Q.e.d.

Ciencias duras en palabras blandas

Julio 2010
Año 2 | N°4
ISSN: 1852-5091

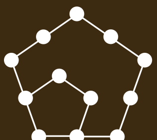
όπερ έδει δείξαι

Escalas musicales

El gato de Schrödinger

Números poligonales

- Polémicas lingüísticas
- Curiosidades físicas
- Lógica matemática
- Problemas matemáticos
- Demostraciones visuales



EN LA UBA SE ENSEÑA,
SE APRENDE, SE INVESTIGA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
MÁS UNIVERSIDAD PARA TODOS

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
www.uba.ar

Editorial

Los cientómanos no existen

Con palabras blandas, Q.e.d. cumplió un año intentando compartir con ustedes nuestra pasión por saber y entender.

Nos esforzamos para que la Revista salga a la calle bella y desafiante; y nos dicen que lo estamos consiguiendo en parte. Procuramos, también, que llegue a nuevos ámbitos en los que pueda interesar.

A partir de este número contamos con la inestimable colaboración de nuestra querida Editorial de la Universidad de Buenos Aires (EUDEBA) que gracias a la generosidad de sus autoridades, se encargará de la distribución de la edición impresa en todo el país. Llegaremos así a más lugares, y a más cantidad de lectores y lectoras que prefieren el papel a la pantalla.

Nadie pone en duda que el desafío contribuye a la generación y divulgación del conocimiento. Pero ¿qué papel juega la belleza en la difusión de las ciencias, si es que en verdad participa ese subjetivo y controvertido concepto?

En uno de sus cuentos, Alejandro Dolina[1] le hace decir al autor de un inexistente y desopilante[2] *Tratado de Música*, que los melómanos no existen. Que la música no le gusta a casi nadie y lo que en verdad atrae es aquello de lo que suele venir acompañada, las atracciones anexas de las que se vale para cautivar a las muchedumbres. Resulta divertido pensar que lo que nos atrae de la ciencia en alguna de sus formas y presentaciones no es la ciencia misma sino, como dice el tratado apócrifo, todo lo que la acompaña. Estamos hablando de la emoción que provoca ese breve y sublime pasaje que va de la incomprensión a la comprensión; nos referimos a la armonía de algunos razonamientos científicos; las nuevas ideas que dispara cada descubrimiento personal que hacemos, por trivial que pueda parecer. Estas cosas, claro está, no son la ciencia, pero explican en cierta medida la extraña e irresistible atracción que ejerce sobre muchos de nosotros. Cuando no conseguimos transmitir estas emociones, rara vez logramos divulgar un conocimiento.

En este número disfrutaremos de un artículo que establece los vínculos entre la música y la matemática, y pone de manifiesto la simbiosis entre la belleza y la ciencia. Se le atribuye a Pitágoras de Samos ser el primero que se percató de la relación íntima entre la matemática y la música. Llego a creer que la fama alcanzada por Pitágoras por su teorema homónimo, debería ser eclipsada por este otro descubrimiento, más trascendente y bello.
Hasta el próximo número.

Juan Carlos Pedraza

1 Tratado de Música y Afines de El libro del Fantasma de Alejandro Dolina. (Colihue, Buenos Aires, 2004)
2 Como señala AR, un desopilante es un medicamento que desopila, o desobstruye, las vías del cuerpo, como le podría ocurrir a alguien por accidente cuando lee algo muy gracioso.

Staff

Q.e.d.
Ciencias duras en palabras blandas©

Revista trimestral de divulgación
Año 2, número 4

Universidad de Buenos Aires
Ciclo Básico Común (CBC)
Departamento de Ciencias Exactas
Pabellón 3, Ciudad Universitaria, Buenos Aires, Argentina

Directores:
Agustín Rela
Juan Carlos Pedraza

Editor:
Carlos Borches

Redacción:
Iliana Pisarro

Diseño:
Pablo Gabriel González

Consejo editorial:
Cecilia Di Risio
Eduardo Laplagne
Flora Gutiérrez
Patricia Fauring
Silvia Reich

Agradecemos la colaboración de
Bruno Mesz
Christian Espíndola
Guillermo Mattei
Gustavo Piñeiro
Jorge Salvetti
Ricardo Durán

Impresa en La Copia

revistaqed@cbc.uba.ar
http://www.slideshare.net/revistaqed
http://www.qed.cbc.uba.ar

+54 11 4789-6000, interno 6083
+54 11 4781-0706
ISSN 1852-5091

Q.e.d. Ciencias duras en palabras blandas

Artículos

Secciones

Q.e.d., Quod erat demonstrandum, es una expresión latina que significa:

lo que se quería demostrar

Tiene su origen en la frase griega όπερ έδει δείξαι (óper édei deíjai), que usaron muchos matemáticos, entre ellos Euclides y Arquímedes, para señalar que habían alcanzado la demostración que buscaban.

¿Por qué usamos 12 notas?

Ricardo G. Durán y Bruno Mesz
Dto. Matemática, FCEyN - UBA

De Pitágoras a Bach

Existen muchas conexiones entre la música y la matemática. Aquí los autores, matemáticos y melómanos, nos muestran el entramado matemático que gobierna la construcción de las escalas musicales.

En la Grecia antigua los pitagóricos estudiaron, entre muchas otras cosas, la armonía, es decir, cómo suenan dos o más sonidos producidos al mismo tiempo o qué combinaciones resultan "agradables" y cuáles no. Por supuesto que "agradable" es algo muy subjetivo (por eso lo ponemos entre comillas), sabemos que hay obras musicales que a algunas personas les parecen hermosas mientras que a otras les resultan espantosas. De hecho, lo que ha sido considerado como musicalmente aceptable fue cambiando a través del tiempo.

Sin embargo, hay algunas reglas básicas que parecen ir más allá de cuestiones culturales, combinaciones de sonido que "suenan bien" (¡otra vez las comillas!) a todas las personas, lo cual ha motivado que distintas culturas en diversos lugares del mundo hayan usado escalas musicales similares.

LA ESCALA PITAGÓRICA

Los pitagóricos producían los sonidos haciendo vibrar una cuerda y, variando la longitud de ésta, obtenían sonidos de distintas alturas, es decir más graves o más agudos. La observación fundamental que hicieron es que dos sonidos tocados simultáneamente resultaban agradables (consonantes) cuando el cociente entre las longitudes de las cuerdas era una fracción cuyo numerador y denominador eran números enteros y pequeños, por ejemplo una el doble de la otra o una el triple de la otra (suponiendo, claro está, que las cuerdas fueran siempre del mismo material y grosor y que estuvieran igualmente tensas). Hoy se sabe que los sonidos son simplemente vibraciones que se transmiten a través del aire hasta nuestros oídos. Se sabe también que la altura de un sonido que produce una cuerda está dada por la velocidad a la que ésta vibra, o dicho de otra manera, a la frecuencia con la que la cuerda vibrante pasa por su posición inicial, y que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

Consideremos el caso más simple: dos cuerdas tales que sus longitudes son una el doble de la otra. La cuerda más corta produce un sonido más agudo que el producido por la más larga. En otros términos, la frecuencia del sonido emitido por la cuerda más corta es el doble que la del producido por la más larga. Ahora bien, ninguna persona con un oído normal diría que estas dos notas son iguales, sin embargo, tienen algo en común de tal forma que al tocarlas simultáneamente se produce un sonido que resulta agradable, y tanto es así, que es usual denominarlas con el mismo nombre. Por ejemplo, si el lector está familiarizado con un piano, sabrá que hay muchas notas que producen Do, si empezamos por la de más a la izquierda entre éstas, el segundo Do tiene el doble de frecuencia, el tercero el doble que el segundo y así sucesivamente.

Un Pitágoras vestido a la usanza del Renacimiento. La ilustración forma parte de Theorica musicae (1492), un libro del compositor Franchino Gaffurio cuyos libros resumieron los conocimientos musicales de la época en Occidente. Según definía Gaffurio, el tactus, el tempo de duración de una redonda, es igual "al pulso de un hombre que respira tranquilamente".

Existen estudios sobre la fisiología del oído y del cerebro para tratar de entender cuál es la razón por la que estas dos notas tocadas juntas suenan bien, pero este es un problema de otra índole que no trataremos en este artículo. De todas formas es interesante el siguiente experimento: escuchar dos notas a la vez dejando fija la más grave y variando la frecuencia de la más aguda comenzando por una con frecuencia un poco mayor que el doble de la primera y haciéndola bajar de a poco hasta llegar a la que tiene exactamente el doble. Se puede apreciar que el sonido inicial es bastante disonante hasta llegar al sonido final que suena prácticamente como si fuera una sola nota[1].

¡Escuche lector!
En el sitio ***http://mate.dm.uba.ar/~rduran/slides.html*** *podrá leer esta nota mientras escucha los sonidos que ilustran los ejemplos. La pantalla no tendrá la calidez del papel, pero permite algunas ventajas*

Volvamos ahora a nuestro problema principal que es la construcción de escalas musicales. Elegir una escala es decidir qué conjunto de notas (es decir las frecuencias) se utilizarán para hacer música. Claro que la primera pregunta que surge es: ¿Para qué determinar de antemano un conjunto de notas?. Algunos instrumentos de cuerdas permiten tocar frecuencias arbitrarias dentro de cierto rango. Este es el caso del violín y de los otros instrumentos de cuerda de la misma familia (viola, violoncelo y contrabajo). En efecto, apretando la cuerda en cualquier lugar se consigue que la parte vibrante tenga una longitud arbitraria menor o igual que la longitud total de la cuerda. Siendo así, se podría dejar que las frecuencias a usar las decidan el compositor y los instrumentistas. Sin embargo, hay muchos otros instrumentos en los cuales las frecuencias que pueden sonar están determinadas al construirlos, este es el caso del piano o los otros instrumentos de teclado conocidos (por ejemplo, el clave) y de muchos instrumentos de viento como la flauta o la infinidad de variantes de este tipo que se han utilizado en diversas culturas (en este caso es la posición de los agujeros lo que determina las frecuencias). En consecuencia, si se quiere tocar música con distintos instrumentos a la vez, es necesario elegir un conjunto de frecuencias distinguibles entre sí por el oído humano.

Una vez aceptado como punto de partida que una frecuencia y su doble suenan bien tocadas simultáneamente, el problema se reduce a elegir qué otras frecuencias intermedias utilizar. Una vez hecho esto, y teniendo en cuenta lo explicado arriba, es natural agregar los dobles y las mitades de las frecuencias elegidas y así sucesivamente hasta llegar a los límites de las frecuencias audibles para el humano.

Como lo que interesan son las proporciones entre frecuencias y no éstas en forma absoluta, supongamos que nuestra nota más grave tiene frecuencia 1 y por lo tanto, la de su doble tiene frecuencia 2. Nuestro problema se reduce entonces a elegir frecuencias intermedias apropiadas (y una vez elegidas éstas, se agregan las frecuencias obtenidas multiplicando y dividiendo por 2, 4, 8, etc.)

Ahora bien, habíamos dicho que dos sonidos tocados simultáneamente resultan agradables cuando el cociente entre frecuencias es un número entero pequeño. Entonces la primera nota que agregaríamos es la que tiene frecuencia 3, pero como queremos agregar frecuencias intermedias entre 1 y 2, agregamos la frecuencia $3/2$ (¡ya que 3 es el doble de $3/2$!). En el lenguaje usual de la música clásica occidental, el intervalo entre dos notas tales que la frecuencia de una es $3/2$ de la de la otra, se llama una *quinta*, mientras que el intervalo formado por una nota y la del doble de su frecuencia se llama *octava*. En lo que sigue utilizaremos esta terminología aunque no entraremos en detalles sobre su origen.

Tenemos ya dos notas de nuestra escala cuyas frecuencias son

$$1 \quad , \quad 3/2$$

Ya que sabemos que dos notas cuyas frecuencias están en relación $3/2$ (intervalo de quinta) suenan agradablemente en simultáneo, la idea es seguir agregando las "quintas" de cada una de las notas. La siguiente nota corresponde a la frecuencia $3/2 \,.\, 3/2 = 9/4$, pero como el resultado es mayor que 2, lo dividimos por 2 (pues, como ya dijimos, la frecuencia mitad da la misma nota una octava más abajo), obteniendo así la frecuencia $9/8$. Hasta ahora las frecuencias de las notas de nuestra escala están dadas entonces por

$$1 \quad , \quad 9/8 \quad , \quad 3/2$$

1. Es decir, hay una fusión de las dos notas en una, y a esto obedece el llamarlas igual. La idea de relacionar grado de consonancia con grado de fusión forma la base teórica de algunos estudios fisiológicos recientes.

El procedimiento sigue ahora de la misma manera, es decir, en cada paso se multiplica la frecuencia de la última nota agregada por $3/2$ y se agrega la nota correspondiente. Es decir, si el resultado es menor que 2 se agrega esa frecuencia y si no, se la divide por 2.

Si llegáramos a la misma nota de la que empezamos pararíamos allí, pues continuar significaría repetir las notas ya agregadas a la escala. Sin embargo esto no es posible, en efecto, el procedimiento usado consiste en multiplicar por $3/2$ y, algunas veces, dividir por 2. De esta manera las frecuencias de todas las notas que se agreguen serán de la forma

$$3^m/2^n$$

con m y n números enteros positivos, por lo que nunca podríamos llegar al 2 ni al 1 ya que ningún entero se puede escribir como una fracción de esa forma porque el 3 y el 2 son números coprimos (es decir, que una tal fracción es irreducible).

En consecuencia, podríamos seguir agregando notas eternamente. ¿Cuándo parar entonces? Observemos que, si seguimos un paso más después de la duodécima nota, la siguiente frecuencia resulta ser:

$$3^{12}/2^{18} = 2,02728$$

un sonido muy cercano a la nota 2. Al dividir este número por 2 obtenemos una frecuencia muy cercana a 1, la nota original, que está en el extremo inferior de la escala que queremos construir. Por este motivo es que se adoptó la escala de doce notas construida de esta manera y llamada *escala pitagórica*. La diferencia

$$2.02728/2 = 1.01364$$

se llama usualmente *coma pitagórica*.

Los cocientes entre las frecuencias de las notas de esta escala y la nota con la cual empezamos la construcción (llamada *tónica*) están dadas por

$$1,\ 3^7/2^{11},\ 3^2/2^3,\ 3^9/2^{14},\ 3^4/2^6,\ 3^{11}/2^{17},\ 3^6/2^9,\ 3/2,\ 3^8/2^{12},\ 3^3/2^4,\ 3^{10}/2^{15},\ 3^5/2^7$$

Como dijimos más arriba, comenzábamos por una nota de frecuencia 1 porque lo que importa para la construcción de una escala son las proporciones entre las frecuencias.

Para obtener las verdaderas frecuencias de la escala musical debemos decir en primer lugar cómo medimos las frecuencias. La manera usual es utilizar como unidad la cantidad de vibraciones por segundo. Esta unidad de medida se conoce con el nombre de *hertz* (que proviene del físico alemán Heinrich Hertz). Por ejemplo, la frecuencia 261 Hz es la de una nota Do. Comenzando por ella, y multiplicando por los factores obtenidos arriba, obtenemos la escala usual cuyas frecuencias en Hertz están dadas en la Tabla 1.

SEMITONOS Y LA ESCALA TEMPERADA

El intervalo entre una nota y la siguiente de una escala se llama *semitono*.

