

## Tesis de Posgrado

# Sobre los métodos de resolución aproximada de ciertas ecuaciones de la Físicomatemática

Sadosky, Manuel

1940

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Sadosky, Manuel. (1940). Sobre los métodos de resolución aproximada de ciertas ecuaciones de la Físicomatemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_0253\\_Sadosky.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0253_Sadosky.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Sadosky, Manuel. "Sobre los métodos de resolución aproximada de ciertas ecuaciones de la Físicomatemática". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1940. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_0253\\_Sadosky.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0253_Sadosky.pdf)

Tesis

253

Buenos Aires 30 de setiembre de 1940.

Señor Decano de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires Ingeniero Luis M. Igartúa.

S/D.

FOFNA

Tengo el agrado de presentarle cuatro ejemplares de mi tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, cumpliendo la disposición del artículo 333 del Digesto de la Facultad. La tesis se titula "Sobre los métodos de resolución aproximada de ciertas ecuaciones de la Fisicomatemática", de acuerdo al tema aprobado oportunamente por la Comisión de Tesis.

Debo en esta oportunidad, dejar expreso mi agradecimiento a los doctores Esteban Ferradas y Julio Rey Pastor por las frecuentes y útiles sugerencias orientadoras e indicaciones bibliográficas que de ellos he recibido durante la realización de mi trabajo.

Asimismo considero un deber manifestar mi gratitud a todos los profesores de quienes he recibido enseñanzas y consejos durante la carrera y en el curso de mis estudios, particularmente a los doctores Teófilo Isnardi, Juan C. Vignaux, Juan Blaquier y Agustín Durañona y Vedia.

Saludo al Señor Decano con mi consideración más distinguida.

Samuel Sadosky.

# FREDHOLM

"Los problemas de física matemática se llevan, casi todos, a un tipo común. A Fredholm corresponde el mérito de haber encontrado un método general y riguroso que es aplicable a todos. Consiste, en último análisis, en tratar las ecuaciones integrales y diferenciales lineales como un sistema de una infinidad de ecuaciones de primer grado con una infinidad de incógnitas. Entonces la resolución aparece como reducida al cociente de dos expresiones, análogas a determinantes.

Estos determinantes se representan a su vez en forma de series; el primer término de cada una de estas series es una integral simple, el segundo una integral doble y así sucesivamente. Aun cuando las series son extremadamente convergentes, aun cuando la ley de formación de los términos es elegante y simple, se presentan para el cálculo numérico dificultades casi insuperables.

También el método de Fredholm, excelente para demostrar rigurosamente la posibilidad del problema, lo que era considerado entonces como extremadamente difícil, quizá excelente para descubrir ciertas propiedades analíticas de la solución, aun cuando en este aspecto no lo haya demostrado, no ha sido empleado por el cálculo numérico y no parece que se lo empleará en su forma actual."

Henri Poincaré Prefacio a "OEUVRES" de  
Walter Ritz

Paris, 1911.

SOBRE LOS METODOS DE RESOLUCION APROXIMADA DE  
CIERTAS ECUACIONES DE LA FISICAMATEMATICA.

I N T R O D U C C I O N

1- Los problemas de la fisicamatemática y de la técnica conducen a ecuaciones diferenciales que excepcionalmente son resolubles exactamente con los métodos y las fórmulas que se utilizan en las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad.

Se impone, en consecuencia, el estudio de métodos de resolución aproximada. En los últimos años, en la técnica, se han utilizado cada vez más los procedimientos numéricos. El empleo de las máquinas de calcular ha simplificado muchas tareas engorrosas haciendo frecuentemente posible la resolución de ecuaciones en derivadas ordinarias y parciales, antes prácticamente irresolubles.

Aun la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales con coeficientes variables requiere el uso de aproxi-

mados.

2 - Desde el punto de vista teórico hay dos problemas que resolver; primero: la convergencia del proceso de aproximación y segundo: el cálculo del error cometido en el procedimiento aproximado.

El primero es un problema de una dificultad teórica considerable puesto que se trata de una convergencia funcional, ya que se debe demostrar que la solución aproximada converge hacia la solución exacta en todos los puntos del recinto en que se opera.

El segundo problema es de gran importancia en las aplicaciones, puesto que el saber que un procedimiento es convergente no permite valorar el grado de aproximación. Como hemos dicho antes, al no conocerse la solución exacta no existe punto de referencia al que comparar la solución aproximada que se calcula y es necesario utilizar métodos que permitan "encerrar" la solución exacta entre dos soluciones aproximadas una por exceso y otra por defecto.

3 - Los procedimientos más usuales de resolución aproximada son dos: el de Ritz y el de las diferencias finitas.

El primero consiste en considerar la ecuación diferencial como una ecuación de Euler de un problema de cálculo de variaciones y resolver este problema por métodos directos, esto es, calculando el mínimo de una cierta integral.

El segundo consiste en substituir en un número discreto de puntos, la ecuación diferencial por expresiones en diferencias que se le aproximen, llevándose así el problema a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

En realidad cada problema lleva implícito, en cierta forma, el método adecuado de resolución. Y si en los problemas en los que los valores de contorno están expresados por una función continua es indicado el uso del método de Ritz, para el caso en que los valores en el contorno están dados en un número discreto de puntos, el procedimiento de las diferencias finitas resulta especialmente apropiado.

4 - El procedimiento de Ritz, da mediante la resolución aproximada del problema de mínimo una solución por exceso, puesto que la clase de funciones con las que se opera, es un grupo particular entre las posibles.

La resolución aproximada de otro problema de mínimo, analogo al anterior, pero con menos exigencias, permite obtener -como lo señalan Courant y Trefftz- soluciones por defecto, con lo cual se logra acotar la solución exacta.

El método de Ritz tiene algunas variantes de las que mencionamos las de Galerkin y la de los mínimos cuadrados.

5 - La resolución del sistema de ecuaciones a que conduce el método de las diferencias finitas es engorrosa en cuanto el número de puntos considerados es un poco elevado. Por ello se utilizan, en el caso bidimensional, procedimientos que como el de Poincaré-Liebmann se basan en propiedades especiales de ciertas funciones, con lo cual se consigue simplificar considerablemente el proceso resolutivo.

En otros casos, como lo indica Collatz, se utiliza un número reducido de puntos mejorando la aproximación de las derivadas de orden superior.

6 - Las dificultades que se presentan para la resolución analítica del problema del potencial en el plano, ha impulsado a muchos técnicos a valerse de la "analogía de la membrana", en virtud de la cual la solución está dada por la medición experimental de las ordenadas alcanzadas por una membrana de jabón sujeta a satisfacer ciertas condiciones de contorno.

Como las ecuaciones de la membrana y del potencial no son las mismas, hemos analizado esta cuestión haciendo notar que la mencionada analogía podrá usarse solo en casos apropiados.

7 - De entre todos los casos de resolución del problema de Dirichlet, el del círculo tiene importancia excepcional. En efecto: según el teo-

rema fundamental de la representación conforme (Riemann) es posible representar cualquier recinto en un círculo y como la propiedad de una función de ser armónica se conserva en las transformaciones conformes, el círculo presenta, en definitiva, el caso cuyo caso cuya solución interesa primordialmente.

Para el caso del círculo, la integral de Poisson resuelve completamente el problema, desde el punto de vista teórico y práctico.

Hemos preparado para el cálculo práctico de la integral de Poisson tablas numéricas que permiten calcular rápidamente el valor de la integral para cualquier punto interior del círculo unitario.

8 - También tiene importancia para el cálculo numérico de la integral de Poisson el estudio de las derivadas en las distintas direcciones y en particular saber si la acotación de la derivada de la función de contorno es suficiente para la acotación de las derivadas en el interior. Mediante un ejemplo demostramos que la respuesta a esa cuestión es negativa.

9 - En este trabajo se han expuesto sistemáticamente los diversos procedimientos antes mencionados e incluido las tablas que hemos preparado.

El escaso desarrollo que ha tenido el estudio de este aspecto de las matemáticas en nuestro país, nos impulsa a dar con algún detalle los métodos resolutivos y a insertar ejemplos numéricos aclaratorios con el fin de que este trabajo pueda ser utilizado por los que necesitan aplicar efectivamente los métodos aproximados.

Damos también, en todos los casos, la bibliografía fundamental a la que deberá recurrirse para estudios más profundos.

Capítulo I - EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

1: EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

El método de Picard de las aproximaciones sucesivas resuelve, desde el punto de vista teórico, el problema de la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el caso en que las condiciones iniciales sean dadas en el origen del intervalo de integración.

Tal es lo que ocurre, por ejemplo, en el problema balístico en donde se da el valor de la ordenada y de la velocidad en el origen de los tiempos.

La adaptación del método de Picard para la integración práctica de las ecuaciones diferenciales se hace con diferentes variantes, lo que origina los métodos de resolución aproximada de Adams, Moulton, etc.<sup>(1)</sup>, mediante los cuales se construye paso a paso la curva integral.

Un problema enteramente diferente se plantea cuando los datos iniciales son condiciones en los dos extremos del intervalo de integración.

---

(1) Vease J. B. Scarborough: "Numerical mathematical Analysis" p. 218 a 282, (1930) o nuestro trabajo sobre "Métodos numéricos de integración aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias".



Tal es lo que sucede en el problema de la línea elástica o en el problema de la cuerda vibrante. En estos casos no es posible ir construyendo paso a paso la curva integral, sino que es necesario calcular una primera solución aproximada en todo el intervalo y mejorarla posteriormente.

Esto se logra con el método de diferencias finitas o con el método de Ritz que estudiaremos sucesivamente.

Sea dada una ecuación diferencial lineal de orden  $n$

$$A_0(x) \frac{d^m y}{dx^m} + A_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_m(x) y = f(x) \quad (1)$$

con las  $n$  condiciones de contorno:

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)] = \gamma_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2)$$

donde  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  son constantes dadas y  $a$  y  $b$  son los extremos del intervalo de integración.

El método de las diferencias finitas consiste en reemplazar las derivadas de la ecuación (1) por combinaciones lineales de las ordenadas correspondientes a diversos valores de  $x$  del intervalo de integración.

Se divide el intervalo de integración ( $a, b$ ) en  $n$  partes, iguales o desiguales. Si son iguales la longitud de cada sub-intervalo será  $h = \frac{b-a}{n}$ . En cada uno de los puntos de división se impone la condición de que se verifique la ecuación en diferencias finitas que ha de sustituir a la ecuación diferencial cuando se reemplazan las derivadas por las combinaciones lineales de ordenadas antes mencionadas.

Se forma así un sistema de ecuaciones lineales cuya solución da

un conjunto de ordenadas aproximadas.

