hacían muy largos

- Pero hay formas de comprimir las imágenes, lo tenés en bmp y lo pasás a jpg y listo.

- Justamente, esta historia se trata de la matemática necesaria para comprimir imágenes. Tocaste la cuerda precisa.

- ¿La cuerda?

- Si, la cuerda, como Pitágoras.

- ¿Pitágoras, el del Teorema? ¿Tocaba la viola?

- No, le daba a la lira, pero creía que la matemática estaba en todas las cosas y no dejaba de buscarla. Así, estableció empíricamente que la frecuencia con que vibra una cuerda, la altura de la nota, era inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, e inició la primera teoría musical afirmando que las notas armónicas se obtenían como proporciones enteras de la cuerda y todas esas afirmaciones sin demostración le dieron trabajo a los matemáticos durante siglos, en lo que hoy llamamos problema de la cuerda vibrante, que resolvió Fourier, aunque tampoco demostró si era po….

- ¡Bajá un cambio! Otra vez te fuiste por las ramas.

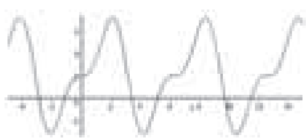
- No no, cuando hablo de la matemática que hay en el sistema jpg y la que usamos para expresar cómo vibra la cuerda me estoy refiriendo a lo mismo, lo que hoy llamamos análisis armónico.

- ¿Armónico? ¿Como en la música?.

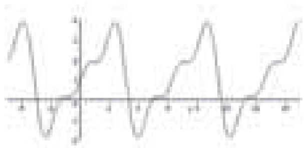
- La cuestión es así: Fourier fue capaz de escribir muchas funciones como suma de infinitas oscilaciones, que son nuestras funciones trigonométricas *sen x* y *cos x* Se ve más claro si dibujo un ejemplo:

$$f(t) = 1$$

$$f(t) = 1 + 2sen\ t$$

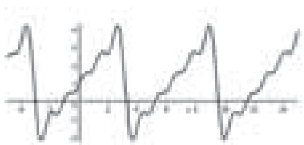


$$f(t) = 1 + 2sen\ t - sen\ 2t$$



$$f(t) = 1 + 2sen\ t - sen\ 2t + \frac{2}{3}sen\ 3t$$

$$f(t) = 1 + 2sen\ t - sen\ 2t + \frac{2}{3}sen\ 3t - \frac{1}{2}sen\ 4t$$



$$f(t) = 1 + 2sen\ t - sen\ 2t + \frac{2}{3}sen\ 3t - \frac{1}{2}sen\ 4t + \frac{2}{5}sen\ 5t$$

Fijate que una vez que encontraste la primera de las trigonométricas, que se llama fundamental, el resto tienen como frecuencias a múltiplos enteros de la fundamental y sus amplitudes van decayendo y se las puede calcular sin problemas. En el dibujo están los primeros cuatro términos por eso tenés una aproximación, conforme agregues más términos mejorará tu aproximación.

- ¿Y cómo se comprimen las imágenes usando Fourier?

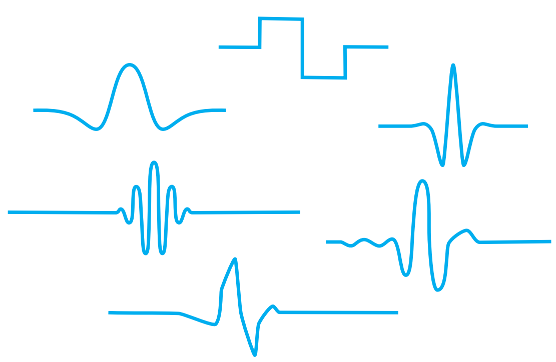
- Hay ciertos principios más teóricos y mucho de ingenio para adaptar los principios generales al problema.

