Teoría matemática de la inducción eléctrica

Candioti, Marcial R.

1891

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA CAPITAL

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

TEORÍA MATEMÁTICA

DE LA

INDUCCIÓN ELÉCTRICA

TÉSIS

PARA

OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POR

MARCIAL R. CANDIOTI

Ingeniero Civil

BUENOS AIRES

2234 — Imprenta «LA UNIVERSIDAD» de J. N. Klingelfuss y Cª. Venezuela 684.

MDCCCXCI

RECTOR.

Doctor....... D. **LEOPOLDO BASAVILBASO.**

CONSEJEROS.

Doctor....... D. **MAURICIO GONZÁLEZ CATÁN.**
id. .... » **MANUEL OBARRIO.**
Ingeniero.... » **LUÍS SILVEYRA.**
id. .... » **MANUEL M. BAHÍA.**
Doctor....... » **MANUEL ARÁUZ.**
id. .... » **JUAN J. J. KYLE.**
id. .... » **JACOB DE TEZANOS PINTOS.**
id. .... » **JUAN JOSÉ MONTES DE OCA.**

SECRETARIO.

Doctor....... D. **EDUARDO L. BIDAU.**

PRO-SECRETARIO.

Doctor....... D. **LUÍS DE LA PEÑA.**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DECANO.

Ingeniero .... D. Luís Silveyra.

ACADÉMICOS HONORARIOS

Doctor....... ..... D. Bernardino Speluzzi.
Ingeniero.... ..... » Emilio Rosetti.
id. .... » Francisco Lavalle.
id. .... » Jorge Coquet.

ACADÉMICOS TITULARES.

Ingeniero .... D. Guillermo White.
id. .... » Luís Silveyra.
id. .... » Santiago Brián.
Doctor............. » Valentín Balbín.
Ingeniero .... » Luís A. Huergo.
id. .... » Manuel B. Bahía.
Doctor............. » Juan J. J. Kyle.
id. .... » Roberto Wernicke.
Ingeniero .... » Juan Pirovano.
Señor .... » Juan Coquet.
Ingeniero .... » Eduardo Aguirre.
id. .... » Otto Krause.
Doctor............. » Rafael Ruíz de los Llanos.
id. .... » Eduardo L. Holmberg.
Ingeniero.......... » Juan F. Sarhy.

SECRETARIO.

Doctor............. D. Félix Amorétti.

COMISION DE TÉSIS

PRESIDENTE

Ingeniero .... D. Luís Silveira

VOCALES

Doctor .... D. Valentín Balbin
id. .... » Carlos M. Morales
id. .... » Ildefonso P. Ramos Mejía
id. .... » Félix Amoretti

Á MIS PROFESORES

Dr. Valentin Balbin—Ing. Manuel B. Bahia

EN TESTIMONIO DE

Gratitud y Cariño

SEÑOR PRESIDENTE:

SEÑORES EXAMINADORES:

Vengo á someter á vuestra consideración la última prueba exigida por la Facultad á los que aspiramos al honroso título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas.

Hubiera deseado presentaros una obra de más valer, algo digno de vuestras sabias lecciones, si á ello no se opusiese por una parte las escasas fuerzas del que recién abandona las áulas, y por otra, lo delicado y difícil de la empresa.

Con todo, al amparo de vuestros preceptos y guiado por vuestros sanos consejos, me he sentido estimulado ya, para incorporarme al número de los que legítimamente aspiran á la conquista de un nombre en el terreno de las especulaciones científicas, que por desgracia, no se arraigan aún en nuestro suelo.

El tema que he elegido no puede ser más interesante; sobre él están basados los adelantos más modernos de la electricidad que hoy tienden á transformarlo todo, y sobre él estudian, día á día, los más notables físicos europeos, arrojando diariamente nuevas luces sobre el vasto campo de sus variadas aplicaciones.

Me he apartado en lo posible de las deducciones ó demostraciones experimentales, procurando establecer todos los principios ó teoremas, sobre la base de especulaciones puramente teóricas, y citando en cada caso las fuentes donde pueden hallarse perfectamente tratadas cada una de las aplicaciones prácticas.

Sobre el fenómeno de la *inducción electro-magnética,* he hecho un estudio especial, tratando de deducir por un procedimiento directo, sus leyes teóricas, partiendo solamente de la teoría del trabajo.

Sólo me resta manifestaros, que, si en este humilde opúsculo hallais los errores propios del principiante, vosotros sabreis disculparlos; si encontrais algo de mérito, os lo debo.

CAPÍTULO I.

« L'etude experimental des phenoménes electriques n'est pas abordeè. les resultats qu'on en a deduits son suposeès connus; ils servent de base aux théories et de données aux problèmes résolus.»

Bertrand.

HISTÓRICO. — DEFINICIONES. — LOS FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA Y LA LEY GENERAL DE INDUCCIÓN.

1. La explicación teórica de ciertos fenómenos eléctricos viene desde hace algun tiempo ocupando exclusivamente la atención de un gran número de físicos extranjeros.

Los conocimientos sobre electro-dinámica y electro-magnetismo, desde Gauss, Green, Ampère y Faraday, han sido notablemente perfeccionados con la ayuda de resultados puramente experimentales, y han permitido fundar la base de la teoría matemática de la electricidad, que tiende ya á formar un verdadero cuerpo de doctrina.

Pero si la experiencia confirma, en todos ó la mayor parte de los casos, las propiedades que rigen un fenómeno eléctrico, ¿porqué no investigar en la teoría la explicación matemática del mismo, cuando los métodos perfeccionados del Análisis y del Cálculo, permiten desenvolver admirablemente los hechos más complicados? Las deducciones mucho más remotas se desplegarían en un campo más vasto; sus fundamentos son más precisos.

Las últimas hipótesis de Ampère y Poisson, sobre la constitución íntima de los cuerpos; la de Clausius y Fourier, sobre la propagación del calor que transportó Ohm á la propagación de la electricidad; la constitución del campo *magnético ó galvánico*, así como el principio de la conservación y de la transformación de la energía, deben permitirnos aclarar científicamente cualesquiera de estos fenómenos.

Las propiedades de la inducción eléctrica han transformado completamente la industria; sus aplicaciones son muy vastas, y es por eso que las leyes y principios que la rigen deben ser sólidamente establecidos sobre una base científica.

2. Es fuera de duda que el descubridor de las corrientes de inducción fué Faraday, quien en 1831 observó que se obtenía corriente eléctrica por el deplazamiento relativo de un imán y un conductor, ó por la variación de intensidad en la corriente que atraviesa un circuito vecino. ([1])

No es este el momento de citar las experiencias fundamentales que condujeron á aquel notable físico á uno de los descubrimientos más fecundos en las

---

([1]) Algunos autores fijan aquella fecha en 1832.

ciencias modernas. Ampère, sin colocarse en condiciones tan ventajosas de experimentación, había logrado exitar una corriente en un conductor, por la influencia de corrientes vecinas, pero no se dió cuenta de la importancia del hecho.

Casi al mismo tiempo que Faraday, un distinguido físico de Gersey, M. Henry de Princentown [1], había tenido por sucesivas experiencias resultados muy análogos que provocaron nuevas investigaciones; desde esa época los procedimientos fueron gradualmente perfeccionados. Las corrientes eléctricas inducidas tomaron diversas denominaciones según los elementos puestos en acción y de ahí las corrientes *magneto-eléctricas, teluro-eléctricas, dinamo-eléctricas, de Foucault*, etc., cuyas propiedades están siempre sometidas á leyes bien determinadas.

3. Son varias las clasificaciones que se pueden hacer de las corrientes de inducción, pero como el objeto principal de este opúsculo se reduce á la explicación matemática de los fenómenos, se vá á adoptar la más simple reduciéndola á los casos más generales.

Algunos autores establecen las denominaciones de *inducción electrostática* é *inducción electro-magnética*, para indicar respectivamente la electrización que generalmente se llama *por influencia*, ó la corriente originada por *inducción* sobre un hilo conductor por la acción de otras corrientes ó imanes.

Se designará aquí con el nombre de *inducción eléctrica* la acción por la cual corrientes ó imanes

---

(1) De La Rive *Traite d'electricité*. T. I., Paris, 1858.

originan otras corrientes; es el sentido que generalmente se le ha dado, el mismo con que se clasificó en su origen el descubrimiento de Faraday.

Las condiciones extrictamente necesarias para la producción de una corriente de inducción son dos:

1ª Un campo que puede ser galvánico ó magnético y que será el agente inductor.

2ª Un circuito (que puede aún ser el primitivo) en el que se desarrolla una nueva corriente.

Llamaremos *circuito primario* ó *imán inductor* respectivamente, al circuito que originando un campo galvánico ó al imán que dando nacimiento á un campo magnético, producen en el *circuito secundario* una corriente eléctrica.

De aquí las denominaciones de corrientes *inductoras* é *inducidas*.

Con estos elementos y teniendo en cuenta los diferentes casos en que estas corrientes pueden producirse, se establecerá la siguiente clasificación, propuesta y desarrollada por Hospitalier: (1)

1º *Inducción electro-magnética ó magneto-eléctrica.*

2º *Inducción propia, auto-inducción ó self-inducción.*

3º *Inducción mútua.*

La inducción electro-magnética, tiene lugar en dos

---

(1) E. Hospitalier. *Traité Elementaire de L'Energie electrique.* Paris. 1890. T. I.

casos: cuando se deplaza relativamente de un imán ó una corriente á un conductor, ó cuando se hace variar la intensidad de ésta. (1)

La auto-inducción, cuando se hace variar la intensidad de la corriente que atraviesa un conductor, obteniéndose en el mismo una nueva pero instantánea corriente. Este caso comprende los extremos, es decir las variaciones máximas: abrir ó cerrar el circuito; las corrientes que entonces se originan se denominan *extra-corrientes de apertura ó cierre.* Ambas son inducidas; la primera continúa aún después de abierto el circuito y lleva el mismo sentido que la primaria, la segunda se opone á ésta y hace retardar un cierto tiempo, llamado *período variable* el establecimiento del *régimen permanente.*

La inducción mútua tiene lugar entre dos circuitos de tal modo, que las variaciones de la una originan una corriente de inducción en la otra y recíprocamente. (2)

4. *Sentido de las corrientes de inducción.* Llamaremos corrientes inducidas *directas* á las que tienen el mismo sentido que la primaria, é *inversas* á las de sentido opuesto.

Fácil es en cada caso determinar el sentido de una corriente inducida mediante la ley de H. Federico Lenz, Profesor de la Universidad de San Pe-

---

(1) En los descubrimientos de Faraday se llamó á este fenómeno, inducción *electro-dinámica ó volta-eléctrica* cuando el inductor es una corriente, y *magneto-eléctrica* cuando es imán. Estas distintas denominaciones que aún las emplea Mascart y Joubert, deben estar comprendidas en la última, desde que hoy el campo de un imán y el de una corriente se estudian lo mismo.

(2) Bertrand las llama corrientes modificadas por inducción. Véase J. BERTRAND. *Theorie Mathematique de l'electricité.* Paris, 1890.

tesburgo, enunciada por este físico en 1834, poco tiempo después del descubrimiento de Faraday. (1)

El enunciado verdadero de la *ley de Lenz* es el siguiente:

« El deplazamiento de un imán ó de una corriente inductora en presencia de un circuito, desarrolla en éste una corriente inducida de sentido tal que tiende á oponerse á aquel movimiento como una resistencia mecánica ». (2)

Esta ley puede deducirse del mismo desarrollo que se expondrá más adelante.

La *ley de Lenz* es general y se aplica no sóla mente á la inducción electro-magnética, sinó también á la self-inducción y á la inducción mútua, y puede pues decirse que: las corrientes inducidas *directas* resultan de un alejamiento y las *inversas* de un acercamiento.

Y en efecto:

Una corriente *directa* se producirá: 1° Cuando se aleje de un circuito un imán ó una corriente, ó cuando se disminuya la intensidad de ésta; 2° Cuando se alejen uno de otro dos circuitos ó se disminuya las intensidades de sus corrientes; 3° Cuando se abra un circuito ó se disminuya su corriente, y estos tres casos pueden reducirse á uno sólo, pues la disminución en la intensidad de la corriente inductora equivale á alejarla del inducido, debilitando así la parte de campo galvánico que éste atraviesa, y abrir un circuito equivale á removerlo desde su situación actual hasta una distancia infinita.

(1) *Memoire de l'Academie de Saint-Petesbourg*, 1831, 1838.

(2) A. Vaschy, *Electricité et Magnetisme*, T. I. Paris, 1890.

Del mismo modo se podría reducir á uno los tres casos de corrientes inducidas *inversas*.

El circuito en que se produzca una corriente inducida *directa*, corta un número de líneas de fuerza, menor que antes, y aquel en que circula una inducida *inversa*, corta un número mayor de las mismas líneas.

LOS FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA Y LA LEY GENERAL DE INDUCCIÓN

5. El conocimiento de las propiedades de los imanes y de las corrientes eléctricas, de la constitución del campo *magnético ó galvánico*, de las acciones electro-magnéticas y electro-dinámicas descubiertas por Ampére, todo esto ha conducido á establecer entre el magnetismo y la electricidad una analogía tan vasta, que permite á los investigadores de esta rama de las ciencias estudiar casi idénticamente todas aquellas cuestiones haciendo uno el procedimiento.