La posibilidad de aproximar las derivadas por expresiones lineales que contengan solamente ordenadas, se establece mediante el siguiente

**Teorema** <sup>(1)</sup> Para cada expresión diferencial

$$L(y) = A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_m y \quad (3)$$

existen expresiones finitas que coinciden con ellas hasta un cierto orden  $r \geq m$  del tipo

$$\sum_{j=-a}^b C_j y_j \quad (4)$$

con  $y_j = y(x_j) = y(x_0 + jh)$

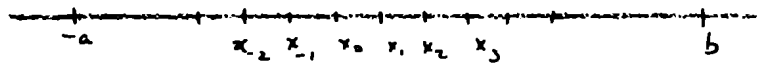
**Demostración:** Dado el caracter lineal de (3) basta considerar un solo término

$$\frac{d^i y}{dx^i}$$

Estableciendo una red de puntos  $x_p = x_0 + ph$ ,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , en virtud del desarrollo en serie de Taylor se tendrá:

$$y_j = y_0 + jh y'_0 + \frac{j^2 h^2}{2!} y''_0 + \dots + \frac{j^{(r+1)} h^{(r+1)}}{(r+1)!} y^{(r+1)}(x_0 + \vartheta h)$$

En el intervalo considerado



la suma (4) será entonces

---

(1) L. Collatz: Das Differenzen verfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen. Schriften des math. Seminars u. des Instituts f. angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. 3. 1935.

$$\sum_{j=a}^b C_j y_j = y_0 \left[ C_{-a} + \dots + C_{-1} + C_0 + C_1 + \dots + C_b \right] +$$

$$+ h y_0' \left[ -a C_{-a} + \dots - C_{-1} + C_1 + \dots + b C_b \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{2!} y_0'' \left[ a^2 C_{-a} + \dots + C_{-1} + C_1 + \dots + b^2 C_b \right] +$$

$$+ \frac{h^r}{r!} y_0^{(r)} \left[ (-a)^r C_{-a} + \dots + (-1)^r C_{-1} + C_1 + \dots + b^r C_b \right] +$$

$$+ \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \mathcal{D} \left| y_{(x)}^{(r+1)} \right|_{\max.} \sum_{j=-a}^b |v^{r+1} C_j| \quad \text{con } |\mathcal{D}| \leq 1 \quad (5)$$

Para que este desarrollo coincida con  $\frac{d^i y}{dx^i}$  deben anularse todas las expresiones entre corchetes, excepto la correspondiente a  $y_0^{(i)}$  que debe igualarse a  $\frac{i!}{h^i}$ . El sistema así formado con las  $C_n$  como incógnitas tiene solución única puesto que el determinante fundamental es distinto de cero puesto que es de Vandermonde y tiene todos los elementos distintos.

En particular se obtiene para la primera y segunda derivada las siguientes fórmulas:

$$y_0' = \frac{p!^2}{h} \sum_{j=1}^p \frac{(-1)^{j+1}}{j^{(p-j)}!} [y_j - y_{-j}] + \frac{\mathcal{D} h^{2p}}{(2p+1)!} \left| y_{(x)}^{2p+1} \right|_{\max.} \left\{ 2p! \sum_{j=1}^p \frac{j^{2p}}{(p-j)! (p+j)!} \right\} \quad (6)$$

$$y_0'' = -\frac{2}{h^2} \sum_{j=1}^p \frac{1}{j^2} y_j + \frac{2p!^2}{h^2} \sum_{j=1}^p \frac{(-1)^{j+1}}{j^2 (p-j)! (p+j)!} [y_j + y_{-j}] + \frac{\mathcal{D} h^{2p}}{(2p+2)!} \left| y_{(x)}^{2p+2} \right|_{\max.} \left\{ 4p! \sum_{j=1}^p \frac{j^{2p}}{(p-j)! (p+j)!} \right\} \quad (7)$$

Las primeras aproximaciones <sup>(1)</sup> que resultan de estas fórmulas son para  $p=1$  :

$$y_0' = \frac{y(x_0+h) - y(x_0-h)}{2h} \quad (6')$$

(1) Una tabla de expresiones finitas puede verse en el trabajo antes citado de Collatz o en "Formelsammlung zur praktischen Mathematik" de G. Schulz. S. Göschen N<sup>o</sup> 1110 (1937).

$$y_0'' = \frac{y(x_0+h) - 2y(x_0) + y(x_0-h)}{h^2} \quad (7')$$

y para  $p=2$  :

$$y_0' = \frac{-y(x_0+2h) + 8y(x_0+h) - 8y(x_0-h) + y(x_0-2h)}{12h} \quad (6'')$$

$$y_0'' = \frac{-y(x_0+2h) + 16y(x_0+h) - 30y(x_0) + 16y(x_0-h) - y(x_0-2h)}{12h^2} \quad (7''')$$

### Acotación del error.

Llamando  $Y$  a la solución exacta de la ecuación diferencial (1) e  $y$  a la solución del sistema lineal

$$\sum_{j=-a}^b C_j y_j = f(x_i) \quad i = 0, \pm 1, \pm 2,$$

que la reemplaza; el error cometido al considerar  $y$  como solución de (1), será en el punto  $x_i = x_0 + ih$

$$\varepsilon_i = y_i - Y(x_i)$$

En ese punto es

$$\sum C_j y_j = f(x_i)$$

y por ser  $\sum C_j y_j = L(y_i) + \text{term. compl.} = f(x_i) + \text{term. compl.}$

resulta restando las dos últimas igualdades:

$$\sum C_j \varepsilon_j = - \text{term. compl.}$$

Por tanto para la determinación de los errores en los diferentes puntos de la red, se debe formar un sistema con los mismos coeficientes  $C_j$ , sistema que es resoluble como ya se ha visto, por la regla de Cramer.

EJEMPLOS

a) Sea integrar la ecuación

$$y'' - y = 0$$

con las condiciones de contorno

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

Dividimos el intervalo en cuatro partes:

$h = \frac{1}{4}$ , y aplicamos la fórmula (7'). El

término complementario será entonces

$$\frac{h^2}{12} \int |y^{(4)}|_{\max}$$

Haciendo sucesivamente  $x = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$  se tiene por ser  $y'' = y$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 y_0 - 33 y_1 + 16 y_2 = 0 \\ 16 y_1 - 33 y_2 + 16 y_3 = 0 \\ 16 y_2 - 33 y_3 + 16 y_4 = 0 \end{array} \right.$$

En este sistema son datos  $y_0 = 0$ ,  $y_4 = 1$ . Resuelto nos da:

$$y_1 = 0.2151$$

$$y_2 = 0.4437$$

$$y_3 = 0.7000$$

Para calcular los errores es necesario formar un sistema equivalente

$$16 \epsilon_0 - 33 \epsilon_1 + 16 \epsilon_2 = \alpha$$

$$16 \epsilon_1 - 33 \epsilon_2 + 16 \epsilon_3 = \alpha$$

$$16 \epsilon_2 - 33 \epsilon_3 + 16 \epsilon_4 = \alpha$$

$$\alpha = \frac{h^2}{12} \int [y^{(4)}]_{\max}$$

$\epsilon_0$  y  $\epsilon_4$  son nulos, y los restantes resultan, por ser  $y^{(4)} = y'' = y$ ,

$$|\alpha| < \frac{1}{12 \times 16}$$

$$\epsilon_1 < 0.005$$

$$\epsilon_2 < 0.005$$

$$\epsilon_3 < 0.007$$

Utilizando la fórmula (7'') en la cual el término complementario es  $\frac{h^4}{24} \mathcal{D} [y^{(4)}]_{max}$ . se obtiene una segunda aproximación.

Con la misma división del intervalo (0,1), se obtiene haciendo sucesivamente  $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{4}$  :

$$\begin{cases} -y_3 + 16 y_2 - 30 y_1 + 16 y_0 - y_{-1} = 12 h^2 y_1 \\ -y_4 + 16 y_3 - 30 y_2 + 16 y_1 - y_0 = 12 h^2 y_2 \\ -y_5 + 16 y_4 - 30 y_3 + 16 y_2 - y_1 = 12 h^2 y_3 \end{cases}$$

Este sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas :  $y_{-1}, y_1, y_2, y_3, y_5$  ; puede resolverse eliminando, por ejemplo, la primera y la última, de las ecuaciones para lo cual se aplica la primera aproximación (fórmula 7'), para  $x = 0$  y  $x = 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} [y_1 - 2y_0 + y_{-1}] &= 0 \\ \frac{1}{h^2} [y_5 - 2y_4 + y_3] &= 1 \end{aligned}$$

lo cual da:  $y_{-1} = -y_1$  e  $y_5 = \frac{33}{16} - y_3$

El sistema se reduce a:

$$\begin{cases} -(29 + \frac{3}{4}) y_1 + 16 y_2 - y_3 = 0 \\ 16 y_1 - (30 + \frac{3}{4}) y_2 + 16 y_3 = 1 \\ -y_1 + 16 y_2 - (29 + \frac{3}{4}) y_3 = -16 + \frac{33}{16} \end{cases}$$

cuya solución suministra los siguientes valores :

$$y_1 = 0.214957$$

$$y_2 = 0.443512$$

$$y_3 = 0.699872$$

En este ejemplo, se pueden verificar fácilmente los resultados obtenidos, puesto que se conoce la solución exacta

$$y = \frac{\mathcal{L}h x}{\mathcal{L}h 1}$$

Resulta

x	1ª aproximación	2ª aproximación	sol. exacta
0.25	0.2151	0.21496	0.214897
0.50	0.4437	0.44351	0.443409
0.75	0.7000	0.69987	0.699669

-----

b) Consideremos el problema de valores propios

$$y'' + \lambda xy = 0 \quad (8)$$

con las condiciones de contorno

$$y(0) = y(1) = 0$$

Esta ecuación, a pesar de su aspecto tan simple, no se puede integrar en forma "cerrada" de acuerdo a los métodos corrientes y se impone tratarla con los métodos aproximados <sup>(1)</sup>.

1ª aproximación:

Dividiendo el intervalo ( 0,1 ) en 4 partes iguales

se tiene:

---

(1) Picard en "Lecons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équation différentielles" (1930), estudia la ecuación

$$y'' + \lambda A(x) y = 0 \quad y(a) = y(b) = 0$$

Aplicada la acotación que se obtiene para los  $\lambda_n$  del ejemplo que estamos considerando, se obtiene:

$$n^2 \pi^2 < \lambda_n < \infty$$

que como se ve, es poco precisa.

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} [y_2 - 2y_1 + y_0] + \lambda \cdot \frac{1}{4} \cdot y_1 = 0 \\ \frac{1}{h^2} [y_3 - 2y_2 + y_1] + \lambda \cdot \frac{2}{4} \cdot y_2 = 0 \\ \frac{1}{h^2} [y_4 - 2y_3 + y_2] + \lambda \cdot \frac{3}{4} \cdot y_3 = 0 \end{cases}$$

La condición de compatibilidad del sistema ( $\Delta = 0$ ) conduce a la ecuación

$$3z^3 - 44z^2 + 160z - 1280 = 0 \quad (z = \lambda h^2)$$

cuyas raíces son:  $\lambda_1 = 17,92$        $\lambda_2 = 63,84$        $\lambda_3 = 153,12$

2ª aproximación:

La segunda aproximación (fórmula 7') da los siguientes valores propios

$$\lambda_1 = 18,92 \quad \lambda_2 = 77,82 \quad \lambda_3 = 191,03$$

Solución exacta

Sustituyendo en la ecuación (8),

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

se deduce la ley de formación de los términos

$$a_n = - \frac{\lambda a_{n-3}}{n(n-1)}$$

Por consiguiente la solución es

$$y = a_0 \left[ 1 - \frac{\lambda}{6} x^3 + \frac{\lambda^2}{180} x^6 - \dots \right] + a_1 \left[ x - \frac{\lambda}{12} x^4 + \frac{\lambda^2}{104} x^7 - \dots \right]$$

Las condiciones de contorno  $y(0) = y(1) = 0$  determinan  $a_0 = 0$  y

$$1 - \frac{\lambda}{12} + \frac{\lambda^2}{304} - \frac{\lambda^3}{45360} + \frac{\lambda^4}{7.076.160} - \dots = 0$$

Las raíces de esta serie son los valores propios del sistema.



Aplicando el método de Graeffe o el método de Whittaker<sup>(1)</sup> se obtiene como valor del menor valor propio

$$\lambda_1 = 15,956$$

---

(1) Para ambos métodos ver el excelente libro de A/ I/ Whittaker y Robinson "The calculus of observations" Capítulo VI.