En la escala pitagórica construida más arriba hay dos clases de semitonos. En efecto, si hacemos el cociente entre las frecuencias de dos notas sucesivas de la escala, obtenemos los números $3^7/2^{11}$ o $2^8/3^5$ dependiendo de cuál sea el par de notas sucesivas elegidas.

Observemos además que los dos semitonos son muy parecidos, en efecto, tenemos que

$$3^7/2^{11} \sim 1,0679$$

mientras que

$$2^8/3^5 \sim 1,0534$$

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1893) Su interés por la meteorología lo llevó a estudiar los fenómenos electromagnéticos donde logró valiosos resultados, aunque para él "sólo comprobaba que el maestro Maxwell estaba en lo cierto". También descubrió el efecto fotoeléctrico, luego explicado por Einstein.

Orden	Nota	Frecuencia
1	Do	261,6256
8	Do#	279,3824
3	Re	294,3288
10	Re#	314,3052
5	Mi	331,1199
12	Fa	353,5934
7	Fa#	372,5099
2	Sol	392,4384
9	Sol#	419,0736
4	La	441,4932
11	La#	471,4578
6	Si	496,6799

Tabla 1: Escala pitagórica

Johann Sebastian Bach (1685-1750) músico alemán cuya influencia musical llega hasta nuestros días. La obra que exponemos data del año 1825 y se encuentra actualmente en el Museo Británico

La existencia de dos semitonos distintos trae consecuencias indeseables al transportar un motivo musical en un instrumento de afinación fija como el piano. Por ejemplo, si a una melodía que comienza en la nota Do se la transporta subiendo todas sus notas un semitono (es decir comenzándola en Do#) sonará distinta a la original si se usa la escala pitagórica.

Esto motivó la construcción de una escala alternativa conocida con el nombre de *temperada* y que fue comenzada a usar por Johann Sebastian Bach. La idea para construir esta escala es simple: seguir usando doce notas pero cuyas frecuencias sean tales que el cociente entre dos sucesivas resulte siempre igual, es decir, que los semitonos sean todos iguales. La escala así construida resulta muy parecida a la pitagórica, de hecho, son indistinguibles.

¿Cuáles son los intervalos de la escala temperada? Al igual que en la construcción de la pitagórica, partimos suponiendo que la primera nota tiene frecuencia 1 y queremos encontrar las frecuencias de las siguientes notas de tal forma que se cumpla que el cociente entre las frecuencias de dos notas sucesivas sea un valor x constante. Para que esto pase, la frecuencia de la segunda nota debe ser x, la de la tercera x^2 y así sucesivamente hasta llegar a que la duodécima nota debe tener una frecuencia igual a x^{11} y la siguiente una igual a x^{12}. Pero queremos que esta nota tenga una frecuencia igual al doble de la de la nota de la partimos, es decir que $x^{12} = 2$, o sea, $x = \sqrt[12]{2}$.

En consecuencia, los factores por los que tenemos que multiplicar la frecuencia de nuestro primer nota para obtener la escala temperada de doce notas son las siguientes,

$$1,\ \sqrt[12]{2},\ (\sqrt[12]{2})^2,\ (\sqrt[12]{2})^3,\ (\sqrt[12]{2})^4,\ (\sqrt[12]{2})^5,\ (\sqrt[12]{2})^6,\ (\sqrt[12]{2})^7,\ (\sqrt[12]{2})^8,$$
$$(\sqrt[12]{2})^9,\ (\sqrt[12]{2})^{10},\ (\sqrt[12]{2})^{11}$$

Como ya dijimos, las escalas pitagórica y temperada son muy parecidas. Uno puede ver usando una calculadora que los factores dados aquí arriba, que definen la escala temperada, son muy cercanos a las fracciones que definen la pitagórica. Esta cercanía es mayor en la quinta que en el resto de las notas. En efecto, el número $(\sqrt[12]{2})^7 \sim 1$ que define la quinta en la escala temperada es prácticamente igual a $3/2$. Esto resulta importante dado el papel primordial que juega la quinta en la música occidental.

Si comenzamos nuevamente por la nota Do cuya frecuencia es 261 Hz, las frecuencias de la escala temperada son las de la Tabla 2.

Nota	Frecuencia
Do	261,6256
Do#	277,1826
Re	293,6648
Re#	311,1270
Mi	329,6276
Fa	349,2282
Fa#	369,9944
Sol	391,9954
Sol#	415,3047
La	440,0000
La#	466,1638
Si	493,8833

Tabla 2: Escala temperada

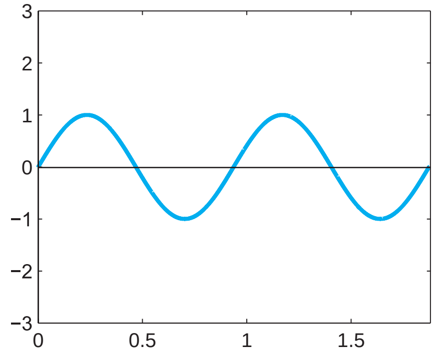
BATIDOS Y REPRESENTACIÓN DE LOS SONIDOS

Cuando se escuchan simultáneamente dos sonidos cuyas frecuencias son muy cercanas se percibe una oscilación en el volumen del sonido resultante. A estas oscilaciones se las llama *batidos*.

Los batidos resultan de utilidad práctica para los músicos al afinar instrumentos. En efecto, si uno quiere ajustar la afinación, por ejemplo de dos cuerdas que deben producir la misma nota, si se perciben batidos es que la afinación no es correcta.

Para dar una idea de por qué se producen los batidos necesitamos hablar antes de cómo se representan los sonidos, Más allá de los batidos, la representación matemática de los sonidos es fundamental en numerosas aplicaciones, por ejemplo, en lo que tiene que ver con grabación y reproducción de los sonidos.

Las dos propiedades fundamentales de un sonido son su volumen (o sea, cuán fuerte lo oímos) y su altura (cuán grave o agudo lo oímos). Como ya hemos dicho, los sonidos son vibraciones en el aire y su altura depende de la cantidad de vibraciones por segundo, siendo el sonido más agudo cuanto mayor sea esta cantidad de vibraciones.



Gráfica de $p(t) = sen\ 2\pi t$

¿Cómo representar gráficamente estas vibraciones? Pensemos nuevamente en una cuerda vibrante y en cómo se mueve un punto de la cuerda (por ejemplo su punto medio). Al vibrar la cuerda, este punto se moverá hacia arriba y hacia abajo de tal forma que, si graficamos la posición del punto en función del tiempo, obtenemos una curva oscilante. Las funciones trigonométricas clásicas, el seno y el coseno, son funciones oscilantes simples y juegan un papel fundamental en este tema.

Indiquemos con t al tiempo medido en segundos y con $p(t)$ a la posición del punto de la cuerda en el instante t (suponiendo que cuando la cuerda está fija el punto está a altura cero). Consideremos los siguientes ejemplos simples de movimientos oscilatorios:

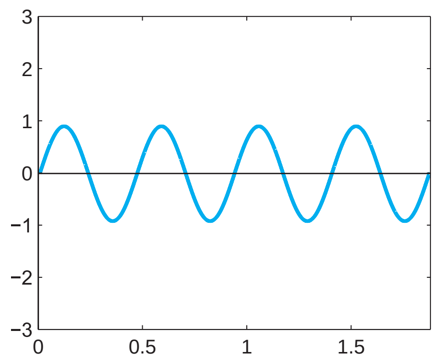
Si tuviéramos

$$p(t) = sen\ 2\pi t$$

en el instante inicial, el punto estaría a altura 0, es decir: $p(0)=0$, y luego de 1 segundo habría vuelto a su posición inicial, $p(1)=0$, habiendo oscilado una sola vez como se ve en el gráfico. Luego se repite el mismo movimiento sucesivamente obteniéndose de esta forma lo que se llama una función periódica (en el gráfico se muestran los dos primeros ciclos). Decimos entonces que la *frecuencia*, dada por la cantidad de vibraciones por segundo, es igual a 1 Hz.

Si fuera, en cambio,

$$p(t) = sen\ 4\pi t$$



Gráfica de $p(t) = sen\ 4\pi t$

al cabo de 1 segundo también el punto volvería a estar en su posición inicial pero habiendo oscilado dos veces, es decir que en este caso la frecuencia es igual a 2 Hz.

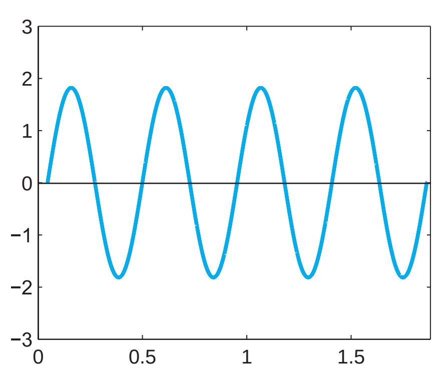
Por otra parte, en ambos ejemplos, la altura máxima que alcanza el punto es igual a 1 (y análogamente hacia abajo llega a -1). Decimos entonces que la *amplitud* de este movimiento oscilatorio es igual a 1.

Como ya hemos dicho, la frecuencia es lo que nos da la altura del sonido: cuanto mayor sea la frecuencia más agudo será el sonido. Por otra parte, la amplitud está relacionada con el volumen: mayor amplitud implica volumen más alto. Intuitivamente, si la cuerda se pulsa fuerte, las oscilaciones serán de mayor tamaño y el sonido producido se escuchará más fuerte.

Por ejemplo, si

$$p(t) = 2.sen\ 4\pi t$$

la frecuencia es la misma que en el segundo ejemplo pero la amplitud es el doble, es decir que escuchará una nota de la misma altura que en ese ejemplo pero más fuerte.



Gráfica de $p(t) = 2sen\ 4\pi t$

En la práctica las oscilaciones son de magnitudes mucho mayores que en la de estos ejemplos (como habíamos dicho, la frecuencia del Do central de un piano es 261 Hz). Generalizando los ejemplos, tenemos que un movimiento oscilatorio dado por

$$p(t) = A.sen\ 2\pi ft$$

siendo A y f números positivos, tiene una amplitud igual a A y una frecuencia igual a f.

Por supuesto que en la práctica el sonido se va apagando hasta desaparecer debido al rozamiento de la cuerda con el aire, o sea que la altura de la curva debería ir decayendo. Sin embargo, la representación de una vibración por una función periódica resulta ser una buena aproximación de gran utilidad en muchas aplicaciones.

Daniel Bernoulli (1700-1782) Miembro de una impresionante familia de matemáticos, debió estudiar medicina porque su padre, Johann, se oponía a que hubiera otro matemático en la familia ya que "no hay dinero con las matemáticas".

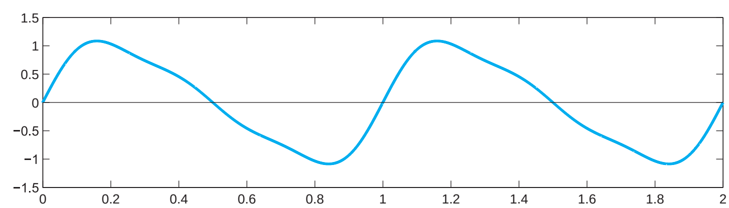
Obediente, Daniel estudió medicina y su tesis doctoral consistió en la aplicación de las ideas de su padre sobre energía cinética de los gases al estudio de la respiración. Luego de esto, lentamente, orientó su vida a la física y matemática done realizó aportes singulares en probabilidad, ecuaciones diferenciales, hidrodinámica y teoría cinética de los gases.

Como es de esperar, el movimiento de un punto de la cuerda es en realidad mucho más complejo que el descripto por las funciones trigonométricas de los ejemplos de más arriba. Lo mismo podemos decir para cualquier otra vibración producida por algún instrumento.

Sin embargo, se puede ver que un movimiento oscilatorio general puede ser descripto no ya por una sola función trigonométrica, pero sí por una suma de este tipo de funciones con distintas frecuencias que son múltiplos de una frecuencia dada, llamada *fundamental*. Esa frecuencia fundamental es la que determina la altura de la nota mientras que el peso con que aparecen las frecuencias más altas determina lo que se conoce como el *timbre* (que es lo que hace que una misma nota suene de modo distinto en un instrumento que en otro)

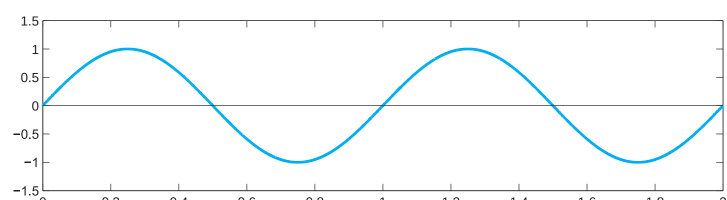
A modo de ejemplo mostraremos en el gráfico siguiente una función periódica que es la suma de múltiplos de las tres funciones trigonométricas que se muestran abajo

La escritura de funciones periódicas como suma de trigonométricas (en general una serie o "suma de infinitos términos") es lo que se conoce como desarrollo en serie de Fourier, ya que fue el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) quien desarrolló este método, aunque también habían utilizado ideas similares otros matemáticos anteriores a él, por ejemplo, los célebres Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler (1707-1783).

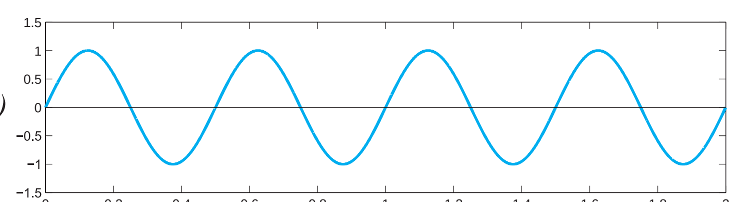


$$p(t) = a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t) + a_3 p_3(t)$$

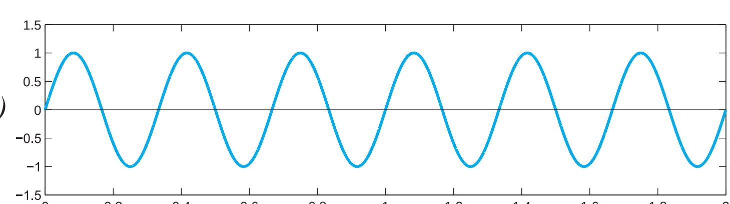
$p_1(t)$



$p_2(t)$



$p_3(t)$



Autoreferencial:

Otros artículos de Q.e.d. donde se abordan cuestiones conectadas con los temas de este artículo:

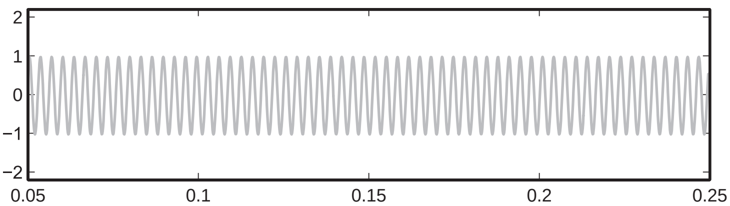
Tras las huellas de Fourier, Q.e.d. Nro 1.

Alinealidades, Q.e.d. Nro 2.

