Q.e.d.

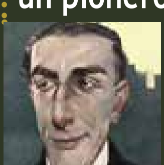
Ciencias duras en palabras blandas

N°7 - Diciembre 2017
ISSN: 1852-5091

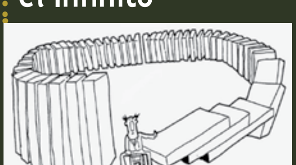
όπερ έδει δείξαι

La melodía de los primos

Rey Pastor, un pionero



Disparen sobre el Infinito



- Divagaciones de Agustín
- El dia Pitagórico
- Primos y criptografía
- Primos diabólicos
- Nuevas demostraciones

EN LA UBA SE ENSEÑA,
SE APRENDE, SE INVESTIGA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
MÁS UNIVERSIDAD PARA TODOS

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
www.uba.ar

Editorial

Agustín

"...que tenemos que hablar de muchas cosas,
Compañero del alma, compañero."
Miguel Hernández

Agustín Rela
(febrero 1942 – julio 2017) Electrotécnico y licenciado en Física. Graduado emblemático de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, protagonista de los célebres cursos de ingreso de los años 60 junto a Eduardo Flichman y colaborador en la normalización de la Facultad en los años 80 después de la larga noche dictatorial. Creador del área de Física del Ciclo Básico Común, Director de Qed. Un tipo extraordinario y muchas cosas más...

Esta edición de Qed tiene varias propiedades especiales. Viene con la promesa de un retorno definitivo, con la intención editorial de darle centralidad a los números primos, pero debe saberse también que esta revista fue pensada, escrita y diseñada conjurando con trabajo el enorme dolor que nos dejó la partida de nuestro querido Agustín Rela. Qed 7 debía salir porque era el mínimo homenaje que Juan Carlos, Pablo y quien escribe queríamos rendirle al compañero de tantas charlas delirantes y aventuras intelectuales.

En Agustín se dio una combinación mágica muy poco frecuente: ingenio, una memoria extraordinaria que le permitía evocar con precisión historias y lecturas, agudeza para extraer de sus paseos intelectuales enseñanzas para el presente y una infaltable dosis de humor. Pero todo con pizca de humildad que lo alejaban del estrado para hablar desde el llano. Y todo, en última instancia, puesto al servicio de un ideario plantado en la creencia de que la educación, la ciencia, la cultura llevada a todos los rincones del pueblo permitirían la construcción de una sociedad más justa. Lo conocí en los años '80 cuando hacíamos Interacción, una revista estudiantil de físicos y matemáticos, y él fue de los profes que colaboraron entusiastamente con nosotros. Por tipos como Agustín me convencí que Exactas era mi lugar en el mundo.

Se me agolpan recuerdos, sus desopilantes historias de la Facultad en los años '60 -Noche de los Bastones Largos incluida- una película dando una clase pública en Florida, su militancia juvenil comunista, que con las décadas fue destilando hasta quedarse con un humanismo que se alimentaba tanto de Marx como de la Biblia, configurando un pensamiento y acción que a veces resultaba ingenuo, como salido de los sueños anarquistas del siglo XIX, sueños de Quijotes armados con inquebrantable fe en el hombre.

A Juan Carlos le debo la posibilidad de haber dado los pasos necesarios para materializar una revista nacida de charlas entre clase y clase, y con esta excusa haber podido compartir más tiempo con Agustín, disfrutar su ingeniosa manera de poner en evidencia la física en la vida cotidiana, charlas eternas donde se entrelazaban los hilos de la ciencia, la historia, el cine, las letras y la vida misma.

Nuestro compromiso con los lectores de Qed es seguir compartiendo en nuetras páginas la voz de Agustín. Prometemos que "Pajareará su alma colmenera", como decía el poeta Miguel Hernández, por nuestras páginas.

Carlos Borches

Q.e.d., Quod erat demonstrandum, *es una expresión latina que significa:*

lo que se quería demostrar

Tiene su origen en la frase griega όπερ έδει δείξαι (óper édei deíjai), que usaron muchos matemáticos, entre ellos Euclides y Arquímedes, para señalar que habían alcanzado la demostración que buscaban.

Staff

Q.e.d.
Ciencias duras en palabras blandas©

Revista trimestral de divulgación
número 7

Universidad de Buenos Aires
Ciclo Básico Común (CBC)
Departamento de Ciencias Exactas
Pabellón 2, Ciudad Universitaria, Buenos Aires, Argentina

Director:
Juan Carlos Pedraza

Editor:
Carlos Borches

Redacción:
Iliana Pisarro

Diseño:
Pablo Gabriel González

Consejo editorial:
Flora Gutiérrez
Patricia Fauring

Agradecemos la colaboración de
Christian Espíndola
Gabriela Jeronimo
Gonzalo Saravia
Juan Pablo Pinasco
Matías Cveczilberg
Vladimir Pomsztein

Impresa en La Copia

revistaqed@cbc.uba.ar
www.qed.cbc.uba.ar

+54 11 4789-6000, interno 6083
+54 11 4781-0706
ISSN 1852-5091

Todos los derechos reservados; reproducción parcial o total con permiso previo del Editor, y cita de fuente.
Registro de propiedad intelectual en trámite

Q.e.d. Ciencias duras en palabras blandas

Artículos

Secciones

La música de los números primos

Juan C. Pedraza
CBC-UBA

El concepto de número primo es uno de los más simples de la matemática. Tal es así que se enseña en los primeros años de la escuela.

Sin embargo, ocultan uno de los misterios más antiguos de la matemática. Desde los tiempos más remotos, los matemáticos han intentado encontrar una "fórmula mágica", una regla de formación, una cadencia, un ritmo… una *música* de los números primos. Nadie lo ha conseguido aún. Esta es pues la historia de un fracaso, pero de un fracaso que ha dado lugar a nuevas teorías, conjeturas y ha sido fuente de creatividad y belleza.

NÚMEROS SALVAJES

Los números naturales que usamos para contar: 1, 2, 3, etcétera, aparecen en la historia del hombre tal vez con la agricultura, cuando surge la necesidad de contar granos o cabezas de ganado. Con esta necesidad de contar el hombre creó los primeros sistemas de numeración, dando así un gran salto evolutivo. Cuando decimos "cinco" nos podemos referir tanto a cinco piedras, a cinco personas, a cinco pesos o a cinco lo que sea. Cinco resulta un concepto abstracto. Esta abstracción que caracteriza a los procesos matemáticos y que a veces es el motivo de su impopularidad, es básico para establecer un lenguaje común y poder comunicarnos. Cambiar ese rechazo en fascinación y curiosidad, es nuestro desafío.

Con los sistemas de numeración surgieron las operaciones, entre ellas la de multiplicar dos números. Observando los primeros números, vemos que unos se obtienen a partir de otros usando esta operación. Por ejemplo: el 6 se obtiene multiplicando el 2 y el 3. El 30 se obtiene de multiplicar el 5 y el 6. Como el 6 es 2 por 3, resulta también que el 30 es el producto de tres *factores*: 2 por 3 por 5. El nombre *factor* viene de *hacedor* o *fabricador* (factor – factoría – fábrica) Es decir, el 2, el 3 y 5 *hacen* o *forman* el 30. ¿Qué nos detiene en este proceso de *factorizar* el 30? Tanto el 2 como el 3 como el 5 no pueden ser formados por ningún otro número. Dicho de otra manera, de la lista de números hay algunos, como el 6 y el 30 por ejemplo, que se forman a partir de otros. Los podríamos sacar de la lista, sabiendo que los podemos fabricar con solo multiplicar adecuadamente sus factores. Pero hay otros que son insustituibles porque no pueden ser formados por otros números que no sean ellos mismos. Estos números, el 2, el 3 y el 5 por ejemplo, que no tienen factores además del 1 y de si mismos, son los llamados **números primos**. En el ejemplo del 30, formado por el 2, el 3 y el 5, cada uno de ellos divide el 30 sin que sobre nada. Por ejemplo 30 dividido 2 es exactamente 15 o 30 dividido 3 es exactamente 10. Al dividir 30 por 5 nos da 6 sin que tampoco sobre nada. Decimos que 2, 3 y 5 son divisores primos de 30.

En este proceso de fabricación de los números a partir de otros usando la multiplicación, los números primos vienen a jugar el papel de los átomos de la aritmética y allí radica tal vez su importancia.

El primer intento que debe haber surgido es hacer una lista de estos números tan particulares. Enseguida se vio que la lista era larga. Peor que eso, la lista era caótica.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

Salvo el 2 todos son impares pero no todos los impares están en la lista. Por ejemplo 15 no es primo ya que se puede fabricar a partir del 3 y el 5. No había una forma de saber cuál sería el próximo número primo y si siempre habría un próximo.

El año que estamos terminando es un primo con varias propiedades singulares. Si sumamos todos los primos impares hasta 2017, es decir $3+5+7+\ldots+1999+2003+2011+2017$ resulta ser un número primo. Además, el entero más próximo a $\pi.2017$ es primo, como también lo es el entero más próximo a e.2017. Intercalando un 7 entre sus cifras siempre es primo: 27017, 20717, 20177. Incluso 20177 es primo. Si alguien se lamenta por no haberlo sabido en enero, habrá que esperar hasta el 2027 para el próximo número primo.

Euclides, en una de las columnas del Museo de Historia Natural de la Universidad de Oxford. La demostración del Teorema de Pitágoras se deja leer en el rollo que Euclides lleva en la mano.

La matemática busca regularidades, patrones que puedan predecir de qué va la cosa. Encontrar la regularidad de un objeto de estudio, encontrar su ritmo, es como amansar un caballo salvaje. Los primos resultaron ser a lo largo del tiempo unos números salvajes que no se dejaron domar.

ARRIESGÁNDOLO TODO

El primer salto significativo lo dio Euclides en el año 300 antes de nuestra era o por lo menos fue él quien lo escribió en el libro más famoso de la matemática: *Elementos*. Digo de la matemática pero podría decir uno de los más famosos de la humanidad ya que, después de la Biblia, se dice que es el libro que más ediciones ha tenido a lo largo de la historia. En él se resume todo el conocimiento que se tenía de la matemática y fue libro de cabecera por más de 2000 años. Entre muchas otras cosas, Euclides demostró que siempre había un primo después de otro. Es decir, que había infinitos primos.

La idea de la demostración de Euclides apela a una de las formas de razonamiento más bellas que tiene la matemática. La reducción al absurdo. Euclides pensó: supongamos que el 2, 3 y 5 son los únicos números primos que hay y que todos los demás números son, en contrapartida, compuestos y se pueden obtener a partir de ellos. Euclides se fabricó un nuevo número: hizo el producto de estos tres y únicos primos y le sumó 1: 2 por 3 por 5 más 1. Le dio 31. Ni 2, ni 3 ni 5 dividen en forma exacta a 31 ya que siempre da resto 1 en la división porque así fue construido (31 dividido 2 es 15 y sobra 1, 31 dividido 3 es 10 y sobra 1, 31 dividido 6 es 5 y sobra 1), de modo que 31 no se puede fabricar con los tres números primos existentes. O bien 31 es un nuevo número primo, o bien está formado por otros números primos que no estaban en la lista de los tres únicos primos. Sabemos que 31 es primo, con lo cual estamos en el primer caso. Pero cualquiera sea el caso, esto contradice que sólo haya tres números primos. Este razonamiento se puede hacer con cualquier cantidad finita de números primos y siempre se llega a la misma contradicción: hay un número que o bien es un primo que no está en la lista o bien hacen falta nuevos números primos para construirlo. Por lo tanto, hay infinitos números primos.

Desde esta demostración de Euclides, pasaron 2100 años sin que nada muy significativo pasara con este misterio. Nadie podía encontrar su cadencia, su ritmo al tiempo de que nuevos problemas y conjeturas nacían al compás de su errático andar.

CRIBA DE ERATÓSTENES

Eratóstenes nació en Cirene (hoy Libia) por el año 276 antes de nuestra era. Fue director de la Biblioteca de Alejandría y confeccionó una criba (una suerte de colador o tamiz) que solo dejara a la vista a los primeros números primos.

El método era sencillo: primero se eliminan los múltiplos de 2 (los pares mayores que 2): luego se tachan los múltiplos de 3, luego los múltiplos de 5:… De esta manera quedan sin tachar los primeros números primos

No fue lo más notable que nos legó Eratóstenes. Obtuvo con sorprendente exactitud que la circunferencia de la Tierra medía unos cuarenta mil kilómetros usando elementos básicos de geometría.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

CÓMO GANAR UN MILLÓN

En 1792 un chico de 15 años recibió como regalo de cumpleaños una tabla de logaritmos que tenía al final, una larga lista con los primeros números primos. El joven era Carl Fiedrich Gauss (1777 – 1855), uno de los más grandes de la historia. Fue llamado el *Príncipe de la Matemática*. Él, como tantos otros, no podía establecer un patrón que permitiera predecir cuál sería el siguiente número primo. Pero como suelen hacer los hombres con el talento de Gauss (un adolescente por entonces), trató de tener otra mirada, intentó atacar el problema desde otro ángulo, de cambiar la pregunta. En lugar de preocuparse por encontrar una fórmula, se empezó a preguntar cómo estaban distribuidos. Observó que entre los primeros diez números, había abundancia de números primos: eran 4: el 2, el 3, el 5, el 7. Casi la mitad.

Un joven Gauss en una estampilla de la desaparecida Republica Democrática Alemana

Gauss observó que esta abundancia de primos que se comprueba entre los primeros números se iba disipando conforme se exploran números más grandes. Lo sorprendente para Gauss era que lo hacían siguiendo cierta cadencia rítmica: mientras que entre los primeros diez casi la mitad eran primos, entre los cien primeros números, una cuarta parte de ellos eran primos, entre los primeros mil solo la sexta parte aproximadamente resultaban ser primos,

DESDE SAN PETESBURGO TE ESCRIBO ESTAS LINEAS…

El 7 de junio de 1742 desde San Petesburgo salió despachada una carta de Christian Goldbach (1690–1764) hacia Berlín donde por ese entonces vivía Leonard Euler (1707–1783)

En ella Goldbach afirmaba que todo número que pudiera escribirse como suma de dos primos también podía escribirse como suma de tres primos. Por ejemplo

6 = 3+3 = 2 + 2 + 2 , 7 = 5 + 2 = 3 + 2 + 2

Aunque hay números como el 11 que no se puede escribir como suma de dos primos pero si como suma de tres primos (11 = 5 + 3 +3).

A Euler le surgieron dos preguntas naturales a partir de esta carta y de otra que Goldbach le había remitido anteriormente:

¿Qué números se pueden escribir como suma de dos números primos?

¿Pueden todos los números ser escritos como suma de tres primos?

A partir de estas dos preguntas y de las observaciones de Goldbach se generaron dos conjeturas como respuesta:

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos primos.

Todo número mayor que 5 puede escribirse como suma de tres primos.

Es fácil ver que la primera afirmación (llamada Conjetura fuerte de Goldbach) implica la segunda afirmación (Conjetura débil de Goldbach) ya que, si un número impar es mayor que 3, se puede escribir como 3 más un número par que, suponiendo válida la conjetura fuerte, se puede escribir como suma de dos primos. El caso de que sea par es más sencillo aún gracias a que 2 es primo.

La Conjetura de Godlbach es uno de los problemas abiertos que más ha resistido los intentos de generaciones de matemáticos. Hardy, al que hemos mencionado varias veces en esta historia decía que no solo era uno de los problemas más difíciles de la teoría de números sino de toda la matemática.