Esta expresión equivale a reemplazar la función armónica  $u(x,y)$  por un polinomio de tercer grado

$$P(x,y) = a_0 + a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3.$$

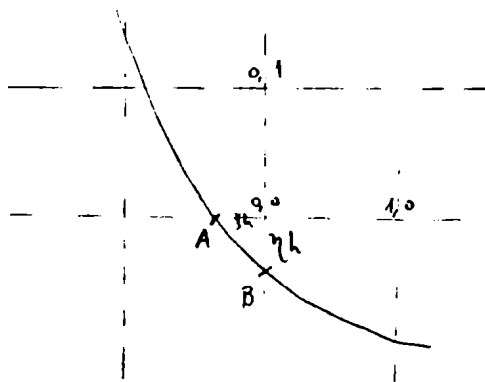
puesto que en la expresión del error solo intervienen las derivadas de cuarto orden.

Analogamente, empleando la fórmula:

$$20 u_{0,0} = 4( u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1} ) + ( u_{2,0} + u_{-2,0} + u_{1,1} + u_{-1,-1} )$$

se obtiene una aproximación de séptimo grado. En los casos en que se requiere realizar un cálculo de gran exactitud es conveniente emplearla siempre que los datos de contorno sean suficientemente precisos.

Si el recinto  $R$  tiene un contorno cualquiera, puede ocurrir que deban considerarse algunas mallas no cuadradas.



Sea por ejemplo, el caso de la figura.

En la determinación del laplaciano en el punto  $O(0,0)$  aparecen los valores de  $u$  multiplicados por ciertos factores de peso, provenientes de la asimetría con que están distribuidos los valores conocidos en torno al punto  $O(0,0)$ . Resulta

$$\Delta u = \frac{\eta(\eta+1)u_{2\xi} + \xi\eta(\eta+1)u_{2\eta} + \xi(\xi+1)u_{2\xi} - \eta(\eta+1)\xi(\xi+1)u_{0,0}}{2h^2\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)}$$

siendo  $\xi$  y  $\eta$  las medidas de OA y OB con respecto a  $h$ .

Para el caso  $\Delta u = 0$ , resulta

$$u_{0,0} = \frac{\xi\eta}{\xi+\eta} \left[ \frac{u_\xi}{\xi(\xi+1)} + \frac{u_{1,0}}{\xi+1} + \frac{u_\eta}{\eta(\eta+1)} + \frac{u_{0,1}}{\eta+1} \right] \quad (14)$$

### El problema de Dirichlet

Resolver el problema de Dirichlet en un recinto  $R$  limitado por un contorno  $C$  es hallar una función  $u(x,y)$  tal que en el interior del recinto  $R$  verifique la ecuación

$$\Delta u = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

y en el contorno tome un conjunto de valores prefijados.

Este problema se plantea en multitud de cuestiones de mecánica, electricidad, hidráulica, elasticidad, fotoelasticidad, etc. Muchas veces los valores que se dan sobre el contorno son solo conocidos en un número finito de puntos, y en este caso el procedimiento de las diferencias finitas es particularmente indicado para resolver el problema.

Supongamos que el recinto  $R$  admita una red de malla cuadrada. Los valores en el contorno son datos y los valores correspondientes a los puntos interiores, incógnitas.

Como se trata de determinar una función armónica  $u(x,y)$  en cada punto  $(i,j)$  interior debe verificarse la ecuación (11) en diferencias correspondiente a  $\Delta u = 0$ . Se forma así el sistema lineal

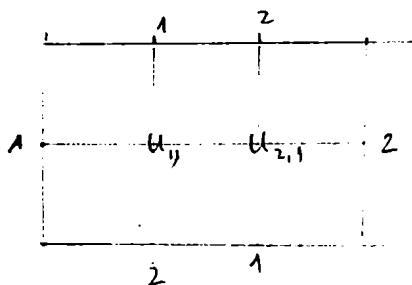
$$u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (i,j=1,2,3,\dots) \quad (15)$$

cuya solución da valores aproximados de la función poten-

cial buscada. <sup>(1)</sup>

Este sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas tiene solución única puesto que el determinante principal es distinto de cero. En efecto; el sistema homogéneo correspondiente representa el caso de valores nulos en el contorno y como el máximo y el mínimo de la función potencial están en el contorno, la solución es idénticamente nula, lo cual exige que el determinante sea distinto de cero.

Por ejemplo, en la figura se dan los valores de contorno correspondientes a un problema particular y se trata de resolver el problema de Dirichlet correspondiente.



dientes a un problema particular y se trata de resolver el problema de Dirichlet correspondiente.

Aplicando la ecuación (15) a los puntos  $(1,1)$  y  $(2,1)$  se obtiene el

sistema

$$\begin{cases} u_{2,1} - 4u_{1,1} = -4 \\ 4u_{2,1} - u_{1,1} = 5 \end{cases}$$

cuya solución da  $u_{1,1} = \frac{21}{15}$  ;  $u_{2,1} = \frac{24}{15}$  .

Si se desea una determinación mejor debe elegirse una malla más densa, por ejemplo con  $h = \frac{1}{2}$ .

(1) J. Le Roux ha demostrado que las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales tienden a la solución de la ecuación diferencial cuando  $h$  tiende a cero. "Journal des mathématiques pures et appliquées" (6). 10, 189 (1914).

Otra demostración puede verse en la memoria de R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy en Math. Ann. 100 (1928), p. 32.

Resultan así 15 puntos interiores y en consecuencia 15 ecuaciones con 15 incógnitas. La resolución de tales sistemas es sumamente engorrosa y los errores fáciles de cometer. Para evitar la resolución de estos sistemas de ecuaciones se emplea el procedimiento de Poincaré-Liebmann.

El método de Poincaré-Liebmann.

En la teoría general del potencial se demuestra que si una función  $u(x,y)$  es armónica, es decir que verifica la ecuación  $\Delta u = 0$ , su valor en el punto  $(x_0, y_0)$  está dado por la fórmula

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} u ds \quad (16)$$

siendo  $\Gamma$  una circunferencia de radio  $R$  y centro en  $(x_0, y_0)$ .

Esta ecuación expresa que el valor de  $u$  en cada punto es el promedio de los valores que toma sobre una circunferencia que rodea al punto.

Recíprocamente toda función que posea esta propiedad en todos los puntos de un recinto es armónica. Por consiguiente (16) es una condición necesaria y suficiente para que una función sea armónica.

La ecuación (12)

$$u_{0,0} = \frac{1}{4} ( u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1} )$$

es en cierto modo la expresión de la propiedad intrínseca de las funciones armónicas que hemos recordado.

Utilizando esta propiedad se puede evitar la resolución del sistema de ecuaciones a que conduce la aplicación del procedimiento de diferencias finitas.<sup>(1)</sup>

La ecuación ( 12 ) expresa que la función potencial es aquella que hace mínima la suma

$$\mathcal{D} [w] = \sum \sum (\delta [w])^2 \quad ( 17 )$$

siendo  $\delta$  la diferencia de dos valores consecutivos cualesquiera y estando la suma extendida a todos los puntos del recinto  $\underline{R}$  . Por consiguiente esta expresión es la suma de todas las oscilaciones y la función potencial es aquella que hace mínima esta oscilación total.

Este mínimo existe puesto que  $\mathcal{D}$  es función continua de  $w$  con un número finito de variables y está acotada inferiormente.

La solución de este problema de mínimo es precisamente la ecuación en diferencias ( 12 ), puesto que dados 4 puntos, un quinto hace mínima la suma de los cuadrados de las  $\delta$  cuando es su media aritmética.

---

(1) H. Liebmann: "Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und Konformer Abbildungen". Münchener Sitzgs. Ber. (1938) p. 385. A pesar de ser Liebmann el autor del método corresponde llamarlo de Poincaré-Liebmann por su analogía con el método del barrido ("bala-yage").

Dados los valores de la función en el contorno se pueden asignar en los puntos interiores valores cualesquiera. Aplicando en cada punto la ecuación (12) se obtienen nuevos valores que convergen hacia la solución del problema de mínimo o sea del sistema ( 15 ).

Demostración de la convergencia:<sup>(4)</sup>

De acuerdo a una ley arbitraria enumeramos todos los puntos del recinto  $R : P_0, P_1, P_2, \dots$

Designamos con  $w^{(0)}$  a los valores iniciales que satisfacen las condiciones límites y en el punto  $P_1$  reemplazamos el valor dado  $w_1^{(0)}$  por la media aritmética de los 4 valores próximos, de acuerdo a ( 12 ) y la nueva función obtenida así la llamamos  $w^{(1)}$ . Ella difiere de  $w^{(0)}$  solo en el punto  $P_1$ . En este punto se verifica (supuesto el ancho de la malla igual a 1),

$$w^{(1)} - w^{(0)} = \frac{1}{4} \Delta w^{(0)}$$

de acuerdo a ( 9 ).

En la misma forma se obtienen:  $w^{(2)}, w^{(3)}, \dots$  variando cada vez el valor en un solo punto.

Demostraremos que la sucesión  $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \dots$  tiende a la solución  $u$  del problema.

---

( 4 ) R. Courant: "Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzengleichung". Ztschr. f. ang. Math. u. Mech. V. 10 (1926) p. 322.



Siendo

$$\mathcal{D}[w^{(i+1)}] = \mathcal{D}[w^{(i)}] - \frac{1}{4} [\Delta w^i]^2 \quad (1)$$

los  $\mathcal{D}[w^{(i)}]$  forman una sucesión decreciente, que como está acotada inferiormente, tiene un límite  $d$ . En consecuencia

$$\Delta w^{(i)} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad i \rightarrow \infty$$

Al pasar de  $w^{(i)}$  a  $w^{(i+1)}$  la corrección vale  $\frac{1}{4} \Delta w^i$  en  $P_i$  y cero en los puntos restantes. Por consiguiente desde un valor de  $i$  en adelante las funciones  $w^i, w^{i+1}, \dots$  diferirán en un número arbitrariamente pequeño y lo mismo las expresiones en diferencias  $\Delta w^{(i+h)}$  ( $h = 0, 1, \dots, N$ ) en todo  $\underline{R}$ .

Considerando la diferencia  $\xi = w^i - w^k$  será  $\Delta \xi$  arbitrariamente pequeño, siempre que  $i$  y  $k$  sean suficientemente grandes.

(1) En efecto; comparemos para fijar las ideas  $\mathcal{D}(w^{(i)})$  y  $\mathcal{D}(w^{(i+1)})$ . En el punto  $P_2$  es

$$w^{(i+1)} = w^{(i)} + \frac{1}{4} \Delta w^{(i)}$$

Si el punto  $P$  está rodeado por los puntos  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$ , la parte de  $\mathcal{D}(w)$  correspondiente a este punto es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(w^{(i+1)}) &= [w^{(i+1)} - \alpha]^2 + [w^{(i+1)} - \beta]^2 + [w^{(i+1)} - \gamma]^2 + [w^{(i+1)} - \delta]^2 \\ &= \left[ w^{(i)} + \frac{1}{4} \Delta w^{(i)} - \alpha \right]^2 + \dots + \left[ w^{(i)} + \frac{1}{4} \Delta w^{(i)} - \delta \right]^2 \\ &= \mathcal{D}(w^{(i)}) + \frac{1}{2} \Delta w^{(i)} \left[ (w^{(i)} - \alpha) + (w^{(i)} - \beta) + w^{(i)} - \gamma + w^{(i)} - \delta \right] + \frac{1}{4} [\Delta w^{(i)}]^2 \\ &= \mathcal{D}(w^{(i)}) - \frac{1}{2} [\Delta w^{(i)}]^2 + \frac{1}{4} [\Delta w^{(i)}]^2 = \mathcal{D}(w^{(i)}) - \frac{1}{4} (\Delta w^{(i)})^2 \end{aligned}$$

Como  $\xi$  se anula en el contorno es <sup>(1)</sup> por la fórmula de Green

$$\partial[\xi] = -\sum\sum \xi \Delta \xi$$

Puesto que los valores de  $\xi$  son inferiores a una cota fija independiente de  $i$  y  $k$ , estas expresiones tienden a cero. Como todas las  $\xi$  son nulas en el contorno, la diferencia  $w^i - w^k$  tenderá a cero en todo  $R$  para  $i$  y  $k$  crecientes. Por tanto la sucesión  $w^{(n)}(x, y)$  tiende a  $u(x, y)$ .