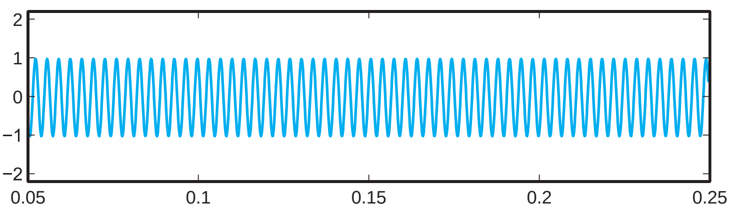
Volvamos ahora al tema de los batidos. Habíamos dicho que éstos se producen al tocar simultáneamente dos notas de frecuencias muy cercanas. Supongamos entonces que tenemos dos movimientos oscilatorios elementales, con una frecuencia f_1 y el otro con frecuencia f_2. Es decir, estos movimientos están representados por $sen(f_1\ t)$ y $sen(f_2\ t)$. Al superponerlos obtenemos el sonido representado por la suma, la que según una igualdad trigonométrica conocida, puede escribirse de la siguiente manera,

$$sen(\ 2\pi f_1 t) + sen\ (2\ \pi\ f_2 t) = 2\ cos(\pi\ (f_1 - f_2)t)\ sen(\pi\ (f_1 + f_2)t)$$

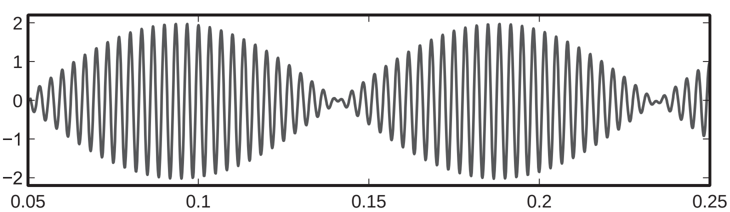
Mirando el lado derecho de la fórmula observamos que el sonido obtenido al



$sen(\ 2\pi f_1 t)$

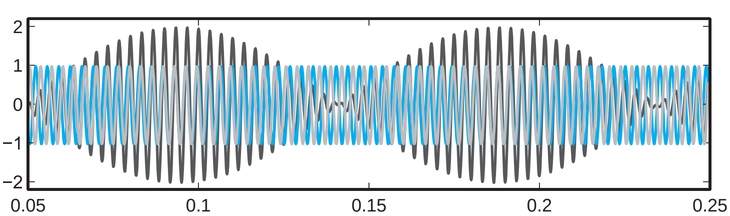


$sen\ (2\ \pi\ f_2 t)$



$sen(\ 2\pi f_1 t) + sen\ (2\ \pi\ f_2 t) = 2\ cos(\pi\ (f_1 - f_2)t)\ sen(\pi\ (f_1 + f_2)t)$

donde f_1 y f_2 difieren poco.



superponer las dos notas tiene una frecuencia igual al promedio de las frecuencias de los sonidos originales, que al ser estas casi iguales, resulta ser también casi igual (por eso oímos una nota de la misma altura), pero tiene una amplitud variable dada por, $2\ cos(\pi\ (\omega_1 - \omega_2)t)$ es decir una amplitud oscilante como se aprecia en la figura y en consecuencia un volumen también oscilante como se aprecia al escuchar.

El batido es el fenómeno que utilizan los afinadores de pianos para ganarse la vida. Resulta que para ganar sonoridad los pianos suelen tener tres cuerdas por cada nota en lugar de una. Aunque tengan grosores y longitudes levemente diferentes, las tres deben vibrar con la misma frecuencia (o casi). Las tres son golpeadas con el mismo martillo cuando se toca una tecla. Pero el afinador las afina con leves diferencias buscando el color particular que producen los batidos. En vez de suprimirlos los aprovecha, porque le agregan "temperamento" al sonido de la nota.

Colaboró en la elaboración de gráficos y archivos de sonido *Mariana Prieto*

Pablo el Diácono (720–800), también conocido como Paulus Diáconus, Cassinensis ('de la abadía de Montecassino') o Pablo Warnefred.

Notas en palabras y letras

Hay dos difundidas tradiciones para nombrar las notas musicales, A, B, C, D, E, F, G por una parte; y también la, si, do, re, mi, fa, sol.

Se podría creer que la correcta es la de los nombres, y que las letras serían una modernización en contra del espíritu clásico de la música. Pero las dos convenciones son equivalentes, casi igualmente antiguas, y parece más universal la de las letras.[1]

La palabra bemol, que indica la disminución en un semitono de la frecuencia de una nota, se originó en *be mole*, B suave en italiano.

1 Por convención internacional, la nota la (o A) se considera la primera de la escala, y se le atribuye una frecuencia exacta de 440 ciclos por segundo. Es la que oímos en el tono del teléfono.

Los nombres largos provienen de un himno que compuso el monje benedictino Pablo el Diácono en el siglo VIII:

UT queant laxis
REsonare fibris
MIra gestorum
FAmuli tuorum
SOLve polluti
LAbii reatum
Sancte Ioannes!

(En latín: ¡San Juan: para que tus siervos podamos proclamar tu milagrosa gesta, limpia la culpa de nuestros labios impuros!)

Ut es el nombre antiguo de la nota do, palabra frecuente en las palabras cruzadas.

A.R.

Problemas matemáticos

El desafío de Mozart

Musikalisches Würfelspiel es una singular obra pergeñada por Wolfgang Amadeus Mozart en 1787. En realidad la obra es un generador de valses que muy probablemente podríamos escuchar por años sin que se repitiera dos veces el mismo vals.

Para comenzar, Mozart escribió 176 compases y los agrupó en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. Propuso que cada vals tuviera 16 compases y planteó elegir aleatoriamente cada compás arrojando dos dados (Würfelspiel).

Las formas de elegir cada compás requiere de esta revista un poco más de espacio, pero sin detenernos en las reglas ya podemos empezar a conjeturar algunos problemas cómo ¿Cuántos valses serán posibles? Si cada uno demora 30 segundos en ejecutarse ¿Cuántos puedo escuchar en 10 años empleando cada día cuatro horas? ¿Qué porcentaje del total representa? Ateniéndonos a las reglas ¿Todos los valses son equiprobables?

Para quienes picaron, los invitamos a navegar por las páginas de la red donde se describen con detalles las reglas de este Juego de dados musical e incluso, en algunos casos, se podrá escuchar una pieza que ni su mismo autor tuvo tiempo de escuchar.

C.B.

Guillermo Mattei,
Dto. de Física, FCEyN - UBA.

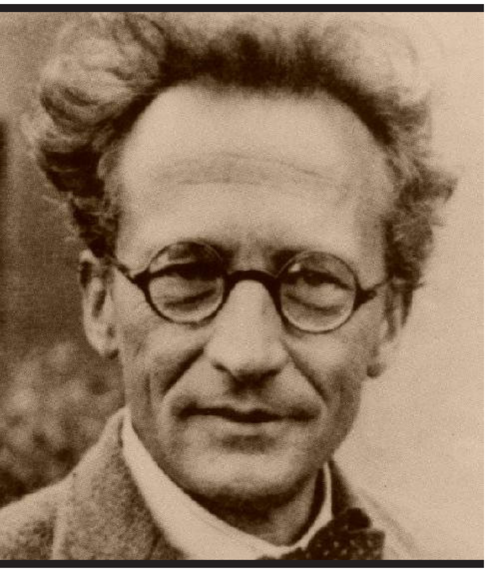
La paradoja de la Mecánica Cuántica de “El gato de Schrödinger”

Acerca de aquel famoso gato cuántico

Fue un gato de la propiedad intelectual de uno de los padres de la mecánica cuántica, Erwin Schrödinger (1887-1961). Lejos de rayar muebles, deshacer madejas de lana y acechar pájaros, este gato no sólo perturbó las ideas de su dueño legítimo sino la de innumerables pensadores de varios campos del conocimiento. Los físicos del Siglo XXI, ¿le habrán puesto su cascabel?

Un ámbito hermético en sentido amplio: ninguna influencia externa lo penetra. Adentro un gato y un experimentador, IN, que no respira el aire del recinto sino el de un equipo autónomo propio. Afuera otro experimentador, OUT, que puede disparar un fotón, emitido por una fuente luminosa en un cierto estado predeterminado, que viaja por el interior del recinto hasta un espejo semiespejado que dividiría cualquier haz de luz incidente en uno transmitido en la dirección original y en otro reflejado en una dirección perpendicular. En el camino del haz reflejado hay una fotocélula que accionaría un mecanismo que liberaría cianuro al recinto si detectara una señal luminosa. ¿Qué pasará si OUT dispara el fotón disponible? ¿El gato tendrá igual chance de morir que de vivir? ¿El gato estará vivo y muerto simultáneamente? ¿IN y OUT influyen en el resultado del experimento al intentar reportar lo sucedido? ¿El aire del recinto, con o sin cianuro, afecta la medición? ¿Las mismísimas naturalezas de IN y OUT, incluidas las de sus estados concientes, son relevantes?

Mirar por la ventanilla del tren de alta velocidad de la presente nota, que atraviesa raudamente el mundo de la Mecánica Cuántica, podría dejarnos divisar algunas imágenes con las respuestas a estos interrogantes o, quizás, con más preguntas.



Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961) compartió con Paul Dirac, en 1933, el Premio Nobel de Física por sus contribuciones a la mecánica cuántica, pero también se ocupó - entre otras cosas- de buscar puentes entre la física y la vida.

En 1944 publicó ¿Qué es la vida? donde sostenía que la vida no es ajena a las leyes de la termodinámica y escandalizó a muchos biólogos con sus reflexiones sobre la herencia. Unos años más tarde, los descubridores de la estructura de doble hélice del ADN, James D. Watson y Francis Crick, señalaron a la obra de Schrödinger como una de sus principales fuentes de inspiración.

UN MUNDO FANTÁSTICO

Las filosofías realistas, o *allí afuera hay un mundo objetivamente real*, se llevaron muy bien con el electromagnetismo de Maxwell, la relatividad de Einstein y, por supuesto, con la mecánica newtoniana. Sin embargo, pequeñas discrepancias entre la realidad y la física del siglo XIX, generaron una nueva física para un nuevo mundo: el mundo cuántico. De todas maneras, este mundo cuántico también es capaz de emerger en el nuestro a través de la existencia de los cuerpos sólidos, de la resistencia, de la superconductividad y en la química, los colores, la herencia y, según el físico británico Roger Penrose, probablemente en la mismísima naturaleza de la conciencia humana.

La imagen del mundo, según la mecánica cuántica, puede tener dos interpretaciones. Según el danés Niels Bohr (1885-1962), más que un padre de esta rama de la Física, esa imagen no es objetiva ni hay realidad externa: sólo hay realidad en la medida. Pero, según la línea einsteniana de Penrose, el estado cuántico es el que debería tener los atributos de realidad física objetiva.

La manera de conocer la evolución temporal de los estados cuánticos es a través de la llamada ecuación de Schrödinger (EcSch): precisa y determinista. Sin embargo, cuando tiene lugar una medición, el estado cuántico, que tan eficientemente establece la EcSch, desaparece y sólo sirve para calcular las diversas probabilidades de que el estado salte de uno a otros nuevos estados posibles: el famoso salto cuántico.

Pensemos en una partícula. Clásicamente la caracterizan su posición y su velocidad pero, cuánticamente, cada posición simple que ella puede ocupar, es sólo una alternativa disponible. En mecánica cuántica, deben coexistir siempre las posibilidades alternativas abiertas a un sistema, sumadas y ponderadas por pesos estadísticos que, para darle mayor extrañeza a la teoría, son números complejos. Esta colección de pesos estadísticos complejos describe el estado cuántico de la partícula. La función compleja de la posición que se construye con esta colección de pesos estadísticos es la llamada *función de onda psi* (Ψ) o “la probabilidad de que la partícula esté en tal posición”.

Penrose sostiene que la función de onda etiqueta el estado como un todo y que la realidad física de la localización de la partícula es, en todo caso, su estado cuántico Ψ. Para hablar de la probabilidad de localizar a la partícula en una posición, hay que tomar el módulo de Ψ y elevarlo al cuadrado. Sorprendentemente, la función de onda también contiene las amplitudes relacionadas con la velocidad de la partícula, por medio de un procedimiento similar al del análisis armónico de los sonidos musicales: los tonos puros de las distintas notas podrían asimilarse a los diferentes valores posibles de la velocidad que pudiera tener la partícula. Estas dos versiones de la función de onda, la de la posición y la de la velocidad, están ligadas mutuamente por la llamada *transformada de Fourier.* Por ejemplo, un estado de posición, en la imagen ordinaria del espacio de las posiciones, es una función que tiene un pico muy agudo en la coordenada de posición en cuestión y todas las otras amplitudes, correspondientes a los otros infinitos valores de la posición, son nulas. La transformada de Fourier de esta función da, en el espacio de estados de velocidades, una función armónica.

INCERTIDUMBRE DESDE EL PRINCIPIO

Casi como una consecuencia esperable en funciones apareadas a través de la transformada de Fourier, las precisiones de las dos variables involucradas, posición y velocidad, están mutuamente condicionadas. Es más, existe un límite absoluto para el producto de estas precisiones: el famoso *principio de incertidumbre de Heisenberg*. Casi el ícono de la mecánica cuántica: “Si la posición fuera medida con precisión infinita, entonces la velocidad quedaría totalmente indeterminada y viceversa”. Penrose se pregunta y se responde: “¿Torpeza en el proceso de medida? Confuso. ¿Propiedad típica de las partículas? Falso. ¿Los conceptos clásicos de posición y velocidad son inaplicables para la partícula cuántica? Demasiado pesimismo…”

Sin embargo, es posible balancear estas incertidumbres, de manera compatible con el principio, y construir funciones de onda con estados de posición y velocidad muy similares entre sí. Un estado cuántico de este tipo se lo conoce como *paquete de ondas* y es la mejor aproximación cuántica a una partícula clásica.

Detrás de esta evolución del paquete de ondas en el tiempo, obviamente, está la EcSch. Lo que hace la ecuación es propagar cada uno los estados de velocidad posibles -como se dijo: a los que se podrían asimilar tonos puros en acústica musical- de manera tan determinista como las ecuaciones de Maxwell.

"Considerando que Ψ describe la realidad del mundo, en tanto está gobernada por la EcSch determinista, no tenemos nada de ese indeterminismo que se supone que es una característica inherente a la teoría cuántica", aclara Penrose. Este mecanismo recibe el nombre de *proceso de evolución* $\boldsymbol{U}$. Sin embargo, cada vez que se mide, amplificando los efectos cuánticos hasta el nivel clásico, la cosa es

¿En qué consiste la paradoja?

La paradoja de Scrödinger se basa en un hecho casual e imprevisible que ocurre en un sistema aislado. El sabio imaginó un gato encerrado con una ampolla de veneno que se rompe o permanece intacta según el resultado de un experimento azaroso. La física cuántica establece que mientras no se observe una partícula, persiste la incertidumbre acerca de su estado. Shrödinger se preguntó si entonces, y mientras la caja permaneciese sin abrir, el gato encerrado estaría a la vez vivo y muerto.

El experimento podría ser que un fotón pase o no al interior de una caja, y que la partícula de luz pueda desencadenar, quizás, el trágico fin del animal de experimentación; o, de modo opuesto, rebotar en el espejo y salvarlo. Si el fotón, de acuerdo con la mecánica ondulatoria cuántica, está a la vez adentro y afuera de la caja ¿estará el gato a la vez vivo y muerto? Ésa es la aparente paradoja, en una de sus versiones.