Primero hay que pasar todo a números. Supongamos que tenemos una foto en blanco y negro y hacemos un cuadriculado sobre ella, por ejemplo partimos cada lado en 1024 partes iguales y nos quedan 1024x1024 cuadraditos (o pixeles), Si establecemos una escala de grises que vaya del 0 al 255 por ejemplo, podemos asignarle a cada cuadradito un número en esa escala que represente el nivel de gris (en los extremos de la escala están el blanco y el negro)

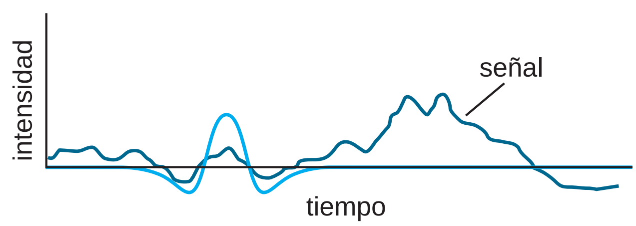
- Digitalizás la imagen.

- Exactamente. Obtenemos una enorme matriz de datos que ahora vamos a comprimir usando Fourier. Para esto podemos pensar a nuestra matriz como la gráfica de una función de dos variables, para cada *x* e *y* (que representan la ubicación del píxel) le asignamos su valor en la escala de grises. Si nos restringimos a regiones más pequeñas de pixeles (8x8, por ejemplo) tenemos una función, y conociendo el valor promedio, la amplitud de la oscilación de valores y ciertos datos que nos permiten definir una frecuencia fundamental y el resto de los parámetros y encontrar nuestro desarrollo de Fourier para esa región de la foto. (Transformada Discreta del Coseno, DCT) Se desarrollaron algoritmos que hacen automático todo este proceso y que reducen aún más la información necesaria para caracterizar la foto y terminan en un paquete de datos mucho menor que la matriz original. Como si esto fuera poco, una vez que recibís ese paquete, podés hacer el proceso inverso interpretando esos datos y recomponiendo una aproximación de muy buena calidad de la foto.

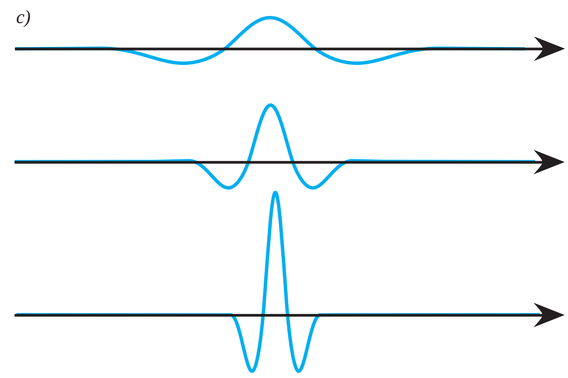
a)



b)



c)



En el punto a) se observan distintos tipos de wavelets.
En el punto b), una señal es aproximada localmente por una de las "pequeñas ondas", que en el punto c) es deformada.

- Bueno, acepto que el jpg tenía mucha matemática, pero tenía razón cuando dije que lo pasabas a jpg y listo.

- No tan rápido. Con jpg se pueden alcanzar compresiones importantes del valor original pero esa solución estaba fuera de los requerimientos del FBI. El problema con los senos y cosenos de Fourier es que cuando la imagen presenta cambios drásticos, la aproximación no es buena, es propensa a errores, pero ya había soluciones matemáticas.

- Empezamos todo otra vez...

- Voy a ser breve. Con el análisis de Fourier vimos cómo podíamos expresar funciones mediante senos y cosenos, como si estas funciones fueran particulas elementales, átomos, con las cuales expresamos un universo de funciones. Pero no es la única alternativa que tenemos. Hay otras familias de funciones que podemos usar como átomos.

- **¿Y cuál es mejor?**

- Depende del problema. Si la función que estudiamos se repite, Fourier anda bárbaro, pero las imágenes no son un buen ejemplo de periodicidad. Las nuevas funciones que se ajustan mejor son los wavelets u ondeletas, otro tipo de átomos, que son funciones localizadas, oscilantes y cuya amplitud decrece rápidamente.