Es así como se ha denominado *campo magnético* al espacio que modifica á su alrededor, ya sea un imán ó una corriente, y dentro del cual se manifiestan sus acciones propias con intensidades más ó ménos diferentes que es lo que caracteriza un campo en cada caso. ([1]) Las líneas de fuerza que imaginó Faraday para explicar la acción del campo de un

---

([1]) Se designaba antes al campo de un imán con el nombre de *campo magnético*, y *galvánico* el de una corriente imán se aplican igualmente al campo magnético de una corriente; el estudio de sus propiedades es completamente idéntico.

Aún hay más; las leyes de Ampére que rigen las acciones mútuas de dos corrientes, se aplican también por sus efectos á las mismas líneas de fuerza, y se ha llegado á enunciar, basándose en una teoría perfectamente aceptable, la siguiente ley:

Las líneas de fuerza que van en el mismo sentido se repelen; las que van en sentido contrario se atraen.

Ultimamente M. Blondot, estudiando las acciones recíprocas entre campos magnéticos producidos por imanes y corrientes, enunció la siguiente ley:

La variación de la imantación de un elemento imantado, produce un campo eléctrico idéntico (con la diferencia de que las fuerzas magnéticas se cambian en fuerzas eléctricas) al campo magnético que produciría según la fórmula de Biot y Savart, [1] *un elemento de corriente que ocupase el lugar del elemento imantado, y cuya intensidad fuese igual á la derivada con respecto al tiempo del momento magnético de este elemento.* [2]

6. *Equivalencias de las acciones de un imán y una corriente.*—Para establecer mejor la equivalencia de acciones del magnetismo y de la electricidad, se vá á considerar la que ejercería sobre un polo magnético, de intensidad igual á la unidad, un pequeño imán y una corriente cerrada elemental.

Sea (fig. 1) *M* un punto sometido á la acción de

---

[1] Es la que se ha llamado fórmula de Laplace. Véase BERTRAND, obra citada.

[2] Esta ley puede establecerse teóricamente. Véase *Journal de Physique* 1890.

un pequeño imán que podemos considerar reducido á su eje *ab* y distante de sus extremidades de r y r_1, siendo:

$$r_1 - r = l \cos \theta;$$

$+ m$ y $- m$ las cantidades de magnetismo en las extremidades del imán.

El potencial magnético en un punto se define análogamente al eléctrico como: *el trabajo necesario para transportar desde el infinito hasta el mismo punto, contra la acción de las fuerzas del campo, una cantidad de magnetismo igual á la unidad.* De modo que el potencial en un punto, bajo la acción de cantidades m_1, m_2, ... m_n de magnetismo será

$$V = \Sigma \left(\frac{m}{r} \right),$$

y en el presente caso

$$V = \frac{m}{r} - \frac{m}{r_1} = \frac{m}{r\, r_1} \left(r_1 - r \right).$$

Pero según la figura:

$$r_1 - r = l \cos \theta,$$

y suponiendo por lo pequeño del imán,

$$r\, r_1 = r^2$$

se tendrá:

$$V = \frac{m\, l \cos \theta}{r^2} = \frac{M}{r^2} \cos \theta$$

siendo M el momento magnético del pequeño imán.

La fuerza que el imán ejerce sobre el punto M se desarrollará evidentemente en el plano Mab, y según la teoría del potencial ella será:

$$f = \frac{dV}{dr},$$

que podemos descomponer en dos, una paralela y otra normal á r de modo que se tendrá:

$$f_p = -\frac{dV}{dr} = \frac{-d}{dr}\left(\frac{M}{r^2}\cos\theta\right)$$

y

$$f_n = -\frac{dV}{r\,d\theta} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{M}{r^3}\cos\theta\right).$$

ó bien:

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{2M}{r^3}\cos\theta \\ f_n &= \frac{M}{r^3}\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \qquad (1)$$

Sea ahora (fig. 2) ab un pequeño elemento de corriente de intensidad I y r la distancia al punto M.

Según la fórmula de Biot y Savart la fuerza con que el elemento ab actúa sobre M es normal al plano Mab y tiene por valor:

$$F = \frac{I\,ds}{r^2}\operatorname{sen}\alpha = \frac{I\,r\,ds}{r^3}\operatorname{sen}\alpha,$$

siendo ds la longitud de la pequeña corriente.

Indicando con r_0 la distancia de M á un punto a_0 del circuito, puede escribirse, desarrollando y despreciando los infinitamente pequeños de orden superior al tercero:

$$\frac{I\ r\ ds}{r_0^3}\ \text{sen}\ \alpha - \frac{3\ I\ rds\ dr}{r_0^4}\ \text{sen}\ \alpha$$

ó

$$\frac{I}{r_0^3}\ r\ ds\ \text{sen}\ \alpha - \frac{3\ I}{r_0^3}\ dr\ ds\ \text{sen}\ \alpha. \qquad (2)$$

Imaginemos ahora el cono cuyo vértice es M y cuya base es la superficie S del circuito y por el punto a_0 trazemos un plano normal á r_0, el cual determinará una sección S_0. Entonces se tiene:

$$\text{área Mab} = \frac{rds\ \text{sen}\ \alpha}{2}$$

$$\text{área aba'b'} = dr\ ds\ \text{sen}\ \alpha,$$

de modo que la expresión (2) se convierte en ésta:

$$\frac{I}{r_0^3}\left(2.\text{área Mab} - 3.\text{área aba'b'}\right),$$

la cual representa la acción de la pequeña corriente sobre el imán, como una presión tal que por unidad de superficie es $\frac{I}{r_0^3}$. Esta presión se descompone en dos, la primera normal á S, cuyo valor es:

$$\frac{2\ I\ S}{r_0^3},$$

y la segunda:

$$3\ dr\ ds\ \text{sen}\ \alpha\ \frac{I}{r_0^3}$$

que á su vez puede descomponerse en otras dos, una normal á S y otra normal á S_0, de modo que se tiene:

$$\frac{2\ I\ S}{r_0^3} - \frac{3\ I\ S}{r_0^3} + \frac{3\ I\ S_0}{r_0^3}.$$

Pero $S = S_0 \cos \theta$, en la que θ es el ángulo de la normal á S con S_0. Luego la acción de la corriente se compondrá en definitiva de dos fuerzas:

$$\frac{-IS}{r_0^3} \quad \text{y} \quad \frac{3IS}{r_0} \cos \theta$$

la primera normal á la superficie S y la segunda normal á S_0.

Finalmente considerando las componente f_p y f_n paralela á r_0 y normal á r_0 respectivamente se tendrá:

$$f_p = \frac{2IS}{r_0^3} \cos \theta$$

$$f_n = -\frac{IS}{r_0^3} \operatorname{sen} \theta$$

que comparadas con las (1) dan:

$$M = IS;$$

esto prueba que las acciones de un elemento de corriente y de un pequeño imán son equivalentes.

7. La explicación matemática de los fenómenos de inducción, debe basarse en las propiedades de las acciones eléctro dinámicas como también en la transformación de la energía potencial en energía eléctrica y de este modo sus leyes se pueden deducir directamente.

Desde que no puede admitirse acciones á distancia esas transformaciones deben tener lugar á través de medios continuos; y la constitución íntima de los cuerpos establecida por las teorías modernas universalmente aceptadas, nos hace comprender como puede operarse, cambiarse un trabajo mecánico en energía eléctrica ó calorífica mediante su estructura atómico-etérea, etc.

Todos los fenómenos físicos cuyas manifestaciones estudiamos en los cuerpos que no cambian en su naturaleza, no son sinó transformaciones más ó menos complicadas de la energía y de la materia; y citando á Hospitalier podemos decir: que todo fenómeno eléctrico en las ciencias modernas, debe considerarse como un modo especial de movimiento, una manifestación particular de una cierta forma de energía llamada *eléctrica,* la cual por sus transformaciones puede producir otras formas de energía: calorífica, mecánica, química etc.

No es este el sitio para exponer la teoría completa del asunto, que está bien tratado en obras esciales [1].

Se admitirá el siguiente principio:

En todas circunstancias las sumas de las energías de un sistema queda constante sinó se introduce una nueva energía extraña; y si esto último sucede, la variación de la energía total del sistema, es igual exactamente á la energía recibida.

Igualmente diremos:

Todo trabajo gastado en un sistema, debe encontrarse en él bajo una forma cualquiera de energía.

La suma de la energía potencial y de la energía actual es constante. [2]

8. La teoría que acabamos de exponer, permite

---

[1] MASCART ET JOUBERT -- Obras cit.
HOSPITALIER — Id.
B. STEWART. *La conservaction de l'énergie.* Paris 1875.
[2] RYSSELBERG. *Theorie elementaire de l'éléctricité.* Paris 1889.

establecer fácilmente una ley general que puede rejir en todos los fenómenos de que tratamos y que puede aún traducirse en una expresión algebráica.

En efecto:

Todas las acciones que se ejercitan en un sistema eléctro-magnético, pueden clasificarse en dos grupos, 1° el formado por las que recibe el sistema en cada instante desde el exterior, 2° el de las que á cada instante el sistema cede al exterior bajo forma de energía calorífica. Entonces sea:

1° *a).* dW el trabajo de las fuerzas exteriores después de un tiempo dt.
b) dA el trabajo efectuado por la fuente eléctrica del sistema.
2° dJ lo que cede en cada instante el sistema hacia el exterior.

Ahora bien, según el principio de la conservación de la energía, si la suma de las energías recibidas por el sistema no es igual á la suma de las energías cedidas en cada instante, la diferencia deberá hallarse en el sistema mismo bajo la forma de energía potencial, y si se indica con dw la variación de ésta después de un tiempo dt puede escribirse:

$$(dW + dA) - dJ = - dw$$

El trabajo dA, de las fuentes que alimentan el sistema, se diferenciará del dJ manifestado bajo la forma de energía calorífica, en una cantidad dP que es precisamente el trabajo de induccion, de modo que puede ponerse en general:

$$dP \geqq (dW + dw) \qquad (3)$$

que es la fórmula á que pretendíamos llegar.

Neuman partiendo de las teorías de Helmholtz y sir W. Thompson, ha llegado á formular la *ley general de inducción* y que expresa que:

La fuerza electro-motríz de inducción, es igual á la derivada con respecto al tiempo del flujo de inducción que atraviesa el sistema. (1)

Más adelante veremos cuan útiles son las aplicaciones de la formula (3).

---

(1) Para el establecimiento de este teorema vease MASCART et JOUBERT, obr. cit., Tomo I.

CAPÍTULO II

DE LA INDUCCIÓN ELECTRO-MAGNETÍCA.

Se ha establecido ya que la inducción electromagnética se produce en un sistema, cuando se opera un deplazamiento relativo entre éste y un imán ó una corriente. A estos casos generales pueden reducirse los demás, puesto que se vió que la variación de la intensidad de la corriente inductora equivale siempre á un deplazamiento: un aumento corresponde á alejarla, una disminución á aproximarla. Para mayor claridad trataremos los casos generales por separado.

9. *Inducción por el deplazamiento relativo de un imán y un conductor.* El hecho físico es el siguiente: Si un conductor neutro se mueve en el campo magnético de un imán, se produce en él una corriente eléctrica que dura tanto tiempo como el movimiento.

Los autores más modernos: Mascart et Joubert, Gariel, Maxwell, Vaschy, Hospitalier, Bertrand y otros, explican el fenómeno y deducen las leyes que lo rigen partiendo de la acción electro-magnética que se desarrolla entre un imán y un conductor atravesado por una corriente, para llegar al caso que nos ocupa, es decir, cuando esta corriente se anula.

El procedimiento empleado no es pues directo, pero tampoco es el más conveniente bajo el punto de vista teórico, por que en efecto, si se estudia teóricamente la fuerza electro-motriz de inducción producida por la acción de corrientes entre sí ó de corrientes é imanes, es indiscutible la necesidad de introducir los efectos de la self-inducción y aun de la inducción mútua, lo que viene á complicar nuevamente el fenómeno.

Pero el conocimiento exacto de las fuerzas puestas en acción y el principio de la conservación y de la transformación de la energía, pueden conducirnos á la solución directa del problema.

En el caso que nos ocupa debemos darnos cuenta exacta del mecanismo invisible con que obran los campos magnéticos, mecanismo continuo porque las acciones no son á distancia.

Una corriente eléctrica que atraviesa á un conductor, desarrolla á su alrededor un campo magnético en que las líneas de fuerza son circunferencias cuyo eje común es el eje del conductor y que goza de las mismas propiedades que el producido por un imán.

¿Pero cómo debemos concebir el campo ó sus líneas de fuerza en lo que se refiere á su modo de obrar? Ciertamente que el éter juega aquí un rol importante y dichas líneas no pueden ser sinó modificaciones en la disposición y movimientos de la materia y de este fluído que llena todos los cuerpos, modificaciones caracterizadas por la mayor intensidad ó por la variación en la dirección de esos movimientos.

Así se concibe como las acciones mútuas entre imanes ó entre corrientes se reducen á las acciones mútuas entre sus respectivos campos, desde que estos forman parte esencial de aquellos. Por otra parte es evidente que estas acciones deben resultar del ejercicio de las fuerzas puestas en juego, de un modo continuo, de manera que el campo será *deformado* momentáneamente para volver luego á sus condiciones primitivas.