Su solución para este caso es que el fotón está a la vez adentro y afuera de la caja, mientras no se produzca su interacción con ningún otro objeto. Una vez que interacciona, queda definido dónde ejerció su acción. Cerca de la mitad de las veces que se repita ese experimento, el gato sobrevivirá; y por desdicha perecerá el resto de las oportunidades, estadísticamente, como si se decidiera su suerte a los dados.

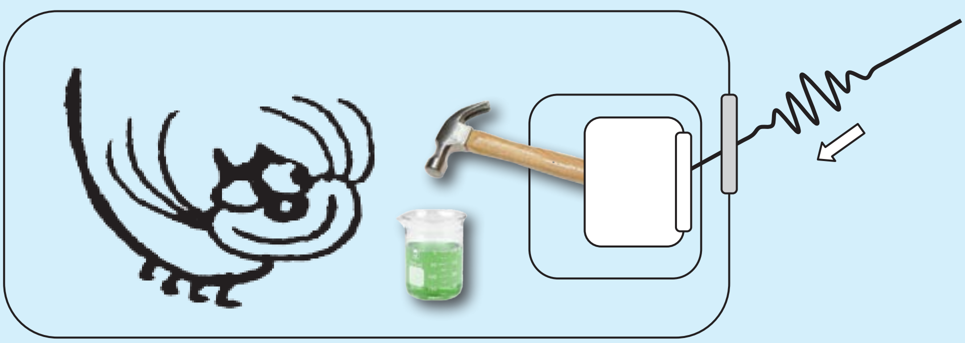
El concepto de observación es, cuánticamente, más amplio que el clásico, e incluye todo tipo de interacción. Aunque el experimentador permanezca afuera de la caja, el fotón disparará el mecanismo, o no lo hará, se sepa o no eso en un dado instante. Ningún humano observa el mecanismo, pero como observar es lo mismo que producirse una interacción, alcanza con que un fotón se absorba, o que rebote al chocar con otro cuerpo, para que la suerte del felino quede echada.

El gato de Schrödinger está vivo, o bien está muerto, lo sepamos o no después de jugar su suerte en esa cruel e imaginaria ruleta fotónica.

La base de la paradoja del gato consiste en llevar al extremo la idea cuántica de que la observación incide sobre el desarrollo del fenómeno, que parece fácil de entender cuando lo que se observa es una sola partícula de la que interesa saber a la vez su posición y su velocidad. Schrödinger, en cambio, imagina un hecho que ya está a todas luces resuelto: el gato o bien murió envenenado, o aún sigue con vida, según la ampolla esté íntegra o rota. El sabio se pregunta si el hecho de averiguarlo al abrir la caja, influye en la suerte ya echada del animal.

¿En qué estado se encuentra una partícula que decidimos no observar todavía? Esa pregunta carece de sentido cuántico, pues la física, a partir de 1916, rechaza la idea de una realidad separada del observador.

A.R.



Interpretación del autor de la idea de Scrödinger. El fotón pasa al interior de la caja y dispara el mecanismo que envenena el gato, o bien rebota con igual probabilidad. Mientras eso no se sepa ¿el gato está a la vez vivo y muerto? El dibujo del irracional es de Juan Carlos Colombres, más conocido como Landrú.

diferente. El proceso ***U*** ya no es aplicable: los físicos emplean el proceso ***R***, que implica la construcción de las probabilidades a partir de las amplitudes. A diferencia de ***U***, ***R*** es el culpable de la introducción de las incertezas y de la aleatoriedad en la teoría cuántica. ***U*** es la herramienta de cálculo de los físicos pero ***R*** es el insomnio de los filósofos. Mientras ***U*** es determinista, ***R*** es todo lo contrario. ***U*** mantiene las superposiciones complejas pero ***R*** las viola. ***U*** es continuo y ***R*** es descaradamente discontinuo. No hay manera de deducir ***R*** como un ejemplo complicado de ***U***. Esta excentricidad y misterio de la mecánica cuántica esconde, nada menos, lo qué significa hacer una medida.

En física es muy útil construir espacios asociados a los sistemas en estudio, llamados de *fases*, de dimensión igual a la suma del número de, por ejemplo, las componentes de la posición y de la velocidad. Particularmente, en mecánica cuántica, esos espacios se llaman *espacios de Hilbert* y, un punto en ese espacio representa el estado cuántico del sistema entero. Este espacio es vectorial y complejo y permite armar las sumas ponderadas imprescindibles en este mundo. Los elementos de este espacio se llaman vectores de estado y se representan por el símbolo $|x>$.

La realidad de los estados cuánticos es motivo de profunda y casi interminable discusión entre los especialistas. Penrose opina que hay que hacer una distinción entre lo que es objetivo y lo que es medible según la mecánica cuántica. El vector de estado de un sistema no es medible, aunque parece ser una propiedad objetiva del sistema, y está caracterizado completamente por los resultados que debe dar en los experimentos que pudieran realizarse.

Cuando se trata de muchas partículas, la complejidad de las superposiciones de las diferentes localizaciones posibles de todas las partículas por separado aumenta, más que considerablemente, la complejidad del panorama. Por ejemplo, en el caso del estado de dos partículas, con solo diez posiciones permitidas, el estado $|\Psi>$ tendría la forma:

$Z_{00}|0>|0> + Z_{01}|0>|1> + \dots + Z_{09}|0>|9>$. ¿Y cuando se trata de un gato?

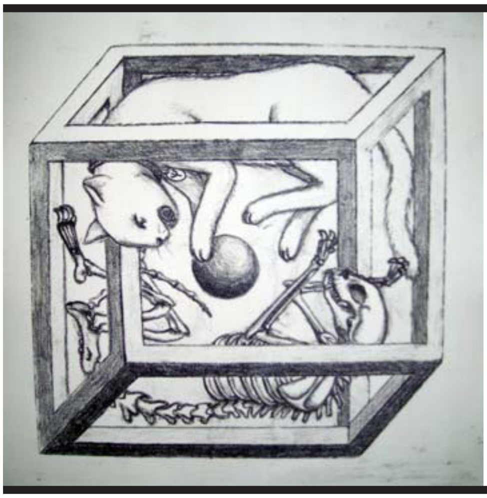
Homenaje al físico Erwin Schrödinger en un billete de mil chelines austríacos. (Hasta el 20 de abril de 2018 el Oesterreichische National Bank lo canjea por 72,67 euros.) Nótese la presencia de la función Ψ ubicada en el círculo a la derecha de Schrödinger.

EL GATO CUÁNTICO

Desde del punto de vista del experimentador IN, o bien el fotón ha sido reflejado, porque se observa que la fotocélula ha registrado y el gato ha muerto, o bien se considera que el fotón ha sido transmitido, porque se observa que la fotocélula no ha registrado nada y el gato está vivo. O lo uno o lo otro ocurre realmente: ***R*** ha actuado y la probabilidad de cada alternativa es 50%. Para el experimentador OUT, se puede suponer que el vector de estado inicial de su contenido le es conocido antes de que la habitación sea cerrada y ninguna medida ha tenido lugar realmente de modo que la evolución completa del vector de estado debería haber seguido la evolución de U. El fotón es emitido por su fuente, en su estado predeterminado, y su función de onda se desdobla en dos haces, con una amplitud de, pongamos, $1/\sqrt{2}$ de que el fotón esté en cada uno de ellos (de modo que el cuadrado del módulo lleva a la probabilidad del 50%). Puesto que todo el contenido está siendo tratado como un solo sistema cuántico por OUT, la superposición lineal de alternativas debe mantenerse hasta la escala del gato. Hay una amplitud $1/\sqrt{2}$ de que la fotocélula registre y otra de $1/\sqrt{2}$ de que no lo haga. Ambas alternativas deben estar presentes en el estado, con el mismo peso como parte de una superposición lineal cuántica. Según OUT, ¡el gato está en una superposición lineal de estar muerto y estar vivo!

Si bien el propio Schrödinger fue el primero en espantarse de esta posibilidad, la evidencia experimental abrumadora posterior al desarrollo del formalismo cuántico termina de confirmar la realidad objetiva del proceso U. Si para OUT el gato está vivo y muerto, sólo cuando se abre el recinto colapsará el vector de estado del gato en uno u otro estado. Para IN, el vector de estado habría colapsado mucho antes, y la combinación lineal de OUT, $|\Psi> = (1/\sqrt{2})\ (|muerto> + |vivo>)$, no tiene importancia. "Demasiada subjetividad", protesta Penrose.

Si el OUT, a partir de su conocimiento del estado inicial del interior del recinto, hiciera algo más elaborado que mirar, tal como utilizar alguna manera de calcular con la EcSch cuál debe ser el estado en el contenedor obtendría de manera determinista a $|\Psi>$, que incluye la superposición vivo-muerto y descarta todas las otras posibles combinaciones y amplitudes, entre las cuales se encuentran vectores de estado ortogonales al original en el espacio de Hilbert. De modo que es algo más que la simple coexistencia entre la vida y la muerte lo que afecta al gato: todas las diferentes combinaciones complejas están permitidas y todas ellas son, en principio, distinguibles una de otra. Sin embargo, para IN todas esas combinaciones son irrelevantes: gato vivo o gato muerto.

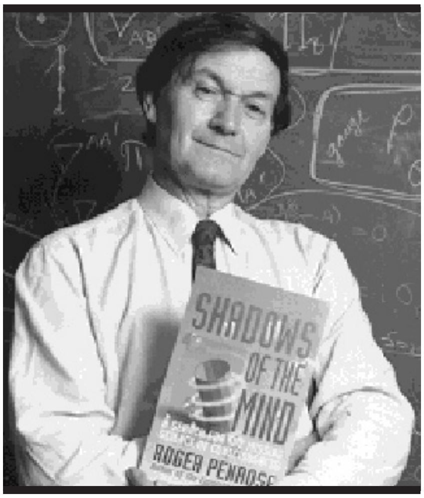


El gato de Schrödinger atrapado en el cubo de Necker-Escher. Litografía de jq2152 (se puede visitar la galería del autor de la obra http://www.flickr.com/photos/25128555@N03/)

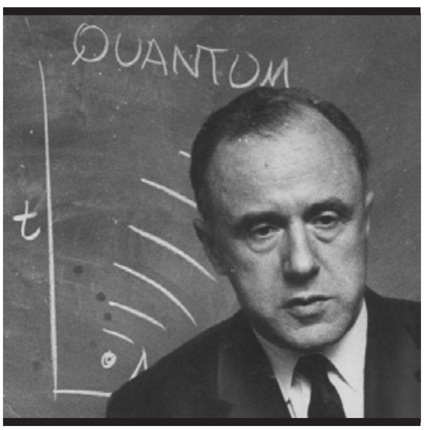
DE VETERINARIOS CUÁNTICOS Y GATOS QUE CAEN PARADOS

Diseñar un experimento que distinga el estado $|\Psi>$ de cualquier otro ortogonal es en la práctica imposible para OUT dado que necesitaría conocer el estado exacto de todo el contenido, incluido IN. Este experimento debería ser imposible desde un principio, puesto que de otro modo no tendríamos derecho a eliminar uno de los estados $|muerto>$ o $|vivo>$ de la realidad física. El inconveniente es que la mecánica cuántica, si no se la cambia, nada dice acerca de cómo trazar una línea divisoria entre las medidas que son posibles y las que no lo son. Por otro lado, hay una sospecha de que las cosas mejorarían si el entorno pudiera ser tenido en cuenta: OUT ya no tendría un solo vector de estado. Incluso su propio estado correlacionaría con el entorno de forma muy complicada. La complejización de las combinaciones factibles hace imposible, en la práctica, distinguir las superposiciones lineales complejas de las simples alternativas con pesos probabilistas. Es muy difícil poder decir, en algún momento, que es imposible obtener efectos de interferencia de modo que, ahí mismo, pueda considerarse que los cuadrados de los módulos de las amplitudes en la superposición compleja proporcionan una probabilidad ponderada de muerto y vivo. Es más, aún en el caso de poder obtener los dos números reales de las probabilidades, pasar a una alternativa como lo demanda la realidad, parece imposible. "Clímax de subjetividad", diría Penrose.

Para otro punto de vista, la clave estaría en la presencia de observadores concientes (uno o dos). Las leyes de superposición lineal cuántica compleja, ¿se deberían aplicar a la conciencia? Otro de los padres de la mecánica cuántica, Eugene Wigner (1902-1995), sugirió que la linealidad de la EcSch podría fallar para entes concientes y debería ser reemplazada por algún procedimiento no lineal para resolver las alternativas disponibles en el sistema. Penrose opina: "Los rincones del universo en donde reside la conciencia podrían más bien ser pocos y muy apartados. Sólo en aquellos rincones podrían resolverse las



Roger Penrose



John Wheeler


Hugh Everett

superposiciones complejas en alternativas reales. Puede ser que semejantes rincones tuvieran para nosotros, la misma apariencia que el resto del universo, puesto que dondequiera que nosotros mirásemos (u observásemos de algún modo) haríamos, por el mismo acto de observación conciente, que se resolviese en alternativas, ya lo hubiese hecho antes o no".

Otra postura es la del universo participatorio de John Wheeler (1911-2008) que lleva el asunto de la conciencia a un extremo diferente. La vida se debe a mutaciones que responden a las leyes de la mecánica cuántica, de modo que solo existirán en forma linealmente superpuestas hasta que, finalmente, conduzcan a la evolución de un ser conciente, cuya misma existencia es una muestra de todas las mutaciones correctas que han tenido lugar realmente. Es nuestra propia presencia la que, en esta concepción, faculta a nuestro pasado a la existencia.

Otro argumento es el de los muchos universos, de Hugh Everett (1930-1982), según la cual $\boldsymbol{R}$ no tiene lugar nunca en absoluto y la evolución completa del vector de estado está siempre gobernada por $\boldsymbol{U}$. En este esquema, las conciencias de cada observador se desdoblan al punto de existir por duplicado: uno que ve un gato vivo y otro que ve un gato muerto. De hecho, no sólo un observador, sino todo el universo en el que habita, se desdobla en dos o más en cada medida que hace del mundo. Este desdoblamiento ocurre una y otra vez de modo que estas ramas de universo proliferan incontroladamente.

Penrose cree que las leyes de la mecánica cuántica actual necesitan un cambio fundamental aunque sutil. El físico británico argumenta: "si la teoría newtoniana perduró exitosamente 300 años (o 175 contando a partir de la revolución maxwelliana) hasta que la teoría de la Relatividad introdujo cambios que permitieron abarcar más y mejores explicaciones, los jóvenes casi 90 años de la mecánica cuántica todavía le depararían muchas reinterpretaciones y modificaciones novedosas". Sólo que la teoría de Newton no tenía una paradoja de la medida. La linealidad y el buen comportamiento del proceso $\boldsymbol{U}$, ¿podría ser un caso límite de una no-linealidad más abarcadora, precisa y sutil que resolviera el problema de la medida? Penrose, a contramano de las tendencias usuales, especula que es la mecánica cuántica la que debería adaptarse a la Relatividad General y no al revés, como se piensa usualmente, al buscar una teoría cuántica de campos que incluya la gravedad.

Analizando la asimetría temporal cosmológica y la que ocurre en la reducción del estado cuántico, pasando por consideraciones sobre la temperatura de los agujeros negros, los viajes en el tiempo y la energía negativa, Penrose reinterpreta el problema de la medida pero asignándole a la gravedad un rol fundamental. A través de algo así como una *ecuación de Newton-Schrödinger* (una EcSch que incorpora el campo gravitatorio newtoniano) en la cual hay reducción objetiva de estado cuántico, *proceso RO gravitatorio*. Penrose arriesga: "La reducción del estado cuántico se trata realmente de un proceso objetivo y es siempre un fenómeno gravitatorio".