Hace poco, el 13 de mayo de 2013 se difundió por el mundo científico que un matemático peruano, llamado Harald Andrés Helfgott había demostrado la versión débil de la conjetura, cerrando un problema que estuvo abierto más de 270 años. Helfgott estuvo por Argentina en sus años de adolescente representando a Perú en la VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática que se llevó a cabo en Córdoba en 1991 donde obtuvo una medalla de bronce.

Todavía está pendiente la demostración de la versión fuerte de la conjetura de Goldbach.

entre los primeros diez mil apenas uno de cada ocho de ellos era primo y entre los primeros cien mil el diez por ciento aproximadamente.

Cada vez que agregaba un cero a la cantidad de números, la proporción de primos disminuían con cierta regularidad, con 2 como factor de regularidad, siempre en forma aproximada.

¿Había encontrado el Príncipe de las Matemáticas un patrón, una regularidad que nos permitiera apreciar la melodía de estos números que hasta entonces habían sido solo notas aisladas y con poco sentido?

Gauss no pudo demostrar su conjetura y hubo que esperar hasta 1896, poco más de cien años para que Jacques Hadamard (1865 – 1963) y Charles Jean de la Vallée Poussin (1866 – 1962) demostraran en forma independiente que la conjetura era cierta y que los primos tenían una música propia, aunque todavía no se sabía (y aún no se sabe) la partitura completa. La demostración de estos dos matemáticos se basaba en un descubrimiento prodigioso realizado por un discípulo de Gauss de la Universidad de Gotinga donde era profesor. En 1859 descubrió una relación inesperada entre la distribución de los números primos y una misteriosa función.

Este personaje se llamaba Georg Fredrich Bernhard Riemann (1826 – 1866). Nació en Hanover, Alemania. Era un estudiante tímido, hipocondríaco y poco afecto a socializar con sus compañeros. Entró a estudiar en Gotinga en 1846 atraído por la fama de Gauss.

CONJETURA DE GAUSS

Gauss estableció que si $\pi(x)$ es la cantidad de números primos que no superan a *x*, este número se puede aproximar en forma asintótica a la expresión $\dfrac{x}{\ln x}$.

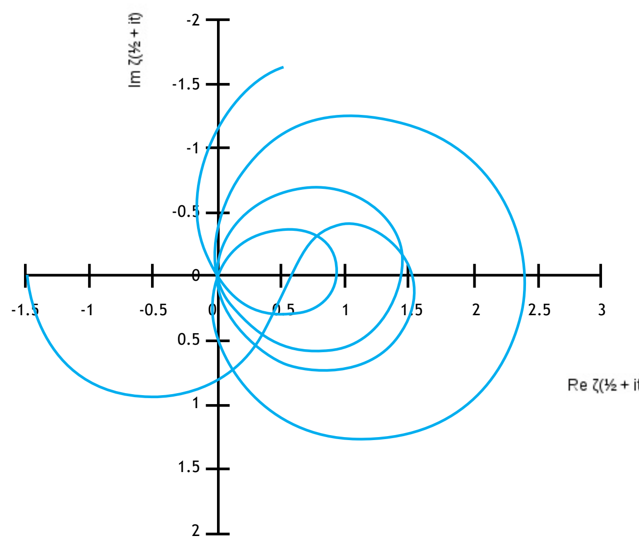
Es decir $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$

Esta expresión se debe entender como que el cociente de estas dos expresiones se parece a 1 para valores grandes de *x*. Por ejemplo $\pi(10) = 4$ y $\dfrac{10}{\ln 10} \sim 4{,}34$.

La tabla ilustra la extraordinaria intuición de Gauss al formular esta conjetura demostrada tiempo después por Hadamard y Poussin haciendo uso de la función zeta.

x	$\pi(x)$	$\dfrac{x}{\ln x}$	$\dfrac{x}{\pi(x)\ln x}$
10	4	4,34	1,085
100	25	21,71	1,152
1 000	168	144,76	1,160
10 000	1 229	1 085,73	1,132
100 000 000	5 761 455	5 428 681	1,061
1 000 000 000	50 847 534	48 254 942	1,054

Riemann hizo su descubrimiento cuando estudiaba una función llamada *función zeta*. Una función es una especie de calculadora: introducimos unos cuantos números en la función y obtenemos un cierto resultado. Por ejemplo, en la función “el doble de” cuando introducimos un 5 la función nos entrega el 10; en la función “suma” cuando introducimos el 2 y el 7 la función nos entrega el 9. Cuando graficamos una función en un sistema de ejes coordenados obtenemos curvas o superficies, dependiendo de la cantidad de variables en juego. Riemann se dio cuenta de que podía construir un escenario tridimensional que le serviría para estudiar los números primos. Obtuvo así un misterioso paisaje con extensas mesetas, depresiones abismales y cordilleras infinitas. Pero no era esto lo interesante del paisaje sino que en los valles había ciertos lugares a nivel del mar (a altura cero), que parecían estar distribuidos de una manera muy particular. Los matemáticos los llamamos *ceros* de la función. Riemann tuvo la sensación de que estos puntos estaban todos alineados y que tenían una conexión estrecha e inesperada con la distribución de los números primos. La distribución exacta de los ceros permitía estimar con mayor precisión la distribución de los números primos. Podríamos decir que los ceros daban las notas de la música que se estaba buscando. Pero Riemann no pudo demostrar lo que intuía. Escribió Riemann



Rango de la Función Zeta de Riemann tomando como dominio la recta crítica

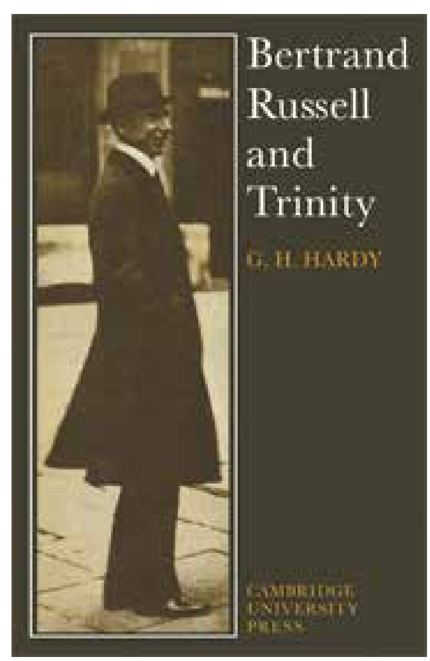
Es muy probable que todos los ceros (de la función zeta) estén sobre una recta. Sería bueno tener una prueba de esto pero he dejado a un lado la investigación de tal prueba después de varios intentos infructuosos.

Los ceros de la función zeta de Riemann pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Riemann había encontrado una regularidad, un patrón. ¿Era esta la música de los números primos tan buscada?

Esta conjetura de que todos los ceros de la función zeta están alineados se llama desde entonces la *hipótesis de Riemann* y se convirtió en el desvelo de varias generaciones de matemáticos, no tanto por la recompensa de un millón de dólares que recibirá quien logre demostrarla, sino porque el que lo logre tendrá un lugar en el olimpo donde residen los grandes. Riemann no pudo demostrarla, ni disfrutarla. La guerra entre Hanover y Prusia hizo temer a Riemann que una bala lo encontraría en las calles de Gotinga y se fue a Italia. A las tres semanas, con solo 39 años, murió de tuberculosis.

¿MATEMÁTICA PURA o PURA MATEMÁTICA?

Fue Hardy el que dio el siguiente paso al demostrar que había infinitos ceros alineados, aunque no logró probar la hipótesis de Riemann, su obsesión.



Hardy fue uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, vivió y sufrió la primera guerra mundial en Inglaterra siendo un militante pacifista junto con otros más activos como Bertrand Russell[1]. Se jactaba de que estudiaba los números primos porque no tenían ninguna aplicación práctica y no podían hacer daño a nadie. Hardy estaba equivocado: los números primos fueron de gran importancia en el desarrollo de Internet. Hoy son vitales en la seguridad del mundo financiero y de todo lo que requiera seguridad informática.

1 En 1916 seis estudiantes del Trinity College fueron detenidos por repartir un documento contrario a la guerra. Inmediatamente Bertrand Russell escribió al periódico The Times afirmando que como autor del documento “si alguien debe ser procesado soy yo el principal responsable”. Inmediatamente Russell fue arrestado, procesado y multado por publicar “declaraciones que podrían perjudicar el reclutamiento y la disciplina de las fuerzas de Su Majestad”, y en sintonía con la justicia el Consejo de administración lo expulsó del Trinity College a pesar de las protestas de numerosos profesores. En 1942 Hardy escribió un controvertido folleto explicando los sucesos que motivaron la expulsión de Russell.

David Hilbert (1862 – 1943), que en 1900 había señalado a éste como uno de los problemas del siglo XX, decía que si se durmiera y se despertara quinientos años después, lo primero que preguntaría al despertar es si la hipótesis de Riemann había sido probada. Han pasado más de 150 años desde su formulación. Tal vez no haya que esperar tanto.

LA CLAVE ESTÁ EN LA CLAVE

La generación de claves secretas que permita transmitir información segura, fue uno de los problemas más importantes a resolver a lo largo de la historia. Con la posibilidad de desarrollar lo que hoy conocemos como Internet, este problema se convirtió en el mayor desafío de la posguerra. La criptografía, rama de la matemática, fue protagonista en esta y otras encrucijadas de la historia de la humanidad.

En los años sesenta, el Departamento de Defensa de los Estados Unidos comenzó a financiar un proyecto de investigación llamado ARPA. Era el germen de lo que en 1969 sería ARPAnet, manejado solo por el Pentágono y algunos grupos de investigación. De allí, en 1982, nació Internet.

La distribución de claves se convirtió pues, en el problema más acuciante para los criptógrafos. Si dos partes querían comunicarse en forma segura, necesitaban de una tercera para distribuir la clave. Los costos crecientes que esto implicaba ponían a las empresas y a los estados en un dilema que parecía no tener solución. El problema fue resuelto por dos norteamericanos que cruzaron sus vidas en forma curiosa. En 1974 Whitfield Diffie, un criptógrafo independiente, fue invitado a un laboratorio de IBM en Nueva York a dar una charla. De un auditorio escéptico lo único que obtuvo fue datos sobre la existencia de un criptógrafo en California que estudiaba el mismo problema: Martin Hellman. Esa misma tarde Diffie recorrió en su auto los 5 mil kilómetros que lo separaban de la costa oeste para encontrarse con el hombre que compartía su obsesión. Hellman, que nunca había oído hablar de Diffie, le concedió un encuentro de mala gana esa misma tarde. Dos años después, en la primavera de 1976, ambos dieron con una estrategia para resolver el problema de la distribución de claves, usando la llamada *aritmética modular*.

LA OBSESIÓN DE HARDY

En su novela *El contable hindú* David Leavitt nos cuenta una anécdota de Hardy y su obsesión por resolver la hipótesis de Riemann. Había viajado desde Cambridge a Copenhague a visitar a su amigo matemático Harald Bohr, hermano del físico que obtuvo el Premio Nobel. Harald sin embargo, era más popular que su hermano porque además de matemático había participado en la selección de fútbol danesa que había obtenido el segundo puesto en las olimpíadas de 1908.

Hardy, medio en broma, medio en serio, consideraba que Dios estaba siempre ocupado en fastidiarlo. En cada visita a su amigo la rutina era la misma: tratar de demostrar la hipótesis de Riemann y dar un largo paseo por el parque. Ese año era el fin del verano y Hardy estaba obligado a volver a Inglaterra para comenzar las clases. El barco que lo cruzaría a la isla era pequeño y la tormenta que se había desatado era terrible. Hardy evaluó que era probable que su barco zozobrara en el trayecto a Gran Bretaña. Fue entonces que tomó la decisión de comprar en un kiosco del muelle unas postales y le envió a Bohr y a su colega de toda la vida John Littlewood (1895 – 1977) sendas tarjetas con el texto: “He probado la hipótesis de Riemann”. El razonamiento de Hardy era que Dios no permitiría que se alzara con la gloria de que la humanidad creyera que él había desaparecido junto con la ansiada demostración y cuidaría así que la pequeña embarcación no se hundiera y que Hardy llegara sano y salvo a su casa.

Godfrey Harold Hardy

Un año después tres matemáticos, Rivest, Shamir y Adleman diseñaron el sistema RSA (sus iniciales) que hoy sigue en uso.

La idea feliz de Diffie y Hellman es la siguiente:

Quiero mandarle un mensaje secreto a Carlos que está en otra oficina de la Facultad, pero Agustín que se ofreció gentilmente a llevar el mensaje, lo puede espiar. Para que no lo vea, lo coloco en una caja y le pongo un candado del que solo yo tengo llave (mi clave). La caja llega a Carlos y aunque Agustín lleve la caja en sus manos, no podrá ver su contenido porque no tiene la llave de mi candado. El problema es que Carlos tampoco tiene llave y no puede abrir la caja. Lo que hace Carlos, sin abrir la caja porque no puede, es ponerle su propio candado y cerrarlo con su llave que solo él tiene (la clave de Carlos). Ahora la caja tiene dos candados y Carlos me la envía de nuevo a mí a través de Agustín que ahora la tiene más complicada que antes: dos candados y ninguna llave. ¿Qué hago yo con la caja otra vez en mi poder? Simplemente acciono mi llave y saco mi candado. La caja queda pues con un solo candado cuya llave solo tiene Carlos en su oficina. Cuando Agustín le lleve la caja a Carlos seguirá impedido de poder ver su contenido porque ahora tiene un candado. Cuando Carlos la recibe, acciona su llave, abre la caja y saca finalmente el mensaje secreto que yo le envié. Esto, básicamente, ocurre con Internet con un mensaje de texto o con las redes sociales, para que solo el receptor pueda ver el mensaje. Esto es lo que los matemáticos llamamos una idea feliz. Simple y brillante. Lo primero que nos sale decir es ¿cómo no se me ocurrió si es tan sencilla? Pues bien, se les ocurrió a ellos. Claro que solo con la idea no alcanzaba y había que fabricar esos candados y esas llaves. Allí la matemática juega un papel crucial. Hay operaciones que son fáciles hacer y difíciles de deshacer. Por ejemplo multiplicar **131** por **171** es una tarea que cualquier calculadora hace en décimas de segundo. Pero responder a la pregunta, el producto de qué dos números es **22401** es bastante más difícil. Si en lugar de ello ponemos un número de 100 mil cifras no hay computadora actual ni algoritmo que no tarde una eternidad en resolverlo. (Ver página 13)

LOS EXTRATERRESTRES Y LOS NÚMEROS PRIMOS

El hecho de que los números primos parezcan no responder a ningún patrón y se presenten en forma caótica entre los números naturales, hace pensar que ningún fenómeno natural o del cosmos es capaz de producir ese caos de los números primos y mucho menos en una secuencia que se repita. Esta idea fue explotada por Carl Sagan (1934 – 1996) en su única novela, que resultó ser un best seller y que incluso llegó al cine con el mismo nombre del libro: *Contacto*. En esta novela, se recrea el sueño de la humanidad de tomar contacto con vida más allá de la Tierra. Por medio de un sofisticado complejo de radiotelescopios se emiten y reciben señales de radio durante años en la búsqueda de una señal que indique la existencia de vida extraterrestre en algún lugar del universo. Una tarde el curso de la historia humana cambia para siempre. El mensaje llega. La señal que recibe un radiotelescopio no es otra cosa que la melodía caótica de los primeros números primos que se repite una y otra vez. La señal proveniente del espacio exterior no podía ser casualidad, era seguro que había sido enviada por seres inteligentes. La idea es interesante: Sagan pensaba que si tomáramos contacto con alguna inteligencia extraterrestre habría que comunicarse en algún lenguaje que fuera común a ambos, tengamos el idioma que tuviéramos, y que podamos descifrar. Ese lenguaje, creía Sagan, era el de la matemática...