- **No me las imagino**

- Te muestro un par de revistas. En Physics World aparece este gráfico con varios tipos de wavelets y como se aproximan mejor a una función muy irregular, por lo menos en una zona pequeña, lo que llamamos una aproximación local.

Fijate: en el punto a) se muestran varios tipos de wavelets y en el b) te muestra como aproxima una zona de una función muy irregular. Acordate que con Fourier nos armábamos una familia de átomos donde las frecuencias de los senos eran múltiplos de una sinusoide fundamental. Acá lo que tenemos es un tipo de wavelet y al resto lo obtenemos comprimiendo el fundamental, así disponemos de la familia de átomos, como lo muestra en el punto c)

- ¿Y las aproximaciones usando wavelets son mejores para las imágenes?

- Como dice en esta otra nota de dos matemáticos argentinos, Ursula Molter y Carlos Cabrelli: “La gran virtud de la transformada wavelet, en contraposición con la de Fourier, es que sus componentes básicos –átomos– están bien localizados. Esto permite estudiar la regularidad de una señal en un intervalo corto de tiempo, considerando sólo aquellos coeficientes asociados a ese intervalo. Si una señal, repentinamente y por un lapso breve, presenta severas irregularidades u oscilaciones, su descripción en términos de nuestros átomos requerirá una gran cantidad de componentes localizadas que permitan describir la estructura fina. Sólo unos pocos átomos serán necesarios en zonas donde la señal es suave y con poca variación si la wavelet fue elegida adecuadamente. En la descripción completa de una señal habrá más coeficientes donde la señal sea más oscilante o irregular y unos pocos en las partes suaves o de poca variación”.

- ¿Y cómo se dieron cuenta de esto los tipos del FBI?

- La teoría de Wavelets viene estudiándose sostenidamente desde la década de 1980, aunque se pueden encontrar antecedentes en la primera mitad de siglo. Cuando los del FBI vieron los problemas que tenían recurrieron a varios grupos que venían trabajando en procesamiento de señales. Tom Hopper, un matemático que trabaja para el FBI, se puso en contacto con Jonathan Bradley y Chris Brislawn, del Laboratorio Nacional de Los Álamos y comenzaron a trabajar. Luego se les unió Ronald Coifman, de la Universidad de Yale, uno de los expertos que más ha trabajado en este campo y fue justamente la persona que creó los algoritmos para los archivos de huellas del FBI.

LECTURAS RECOMENDADAS

C. Cabrelli; U Molter. Wavelets, Ondiculas? Una buena señal. Ciencia Hoy. 95, p.22 - 34, 2006.

P.S. Addison, The Little Wave with the Big Future, Physics World, , Vol.17(3), 35-39, 2004

Físicos y matemáticos en el mundo Simpson

Por Matias Cveczilberg y Carlos Borches

Matt Groening pasará a la historia de la cultura por sus ácidos retratos de la familia y la sociedad norteamericana reflejados en sus obras Los Simpson y Futurama, donde los guiños científicos no están ausentes.

La avenida π, una avenida de naturaleza irracional. Correspondiente al episodio Future Stock (Acciones Futuras) de la tercera temporada de Futurama

Desde el comienzo, Groening supo rodearse de un grupo de guionistas y productores provenientes de diversos campos de la cultura que aportaron sus particulares miradas en la creación colectiva de los populares dibujos animados.

Tal es el caso de Ken Keeler y Jeff Westbrook. Keeler estudió matemática aplicada en la Universidad de Harvard obteniendo su doctorado en 1990 con una tesis sobre procesamiento de imágenes. Luego de doctorarse se unió a los Laboratorios AT&T Bell que poco después abandonara para dedicarse a escribir guiones de programas televisivos. Así llegó como escritor de capítulos de Los Simpson y fue una de las piezas claves en la creación de Futurama.