Penrose redobla la apuesta: "se pueden hacer experimentos que decidan si el proceso RO gravitatorio es o no el comportamiento de la naturaleza". El proyecto de FELIX o Experimento en órbita libre con interferometría de rayos X, que el británico propone, sería una suerte de caja con un gato de Sch espacial a base de espejos de tamaños moleculares impactados por fotones de rayos X que viajarían 10.000 km entre plataformas espaciales. Por una décima de segundo cada espejo, más que diminuto, será una superposición de estar desplazado y no desplazado por el fotón. La reducción de estado se produciría espontáneamente comandada por el procedimiento RO gravitatorio.

Independientemente de la factibilidad de realizar experimentos como el FELIX, de las especulaciones sobre las simetrías de las fluctuaciones cuánticas en el Universo, de las reinterpretaciones de las reducciones de estado cuántico y de otras más que apasionantes cuestiones medulares de la mecánica cuántica, el gato de Schrödinger, vivo o muerto, se pasea con su parsimonioso andar felino y su cascabel a medio atar aún.

Bibliografía

Penrose, Roger. "La nueva mente del Emperador", Ed. Grijalbo Mondadori (1989).

Penrose, Roger, "El camino a la realidad", Ed. Debate (2004).

Un breve paseo por los números poligonales

Gustavo Piñeiro
CBC - UBA

Pitágoras de Samos vivió en el sur de Italia, en una colonia griega, hacia fines del siglo VI a.C. Existen pocas certezas acerca de su vida o de su pensamiento, pero una de ellas es que Pitágoras sostenía que los números describen la esencia del universo. Esta idea mezclaba en Pitágoras tanto ciencia como misticismo. Un punto medio, digamos, entre física y numerología. Por ejemplo, a los impares les atribuía características femeninas y a los pares, masculinas.

Para Pitágoras el 1 no era un número (ya que la idea de número implicaba diversidad) por lo que el primer impar era el 3. El 3, a su vez, era el número de la armonía, porque como 3 = 1 + 2 entonces está compuesto por la unidad y la diversidad. El cinco era el número del matrimonio porque sumaba el masculino número 2 con el femenino número 3.

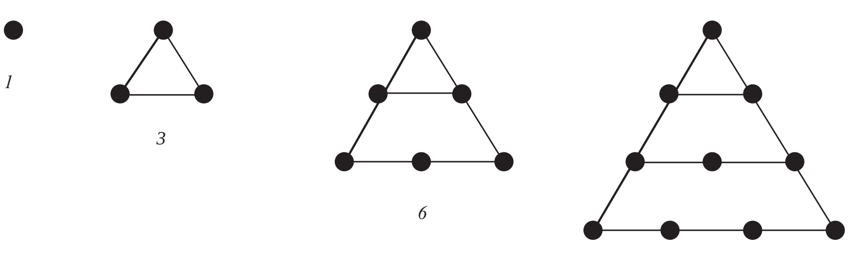
Muchas de las clasificaciones que hoy usamos se deben a Pitágoras y sus discípulos. Por ejemplo, fueron los primeros en definir los números primos y los números perfectos. Y también los números figurados (o poligonales), que son los que nos interesan en esta ocasión.

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS FIGURADOS O POLIGONALES?

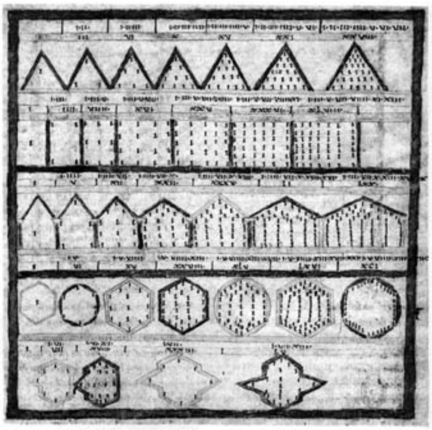
Al comenzar un partido de bowling, los 10 pinos que los jugadores tratarán de derribar se colocan formando un triángulo. O, más exactamente, varios triángulos equiláteros sucesivos. Los tres pinos de adelante forman un triángulo con dos pinos en cada lado.

Cuando se agregan los tres pinos siguientes se forma un triángulo mayor y los cuatro pinos del fondo completan la figura. El 10 es, entonces, un número triangular. (El primer pino forma también un triángulo, que es tan pequeño que se ha reducido a un punto. Un matemático lo llamaría un triángulo degenerado.)

La Cábala es una tradición mística judía dedicada a estudiar el Árbol de la vida representado por diez esferas (sefitot) tal como se ilustra en la tapa de PortaeLucis (Puertas de la luz), del converso Paulus Ricius. Cada una de estas esferas asocia una virtud con un número, y de allí en más, un juego de libres asociaciones.



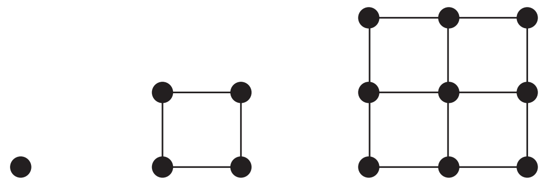
Los primeros cuatro números triangulares



Códice medieval con representaciones de números poligonales

Los números 1, 3, 6, 10, 15, 21... son todos triangulares ya que cada uno de ellos admite una disposición en triángulos equiláteros sucesivos.

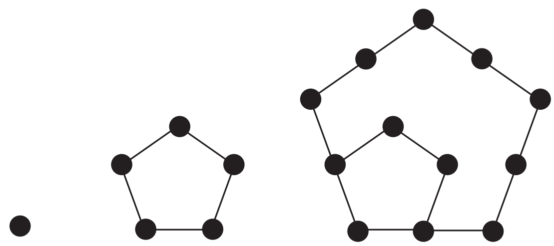
Por supuesto, los triángulos equiláteros no son los únicos polígonos que existen y así como tenemos los números triangulares, tenemos también los números cuadrados:



1 *4* *9*

Los primeros tres números cuadrados

Y los números pentagonales:



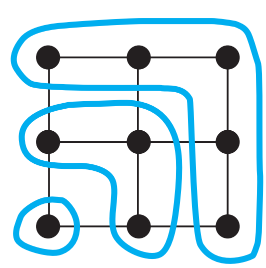
1 *5* *12*

Los primeros tres números pentagonales

Claro está, también tenemos los números hexagonales, los heptagonales,... Pero ¿cómo podemos calcularlos? Es evidente del primer gráfico que los números triangulares se obtienen como la suma de enteros consecutivos:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Por otra parte, si vemos al número 9 de esta manera:



Podemos convencernos fácilmente de que los números cuadrados son, a su vez, la suma de números *impares* consecutivos:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Observemos que para obtener los triangulares sumamos todos los números. Para obtener los cuadrados sumamos salteando uno $(1 + 3 + 5 + \ldots)$. ¿Seguirán los números pentagonales la misma pauta y para obtenerlos habrá que sumar salteando dos? La respuesta es que, en efecto, así es y los primeros números pentagonales son:

$$1 = 1$$

$$1 + 4 = 5$$

$$1 + 4 + 7 = 12$$

$$1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

De la misma manera, los hexagonales se obtienen de sumas donde salteamos tres números. Para los heptagonales salteamos cuatro, y así sucesivamente.

¿QUÉ OTRAS REGULARIDADES PODEMOS ENCONTRAR ENTRE LOS NÚMEROS POLIGONALES?

Comentemos una que impresionó al mismísimo Carl Friedrich Gauss (1777-1855), llamado el *Príncipe de las Matemáticas*.

Durante muchos años, más exactamente entre 1796 y 1814, Gauss llevó un diario científico en el que, en breves anotaciones, registró muchas de sus ideas y descubrimientos de ese tiempo. El diario fue dado al conocimiento público cuarenta y tres años después de la muerte de Gauss y estaba escrito para su propio uso personal por lo que Gauss no se esforzó en hacerlo comprensible para otros. De esta forma, hay algunas anotaciones cuyo significado es, todavía hoy, un misterio. Una de ellas es la anotación del 11 de octubre de 1796, que dice:

Vicimus GEGAN

¿Qué descubrimiento, qué idea, qué percepción genial resume? Nadie lo sabe. Otro ejemplo es la anotación del 8 de abril de 1799, que dice:

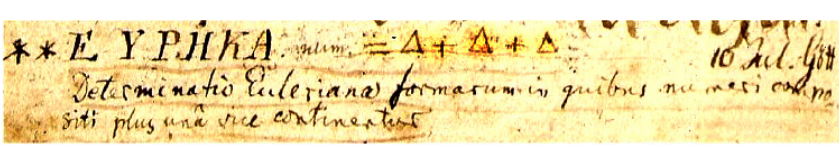
REV. GALEN

(Si el lector decide embarcarse en la tarea de descifrar las anotaciones debe tener en cuenta que por esa época Gauss, como todos los científicos de la época, solía escribir sus trabajos en latín.)

La que nos interesa aquí es la anotación del 10 de julio de 1796:

$$EUREKA!\ num = \Delta + \Delta + \Delta$$

Cuando contaba con 21 años, Gauss escribió Disquisitiones arithmeticae un trabajo de teoría de números donde se compilan resultados clásicos con las novedades introducidas por Gauss.



Fragmento del diario personal de Gauss

Bicentenario

El año del bicentenario, por ejemplo se puede escribir como suma de tres números triángulares, cuatro cuadrados y cinco pentagonales

2010 = 21 + 36 + 1953

2010 = 100 + 169 + 841 + 900

2010 = 12 + 35 + 51 + 92 + 1820

hay muchas soluciones en cada caso. Si está aburrido, busque la que usa los números poligonales más pequeños.

En ella Gauss nos dice que ese día demostró que todo número (entero, mayor o igual que 1) es la suma de, como máximo, tres números triangulares. Por ejemplo:

1 = 1 (es decir, 1 es triangular)

$2 = 1 + 1$

$3 = 3$

$4 = 1 + 3$

$5 = 1 + 1 + 3$

$6 = 6$

$7 = 1 + 6$

Algunos años antes, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) había demostrado que todo número es suma de, como máximo, cuatro cuadrados. Por ejemplo:

1 = 1 (es decir, 1 es cuadrado)

$2 = 1 + 1$

$3 = 1 + 1 + 1$

$4 = 4$

$5 = 1 + 4$

$6 = 1 + 1 + 4$

$7 = 1 + 1 + 1 + 4$

Tres triangulares, cuatro cuadrados... Inmediatamente se nos ocurre preguntarnos si todo número será también la suma de cinco pentagonales o seis hexagonales. Y la respuesta es que sí. En 1813 Augustin Louis Cauchy (1789-1857) probó, en efecto, que todo número es suma de (como máximo) cinco pentagonales, seis hexagonales, siete heptagonales, y así sucesivamente.

Todo número es suma de, *como máximo*, tres números triangulares, pero algunos, en particular, se pueden escribir como la suma de *exactamente* tres triangulares. Por ejemplo, $7 = 1 + 6$, pero también $7 = 1 + 3 + 3$.

¿CUÁLES NÚMEROS NO SE PUEDEN ESCRIBIR, DE NINGUNA MANERA, COMO SUMA DE EXACTAMENTE TRES TRIANGULARES?

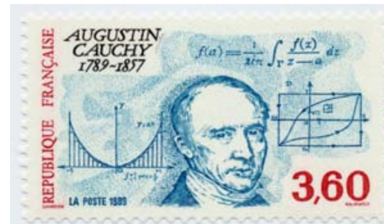
Entre 1 y 1000 hay siete números así:

1	*2*	*4*	*6*
11	*20*	*29*	

Ninguno de ellos puede escribirse como suma de exactamente tres triangulares. Si se me permite el atrevimiento, conjeturo que estos siete son los únicos números que no se pueden escribir como la suma de exactamente tres triangulares.

Debo admitir que si la conjetura es cierta, es muy probable que ya sea conocida y que esté ya demostrada (después de todo, los números triangulares son estudiados desde hace más de 2500 años). Pero, buscando en distintas fuentes no la he podido encontrar, ni enunciada, ni mucho menos demostrada.

Para refutar la conjetura habría que hallar algún otro número que no se pueda escribir de esa forma. Para demostrarla habría que dar algún razonamiento que pruebe que todo número mayor que 29 puede escribirse como la suma de *exactamente* tres triangulares.



En 1815 Cauchy asombró al mundo matemático extendiendo la demostración que Gauss alcanzó para números triangulares. Luego de este trabajo "puro" se ocupó de la propagación de ondas en el mar, que lo hizo merecedor del Premio de la Academia de Ciencias francesa (1816).

¿QUÉ SUCEDE CON LOS CUADRADOS?

Todo número es suma de, como máximo, cuatro cuadrados. Pero algunos, en particular, son la suma de exactamente cuatro cuadrados.

Por ejemplo, el 16 es en sí mismo un cuadrado pero también

$$16 = 4 + 4 + 4 + 4.$$

Entre 1 y 1000 hay 21 números que no se pueden escribir como la suma de exactamente cuatro cuadrados:

1	2	3
5	6	8
9	11	14
17	24	29
32	41	56
96	128	224
384	512	896

Mi conjetura en este caso es que hay infinitos números que *no* se pueden escribir, de ninguna manera, como la suma de exactamente cuatro cuadrados.

¿Serán ciertas estas conjeturas? ¿Cómo se demostrarían? ¿Qué sucede con los números pentagonales? Es decir, ¿habrá infinitos números que no se puedan escribir como la suma de exactamente cinco pentagonales? ¿Y qué pasa con los hexagonales y otros números poligonales? Si alguien obtiene una respuesta será muy bien recibida en gbsgep@gmail.com.

Bibliografía

http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.com

Boyer, Carl B. – *Historia de la Matemática* – Alianza Universidad Textos, 1996.

Nathanson, Melvyn – *A Short Proof of Cauchy's Polygonal Number Theorem* – Proceedings of The American Mathematical Society, Vol. 99, Nº 1, 1987, pp. 22–24.

Newman, James – *Sigma, el Mundo de las Matemáticas* – Grijalbo, 1997.

Jorge Salvetti
Lingüista y traductor

El mito de la ciencia

(o la mitad de la verdad)

No son pocos los textos de Física que comienzan con un comentario sobre la raíz etimológica de la disciplina que pretenden definir. En esos casos se afirma que Física quiere decir naturaleza, con lo cual todo parece estar en orden para continuar con el texto. Pero aquí llega Jorge Salvetti, un lingüista a quien no le alcanzan los dedos de sus manos para contar los idiomas que sabe, para decirnos que la verdad es más oscura y proponernos una mirada provocativa sobre la historia de la ciencia.