Sagan llevó esta idea más allá que en una novela. Aprovechando la inauguración del telescopio de Arecibo, el 16 de noviembre de 1974, en Puerto Rico, decidió mandar una única señal de radio hacia un cúmulo formado por unas 400 mil estrellas en la constelación de Hércules, distante de la Tierra unos 25000 años luz. La señal tenía información en código binario sobre nosotros y nuestro planeta y fue enviada con la esperanza de que alguna inteligencia extraterrestre lo captara y devolviera el mensaje algún día. El mensaje tiene una longitud de 1679 bits. El número 1679 fue elegido porque es el producto de dos números primos (el 23 y el 73) y por lo tanto sólo se puede descomponer en 23 filas y 73 columnas o 23

Desde el radiotelescopio de Arecibo, el 16 de noviembre de 1974 se envió un mensaje en la dirección del cúmulo de estrellas llamado M13. El mensaje tiene una longitud de 1679 bits, que se descompone en una matriz de 73 filas por 23 columnas. No es una conformaciçon aleatoria y si es descibrado llevará información sobre la Tierra y la especie humana.

columnas y 73 filas, de forma que quien lo lea y decida organizar los datos en forma de rectángulo pueda descifrarlo fácilmente. Hay ocho posibles configuraciones (de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba, de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, un rectángulo o el otro). De esas ocho configuraciones solo una genera información coherente. Leído de izquierda a derecha, presenta los números del uno al diez, los números atómicos de los componentes del ADN humano. Además daba más información sobre el ADN y su estructura helicoidal doble, la figura de un ser humano y su altura, la población de la Tierra en ese entonces, la ubicación del Sistema Solar en el cosmos, y una imagen del radiotelescopio de Arecibo con su diámetro. Debido a que al mensaje tardará unos 25 milenios en llegar a su destino (y una hipotética respuesta otro tanto), el mensaje de Arecibo fue más una demostración de los logros tecnológicos humanos que un intento real de establecer conversación con extraterrestres. Sin embargo hay leyendas de que hace algunos años hubo alguna respuesta que los Estados Unidos mantienen en secreto. Pero eso es más parte del folklore ovni que de la ciencia propiamente dicha.

LECTURAS Y VIDEOS RECOMENDADOS

Contacto – Carl Sagan. Emece. 1998.
El contable hindú – David Leavitt. Anagrama. 2011.
Los misterios de los números primos – Marcus du Sautoy. Acantilado. 2012.
Los códigos secretos – Simon Singh. Debate. 2000.
Apología de un matemático – G. H. Hardy. Nivola. 1999.
La música de los números primos – Marcos du Sautoy. BBC. 2006
www.youtube.com/watch?v=KyORBGrvlyM.

LA FUNCIÓN ZETA

La función zeta se define como una suma infinita:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde los valores de s se toman sobre los números complejos. Por ejemplo es conocido el valor de la función zeta para

$$s = 2: \qquad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Cuando la parte real de s es mayor que 1, se obtiene una suma infinita convergente que define, en ese semiplano, una función analítica, esto es, que se puede expresar como una suma infinita de potencias y resulta ser suave ella y todas sus derivadas. La función zeta se puede extender en forma analítica (se llama prolongación analítica) para el semiplano complejo con parte real menor que 1. Con esta prolongación se obtiene una ecuación funcional muy útil que vale para valores de s con parte real menor que 1:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Esta ecuación (que involucra a la función gamma, extensión del factorial en el sentido que

$$\Gamma(n) = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

cuando n es un número natural) permite ver que la función zeta se anula sobre los números enteros pares negativos (la función seno se anula cuando s es par en esta ecuación). A estos ceros se los llama triviales ya que se los obtiene fácilmente de la ecuación funcional. Pero además tiene otros ceros llamados no triviales. La hipótesis de Riemann dice que estos ceros son todos de la forma:

$$s = \frac{1}{2} + bi$$

Es decir están en una misma recta, llamada recta crítica. La primera conexión con los números primos la estableció Euler al mostrar que:

$$\zeta(s) = \left(\frac{1}{1-2^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1-3^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1-5^{-s}}\right)\ldots = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

válida para los complejos con parte entera mayor que 1.

La hipótesis de Riemann está entre los llamados siete problemas del milenio para cuya resolución el Instituto Clay de Matemática estableció un premio de 1 millón de dólares para la solución de cada uno de ellos. Los problemas son difíciles de expresar en palabras blandas. Hasta la fecha solo uno, la llamada conjetura de Poincaré ha sido resuelta por el matemático ruso Grigori Perelman que rechazó el premio monetario.

Gabriela Jeronimo
CBC - FCEyN

Encriptado RSA

Los métodos de encriptación clásicos comparten dos propiedades fundamentales: (1) todo el que puede encriptar un mensaje también puede desencriptarlo, y (2) el emisor y el receptor comparten una clave secreta que debe ser acordada antes de comenzar el proceso de encriptación. Esta simetría trae como consecuencia la necesidad de generar y transmitir de manera segura una clave para cada par emisor-destinatario, que éstos deben mantener en secreto.

Whitfield Diffie y Martin Hellman propusieron en 1976 un esquema asimétrico, que soluciona los inconvenientes anteriores. Está basado en el uso de ciertas funciones, llamadas *funciones de un solo sentido*, que son funciones inversibles con la propiedad de que en la práctica es imposible encontrar la función inversa.

¿Cuál es la idea? Cada usuario elige una función de un solo sentido f, que se usará para encriptar, con su correspondiente inversa f^{-1}, que sirve para desencriptar. Las funciones para encriptar se publican (de ahí el nombre de *criptografía de clave pública*) en una especie de "guía telefónica", pero cada uno mantiene en secreto la función inversa para desencriptar. Si Ana quiere mandarle un mensaje secreto M a Bruno, busca en la guía la función f_B para encriptar publicada por Bruno (*clave pública* de Bruno) y le envía $f_B(M)$. Bruno (y sólo él!) conoce la función f_B^{-1} (*clave privada* de Bruno) que le permite desencriptar el envío y recuperar el mensaje de Ana, simplemente calculando $f_B^{-1}(f_B(M)) = M$. Si Ema intercepta el envío de Ana, no puede descifrar el mensaje porque, aun si busca la función f_B en la guía, no puede calcular su inversa.

Ahora bien, ¿cómo se lleva esta idea a la práctica? La primera implementación del modelo descripto arriba, y que se emplea aún hoy día, fue propuesta por Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman en 1977. Se trata del *algoritmo RSA* (nombre formado por las iniciales de los apellidos de sus autores).

El algoritmo RSA se basa en propiedades de los números primos. Su seguridad reside en que es fácil encontrar números primos "grandes", pero es muy difícil factorizar un número "grande" que es producto de dos primos "grandes".

Veamos un ejemplo con números pequeños. La elección de las claves (pública y privada) se realiza de la siguiente manera: Bruno toma dos números primos p y q y calcula $N = p.q$; por ejemplo, $p = 3$, $q = 11$ y $N = 33$. Luego elige dos números E y D tales que el producto E.D tenga resto 1 en la división por $(p-1)(q-1)$; por ejemplo, E = 13 y D = 7, que cumplen que 13.17 = 221 tiene resto 1 en la división por 20 = (3-1)(11-1). La clave pública de Bruno es el par de números (E, N) y su clave privada, el par (D, N); en el ejemplo, la clave pública de Bruno es (13, 33) y la privada es (17, 33).

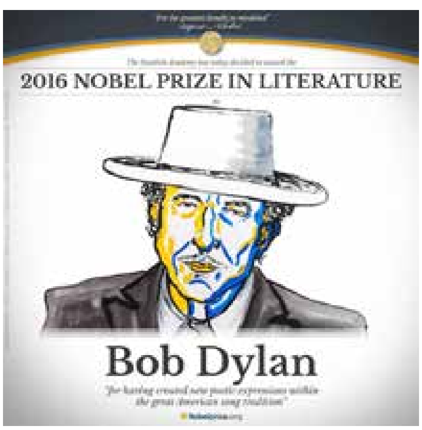
Para mandarle un mensaje M a Bruno (representado por un número natural menor que N), Ana utiliza la clave pública de Bruno (E, N) para *encriptarlo*: calcula el resto de dividir por N al número M^E y le envía este resto, que es el mensaje cifrado M_C. En el ejemplo, si M = 2, Ana calcula el resto de dividir 2^{13} por 33, obteniendo $M_C = 8$.

Cuando Bruno recibe el mensaje cifrado M_C, lo *desencripta* con su clave privada (D, N), calculando el resto de dividir $(M_C)^D$ por N. En el ejemplo, Bruno recibe $M_C = 8$ y calcula el resto de dividir 8^{17} por 33, obteniendo M = 2, que es el mensaje original de Ana. Observamos que el resto de dividir $(M_C)^D$ por N es siempre M; o sea, al desencriptar usando su clave privada, Bruno siempre recupera correctamente el mensaje de Ana. Esto es consecuencia del *pequeño teorema de Fermat*, que afirma que si p es un número primo y m es un número entero que no es múltiplo de p, entonces m^{p-1} tiene resto 1 al dividirlo por p.

Si Ema intercepta el mensaje cifrado M_C, no puede recuperar M: conociendo el resto de dividir a M^E por N, y los números E y N, se cree que la única manera de calcular M es obteniendo D tal que ED tiene resto 1 en la división por $(p-1)(q-1)$ (¡y ésta es la clave secreta de Bruno!). A su vez, para calcular D, sería necesario conocer $(p-1)(q-1)$, para lo cual, se necesitaría conocer p y q, es decir, la factorización de N.

En la práctica, en la generación de claves se utilizan números primos de entre 100 y 200 cifras decimales, lo que hace que sea computacionalmente imposible hallar p y q conociendo $N = p.q$.

Las cigarras y los números primos



En 2016 la Academia Sueca entregó el Premio Nobel de Literatura a Bob Dylan por «haber creado una nueva expresión poética dentro de la gran tradición de la canción estadounidense»

Cuenta la leyenda que el trovador norteamericano Bob Dylan se encontraba en la Universidad de Princeton para recibir un doctorado honorífico. En los alrededores de la universidad hay un bosque. Dylan pudo escuchar un ensordecedor canto de cigarras similares a las que podemos escuchar los días calurosos de verano en Buenos Aires.

Esto inspiró a Dylan para componer Day of the Locusts (Día de la Cigarra). Bob Dylan no se encuentra muy a gusto en el ambiente académico. En esta canción nos dice:

Eché una ojeada a la cámara

Donde estaban los jueces hablando.

La oscuridad caía por doquier,

Aquello parecía un cementerio

....

Me puse la túnica y recogí el diploma

Tomé a mi novia de la mano

Y nos fuimos de allí

Derecho hacia las montañas,

Las colinas de Dakota.

Si, me quedé contento al salir de allí.

Lo curioso de la canción de Dylan está en el estribillo

Y las langostas cantaron, y me dejaron helado

Las langostas cantaron una dulce melodía

Las langostas cantaron con vana palabrería

Las langostas cantaron, cantaron para mí

Estas cigarras, como otras especies que se encuentran en el este de Estados Unidos tienen algo muy particular: durante 17 años permanecen ocultas bajo tierra, recogiendo nutrientes de las raíces de los árboles.

Durante el mes de mayo en el que Dylan estaba en Princeton, como lo habían hecho 17 años antes, salieron al exterior para una fiesta báquica que duraría unas pocas semanas. En ellas, comen, fundamentalmente se aparean, las hembras ponen sus huevos y mueren. Son, en promedio, medio millón de cigarras por hectárea y solo los machos cantan para atraer a las hembras. El concierto es tan ensordecedor que muchos vecinos de la zona suelen irse de allí durante esos días. Se las puede oir a casi dos kilómetros de distancia.

Pero ¿por qué 17 años? ¿Por qué tanta exactitud? ¿Por qué su ciclo de vida es un número primo? ¿Es casualidad?

Es probable que no porque estas cigarras que se guían por el número primo 17 no son la única variedad que se guía por un número primo. Otras variedades de cigarras, por ejemplo, tienen un ciclo de vida de 13 años, como ocurre en Alabama. Y otras pocas, el número 7. Todos números primos.

Esta mágica relación de las cigarras con los números primos la explica el matemático Marcus du Sautoy de la Universidad de Oxford:

"La mejor teoría para explicar el ciclo de vida de las cigarras, basado en un número primo, es la posible existencia de un depredador que también solía aparecer periódicamente en el bosque, coordinando su llegada para que coincidiera con la de las cigarras y dándose el festín con los insectos recién aparecidos. Aquí es donde irrumpe la selección natural, porque las cigarras que regulan sus vidas con un ciclo que es un número primo se encontrarán con los depredadores con mucha menos frecuencia que las cigarras con un ciclo que no es un número primo".

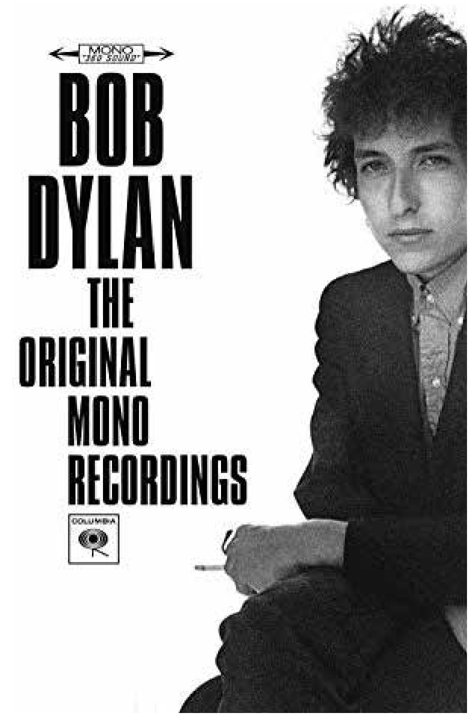
Supongamos, por ejemplo, que los depredadores aparecen cada dos años. Las cigarras que aparecen cada 17 años sólo coincidirán con los depredadores cada 34 años, ya que 2 y 17 no tienen factores comunes. Cualquier ciclo de vida de un depredador hará que coincidan cada muchos años. Por ejemplo, si el ciclo del depredador fuera de cinco años, se encontrarían cada 85 años. Será mejor para ese depredador buscar otro alimento.

El año 2013 hicieron su última irrupción en Carolina del Norte y en Virginia, y hasta en las afueras de Nueva York.

En su aparición periódica las ninfas que emergen de los huevos en los troncos de los árboles caen en la tierra donde permanecerán otros 17 años antes de convocarnos a un nuevo capítulo de este fenómeno.

¿Saben acaso las cigarras la música de los números primos que todavía no logramos develar? La cita será de nuevo en el noreste de EE.UU. en la primavera de 2030. Tal vez para ese entonces, sepamos algo más sobre este misterio y sobre la música de los números primos. Tal vez para entonces, la hipótesis de Riemann haya sido por fin demostrada. Una vez más la ciencia nos plantea misterios fascinantes que nos maravillan y nos impulsan a seguir aprendiendo.