Todo esto sin dejar por completo la matemática. En 1995, mientras colaboraba como guionista de Los Simpson, publicó en Discrete Applied Mathematics un paper que lo incorporó a la constelación de los orgullosos poseedores de un número de Erdös (Vease Q.e.d. Nro 1, Pág 6). El artículo de Keeler fue escrito junto a otro de los guionistas de la serie, el mencionado Jeff Westbrook, quien estudió física en Harvard y realizó su doctorado en ciencias de la computación en Princeton. Westbrook es número de Erdös 3, y por consiguiente, Keeler posee número de Erdös 4.

La heterogénea lista de colaboradores (pasados y presentes) provenientes del campo de la ciencia que han trabajado en Los Simpson y Futurama no se limita a Keeler y Westbrook. Al Jean, productor ejecutivo de Los Simpson, es también graduado en matemática de Harvard; Bill Odenkirk, doctor en química de la Universidad de Chicago, también escribió capítulos de la popular serie. Y la lista no se agota.

Con tantos autores provenientes de las ciencias, los guiños cómplices a los espectadores avezados no podían faltar en los episodios.

EL FANTASMA DE RAMANUJAN

En uno de los capítulos de la última temporada de Futurama, mientras los protagonistas recorren en rápida sucesión universos paralelos, entran brevemente a uno catalogado Universo 1729. Ese mismo número es empleado en la matrícula nave Nimbus (parodia del Entreprise de la serie Star Trek). En el especial de navidad de 1999, el robot Bender recibe una carta de la máquina que lo construyó que reza "Feliz Navidad hijo #1729".

¿Es casual la repetición de este número? "Esa pequeña broma -comentó Keeler-, justifica mis seis años de estudio universitario".

La historia de este número involucra a dos de los más importantes matemáticos del siglo XX, Srinivasa Ramanujan y Godfrey Harold Hardy.

Cuenta Hardy, que en una oportunidad fue a visitar a su colega al hospital, cuando casualmente le menciona que acababa de bajarse de un taxi de matricula 1729, "un número especialmente ordinario" remarcó Hardy, esperando que no fuese un mal presagio. "No" –le respondió Ramanujan-, "es un número bastante interesante. Es el primer número que puede escribirse como la suma de dos cubos (positivos, al menos) de dos formas distintas".

Efectivamente, el número observado por Hardy verifica la siguiente relación $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$, y se conoce como el número de Hardy-Ramanujan que entre otras propiedades interesantes es uno de los cuatro únicos números naturales que, si sumamos sus cifras y al número obtenido invertimos el orden de sus cifras, se obtienen dos números que multiplicados dan como resultado el número original, es decir:

$$1 + 7 + 2 + 9 = 19$$

$$19 \times 91 = 1729$$

Pregunta: ¿cuáles serán los otros tres números?

Xmas Story (Cuento de Navidad), de la segunda temporada de Futurama

HOMERO Y EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

Es conocido desde los tiempos de Pitágoras, que existen infinitas ternas de números naturales que verifican

$a^2 + b^2 = c^2$

como $3^2 + 4^2 = 5^2$

En el siglo XVII Fermat conjeturó que no existían ternas de números naturales que verificaran $a^n + b^n = c^n$ donde n fuera mayor que dos, hecho que finalmente se demostró en 1995 (ver Q.e.d. Nro 1, pág 5).