Esta función satisface a la ecuación

$$\Delta u = u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{1,0} + u_{0,-1} - 4u_{0,0} = 0$$

puesto que  $\Delta w^{(n)} \rightarrow 0$  cuando  $n$  es suficientemente grande.

### Aplicación del procedimiento de Poincaré-Liebmann.

De acuerdo al teorema anterior, si se asigna a cada punto del interior de un recinto, valores arbitrarios y se "promedia" en cada uno de acuerdo a la fórmula (12) o a la (14) según los casos, se obtendrán en cada punto nuevos valores. La aplicación reiterada del procedimiento suministrará la solución del sistema (15).

(1) La fórmula de Green en diferencias, que se deduce de inmediato desarrollando las sumatorias, es:

$$\partial(v, w) = \sum\sum_{R'} \delta(v) \delta(w) = -\sum\sum_{R'} v \Delta w + \sum_{C'} v \cdot A[w]$$

donde  $R'$  es el conjunto de los puntos interiores,  $C'$  es el contorno y  $A(w)$  depende de los valores de las diferencias en la faja constituida por los puntos de contorno y sus inmediatos.

En los casos prácticos, convendrá elegir con algún cuidado los valores que se asignan inicialmente a los puntos interiores. En particular, una interpolación lineal en el sentido de los ejes  $x$  e  $y$ , entre los valores dados en el contorno, suministra buenos valores iniciales.

Como hemos dicho, las fórmulas ( 12 ) o ( 14 ) deben ser aplicadas reiteradamente, pero debe tenerse presente que en cada nueva aplicación deben utilizarse los valores obtenidos en el paso anterior y solo cuando la aplicación de la fórmula no altera, en ningún punto del recinto, los valores ya alcanzados anteriormente podrá asegurarse que se ha calculado exactamente la solución del sistema ( 15 ), que da una solución aproximada del problema de Dirichlet.

El método de Poincaré-Liebmann que evita la resolución del sistema ( 15 ) tiene además la ventaja de que si se comete un error en un paso intermedio no altera el resultado final y a lo sumo alarga el proceso del cálculo.

#### Ejemplo numérico.

Sea calcular la función potencial en el interior de un cuadrado ABCD, conocidos los valores en el contorno.

Primeramente, se asignan en los puntos interiores, los valores que resultan de interpolar linealmente entre los dados en los lados AB y CD. Se aplica luego la fórmula ( 12 ) de acuerdo al orden de lectura de un libro y al cabo de 8 "barridos" ( o pasos ) resultan valores que no alteran con la ulterior aplicación del procedimiento. Estos valores son exactamente los mismos que se obtie-

nea resolviendo el sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas del tipo ( 15 ).

En la resolución del caso particular siguiente no hemos utilizado, para no restar generalidad al procedimiento, las condiciones de simetría, que hubieran podido facilitar la operación.

D	10,00	12,00	10,00	C			
	9,00	8,62	11,00	9,23	9,00	8,58	
	9,25	8,58	10,06	9,18	9,01	8,55	
8,00	9,03	8,55	9,71	9,15	8,85	8,54	8,00
	8,84	8,54	9,47	9,15	8,70	8,54	
	8,70		9,31		8,62		
	8,00	7,08	10,00	7,58	8,00	7,04	
	8,06	7,04	8,78	7,54	7,70	7,02	
6,00	7,64	7,02	8,17	7,51	7,34	7,00	6,00
	7,33	7,00	7,84	7,51	7,17	7,00	
	7,17		7,67		7,08		
	7,00	6,00	9,00	6,90	7,00	5,98	
	6,76	5,98	7,64	6,87	6,34	5,97	
4,00	6,32	5,97	7,21	6,86	6,14	5,96	4,00
	6,14	5,96	7,03	6,86	6,05	5,96	
	6,05		6,94		6,01		
A	6,00	8,00	6,00	B			

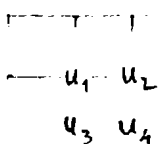
El método de los puntos múltiples. <sup>(1)</sup>

Si en lugar de considerar los cuatro valores adyacentes a cada punto como se hace en el método de Liebmann, se tienen en cuenta más puntos, es evidente que el nuevo valor obtenido será más exacto. Pero, al mismo tiempo, la intervención de muchos puntos hace complicadas y poco manuable las fórmulas, por lo cual se trata de decidir cuando la mayor complicación se halla compensada con la mayor rapidez de la convergencia.

Así como en el proceso de Liebmann se reemplaza cada valor por el promedio de los cuatro adyacentes, en general se puede considerar cada valor considerado, determinado en la siguiente forma :

$$\bar{u}_i = \sum_j T_{ij} u_j + \sum_{\alpha} S_{i\alpha} u_{\alpha} \quad (18)$$

siendo  $T_{ij}$  y  $S_{i\alpha}$  coeficientes numéricos,  $u_j$  valores de la función en el interior y  $u_{\alpha}$  valores en el contorno.



En el caso de la figura, se tiene: si

$u_{\alpha} = 0$ , con el procedimiento de Lieb-

mann

$$u_1 = \frac{1}{4} [u_2 + u_3]; \quad u_2 = \frac{1}{16} [u_1 + u_3 + 4u_4]$$

$$u_3 = \frac{1}{16} [u_1 + u_2 + 4u_4]; \quad u_4 = \frac{1}{32} [u_1 + u_2 + 4u_3]$$

(1) G/ H. Shortby, R. Weller: "The numerical solution of Laplace's equations"- Journal of Applied Physics. Vol. 9 N<sup>o</sup> 5. Mayo .938.

R. Weller, G. H. Shortley: "Calculation of stresses within the boundary of photoelastic models" - Journal of Applied Mechanics. Vol. 6 N<sup>o</sup> 2. Junio 1939.

En consecuencia, en este caso, será la matriz:

$$T = \| T_{ij} \| = \frac{1}{32} \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Si, en lugar de considerar los valores  $u_j$  consideramos las diferencias entre los valores exactos y los aproximados -es decir los errores  $\phi_j$  - serán los  $\phi_n = 0$  y la fórmula ( 18 ) quedará reducida a

$$\bar{\phi} = T \phi \tag{ 19 }$$

Calculando los valores propios  $\lambda_i$  y las funciones propias  $\phi^{(i)}$  de esta matriz de acuerdo a la ecuación

$$T \phi = \lambda \phi \quad ( \det ( T - \lambda ) = 0 )$$

se puede escribir

$$\phi = a_1 \phi^{(1)} + a_2 \phi^{(2)} + \dots + a_n \phi^{(n)} \quad \text{y}$$

$$T \phi = \lambda_1 a_1 \phi^{(1)} + \lambda_2 a_2 \phi^{(2)} + \dots + \lambda_n a_n \phi^{(n)}$$

$$T^2 \phi = \lambda_1^2 a_1 \phi^{(1)} + \lambda_2^2 a_2 \phi^{(2)} + \dots + \lambda_n^2 a_n \phi^{(n)}$$

.....

$$T^k \phi = \lambda_1^k a_1 \phi^{(1)} + \lambda_2^k a_2 \phi^{(2)} + \dots + \lambda_n^k a_n \phi^{(n)}$$

Es evidente que es  $|\lambda| < 1$  puesto que la aplicación reiterada de la fórmula ( 19 ) siendo los  $T_{ij}$  positivos y los valores de contorno nulos, hace disminuir el valor de  $\phi$  .

Designando con  $\lambda_1$  el mayor de los  $\lambda$  , podrá conservarse so-

lamente, después de  $k$  aplicaciones del procedimiento el término  $\lambda_1^k a_1 \phi_1$ , despreciando los restantes.

Grupos de Liebmann:

Calculando con el procedimiento de Liebmann el valor de  $\lambda_1$  para distintos cuadrados con  $p$  puntos por lado, se tiene:

+-----+                                        +-----+	$p$	$\lambda_1$
-----	3	0,250
-----	4	0,500
-----	6	0,750
----- $p=3$	10	0,9045
	18	0,9698

Para grandes valores de  $p$ , Shortley y Weller demuestran que  $1-\lambda_1 \rightarrow \frac{\pi^2}{p^2}$  o sea aproximadamente

$$-p^2 \log \lambda_1 \rightarrow \pi^2$$

El número  $N$  de "barridos" necesarios para reducir el coeficiente de  $\phi^{(1)}$  a una fracción  $\rho$  de su valor inicial, es decir  $\lambda^{N+1} = \rho \lambda$  se obtiene despreciando  $N$ ,  $N = \frac{-\log \rho}{-\log \lambda_1}$ , por lo cual  $-\log \lambda_1$  da una medida de la rapidez de la convergencia.

Grupos de 9 puntos:

Según este procedimiento deben formarse grupos de 9 puntos con

16 puntos de contorno y reemplazarse

de acuerdo a la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccccccc}
 n_2 & d_2 & e_2 & d_2 & n_1 & & \\
 d_4 & b_2 & c_2 & b_1 & d_1 & & \\
 e_3 & c_3 & a_1 & c_1 & e_1 & & \\
 d_5 & b_3 & c_4 & b_4 & d_4 & & \\
 n_3 & d_7 & e_4 & d_7 & n_4 & & \\
 & & & & & (21) & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_1 &= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^8 d_i + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 e_i \\
 \bar{b}_1 &= \frac{1}{4} (\bar{a}_1 + e_1 + e_2 + n_1) \\
 &\text{(Analogamente } b_2, b_3, b_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_1 &= \frac{1}{4} (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + e_1) \\
 &\text{(Analog. } c_2, c_3, c_4)
 \end{aligned}$$

Con la nueva matriz de los coeficientes, resulta:

$$-p^2 \log \lambda_1 \rightarrow \frac{7}{2} \pi^2 \quad (22)$$

Comparando (20) y (22) se ve que el nuevo procedimiento converge 3,5 veces más rápido que el de Liebmann.

Grupos de 4 puntos:

En este caso las fórmulas son:

$i_2$	$e_2$	$d_2$	$h$		$\bar{a} = (7d_1 + 7d_2 + 2e_1 + 2e_2 + 2f_1 + 2f_2 + g_1 + g_2)$
$f_2$	$c_2$	$a$	$d_1$	(23)	$\bar{b} = \frac{1}{4}(\bar{a} + f_1 + f_2 + i_3)$
$g_2$	$b$	$c_1$	$e_1$		$\bar{c}_1 = \frac{1}{4}(\bar{a} + \bar{b} + e_1 + f_1)$
$i_3$	$g_1$	$f_1$	$i_1$		

Resulta para este grupo  $-p^2 \log \lambda \rightarrow 2\pi^2$  es decir una convergencia 2 veces más rápida que en el procedimiento de Liebmann.

Pueden considerarse otras fórmulas análogas.