Puede parecer extraño, pero uno de los significados más específicos de la palabra griega physis, o sea del objeto de estudio de la física, de atenernos a lo que el nombre de esta ciencia designa, es el de "órgano genital femenino". Así leemos, por ejemplo, en una versión griega de un texto egipcio: "Cuando el buitre hembra desea concebir, alzando su vagina (physis) hacia el viento norte, es fecundado por este durante cinco días".[1]

También encontramos esta misma acepción en un escolio de la comedia Lysistrata de Aristófanes, esa obra en que las mujeres deciden abstenerse del sexo para poner fin a la guerra del Peloponeso. Allí se explica que las duo fuseis, las dos physis, son la "vagina y al ano", es decir la physis natural y la physis contra-natura.[2]

Este valor de la palabra no constituye, por lo demás, un hecho casual ni un significado secundario del término. Representa, por el contrario, su significación fundamental en su aspecto más concreto, constatándose sólo un traslado metonímico de la sustantivación de la acción expresada por el verbo phyein (dar a luz, parir, crear), al órgano mediante el cual esta acción se realiza.[3]

Es que la physis (natura) es, en esencia, la feminidad del mundo, hecho que explicaría dos fenómenos íntimamente ligados: que la filosofía y la ciencia hayan sido, desde sus inicios y durante la casi totalidad de su historia, una actividad exclusivamente masculina—porque es el varón quien naturalmente ignora--, o lo que es lo mismo, que la voz de la mujer haya quedado excluida de todo empeño por "descubrir" las leyes de la naturaleza y "penetrar" en sus misterios --porque ella naturalmente ya sabe.

Este hecho se relacionaría, a su vez, con el segundo fenómeno: el proceso de gradual desacralización de la divinidad femenina que, a lo largo de los siglos, culminaría con el advenimiento de un monoteísmo masculino, fenómeno que constituye la matriz de lo que ocurriría en el plano de las

φύσις

Grafía griega de la palabra fisis, la naturaleza. La sigma final es de trazo diferente al de la intermedia, ya que no se enlaza con letras siguientes. La segunda letra se pronuncia con un sonido intermedio entre la u y la i.

1 *Hieroglyphica* de Horapollo Lib. I, 11.

2 En el artículo "physis" de la Paulys Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft se dice: "En el lenguaje de los médicos physis no es sólo la naturaleza y la constitución humana, sino en especial la femenina, pero además también más específicamente lo que es típico de ella, la menstruación…" "En especial, physis significa los órganos sexuales masculinos, pero principalmente los femeninos." También en el Papiro mágico Griego IV 319, physis significa membrum muliebre y physikleidion es un encantamiento mágico para abrir la physis (vagina).

3 Sobre todos los valores del verbo fuein, del sustantivo fusis, y de las similitudes y diferencias con el término latino natura, ver Parte Tres.

Maat, diosa egipcia del orden en armonía con la naturaleza, o la fisis. Se la representa como un ave que ofrece su intimidad al viento.

instituciones religiosas, políticas y sociales, siempre más o menos indisolublemente ligadas entre sí.

Esta división tajante entre la totalidad del mundo como objeto (physis-natura), una vez acallado su modo más natural de expresión, y un sujeto artificialmente sublimado y abstraído de dicha totalidad, que busca conocerlo desde una imaginaria exterioridad, produjo un conocimiento polarizado, parcial y fragmentado: el monótono doblar de una sola campana, que terminaría por ensordecer el saber innato de la mujer, condenándola a un silencioso ostracismo en el interior mismo de un mundo objetivo y susceptible de un infinito estudio y una particular comprensión.

Pero cualquier narración sobre la historia de la ciencia difícilmente pueda ignorar su hecho capital: a lo largo de sus múltiples transformaciones, su paso zigzagueante, sus revoluciones y fragmentaciones, sus renacimientos, uno y sólo uno fue, es y será su oscuro objeto de estudio, la physis, la naturaleza, concepto demoníaco que sigue y seguirá desafiando todas las definiciones por las particulares características míticas de su origen, del origen del mito sobre el origen.[4]

La filosofía, esa particular y tradicional manera de buscar comprender la vida, o más bien la muerte, y de la que luego nacerían todas las ramas de la ciencia, en el sentido occidental del término, representa originalmente ese inmenso esfuerzo masculino por salir del cuerpo de un cosmos femenino, y ese nacimiento se produjo gradualmente a través del concepto de physis, por medio del cual se pasó del saber mágico-simpático de una naturaleza poblada de seres al saber lógico-ideal de un universo en el que sólo cabe la soledad del hombre.

No puede sorprender, por eso, que los primeros filósofos hayan sido “físicos”. Como tampoco podría sorprender lo inverso: que los primeros físicos hayan sido filósofos. Es que los términos físico y filósofo fueron en griego, la lengua en la que se acuñaron, prácticamente sinónimos.[5]

....

4 Es que la palabra physis se encuentra en el origen de todas las narraciones sobre el origen del mundo que intentan dar una explicación no mítica (fisiología denominaban los griegos a ese tipo de primeras explicaciones “científicas”) de todo cuanto existe, ocultando, en la inmensa vastedad de lo que ella recubre, su propio origen. Precisamente, uno de los significados más amplios de la palabra physis es el de “origen”, y en este sentido, en muchos autores griegos, se emplea como sinónimo de “genesis” (nacimiento). Así la physis sería el origen de todo cuanto existe, pero un origen incesante y constante que jamás dejaría de actualizarse y que, por consiguiente, se sustraería a las categorías lógicas de principio y fin. Y el concepto de physis es un concepto demoníaco porque la physis posee precisamente los atributos más salientes del daimwn. No es en vano que la naturaleza, encarnada especialmente en la mujer y en su saber “mágico”, haya sido demonizada por los monoteísmos, como tampoco lo es que la potencia más característica de la physis, la potencia sexual, haya sido el blanco de los más encarnizados anatemas centrados en la figura del Demonio, imaginado con los rasgos más distintivos de las divinidades de la fecundidad (Pan, Fauno, Sátiro).

5 Con el término “físico” no sólo se designaba a los filósofos naturales o a los representantes de la teología “física”, sino también a los magos, “quienes investigan las fuerzas, las razones y las afinidades ocultas de las cosas de la naturaleza”. Medicamentos “físicos” se llamaba a los medios “mágicos de curar” y το φυσικον σου ονομα αιγιττισκι” (*tu nombre físico en egipcio*) significa “tu nombre de mago”. Aquí también cabría agregar, en última instancia, la frase de Nausífanes: “πασ ο φυσικοσ ιατροσ εστιν” (“*Todo físico es médico*.”)

....

Algunos prejuicios sexistas se caracterizan por suponer diferencias tajantes entre la mentalidad científica del varón y la de la mujer. Este equipo de edición, sin embargo, no ve tal cosa en los escritos del autor, y considera sus reflexiones lo bastante interesantes como para aceptar el riesgo de que alguien las interprete de esa manera errada. (Nota de AR)

Fragmento de El Nacimiento de Venus, de Sandro Botticelli (1445-1510). El epicureísmo equipara a Afrodita (Venus) con Physis (Natura). La physis se consideraba la feminidad del mundo.

Los rastros de este complejo movimiento, por el cual el saber pasó gradualmente de una subjetividad y una sensibilidad mítico-poética a una objetividad lógico-matemática, de la diosa al dios, son variados y múltiples.

La siguiente frase de Aristóteles, por ejemplo: "El dios y la naturaleza no hacen nada en vano", todavía contrapone de la manera más patente posible, y aún prácticamente en un pie de igualdad, la physis --si bien ya, en parte, rebajada a una posición subalterna, como el cuerpo exánime de una antigua deidad que, a partir de entonces, podrá ser sometido a la autopsia del pensamiento--, a un Theos, dios vivo, fuente de logos y del nous y, por consiguiente, imagen ideal del propio filósofo.

Esta contraposición constituye, por lo demás, el núcleo esencial de un anhelo de saber, de un modo de ignorarse, que impulsaría al hombre a intentar despegarse lo más posible de su propia naturaleza, lo femenino de sí (lo físico), para lograr captarse desde afuera.

Heráclito, aún más cerca de la diosa que Aristóteles, nos habla todavía de la naturaleza de una manera encantadora y sugestiva, como si se tratase de una grácil doncella, juguetona y escurridiza, que se complace en burlar a quienes la buscan, como si se tratase casi de una ninfa: "A la naturaleza le gusta esconderse."[6]

Pero donde más evidente aparece, quizá, la sombra trazada por esta revolución del conocimiento que engendró lo que para Occidente constituye el modo natural de "pensar" la naturaleza, este pasaje del saber de la mujer a la ciencia del varón, es en uno de los textos más fundamentales de la historia de la filosofía griega: el poema épico de Parménides.

Sólo un fuerte prejuicio, sostenido durante siglos, impediría constatar, en una lectura fresca de sus versos, el punto más esencial de la obra: la presencia y el lugar central que la diosa ocupa en el poema. Es de sus labios que brota toda la enseñanza a modo de iniciación. Parménides, simple mortal, escogido para la heroica empresa por dos divinidades femeninas, Themis y Dike, y acogido amorosamente en su ciudadela por la anónima diosa que le transmitirá sus misterios, se limita a escuchar la compleja instrucción, en la que le será revelado uno de los pilares más inamovibles del pensamiento filosófico-científico, vulgarmente interpretado como el principio de no contradicción.

Pero, como era de esperar, los múltiples rastros, dispersos en los textos filosóficos son fragmentarios.

Para entonces, el pasaje del mito al logos, en lo esencial, ya se había efectuado. A su vez, la propia inercia de la conversión hizo que durante largo tiempo, y en especial en los últimos siglos, años en los que la ciencia cobraría un tremendo impulso, los datos, tal como aparecen narrados en los textos filosóficos, fuesen desestimados.

El hecho, por ejemplo, de que Heráclito haya consagrado su libro peri fusews (De natura) como ofrenda en el templo de la diosa, patrona de su ciudad y encarnación, en su particular hipóstasis, de la naturaleza en su más exacerbada feminidad (virginidad-fecundidad), suele ser desdeñado, creyéndose erradamente, como en el caso del poema de Parménides, que la filosofía estaba desvinculada de la religión. En el caso del poema de Parménides esta descalificación del evidente protagonismo de la divinidad degrada a una simple ficción la dimensión real y extática de la experiencia mística de la que el poema intenta dar testimonio.[7]

6 φυσισ κρυπτεσθαι φιλει. Heráclito, al igual que muchos presocráticos, por su lenguaje y sus concepciones, aún se encuentra más cerca de los antiguos sabios que de los filósofos.

7 Ya en las primeras líneas, en las que Parménides narra su fantástico viaje, aparece nom-

Fragmento de Zeus y Hera, de Annibale Carracci (1560-1609) Para Heráclito la naturaleza es una ninfa escurridiza, que se complace en burlar a quienes la buscan: "A la naturaleza le gusta esconderse." (Algunos artstas, sin embargo, muestran a Natura feliz de exhibirse en todo su esplendor)

O la circunstancia, tal como aparece referida en el Banquete, de que Sócrates hubiese recibido su conocimiento más preciado, respeto del Eros, de la sacerdotisa Diótima es interpretada como un recurso formal, un mero artilugio literario, producto de la imaginación de Platón, quien precisamente habría excluido de su república ideal a los poetas por considerar que su fidelidad para con la Musa les hacía faltar a la verdad, y quien había sacrificado de joven su propia y natural relación con las delicias de la poesía, heredada de su noble linaje, tras oír una nueva música en las palabras de Sócrates.[8]

La explícita equiparación entre Afrodita (Venus) y Physis (natura), común al epicureismo y que aparece expresamente desarrollada, entre otros, en el poema de Lucrecio De rerum Natura, tampoco es un hecho aislado ni privativo de la doctrina de Epicuro. El lugar eminente que ocupa Physis divinizada en el estoicismo, el neoplatonismo y en el helenismo, en general, todas disciplinas o ideologías que acogen en su seno el reelaborado reflujo de un pasado añorado, es innegable.[9]

Pero todos estos datos aislados, aunque numerosos y evidentes, insertos, como están, dentro de los parámetros de la filosofía, de una filosofía que en todos los casos, encierra, no obstante, incluso en el caso de la ciencia, por más tácita y disfrazada, una auténtica teología, donde ya prima el varón, no logran presentar el cuadro de conjunto.

La narración de este titánico suceso sólo podría encontrarse en el mito, en un mito narrado aún dentro del esquema de su propia lógica, pero ya desde una perspectiva de "superación", desde el umbral exterior de su universo, una vez ocurrido el legendario acontecimiento.

Y es precisamente en una de las tres o cuatro obras poéticas más importantes de Grecia, la Teogonía de Hesíodo, que encontramos los elementos fundamentales de esta historia.

---

brada la deidad femenina, la "potencia divina" (*daimón*), que conduce… en todo al hombre que sabe". Pero no son estos los únicos elementos que caracterizan este particular ámbito de sabiduría. El carro en el que viaja el filósofo es tirado por *yeguas* y quienes lo conducen son *doncellas*. En el discurso de la diosa, en la parte dedicada al conocimiento de las "opiniones", en la que la deidad desarrolla los puntos de la enseñanza que le impartirá respecto de lo que puede considerarse el mundo *físico*, aparecen aproximadamente estas palabras: "*En el medio de estos anillos la diosa (daimón) que gobierna todo. Pues ella en todo comanda el odioso alumbramiento y la unión, enviando a la hembra a unirse al macho y luego a la inversa, el macho a la hembra*."

8 Diotima, de quien Sócrates afirma que "es *sabia* en estas cosas y en muchas otras", explica al futuro filósofo, respecto de la diferencia entre ser y desear, que "*de los dioses ninguno filosofa, ni desea ser sabio (pues lo es), ni si algún otro es sabio, no filosofa*…" (θεων ουδεισ φιλοσοφει, ουδ επιθυμει σοφοσ γενεσθαι (εστι γαρ), ουδ ει τισ αλλοσ σοφοσ, ου φιλοσοφει...). Esta diferencia no marca tanto un distinto grado de conocimiento como un modo totalmente distinto de saber, y esta distinción caracteriza con claridad los dos modos de conocer a los que se hace referencia en el cuerpo del texto.

9 La Venus de Pompeya, por ejemplo, aparece en algunas inscripciones acompañada del epíteto "Física" (Venus Física o Venus Física Pompeiana). El lugar que ocupa la Naturaleza en la filosofía de Epicuro es irrebatible, por lo que no es en nada exagerada la frase de Minucius Felix que dice: "*etiam Epicurus ille, qui deos aut otiosos fingit aut nullos, naturam tamen superposit*" (*Incluso aquel Epicuro que representa a los dioses u ociosos o nulos, puso, no obstante, a la naturaleza [por encima de ellos].* Léase, además, el proemio de *De la naturaleza de las cosas* de Lucrecio, y se constatará que todavía perdura la conciencia de un universo regido por la potencia femenina del "amor-eros" (Venus). Entre los estoicos la divinización de *physis*, la redivinización de la diosa desacralizada, es todavía más explícita.

Lógica matemática

La paradoja de Banach-Tarski

Por Christian Espíndola
CBC-UBA

Alfred Tarski (1902—1983) fue uno de los lógicos matemáticos más importantes de la historia (Algunos autores hablan de la trilogía Aritóteles, Gödel y Tarski) En 1923 se convirtió al catolicismo y adoptó el apellido Tarski, renunciando a su apellido original -Teitelbaum- de raíces judías.