Ahora bien, si se acerca por ejemplo, un conductor á un imán, se deberá gastar un cierto trabajo mecánico, pero no precisamente el que se necesitaría para moverlo en una situación cualquiera; el espacio que rodea al imán se halla esencialmente alterado: es el *campo magnético* en el que actúan fuerzas atractivas ó repulsivas variables en cada punto del mismo y cuya acción hay que contrarestar gastando un cierto trabajo: este es el *trabajo de inducción.* Se puede decir también que al efectuar el movimiento del conductor, éste *corta un mayor número de líneas de fuerza,* ó bien que, *la densidad de las líneas de fuerza que atraviesan cada punto del conductor ha aumentado.* [1]

Pero en virtud del principio de la conservación de la energía ese trabajo de inducción no puede perderse y debe presentársenos bajo otra forma: como energía eléctrica.

---

[1] Por convención especial se usa la palabra *densidad* en este caso, para indicar el número de líneas de fuerza que atraviesan á un elemento de superficie normal á su dirección (*Bertrand*).

Un conductor posee siempre aún en el estado neutro un cierto trabajo almacenado, una disposición especial de sus partículas constitutivas dotadas de movimientos de intensidad y dirección determinadas; si aquel trabajo es alterado hay un cambio total en estos movimientos y sus efectos se nos manifiestan por la modificación del espacio que lo rodea; nuevas fuerzas se ponen en juego. El potencial que era constantemente nulo ha variado de un punto á otro: en una palabra el conductor será atravesado por una *corriente de inducción.*

Tal es el resultado del trabajo mecánico que habíamos ejecutado moviendo el hilo contra la acción del campo magnético del imán.

10. Se pasará á la deducción teórica de las leyes. Sean:

I_m la intensidad del campo magnético del imán.
i » » de la corriente inducida.
e » fuerza electro-motriz »
T el trabajo de inducción para mover el conductor,
R' la resistencia en el mismo.

El trabajo que se gasta para mover el conductor, es transformado según hemos establecido en energía eléctrica, y después de un tiempo t él será dado por la expresión:

$$T = eit, \qquad (4)$$

ó bajo la forma de energía calorífica:

$$T = i^2R't. \qquad (5)$$

Pero en virtud de las acciones electro-magnéticas en dos elementos de un imán y una corriente, esta energía es en un instante transformada nuevamente en energía mecánica, manifestada por una atracción ó repulsión entre aquellos dos elementos.

Sea entonces df la fuerza que actúa en el campo magnético de un imán sobre un elemento dl de corriente que forma un ángulo θ con su dirección; esa fuerza se descompondrá en dos: una tangencial $df.\ cos\ \theta$ que ninguna acción ejercerá sobre él, y otra normal:

$$dF = dF \text{ sen } \theta$$

que lo atraerá haciéndolo recorrer un camino s.

La fuerza dF será proporcional á la intensidad I_m del campo, á la intensidad i de la corriente que debe recorrer el elemento y á la longitud de éste, de modo que si dl forma un ángulo α con dF se tiene:

$$dF = - I_m\, i\, dl \cos \alpha \text{ sen } \theta,$$

y para todo el conductor:

$$F = - I_m\, i\, l \cos \alpha \text{ sen } \theta$$

mientras que el trabajo desarrollado será:

$$- I_m\, i\, l \cos \alpha \text{ sen } \theta.\ s.$$

Ahora bien, puesto que el resultado final del fenómeno es que las cosas vuelvan á su estado primitivo una vez que se ha operado la transformación de una energía mecánica en eléctrica ó calorífica para manifestarse nuevamente en trabajo mecánico, la suma algebráica de este último y del que dá la fórmula (5) permitirá escribir:

$$i^2R't - I_m\, i\, l \cos\alpha \operatorname{sen}\theta.\, s = o,$$

de donde,

$$i = \frac{I_m\, l \cos\alpha \operatorname{sen}\theta}{R'} \cdot \frac{s}{t},$$

ó aún:

$$i = \frac{I_m\, l \cos\alpha \operatorname{sen}\theta}{R'}\, v, \qquad (6)$$

siendo v la velocidad del deplazamiento.

Finalmente en virtud de la ley de Ohm se tiene:

$$e = i R',$$

ó bien,

$$e = I_m\, v\, l \cos\alpha \operatorname{sen}\theta. \qquad (7)$$

Tal es la fórmula que dá el valor de la fuerza electro-motriz de inducción. Se vé que ella es independiente de la intensidad en el circuito primitivo, que era nula, y ha sido deducida directamente.

El trabajo de inducción tiene por expresión:

$$T = i^2R't = \frac{e^2\, t}{R'},$$

ó bien

$$T = \frac{I^2_m\, v^2\, l^2 \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta}{R'},$$

y es inversamente proporcional á la resistencia del conductor; de modo que para un circuito abierto en que $R' = \infty$ el trabajo de inducción es nulo, mientras que la fuerza electromotriz (7) es independiente de la resistencia.

11. En el fenómeno de la inducción electro-magnética producido por un imán en presencia de una corriente, se verifica una atracción ó repulsión electro-magnética, y aquella es *modificada* por inducción; y es partiendo de este caso que la mayoría de los autores deducen la ley teórica correspondiente, y cuyo desarrollo creo inútil establecer por cuanto está perfectamente expuesto en obras bien importantes.

12. Independientemente, del último caso que acabamos de citar en el número precedente, examinaremos aquel en que el fenómeno es producido por un imán en presencia de una corriente de *fuerza electro-motriz constante.*

La fórmula general de inducción (3) era:

$$dP = -(dw + dW),$$

y se reduce en este caso, á:

$$dP = -dW.$$

ó bien:

$$e.I.t = -W; \qquad (8)$$

de modo que todo el trabajo de las fuerzas exteriores está transformado íntegramente en energía calorífica, debido á la inducción.

Supóngase un polo imantado de intensidad I_m, colocado en el centro de un circuito de intensidad I, y sometido á un movimiento de rotación á su alrededor. Sean: r la distancia del polo al circuito, dl un elemento de éste, y:

$$p = \frac{I_m}{r^2}$$

la fuerza magnética en el punto en que está el elemento dl. La atracción sobre este mismo elemento será pues:

$$df = p.I.\,dl = I.\,dl\,\frac{I_m}{r^2},$$

y el trabajo despues de un tiempo t:

$$df.\,\rho.\,\theta.\,t = \frac{I.\,I_m.\,dl.\,\rho.\,\theta.\,t}{r^2} = -\,dW,$$

en que θ es la velocidad angular y ρ la distancia del elemento dl al eje de rotación.

Si se indica con α el ángulo que hace el eje de rotación con r, se tiene:

$$\rho = r.\ \text{sen}\ \alpha$$
$$dl = r.d\,\alpha$$

de modo que el trabajo elemental para la mitad del circuito, será:

$$dW = I.\,I_m.\,\theta.\,t\int_0^{\pi} \text{sen}\ \alpha.\,d\,\alpha = 2\,II_m.\,\theta.\,t,$$

ó bien según la (8):

$$e I t = 2\, H_m\, \theta\, \cancel{t},$$

de donde:

$$e = 2\, H_m\, \theta,$$

que es la expresión de la fuerza electro-motriz de inducción; ella es proporcional á la velocidad de rotación, cambia de signo con θ, pero es independiente de la fuerza electro-motriz primitiva. De aquí deduce Rysselberg, la ley antes enunciada.

13. La teoría que se ha desarrollado, en el caso de la inducción electro-magnética producida por un imán sobre una corriente, es general y se aplica también á aquel en que el imán es reemplazado por otra corriente.

Sólo el origen del campo magnético es diferente.

Entonces sea un circuito *a* alimentado por una fuente de electricidad, y cerca de él, otro circuito neutro *b* que lleve intercalado un galvanómetro.

El campo magnético producido por el conductor *a* debe ser un cilindro cuyo eje es el del mismo conductor, puesto que el flujo de fuerza que produce es idéntico al rededor de toda la superficie, y así las líneas de fuerza serán circunferencias coaxiales.

Usando de las mismas notaciones que antes, estableceremos que el trabajo de las fuerzas eléctricas en el conductor, será durante un tiempo t:

$$T = iet = i^2 R' t.$$

Pero en el instante en que se produce en el conductor *b* una corriente, las dos ejercerán una acción mútua y desarrollan un trabajo:

$$-IiKs,$$

proporcional al producto de las intensidades y á un coeficiente K que depende de las condiciones geométricas y cinemáticas de las figuras; s es el espacio teórico recorrido en la atracción ó repulsión.

Luego, en virtud del principio de la conservación de la energía, y para que las cosas vuelvan á su primitivo estado, deberá tenerse:

$$i^2R't - IiKs = o,$$

de donde:

$$i = \frac{IK}{R'}\frac{s}{t} = \frac{IK}{R'}v, \qquad (9)$$

siendo v la velocidad del deplazamiento.

La fuerza electro-motriz de inducción será, de acuerdo con la ley de Ohm:

$$e = IKv. \qquad (10)$$

14. La unidad *C.G.S.* de fuerza electro-motriz de inducción, puede definirse, como: *la fuerza electro-motriz desarrollada en una barra metálica, recta, de una unidad de longitud (1 centímetro), que se mueva en un campo magnético de 1 unidad* C.G.S. *de intensidad, con una velocidad igual á la unidad (1 centímetro por segundo), normalmente á la dirección de las líneas de fuerza y á su propia dirección.*

15. Las propiedades generales de las corrientes inducidas que estudiamos pueden reasumirse así:

1ª La cantidad de electricidad inducida es proporcional á la intensidad de la corriente inductora.

2ª La cantidad de electricidad inducida por alejamiento del inductor ó disminución en la intensidad de la corriente que lo atraviesa, es igual y de sentido opuesto á la producida por acercamiento del mismo ó aumento en la intensidad de aquella corriente.

3ª La cantidad de electricidad inducida es independiente del camino que recorra el inductor y sólo depende de sus posiciones extremas.

Si indicamos con Q la cantidad de electricidad inducida, con Ψ el flujo de fuerza y con I la intensidad, después de un tiempo t se tendrá:

$$Q = It = \frac{I_m\, l\, v\, t}{R^1}$$

y si s es el camino recorrido por el conductor y v la velocidad:

$$Q = \frac{I_m\, l.\, s.}{R^1};$$

pero ls es la superficie descrita por el mismo conductor, y esto multiplicado por I_m es el flujo de fuerza que sobre él actúa.

Pero propiamente no puede hablarse de intensidad de la corriente inducida, por cuanto durando ésta un tiempo tan pequeño, no hay período permanente. Sólo se considera la intensidad media de la corriente I_t después de un tiempo dt, de modo que se tiene:

$$d\,Q = \frac{d\,\Psi}{R'}$$

$$I_t = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R'}\,\frac{d\,\Psi}{dt}. \qquad (11)$$

$$e = \frac{d\,\Psi}{dt}.$$

16. *Sentido de la corriente. Modificación de la ley de Lenz.*—De acuerdo con lo establecido en el § 4, la ley de Lenz regirá en todos los casos de la inducción electro-magnética.

Las corrientes serán *directas:*

1° Cuando se aleje un imán ó una corrriente de un conductor.

2° Cuando se disminuya la intensidad de la corriente inductora.

Las corrientes *inversas* se obtendrán en los dos casos contrarios.

Según sea el sentido de la corriente inducida, así será la acción atractiva ó repulsiva que sobre ella ejerza el campo magnético, y en ambos casos la energía eléctrica, manifestada por la existencia de una nueva corriente, es gastada bajo forma de energía mecánica, en la acción con que dicho campo la atrae ó la repele.

Ahora bien; si se tiene en cuenta que las variaciones en las posiciones relativas del inductor y del inducido, corresponden á la variación del flujo de fuerza de aquel, se puede aún aceptar la siguiente modificación de la ley de Lenz, propuesta por Maxwell:

El sentido de la corriente inducida en un con-

ductor por la variación de un flujo de fuerza dado, es tal, que se opone en cada instante á esta variación.

Por lo tanto, la corriente cambiará de signo cuando cambie el flujo de fuerza. Según las reglas de Ampére, se conocerá en cada caso la dirección de la corriente inductora, y entonces, si aumenta el flujo de fuerza, la corriente inducida se opone á este aumento, y luego es *inversa;* en el caso contrario es *directa* ó del mismo sentido que la inductora.

El enunciado de la ley de Lenz con la modificación de Maxwell, tiene, como se vé, una expresión más científica.

17. La explicación de los fenómenos de inducción se vuelve muy fácil cuando se conoce de antemano el sistema de las líneas de fuerza en el campo magnético inductor.

Sea en primer lugar (fig. 3) un imán que sufre un deplazamiento relativo en presencia de una corriente circular y coaxial con el mismo, de manera que el movimiento se efectúe según el eje. Se conviene en representar en este caso el sistema por un haz de líneas que entran por el polo sud y salen por el polo norte. [1]

Supongamos que la corriente circular, partiendo de la posición a_1, se mueva hacia el polo norte del imán hasta pasar por éste y tomar la posición a_6. Fácil es ahora ver como pasan los hechos y como toman origen las corrientes de inducción.

---

(1) J. Bertrand. Obr. cit.