Ejemplo numérico:

Sea determinar la función armónica en el interior del rectángulo LIKJ, dados los valores de contorno. El número de puntos conocidos en cada lado del contorno indica la conveniencia de proceder en el cálculo considerando 2 grupos de 9 puntos y 3 grupos de 4 tal como se indica en la figura:

*(Handwritten notes or diagrams, mostly illegible)*



### Procedimiento de cálculo

El orden más conveniente a seguir en la resolución efectiva del problema de Dirichlet es el siguiente:

1º: Una vez conocidos los valores de contorno se fijan, más o menos arbitrariamente, los valores en los puntos interiores de una red de pocos puntos. Dado que la solución es una función continua los valores en el interior del recinto se pueden conseguir, como hemos visto, por interpolación de los valores de contorno. Una buena elección de los valores iniciales acelera la ejecución del procedimiento.

A estos valores se les aplican las fórmulas ( 12 ) o ( 14 ) según los casos.

2º: Se establece una segunda red de malla dos veces más fina y se adjudican como valores los obtenidos en el paso anterior en unos puntos y en los restantes los que proporciona la interpolación.

3º: Una vez determinados tantos grupos de 9 puntos y de 4 puntos como sea posible, se aplican las fórmulas ( 12 ), ( 14 ), ( 21 ) y ( 25 ) para mejorar los valores.

4º: Se aplica reiteradamente el procedimiento recorriendo todo el recinto hasta que se estabilizan los valores numéricos.

NOTAS

1) El problema de Neumann

En este problema, análogo al de Dirichlet, se debe determinar una función  $u(x,y)$  que en el interior del recinto sea armónica ( $\Delta u=0$ ) y cuya derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial n}$  asuma en el contorno valores prefijados.

Además sobre el contorno debe ser  $\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$  lo cual indica que la solución se determina a menos de una constante.

Para resolver el problema con el método de las diferencias finitas debe sustituirse  $\frac{\partial}{\partial n}$  por la pendiente  $p_i = u_i - u_{\alpha_i}$  siendo  $u_{\alpha_i}$  los valores en el contorno y  $u_i$  los valores correspondientes a la primera línea interior. El problema a resolver es entonces el siguiente:

Dados los valores de  $p_i$ , con la condición  $\sum p_i = 0$  y el valor en un punto interior A del recinto, determinar una función armónica que en A tome dicho valor y que tenga las pendientes dadas.

La resolución de este problema se conduce al primer problema de contorno o de Dirichlet en la siguiente forma:

Se dan valores relativamente plausibles  $u_{ij}^{(0)}$ , en el contorno y se resuelve de acuerdo a los procedimientos ya descriptos el primer problema de contorno con lo que se obtienen, en primera aproximación los valores  $w^{(0)}$ , interiores.

Resultan para las pendientes los valores

$$p_0 = w^{(0)} - u^{(0)}$$

en general diferentes de los valores dados  $p_i$ . Se calculan las diferencias

$$u_i^{(1)} = w_i^{(0)} - p_i$$

y con estos valores de contorno se resuelve nuevamente el primer problema. Se calcula

$$u_i^{(2)} = w_i^{(1)} - p_i$$

y se continúa así hasta encontrar los valores que satisfacen la ecuación armónica y tienen las pendientes prescritas.

Para que la función asuma en  $A$  el valor dado basta hacer una traslación total de los valores hallados.

## 2) La ecuación biarmónica

La ecuación biarmónica

$$\Delta \Delta u = 0 \quad (24)$$

con valores de  $u$  y de  $\nabla u$  prefijados en el contorno, también puede resolverse con el método de las diferencias finitas, cuando se dan 2 "coronas" de valores iniciales.

En efecto, la ecuación (24) se puede desdoblar en la siguiente forma:

$$\Delta u = v, \quad \Delta v = 0 \quad (25)$$

En diferencias finitas estas relaciones significan, en el punto  $(0,0)$ :

$$u_{1,0} + u_{0,1} + u_{-1,0} + u_{0,-1} - 4u_{0,0} = v_{0,0} \quad (26)$$

$$v_{1,0} + v_{0,1} + v_{-1,0} + v_{0,-1} - 4v_{0,0} = 0 \quad (27)$$

Como los valores en el contorno son datos y por interpolación pueden adjudicarse valores a  $u$  en los puntos interiores, pueden calcularse los  $v$  de acuerdo a la primera de las fórmulas anteriores.

Puesto que la función  $v(x,y)$  debe ser armónica se puede determinar completamente con el conocimiento de estos valores iniciales.

Conocidos estos valores de  $v$  se determinan nuevos valores de  $u$  puesto que

$$u_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{4} (u_{1,0}^0 + u_{0,1}^0 + u_{-1,0}^0 + u_{0,-1}^0) - 4v_{0,0}$$

conservando los valores de contorno se obtienen los restantes  $u^{(1)}$ ; con estos se calculan, como antes, los valores  $v^{(1)}$  y se continúa en la misma forma hasta que las ecuaciones (26) y (27) se satisfagan.

Ejemplos numéricos relativos a estos dos problemas se encuentran en Franz Wolf: "Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen", Z/A/M/M. 1926 (6) p. 118-150. El trabajo de Wolf aplica solamente el primitivo método de Liebmann.

Capítulo II - EL METODO DIRECTO DEL  
CALCULO DE VARIACIONES .

3: EL PROCEDIMIENTO DE RITZ

El cálculo de variaciones en su forma clásica conduce el problema de la determinación del mínimo de una integral, a la resolución de las ecuaciones diferenciales de Euler.

El método directo del cálculo de variaciones consiste en cambio en resolver el problema del extremo de la integral prescindiendo de la ecuación diferencial. Así mismo el método directo considera los problemas de contorno de las ecuaciones en derivadas parciales como ecuaciones de Euler de un cierto problema de mínimo cuya resolución debe efectuarse directamente.

Como en la expresión integral aparecen derivadas de orden inferior a las que se presentan en las ecuaciones de Euler, el método directo ha permitido "purificar" <sup>(1)</sup> las hipótesis de ciertos problemas eliminando aquellas parásitas que solo se han introducido para faci-

---

(1) Paul Montel: "Funciones armónicas y subarmónicas" Publicaciones del Instituto de Matemáticas de Rosario. Volumen II Nº 1 (1940-)

litar la solución.

En algunos problemas de física resulta más simple plantear el principio del mínimo de la energía y resolver directamente el problema que utilizar las ecuaciones diferenciales, por eso es tan frecuente el uso de los métodos directos sobre todo en los problemas prácticos de elasticidad.

Conviene advertir que el problema de determinar el mínimo de una integral involucra una dificultad teórica considerable por que no existe un teorema análogo al de Weierstrass, que asegure la existencia del máximo o mínimo de una función de una o varias variables independientes.

En los problemas prácticos se admite la existencia de la solución, y en la expresión integral  $\mathcal{D}(v)$  que se debe hacer mínima se reemplaza  $v(x,y)$  por funciones  $v_n(x,y)$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(v_n) = \text{mínimo de } \mathcal{D}(v)$$

Puede suceder que esta sucesión mínima  $v_n(x,y)$  no tienda a la solución mínima  $u(x,y)$  real del problema aun/cuando/  <sup>$\mathcal{D}(v_n)$</sup>  tienda al valor mínimo  $\mathcal{D}(u)$  <sup>(1)</sup>, pero una elección conveniente de la sucesión

---

(1) Observese que los  $\mathcal{D}(v_n)$  son números que, supuestos aceptados, deben tener necesariamente un mínimo; pero las funciones  $v_n(x,y)$  pueden tender a una función  $v(x,y)$  distinta de  $u(x,y)$ . Courant en su artículo del Frank v. Mises, tomo I pag. 903 da el siguiente ejemplo: Sea determinar la superficie mínima que pase por una curva plana  $C$ , entre todas las superficies limitadas por  $C$  y cuyas planas tangentes varíen con continuidad. La solución es evidentemente la porción de plano que contiene a  $C$  y está limitada por  $\partial$ . Consideremos ahora la sucesión de superficies  $v_n(x,y)$  definidas en la siguiente forma: nulas en el re-

$v_n(x,y)$  puede evitar tal contingencia.

El procedimiento de Ritz para formar la sucesión mínima  $v_n(x,y)$  prescribe formar expresiones del tipo

$$v_n(x,y) = \alpha_1 \psi_1(x,y) + \alpha_2 \psi_2(x,y) + \dots + \alpha_n \psi_n(x,y)$$

con  $\psi_i(x,y)$  tales que satisfagan las condiciones de contorno y que aseguren que  $\mathcal{D}(v_n)$  difiere de  $\mathcal{D}(u)$  tan poco como se quiera.

Si se consideran ahora los  $\alpha_i$  como parámetros el problema

$$\mathcal{D}(v_n) = \text{mínimo}$$

exige la anulación de las  $n$  derivadas parciales respecto de dichos parámetros y la resolución del sistema de los  $\alpha_i$  suministra los coeficientes de la solución aproximada.:

$$v_n = \alpha_1^{(n)} \psi_1(x,y) + \alpha_2^{(n)} \psi_2(x,y) + \dots + \alpha_n^{(n)} \psi_n(x,y)$$

En particular si  $\mathcal{D}(v_n)$  es una función cuadrática en los  $\alpha_i$ , el sistema que resulta es lineal.

Enunciaremos los problemas clásicos a los cuales es aplicable el procedimiento de Ritz, resolviendo efectivamente el caso de la barra elástica y demostrando la convergencia en el caso de las funciones biarmónicas.

---

— cinto limitado por  $C$ , excepto en un círculo  $C_n$  en el cual  $v_n(x,y)$  se define geométricamente mediante un cono circular recto de altura  $a \neq 0$ . Si los círculos  $C_n$  tienden a un punto  $P$ , la sucesión  $v_n(x,y)$  constituye una sucesión mínima que no converge en  $P$  a la solución.

Aplicación al problema de Dirichlet.

Para la resolución del problema de Dirichlet, que consiste en determinar una función armónica continua en el interior de un recinto  $R$  y que tome sobre su contorno  $C$  una sucesión continua de valores prefijados, se utilizan los dos teoremas siguientes: <sup>(1)</sup>

1º) Una función armónica  $u(x,y)$  continua así como sus derivadas de los dos primeros ordenes en  $R$  y en  $C$  continua así como sus derivadas de primer orden, hace mínima la integral

$$D(v) = \iint \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2) \quad (1)$$

2º) Recíprocamente, con las mismas hipótesis sobre la función  $u(x,y)$  si la integral  $D(v)$  es mínima para una función  $u$ , esta verifica la condición

$$\Delta u = 0 \quad (2)$$

---

(1) Ver por ejemplo E. Picard "Traité d'Analyse" Tome II. 3<sup>e</sup> édition pag. 36.

(2) Riemann dedujo la existencia de la función que resuelve el problema de Dirichlet, considerando que, siendo el integrando de (1) positivo debía alcanzar efectivamente su mínimo para una cierta función  $u(x,y)$ . Weierstrass demostró con un ejemplo que no siempre existe una función que satisface las condiciones exigidas de continuidad y para la cual la integral alcanza efectivamente su límite inferior. (Ver Picard, nota anterior).



De acuerdo al método de Ritz para calcular la solución aproximada de este problema se debe reemplazar la función  $v(x,y)$  de (1) por una expresión del tipo

$$v_n(x,y) = \alpha_1 \psi_1(x,y) + \alpha_2 \psi_2(x,y) + \dots + \alpha_n \psi_n(x,y)$$

con  $\psi_i$  que satisfacen las condiciones en el contorno  $C$ .