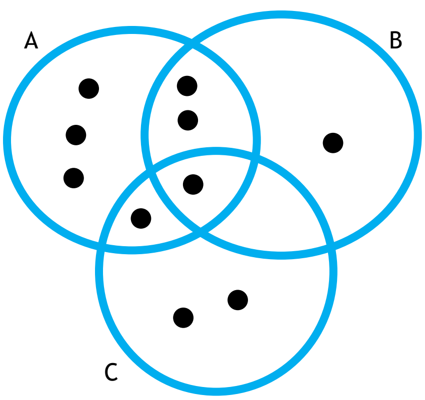
Juan Carlos Pedraza



En su libro Chronicles, Dylan menciona haber aprendido de Lonnie Johnson la relación entre la matemática y la música. Sus seguidores discuten el significado de algunos pasajes donde sus observaciones no escapan de cierto contenido místico: "La música popular se basa generalmente en el número 2 (...) Si está utilizando un sistema numérico extraño, comienzan a suceder cosas que cambian la performance (...) En una escala diatónica hay ocho notas. En una escala pentatónica hay cinco Si está utilizando la primera escala y pulsa 2, 5 y 7 en la frase y luego la repite, se forma una melodía. O puede usar 4 una vez y la 7 dos veces (...) las posibilidades son infinitas (...) No soy numerólogo. No sé por qué el número tres es más poderoso metafísicamente que el número 2, pero lo es".

Gonzalo
Saravia

Una nueva demostración de La Infinitud de los primos



10=7+4+4 -(3+2-(1))

Al llegar a esta página, no habrá lector que se sorprenda frente a la afirmación que sostiene que hay infinitos números primos. En la página 6 de este número de Q.e.d. está la demostración que con sencillez y sutileza Euclides probó por primera vez hace más de dos mil años.

Pero como sucede con muchos teoremas clásicos, aparecen nuevas demostraciones que ponen en juego otras ideas y conexiones. El matemático Juan Pablo Pinasco, profesor en la FCEN (UBA) y en el Instituto de Ciencias de la UNGS, nos ofrece una nueva demostración por un camino muy distinto, utilizando sumatorias, pero no sin honrar la sencillez y sutileza de la primera demostración[1].

La prueba comienza tomando un número x, mayor a uno. Si quisiéramos saber cuántos números naturales le preceden a éste, bastaría con redondear x a su entero menor más cercano, la llamada parte entera de x que notaremos $[x]$. Pero el objetivo acá es escribir esto mismo en términos de los primos que le preceden a x.

Si tomamos la parte entera de x dividido por un primo cualquiera, $[x/p]$, nos va a dar por resultado la cantidad de múltiplos del primo menores a x, Tomemos por ejemplo x igual a 11. Podemos ver que $[11/2]$ es cinco, dividido por tres da tres y así sucesivamente. Podría pensarse que al sumar la cantidad de múltiplos, y sumarles uno (ya que uno es entero pero no múltiplo de primos) nos daría la parte entera de x, en este caso, 11. Sin embargo vemos que $1+5+3+2+1+1=13$, y no 11 como esperábamos. Es acá donde el principio de inclusión-exclusión entra en juego.

Si quisiéramos saber cuántos elementos contiene la unión entre conjuntos A, B y C, vemos que la suma de los elementos de cada conjunto nos puede dar un número mayor siempre que las intersecciones entre ellos no sea vacía. Aún si le restamos entonces las intersecciones entre pares de conjuntos seguimos sin lograr un resultado correcto, ya que podemos tener intersecciones entre más de dos conjuntos, por lo que esta vez restamos de más. Esto se soluciona aplicando el mismo principio, hasta llegar al final de las intersecciones de los subconjuntos, y se puede aplicar de manera recursiva (repetir la misma operación una y otra vez) a cualquier cantidad de conjuntos.

Volviendo a los divisores de 11, podemos notar que, por ejemplo, el número seis es múltiplo tanto de dos como de tres, es decir, lo contamos dos veces, y lo mismo ocurre con el diez. si ahora a nuestra suma de trece le restamos estos dos, llegamos al número correcto.

Ya tenemos los elementos listos para ver la demostración de Pinasco. Si se asume que $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$ son todos los primos, para algún x suficientemente grande podemos escribir como en el paper la elegante expresión:

$$[x] = 1 + \sum_i [x/p_i] - \sum_{i<j} [x/p_i p_j] + \sum_{i<j<k} [x/p_i p_j p_k] \ldots + (-1)^{N+1} [x/p_1 p_2 p_3 .. p_N]$$

que nos indica la cantidad de números naturales menores o iguales a x, recordando que $[x/p_i]$ es la cantidad de múltiplos de p_i menores o iguales que x, a la cual le restamos $[x/p_i p_j]$ que son los múltiplos comunes para los primos y luego le sumamos los términos $[x/p_i p_j p_k]$ que son los múltiplos comunes a tres primos, como nos indica el principio de inclusión-exclusión.

El paso siguiente es tomar esta sumatoria (que es en verdad una sumatoria de sumatorias, pero en esencia es lo mismo), dividirla por x, generando una identidad, y reescribirla como una productoria. Esto puede pensarse como cuando sacamos las raíces de un polinomio y pasamos de representarlo como una suma de términos a una multiplicación de sumas bien simples. El propósito de esto es que así se torna evidente que cada termino es estrictamente menor que uno, y por tanto, así también lo será el producto de estos. Esta desigualdad será una herramienta esencial para finalizar la comprobación. Tomamos ahora nuestra igualdad (la cantidad de enteros igual a la sumatoria de múltiplos), dividimos ambos lados por x y le calculamos el límite con x tendiendo a infinito, es decir, que ocurre cuando x se vuelve un valor arbitrariamente grande. De un lado nos queda uno, y del otro, la identidad previa. Pero, habíamos dicho que esta era estrictamente menor que uno, y acá da igual a uno, esto no tiene sentido. Efectivamente, al considerar una cantidad finita de primos, llegamos a una contradicción. Queda así demostrado, con la misma elegancia que el teorema original, que deben existir infinitos primos. Q.e.d.

Juan Pablo Pinasco

....

1 J.P. Pinasco. New Proofs of Euclid's and Euler's Theorems. American Mathematical Monthly, 116 (2009) 172-174

Los interesados en descargar la versión original del trabajo de Juan Pablo Pinasco pueden hacerlo en el blog de Q.e.d https://revistaqed.blogspot.com.ar/

DÍA PITAGÓRICO

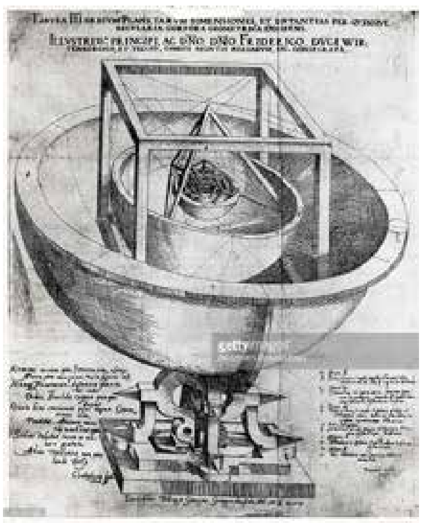
En la antigüedad, griegos, babilónicos y egipcios destacaban las ternas de números a,b,c que verificaban $a^2+b^2=c^2$ que pasaron a la historia con el nombre de ternas pitagóricas, aludiendo a las longitudes de un triángulo rectángulo, donde se cumple el teorema de Pitágoras.

Pero durante el 2017 las ternas pitagóricas lograron un lugar en el calendario de festividades junto al día de π, 14 de marzo, o 3/14. Pero el Dia Pitagórico es más escurridizo, y se define como aquel que cumple que el dia, mes y las dos ultimas cifras del año forman una terna pitagórica.

Este año, el 15 de agosto fue un día pitagórico, dado que $15^2 + 8^2 = 17^2$. Pero a diferencia del Día de π, que todos los años vuelve, los días pitagóricos son más escasos y los que quieran celebrarlo deberán esperar hasta el 16 de diciembre de 2020 o el 24 de julio de 2025 para hacerlo. Vladimir Pomsztein, estudiante de computación de Exactas, se ocupó de trazar un mapa en los futuros almanaques del siglo XXI rastreando la aparición de los días pitagóricos y los "casi Pitagóricos" que cumplen que $a^2+b^2-c^2=+/-1$ encontrando conexiones admirables con la Teoría de Cuerdas, pero el margen de esta página es muy pequeño para escribirla.

Carlos Borches
CBC - FCEyN

Este primo es una bestia



Las ideas de Platón marcaron creencias que perduraron durante siglos en occidente. Una noche de 1595 Johannes Kepler tuvo su epifanía cosmológica: "comprendí porque hay seis planetas y no veinte o cien" y justificó tal afirmación en que solo había cinco poliedros para interponerse a las seis orbitas planetarias. "A los pocos días todo encontró su lugar. Vi cómo un cuerpo simétrico tras otro encajaba tan precisamente entre las órbitas... que si un campesino te pregunta con qué clase de garfio están sostenidos los cielos de modo que no se caigan, te será fácil responderle",

Ilustración publicada en 1596 en el Mysterium Cosmographicum de Johannes Kepler

Los números fascinaron a la humanidad desde tiempos remotos. Parecen expresar el orden y la previsibilidad, pero al adentrarnos en ese universo el camino recto se transforma en bosque donde la regularidad se vuelve esquiva, tal como sucede con los números primos.

A lo largo de la historia, muchos pensadores creyeron ver en el orden de los números el lenguaje del "Creador del universo". Por ejemplo: Teeteto demostró que sólo existían cinco poliedros regulares y Platón, maravillado por tajante limitación, le atribuyó propiedades singulares al número cinco. Si no había más que cuatro elementos (fuego, aire, tierra y agua) y cinco poliedros eso debía tener un sentido "cósmico" y Platón aventuró «El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado ésta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo».

Hoy siguen existiendo quienes buscan comprender el temperamento de una persona, o adivinar su futuro, asociando números a las letras que forman su nombre y sumándolos convenientemente.

A diferencia de estos casos, la fascinación que despiertan los números entre los matemáticos tiene que ver con descubrir los patrones que regulan a ciertos conjuntos de números, ver en qué medida esta particularidad se repite, si hay otras formas de expresarlas, si podemos encontrar cómo se distribuye esta "rareza" entre los números naturales. De la herencia griega recibimos los números primos, y también a otros relacionados con la geometría, como los números poligonales[1]. Los números amigos despertaron el interés de los matemáticos árabes y la sucesión de Fibonacci, todavía nos asombra.

Pero durante el siglo XX las rarezas se multiplicaron con fuentes diversas y hoy hablamos de números con nombre y apellido, números de Schröder, de Motzkin, Narayana y de Erdös entre otros, y tenemos números hambrientos, malvados, felices, narcisistas, apocalípticos e incluso números primos diabólicos. Sobre estos casos infernales queremos ocuparnos.

El número de la Bestia

"Six six six, the number of de beast" canta Bruce Dickinson y miles de fans estallan con la explosión sonora del clásico de la banda británica *Iron Maiden*. Pero no todo es aprobación: cuando salió el disco, a principio de la década de 1980, grupos cristianos protestaron rompiendo y quemando "vinilos" considerando al disco como una apología diabólica. El problema estaba nuevamente en el uso de los números.

El libro Apocalipsis, parte integrante del Nuevo Testamento, narra el combate entre "un gran dragón rojo que tenía siete cabezas y diez cuernos" contra una mujer "vestida del sol". Para esa batalla descomunal el dragón convoca en su ayuda a unas bestias. El autor del Apocalipsis señala "Aquí hay sabiduría: El que tiene entendimiento, cuente el número de la bestia, pues es número de hombre. Y su número es seiscientos sesenta y seis".

El Apocalipsis esta datado en el primer siglo de la Era Cristiana, y de allí el 666 apareció en la literatura y en las artes plásticas imponiendo temor, pero durante los últimos 50 años ya no se lo toma muy en serio. La Bestia y su número aparecieron

1 Ver Gustavo Piñeiro Un breve paseo por los números poligonales. Q.e.d. Nro 4, pág 19

en Futurama, Alex de la Iglesia la llevó al cine con su comedia Satánica “El día de la Bestia”. Los simpatizantes de Independiente de Avellaneda se ufanan de ser los diablos rojos, y hay quienes notan que su descenso de categoría fue un 15 de junio de 2013. Sumadas cada una de los cifras: 1+5 (6) por el día; el mes 6; y el año 2013, cuyas cifras sumadas también dan 6. Es decir se fue a la B un día de la Bestia.

Estas reiteradas apariciones en la literatura mágica motivaron un correlato matemático que tiene en Clifford Pickover a su sumo sacerdote. Con una larga lista de investigaciones en el campo de la computación, matemática y biofísica, más unas 400 patentes desarrolladas en el Instituto de Investigaciones Thomas Watson de IBM, Pickover clasificó las propiedades de algunos conjuntos de números bestiales.

El doctor Googol, personaje de varios libros de Pickover, se encontraba leyendo por primera vez el Apocalipsis cuando súbitamente escribió en la cubierta de la Biblia $666=1^6-2^6+3^6$ y no satisfecho con el hallazgo siguió $666 = 6+6+6+6^3+6^3+6^3 = 2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$

Y luego de una pausa dijo, “una verdadera joya” y escribió $\varphi(666)=6.6.6$, donde es la Función de Euler[2].

Pickover acumula propiedades asombrosas del número 666 continuando una tarea iniciada en las páginas de *Scientific American* por Martin Gardner, aunque Gardner afirma, para quien vea en estas relaciones una confirmación de las especulaciones místicas, que con ingenio se pueden encontrar “relaciones asombrosas” a partir de cualquier número[3].

Siguiedo en la línea de encontrar propiedades de 666 quedó acuñado el nombre de número apocalíptico al natural n, tal que 2^n contenga al fragmento 666 en su desarrollo decimal, por ejemplo n=157 es apocalíptico, ya que

$$2^{157}=182687704666362864775460604089535377456991567872$$

No hay números apocalípticos menores que 157, y la pregunta natural que continua abierta es ¿Existe alguna “regularidad” en la aparición de los números apocalíptico? ¿Habrá alguno de ellos que sea primo?

Otro número asombrosamente grande relacionado con esta familia diabólica es el número de Leviatan que es nada menos que $(10^{666})!$ La expresión decimal de ese número no ha podido calcularse con toda la fuerza de cálculo que poseemos en este momento, aunque si podemos demostrar que $(10^{666})!$ es un número con 10^{668} cifras. Queda para el lector calcular las primeras tres cifras del número de Leviatan, y si salió, no será difícil avanzar a las primeras seis cifras.

Algunos números presentados nacen con factorizaciones que los alejan de la condición de ser primos, pero para que no falte un buen ejemplo, Pickover nos trae el primo de Belfegor :

$$1000000000000066600000000000001$$

Trece ceros a cada lado custodiando al 666, idea que se puede tomar para generalizar a otros primos del tipo Belfegor: números primos simétricos, capicúas, en torno al 666, con m ceros a cada lado y unos en los extremos. Y hay varios: 16661 (m=0) y también el que tiene 42 ceros a cada lado.

Podemos afirmar que los números con este aspecto ($10^{2n+4}+666.10^{n+1} + 1$) son primos cuando n es igual a 0,13,42 (los casos presentados) o cuando toman los valores 506, 608, 2472, 2623, 28291, 181298 y nuevamente queda sin respuesta el interrogante sobre la regularidad de primos de esta naturaleza.

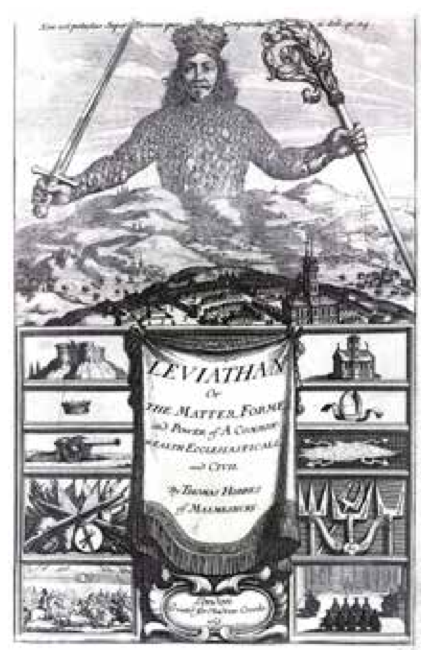
Debe quedar claro que las raíces mitológicas y fantásticas de estos números son para los matemáticos una excusa divertida para iniciar una exploración que pone a prueba a la matemática y las ciencias de la computación, pero además, como señala Pickover “en el terreno de la física y la matemática se cultiva un permanente estado de asombro, un viaje a los límites del pensamiento, un ejercicio para buscar nuevas formas de creatividad”.