Cuando el conductor pasa de la posición a_1 á la a_2, aumenta el número de líneas de fuerza que lo atraviesan; la corriente inducida tiene el sentido indicado por la flecha en el círculo a_2, y cuando el centro del conductor coincide con el polo, la corriente inducida es máxima. Si seguimos el movimiento del circuito, podremos observar que el número de líneas de fuerza disminuye, pero como su dirección no ha cambiado, la fuerza electro-motriz conserva el mismo sentido hasta que al llegar al centro de la barra, la intensidad de la corriente se anula, el número de líneas de fuerza que corta es allí mínimo. Después de esta última posición la corriente cambia de sentido y aumenta hasta que el centro del circuito coincide con el polo sud, donde alcanza á un máximo para disminuir en seguida hasta que el número de líneas de fuerza que corta sea otra vez nulo.

En segundo lugar, supongamos que se trata de un circuito deplazado en un campo magnético uniforme. En este caso se puede avaluar con la mayor exactitud las variaciones del número de líneas de fuerza que aquel corta ó el trabajo desarrollado por las fuerzas producidas sobre una corriente de intensidad unitaria.

En efecto, en el caso de un campo magnético uniforme, las líneas de fuerza son paralelas y equidistantes. Para mayor claridad las supondremos verticales; y es evidente que las superficies de nivel que las cortan normalmente serán planos paralelos, y por lo tanto dos superficies contiguas son equidistantes y en ellas la intensidad y la fuerza electromotriz son constantes.

Ahora bien, en el campo uniforme tal como lo dejamos establecido, supongamos un circuito plano que gire al rededor de un eje horizontal; es fácil entonces de acuerdo con la ley de Biot y Savart, avaluar las fuerzas desarrolladas por el campo magnético, considerando que una corriente de intensidad unitaria lo recorra.

Podemos ahora descomponer el campo magnético en dos: el uno paralelo y el otro normal al plano que contiene la corriente inducida, y sólo el primero se tendrá en cuenta siendo nula la acción del otro, pues las fuerzas desarrolladas por él, estarán situadas en el plano mismo de aquella corriente y durante la rotación al rededor del eje no producirá trabajo alguno.

De lo dicho se deduce que la fuerza electromotriz de inducción, es á cada instante la misma que si el campo magnético se hubiese reducido al campo componente en el plano del circuito, es decir dirigido en este plano normalmente al eje de rotación.

Si se estudia la naturaleza de las fuerzas electromagnéticas puestas en acción, se vé que ellas equivalen á una cupla normal al eje de rotación cuyo momento es:

$$A \cos \varphi ,$$

y en la que se ha supuesto que la intensidad de la corriente es igual á la unidad. A es el área del circuito y φ el ángulo formado por su plano con el que determina el eje y las líneas de fuerza [1]. La fuerza electro-motriz se obtendrá multiplicando aquel momento por la velocidad de rotación.

---

[1] BERTRAND, *Theorie Mathemathique de l'ectricité*, § 139.

Si cambiamos la posición del circuito inducido, hasta colocarlo perpendicularmente á las líneas de fuerza, se tiene: $\varphi = 90°$, y el momento es nulo.

Siguiendo el movimiento, él cambiará de sentido si la corriente ficticia que hemos supuesto igual á la unidad, conserva la misma dirección; como la inducción debe siempre oponerse al movimiento real que se efectúa, la fuerza electro-motriz debe también cambiar de sentido; el campo magnético produce siempre una cupla opuesta al movimiento efectuado.

Cuando el circuito gire de un modo continuo y en la misma dirección, se llegará teóricamente á obtener una corriente variable en intensidad y dirección, desde que varía á cada instante la fuerza electro-motriz: la intensidad máxima de la corriente corresponderá á su posición en el plano vertical que determina el eje de rotación y las líneas de fuerza, disminuirá en seguida, hasta anularse para la posición horizontal. A partir de este punto la corriente cambia de sentido, aumenta proporcionalmente, llega á un máximo cuando el plano del circuito vuelve á pasar por la posición vertical, pero ahora es un máximo de sentido opuesto al primero; disminuye en seguida hasta anularse nuevamente en la posición horizontal, y aumenta en el cuarto cuadrante, para volver á las condiciones primitivas.

Fácil es calcular prácticamente el valor de la fuerza electro-motriz variable. Llamando μ la intensidad del campo, y σ la superficie del circuito, debe tenerse:

$$\Psi = \mu \sigma,$$

que es el flujo de fuerza que lo atraviesa. Para una rotación α cualquiera, después de un tiempo t, se tiene:

$$\Psi'_1 = \Psi' \cos \alpha.$$

La cantidad de electricidad inducida, la intensidad media después de un tiempo dt, y la fuerza electromotriz correspondientes, serán (15):

$$dQ = \frac{1}{R'} d(\Psi' \cos \alpha).$$

$$i = \frac{1}{R'} \frac{d}{dt} (\Psi' \cos \alpha)$$

$$e = \frac{d}{dt} (\Psi' \cos \alpha).$$

Si:

$$v = \frac{2\pi}{\tau}$$

es la velocidad de rotación del circuito, siendo τ el tiempo de una vuelta completa, se tiene:

$$\alpha = vt,$$

y por tanto el valor de Ψ'_1:

$$\Psi' \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

con lo que, la expresión de la fuerza electro-motriz de inducción, se cambia en esta:

$$e = \Psi' v \operatorname{sen} vt,$$

en la cual es fácil obtener los valores máximo y mínimo, y construir la curva que la representa: es una *sinusoide*.

18. Otro fenómeno, que algunos autores clasifican entre los que acabamos de estudiar, es la *inducción unipolar,* que no es otra cosa que el resultado de una rotación electro-magnética, de tal modo que un imán pueda girar al rededor de una corriente en virtud de la acción de las fuerzas electro-magnéticas que ellos desarrollan.

En este caso no se cambia, ni la intensidad del campo del imán, ni su distancia al conductor.

Las corrientes modificadas en virtud de la inducción unipolar, como lo ha demostrado Edlung, no pueden aceptarse como corrientes de inducción propiamente dichas, y en el sentido en que en este estudio se han considerado.

Son principalmente los autores alemanes, que han desarrollado y difundido la teoría de este fenómeno. ([1])

Para hacer ver cuan vastas son las aplicaciones de la inducción electro-magnética, citaremos las siguientes:

1. Determinación de los elementos del magnetismo terrestre.
2. Determinación de la unidad de resistencia (Ohm).
3. Determinación de las propiedades magnéticas de los cuerpos.
4. Rotaciones electro-dinámicas.
5. Rotaciones electro-magnéticas.

([1]) Vease: *Annales de Chimique et Phisique*, 1887.

6. Aplicación á la teoría de la trasmisión de la fuerza motriz.
7. Al teléfono magnético.
8. Shuntaje del galvanómetro balistico.
9. Debilitamiento en las oscilaciones de los aparatos de medida.

Estas aplicaciones pueden consultarse en las obras recientes ya citadas.

CAPÍTULO III

DE LA AUTO-INDUCCIÓN Ó SELF-INDUCCIÓN

Se ha definido anteriormente el fenómeno de la self-inducción. Cuando se hace variar la intensidad de la corriente que atraviesa un circuito cerrado, se producen en el mismo otras que se superponen y cuyos efectos tienden á oponerse á los de aquella variación, de modo que un aumento en la intensidad primitiva hace desarrollar una corriente inducida *inversa* y una disminución de la misma, una corriente inducida *directa* ó de mismo sentido que la primaria.

El abrir ó cerrar el circuito, que como hemos dicho corresponde á los casos extremos, dá lugar á las *extra-corrientes* de apertura ó de cierre, sobre la que volveremos particularmente aunque su estudio está comprendido en el caso general.

19. Cuando se hace variar la intensidad de una corriente aumentándola, por ejemplo, se observará, colocándose en ciertas condiciones, que el efecto no es instantáneo sinó que se produce en un principio otra corriente que superponiéndose á la primera es

tal, que durante un tiempo elemental *t* su fuerza *contra-electro-motriz* se opone á la fuerza electromotriz primitiva.

La explicación teórica de este hecho, debe reposar sobre los mismos principios que ya hemos establecido: la conservación de la energía y la transformación de la potencial en energía eléctrica.

Cuando se aumenta la intensidad de una corriente hay una variación en el flujo de fuerza que ella origina, y por lo tanto en su campo magnético; para un punto dado del conductor el número de líneas de fuerza que lo atraviesan, aumenta durante todo el tiempo que constituye el *período variable*.

Ahora bien, es sabido que entre dos elementos sucesivos de una corriente, se desarrollan acciones completamente análogas á las que provocan dos elementos de corrientes distintas; pero al aumentar el flujo de fuerza por la variación que hemos impuesto á la corriente primitiva, debe haber necesariamente un aumento en aquellas acciones, por que éstas son proporcionales á las intensidades de los elementos; y de esta manera se hace ya necesario un aumento de trabajo, que es el *trabajo de inducción*. Este factor que permanecía hasta ahora al estado de energía potencial, es el que se transforma en energía eléctrica; un nuevo cambio de potencial se ha producido en los diferentes puntos del campo magnético, en una palabra: el conductor queda sometido momentáneamente á la acción de una corriente de self-inducción.

Como es fácil comprender, la self-inducción producida por la variación de intensidad de la corriente puede presentarse en dos casos, según que la fuerza electro-motriz sea variable ó constante, en virtud de la ley de Ohm.

20. Un circuito atravesado por una corriente posee siempre una energía potencial intrínseca disponible, que se vá á calcular.

Cuando dos corrientes son puestas la una en presencia de la otra, ellas poseen una energía relativa que, si se define el potencial en un punto como el trabajo necesario para transportar desde el infinito hasta él una cantidad de electricidad igual á la unidad, viene á ser el trabajo que se desarrolla cuando los dos circuitos son deplazados desde su posición actual y en su estado actual hasta el infinito.

Según la fórmula de Ampère, la atracción de dos partículas eléctricas m' m, separadas por una distancia r es:

$$\pi = -\frac{m m'}{r^2}\left(1 + \varphi\right), \qquad (12)$$

en la que φ es una función que depende del movimiento relativo de los dos circuitos.

Weber expresa la misma fórmula introduciendo dos funciones α y β tales que se tenga:

$$\pi = -\frac{mm'}{r^2}\left[1 + \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right) + \beta\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right], \qquad (13)$$

y

$$\beta = -2\, r\, \alpha.$$

Siendo a una constante supóngase:

$$\alpha = -\frac{1}{2a^2}, \qquad \beta = \frac{r}{a^2},$$
$$I\,ds = \frac{2mv}{a}, \qquad I'\,ds' = \frac{2m'v'}{a}, \tag{12'}$$

en las que I, I' son las intensidades en los dos circuitos y v, v' las velocidades de m y m'. Entonces la fórmula (13) se cambia en ésta:

$$\pi = -\frac{mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right],$$

ó desarrollando y después de toda transformación:

$$\pi = -mm'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{a^2\sqrt{r}}\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

y como se tiene:

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\,\frac{1}{r}\frac{dr^2}{dt^2}}{dr},$$

podrá escribirse:

$$\pi = \frac{d}{dr}\left[\frac{mm'}{r}\left(1 - \frac{1}{2a^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)\right],$$

ó bien,

$$\pi = \frac{d\Psi}{dr}$$

siendo

$$\Psi = mm'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a^2r}\frac{dr^2}{dt^2}\right). \tag{14}$$

El potencial buscado para dos elementos de corriente, será la suma de expresiones análogas á ésta y que se obtendrán cambiando las moléculas m, m'

que corresponden á los puntos a' y a por las m_1, m_1' dos á dos.

Formemos el primer término; se tiene derivando,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{dr}{dt}$$
$$= \frac{\partial r}{\partial s} v + \frac{\partial r}{\partial s'} v' + \frac{\partial r}{\partial t},$$

en que v y v' son como antes digimos las velocidades según ds y ds'. Multiplíquese esta expresión respectivamente por mm', $m_1 m'$, mm_1', $m_1 m_1'$, introduciendo las velocidades con sus respectivos índices; al efectuar la suma de todas ellas hágase:

$$m_1 = -m,\ m_1' = -m'\ v'_1 = -v,\ v_1' = -v'.$$

y se llegará á la ecuación:

$$\left(mm' + m_1 m' - mm'_1 + m_1 m'_1\right) \frac{dr^2}{dt^2} =$$
$$8\ mm' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} vv'.$$

El potencial de la acción mútua de dos elementos de corriente será pues:

$$-\frac{4\ mm' \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}}{q^2 r} v' v.$$

Para tener el potencial total relativo de dos corrientes, suponiendo que las intensidades sean constantes, deberá escribirse sustituyendo primeramente á $mm'\ vv'$ su valor é integrando:

$$\varepsilon' = -II' \iint \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} ds\ ds'.$$

$$= -I\,I' \iint -r\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds\,ds'$$

$$= -I\,I' \int \left[-\frac{\partial r}{\partial s} + \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\,ds' \right] ds.$$

Pero si el elemento ds' se supone pertenecer á un circuito cerrado ó indefinido, el primer término del paréntesis es nulo y se tiene:

$$\varepsilon' = -I\,I' \iint \frac{1}{r}\,\frac{dr\,\frac{dr}{ds}}{ds'}\,ds\,ds'. \qquad (14')$$

Para calcular el segundo factor contenido en el integral doble, se procede así:

Sean (fig. 4):

$$ab = ds$$
$$a'b' = ds'$$

los dos elementos de corriente que forman un án gulo θ. Se tiene sucesivamente:

$$\cos\theta = \frac{a'_1\,b'_1}{b'_1\,c}. \qquad (a)$$

$$ab_1' = aa_1' + \frac{d}{ds'}(aa_1')\,ds'.$$
$$= r\cos\alpha + \frac{d.\,r\cos\alpha}{ds'}\,ds',$$

y

$$a_1'\,b_1' = \frac{d.\,r\cos\alpha}{ds'}\,ds' = -\frac{\partial.r\,\frac{dr}{ds}}{\partial s'}\,ds'.$$

Y con esto la (a) se transforma en:

$$\cos\theta = -\frac{\partial.r\,\frac{\partial r}{\partial s}}{\partial s'}.$$

El potencial buscado será:

$$\varepsilon' = I\,I' \int\int \frac{ds\,ds'}{r} \cos\theta. \qquad (15)$$

Ahora bien, si en vez de dos, consideramos una sola corriente, podemos suponer en vez de las corrientes distintas I, I', dos idénticas y de intensidad $\frac{1}{2}$; de modo que, siendo ds y ds' dos elementos de un mismo circuito, cuya distancia es d, y θ el ángulo que forman, la expresión

$$\varepsilon = -\frac{I^2}{2} \int\int \frac{ds\,ds'}{d} \cos\theta$$

representará la energía potencial propia de la corriente considerada, y haciendo:

$$L = -\int\int \frac{ds\,ds'}{d} \cos\theta, \qquad (16)$$

se tendrá:

$$\varepsilon = \frac{L\,I^2}{2}.$$

El coeficiente L sólo depende de las condiciones del conductor y será definido á su tiempo.