En un famoso capítulo de Los Simpson, Homero escapa de sus cuñadas saltando a otra dimensión. Mientras recorre asombrado un mundo de tres dimensiones, aparece flotando la igualdad

$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$

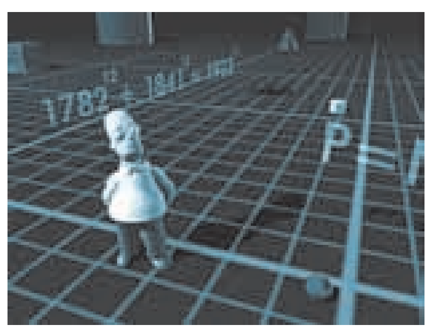
Conociendo la validez del Teorema de Fermat, podemos concluir rápidamente que esa igualdad es falsa, sin embargo, calculando tenemos:

$1782^{12} = 1025397835622633634807550462948226174976$

$1841^{12} = 1515812422991955541481119495194202351681$

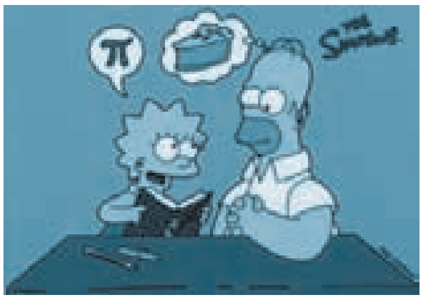
$1782^{12} + 1841^{12} = 2541210258614589176288669958142428526657$

$1922^{12} = 2541210259314801410819278649643651567616$



Escena de "The Simpsons Halloween Special VI", el recordado episodio de la sexta temporada donde Homero viaja a la tercera dimensión.

Ambos números son tan parecidos que tomando la raíz doceava de $1782^{12} + 1841^{12}$ obtenemos 1922 (se puede hacer la cuenta con la calculadora de Google) Estos números que «erran por poco a Fermat» (*Fermat near-miss*) fueron descubiertos



por David S. Cohen, físico de la Universidad de Harvard con un master en computación de la Universidad de Berkeley, tambien conocido como David X. Cohen cuando firma los capítulos de Los Simpson o Futurama.

Hasta ahora, Cohen encontró dos ternas de números Fermat near-miss, la otra, que por cierto también apareció en un capítulo de Los Simpson es

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

$$3987^{12} = 16134474609751291283496491970515151715346481$$

$$4365^{12} = 47842181739947321332739738982639336181640625$$

$$3987^{12} + 4365^{12} = 63976656349698612616236230953154487896987106$$

$$4472^{12} = 63976656348486725806862358322168575784124416$$

OTROS GUIÑOS NUMÉRICOS

La bestia binaria

Futurama presenta la ciudad de New York en el año 3000. La tecnología ha cambiado muchos aspectos de la vida cotidiana, pero el chico repartidor de pizzas de 1999 sigue siéndolo un milenio después y los robots, la principal minoría del cuarto milenio, es la infaltable clase explotada. La religión se ha fusionado detrás de una suerte de catolicismo espacial y el mal es encarnado por el Diablo Robot, cuyo auto muestra en la patente al número 0110-0110-0110.

Escena del episodio The Honking (El Bocinazo) de la segunda temporada de Futurama

El número 0110 es la expresión binaria del número 6, en efecto:

$$0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 6$$

Es decir, la matrícula del auto del Diablo no es otra cosa que el número de la Bestia 6-6-6.

En un capítulo donde los protagonistas deben enfrentar al Proyecto Satán, en un espejo aparece escrito 1010011010, que es la expresión binaria del número 666.

$$1010011010 = 1.\,2^9 + 0.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 512 + 128 + 16 + 8 + 2 = 666.$$

ENLACES

Simpsonsmath y Futurama

http://www.mathsci.appstate.edu/~sjg/simpsonsmath/

http://www.mathsci.appstate.edu/~sjg/futurama/

NOTA DE CLAUDIO SÁNCHEZ

http://juegosdeingenio.org/archivo/678

Intimidades de un cierre...

o tengo un teorema y necesito un problema para usarlo

J.C. —Parece que estamos cerrando el primer número de QED. ¡No lo puedo creer!

C. —Ya está todo, pero falta discutir la tapa. ¿Qué hacemos con el cuadro de Veermer?

I. —¡Me van a volver loca! Si fue la primera página que teníamos diseñada. Hablamos dos horas y descubrimos que todos éramos fanáticos de Veermer.