....

2   φ (n) indica la cantidad de naturales menores y coprimos con n.

3   Gardner y Pickover, lejos del misticismo y la magia, fueron editores de *Skeptical Inquirer*, la revista del Comité para la Investigación Escéptica que nuclea a varios científicos quienes desde una posición racionalista y crítica presentan batalla contra la astrología, pseudociencias y medicinas alternativas, entre otras.

Belfegor (Belphegor) se originó en oriente medio como Baal. Durante siglos fue motivo de estudios cabalisticos y protagonizó historias para ser contadas en noches de tormenta. Hoy su nombre es reivindicado en la banda austríaca de death metal.

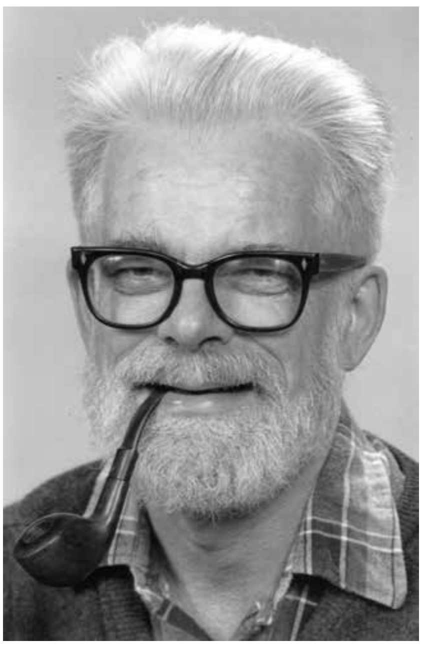


Leviatan (Leviathan) es una bestia marina, tal vez una gran serpiente, que aparece explícita o impliícitamente en varios capítulos de la Biblia. En la ilustración se observa la tapa de la versión original del libro de Hobbes Leviatan, o La materia, forma y poder de una república eclesiástica y civil, donde el autor usa la imagen de Leviatan para expresar al poder político absoluto “Nadie hay tan osado que lo despierte... De su grandeza tienen temor los fuertes... No hay sobre la Tierra quien se le parezca, animal hecho exento de temor. Menosprecia toda cosa alta; es rey sobre todos los soberbios”

Christian Espíndola
Universidad Masaryk / Rep. Checa

Los límites de la consistencia

Ultrafinitismo



Edward Nelson fue un prolífico matemático. Su infancia transcurrió en Italia, y al cabo de la Segunda Guerra regresó a EEUU donde había nacido en 1932. Luego de doctorarse con un trabajo sobre procesos markovianos, se inclinó a la Física matemática donde realizó importantes aportes en la Teoría Cuántica de Campos.
En los años ´80 comenzó a interesarse en el Análisis No Estándar, una formulación axiomática de los números reales que permite introducir el concepto de infinitesimales, idea de los tiempos de Newton y Leibniz, desterrada luego por su ambigüedad.
Desde esa época Nelson se ha ocupado de diversos problemas relacionados con los Fundamentos de la Matemática.

En septiembre de 2011, la lista de correo electrónico sobre Fundamentos de Matemática recibió un inesperado email que generó conmoción. Edward Nelson, profesor en la Universidad de Princeton, sostenía que había logrado demostrar la inconsistencia de la aritmética, en una de sus versiones axiomáticas más débiles. Esta intervención dejó completamente azorados a lógicos y matemáticos alrededor del mundo, quienes se abocaron de inmediato a la tarea de intentar descifrar de qué se trataba el anuncio.

Como John Baez explicó acertadamente en el blog que inició al respecto, se trataba de algo que, de ser cierto, dejaba al anuncio contemporáneo del posible descubrimiento de neutrinos con velocidades superiores a la de la luz, completamente aburrido en comparación. Ni más ni menos, Nelson venía a demoler el corazón de la matemática al dejar inutilizada la teoría más básica que gobierna la simple manipulación de números naturales. La crítica principal que Nelson sostenía era la suposición tácita de elementos de carácter no finitario que yacían sobre el desarrollo formal de esta versión básica de aritmética.

Nelson era conocido en el mundo matemático como ultrafinitista, alguien que no sólo negaba la existencia del infinito como concepto completo y acabado, pero que incluso iba tan lejos como negar la existencia de números finitos extraordinariamente grandes, lo suficiente como para no tener un significado físico asociado. Números formados, por ejemplo, mediante potencias sucesivas, como *10^(10^(10^10))* resultan tan inmensos que superan la cantidad estimada de partículas del universo visible. ¿Tenían, entonces, algún sentido? Sin duda la definición de operaciones o funciones en el lenguaje de la aritmética

Números muy muy grandes

Clifford Pickover ha dedicado buena parte de su tiempo a extraer propiedades de números extremadamente grandes, como el Leviathan o los superfactoriales reflexionando que el tiempo necesario para imprimir cualquiera de esos números superaría largamente el tiempo de vida esperable para la humanidad en la Tierra. (Ver pagina 19)

Incluso se desarrolló un conjunto de notaciones para expresar esos números

$$10^{10^{10^{10^{10}}}} = 10\uparrow\uparrow 5 \qquad 3^{3^{3^{3}}} = 3\uparrow\uparrow 4$$

$$3!!!!! = ((((3!)!)!)!)!$$

$$1\,Googol = 10^{100} \qquad 1\,GoogolPlex = 10^{Googol} = 10^{10^{100}}$$

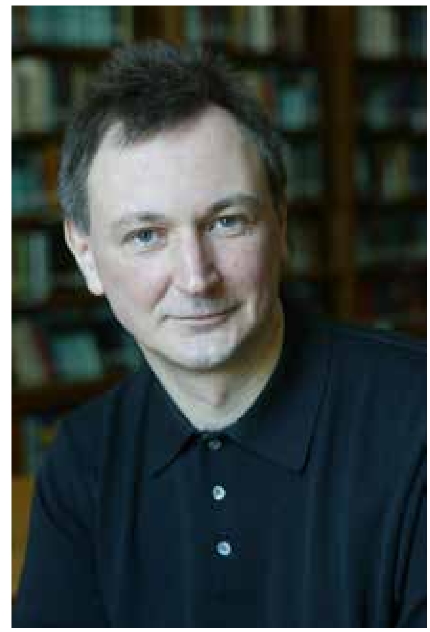
era lo suficientemente rica como para poder expresar en un espacio limitado tales números monstruosamente gigantescos. Pero la pregunta permanecía: ¿tienen, además de ser caracteres en un papel, un significado?

"Dios creó los números naturales..." había proclamado el matemático Kronecker. Lo que nunca dijo es si se refería a la totalidad, infinita, de dichos números, o solamente a aquellos accesibles a la comprensión humana. El finitismo como corriente filosófica surgió precisamente de la negación del dogma de la infinitud, que no podía sino ser una pálida representación finita de lo ilimitado. Pero Nelson iba más allá: incluso dentro del campo de lo finito, algunos números eran, para él, más finitos que otros. ¿Qué diferencia conceptual podría haber entre un número como 10^(10^(10^10)) y el infinito? Ambos parecían para Nelson escapar a toda comprensión. Y su convicción de que la aritmética usual presentaba dificultades lo llevó a creer que era, en última instancia, inconsistente.

No fue el único. El recientemente fallecido matemático Vladimir Voevodsky, ganador de la medalla Fields, también se había expresado al respecto en público y en privado, asegurando que no sólo creía que la aritmética era inconsistente, sino que tenía la esperanza de que alguien pudiese alguna vez demostrarlo, es decir, exhibir la inconsistencia. Otros matemáticos, como John Conway, se han adherido a este pensamiento. En este contexto, el anuncio de Nelson cayó ciertamente como una buena noticia para los ultrafinitistas, pero el matemático promedio no dejaba de verlo con algo de escepticismo. Terence Tao demostró una vez más su dominio de todo tipo de matemática al comentar en el blog de John Baez sobre la posible demostración de la inconsistencia que Nelson aseguraba haber hallado. Con el correr de los días dejó en claro que había una falla sutil en la prueba de Nelson, y que, después de todo, ninguna inconsistencia parecía deducirse de su argumento. Nelson mismo se retractó de lo que había anunciado, y la anécdota pasó a la historia, no sin dejar una cierta sensación de incomodidad respecto de todo el asunto.

¿Podía efectivamente haber una contradicción en la aritmética, oculta y esperando a ser descubierta? Muchos prefieren dudar de su propia cordura antes de llegar a esa conclusión. Y es que jugar con los límites de la consistencia es un poco como jugar con los límites de nuestra sanidad mental. Lo cierto es que en principio esta posibilidad no puede ser descartada de llano. Sabemos desde Gödel que la consistencia de la aritmética sólo puede ser probada en sistemas formales más potentes, cuya consistencia es aún más dudosa. No parece haber métodos puramente finitistas que garanticen que no se puede llegar nunca a una contradicción.

El argumento ultrafinitista es profundo, y, al igual que el solipsismo, no puede ser refutado sin caer a su vez en contradicciones. Se trata de lo que parece ser una limitación intrínseca de los métodos conocidos y de la existencia en sí misma, una limitación inherente a la naturaleza de las cosas. El problema es que no existe ningún correlato físico del concepto de infinitud, y la aceptación de la existencia de todos los números finitos parece crear una paradoja al hacer una referencia implícita a una entidad infinita. Está claro que hay que trazar un límite; el inconveniente está en dónde trazarlo. Si hubiese, de hecho, números lo suficientemente grande como para ser inaceptables, y uno considera el mínimo de todos los números inaceptables, aquel número que sólo difiera en una unidad de menos de éste debería ser aceptable, y sin embargo no hay nada extraño con añadir una unidad a algo que sí admitimos como existente. El problema con este tipo de razonamiento, reminiscente de la paradoja de sorites, es que justamente se está implícitamente haciendo referencia a una posible totalidad de los números naturales al hablar de "el mínimo de todos los



Vladimir Voevodsky (1966-2017) fue un matemático ruso nacionalizado en EEUU. Por sus aportes al álgebra, que permitieron resolver las conjeturas de Milnor y Bloch-Kato, recibió en el año 2002 la Medalla Fields.

En los últimos años de su vida se encontraba trabajando en el desarrollo de un programa informático que ayudara a detectar errores matemáticos involuntarios escondidos en las demostraciones de los matemáticos humanos.

números inaceptables” (incluso al considerar el mínimo de los números inaceptables menores que uno dado). El ultrafinitista sólo concede existencia legítima a aquel número que haya efectivamente podido construirse en modo explícito.

La noción de exponenciación, que permitiría tomar un atajo ante la imposibilidad de construir, sumando unos, un número tal como 10^(10^(10^10)), es considerada como problemática por los ultrafinitistas, que han incluso especulado con modelos en los que dicha noción no está definida en todos los números naturales, y que restringiría la creación de dudosas entidades como torres de potencias. De modo que la pregunta permanece: ¿podría haber una inconsistencia? ¿qué efectos tendría esto sobre la matemática en general?

Hay un consenso más o menos claro (y el propio Nelson así pensaba) que en caso de encontrarse una inconsistencia en los fundamentos de la matemática, sería de todos modos posible reescribirlos para sentar la matemática sobre bases más sólidas, de tal manera que la mayor parte de construcciones y teorías sobreviviesen. Hay distintas salidas: por un lado se cuenta con el desarrollo de fundamentos axiomáticos como la teoría de tipos que sirven de alternativa más segura y correcta en caso de alguna inconsistencia en las teorías de conjuntos usuales. Se ha hecho considerable trabajo al reescribir gran parte de los contenidos esenciales de varios tópicos desde un punto de vista constructivo e, incluso, predicativo, en el que las definiciones no hacen uso del objeto a definir como parte de la definición. Un ejemplo de axioma impredicativo es el axioma del conjunto potencia, que afirma que dado un conjunto determinado, se puede construir el conjunto de todos los subconjuntos que éste contiene. Al determinar la condición que los elementos del conjunto potencia deben satisfacer, se genera una cuantificación implícita en el universo de todos los conjuntos, que debería contener el propio conjunto potencia; de ahí lo circular de su definición. Existen, sin embargo, teorías conjuntistas que rechazan el conjunto potencia por impredicativo, y que afirman ser más seguras como piedra fundacional.

Terence Tao es uno de los matemáticos más prolíficos de la actualidad. Comenzó a participar en las Olimpíadas Matemáticas de nivel medio a los 10 años y en 1989, con 14 años, empezó a asistir al MIT concluyendo su doctorado en la Universidad de Princeton a los 20 años. En el 2006, recibió la Medala Fields.

Otra opción bastante más drástica es la ofrecida por las lógicas paraconsistentes, que son tipos de lógicas preparadas para que la inconsistencia, aunque manifiesta, no afecte el resto de las derivaciones hechas. En ellas se acepta que el sistema llegue a una contradicción, pero se toman recaudos para contenerla, como si fuese puesta en cuarentena, mediante la eliminación de reglas subestructurales que, de existir, permitirían la propagación de tal inconsistencia. En cierto sentido, su estructura recuerda al esquema gödeliano mediante el cual se obtiene consistencia renunciando a la completitud; en este caso, se evitan mayores desastres al limitar el número de reglas permitidas durante una derivación.

Finalmente, hay una alternativa que aún espera ser formalizada pero que ha surgido como posibilidad, y es la de la consistencia local. Si la matemática fuera de hecho inconsistente, todavía podría gozar de consistencia localmente, en porciones reducidas de su extensión. Es posible, por ejemplo, que la demostración de la inconsistencia sea tan larga que en la práctica sea imposible hacerla efectiva, y para todos los propósitos pragmáticos resultaría, de hecho, irrelevante. Una analogía física de esta situación viene ejemplificada con la teoría del Big Bang. Si uno se remonta atrás en el tiempo lo suficiente, se llega a un instante en el que todos los parámetros colapsan, que puede identificarse con una inconsistencia (y explotando la analogía, el Big Bang inicial puede identificarse como una manifestación de la regla “ex falso quodlibet”: de una inconsistencia todo se deduce). Análogamente, si en un futuro lejano el universo está destinado a implosionar en un Big Crunch, la singularidad última puede ser considerada como una verdadera inconsistencia, que, sin embargo, no afecta otros estadios evolutivos del universo.

John Carlos Baez es un físico y matemático multifacético cuyo blog es un sitio de debate de problemas de frontera en la física y matemática https://johncarlosbaez.wordpress.com/ http://math.ucr.edu/home/baez/

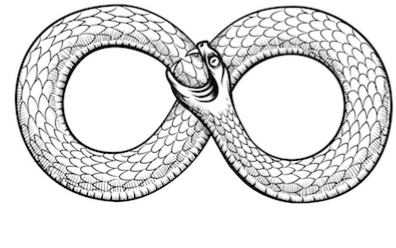
En cualquier caso, la escapatoria de un final ciertamente apocalíptico parece venir sugerida por el elemento de incompletitud. Si se renuncia a axiomatizar la totalidad de los hechos matemáticos para restringirse sólo a una delimitada porción, se podrá evitar el colapso. Del mismo modo, renunciar a la totalidad de números naturales y concentrarse solamente en aquellos que de un modo enteramente constructivo se consigue exhibir sería el salvoconducto a utilizar en caso de que se encuentre una inconsistencia en una teoría tan básica como la aritmética. Llegado este caso (extremo, por cierto), aún sería posible sostener una noción dinámica de infinitud incompleta, al admitir que cada número tiene un siguiente que es mayor, pero teniendo cuidado de no confundir la propiedad de no estar acotado con la propiedad de ser infinito. Conceptualmente, hay una gran diferencia, aunque estemos clásicamente acostumbrados a identificar ambas situaciones.