Efectuando las integraciones indicadas en (1) resulta una función  $\mathcal{D}(v_n)$  de 2º grado en las  $n$  variables  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Los valores de  $\alpha_i$  correspondientes al mínimo de  $\mathcal{D}(v_n)$  estarán dados por el sistema lineal

$$\frac{\partial \mathcal{D}(v_n)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i=1,2,\dots,n.$$

### El problema de la membrana vibrante.

En el estudio de la membrana elástica debe integrarse la ecuación

$$\Delta u + \lambda u = f(x,y) \quad (3)$$

con la condición de contorno  $\bar{u} = 0$ .

Este problema es equivalente al cálculo del mínimo de

$$\mathcal{D}(u) = \iint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \lambda u^2 + 2fu \right] dx dy \quad (4)$$

Tomando un sistema de funciones de base que permitan aproximar las funciones  $u(x,y)$  y que satisfagan las condiciones de contorno ( $\bar{u} = 0$ ), el método de Ritz indica que se debe reemplazar en la integral  $u$  por

$$u_n(x,y) = \alpha_1 \psi_1(x,y) + \alpha_2 \psi_2(x,y) + \dots + \alpha_n \psi_n(x,y)$$

Así resulta:

$$D(u_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j (k_{ij} - \lambda h_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^n x_i f_i$$

siendo

$$k_{ij} = \iint \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$h_{ij} = \iint \psi_i \psi_j dx dy \quad f_i = \iint \psi_i f dx dy$$

La condición  $D = \text{mínimo}$  significa  $\frac{\partial D}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial D}{\partial \alpha_2} = \dots = \frac{\partial D}{\partial \alpha_n} = 0$

o sea el sistema

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j (k_{ij} - \lambda h_{ij}) = -f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Si es el determinante  $\| k_{ij} - \lambda h_{ij} \| \neq 0$  hay una sola solución del sistema  $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$  y la solución aproximada es:

$$u_n = \alpha_1^{(n)} \psi_1 + \alpha_2^{(n)} \psi_2 + \dots + \alpha_n^{(n)} \psi_n$$

Si  $\lambda \leq 0$ , la forma cuadrática resulta positiva y Ritz demostró que si se considera en lugar de la convergencia ordinaria ordinaria, la convergencia en media,  $u^{(n)}(x,y) \rightarrow u(x,y)$ .

Plancherel<sup>(1)</sup> extendió este teorema al caso de  $\lambda > 0$  siempre que no fuera valor propio del problema homogéneo.

Kriloff<sup>(2)</sup> ha estudiado la aplicación del método de Ritz en una variable y especialmente en la resolución de la ecuación de Sturm Liouville, que es la correspondiente de la ecuación ( 3 ).

(1) M. Plancherel: "Sur la méthode d'intégration de Ritz". Bulletin des sciences Mathématiques. Tomes: XLVII (1923) p. 376-397; XLVIII (1924) p.

(2) Kriloff: "Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique". Mémoires des Sc. Math. Fasc. XLIX. (1931).

El problema de la barra elástica.

El desplazamiento lateral  $u$  de un punto  $x$  de una barra elástica satisface a la ecuación

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} = K^4 u(x) \quad (5)$$

y si la condición en los extremos ( $x = \pm 1$ ) es la de empotramiento debe ser en ellos

$$\bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dx} = 0 \quad (6)$$

El correspondiente problema extremal es:

$$\mathcal{D}(u) = \int_{-1}^{+1} (u''^2 - K^4 u^2) dx = \text{mín.} \quad (7)$$

debiendo las funciones  $u(x)$  satisfacer las condiciones (6).

El método de Ritz prescribe adoptar las funciones del tipo:

$$u = (1-x^2)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \dots + \alpha_n x^{2n}) \quad (8)$$

que evidentemente verifican (6). Reemplazando en (7) se tiene:

$$\mathcal{D}(u_n) = \int_{-1}^{+1} (u_n''^2 - K_n^4 u_n^2) dx$$

Efectuadas las integraciones resulta  $D_n = D_n(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  función de segundo grado en  $\alpha_i$ , y las derivadas respecto de estos parametros dan un sistema de ecuaciones en los  $\alpha_i$ .

Por ejemplo, si (8) se reduce a

$$u_1 = (1-x^2)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 x^2)$$

se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha_0 (693 - 22 K^4) + \alpha_1 (99 - 2 K^4) = 0 \\ \alpha_0 (1267 - 26 K^4) + \alpha_1 (3861 - 6 K^4) = 0 \end{cases}$$

y por la condición de compatibilidad resulta:

$$K' = 2,3651 \quad y \quad K'' = 5,6487$$

siendo las soluciones exactas

$$K' = 2,3650 \quad K'' = 5,4978$$

Con  $K'$  resulta la solución

$$y(x) = (1 - x^2)^2 (1 - 0,127 x^2)$$

que es una muy buena aproximación.

La solución exacta de la ecuación (5) es inmediata mediante la sustitución  $u = e^{\lambda x}$ . Resulta entonces que los valores propios  $K$  que permiten que  $u(x,y)$  satisfaga las condiciones (6), son las raíces de la ecuación trascendente:

$$\operatorname{tg} K + \operatorname{Th} K = 0 \quad (1)$$

---

(1) Las raíces de esta ecuación, así como de otras análogas que corresponden a bordes libres o apoyados están tabuladas en K. Hayashi: "Fünftellige Funktionentafeln", p. 52 Berlin  $\text{\textcircled{M}}$  (1930-).

§ 4: EL PROCEDIMIENTO DE GALERKIN.

En el método de Ritz, una vez sustituida en la integral que se debe hacer mínima, la función aproximada con los coeficientes indeterminados, se deben anular las derivadas respecto de estos coeficientes.

Galerkin ha ideado un procedimiento que simplifica la aplicación del método de Ritz. <sup>(1)</sup>

La condición:

$$D = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u', u'', \dots) dx = \text{mínimo} \quad (9)$$

exige

$$\delta D = \int_{x_0}^{x_1} \delta F \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \dots \right) dx = 0 \quad (10)$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que  $\delta u$  es nulo para  $x = x_0$  y  $x = x_1$  es:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' = \left[ \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \cdot dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \cdot dx$$

en consecuencia resulta

$$\delta F, \delta u' = \int_{x_0}^{x_1} \left( P_0 - \frac{\partial}{\partial x} P_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_2 - \dots \right) \delta u \cdot dx \quad (11)$$

siendo  $P_0 = \frac{\partial F}{\partial u}$        $P_1 = \frac{\partial F}{\partial u'}$        $P_n = \frac{\partial F}{\partial u^{(n)}}$

Reemplazando de acuerdo al método de Ritz la función  $u$  por un polinomio de aproximación

(1) El trabajo de Galerkin ha sido publicado en ruso en 1915. Hencky: "Eine wichtige Vereinfachung der Methode von Ritz zur angenäherten Behandlung von variationsproblemen" en Z.A.N.M. (7), 1927 p. 30-31, le expone dando las referencias bibliográficas.

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x) \quad (12)$$

donde los  $\psi_i(x)$  son funciones que satisfacen las condiciones de contorno, resulta que la ecuación (11) se cumplirá para  $\delta u$  arbitrario si

$$P_0 - \frac{\partial}{\partial x} P_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_2 - \dots = 0$$

que es la ecuación diferencial correspondiente al problema de variaciones (9).

Si se eligen como variaciones precisamente las expresiones

$$\delta u = \varepsilon \psi_i(x)$$

siendo  $\varepsilon$  un parámetro independiente de  $x$  y si se impone a la integral (11) la condición de anularse para cada uno de estos desplazamientos se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ P_0 - \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \dots \right] \psi_m(x) dx = 0 \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

que permite determinar los  $\alpha_m$  puesto que en las funciones  $P$  se ha reemplazado  $u$  por la expresión (12).

En consecuencia, el sistema de ecuaciones a formar es:

$$\int_{x_0}^{x_1} \text{Ecuación diferencial expresada en función de (12)} \times \psi_m(x) dx = 0 \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

Ejemplo. El caso de la barra elástica tratado en el párrafo anterior se encara por el procedimiento de Galerkin en la siguiente forma:

En lugar de calcular el mínimo de la integral (7) se calcula-

rá

$$\int_{-1}^{+1} (u'' - k^2 u) \Psi_n(x) dx = 0 \quad (7')$$

$(n = 0, 1)$

con

$$u_1 = (1 - x^2)^2 (\alpha_0 + \alpha_1 x^2)$$

o sea con

$$\Psi_0 = (1 - x^2)^2$$

$$\Psi_1 = (1 - x^2)^2 x^2$$

Estas condiciones conducen al mismo sistema de ecuaciones pero el cálculo es sensiblemente más simple.

§5: LA CONVERGENCIA DEL PROCEDIMIENTO DE RITZ

Walter Ritz <sup>(1)</sup> dió a conocer su método de integración de las ecuaciones en derivadas parciales, en una memoria en la que estudiaba el equilibrio de las placas elásticas.

En la teoría de la elasticidad se deduce que si es  $(x, y, 0)$  un punto de la superficie media de una placa elástica, la ecuación que da los desplazamientos transversales  $u(x, y)$  cuando la placa está sometida a una presión proporcional a  $f(x, y)$  resulta

$$\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

Según que la placa tenga sus bordes libres, empotrados o articulados varían las condiciones de contorno para la función  $u$  y su derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial n}$ .

Ritz consideró como problema equivalente a la integración de esta ecuación, la determinación de la función  $u(x, y)$  que hace mínima la integral

$$\iint \left[ \frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f w \right] dx dy$$

y demostró que las funciones  $w_n(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x, y)$  que satis-

---

(1) W. Ritz: "Über eine neue methode zur lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik". Oeuvres, Paris 1911 - p. 192 - 250.



facen esta condición de mínimo tienden a  $u(x,y)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  si las funciones  $\gamma^{(n)}$  forman un sistema completo y verifican las condiciones de contorno.

La demostración original de Ritz es sumamente complicada y ha sido simplificada por Trefftz<sup>(1)</sup>, quien inspirado por analogías mecánicas consiguió reducir el problema de la convergencia funcional a uno de convergencia numérica.

Sea determinar una función biarmónica

$$\Delta \Delta u = 0 \quad (14)$$

que en el contorno satisfaga las dos condiciones

$$\bar{u} = f(s) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = g(s) \quad (15)$$

El problema equivalente es: elucidar la función  $u(x,y)$  continua y con derivadas continuas tal que

$$D(u) = \frac{1}{2} \iint (\Delta u)^2 dx dy = \text{mínimo} \quad (16)$$

Trataremos de determinar el valor  $u_0$  de  $u(x,y)$  en el origen.

La función de Green correspondiente a este problema y a este contorno es

---

(1) E. Trefftz: "Konvergenz und Fehlerschätzung Beim Ritzschen Verfahren". Math. Annalen. 100 (1928) p. 503.

$$G(x,y;0,0) = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r + F(x,y) \quad (F: \text{función regular}) \quad (17)$$

con las condiciones de contorno

$$\bar{G} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} = 0 \quad (18)$$

Como problema adjunto de (3) consideramos el de determinar el mínimo de

$$K(v) = \frac{1}{2} \iint (\Delta v)^2 dx dy + \varepsilon v. \quad (19)$$

Demostraremos que la solución de (19) es  $v(x,y) = u(x,y) - \varepsilon G(x,y)$  siendo  $u(x,y)$  solución de (3).

En efecto, considerando las funciones variadas de  $v(x,y)$

$$w(x,y) = v + \delta v \quad (20)$$

de modo que en el contorno

$$\delta v = \frac{\partial \delta v}{\partial n} = 0 \quad (21)$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint (\Delta w)^2 dx dy &= \frac{1}{2} \iint (\Delta v)^2 dx dy + \iint \Delta v \cdot \Delta \delta v dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \iint (\Delta \delta v)^2 dx dy \end{aligned} \quad (22)$$

En el segundo miembro la segunda integral se calcula por intermedio de la fórmula de Green :

$$\begin{aligned} \iint \Delta v \cdot \Delta \delta v dx dy &= \iint \delta v \cdot \Delta \Delta v dx dy + \int \Delta v \frac{\partial \delta v}{\partial n} ds - \\ &- \int v \frac{\partial \Delta v}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (23)$$

Las integrales dobles están extendidas al dominio  $R - C_f$  y las integrales curvilíneas a sus contornos.