21. Al variar la intensidad de la corriente que atraviesa á un conductor, hemos aceptado, que en el período variable se desarrolla una nueva fuerza contra-electro-motriz, á la cual corresponderá una variación en la energía potencial propia de la misma corriente.

Si E' es aquella fuerza é I' la intensidad, al fin del tiempo dt, el producto $E' I' dt$ debe ser igual y de signo contrario á la variación de la energía potencial.

De modo, que aplicando la fórmula fundamental (3), del § 8, se tiene:

$$E'I'\,dt = -dw = -d\varepsilon$$
$$d\varepsilon = LI'\frac{dI'}{dt}\,dt,$$

y por tanto,

$$E'I'dt = -LI'\frac{dI'}{dt}dt$$
$$E' = -L\frac{dI'}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (18)$$

Es decir, que: *la fuerza electro-motriz de inducción, es igual á la variación del flujo de fuerza que atraviesa al sistema, con signo cambiado.*

La intensidad será:

$$i = \frac{E - E'}{R} = \frac{E - L\frac{dI'}{dt}}{R}.$$

Esta ecuación, integrada por un procedimiento demasiado extenso para desarrollarlo aquí, dá para valor de la intensidad, después de un tiempo t (1):

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad (19)$$

siendo e la base del sistema de logaritmos neperianos.

Como se vé, la intensidad i se compone de dos partes; la primera: $\frac{E}{R}$ que representa la intensidad

(1) M. B. Bahía: *Conferencias sobre Electro-técnica.* — Buenos Aires, 1887.

normal de la corriente considerada, y la segunda: $\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$ que representa la intensidad de la corriente inducida por self-inducción en el mismo conductor.

22. L es lo que se llama coeficiente de *self-inducción* del circuito considerado, y puede también establecerse por la ecuación:

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

según la cual, es la relación de un flujo de fuerza á la intensidad de la corriente que lo produce; y también es el flujo de fuerza que atraviesa á un circuito cuando $I = 1$.

Cuando se tiene $L = o$ en la relación (18), la corriente de self-inducción es nula, y á medida que L aumenta su fuerza electro-motriz, aumenta también, y por lo tanto tardará más el restablecimiento del régimen permanente.

Vamos á estudiar la naturaleza y variaciones del coeficiente de self-inducción, según los elementos con que se defina.

Puede establecerse con tres ecuaciones distintas; é indicándolo en cada caso, con L_1, L_2 y L_3, se tiene:

$$e = L_1 \frac{d I'}{d t},$$

$$e = \frac{d . L_2 I'}{d t},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} L_3 I'^2.$$

Si se igualan la primera y segunda, se tiene:

$$L_1 \frac{d I'}{d t} = \frac{d}{d t} (L_2 I'),$$

de donde

$$L_1 = L_2 + I' \frac{d L_2}{d I'},$$

y luego debe tenerse:

$$L_1 > L_2$$

cuando L_2 varía y aumenta con I'.

El coeficiente de self-inducción es proporcional al flujo de fuerza:

$$\Phi = L_2 I,$$

por lo tanto lo es á la permeabilidad magnética del conductor [1]. Es por esto que en el estudio de las aplicaciones de la self-inducción es indispensable tener su cuenta si la sustancia que compone el conductor es de permeabilidad magnética constante ó variable.

Por medio de las expresiones precedentes se puede llegar á tener una relación entre L_1, L_2 y L_3.

Así tomando dos ejes rectangulares, el de absísas para las intensidades de las corrientes y el de ordenadas para los flujos de fuerza que estas producen, se tendrá en cada caso:

$$L_2 = \frac{d\,\Phi}{d\,I} = tg\,\varphi.$$

En cuanto á L_1 facilmente puede sacarse de la misma figura que L_2 por simples construcciones gráficas.

Sobre el particular debe consultarse una interesante memoria de W. E. Sumpner [2].

---

(1) Es la relación $\frac{B}{I_m}$, en que $B = \frac{\Phi}{S}$: S es la sección del conductor é I_m la intensidad de campo inductor.

(2) *Philosophical Magazine*, T. XXV, 1888.

23. La corriente desarrollada por self-inducción puede provenir de la variacion en la resistencia de un circuito puesto que con ella varia la intensidad; es el caso general, y son particulares los de apertura y cierre del mismo.

Suponiendo que durante el régimen permanente se intercale en el circuito una resistencia R_1 se debe tener á los limites:

$$I = \frac{E}{R}$$

$$I_1 = \frac{E}{R + R_1}$$

puesto que la fuerza electro-motriz es constante. El valor de la intensidad en cada instante será dada según la fórmula (19) por la expresión:

$$I_t = \frac{E}{R + R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R} e^{-\left(\frac{R + R_1}{L} t\right)} \right).$$

y la cantidad de electricidad correspondiente por:

$$Q = \int_0^{\infty} I_t \, dt,$$

ó bien:

$$Q = \frac{E R_1}{(R + R_1) R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{R + R_1}{L} t} \, . \, dt$$

ó

$$Q = \frac{E L}{(R + R_1)^2} \, . \, \frac{R_1}{R}.$$

24. *Estra-corrientes de rotura y de cierre.* La teoria general es la que se ha expuesto antes para los otros casos.

Cuando se cierra el circuito que debe atravesar una corriente, el primer efecto es el establecimiento de un campo magnético y por lo tanto hay una alteración en la disposición y estructura atomico-etérea del conductor y del espacio que lo envuelve; pero este efecto sólo se consigue totalmente después del periodo variable, y entonces si la fuente productora es constante en todas sus circunstancias se obtiene recien el régimen permanente. Durante ese instante se ha desarrollado un cierto trabájo que debemos interpretar. Sabemos ya que la constitución del campo magnético de un conductor puede representarse por su correspondiente sistema de líneas de fuerza, las cuales en este caso vienen á ser circunferencias coaxiales que partiendo de un rádio nulo van agrandandose sucesivamente y cortando al conductor. Pero esta acción no puede ejecutarse sin que en ella se gaste un cierto trabajo que es invertido en vencer la resistencia que á las particulas atómico-etéreas ofrezcan dichas líneas de fuerza, y este trabajo se traduce forzosamente por una energía electrica. Tal es el origen de la extra-corriente de cierre.

Al romper el circuito pasa el fenómeno inverso. Los círculos ó líneas de fuerza se replegan por decirlo así sobre sí mismos, sus rádios van disminuyendo desde un cierto valor hasta cero y el conductor vuelve nuevamente á sus condiciones primitivas. Pero en ese tiémpo ha sucedido que los círculos de fuerza han vuelto á cortar el conductor y su campo. El trabajo que se gastó antes invirtiéndose en la extracorriente de cierre es ahora recuperado y se traduce nuevamente en la corriente de rotura. Hay pues una equivalencia de energias, que es la que determina el equilibrio.

En una palabra, la *energia eléctrica* que desarrolla la extra-corriente de rotura es la misma variación de la energia potencial que ahora se ha convertido en actual y que se conservaba en el campo magnético desde el instante en que quedó establecido el régimen permanente.

Fácil es ver ahora cuanta analogía existe entre les fenómenos de self-inducción, y los de inducción electromagnética, lo que viene á justificar en su su estudio la unidad de teorías.

25. La determinación de los coeficientes de self-inducción puede hacerse de varios modos empleando diversos procedimientos teórico-prácticos debidos á Clarck-Maxwell, Ayrtón y Perry, Ledelar y Maneuvriers, etc. Ellos no forman parte del programa de este opúsculo y se encuentran expuestos detalladamente en las obras más recientes de electricidad.

Unidad. — La Unidad *C. G. S.* de coeficiente de self-inducción es el coeficiente de self-inducción de un circuito que atravesado por una corriente de intensidad igual á una unidad *C. G. S.* produce un flujo de inducción igual á la unidad *C. G. S.* de flujo. Esta unidad se mide en centímetros y ello se establece del modo siguiente:

Según la fórmula (17) se tendría, indicando, para evitar confusión, con L_s el coeficiente de self-inducción:

$$L_s = \frac{(\varepsilon)^2}{(I)^2}.$$

Y siendo ε una energía, su unidad *C. G. S.* es:

$$\varepsilon = Q. E = M. L^2 T_1^{-2}$$

siendo Q una cantidad de eléctricidad y E una fuerza electromotriz.

Por otra parte por la fórmula de Laplace se tiene para valor de una intensidad:

$$I = \frac{fr^2}{lm}.$$

siendo: f la fuerza desarrollada por el paso de la corriente, r el rádio del círculo que esta abarca, m la intensidad magnética del campo y l la longitud de la misma.

Por lo tanto debe tenerse:

$$I = \frac{M. L. T^{-2} L^2}{L. L.^{\frac{1}{2}} M.^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

é

$$I^2 = M L T^{-2},$$

y finalmente:

$$[L_s] = \frac{M L^2 T^{-2}}{M L T^{-2}} = [L].$$

La unidad práctica de coeficiente de self-inducción es el *cuadrante* (*quadrant*), adoptada por el Congreso Internacional de Electricistas el 31 de Agosto de 1889 en Paris. [1]

---

[1] *Hospitalier* y *Vaschy*. Obras citadas.

26. *a)* El sentido de las extracorrientes está fijado en cada caso por las mismas leyes que los fenómenos ya estudiados. La extracorriente de cierre es *inversa* y la de apertura es *directa*, es decir de igual sentido que la primitiva.

b) Ya hemos dicho que en las corrientes de inducción no puede hablarse propiamente de *intensidad*, puesto que no habiendo *régimen permanente*, ella debe variar con el tiempo que dura el cual como se sabe es sumamente pequeño. Sólo se avalúa la *intensidad media*.

La cantidad de electricidad inducida por self-inducción, después de un tiempo t puede presentarse por:

$$\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \qquad (a)$$

y es proporcional á la intensidad de la corriente primitiva é inversamente proporcional al coeficiente de self-inducción.

c) Para obtener la cantidad total de electricidad correspondiente á la extracorriente se procederá como en el caso general. Debe tenerse siempre:

$$dq = I\,dt,$$

ó bien

$$Q = \int I\,dt,$$

y en el presente caso se debe integrar la ecuación (a): que representa la intensidad de la corriente después de un tiempo t; pero en todo rigor la corriente no alcanzará á su intensidad normal sinó después de un tiempo infinito de modo que:

$$Q = \frac{E}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{R}{L} t} \, . \, dt \, . \qquad (b)$$

La relación $\frac{L}{R}$ es en general muy pequeña y tiende al valor cero, por lo tanto después de un tiempo muy pequeño la intensidad real no difiere de la final sinó en una cantidad igualmente pepueña.

Supóngase que después de cierto tiempo t esa diferencia no pueda ser mayor que una cantidad dada $\frac{1}{n}$. Para determinar este tiempo tendríamos:

$$\frac{1}{n} = e^{-\frac{R}{L} t},$$

de donde

$$t = \frac{L}{R} \, l. \, n.$$

La expresión (b) tiene por valor.

$$Q = \frac{E \, L}{R^2} = \frac{E}{R} \cdot \frac{L}{R},$$

lo cual nos dice que la cantidad total de electricidad que corresponde á la extracorriente es proporcional á la intensidad de la corriente primitiva y al tiempo $\frac{L}{R}$.

El factor $\frac{L}{R}$ es lo que en este caso se llama *constante de tiempo.*

También puede decirse que la cantidad total de electricidad correspondiente á la extracorriente es la misma que si la corriente primaria tuviese una intensidad $\frac{1}{2}\frac{E}{R}$, igual á la mitad de la intensidad normal durante un tiempo $\frac{2L}{R}$.

d) Las extracorrientes de rotura y de cierre son en todo iguales y de signos contrarios.