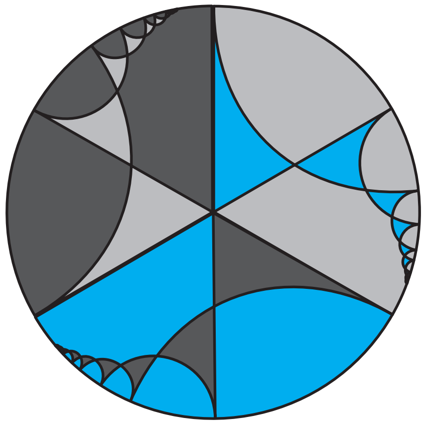
Suele haber ocasiones en que un resultado matemático desafía tan abiertamente la intuición humana que es considerado paradójico. Más raro aún es el caso de las paradojas matemáticas, donde tales resultados son finalmente aceptados a regañadientes (no sin cierto recelo entendible) por haber sido concluidos de una argumentación teórica impecable. Tales paradojas nos han fascinado y envuelto con su encanto, llamando la atención sobre su curiosa y aparente contradicción y ejerciendo una inusitada influencia sobre la imaginación humana. Pero probablemente ninguno de estos resultados haya sido tan estimulante y sorprendente como la famosa paradoja de Banach-Tarski.

En 1924, Stephen Banach y Alfred Tarski lograron demostrar, en lo que constituye un asombroso logro del razonamiento matemático, que es posible descomponer una esfera maciza en un número finito de pedazos disjuntos, de tal manera que pueda formarse con ellos, reordenándolos, dos esferas macizas idénticas a la original, sin agujeros ni superposiciones. Este increíble resultado viene a demostrar que efectivamente el espacio tridimensional, así como lo conocemos, no está tan bien entendido después de todo. Si usando sólo movimientos rígidos (es decir traslaciones y rotaciones) que no modifican la forma ni el tamaño de los pedazos en que se parte la esfera, es posible duplicar el volumen original, estamos realmente obteniendo algo de la nada. Salvo que en este caso la argumentación es perfectamente legítima y válida, lo que no hace sino contribuir al desconcierto general. ¿Cómo es posible que se pueda duplicar un volumen dado? ¿No hay alguna trampa oculta que origine esta aberrante conclusión?

Para responder esa pregunta es preciso notar que la demostración del resultado descansa sobre la base del llamado Axioma de Elección, uno de los axiomas más controversiales y discutidos de la historia de la matemática, sólo superado en su polémica por el quinto postulado de Euclides. En términos sucintos, el Axioma de Elección afirma que dada una familia infinita de conjuntos, es posible seleccionar simultáneamente un elemento distinguido de cada uno de ellos para formar un nuevo conjunto. Dicho así, pareciera una afirmación de lo más inocente; sin embargo, después de meditarla con más cuidado, revela lo que hay detrás de ese enunciado aparentemente inofensivo: no existe ninguna regla explícita que nos permita elegir los elementos distinguidos, sino que más bien es necesario recurrir a un postulado para aseverar que tal elección simultánea de infinitos elementos es posible. Visto así, los pedazos en que la esfera debe partirse para dar origen a dos esferas idénticas no son de ningún modo simples, ni hay método alguno que permita construirlas explícitamente, sino que, recurriendo al Axioma de Elección, se definen en base a una cantidad infinita de elecciones simultáneas de puntos de la esfera. Sin especificar cada uno de ellos, se afirma más bien que una tal selección es, en teoría, posible en virtud del mencionado axioma; de hecho, no sólo ocurre que los pedazos así construidos resultan imposibles de determinar en forma explícita, sino que son tan complicados que se asemejan a un conglomerado de puntos disconexos más que a porciones que puedan obtenerse mediante simples manipulaciones geométricas.

Stefan Banach (1892-1945) es uno de los creadores del Análisis Funcional, con valiosos aportes a la Teoría de la Integración. Al igual que Tarski, también tuvo problemas con el apellido, ya que de su padre -Stefan Greczek- no recibió más que el nombre y su madre, de apellido Banach, lo abandonó unos días después de su bautismo. Afortunadamente para el niño, fue criado por Franciszka Plowa que alentó el cultivo de las cualidades intelectuales del pequeño Stefan.

De todas maneras, la mera posibilidad teórica de duplicar la esfera resulta de por sí algo preocupante. Más aún, con el paso de los años la paradoja ha sido generalizada de diversas maneras. Por ejemplo, ha logrado reducirse a sólo cinco la cantidad de pedazos a dividir la esfera para lograr el milagro; en otra dirección, ha podido probarse recientemente que el rearmado de las piezas puede efectuarse en forma continua sin que en ningún momento se superpongan. Pero, lo que es más sorprendente aún, pudo demostrarse que esta parti-



ción puede realizarse sobre cualquier cuerpo de forma geométrica razonable, y que las piezas en que se divide pueden reacomodarse para armar cualquier otra forma geométrica, independiente del tamaño relativo entre ellas. En este sentido, se puede, por ejemplo, partir en pedazos una esfera del tamaño de un grano de arena para formar, reorganizándolas, una del tamaño del sol, sin que las piezas cambien su forma y sin dejar hueco alguno.

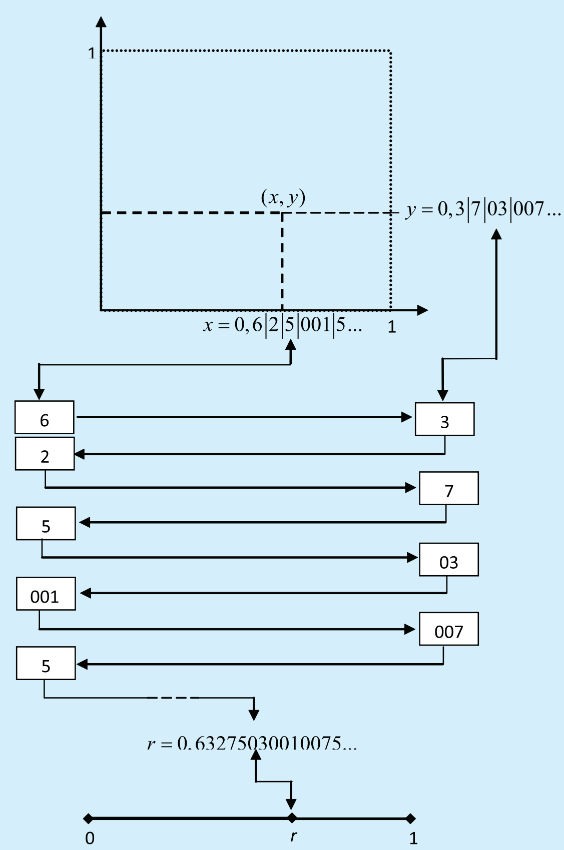
Jan Mycielski y Stan Wagon construyeron una versión de la paradoja de Banach-Tarski. Se puede ver una animacióna de esta construcciónn en http://demonstrations.wolfram.com/TheBanachTarskiParadox/

Desconcertados por la asimilación de estos sorprendentes resultados, surge naturalmente la propuesta de intentar eliminar el uso del Axioma de Elección para evitar conclusiones que resultan tan disímiles de lo que nos dicta la intuición. ¿Por qué no intentar salvaguardar la coherencia intuitiva de la geometría renunciando al Axioma de Elección? La respuesta es que renunciar a tal axioma acabaría por destruir gran parte del edificio matemático que se ha ido edificando sobre su cimiento. Los desarrollos matemáticos están tan comprometidos con el uso del Axioma de Elección que descartarlo equivaldría a cambiar drásticamente los contenidos desarrollados por un universo más extraño, incomprensible y poco amigable, un universo que contradice la intuición aún más fuertemente. En comparación, la paradoja de Banach-Tarski es un resultado con el que la mayoría de los matemáticos prefiere convivir antes de perder su preciado y familiar cosmos. Una alegoría espeluznante del sacrificio que supone abrazar una paradoja, justamente para intentar escapar de la contradicción.

Lo veo pero no lo creo

Le escribió Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) a su maestro Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916) cuando demostró que los puntos de un cuadrado pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los puntos de un segmento. Cada punto del cuadrado está representado por un par de decimales; estos son fragmentados en grupos: cada cifra, excepto si es 0, da motivo a un nuevo grupo. Si es 0 el grupo se arma con todos los 0 hasta el primer dígito no nulo. Los grupos son refundidos en un nuevo número decimal único por el procedimiento de ir tomándolos alternativamente; este número decimal representa un punto del segmento. El proceso es reversible. Una demostración parecida prueba que el número de puntos de un espacio de dimensión finita es equivalente al número de puntos de una recta.

JCP



Por Agustín Rela
CBC-UBA

Curiosidades sonoras

1. INTERFERENCIA BOCA A BOCA

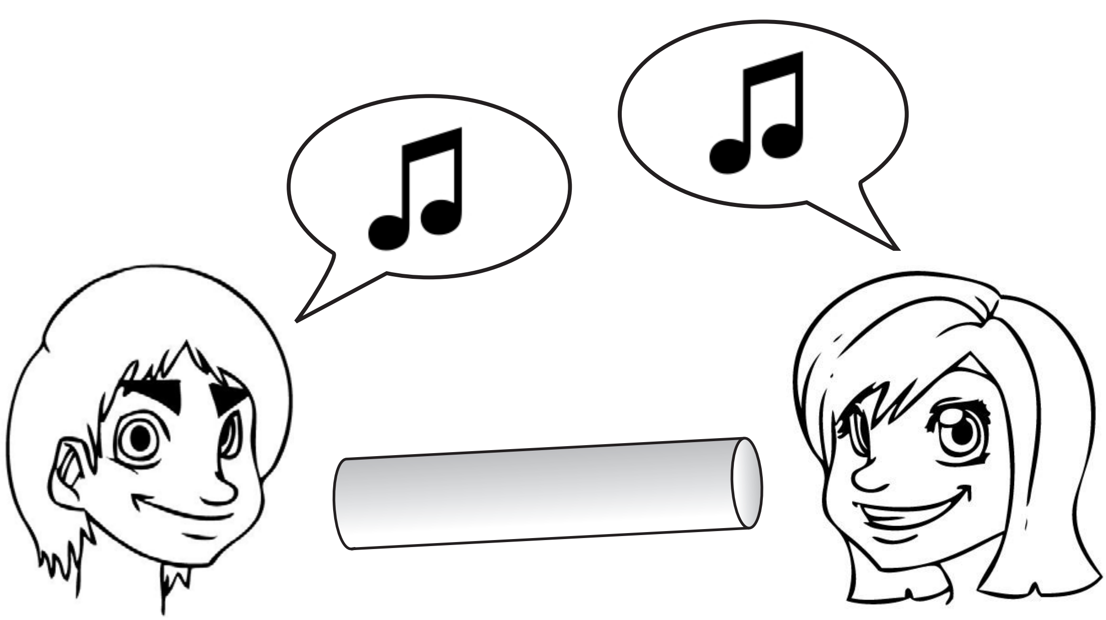
El *unísono* es la igualdad de dos tonos (notas, o frecuencias) de instrumentos o voces diferentes.

Es difícil hacer coincidir plenamente dos notas cantadas. Aun a las voces más educadas se les escapan pequeñas diferencias de frecuencia; por momentos las ondas están en fase y, por momentos en oposición; eso se percibe como un trino u oscilación, agradable cuando es de baja frecuencia.[1]

Para experimentar el unísono, dos personas pueden aproximar sus bocas a los extremos de un tubo de cartón o una revista enrollada, y tratar de cantar la misma nota. Si son adolescentes o adultos de sexos diferentes, ella puede emitir un sonido estable, úúú..., y él imitarla en falsete, o sea con la voz aguda, como la que ponen a veces los varones cuando se burlan del hablar de las mujeres.

Cuando consigan el unísono, ambos lo notarán auditivamente, pero lo interesante es que también percibirán una débil sensación táctil en sus propias cuerdas vocales, causada por la disminución, propia de la resonancia, de la energía necesaria para emitir los sonidos.

1 Véase, en este número, *¿Por qué usamos 12 notas? De Pitágoras a Bach*.



Ernst Chladni (1756-1827) fue un físico alemán conocido por sus contribuciones en el campo de la acústica y el estudio de meteoritos. Siguiendo las observaciones de Robert Hooke, quien recorría con un arco de violín unos platos de vidrio cubiertos con harina, Chladni se dedicó a estudiar sistemáticamente las placas vibrantes obteniendo representaciones gráficas del comportamiento acústico de la placa. Esta técnica se sigue utilizando en la fabricación de violines, cellos y contrabajos.
Parece ser que en esa época a varios físicos no sólo les preocupaban los platos con harina, sino también los vasos de cerveza. Una vez que estaban vacíos, los llenaban con distintas cantidades de agua y creaban instrumentos musicales muy populares en el siglo XVIII. En la larga lista de instrumentos de ese tipo se encuentra el euphonium de Chladni.

FIGURAS DE CHLADNI

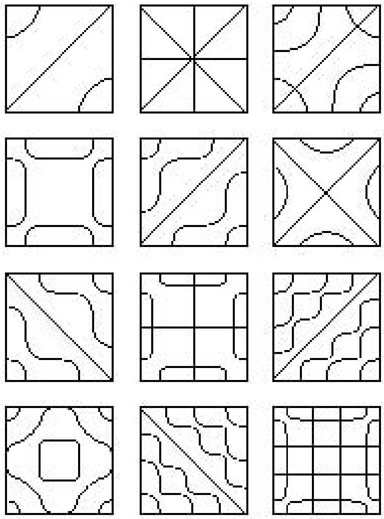
Ernst Florens Friedrich Chladni (1756–1827) fue un apasionado de la música que vivía de sus lecciones y demostraciones experimentales. Midió la velocidad del sonido en el aire y en otros gases, en sólidos, y también en líquidos, a pesar de que en su época se los consideraba incompresibles, y por tanto incapaces de propagar ondas.

Para medir la velocidad del sonido, Chladni dividía la frecuencia por la longitud de onda, igual al doble de la distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos de una onda estacionaria.

Para obtener figuras de Chladny podemos cubrir una fuente con una lámina de plástico de una bolsa de residuos, y tensar ésta hasta que al batirla suene como un tambor. Son útiles, para eso, algunas bandas de goma. Espolvoreamos el parche con sal o harina secas, y cantamos una nota con la boca cerca del parche, o con un tubo que dirija hacia allí el sonido. Si esa nota armoniza con aquélla en la que resuena el tambor, el polvo se acomoda en líneas nodales estables.

En las zonas ventrales las partículas saltan y abandonan el sitio, hasta quedar quietas en algún nodo. Resultan unos diseños vistosos, y útiles para calcular la velocidad de propagación de las ondas. (Rostro: Asanetmi, http://www.cristalab.com/tips/como-dibujar-anime-parte-6-el-perfil-c68096l.)

Otro modo de obtener esas figuras es pasar un arco de violín, que se puede improvisar con tanza, y pasarlo por el borde de una chapa metálica fija en algún punto, espolvoreada con arena seca. Chladni usaba polvo de licopodio, una planta medicinal.



En las ilustraciones se aprecian diferentes figuras de Chladni. Las condiciones del experimento determinarán las diferentes figuras. "El sonido puede verse", exclamó Napoleón cuando, en 1808, Chladni realizó esta experiencia en la Academia de Ciencias de París.

Intimidades de un cierre...

o se van con Arquímedes y la música a otra parte

C: Los números ya me advertían, mi participación en Q.e.d. Nro 4 iba a provocar problemas y retrasos porque si sumo el valor numérico de cada letra de mi nombre y lo divido por siete y a la parte entera de esto le sumo 4 ...

A: ¿Qué te pasa Carlos? ¿Mucho trabajo?

JC: ¡Está mal medicado!

I: Demasiado deporte. Volvé a los libros y se te pasa.