Ahora en el segundo miembro la integral doble es nula puesto que lo es  $\Delta \Delta v = \Delta \Delta u - \varepsilon \Delta \Delta G$ .

Las integrales curvilineas tomadas sobre el contorno de R son nulas por ( 21 ). En el contorno  $C_f$  es

$$\int_{C_f} \Delta v \frac{\partial}{\partial n} v ds = + \int_0^{2\pi} (\Delta u - \epsilon \Delta G) \frac{\partial}{\partial \rho} v \cdot \rho d\vartheta \quad ( 24 )$$

y como

$$\Delta G = \frac{1}{2\pi} (\log \rho + 1) + \Delta F \quad ( 25 )$$

resulta nula la integral con  $\rho \rightarrow 0$ .

En cambio

$$\begin{aligned} \int_{C_f} v \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Delta v ds &= + \int_0^{2\pi} v \frac{\partial}{\partial \rho} [\Delta u - \frac{\epsilon}{2\pi} (\log \rho + 1)] \rho d\vartheta = \\ &= - \epsilon \int_0^{2\pi} v d\vartheta = - \epsilon v_0 = - \epsilon (w_0 - v_0) \quad ( 26 ) \end{aligned}$$

Reemplazando en ( 22 ) resulta

$$\frac{1}{2} \iint (\Delta w)^2 dx dy + \epsilon w_0 = \frac{1}{2} \iint (\Delta v)^2 dx dy + \epsilon v_0 + \frac{1}{2} \iint (\Delta v)^2 dx dy \quad ( 27 )$$

Por lo tanto el mínimo de

$$N = \frac{1}{2} \iint (\Delta w)^2 dx dy + \epsilon w_0 \quad ( 28 )$$

se obtiene para la función  $v(x,y)$  definida por ( 19 ).

Para esta función ( 19 ) que resuelve el problema adjunto resulta

$$\begin{aligned} N(v) = N(u - \epsilon G) = N(\epsilon) &= \frac{1}{2} \iint (\Delta v)^2 dx dy + \epsilon v_0 = \\ &= \frac{1}{2} \iint [\Delta u - \epsilon \Delta G]^2 dx dy + \epsilon (u_0 - G_0) = \\ &= \frac{1}{2} \iint (\Delta u)^2 dx dy - \epsilon \iint \Delta u \cdot \Delta G dx dy + \frac{\epsilon^2}{2} \iint (\Delta G)^2 dx dy + \\ &+ \epsilon u_0 - \epsilon^2 G_0 \quad ( 29 ) \end{aligned}$$

En el último miembro es  $\iint \Delta u \cdot \Delta G dx dy = 0$  y

$$\iint (\Delta G)^2 dx dy = \iint G \cdot \Delta \Delta G - \int \Delta G \frac{\partial G}{\partial n} + \int G \frac{\partial}{\partial n} \Delta G \quad ( 30 )$$

Solo es necesario calcular la última integral curvilínea sobre el contorno del círculo, pues los otros términos son nulos por (18):

$$\int G \frac{\partial}{\partial n} \Delta G = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^2}{r} \log \rho + F \right] \left[ \frac{1}{2\pi\rho} + (\Delta F)_r \right] \rho d\lambda \rightarrow F_0 = G_0 \quad (31)$$

(Suponemos el valor  $G_0$  finito).

Finalmente resulta:

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{2} \iint (\Delta u)^2 dx dy + \varepsilon u_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} G_0 \quad (32)$$

De haber partido de la función  $v(x,y) = u(x,y) + \varepsilon G(x,y)$  se hubiera obtenido

$$N(-\varepsilon) = \frac{1}{2} \iint (\Delta u)^2 dx dy - \varepsilon u_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} G_0 \quad (33)$$

Comparando (32) y (33) resulta que es para  $\varepsilon = 1$

$$u(0,0) = \frac{1}{2} \{ N(1) - N(-1) \} \quad (34)$$

La ventaja que se consigue al expresar el valor de  $u(x,y)$  en un punto en función de los valores mínimos del problema adjunto consiste en que así se transforma el problema de la convergencia de la sucesión mínima de Ritz en el de la convergencia del valor mínimo del  $N(V)$ .

En efecto; para resolver con el método de Ritz el problema (16) se construye la sucesión de funciones

$$v_n(x,y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x,y) \quad (35)$$

con  $\psi_i$  que satisfagan las condiciones de contorno y que formen un conjunto completo de modo que cualquier función de las permitidas en (16) sea aproximable mediante una combinación lineal de las  $\psi_i$ .

Los coeficientes se determinan por la condición  $\frac{\partial Q(v_n)}{\partial \alpha_i} = 0$ .

Si designamos con  $N_n(+1)$  y  $N_n(-1)$  los valores mínimos correspondientes al problema adjunto resultará:

$$v_n(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [N_n(+1) - N_n(-1)] \quad (36)$$

Pero, de acuerdo al resultado anterior

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [N(+1) - N(-1)] \quad (37)$$

Como las funciones (35) son tales que los valores mínimos  $N$  tienden a los  $N$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(\xi, \eta) = u(\xi, \eta)$$

La aproximación que se logra con los valores  $N_n(+1)$  y  $N_n(-1)$  es monótona puesto que el aumento de  $n$  solo significa la intersección de más funciones  $\psi_i(x, y)$ .

En consecuencia los valores mínimos del problema adjunto que son funciones continuas de  $\xi, \eta$ , convergen uniformemente de acuerdo al teorema de Dini por ser aproximables monotonamente.

Esta demostración de convergencia se puede extender inmediatamente a otros casos siempre que la función de Green correspondiente sea finita en el punto singular. Tal no ocurre con el problema del potencial ( $\Delta u = 0$ ) en donde es  $G(x, y; 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \log r + F$ . En este caso solo se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C v_n ds = \int_C u ds$$

§ 6: LA ACOTACION DEL ERROR

El método de Ritz se utiliza generalmente en la resolución de problemas cuya solución exacta se desconoce y por ello es menester utilizar otros procedimientos que lo complementen y permitan acotar el error. Lo único que se podrá asegurar sin apelar al empleo de otros procedimientos es que el mínimo obtenido por el método de Ritz lo será por exceso por cuanto en su aplicación se limitan las funciones admitidas a concurso.

Tratándose de problemas de mínimo, se puede utilizar el siguiente principio general:

"Atenuando algunas de las condiciones impuestas al problema de mínimo, el valor mínimo en el problema modificado, no puede ser mayor que en el problema original".

A. Weinstein ha empleado sistemáticamente este principio en el estudio de las vibraciones de placas, consiguiendo "encerrar" los valores propios entre dos valores, uno por exceso (Ritz) y otro por defecto.

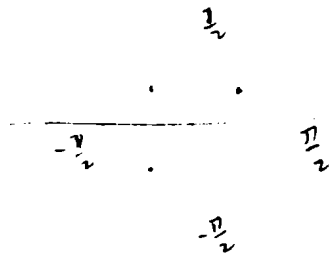
Ejemplo (1) El problema de la estabilidad de una placa cuadrada en-

---

(1) A. Weinstein: "On a minimal problem in the theory of elasticity". Journal of the London Math. Soc. Vol. 10, 1935.

Amplias referencias bibliográficas pueden encontrarse en el N° del Memorial de Sciences Mathematiques, en un trabajo del mismo autor.

potrada en sus cuatro vértices y bajo presión uniforme en todas las direcciones de su plano conduce a la ecuación



$$\Delta \Delta u + \lambda \Delta u = 0 \quad (38)$$

con

$$\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 \quad (39)$$

El menor valor propio  $\lambda$  es también el mínimo correspondiente a :

$$\frac{I(w)}{D(w)} = \text{mínimo} \quad (40)$$

con

$$I(w) = \iint_R \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy = \iint_R (\Delta w)^2 dx dy \quad (41)$$

y

$$D(w) = \iint_R \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_R (\text{grad } w)^2 dx dy \quad (41')$$

y las mismas condiciones de contorno.

Reemplazando en (40) la función  $w$  por

$$w_2 = a_1 \cos^2 x \cos^2 y + a_2 \cos^3 x \cos^3 y,$$

que satisface las dos condiciones (39), resulta, por el método de

Ritz:  $\lambda_1^{(2)} = 5,31173$ , lo cual asegura

$$\lambda_1 < 5,31173$$

Para determinar un valor aproximado por defecto de  $\lambda$ , consideremos en lugar de las condiciones (39) las siguientes  $m$  condiciones menos restrictivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w} = 0 \\ G_{2k-1} = \int_C \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \cdot G_{2k-1} ds = 0 \quad (k=1,2,\dots,m) \end{array} \right. \quad (42)$$

las funciones  $g_{\nu}$  se determinan por la condición de que  $w(x,y)$  debe ser tal que satisfaga a (40) con las condiciones (42), en la siguiente forma:

Llamando  $\mu_m$  al mínimo de (40), resulta que esta condición y las (42) equivalen a

$$\delta \left[ \iint_R (\Delta v)^2 dx dy - \mu_m \iint_R (\text{grad } v)^2 dx dy - 2 \sum_{k=1}^m a_{k\nu} \int_C \frac{dv}{\partial n} g_{2k-1} ds \right] = 0$$

siendo  $\mu_m, a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{m\nu}$  multiplicadores de Lagrange.

La anulación de la variación y las fórmulas de Green imponen

$$\iint_R \delta v [\Delta \Delta v + \mu_m \Delta v] dx dy + \int_C (\Delta v - \sum_{i=1}^m a_{i\nu} g_{2i-1}) \frac{\partial \delta v}{\partial n} ds - \int_C \delta v \left( \frac{d\Delta v}{dn} + \mu_m \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0$$

Como en las variaciones se supone  $\delta v$  y  $\frac{\partial}{\partial n} \delta v$  arbitrarios, y  $\delta v$  se anula sobre  $C$  es

$$\Delta \Delta v + \mu \Delta v = 0 \quad (43)$$

en  $R$ , y

$$\begin{cases} v = 0 \\ \Delta v = \sum_{i=1}^m a_{i\nu} g_{2i-1} \end{cases} \quad (44)$$

en  $C$ .

Multiplicando (43) por  $v$  e integrando resulta aplicando la fórmula de Green

$$\begin{aligned} \iint v \cdot \Delta \Delta v + \mu_m \iint v \cdot \Delta v &= \iint (\Delta v)^2 - \int_C \left( \Delta v \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta v}{\partial n} \right) ds + \\ &+ \mu_m \left[ - \iint \text{grad}^2 v \cdot dx dy + \int_C v \frac{\partial v}{\partial n} ds \right] = 0 \end{aligned}$$

Por las condiciones (44) se reduce esta expresión a



$$\mu_m \iint_R \text{grad}^2 v \, dx \, dy = \iint_R (\Delta v)^2 \, dx \, dy$$

Por consiguiente  $\mu_m$  es el valor del mínimo del cociente  $\frac{I(v)}{D(v)}$ .

La ecuación (43) indica que

$$\Delta v + \mu v$$

es armónica en  $R$  cuyos valores de contorno son, por (44),  $\sum_1^m a_j \varepsilon_{j-1}$  puesto que  $v$  se anula en  $\mathcal{C}$ .