27. Sea ahora una corriente eléctrica cuyo estado varía durante un tiempo T, y en que el valor inicial de la fuerza electro-motriz sea E_0, y E_t el valor que toma después de un tiempo *t*. Entonces el último puede representarse por una expresión de la forma: ([1])

$$E_t = E_0 \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}. \qquad (A)$$

El valor de la intensidad I_t correspondiente sería según la ley de Ohm el cuociente de la fuerza electromotriz por la resistencia del circuito, pero desde que se actúa en un estado variable, debe forzosamente producirse una fuerza contra electromotriz *e* debida á la self-inducción y cuyo valor es:

$$e = -L\frac{dI}{dt},$$

y por lo tanto:

$$I_t = \frac{E_t - e}{R} = \frac{E_t - L\frac{dI}{dt}}{R}, \qquad (B)$$

de donde:

([1]) Marcart et Joubert—Obr. cit. T. I.

$$E_t = I_t\, R + L\,\frac{d\,I_t}{dt}.$$

Integrando la expresión (B) se llega, después de un desarrollo que por su extensión omitiremos, al siguiente resultado: ([1])

$$\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \frac{4\,\pi^2\,L^2}{T^2}}}\ \text{sen}\ 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right), \qquad (C)$$

en la que φ es una cantidad de un valor tal que se tenga:

$$\text{sen}\ 2\,\pi\,\varphi = \frac{2\,\pi\,L}{\sqrt{R^2\,T^2 + 4\,\pi^2\,L^2}}.$$

La fórmula (*C*) nos dice que la intensidad de la corriente considerada después de un tiempo *t* y para el período *T*, es función del tiempo como lo era también la fuerza electromotriz.

El máximo de I_t se tendrá para:

$$2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right) = n\,\frac{\pi}{2},$$

ó bien para:

$$\frac{t}{T} = \varphi + \frac{n\,\pi}{4\,\pi} = \varphi + \frac{n}{4}$$

de donde

$$t = \varphi\,T + \frac{n\,T}{4}. \qquad (D)$$

([1]) Este desarrollo puede verse en la obra de Rysselberg antes citada, página 177.

El máximo de E_t correspondería según la fórmula *(A)* á $E_t = E_o$ es decir cuando:

$$\operatorname{sen} 2 \pi \frac{t}{T} = 1$$

y en ese caso:

$$2 \pi \frac{t}{T} = n \frac{\pi}{2}$$

de donde

$$t = \frac{n T}{4}.$$

Comparando las *(D)* y *(E)* se observará que E é I no varían de igual modo pues entre los instantes en que cada una de estas cantidades alcanza su máximo hay un retardo φ T.

Graficamente puede representarse la marcha de estas cantidades; tomando dos ejes ortogonales y siendo contados los tiempos según el eje de las absisas (fig. ~~4~~). 15

Si suponemos que el coeficiente de self-inducción del circuito sea nulo se tendrá:

$$\varphi = o$$

y la fórmula *(C)* se cambia en esta otra:

$$I_t = \frac{E_o}{R} \operatorname{sen} 2 \pi \frac{t}{T},$$

de manera que en este caso I y E varian simultáneamente y pasan por los valores máximos ó mínimos en el mismo instante.

Se ha supuesto que el circuito sea indeformable y por lo tanto que R es constante, pero de la misma fórmula (C) se deduce que la resistencia aparente que correspondería á la intensidad I_t es:

$$r = \sqrt{R^2 + \frac{4 \pi^2 L^2}{T^2}}.$$

Esta resistencia es inversamente proporcional á T. Por otra parte, L viene á ser también una resistencia suplementaria, que no sólo retarda las ondulaciones, sino que también disminuye la amplitud, es decir que tiende á disminuir la intensidad de la corriente que circularía en el mismo instante si no existiese el factor L.

28. En cuanto al cálculo teórico del coeficiente L para los diversos casos que puede presentarse en la práctica, es una operación á veces muy complicada; para cada caso en particular, pueden emplearse procedimientos más ó menos cómodos, cuyos resultados damos en seguida:

1º *Conductor rectilíneo de sección circular.* (Hospitalier).

$$L = 2\, s \left| l. \frac{2\, s}{r} - o,75 \right|,$$

siendo s la longitud y r el radio del conductor.

2º *Caso de dos hilos paralelos.* (Mascart et Joubert. T. II.)

$$L = 2 \left| l. \frac{b^2}{r\, r'} + \frac{1}{2} \right| s,$$

siendo b la distancia entre los centros de los conductores, s su longitud y r, r' sus radios.

3° *Solenoide cilíndrico.* (Mascart et Joubert. T. I.)

$$L = \frac{4 \pi NS}{s},$$

siendo N el número de espiras y S la sección del cilindro.

4° *Bobina cilíndrica arrollada uniformemente* (Id.)

$$L = \frac{4}{3} \pi^2 \frac{N^4}{s^3} (A - a) (A^3 - a^3),$$

en donde A es el radio de la capa externa y a el de la interna.

5° *Bobina anular.* (Hospitalier).

$$E = 2 \pi N^2 (A - \sqrt{A^2 - a^2}),$$

en que N es el número de espiras, A el radio de la circunferencia descrita por el centro del círculo generador del radio a.

CAPÍTULO IV

DE LA INDUCCIÓN MÚTUA

29. Se llama *corrientes de inducción mútua* á las producidas por dos corrientes de flujo de fuerza variables de una con relación á la otra.

Se comprende desde luego que la acción debe ser mútua, de modo que la variación del flujo de fuerza de una de las corrientes con respecto á la otra, produce el fenómeno y recíprocamente.

Según lo que antecede, el fenómeno de la mútua inducción se presentará en dos casos: 1° Cuando la variación del flujo de fuerza de una de las corrientes, cortando á la otra, provenga de un cambio en la intensidad misma. 2° Cuando aquella variación sea debida á un desplazamiento relativo entre los dos conductores.

Las corrientes de inducción mútua han recibido diversos nombres, según su origen. Así se llaman: *faradaícas ó voltaeléctricas,* cuando la fuerza que las produce es una pila en la que se cierra periódicamente el circuito; *leyde-electrica,* cuando la corriente variable en el inductor, es producida por la descarga de un condensador ó de una botella de

Leyden; *corrientes de Foucault*, cuando el sistema inducido es formado por *masas metálicas*, etc....

Si cada uno de los conductores puede producir sobre el otro la misma acción, resulta que las denominaciones de *circuitos primario y secundario*, se aplican indistintamente á los dos en el mismo fenómeno, por más que sus propiedades estén bien deslindadas en cada caso.

El fenómeno de la inducción mútua es, sin duda, el más complicado, porque si es la variación relativa en el flujo de fuerza de uno sobre el otro la que lo produce, también es cierto que esa misma variación produce sobre el inductor un efecto de self-inducción que viene á complicar los hechos de modo que el resultado final dará: 1º una corriente de self-inducción sobre cada circuito, si con respecto á cada uno varía el flujo de fuerza del otro, y 2º una corriente de inducción mútua; solamente se tiene en cuenta la resultante de estas dos acciones.

Con estos antecedentes y los que hemos sentado en el primer capítulo, pasaremos á la explicación del hecho y á la deducción teórica de sus leyes.

30. Consideremos dos corrientes y sean:

I, E, R, respectivamente, la intensidad, fuerza electro-motriz y resistencia en uno de los circuitos;

I', E', R', los elementos análogos del otro;

v, la velocidad de desplazamiento de los elementos de una de las corrientes con respecto á la otra.

Ahora bien; entre dos elementos de corriente se ejerce una acción electromagnética, y el trabajo desarrollado en ella despues de un tiempo dt es:

$$W = KII' v\, dt,$$

siendo K una constante cuyo valor depende de las condiciones geométricas y cinemáticas de los circuitos.

Las cosas pasan del siguiente modo: Si las dos corrientes se desplazan, una con respecto á la otra, se desarrollará un cierto trabajo mecánico para vencer mútuamente las acciones de sus campos magnéticos. Cada circuito es cortado por un campo galvánico inductor cuya intensidad varía; el número de líneas de fuerza que lo atraviesan cambia, y el trabajo gastado para ello es transformado en cada uno en energía actual manifestada por una corriente de inducción. Aun hay más: la variación brusca de la intensidad en cada uno de los circuitos, opera el fenómeno correspondiente entre sus propios elementos, pues cuando aquello sucede, cada uno de éstos es cortado por un número de líneas de fuerza distinto al de las que primeramente lo interceptaban, y el trabajo correspondiente y que debe gastarse para vencer esta acción, es transformado también en energía actual, manifestada por una extracorriente.

La sola consideración sobre la teoría del trabajo, no nos vá á permitir en este caso, la solución completa.

En efecto: Después de producido el fenómeno, las intensidades de las dos corrientes habrán cambiado y serán respectivamente i, i'. En uno de ellos, el trabajo necesario para producirlas será Ei, y en la otra $E'i'$.

Pero parte de este trabajo es transformado en energía calorífica en el mismo conductor en que opera, y parte en el trabajo mecánico de atracción ó repulsión.

Las cantidades de calor desarrolladas en los circuitos serán respectivamente:

$$Ri^2$$

y

$$R' i'^2.$$

Por lo tanto, según el principio de la conservación de la energía, se tendrá:

$$Ei + E' i' = Ri^2 + R' i'^2 + W_x. \qquad (20)$$

En esta expresión W_x representa el trabajo W, en el que se ha sustituído á I, I' respectivamente por i, i'.

Por otra parte de acuerdo con los principios antes establecidos, sobre cada circuito debe desarrollarse una corriente inducida, cuyas fuerzas contraelectrometrices

$$e = -Ki'$$
$$e' = -Ki$$

se oponen á las fuerzas electro-motrices primitivas.

Según la ley de Ohm se tiene:

$$i = \frac{E - Ki'}{R},$$

$$i' = \frac{E' - Ki}{R'},$$

de donde:

$$Ei = Ri^2 + W$$
$$E'i' = R'i'^2 + W$$

ó bien:

$$Ei + E'i' = Ri^2 + R'i'^2 + 2W$$

ecuación que es incompatible con la (20).

En este caso el principio fundado en el trabajo de las fuerzas puestas en acción parece no poder dar una explicación completa del hecho, como lo ha aceptado el Prof. Bertrand ([1]).

Pero es necesario tener en cuenta que el fenómeno se ha complicado con la self-inducción desarrollada por cada corriente sobre si misma, y que así no debe haber pérdida de energía pues toda es transformada.

De todos modos, para el primero de los conductores el flujo de fuerza que del exterior lo atraviesa varía de dos modos: 1° por la variación de la corriente del otro circuito y 2° por variación en si mismo; es esta última la que origina la modificación en la fuerza electromotriz primitiva; á ella es proporcional esta alteración según la ley general de inducción que se admitió antes.

Sean: L_1 y L_2 los coeficientes de self-inducción en los dos circuitos y vamos á ver como puede llegarse á la solución completa del problema.

Partamos de la fórmula general (3).

$$dP = -(dw + dW),$$

([1]) Bertrand. Obr. cit.

en que dP es la diferencia entre el trabajo dA suministrado á los circuitos por las fuentes eléctricas, y la energía calorífica dJ desarrollada en los mismos. dW es la variación del trabajo de las fuerzas exteriores, igual y de signo contrario al de las acciones electromagnéticas puestas en juego. y dw es la variación de la energía potencial del sistema. De modo que se tendrá:

$$- dP = dA - dJ.$$

Pero en este caso los trabajos dA y dJ después de un tiempo dt son:

$$dA = (E I + E' I')\, dt,$$
$$dJ = (R I^2 + R' I^2)\, dt,$$

y luego:

$$- dP = (E I + E' I' - R I^2 - R' I'^2)\, dt. \quad (21)$$

Por otra parte la variación dW del trabajo que desarrollan las fuerzas electromagnéticas según la forma general $\frac{1}{2} L i^2$ será en este caso:

$$dW = \frac{1}{2} (I^2\, dL_1 + I I'\, dM + I'^2\, dL_2). \quad (22)$$

y se compone de tres términos á saber: la energía propia del primer circuito, la del segundo, y la energía común:

$$\varepsilon = \frac{I I'\, dM}{2}$$

en la que M es un coeficiente llamado de *inducción mútua* sobre el que hablaremos más adelante.

En cuanto á dw es en este caso:

$$dw = \frac{1}{2} d\,(I^2 L_1 + 2\,I I' M + I'^2 L_2) \qquad (23)$$

Entonces la fórmula (3) se transforma en la siguiente:

$$E I + E' I' - R I^2 - R' I'^2 = \frac{1}{dt}\,(I^2 d L_1 + I I' d M + I'^2 d L_2)\,\frac{1}{2}$$
$$+ \frac{d}{dt}\,(I^2 L_1 + 2\,I I' M + I'^2 L_2)\,\frac{1}{2}.$$

ó bien:

$$(E - R I)\,I + (E' - R' I')\,I' = \frac{d}{dt}\,(I L_1 + M I')\,I + \frac{d}{dt}\,(I' L_2 + M I)\,I'$$

como es fácil verificar.

Luego se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} e &= (E - R I) = \frac{d}{dt}\,(I L_1 + M I') \\ e' &= (E' - R' I') = \frac{d}{dt}\,I' L_2 + M I)\,. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Los paréntesis del segundo miembro representan respectivamente los flujos de fuerza F y F' que actúan sobre los dos circuitos, y se componen como se vé del flujo propio y del que proviene del segundo conductor.