C: Es que no tengo mejores argumentos para explicar esta demora. Además, si Q.e.d. hubiese salido en 1632 en lugar de 2010 habríamos publicado sin demasiadas distinciones cartas astrales y horóscopos con lo que hoy entendemos por ciencia. Astrología con astronomía y teoría de números con numerología, como lo sugiere Gustavo en la nota de números poligonales.

JC: Es verdad, Kepler buscaba entender el mundo pensando que Dios escribía sus secretos en clave de números. Antes de llegar al sistema planetario que le dio fama armó otro relacionando a los cinco planetas conocidos con los cinco poliedros regulares. Le parecía que ese dato era un guiño del ojo divino.

I: Le Corbusier en El modulor, dice "detrás de las paredes juegan los dioses, juegan con números, con los cuales hacen el universo"

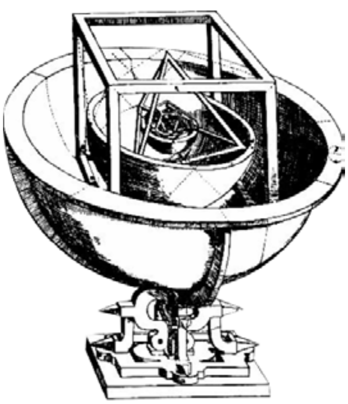
A: No nos olvidemos de la música. En el enfoque pitagórico que le dan Ricardo y Bruno a la nota de escalas, la clave está puesta en la relación entre sonidos armónicos y relaciones enteras.

I: A propósito de la nota de música. ¿En la tapa va el cuadro de El Bosco, no?

A: El concierto en huevo me parece muy apropiado para la tapa. Es un detalle de un cuadro más amplio, del que se perdió el original, pero se conservan dos copias, con algunas diferencias. Ambas muestran, sin embargo, los detalles irreverentes típicos del pintor flamenco. Hay un personaje con un embudo de sombrero y varios tienen pájaros sobre sus cabezas. Un ladrón roba la bolsa del monje y en la otra versión corta una salchicha, lo que dio lugar a curiosas interpretaciones. Impresiona en la imagen, el esfuerzo de los personajes, reflejado en sus rostros, por entonar las notas musicales. Gracias a la partitura visible, se sabe qué canción de amor estaban cantando, y con qué música.

I: Es apasionante ver cómo la música ha inspirado al artista. La analogía de la editorial entre los melómanos y el por qué nos atrae la ciencia, puede ser aventurada, pero en el caso de la música no parece tan loca.

JC: El personaje de Dolina en El libro del fantasma, va mucho más allá de lo que la editorial se anima. Él habla "de las luces que iluminan a



Firme creyente en la existencia de un Creador que se expresaba en términos matemáticos Kepler sostenía que la aritmética y la geometría eran "la verdad unificadora entre la mente de Dios y la mente del hombre. La geometría existe antes de la creación, es co-eterna con la mente de Dios." De esta forma, sólo había que sentarse a buscar las relaciones secretas y como era partidario del modelo heliocéntrico creyó justificar la existencia de los seis planetas conocidos por entones mediante los cinco poliedros regulares: "La tierra es el círculo que es la medida de todo. Construimos un dodecaedro alrededor de ésta y el círculo que lo rodea será Marte. Sobre Marte construimos un tetraedro y el círculo alrededor de éste será Júpiter. Sobre Júpiter construimos un cubo y el círculo que lo rodea será Saturno. Ahora construimos un icosaedro dentro de la Tierra y el círculo inscrito dentro de ésta será Venus. Dentro de Venus inscribimos un octaedro y el círculo dentro de éste será Mercurio. He aquí la explicación del número de planetas"(Mysterium Cosmographicum, 1596) los cantantes, de los trajes que usan, del efecto hipnótico del baile…., de las mujeres que es posible conocer en los conciertos… del deseo que surge en nosotros de irnos a la cama con una estrella". Que cosas parecidas puedan estar en el atractivo de la ciencia me resulta divertido y sugerente.

A: Perdón que cambie de tema, aunque no del todo, pero veo que la contratapa muestra una demostración visual del seno de la suma de dos ángulos. Aprovecho para aclarar que en el número anterior se deslizó un error con la palabra medida en lugar de media.

C: Claro, media es usada como sinónimo de promedio. Es cierto que no te vas de tema, el seno y la música tienen mucho que ver…

I: Quiero creer que seguís hablando de la función seno…

A: En los ambientes de Exactas e Ingeniería, la letra griega theta la pronuncian tita, en vez de zeta como corresponde; dicen que es para evitar confusión con la verdadera letra griega zeta, que se pronuncia yeta; y en rigor, la primera consonante no es exactamente la ye en este caso, sino un sonido del que carece nuestra lengua, semejante al zumbido de una mosca. Recuerdo al Ing. Roque Scarfiello como al único, en ese ambiente, que pronunciaba correctamente esas letras. Pero si lo que se quiere evitar es toda alusión a la palabra theta, por su semejanza con teta, no veo la ventaja; de tanto hablar del "seno de Tita", y como éste es diminutivo de Marta, Rita, Berta, Ruperta, Alberta y Samanta, es inevitable que volvamos, una y otra vez, a mamar de las fuentes…

JC: Parece que todo viene de una mala traducción del árabe. Lo que en trigonometría hindú se llamaba media cuerda (giva) pasó al árabe como jiba sin vocales, como es de uso en los idiomas semíticos. Al pasar al latín, en lugar de jiba se pensó que debía ser j-aib, es decir sinus o sea ensenada, bahía, entrada, curva del mar…. Claudi Alsina dice en El Club de la hipotenusa cuando cuenta esta curiosidad: "pero ahí está y esto no hay quién lo cambie"

A: La relación de la frecuencia fundamental del sonido de una cuerda y su longitud, tensión y densidad, está estrechamente relacionada con el hoy conocido como problema de la cuerda vibrante, esto es, determinar el movimiento de una cuerda al pulsarla. Este problema necesita del seno para su explicación matemática.

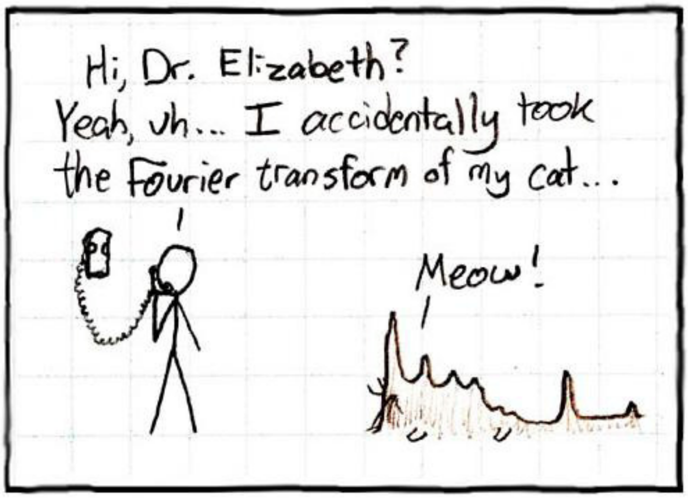
JC: Mucho antes de que Bach diese a conocer su escala temperada, Marin Mersenne, jesuita de la orden de los Mínimos (nombre dado en señal de humildad y al que Huygens llamaba "el máximo de los mínimos") publicó en 1636 L´harmonie universelle (La armonía universal). Allí intenta describir esta relación. Pero el problema no encontró una solución matemática hasta que se desarrollaron los primeros rudimentos del cálculo. Taylor en 1715 dio con la ecuación diferencial correspondiente y luego D´Alembert, D. Bernoulli, Euler y Fourier se ocuparon del asunto. A la luz de los genios que se dedicaron a él, la intuición de Mersenne resulta por lo menos destacable.

C: Mersenne es reconocido por su contribución a la teoría de números, pero mucho más por haber mantenido una fluida correspondencia con los científicos de su época y haber contribuido así a la difusión de la ciencia.

JC: Es cierto, son famosos los primos de Mersenne. Creo que se conocen 47 de ellos. Los últimos fueron descubiertos por el proyecto GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search)

A propósito de los números primos y la novela de Paolo Giordano que vamos a comentar en Q.e.d. 5, *La soledad de los números primos*. Parece que tan solo no están, que hay unos que vienen en pareja…

Además de sus importantes contribuciones a la matemática, física, filosofía y teoría músical, Mersenne ofició de centro de trasmisión de una inédita red de intercambio científico. Desde su celda en el convento de L'Annonciade, tomó contacto epistolar con numerosos sabios europeos con quienes discutía temas científicos de interés. Conforme recibía información le escribía al resto de los miembros de su lista de contactos las novedades producidas. La obra de Descartes, que vivía aislado en Holanda, se conoció en el resto de Europa por la acción difusora de Mersenne. Mucho antes que Internet o las revistas especializadas, Mersenne se transformó en el nodo principal de una red temática.



- ¡Hola! ¿Doctora Elizabeth? Este... accidentalmente le apliqué la transformada de Fourier a mi gato...
- ¡Miau!

"Fourier", según Randall Munroe. Ex diseñador de robots de la NASA, Randall Munroe es el autor de una popular tira cómica en la WEB llamada **xkcd***: "a webcomic of romance, sarcasm, math, and language" (un cómic web de romance, sarcasmo, matemáticas e idioma). www.xkcd.com*

C: A los números primos que vienen de a pares (11 y 13, 17 y 19, 41 y 43...) se los llama primos mellizos. Un problema clásico (sin solución aún) es saber si estas parejas son finitas o infinitas. Se cree lo segundo, pero no hay ninguna demostración.

JC: Hace un tiempo se me ocurrió pensar en un problema asociado a este del cual tampoco encontré solución a pesar de que lo he compartido con gente que estudia y trabaja en teoría de números.

I: A ver, en palabras blandas...

JC: Hay ternas de números como el 33, 34 y 35 que no son primos pero casi, son el producto de solo dos primos (33 = 3 por 11; 34 = 2 por 17 y 35 = 5 por 7) Estos trillizos cuasiprimos no son los únicos. La pregunta es, como con los primos mellizos, ¿hay infinitos trillizos cuasiprimos o hay sólo un puñado de ellos? También creo que son infinitos. Es más, tal vez la solución de uno de los dos problemas implique la solución del otro, pero no hice ningún avance.

I: No encuentro otros trillizos cuasiprimos.

A: Por ejemplo el 85, el 86 y el 87 son otros trillizos de JC.

C: La teoría de números ha generado siempre desafíos desconcertantes. Baste recordar el último teorema de Fermat y los ríos de tinta que corrieron ante problema aparentemente tan inocente.

JC: Observen la plasticidad de los senos, o debería decir de las funciones trigonométricas, que no sólo nos permiten estudiar fenómenos oscilatorios como las cuerdas vibrantes sino también aparecen en la teoría de números, donde las curvas elípticas tuvieron una participación crucial en el último teorema de Fermat. Las famosas formas modulares son periódicas y se pueden desarrollar por Fourier.

A: Y Fourier también participa activamente en la ecuación de Schrödinger.

I: Me queda la duda si el experimento de la caja de Schrödinger se puede hacer efectivamente. Obviemos lo del pobre gato, pero ¿podemos conseguir una caja totalmente aislada?

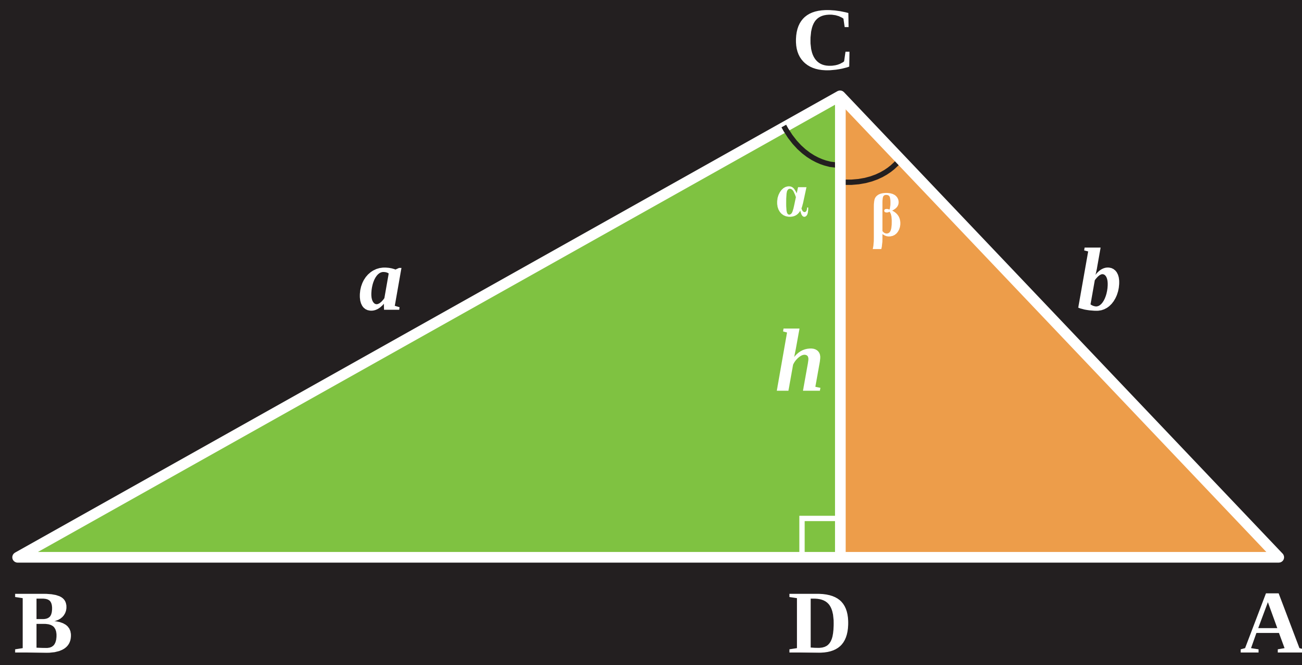
A: Aunque la forremos con una doble capa de plomo y acero de veinte centímetros de espesor cada una, el inmenso espacio vacío que hay entre los núcleos de los átomos del material de las corazas representa una vía de escape posible para cualquier fotón, el cual nos dará valiosa información sobre el verdadero estado del félido. La probabilidad de que escape un fotón de semejante encierro es pequeña, pero de ningún modo nula. La cuántica establece que todo influye sobre todo; que no hay diferencia sustancial entre el observador y lo observado. En mi opinión, el gato está o bien vivo, o bien muerto, lo sepamos o no después de jugar su suerte a la ruleta fotónica, ya que no es teóricamente posible aislar el animal de su observador.

P: Perdón que interrumpa, pero parece que encontraron un palimpsesto de Arquímedes que contiene un tratado de música.

C: ¡No! Basta de notas de Arquímedes.

JC: ¡Arquímedes se toma licencia por varios números!

El seno de la suma



Area ABC = Area BCD + Area DCA

$$\frac{1}{2}\,ab\,sen\,(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\,ah\,\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}\,bh\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$sen\,(\alpha+\beta) = \frac{h}{b}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{h}{a}\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$\boxed{sen\,(\alpha+\beta) = \cos\beta .\ \mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha .\ \mathrm{sen}\,\beta}$$

EDUCANDO

EDITORIAL

Ciudad Universitaria Pabellón 2 Planta Baja, CP 1428, Cdad. Autónoma de Bs. As.
Tel: 4788-9570 mail: edccceducando@ciudad.com.ar