El símbolo del infinito aparece sobre la cabeza de El Mago en el Tarot

Una de las profundas dudas metafísicas que obstaculizaron el interés de Sócrates por la matemática es que no conseguía convencerse, por ejemplo, de que cuando se añade uno al uno, el uno al que se ha efectuado la adición se convierte en dos sólo por la mera yuxtaposición de entidades que eran uno. Lo que Sócrates estaba dando cuenta era precisamente del proceso que permite identificar nuevas entidades que se manifiesten como tales, con respecto a otras. Hasta donde hoy sabemos, es fundamental en ese proceso el carácter de incompletitud de la entidad que surge, ya que es sólo mediante la falta de aquello que no se es que se puede conseguir delimitarla. Los límites surgen entonces de la incompletitud y de la búsqueda de la entidad dual que permita conseguir la totalidad. Este sería el secreto de la generación de números naturales, proceso que no acaba nunca, o que sólo acabaría con el infinito actual al alcanzar la completitud, lo que al mismo tiempo provocaría la disolución de las entidades, y con ello la inconsistencia. Una especie de Big Crunch aritmético.

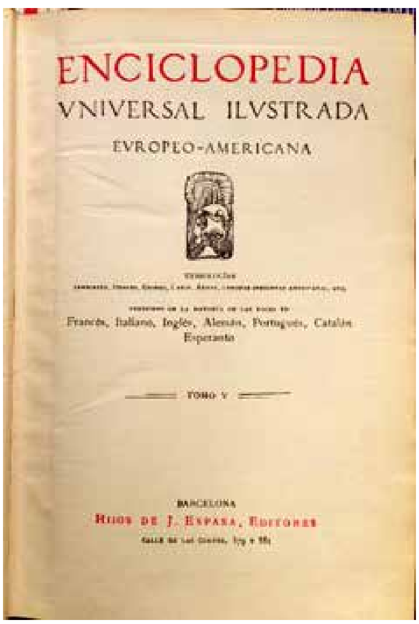
Sin embargo, el ultrafinitismo está lejos de ser coherentemente axiomatizado, pues al día de hoy no se conoce ningún sistema capaz de absorber la filosofía ultrafinitista y servir de fundamento a la parte de las matemáticas que sobre él pueda construirse. Ni el intuicionismo, ni la teoría de tipos, la matemática constructiva o predicativa y ni siquiera las lógicas paraconsistentes son lo suficientemente versátiles para semejante objetivo. Tal vez se trate de un nuevo paradigma en matemática poder encontrar una manera satisfactoria de proceder al respecto, un cambio radical en nuestra manera de pensar y fundamentar la matemática misma. Tal vez no hayamos alcanzado aún el grado de evolución requerido para tal salto conceptual. Pero lo que no se puede negar es que, de lograrlo, una formalización del ultrafinitismo permitiría dominar un aspecto fundamental en la determinación de lo que es un número, y con ésto, la resolución de las paradojas autorreferenciales y las dudas metafísicas al respecto.

Nelson murió en septiembre de 2014, tres años después de anunciar que había encontrado la inconsistencia aritmética que tanto buscaba. Aunque tuvo que retractarse de su demostración, siguió absolutamente convencido de que la inconsistencia estaba allí, latente, esperando a ser descubierta. Sus escritos sobre el tema se conservan en el volumen incompleto "Inconsistencia de la aritmética recursivo primitiva", irónicamente conteniendo un epílogo uno de cuyos autores es el propio Terence Tao, quien allí admite que, a pesar de todo, hay mucho de interesante y novedoso en los trabajos no terminados de Nelson.



Acaso sólo un trabajo incompleto sea la única manera coherente de exhibir una inconsistencia. Acaso la lucha incansable de Nelson contra el infinito haya continuado en su mente más allá de los estándares convencionales de la matemática actual. Acaso ese deseo de mostrarle al mundo que la contradicción aún existía, como un "eppur si muove" para sí mismo, le haya ayudado a despedirse de a poco en esos tres años, dejándose ir lenta pero inexorablemente hacia la inconsistencia final.

¿Se estudia hoy menos que antes?



"Jamás se ha escrito y publicado tanto ni sido tan abundante y prolija la información; y nunca, sin embargo, ha cundido tanto la ignorancia", Enciclopedia Universal Ilustrada al inicio del siglo XX

Se habla en todas partes del desastre educativo, del fracaso masivo de los que desean ingresar a la Universidad, de la falta de esfuerzo de estudio y de la ignorancia de los estudiantes, que revelan encuestas llevadas a cabo por investigadores, diarios, radios y canales de TV. Todo eso es cierto, ¿pero en qué medida?

"Jamás se ha escrito y publicado tanto ni sido tan abundante y prolija la información; y nunca, sin embargo, ha cundido tanto la ignorancia".

Esa frase, que parece de un diario actual, se lee en el prólogo de la Enciclopedia Universal Ilustrada y fue escrita en la edición con la que los editores de Espasa y Calpe dieron la bienvenida al siglo XX.

"Cuando yo era niño me levantaba a la madrugada, hacía gimnasia al aire libre en pleno invierno, estudiaba mis lecciones y veneraba a mis padres y maestros; hoy los jóvenes huyen de los esfuerzos, odian el estudio y ya no respetan a sus mayores. ¡Mi hijo me trata de viejo anticuado!".

Eso no se ha escrito esta semana, ni en esta década, ni en este siglo, ni en los diez últimos siglos; es de la comedia *Las nubes*, escrita por Aristófanes cuatrocientos años antes de Cristo, hace veinticuatro siglos.

Nuestros dramas de hoy son muy poco novedosos. En todos los tiempos la humanidad se quejó de la ignorancia y de la falta de estudio y de esfuerzo; también de la pobreza, la violencia y la corrupción. Hoy vivimos una crisis, es cierto, pero *siempre* decimos que estamos en crisis. Nunca hemos oído, desde que tenemos memoria, que vivamos de otra manera que no sea en crisis, sea económica, política, moral, judicial, energética, ambiental o educativa. Recordamos, quizás, tiempos mejores; sin embargo, entonces también decíamos (por un curioso efecto psicológico) que estábamos peor que nunca. Pero todo eso es bueno; es preferible, aunque nos alejemos de la verdad, ver los problemas de siempre como nuevos, en vez de acostumbrarnos a ellos como si fueran hechos normales.

Posiblemente muchos de nosotros recordemos una enseñanza mejor que la que reciben nuestros hijos, pero eso no mide una verdadera disminución de la calidad o cantidad de los estudios de la población, sino quizás el hecho de que la clase social de nuestros padres era más elevada que la nuestra. Hace un siglo estudiaba muy poca gente. El documento de identidad decía, después del nombre de una persona, "quien si (o no) lee y escribe". La alimentación diaria, los estudios, la atención médica y la justicia eran para muchas menos personas que ahora. Entonces, si queremos comparar con acierto el nivel educativo de 1911 con el de 2011, debemos considerar *toda* la población de entonces, no sólo a quienes iban a la escuela, y comparar su nivel medio con el de los que van ahora, que son muchos más, si es que no queremos, cuando deploramos el nivel de los estudios, o la eficiencia de la Justicia, quejarnos, en el fondo, de la masificación de la enseñanza y de los derechos.

Un profesor se desinfló exhausto una vez sobre un sillón de la sala de profesores, en el recreo, y exclamó:

¡Ojalá mis alumnos, al finalizar este curso, consigan aprender aunque sea un diez por ciento de lo que sé yo del tema!

Imaginemos que ese sano deseo se le pueda cumplir y que, efectivamente, sus alumnos y alumnas alcanzasen ese apetecido porcentaje de sabiduría. Alguno de ellos, o ellas, quizás fuere a su vez docente después y tuviere la misma aspiración para sus discípulos. Entonces los alumnos de los alumnos alcanzarían el diez por ciento del diez por ciento de los conocimientos originales, apenas el uno por ciento de lo que sabe ese profesor fatigado. Si así ocurriera siempre, en diez generaciones (la vida de la República Argentina) la proporción de sabiduría disminuiría al 0,00000001% de la original, y sería insignificante. Nuestros conocimientos de historia, o de matemática, geología, gramática, música o psicología serían menores que los de una almeja. ¿Qué decimos? ¡Seríamos más ignorantes que un átomo de hidrógeno! (El átomo de hidrógeno, el más pequeño de todos, se compone apenas de un protón y un electrón. Si pierde ese electrón se dice que el átomo está ionizado. No existe una porción más pequeña ni más simple de sustancia).

Pero miramos a nuestro alrededor y vemos que, por fortuna, nada de eso sucede, y el conocimiento del mundo avanza (a pesar de la sensación de que los alumnos apenas llegan a los talones de sus maestros). No sabemos cómo sucede, pero es evidente que ellos y ellas consiguen superarnos, de otra manera la humanidad se hubiera estancado ("¡Pobre discípulo, aquel que no supere a su maestro!" (Leonardo da Vinci, 1480). Esto lo decía un genio de las artes y de las ciencias, que se sabía genial; aun así, esperaba que sus alumnos lo superasen).

Oímos programas en los que se dice con alarma que la mayoría de los estudiantes ignora cuántas provincias tiene la Argentina, o quién es hoy el vicegobernador de aquélla en la que vive, o a qué se llamó la guerra fría. ¿Conocen las respuestas los periodistas? Seguro que si. (¿Y los lectores?) ¿Sabemos, acaso, cuántas provincias había hace cincuenta años, o que esa palabra, en latín, significa *para el vencedor*? (¿Y qué *propina* significa *para la bebida* en el mismo idioma?) ¿Se puede esperar que alguien nacido después de 1961 sepa que se llamaba guerra fría a la hostilidad entre Estados Unidos de América y la que era, en esa época, la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas?

Una joven profesora de inglés oyó, en una reunión, hablar de la *generación del 80*. Y causó gracia, entre los mayores, que ella creyese que se referían a su propia generación, puesto que había nacido en 1980. ¿Tenemos el derecho hoy de seguir usando esa misma expresión a los políticos, artistas y científicos argentinos nacidos en la década de 1880, todavía ahora, que ya hay adultos que nacieron un siglo después?

¿Por qué consideramos una persona culta a la que sabe que Aquiles, el héroe de la Ilíada y de otras obras poéticas, tenía un punto débil en su talón porque de ahí lo había agarrado su madre cuando nació, para inmediatamente sumergirlo en un ardiente volcán y a continuación en un lago helado, y templarlo como valiente guerrero, y es inculto quien ignore ese hecho mitológico (que Homero no relata en sus obras), pero sepa en cambio que a Súperman lo debilita la kriptonita verde? ¿Cómo se decide el valor relativo de la antigua mitología griega en comparación con la contemporánea mitología americana?

Posiblemente los conocimientos que medimos en la juventud para decidir si es sabia o ignorante sean datos arbitrarios, o conocimientos de valor indudable para una generación, pero muy relativo para otra.

Proponemos la siguiente prueba de conocimientos generales, que no sabemos si son o no útiles o valiosos, para que lectores y lectoras, si lo desean, la realicen como un juego y comparen sus respuestas con las que se dan al final como correctas.

Ilustraciones de Jiménez (nombre desconocido) para la segunda edición de Juvenilia, Estrada, Buenos Aires, 1901.

Cuestionario

¿Qué sostiene en la mano Hamlet, el príncipe de Dinamarca, cuando dice “Ser o no ser; ese es el dilema”, en el célebre drama del poeta inglés William Shakespeare?	
Una pluma	Un celular
Una calavera	Un arpón o una lanza
Nada	

¿Qué origen tiene esta frase? “ ¡Ladran, Sancho, señal de que cabalgamos!”	
Es del Preámbulo de la Constitución Nacional	Es uno de los proverbios bíblicos.
Es de un guión radial escrito por Orson Welles para un programa que no se llegó a emitir.	Está en Don Quijote de la Mancha, del escritor español Miguel de Cervantes Saavedra.
Es del poeta alemán Johan Wolfgang von Goethe.	

¿Qué se recomienda hacer, por salubridad, con lo que sobra de un alimento que acabamos de descongelar?	
Guardarlo a la temperatura ambiente.	Desecharlo por peligroso.
Guardarlo congelado, pero por poco tiempo.	Someterlo a radiaciones nucleares.
Guardarlo a más de cero grado.	

¿Cuál es el origen de la mayor fracción de radiaciones que recibe la población argentina?	
La radiografía médica.	Los monitores de color de tubos de rayos catódicos de las computadoras.
Los televisores de color de rayos catódicos.	La generación de energía eléctrica en centrales nucleares.
Las líneas aéreas de alta tensión.	

Respuestas

A pesar de lo que aparece en muchos dibujos e historietas Hamlet no sostiene nada cuando pronuncia su famoso monólogo, o al menos no hay en los manuscritos de Shakespeare indicaciones de que lo haga; o quizás sostenga un estilete, porque considera la posibilidad de suicidarse para poner fin a su angustia. La escena de la calavera está en un acto diferente del drama y lo que dice el personaje cuando la sostiene es: “ ¿Qué haces ahí con la boca abierta? ¡Dile a tu dama que llegará un día en que tendrá ese aspecto, que no disimulará ni un dedo de maquillaje!”.

La opción del arpón es falsa, a pesar de que Shakespeare significa, en inglés, que agita el arpón, o la lanza.

Esa frase, que suele atribuirse erróneamente a Cervantes, no aparece en ninguna de sus obras, a pesar de que es una escena de su relato más famoso, el hidalgo Don Quijote y su escudero Sancho Panza están tan fatigados que podrían no saber que cabalgaban, y darse cuenta de que aún montan (y sentirse felices por ello) sólo por el ladrido de los perros. En cambio, el dicho aparece en un guión de Orson Welles y, antes de él, en un poema de Goethe.

Un alimento siempre durará más cuando se lo guarda congelado, aunque la segunda vez tendrá que ser por poco tiempo, porque al descongelarlo empezó la multiplicación de gérmenes. La recomendación de no volver a congelar los alimentos descongelados se debe interpretar en el mismo sentido de la ordenanza que prohíbe usar cubiertas recapadas (no es que no se admitan cubiertas gastadas sin recauchutar, o que se permita rodar sin cubiertas); o cuando se prohíbe la entrada a un espectáculo a quienes vayan en zapatillas; no es que se los deje entrar descalzos. Lo que se quiere decir es que si se congela otra vez un alimento ya descongelado, no hay garantías de que se mantenga en buen estado, puesto que al haber estado a temperatura ambiente ya proliferaron microbios. Pero si evitamos congelarlo otra vez, los gérmenes proliferarán aun más.

La radiografía médica es decena de veces más contaminante, desde el punto de vista radiológico, que la generación nuclear. Por desdicha, en nuestro país se permite la radiografía preocupacional: de tres candidatos a obtener un empleo, irradian a los tres para que sólo uno resulte elegido, sin otra razón médica importante que lo justifique, como lo sería, por ejemplo, una fractura de hueso. La posible influencia perjudicial de los campos magnéticos de las líneas de alta tensión no serían de mayor importancia que la de las líneas de baja tensión, que están más cerca de nuestras cabezas y por las que pasan más intensidad de corriente. Esto es todavía tema de investigación de los especialistas, pero quizás la discusión esté influida por intereses personales de los dueños de lotes por donde pasan las líneas, ya que en esos predios no se permite la construcción de edificios altos.