Puede pues ponerse:

$$e = \frac{dF}{dt}$$

$$e' = \frac{dF'}{dt}.$$

con lo que se justifica en este caso la ley general: *la fuerza electromotriz inducida en un conductor es igual á la variacion del flujo de fuerza sobre el mismo.*

Si suponemos constantes los coeficientes L_1, L_2 y M se tendrá por las (24):

$$RI - E = -\left\{ L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI'}{dt} \right\} \qquad (25)$$

$$R'I' - E' = -\left\{ L_2 \frac{dI'}{dt} + M \frac{dI}{dt} \right\}.$$

Estas ecuaciones dan expresiones de la forma:

$$-e = RI - E = Ae^{\rho t} + Be^{\rho' t}$$

$$-e' = R'I' - E' = A'e^{\rho t} + B'e^{\rho' t},$$

en que A, A', B, B' son coeficientes que se determinan por las condiciones relativas á los límites.

En cuanto á los valores de ρ y ρ', son las raices de: ([1])

$$\left\{ 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right\} \rho^2 + \left\{ \frac{R}{L_1} + \frac{R'}{L_2} \right\} \rho + \frac{RR'}{L_1 L_2} = o$$

que son siempre reales, y deben ser negativas pues la intensidad no puede crecer indefinidamente con el tiempo.

El primer término de la última ecuación debe pues ser positivos luego:

([1]) Mascart et Joubert. Tomo I.

$$L_1 \, L_2 > M^2;$$

porque en efecto: los coeficientes L_1 ó L_2 son los límites superiores á que tiende el coeficiente M cuando los dos circuitos iguales, atravesados por iguales corrientes se aproximan indefinidamente hasta coincidir.

En este caso el flujo de fuerza actuando sobre el circuito único sería:

$$L\,I + L\,I = 2\,L\,I,$$

y sólo para este caso se tiene:

$$L_1 \, L_2 = M^2,$$

y por lo tanto si L_1 es muy pequeño, también lo es M.

No nos extenderemos aquí sobre los casos particulares de inducción mútua que pueden presentarse bajo diversas formas y que por otra parte se hallan perfectamente tratados en las obras ya indicadas.

31. *Expresión teórica de la fuerza electromotriz de inducción mútua.* (Resal).—Sean (fig. ~~5~~) ds y ds' dos elementos de corrientes puestas una en presencia de la otra. 14

Según la fórmula de Weber (12) la atracción entre dos partículas separadas por una distancia r era:

$$\pi = -\frac{m\,m'}{r^2}\left[\,1 + \alpha\,\frac{dr}{dt} + \beta\,\frac{d^2r}{dt^2}\right]. \qquad (12)$$

Se tenía además:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{dr}{dt}.$$

ó

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}v + \frac{dr}{ds'}v' + \frac{dr}{dt}, \qquad (26)$$

en que v y v' son las velocidades de las moléculas eléctricas m y m'.

Derivando la anterior se tiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2}v^2 + \frac{d^2r}{ds'^2}v'^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{dr}{ds}\frac{dv^2}{ds} + \frac{dr}{ds'}\frac{dv'^2}{ds'}\right\} +$$
$$+ \frac{2\,d^2r}{ds\,ds'}vv' + \frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt} + \frac{dr}{ds'}\frac{dv'}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2}.$$

y sustituyendo los dos valores que preceden en la ecuacion (12) y haciendo:

$$1 + \alpha\left\{\frac{dr}{dt}\right\}^2 + \beta\frac{d^2r}{dt^2} = A$$

$$\alpha\left\{\frac{dr}{ds}\right\}^2 + \beta\frac{d^2r}{ds^2} = B$$

$$\alpha\left\{\frac{dr}{ds'}\right\}^2 + \beta\frac{d^2r}{ds'^2} = C$$

$$2\,\alpha\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + 2\,\beta\frac{d^2r}{ds\,ds'} = D$$

$$2\,\alpha\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt} = E$$

$$2\,\alpha\frac{dr}{ds'}\frac{dr}{dt} = F$$

$$\beta\frac{dr}{ds} = G$$

$$\beta\frac{dr}{ds'} = H,$$

se tiene:

$$\pi = -\frac{m\,m'}{r^2}\left[A + Bv^2 + Cv'^2 + Dvv' + Ev + Fv' + \right.$$
$$\left. + G\left\{\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \frac{dv}{dt}\right\} + H\left\{\frac{1}{2}\frac{dv'^2}{ds'} + \frac{dv'}{dt}\right\}\right].$$

Supóngase ahora que los elementos ds y ds' estén formados, cada uno, por dos partículas eléctricas:

m	de velocidad	v
m_1	—	v_1;
m'	—	v'
m_1'	—	v_1'.

Entónces, para obtener la acción mútua P de los dos elementos, sustituiremos en la expresión anterior: m por m_1; m' por m_1' y v, v' por v_1, v_1', y por lo tanto:

$$\pi' = -\frac{m_1\,m'_1}{r^2}\left\{A + Bv^2 + Cv_1^2 + Dvv_1 - Ev_1 + Fv_1' + \right.$$
$$\left. + G\left(\frac{1}{2}\frac{dv_1^2}{ds} + \frac{dv_1}{dt}\right) + H\left(\frac{1}{2}\frac{dv_1'^2}{ds'} + \frac{dv_1'}{dt}\right)\right\}$$

y sumando con la anterior y ordenando:

$$P = -\frac{1}{r^2}\,Y. \qquad (27)$$

é

$$Y = A(m + m_1)(m' + m_1') + B(m' + m_1')(mv^2 + m_1v_1^2) + .$$

Vamos á considerar las componentes P_s y P_s' de la acción ejercida por el elemento ds' sobre la partícula m y sobre m_1 según la dirección ab, para lo cual se multiplicará la expresión (27) por el coseno del ángulo que aquellas dos rectas forman, y se hará para la primera:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= o \\
m_1' &= -\,m' \\
v_1 &= -\,v' \\
v_1' &= -\,v',
\end{aligned}
$$

y después de toda reducción resulta:

$$P_s = -\frac{2mm'}{r^2}\cos\theta.\left(Dvv' + Fv' + H\frac{dv'}{dt}\right).$$

Para obtener á P_s' haremos en la precedente:

$$
\begin{aligned}
m \text{ por } m_1 &= -\,m \\
v \quad \text{»} \quad v_1 &= -\,v'
\end{aligned}
$$

y luego:

$$P_s' = -\frac{mm'}{r^2}\cos\theta\left\{Cvv' - Fv' - H\frac{dv'}{dt}\right\}.$$

De donde:

$$P_s - P_s' = -\frac{4mm'}{r^2}\cos\theta\left\{Fv' + H\frac{dv'}{dt}\right\}.$$

Si se tuviese:

$$P_s - P_s' = o$$

la acción sobre las dos moléculas m, m_1 que forman el elemento ds, no alcanzaría á tenerlas separadas, pero la diferencia entre aquellas acciones viene precisamente á ser la que mantiene esa separación: es la causa de la doble corriente que recorre el dicho elemento, y por consiguiente, el conductor de que forma parte; en una palabra, es la fuerza electromotriz elemental, debida á la acción de ds' sobre ds.

Sustituyendo en la expresión anterior F y H, por sus valores, se tiene:

$$P_s - P_s' = \sigma = -\frac{4mm'}{r^2}\cos\theta\left\{2\alpha\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}v' + \beta\frac{dr}{ds'}\frac{dv'}{dt}\right\}$$

ó bien, en virtud de la (12)' y teniendo en cuenta, que:

$$\cos\theta = -\frac{dr}{ds}$$

$$\sigma = \frac{4mm'}{r^2}\left\{2\alpha\frac{dr}{dt}v' + \beta\frac{dv'}{dt}\right\}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}.$$

$$= \frac{4mm'}{r^2}\left\{\frac{r}{a^2}\frac{dv'}{dt} - \frac{\frac{dr}{dt}}{a^2}v'\right\}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'};$$

y sustituyendo á I é I' por las mismas (12)':

$$\sigma = Ids\, I'ds'\frac{1}{r^2 vv'}\left\{r\frac{dv'}{dt} - \frac{dr}{dt}v'\right\}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

$$= \frac{II'}{r^2 vv'}\left\{r\frac{dv'}{dt} - \frac{dr}{dt}v'\right\}ds\,ds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$$

$$= \frac{I}{r^2 v}\left\{\frac{I'r}{v'}\cdot\frac{dv'}{dt} - I'\frac{dr}{dt}\right\}ds\,ds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}.$$

y si sustituimos por $\frac{I}{v}$ la relación de sus incrementos:

$$\sigma = \frac{I}{r^2 v}\left\{r\frac{dI'}{dt} - I\frac{dr}{dt}\right\}ds\,ds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}.$$

$$= \frac{I}{v}\left(\frac{d}{dt}\left\{\frac{I'}{r}\right\}\right)ds\,ds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}. \qquad (28)$$

La fuerza electro-motriz total desarrollada por la corriente inductora sobre aquella á que pertenece ds, será el integral de la expresión precedente, en la que I y v son independientes de s, y luego:

$$e = \frac{I}{v}\frac{d}{dt}\left\{I'\int\int\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}ds\,ds'\right\}.$$

32. *Cálculo teórico de los coeficientes de induc-*

ción mútua.—La unidad teórica de coeficiente de inducción mútua, como el de self-inducción, es el centímetro, en el sistema C. G. S. Prácticamente se usa el *cuadrante.*

El coeficiente M ha sido llamado, también, *potencial electro-dinámico recíproco ó de inducción mútua.*

El flujo de fuerza producido por la corriente inductora, sobre la inducida, es proporcional á la intensidad de aquélla, y á ese coeficiente M, de modo que:

$$F = IM \qquad (a)$$

ó

$$M = \frac{F}{I},$$

y por lo tanto, el coeficiente de inducción mútua de dos circuitos, es igual al flujo de fuerza, cuando la intensidad es igual á la unidad.

La energía potencial entre dos circuitos, hemos visto ántes que es proporcional al producto de sus intensidades y al mismo coeficiente, de modo que:

$$\varepsilon = -\frac{II'}{2} M,$$

y el valor determinado para M, era:

$$M = -\iint \frac{ds\,ds'}{r} \cos\theta,$$

siendo ds y ds' dos elementos de corrientes, perteneciendo cada uno á una de las consideradas y separadas por una distancia r.

Para pasar al coeficiente L de self-inducción, nos ha bastado considerar á ds y ds' como elementos de un mismo circuito.

Para comprender mejor cómo se adapta la denominación dada al coeficiente M, recordemos que la fuerza electro-motriz inducida después de un instante dt, era en general la derivada del flujo de fuerza con respecto al tiempo, es decir, que según la (a):

$$e = -\frac{d}{dt}(IM) = -\left(I\frac{dM}{dt} + M\frac{dI}{dt}\right);$$

y observemos como entra en esta fórmula el coeficiente M. El primer término del segundo miembro, representa la fuerza electro-motriz inducida que se originaría por el deplazamiento relativo de los dos circuitos; y el segundo, la fuerza electro-motriz inducida por la variación en la intensidad de una de las dos corrientes, y ésto se presenta igualmente para las dos.

Últimamente, Vaschy, en su reciente obra sobre electricidad y magnetismo, ha dado una nueva deducción del coeficiente de inducción mútua, por un procedimiento muy largo y complicado, que, á nuestro juicio, no dá mayores ventajas; pero su mérito consiste en la introducción, en los cálculos, de un nuevo elemento: *el potencial vector electro-magnético.* [1]

El cálculo teórico de los coeficientes de inducción mútua, aún para los circuitos de formas geométricas simples, es por lo general demasiado complicado y á menudo es necesario echar mano de procedimientos analíticos bien difíciles.

Hé aquí los resultados que se obtienen para los circuitos más comunes:

---

(1) Vaschy, Obr. cit. T. I.

1° *Caso de dos hilos rectos paralelos.* (Hospitalièr).

$$M = 2s\left(l.\,\frac{2s}{d} - 1\right)$$

siendo d la distancia que separa los dos circuitos y s su longitud.

2° *Dos círculos iguales y paralelos.* (Mascart et Joubert. T. II).

$$M = 4\pi r\left(1 + \frac{3d^2}{16r^2} + \ldots\right) l.\,\frac{8r}{d} - 4\pi r\left(2 + \frac{d^2}{16r^2} + \ldots\right)$$

siendo r el rádio y d la distancia de los centros.

3° *Par de bobinas concéntricas.* (Hospitalièr).

$$M = \frac{4\pi . N_1 . N_2 S'}{s}$$

siendo N_1 el número de vueltas de la bobina exterior, en una longitud s, y N_2 el número de vueltas de la bobina interior, cuya superficie es S'.

Entre las numerosas aplicaciones de los fenómenos de inducción mútua, se tiene en primera línea la de los *transformadores*, es decir, todo aparato que tenga por objeto modificar las propiedades de la energía eléctrica, tranformándola y dando lugar á otras nuevas; en segundo lugar, á la construcción de las *bobinas de inducción*, que es en el caso más general un transformador destinado á producir fuerzas electro-motrices, muy elevadas, y las hay de muchos sistemas.

Otras aplicaciones de importancia son las que se refieren á las corrientes alternativas.

TEORÍA DE LAS CORRIENTES INDUCIDAS DE DIVERSOS ÓRDENES

33. Después del descubrimiento de Faraday muchos físicos europeos y norteamericanos emprendieron el estudio de la inducción eléctrica en sus diferentes fases, y entre ellos el profesor H. de Princetown, de New-Jersey, daba á conocer en 1840 las corrientes de inducción originadas por otras ya inducidas.