C- —El tema es si la tapa no debería tener que ver con algún artículo de la revista. La pintura de Vermeer está buenísima pero no tiene mucha relación con el contenido de QED. Tal vez deberíamos buscar alguna pintura relacionada con árboles para ilustrar el Problema del Huerto de Juan Carlos.

J.C. —Si la dejamos en blanco, vacía digo, podríamos estar haciendo referencia a la nota sobre el vacío de Agustín. Fuera de chiste, hay ilustraciones muy buenas de Arquímedes, que podrían estar vinculadas con el artículo de Carlos sobre los palimpsestos.

A. (que se había mantenido en silencio mirando la tapa) —Podríamos pensar un problema que tenga que ver con la tapa y después escribir una nota sobre el problema. Mirando el globo terráqueo del astrónomo, recuerdo un problema famoso sobre el oso que por la mañana sale a buscar alimento y camina 5 km en dirección sur, luego camina 5km en dirección este y luego camina 5 km en dirección norte, llegando al punto de partida.

I. —¿Y cuál es la pregunta?

A. —¿De qué color es el oso?

I. —¿Y el globo terráqueo que tiene que ver con el color de un oso?

C. —Nuestra socióloga de cabecera requiere asistencia geométrica.

J.C. —Ya recuerdo el problema. Es un clásico y tiene variantes interesantes. Las podemos poner. Recordemos que esta revista debe intentar reflejar lo que hace un matemático y un físico cuando trabaja, y eso se hace muy bien proponiendo problemas a los lectores.

I. —(después de hacer unos dibujos y convencerse del color del oso) - De todas maneras el cuadro de Veermer y el oso parecen tener poco que ver.

J.C. —Hay una historia interesante que liga a Veermer con la radioactividad y las ecuaciones diferenciales. La leí en un libro de M. Braun, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones . Bueno, la verdad no es con Veermer el asunto sino con alguno de sus cuadros. Para ser precisos: ni siquiera tiene que ver con cuadros de él sino con falsificaciones de sus cuadros.

A. —¿Cómo es el cuento?

J.C. —Resulta que luego de la liberación de Bélgica en la Segunda Guerra Mundial, la seguridad holandesa inició una búsqueda de colaboradores nazis. En los registros de una firma que había vendido numerosas obras de arte a los alemanes, descubrieron el nombre de un banquero que había actuado como intermediario en la venta a Hermann Goering del cuadro “Mujer en adulterio” de Veermer.

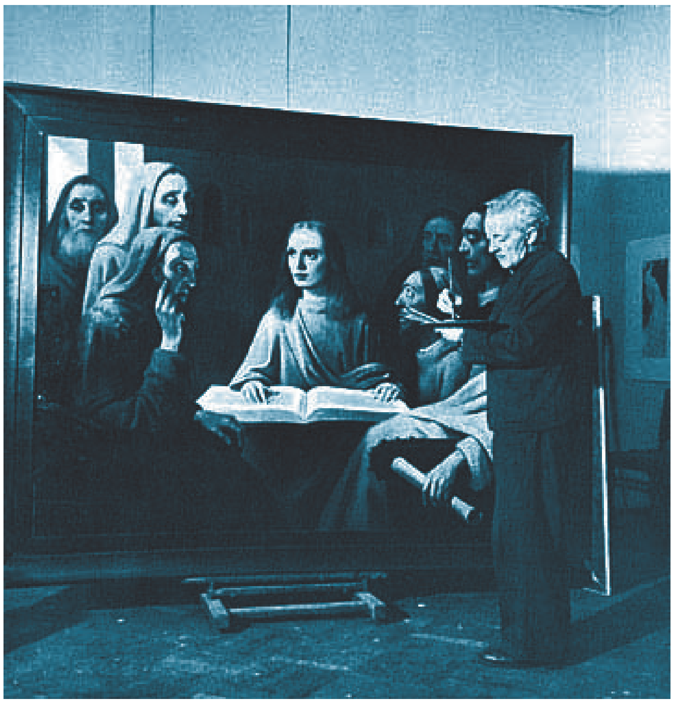
El geógrafo (1668) de Johannes Veermer

C. —¿Goering? Casi me atraganto con la medialuna. Personaje siniestro del nazismo. Se suicidó dos días antes de que fuera a la horca.