Cuestionario

¿Cuál es la única afirmación verdadera entre las que siguen? (Aviso que estoy haciendo trampa; quedan advertidos)	
Los antiguos egipcios usaban en sus cultivos una fuente de energía nuclear de origen extraterrestre.	En la Luna, en órbita o en el vacío, los cuerpos no pesan.
Los filtros de vidrio oscuro protegen a las personas de las radiaciones nocivas que emiten las pantallas de los monitores de computadoras.	La reducción de la tensión disminuye el consumo de energía eléctrica.
El adelanto de la hora en el invierno economiza energía eléctrica, porque aprovecha mejor las horas de sol.	

Respuestas

Usaban el Sol, que es, desde luego, un objeto extraterrestre, y cuya energía es de origen nuclear, porque proviene de la unión, o fusión, de átomos de hidrógeno, que forman helio. En esa reacción hay una pérdida de masa que equivale a la energía que emite el Sol. Los objetos sólo dejan de pesar cuando están lejos de la Tierra y de otros cuerpos astronómicos; en condiciones de vacío y orbitación tienen peso (de otro modo, el café envasado al vacío no pesaría en la balanza). En la Luna los objetos pesan menos, pero pesan, como lo vemos cuando caminan los astronautas sobre su superficie. En cuanto a los filtros protectores, sólo eliminan las alarmantes pero inofensivas chispas electrostáticas; no tienen efecto sobre las radiaciones; y a la inversa, como vemos la pantalla más oscura, aumentamos el brillo y eso si hace que se emitan rayos X. Los filtros útiles son los de malla negra, semejantes a las telas de las medias, porque eliminan los reflejos de ventanas o luces a espaldas del operador de la computadora. Sin embargo, hay que aumentar mucho el brillo para ver bien; es como si para oír radio en un ambiente ruidoso subiéramos mucho el volumen del sonido, y nos tapáramos los oídos con tapones.

¿Qué conviene hacer, en un ambiente ruidoso, para oír mejor cuando hablamos por teléfono?	
Hablar muy fuerte.	Marcar la tecla numeral.
Taparnos el otro oído.	Cubrir con la mano el micrófono.
Encender un fósforo.	

El taparnos el otro oído no tiene efecto útil; nuestro cerebro distingue a la perfección el sonido que entra por un oído, del que lo hace por el otro. En cambio, si tapamos el micrófono del aparato, evitamos que los ruidos que ingresan por esa parte se amplifiquen y se mezclen con los que nos dicen los del otro lado. Esa amplificación es deliberada; si el teléfono no amplificara lo que decimos por su micrófono, tendríamos la sensación de que no nos oyen cuando hablamos, y gritaríamos. (Es lo que hacen muchos cuando usan celular).

Un empleador ofrece a su empleado un aumento salarial de emergencia del diez por ciento durante un año, con la condición de que al año siguiente el empleado acepte en compensación y de ahí en adelante, una reducción del diez por ciento sobre el sueldo aumentado. ¿Qué efecto tendría hacia el empleado esa práctica?	
Resultaría perjudicado, porque durante el segundo año y los siguientes ganaría menos que al principio.	Lo beneficiaría, porque aunque el sueldo final sea otra vez bajo, quedaría igual que antes, y el año aumentado lo proveería de una diferencia positiva que capitalizaría intereses si lo depositara.
Lo beneficiaría, porque el sueldo final sería mayor.	Le daría exactamente lo mismo.
Perderían tanto el empleado como el empleador.	

Se perjudicaría el empleado a partir del undécimo año, y ganaría el empleador a partir de entonces. Por ejemplo, si el sueldo inicial fuera de 1000 pesos, ganaría 1100 pesos durante un año, o sea, 1200 pesos más de diferencia acumulada, pero cuando le apliquen el 10 por ciento de descuento sobre los 1100 pesos que pasó a ganar, cobraría solo 990 pesos, o sea que en el segundo año y los siguientes perdería 120 pesos por año. En diez años más perderá la ventaja adquirida en el primero, y de ahí en adelante el empleado seguiría perjudicándose.

¿Cuántos aciertos tuvieron en esta prueba? Evitaremos decir que los lectores, o las lectoras, que acertaron las siete respuestas son personas sabias y cultas, y tampoco diremos que quiénes hayan obtenido pocos aciertos sean ignorantes ni incultos, porque los conocimientos de los que carecemos son infinitamente más numerosos que los que dominamos, y éstos que hemos seleccionado para este juego son útiles en algunas circunstancias, y prescindibles en otras, y lo mismo puede ocurrir con las pruebas que toman los estudiantes. Es posible que la educación tenga enormes deficiencias, pero es difícil conocer cuáles son esas fallas a través de cuestionarios limitados.

Rey Pastor y la escuela matemática argentina

Rey Pastor en la época de su visita a la Argentina (1917)

Hace cien años, el semanario Caras y Caretas entrevistaba a un joven profesor universitario español que en pocas semanas había revolucionado el clima estudiantil en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Se trataba de Julio Rey Pastor, quien había arribado a Buenos Aires en julio de 1917 para brindar unas clases magistrales en la universidad porteña en el marco de un acuerdo entre España y Argentina. Con sus 29 años Rey Pastor llegaba como el matemático más importante del mundo hispano parlante para encontrarse con un grupo de estudiantes ignorantes de las tendencias matemáticas de su tiempo, pero dispuestos a reorientar sus carreras profesionales frente al maestro adecuado. En ese cruce comenzó a gestarse la comunidad matemática argentina.

La matemática en el Río de la Plata

Antes de la Revolución de Mayo, el Secretario del Consulado, Manuel Belgrano, había impulsado el estudio de la matemática especulando con las consecuencias favorables que tendría para el país la difusión de saberes matemáticos distribuidos entre la juventud.

"De aquí van a salir individuos útiles a todo el Estado y en particular a estas Provincias: sabéis que ya tenéis de quien echar mano para que conduzca vuestros buques; sabéis que con los principios que en ella se enseñan tendréis militares excelentes;y sabéis también que hallaréis jóvenes que con los principios que en ella adquieren, como acostumbrados al cálculo y a la meditación, serán excelentes profesores en todas las ciencias y artes a que se apliquen, porque llevando en su mano la llave maestra de todas las ciencias y artes, las matemáticas, presentarán al universo, desde el uno al otro polo, el curso inmortal de vuestro celo patrio" Discurso de M. Belgrano con motivo de la distribución de premios a los alumnos más sobresalientes de la Academia de Náutica, 13 de marzo de 1802.

Belgrano soñaba con sembrar una tradición científica en el Río de la Plata pero hubo que esperar muchas décadas para alcanzar cierta continuidad en el tiempo.

Cuando llegó Rey Pastor, la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, donde los alumnos buscaban obtener el título de ingeniero, arquitecto o doctor en algunas carreras científicas, acababa de cumplir cincuenta años de labor ininterrumpida. Muchos de los ingenieros que pasaron por sus aulas desempeñaban ya un papel importante en el desarrollo del país; la química y las ciencias naturales se incorporaban con lentitud a la vida económica y cultural nacional, pero la matemática seguía estancada, limitada a ser un instrumento de otras disciplinas. Una fiel colaboradora de las ingenierías.

El 2 de julio de 1917, el aula magna de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UBA estaba colmado por profesores, estudiantes y curiosos que querían escuchar la conferencia que bajo el título de "Evolución de la

1 Teoría de Grupos y sistematización de la geometría, y El problema de la geometría, pubicados en los números 183 y 185 de la Revista del Centro de Estudiantes, luego conocida como Ciencia y Técnica. Rey también publicó el artículo Un teorema erróneo sobre Geometría no euclideanas del triángulo, en Contribuciones al estudio de las ciencias Físicas y Matemáticas, la revista editada en La Plata por Gans.

matemática en la edad contemporánea" inauguraba el ciclo del matemático español tan alabado por la prensa.

El entusiasmo estudiantil era desbordante frente a un recorrido de temas que estaban ausentes de las aulas de la Manzana de las Luces. Teoría de grupos, el Programa de Erlagen, y las discusiones sobre lógica y teoría de conjuntos fueron los tópicos del curso. Un estudiante de ingeniería, José Babini, se ocupó de tomar notas del curso que luego de la corrección de Rey, fueron publicadas en la revista de la Línea Recta, editada por el centro de estudiantes de Ingeniería .

Las ideas matemáticas presentadas por Rey Pastor despertaron tanto interés que los estudiantes iniciaron gestiones para que la Facultad contratara al profesor y en poco tiempo comenzó el dictado de un curso sobre Funciones Analíticas: por primera vez se escuchaba un planteo del análisis complejo siguiendo el esquema moderno introducido por Schwarz[2].

Rey Pastor volvió a Europa pero regresó en 1921, cuando la UBA cumplió su primer siglo de vida. Durante esos cuatro años habían madurado las vocaciones de algunos estudiantes que ahora ingenieros querían acompañar a Rey Pastor en la construcción de una masa crítica de investigadores.

En 1921, de los 755 alumnos que cursaban en la FCEFyN, 528 eran de ingeniería y 139 de química, 59 de Arquitctura y 19 de agrimensura[3]. Siete de ciencias naturales y sólo tres en física y matemática. Desde ese punto de partida, Rey Pastor, el profesor Jorge Duclout y algunos flamantes ingenieros iniciaron un cambio de plan de estudios y que acompañaron con seminarios y publicaciones para tentar estudiantes de ingeniería interesados en la matemática.

En poco tiempo llegaron los primeros frutos. Junto a Rey Pastor se encolumnaron los jóvenes que empezaron a publicar sus primeros trabajos en el flamante Boletín del Seminario Matemático Argentino y presentaron sus colaboraciones en el Congreso Internacional de Matemática de Bologna. Carlos Biggeri, Agustín Durañona y Vedia, Alberto Sagastume Berra y el infaltable José Babini fueron la más clara refutación de las voces que condenaban al fracaso los esfuerzos de Rey Pastor.

Cuando llegó el momento de una nueva partida, sus alumnos y colegas lo despidieron con una cena de honor donde habló en nombre de los estudiantes Jorge Christensen, puntualizando que "la obra de Rey Pastor no puede compendiarse ni en sus clases o cursos libres, ni en las brillantísimas conferencias que en ella dictara. Es mucho más proficua, por cuanto trajo la renovación del ambiente, despertó nuevas preocupaciones y arrancó de su inmovilidad y reposo a más de un catedrático, sustituyendo muchas nubosidades de otrora por el rigor científico".

Durante las décadas siguientes, Argentina y España serán los principales puertos de este incansable matemático itinerante. De la experiencia en la UBA y en La Plata nacerá la Unión Matemática Argentina (UMA), que en sus orígenes también contenía a la Física. Las tragedias humanitarias producidas por el ascenso del nazismo y la Guerra Civil en España provocarán la llegada de destacadas figuras de la ciencia europea consolidando la escuela matemática argentina, aquella nacida del cruce mágico que se produce entre el maestro y los alumnos.

Carlos Borches

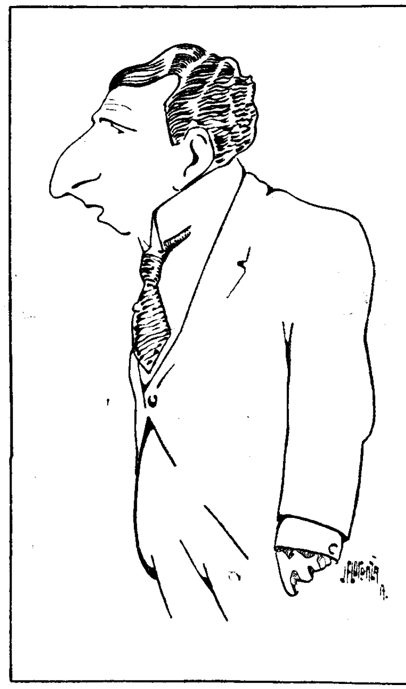


Ilustración de Rey Pastor publicada en la revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería de la entonces Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

....

2 A los efectos de hacerlo más interesante a los estudiantes de ingeniería, el curso abordó el problema de Dirichlet y aplicaciones a la física. En las Bibliotecas de la FCEN y de Fac. de Ingeniería (UBA) se encuentra el trabajo firmado por Rey Pastor: Resumen de la teoría de funciones analíticas y sus aplicaciones a la física, 1918, Centro de Estudiantes de Ingeniería (CEDI).

3 Para mayores detalles se puede leer el Nro 17 de La Ménsula, el boletín del Programa de Historia de la FCEN, en esa ocasión dedicado a la figura de Rey Pastor y sus aportes en Buenos Aires. (ver digital.bl.fcen.uba.ar y entrar en Publicaciones.

Intimidades de las intimidades

Este número de Qed tardó mucho en salir. En los más de cuatro años que nos separan del último número, pasaron muchas cosas. Pero ninguna se compara con la pérdida de Agustín. Las Intimidades de cierre que siguen reúnen la síntesis de largos intercambios de mails, horas de charlas en algún café de Buenos Aires donde no lográbamos avanzar ni un tranco con la revista pero no nos importaba. Es por ello que, además de ser largas, estas intimidades son a veces extemporáneas pero no por ello, inoportunas. Vayan como homenaje a Agustín al que tanto queríamos.

Intimidades de cierre o no todo da igual

JC: Definitivamente no da igual: tenemos que cerrar este número.

A: Decía Einstein que si todo te da igual es porque estás haciendo mal las cuentas. A nosotros no nos da lo mismo que Qed, con sus palabras blandas, deje de llegar a nuestros lectores y lectoras.

C: Pero hace mucho que no salimos. ¿Quién se acuerda de Qed? ¿Podemos pedir lealtad a los que siguen la revista?

A: No hace mucho nos escribió el bibliotecario de un instituto de formación docente de Esquel, solicitando más números de Qed. Le dije que no pierda las esperanzas, tal como hacemos nosotros.

JC: Tenemos excusas para este silencio: C. publicó varios libros en ese lapso y yo perdí muchas energías en el trabajo para solo conseguir estar un poco menos peor. AA. casi no lo convocamos por esta razón a pesar de que siempre nos manda aportes interesantes. A pesar de ello, el ánimo sigue intacto de modo que no da igual seguir a no seguir. Tenemos casi todo para cerrar Qed Nro. 7.

A: La reflexión de JC sobre los esfuerzos que hay que hacer sólo para que las cosas empeoren lo menos posible me recuerda la ley del emputecimiento universal enunciada por Leonardo Beker en 1970. Él decía que todo tiende a empeorar y a emputecerse. Un día él y su esposa Beatriz Ronchi se ofendieron porque les hicieron hacer una cola de diez horas para anotarse en Filosofía y Letras. Desistieron y se fueron, por eso, del país. Con el nombre de Léo Beker, Leonardo se hizo un gran creador y dibujante de historietas en Francia; después especialista en artes gráficas y exponente del arte, la danza y la cultura. ¡Qué pérdida para mí! ¡Qué ganancia para el mundo!

JC: Hay una anécdota muy divertida con Léo Beker que leí en tus Divagaciones hace un tiempo. ¿Cómo era lo del electroesquizógrafo?