Citaremos aquí la experiencia primitiva que condujo al físico norteamericano á su descubrimiento ([1]).

Princetown se valía de una serie de espirales metálicas planas, tales que la primera formaba parte del circuito de una pila y por ella circulaba una corriente que él llamaba de primer orden; sobre ésta se colocaba otra espiral *a*, cuyas extremidades estaban unidas á una tercera *b*; sobre ésta se colocaba aún otra *c*, cuyos extremos se unían á una quinta *d*, y así de seguida. Ahora bien; cuando se interrumpia, por ejemplo, la corriente en el circuito primario, donde circulaba la corriente de primer orden, se notaba por medio de galvanómetros, convenientemente dispuestos, una corriente de segundo orden en la espiral *a*; es la extracorriente de rotura que ya hemos estudiado, pero ella circula también en la

([1]) De La Rive—Obr. cit. T. I.

espiral *b*, y por inducción determina en la *c* una corriente del tercer orden, que circulando también por la *d*, produce sobre *c* una de cuarto orden, y así sucesivamente.

En este caso, todas las corrientes á partir de las de segundo orden, son contrarias á las que las producen.

Después de Princetown, M. Abria amplió las investigaciones de aquel, y colocándose en condiciones especiales, pudo notar hasta las corrientes del séptimo orden, las cuales daban lugar á dos séries de corrientes inducidas, correspondientes al cierre y rotura del primitivo circuito. Para dar una idea del sentido en que marchan, se las afecta del signo + ó — en esta disposición:

	CORRIENTE DE 2° ÓRDEN	DE 3.ᵉʳ ÓRDEN	DE 4° ÓRDEN, ETC.
Cierre del circuito.......	—	+	—
Rotura » »	+	—	+

Ese mismo autor se ocupó de estudiar extensamente la reacción mútua que las espirales producen las unas sobre las otras, y encontró que la disminución de la intensidad, no depende solamente de la intensidad de la corriente inductora, sino también de otras circunstancias tales como sus posiciones relativas con respecto al sistema inductor ó las unas con las otras.

La energía total representada por cada una de las corrientes en un sistema de diversos órdenes, debe evidentemente atribuirse á la energía gastada en cada circuito precedente, y el conjunto de todas ellas debe satisfacer á la ley de Joule.

Poco se ha adelantado hasta ahora sobre la naturaleza de estos fenómenos, ni se ha determinado los elementos de corrientes superiores, porque se consideran sin ninguna utilidad práctica; sin embargo, ellas son susceptibles de alguna aplicación.

En efecto:

En un sistema de la naturaleza del que hemos estudiado, es fácil ver que se pueden modificar convenientemente las fuerzas electromotrices y las intensidades de las diversas corrientes, según la disposición que se dé á las espiras; y como lo afirman algunos autores, puede realizarse, haciendo aplicación de estas corrientes, transformaciones en cascada muy variables. En las máquinas eléctricas, es indudable también que alguna influencia ejercen las corrientes inducidas, por lo menos las del segundo orden.

De todos modos, dado el carácter del presente trabajo, he creido oportuno anexar esta teoría á las ya expuestas.

Las propiedades de las corrientes inducidas de órdenes superiores, son análogas, según su mismo origen, á las inducidas en un circuito secundario, y análogas las leyes que las rigen.

Su duración es instantánea, como lo es la de las corrientes que las producen, y su sentido es dado en cada caso por la aplicación de la ley de Lenz.

34. Llamaremos corriente inducida de primer orden, á la producida en un circuito por una corriente primitiva alimentada por una fuente cualquiera; de segundo orden, á la producida por aquella, etc., y nos ocuparemos de las de segundo orden.

Cuando un circuito primario se cierra, por ejemplo, las corrientes inducidas de segundo orden que se producen, son dos: una originada al nacer la de primer orden y que es *inversa*, y otra al cesar y que es *directa*. En una palabra, las dos corrientes de segundo orden corresponden al *abrir* y *cerrar* el circuito de primer orden. Pero como en éste la corriente es instantánea, no hay, propiamente hablando, *régimen permanente, sino períodos variables de apertura y de cierre;* de ahí que las dos corrientes de segundo orden sean también instantáneas, y es evidente que cada una de ellas dura la mitad de las de primer orden.

La extracorriente modifica momentáneamente el espacio que la rodea, creando un campo magnético de muy poca duración, pero que siempre tardará un instante en producirse para debilitarse inmediatamente hasta volver al estado primitivo. En estas condiciones, un conductor que se encontrase bajo la influencia de tal campo, cortaría en un instante dado, un cierto número de sus líneas de fuerza, ejercitándose entre ellos una acción electromagnética; pero ello no puede hacerse sin que se desarrolle un cierto trabajo, que en virtud de la teoría que antes se expuso, debe transformarse en energía eléctrica y manifestarse bajo forma de corrientes instantáneas. Sean:

I la intensidad de la corriente primitiva;
i_1 la intensidad de la corriente inducida de primer orden;
i_2 la correspondiente á la de segundo orden; y
E_1, e_1, e_2 las fuerzas electromotrices correspondientes.

La intensidad media de la primera corriente inducida, puede escribirse así, para un instante τ:

$$i_1 = \frac{IK'}{R\tau}$$

en que K'' es un coeficiente que depende de las condiciones geométricas y cimemáticas de la figura. Se tiene también

$$e_1 = \frac{I K''}{\tau}.$$

Pero esta fuerza electromotriz que se origina por el período variable de I, también es variable en sí misma, porque la corriente inducida durando como hemos dicho, un pequeño instante, no tiene régimen permanente, pero sí sus períodos de cierre y de apertura; á estos dos períodos corresponden dos fuerzas electromotrices iguales y contrarias de segundo orden. La primera e_2, corresponderá al cierre y será por lo tanto de sentido inverso á e, ó del mismo sentido que E; la segunda e'_2 corresponderá á la apertura y será del mismo sentido que e, ó de sentido contrario á E. La ley de Lenz es, pues, siempre aplicable.

En cuanto al tiempo de duración, siendo los períodos variables de la corriente i, iguales al aumentar y al disminuir, las corrientes de segundo orden durarán cada una la mitad que aquella.

Tendremos después de un instante τ, á partir del cierre del circuito primario:

$$e_2 = \frac{i_1 K_1''}{\tau} = \frac{I K'' K_1''}{R \tau^2},$$

siendo K'''_1 un coeficiente análogo á K''.

Puede también ponerse haciendo:

$$\frac{K_1''}{R} = K'''$$

$$e_2 = \frac{I K'' K'''}{\tau};$$

y luego la fuerza electromotriz de cualquier orden, es proporcional á la intensidad primitiva.

Como es fácil ver, para un mismo tiempo las intensidades ó más bien dicho, las cantidades de electricidad en los circuitos de órdenes más elevados, son inversamente proporcionales á las potencias de τ del mismo orden.

Así las corrientes inducidas del tercer orden serán cuatro: dos que corresponden á e_2 y dos á e_2', es decir á la apertura ó cierre de cada una de las de segundo orden; y las cantidades respectivas de electricidad inducida serán iguales dos á dos y de signos contrarios correspondientemente á cuatro instantes diferentes.

De modo que se tendrá para la intensidad después del instante τ espresiones de la forma:

$$\frac{I\,\mu\,\mu'\,\mu''}{\tau^3}.$$

En la (fig. 6) se representa un sistema de diversas ordenes tomando sobre dos ejes coordenados los tiempos como absisas, y las cantidades de electricidad correspondientes como ordenadas.

BUENOS AIRES, Abril de 1891.

Abril 30 de 1891.

Pase á la Comisión de Tésis para su exámen.

SILVEYRA.
Félix Amoretti,
Secretario.

A doce de Mayo de mil ochocientos noventa y uno, reunida la Comisión Examinadora para tomar en consideración la tésis para el doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas presentada por el Ingeniero Marcial R. Candioti, resolvió autorizar su impresión porque llena todas las condiciones reglamentarias correspondientes.

Valentin Balbin.—Ildefonso P. Ramos Mejía.—Carlos M. Morales.

Puede imprimirse.

SILVEYRA.
Félix Amoretti,
Secretario.

PROPOSICIONES ACCESORIAS

1ª Cuando el área del triángulo formado por las tangentes de un punto móvil á una elipse, y la cuerda de los contactos, es constante, dicho punto describe otra elipse semejante y semejantemente dispuesta á la primera.

2ª Dos connos tienen sus vértices coincidentes, sus ejes forman un ángulo recto y sus superficies son tangentes. ¿Cuál es la condición para que un plano secante paralelo al de los ejes produzca dos hipérbolas conjugadas?

3ª El volúmen mínimo de la pirámide formada por tres planos tangentes á un cono recto y por el plano de la base de este es:

$$r^2 h \sqrt{3}.$$

siendo r el rádio y h la altura del cono.

4ª Si en un triángulo circunscripto á un círculo

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

dos de sus vértices se mueven sobre otro círculo

$$R^2 = (x + d)^2 + y^2,$$

el lugar del tercer vértice es una cónica inscripta en el cuadrilátero formado por las cuatro tangentes comunes á los dos círculos.

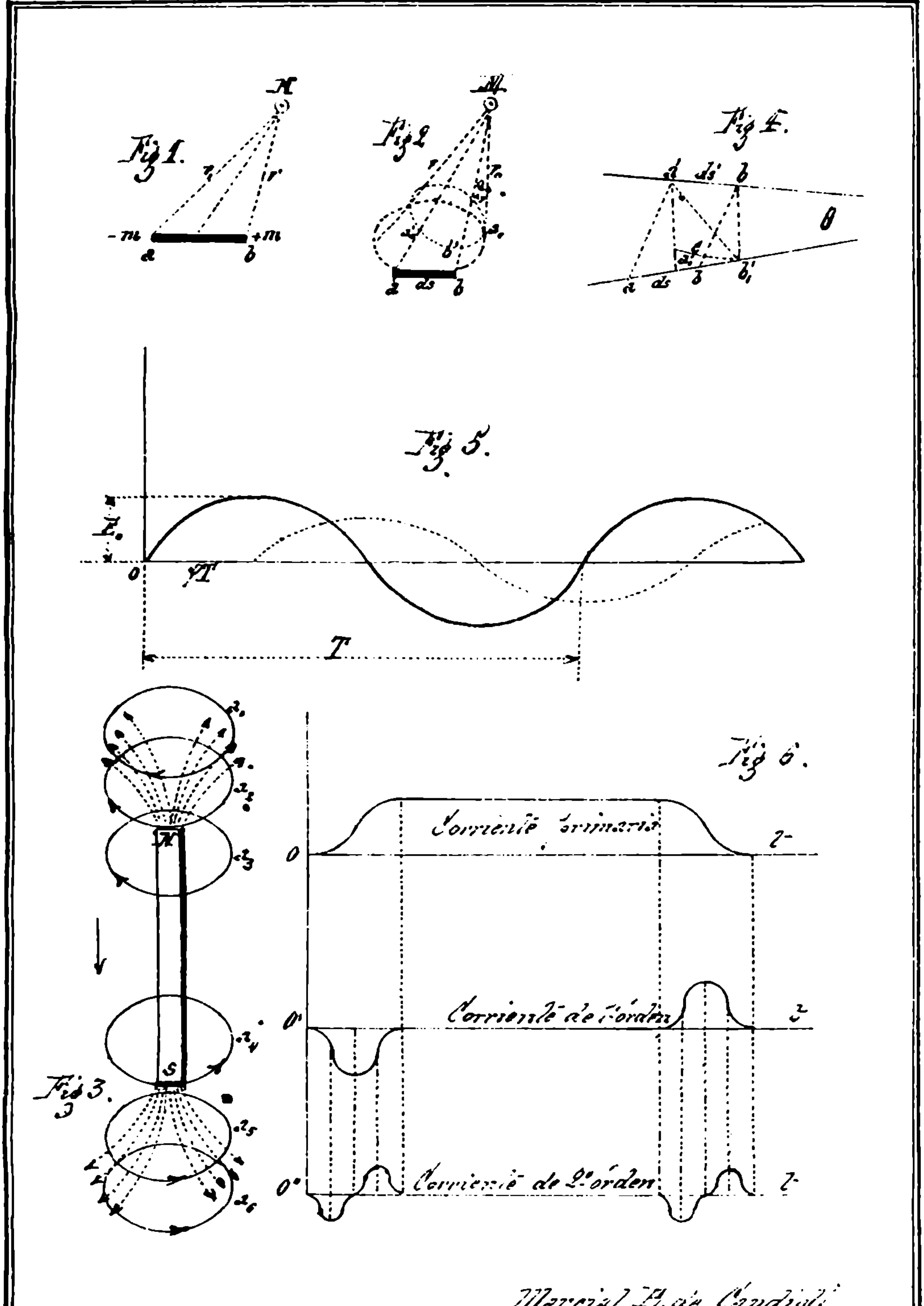
5ª Una cuerda elástica uniforme en su estado natural se halla suspendida de uno de sus extremos que es fijo, y tiene un peso dado en el otro; se pide el alargamiento de la cuerda teniendo en cuenta su peso propio.

6ª Hallar el centroide del lazo de la Lemniscata de Bernouilli cuya ecuación es: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

ERRATA

Pág. 31, línea 17, en vez de *ll* léase *s*.

Teoría Matemática de la Inducción Eléctrica.



Marcial H. de Candioti