J.C. —Perdón, lo tuve que nombrar porque al tipo le gustaban las pinturas. El asunto es que el banquero reveló que había actuado en nombre de un pintor holandés llamado Van Meegeren. En mayo de 1945, Van Meegeren fue detenido bajo la acusación de colaboración con el enemigo vendiendo obras robadas, pero Van Meegeren sorprendió a todos anunciando que "Mujer en adulterio" y el mucho más famoso y bello "Discípulos de Emaús", eran ¡obras suyas!.

C. —¿Quería pasar por loco?

J.C. —Muchas personas, pensaron así. Pero Van Meegeren comenzó, en prisión, a falsificar el cuadro de Veermer "Jesús entre los doctores" para mostrar a los escépticos cuán buen falsificador de Veermer era. De todas formas los expertos en arte encontraban que las obras eran originales hasta que intervino una comisión de químicos y físicos.



Han van Meegeren

A. —¿Y las ecuaciones diferenciales?

J.C. —El tema tuvo sus altibajos técnicos y recién en 1967 un equipo de la Carnegie University Mellon determinó que los "Discípulos de Emaús" no es de Veermer. Ellos si usaron el fenómeno de la radioactividad…y las ecuaciones diferenciales. Pero no sé explicar este fenómeno duro con palabras blandas.

A. —El asunto podríamos contarlo así: el físico Rutherford y sus colegas mostraron a fines del siglo XIX, que los átomos de ciertos elementos "radioactivos" son inestables, y que dentro de un período de tiempo dado, una proporción fija de los átomos se desintegra, para formar átomos de un nuevo elemento. Debido al hecho de que la radioactividad es una propiedad del átomo, Rutherford mostró que la radioactividad de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la sustancia.

C. —Y esto lo podemos conectar con el paper de Freiser donde midió la edad de las distintas células de una persona.

I. —También con esa nota que salió en Investigación y Ciencia donde cuestionan el método de Carbono 14 para dataciones muy antiguas.

C. —Pero tenemos un problema.

I., A., J.C. —¿Cuál?

C. —Esa nota donde íbamos a contar todo esto quedó para el próximo número….

A. —Entonces volvamos a mirar el cuadro a ver si se nos ocurre algo. Por ejemplo: ¿Qué hay colgado en la pared? Seguro que podemos decir algo interesante sobre cómo se hacía astronomía en el siglo XVII, cuando vivía Veermer. ¿Alguien sabe qué es lo que tiene colgado el astrónomo en su estudio?

J.C. —Parecen unos relojes pero no se distingue bien…

C. —El marco inferior de la ventana está alineado con la circunferencia …

P. (Asomando su cabeza desde la puerta) —Se me ocurrió un nuevo diseño para la tapa.

Todos —Nooooo!!!

EXPO EXTENSION

2, 3 y 4 de Octubre

Centro Cultural Rojas

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Muestra de Matemática Elemental 2008

de 9 a 21 hs.

Corrientes 2038 - Ciudad de Buenos Aires

Entrada Gratuita - Disponibilidad Limitada

Organizan:

UBA R Rojas

Area Matemática
Ciclo Básico Común - UBA
www.cbc.uba.ar

Auspician:

SMA

EDUCANDO

Enseñar Ciencia

EDUCANDO
EDITORIAL

Ciudad Universitaria Pabellón 2 Planta Baja, CP 1428, Cdad. Autónoma de Bs. As.
Tel: 4788-9570 mail: edccceducando@ciudad.com.ar