A: Cuando trabajaba en el Observatorio de Física Cósmica, atendía unos registradores meteorológicos de cuerda y banda de papel que funcionaban muy bien. Después se reemplazaron por instrumentos eléctricos más modernos, pero cada vez que pasaba algo interesante en la atmósfera, como un vendaval o una tormenta, se interrumpía la energía eléctrica en aquel descampado de San Miguel, en las afueras de Buenos Aires, y cuando volvía era difícil sincronizar los registros. Para facilitar esa tarea Léo Beker que era técnico, armó un equipo de cuerda que trazaba escalones que se correspondían con la ausencia de tensión de la compañía. Llamó en broma a ese aparato electroesquizógrafo de Rela-Beker, y así lo identificó con un rótulo. Explicó que esquizo significa cortar o dividir en griego (de ahí scissor, tijera, o esquizofrénico, que tiene la personalidad escindida). Una dictadura disolvió de golpe el organismo. Cuando entregué el Laboratorio bajo inventario y un militar dictaba lo que decía la etiqueta del electroesquizógrafo a su ayudante, me preguntó: Este Rela ¿es pariente de usted? Sí, respondí sin mentir (toda persona es pariente de sí misma), y sin ganas de explicar…

C: Eso recuerda el inventario de un calibre Mauser de 200 milímetros (un aparato de medición de buena marca), que por error un régimen militar lo anotó como un máuser calibre 200 milímetros, arma formidable si existiera. Eso lo relata Marcelino Cereijido en La nuca de Houssay: la ciencia argentina entre Billiken y el exilio. El trabajo científico parece mejorar lentamente y con esfuerzo casi siempre, y empeorar bruscamente en ocasiones.

A: Tengo dudas sobre la ley de Beker. Al contrario, y de acuerdo con el caos y los fractales, las cosas van mejorando poco a poco hasta que un día y sin que nada muy evidente lo anuncie, se vienen abajo catastróficamente; eso pasa con las especies vivientes, las empresas y los sistemas políticos y no lo opuesto. Según esta especulación el empeoramiento paulatino contemporáneo del que habla JC sería, en comparación, un verdadero paraíso. Me confunde, en este análisis, la relatividad de lo bueno y lo malo: la extinción brusca de una población de lobos es una bendición para los conejos.

C: De acuerdo. Es una deuda moral con la humanidad continuar con Qed a pesar de todas nuestras dificultades. Tal vez nuevos lectores y lectoras descubran este número y les pique el bicho de la curiosidad por los números anteriores.

A: Aunque la cigarra no es un bicho como dijo Dante Sierra en su novela que dio lugar a una película emblemática del cine argentino, me resultó muy interesante esas cigarras a las que le canta Bob Dylan y que esperan 17 años para salir de su estado larval.

MAUSER

JC: Es muy curioso. Cuando escribía el artículo creía que en Argentina las cigarras solo estaban un año bajo la tierra, tal como nos cantaba María Elena Walsh. Sin embargo mi hermana bióloga me hizo notar que en Entre Ríos por ejemplo, hay una variedad que tiene un ciclo de vida también primo. Recomiendo el libro de Sautoy que le dio el título al artículo central de este número.

C: La explicación que da este matemático de Oxford es muy convincente, pero con un ciclo tan largo y con tan pocos registros históricos sobre este comportamiento, los biólogos todavía no están convencidos sobre los mecanismos que llevan a estas cigarras a saber tanto de primos.

JC: Leí que las costumbres de las chicharras como la llamaban en mi barrio, han sido motivo de asombro desde épocas antiguas. Algunas culturas, como la china, las consideraba como un poderoso símbolo de renacimiento.

A: La Real Academia Española define a la chicharra como un juguete que usan los niños por Navidad, y consiste generalmente en un cañuto corto, tapado por uno de sus extremos con un pergamino estirado, en cuyo centro se coloca una cerda o una hebra de seda encerada. Pasando por ella los dedos, hace un ruido tan desapacible como el canto de una cigarra. Jugué en mi infancia con ese artificio hecho con una rebanada de hueso de caracú, crines de caballo y un palito de sauce con un pegote de alquitrán en un extremo. Se revoleaba el hueso y el parche de pergamino o de cartón que lo tapaba amplificaba los roces de las crines contra la resina. Mi abuelo lo vendía en su juguetería y librería de la calle Paraná a pocos metros de Corrientes y frente al teatro Chantecler donde actuaban las bataclanas. ¡Qué tiempos! Un día hubo un incidente policial que se produjo cuando una severa dama presentó una denuncia contra ese comercio porque colgaban dos globos redondos y uno alargado. El comisario fue en persona y le pidió a mi abuelo que los sacara y pusiera uno y uno, o dos largos y uno redondo.

Roger Penrose

C: Aunque la ciencia no se cansa de mostrarnos que no hay diferencias entre ciencia pura y aplicada, no dejan de ser fascinantes las diversas aplicaciones que han tenido los números primos sobre todo en los últimos 60 años.

JC: Y lo equivocado que estaba Hardy con su visión tan pesimista del mundo en tiempos de guerra. En su libro Apología de un matemático llegó a decir: “se dice que una ciencia es útil cuando sus avances tienden a acentuar las diferencias existentes en la distribución de la riqueza o cuando favorecen más directamente la destrucción de la vida humana”.

A: Hay que tener en cuenta que por aquel entonces, en los patios del Trinity College de Cambridge por donde Hardy transitaba todas las mañanas hasta su oficina, se atendían a heridos que habían estado en el frente. Era natural ser pesimista.

JC: Es verdad, pero más allá del contexto, el pensamiento de Hardy pone sobre la mesa la idea de que un buen científico debe tener un fuerte compromiso con la sociedad en la que vive.

C: Además del problema de las claves en internet que cuenta el artículo, el estudio que Hardy y Ramanujan hicieron sobre la redondez de los números, devino en una conexión, establecida por Paul Erdös y Mark Kac, con la curva normal usada en la teoría de probabilidades.

…

I: No sé qué tiene que ver el cuadro de Michael Pacher de la tapa con los números primos o con algo de la revista. ¿Siempre tenemos la misma discusión?

C: Cambiamos de idea a último momento. Teníamos pensado poner una recreación de la espiral de Ulam. Cuenta la leyenda que el matemático polaco Stanislaw Marcin Ulam (1909 – 1984) de aburrido que estaba mientras escuchaba una conferencia científica en 1983, pasó el tiempo garabateando en una hoja los números enteros consecutivos en una especie de espiral en sentido antihorario. Se sorprendió al ver que los primos tendían a caer en determinadas líneas diagonales. Muchos problemas interesantes surgieron desde entonces sobre la espiral de Ulam.

A: Ulam es el mismo que junto con el físico húngaro Edward Teller diseñaron la primera bomba H, que tenía una potencia 2500 veces mayor que las bombas atómicas lanzadas en 1945 sobre Hiroshima y Nagasaki.

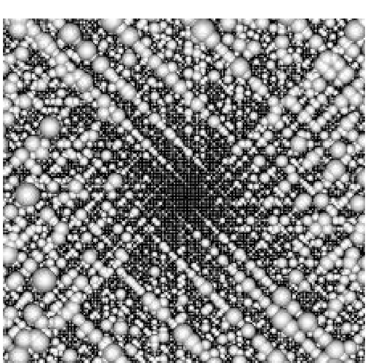
I: Chicos, hablemos de la tapa…

A: Lo que recuerdo es que no solo en Contact de Carl Sagan se habla de números primos. En un número anterior de Qed. I. hizo un comentario de la novela La soledad de los números primos de Paolo Giordano.

JC: Leí la novela después de ese comentario y me gustó mucho. Escuché que están por estrenar una película basada en ella. El título hace referencia a los primos gemelos como el 3 y el 5. Con los números primos hay gran cantidad de problemas abiertos.

C: El escritor griego Apostolos Doxiadis, escribió El tío Petros y la conjetura de Goldbach que narra cómo un ficticio matemático se obsesiona con el problema que el peruano Harald Helfgott ha empezado a cerrar hace cuatro años.

JC: También vi y escuché en la web que el compositor francés Oliver Messiaen (1908 – 1992) se valió de los números primos para crear música no métrica. En obras tales como La Nativité du Seigneur (https://www.youtube.com/watch?v=bcAcI6ODxUs) o Quatre ètudes de rythme (https://www.youtube.com/watch?v=aSISzURlwcc) emplea simultáneamente motivos cuya duración es un número primo para crear ritmos impredecibles.



Espiral de Ulam

C: ¿Buena la música de Messiaen?

"La persistencia de la memoria", Salvador Dalí (1931)

JC: Debo confesar que no podría decirlo. Creo que más bella es la demostración de Euclides sobre la infinitud de los números primos o la idea de Diffie y Hellman para el intercambio de claves.

I: Todo bien, pero ¿qué hace San Agustín y el Diablo en la tapa?

JC: La figura del Diablo es muy curiosa. No sé qué significa esa cara en su trasero.

I: Michael Pacher (1435 – 1498) el autor de esta obra, fue un artista austríaco con fuerte influencia de los pintores flamencos que han ilustrado muchas de las tapas de Qed. La obra pertenece al altar de los Padres de la Iglesia realizado entre 1482 y 1483. El Diablo está sosteniendo el Libro de los Vicios ante San Agustín en un intento de tentarlo. Algunos especialistas dicen que la cara en el trasero simboliza la idea de que el mal tiene dos caras. Pero no veo ninguna relación con la ciencia.

A: Según el científico Roger Penrose (1931), San Agustín tuvo una intuición genial acerca de la relación espacio-tiempo, adelantándose 1500 años a Einstein y a la teoría de la relatividad. El santo afirmó que el universo no nació en el tiempo, sino con el tiempo, que el tiempo y el universo surgieron a la vez.

C: También sugirió en su obra La ciudad de Dios que Dios pudo servirse de seres inferiores para crear al hombre al infundirle el alma, defendía la idea de que a pesar de la existencia de Dios, no todos los organismos y lo inerte salían de Él, sino que algunos sufrían variaciones evolutivas en tiempos históricos a partir de creaciones de Dios. Una aproximación lejana a Darwin.

JC: Si bien no le conozco a San Agustín nada relacionado con los números primos, Claudi Alsina en su Club de la hipotenusa le atribuye la mayor apología a favor de un número. Decía San Agustín: seis es un número perfecto en sí mismo y no porque Dios creara el mundo en seis días, más bien lo contrario es verdadero.

C: Y tenía razón, ya que seis es el primer número perfecto porque es suma de sus tres divisores propios: uno, dos y tres.

I: Está bien. Me convencieron de que San Agustín esté en la tapa. Pero ¿y el diablo?

C: Bueno, hay un artículo sobre los primos diabólicos: los de la forma 66600…0001. El 6661 y el 66601 por ejemplo.

I: El nombre se cae de maduro…

JC: Me pregunto por qué el 666 es el número de la bestia si cuando el cronista escribió el Apocalipsis no se conocía en el cercano Oriente (ni en Roma, el imperio dominante) la escritura posicional.

C: Si escribimos el 666 en números romanos nos queda una curiosidad: DCLXVI. Salvo la M se usan todos los símbolos de este sistema de numeración, una sola vez. Aunque eso no parezca diabólico no deja de ser curioso.

A: En una charla que di sobre Curiosidades del tiempo físico señalaba que muchos relojes de números romanos escriben IIII en lugar de IV para evitar la confusión con JV (Jehová) que en la cultura judía se evita, por respeto, escribir o pronunciar. En esa misma línea el seis en números romanos (VI) es el simétrico del cuatro (IV). Aunque no estoy seguro, es probable que el número de la bestia sean tres números seis y no el 666 donde por tres veces se niega, por simetría axial, a Dios.

I: Vamos adelante con el cuadro de Pacher que, además de todo, es muy hermoso.

Hasta siempre, Agustín!!

JC: El artículo de Agustín en el que se pregunta si hoy se estudia menos es de los que más me gusta de Qed: provocador, cálido e inteligente. Pone en tela de juicio los sistemas de evaluación y de diagnóstico de la enseñanza de los que se suelen sacar conclusiones temerarias. Hace un tiempo un colega describió la matemática como dividida en tres grandes etapas históricas y esa clasificación la asoció con la educación. La primera etapa podemos decir que es la matemática griega llegando hasta antes del Renacimiento. Esta es la matemática que se enseña en la escuela primaria. La segunda etapa va desde el Renacimiento hasta Newton y Leibniz: la matemática de la escuela media. La matemática de los siglos XVIII al XXI es la matemática universitaria.

C: Qed, propone, tal vez sin querer, una visión diferente. Recuerdo las columnas de Martin Gardner. Sus artículos eran fáciles de empezar a leer hasta el punto donde uno se empantanaba. Salvando las distancias (no nos podemos comparar con Gardner), los artículos de Qed tienen esa impronta y cada tema suele atravesar la clasificación que menciona JC. La teoría de números empieza con los pitagóricos (o tal vez antes como se insinúa en el artículo) y se termina hablando de temas de seguridad informática en las aplicaciones y de problemas abiertos en la llamada matemática pura.

JC: ¿Será que este es el criterio que debería primar en una eventual reforma de la enseñanza de la ciencia? Es decir, sin dejar de lado las bellas ideas de las primeras civilizaciones, tratar de llegar lo más cerca del borde del conocimiento para mostrar la ciencia viva.

A: La idea es atractiva y se vincula con una observación similar de Charles Darwin en 1859: "[Los individuos de] las especies existentes, durante los primeros períodos de su desarrollo, se parecen a menudo a formas antiguas y extinguidas". El naturalista observó que el desarrollo de un embrión guarda una relación notable con el de su especie; por ejemplo los embriones humanos parecen, al principio, animales acuáticos con branquias, como aquellos de los que descendemos. La explicación del sabio fue que no hay un límite nítido entre no haber nacido todavía, y ser ya un individuo adulto. El que así suceda con la matemática podrá ser un hecho, pero de ninguna manera una necesidad; somos libres de elegir qué enseñar y qué aprender. No creo que esa embriología de la matemática revele ni explique ningún fracaso de Occidente o de otra cultura. Que en las pruebas internacionales China haya obtenido diez, los Estados Unidos ocho y la Argentina 7, nada significa en términos de triunfo o fracaso, y hacer un ranking con los resultados es una forma de entender el asunto como una rivalidad bélica o deportiva. Para Mahatma Gandhi la India era demasiado pobre como para darse el lujo de no invertir en educación, e invirtió. Después Indira Gandhi (sin parentesco con Mahatma) impulsó mucho la ciencia y otorgó los medios para formar la cantidad de científicos necesaria para construir bombas atómicas para amenazar a Pakistán o para defenderse de una posible invasión de ese país o de China. India y Pakistán construyeron y ensayaron bombas atómicas sin resolver sus diferencias. Indira fue asesinada por sus custodios. Sólo quiero decir que no somos los mejores ni tenemos la obligación o la necesidad de serlo, y que para desarrollar las ciencias hay que invertir muchos recursos. Naturalmente, prefiero los fines nobles y no los bélicos.

C: Han quedado varios temas sobre primos que podemos desarrollar. Con unos días más…

P: De ninguna manera. El diseño está listo y Qed Nro 7 sale con fritas.

Q.e.d.

Primo ¡estás!

Un joven estudiante indio, S. P. Sundaram, propuso en 1934 una tabla para detectar primos.

4	7	10	13	16	19	22	25	...
7	12	17	22	27	32	37	42	...
10	17	24	31	38	45	52	59	...
13	22	31	40	49	58	67	76	...
16	27	38	49	60	71	82	93	...
...								...

Esta criba tiene una curiosa propiedad:

Si N está en la tabla, entonces 2N+1 no es primo.
Si N no está en la tabla, entonces 2N+1 es primo.

Por ejemplo:

22 está en la tabla, entonces 22x2+1=45 no es primo.
20 no está en la tabla, entonces 20x2+1=41 es primo.

EDUCANDO

EDITORIAL

Ciudad Universitaria Pabellón 2 Planta Baja, CP 1428, Cdad. Autónoma de Bs. As.
Tel: 4788-9570 mail: edccceducando@ciudad.com.ar