Dado que una función armónica está determinada por los valores de contorno será

$$\Delta v + \mu v = \sum_1^m a_j p_{j-1}(x, y) \quad (45)$$

donde  $p_j$  representa la función armónica

$$p_j(x, y) = \text{Ch } \nu y \cos \nu x + \text{Ch } \nu x \cos \nu y$$

Esta función  $p_j$  toma los siguientes valores de contorno, que determinan precisamente las funciones  $g_j$  de (42):

$$\begin{aligned} p_j(x, \frac{\pi}{2}) &= \text{Ch } \frac{\nu \pi}{2} \cos \nu x = g_j(x) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ p_j(\frac{\pi}{2}, y) &= \text{Ch } \frac{\nu \pi}{2} \cos \nu y = g_j(y) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Weinstein resuelve el problema (45) determinando los siguientes valores de  $\mu$ :

$$\mu_2 = 5,30196 \quad \mu_3 = 5,30357 \quad \mu_4 = 5,30362$$

Resulta entonces

$$5,30362 < \lambda_1 < 5,31173$$

lo cual asegura que el error en la determinación es menor que el 0,13 %.

Capítulo III - LA INTEGRAL DE POISSON

Primer procedimiento de cálculo.

La resolución del problema de Dirichlet en el caso de que el recinto sea un círculo se resuelve mediante la integral de Poisson.

Si los valores en la circunferencia de radio 1 están dados por la función  $f(t)$  la función potencial  $u(\rho, \varphi)$  que adquiere en el contorno dichos valores, está dada por la fórmula de Poisson:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos(t-\varphi)} f(t) dt \quad (1)$$

Sin restringir la generalidad, se puede suponer  $\varphi = 0$ , pues ello equivale a considerar los valores de  $f(t)$  a partir de  $t = \varphi$ .

$$u(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos t} f(t) dt \quad (2)$$

Para calcular numéricamente esta integral, hemos tabulado el cociente

$$F(\rho, t) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos t} \quad (3)$$

para  $\rho = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9$  y  
 $t = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$  en la Tabla N° 1.

Aplicando la fórmula de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y dx = \frac{h}{3} \left[ y_0 + y_n + 4 \sum y_{imp.} + 2 \sum y_{par.} \right]$$

de integración aproximada, al cálculo de la integral (2) resulta:

TABLA Nº 1

$$F(p, t) = \frac{1-p^2}{1+p^2-2p^2t}$$

$\frac{t}{p}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
00	1,22222	1,50000	1,85714	2,33333	3,00000	4,00000	5,66667	9,00000	19,00000
100	1,21765	1,48589	1,82323	2,25713	2,82814	3,59085	4,58348	5,59810	5,08756
200	1,20428	1,44551	1,72943	2,05758	2,41696	2,75424	2,92380	2,63752	1,60265
300	1,18308	1,38410	1,59541	1,79802	1,95325	1,99520	1,83741	1,41532	0,75651
400	1,15547	1,30865	1,44359	1,53519	1,54973	1,45208	1,22145	0,86887	0,44071
500	1,12316	1,22623	1,29201	1,30077	1,23515	1,08722	0,86426	0,58868	0,29097
600	1,08791	1,14286	1,15190	1,10526	1,00000	0,84211	0,64557	0,42857	0,20879
800	1,05141	1,06290	1,02850	0,94767	0,82601	0,67399	0,50437	0,32944	0,15908
800	1,01510	0,98914	0,92310	0,82266	0,69680	0,55574	0,40902	0,26429	0,12688
900	0,98020	0,93308	0,83486	0,72414	0,60000	0,47059	0,34228	0,21951	0,10497
1000	0,94761	0,86529	0,76202	0,64669	0,52682	0,40806	0,29427	0,18771	0,08951
1100	0,91802	0,81577	0,70259	0,58593	0,47110	0,36150	0,25904	0,16459	0,07833
1200	0,89189	0,77419	0,65468	0,53846	0,42857	0,32653	0,23288	0,14754	0,07011
1300	0,86952	0,74010	0,61667	0,50172	0,40047	0,30028	0,21340	0,13491	0,06404
1400	0,85102	0,71300	0,58724	0,47382	0,37201	0,28079	0,19903	0,12562	0,05958
1500	0,83671	0,69243	0,56535	0,45336	0,35444	0,26675	0,18872	0,11898	0,05640
1600	0,82642	0,67802	0,55024	0,43939	0,34251	0,25727	0,18178	0,11452	0,05426
1700	0,82024	0,66949	0,54138	0,43124	0,33560	0,25179	0,17778	0,11195	0,05303
1800	0,81818	0,66667	0,53846	0,42857	0,33333	0,25000	0,17647	0,11111	0,05263

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{108} \left\{ F(\rho, 0) f(0) + F(\rho, 360^\circ) f(360^\circ) + 4 \left[ F(\rho, 10^\circ) f(10^\circ) + F(\rho, 30^\circ) f(30^\circ) + \dots + F(\rho, 330^\circ) f(330^\circ) \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[ F(\rho, 20^\circ) f(20^\circ) + F(\rho, 40^\circ) f(40^\circ) + \dots + F(\rho, 340^\circ) f(340^\circ) \right] \right\} \quad (4)$$

Con máquina de calcular de multiplicación automática que permita acumular producciones parciales (como la máquina eléctrica "Madas" tipo 20 A.V.) este cálculo se realiza en pocos minutos.

Ejemplo: Sea calcular la integral de Poisson (2) relativa a

$$f(t) = \cos t + \cos 2t + 2$$

t	f(t)
02	4,00000
102	3,92450
202	3,70573
302	3,36603
402	2,93969
502	2,46914
602	2,00000
702	1,57598
802	1,23396
902	1,00000
1002	0,88666
1102	0,89194
1202	1,00000
1302	1,18356
1402	1,40761
1502	1,63397
1602	1,82635
1702	1,95488
1802	2,00000

que proporciona el cuadro de valores adjunto.

La integral (2) se calcula adosando esta tablilla a la tabla de  $F(t, \rho)$ , obteniéndose los resultados siguientes:

$\rho$	Valor aprox.	valor exacto
0,1	2,10999	2,11
0,5	2,75035	2,75
0,8	3,3931	3,44
0,9	3,48198	3,71

El valor exacto está dado por la solución de (1):

$$u(\rho, \varphi) = 2 + \rho \cos \varphi + \rho^2 \cos 2\varphi$$

Segundo procedimiento de cálculo.

La fórmula de Schwarz<sup>(1)</sup> permite calcular en forma más simple la integral de Poisson.

El valor de la integral de Poisson en el punto  $O$  ( $\rho=0$ ) es



$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

como hemos recordado en el Capítulo I, fórmula 16.

Sea, ahora, calcular

$$u_A = u(\rho, \varphi)$$

Por medio de la función lineal

$$z' = \frac{z - \rho e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - \rho z}$$

se transforma el círculo y la circunferencia en sí mismos y el punto  $A$  en el  $A'$  y es

$$u_A = u_{A'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt'$$

Como la transformación lineal conserva los ángulos, al segmento  $A'P'$  corresponderá un arco de circunferencia  $AP$  normal a la circunferencia de radio 1 o sea tangente al radio  $OP$ .

Llamando  $Q$  al punto opuesto a  $P$  respecto de  $A$ ,  $OQ$  resulta paralelo a la tangente  $A'A$  y por tanto

$$\widehat{Q_0 O_2} = \widehat{M A P_0} = \widehat{P' A' P'_0} = t'$$

---

(1) J. Rey Pastor: "Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas" p. 90 Buenos Aires (1918).

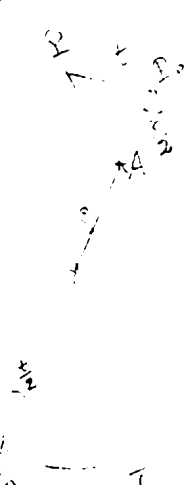
Llamando  $\tau$  al arco variable  $\varphi$  es  $dt' = d\tau$  y por tanto

$$u_A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d\tau$$

que es la fórmula de Schwarz.

Esta fórmula reduce el cálculo de la integral de Poisson a una simple suma si se utiliza una tabla que dé los valores de  $t$  correspondientes a incrementos de  $\tau$  constantes (por ejemplo  $\Delta\tau = 10^\circ$  en la tabla 2).

Para construir la tabla debemos estudiar la relación entre  $t$  y  $\tau$ . Consideremos el cuadrilátero inscripto  $PP_0Q_0$  y los triángulos  $QPP_0$  y  $QPQ_0$ . Es



$$\frac{\text{area } \triangle QPP_0}{\text{area } \triangle QPQ_0} = \frac{PP_0 \times PQ}{PQ_0 \times QQ_0} = \frac{PQ \times AP_0 \times \sin t}{PQ \times AQ_0 \times \sin t} = \frac{AP_0}{AQ_0}$$

Además por ser  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1$  recto es:

$$\text{tg } \frac{t}{2} = \frac{PP_0}{PQ_0} \qquad \text{tg } \frac{\tau}{2} = \frac{QQ_0}{PQ_0}$$

$$\text{tg } \frac{t}{2} : \text{tg } \frac{\tau}{2} = \frac{PP_0 \times PQ_0}{PQ_0 \times QQ_0} = \frac{AP_0}{AQ_0} = \frac{1-p}{1+p}$$

y por tanto

$$\text{tg } \frac{t}{2} = \text{tg } \frac{\tau}{2} \cdot \frac{1-p}{1+p}$$

Para  $p = 0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,5 \ 0,6 \ 0,7 \ 0,8 \ 0,9$  hemos calculado los valores de  $t$  correspondientes a  $\tau$  variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  cada  $10^\circ$  (Tabla 2)

*esta es la tabla que se usa*

NOTA SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA DERIVADA DE UNA  
FUNCION ARMONICA EN EL CONTORNO.

La propiedad conocida de las funciones armónicas  $u(x,y)$  de adquirir sus valores máximo y mínimo en el contorno se conserva en las derivadas parciales respecto de  $x$  y de  $y$  de cualquier orden puesto que estas nuevas funciones son también armónicas.

En cambio, supuesto  $\left| \frac{du}{ds} \right| < k$  siendo  $s$  el arco del contorno y  $K$  un número positivo, no se puede decir, en general, que esta derivada esté acotada en el interior para cualquier dirección. Lo probaremos con el siguiente

Ejemplo:

La función  $f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  está definida en el interior del círculo  $|z| < 1$  siendo además convergente absolutamente en la circunferencia  $|z| = 1$ .

La parte real  $u(x,y)$  de esta función analítica define una función armónica que en el contorno toma los valores

$$\bar{r}(\vartheta) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\vartheta}{2} + \frac{\vartheta^2}{4} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

Esta función es continua y acotada y su derivada respecto de  $s$  (o de  $\vartheta$ ) es continua acotada para todo  $0 < \vartheta < 2\pi$ , siendo discontinua solo para  $x = 1$  (en donde  $\vartheta = 0$  ó  $2\pi$ ).

La función derivada

$$f'(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = -\frac{1}{z} \log(1-z)$$

tiene como parte real  $u'(x,y)$ . Considerando en esta superficie la sección  $y = 0$  se tiene la curva  $\sum \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \log(1-x)$  que es infinita en  $x=1$

A P E N D I C E

LA ANALOGIA DE LA MEMBRANA

Para la deducción de la ecuación de la membrana debe calcularse el mínimo de la integral

$$\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (1)$$

Supuesto que las derivadas  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y}$  son pequeñas respecto a la unidad y se desarrollan solo dos términos de la raíz, la integral a hacer mínima es

$$\iint \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

que es la integral de Dirichlet. El mínimo de esta integral si existe verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad (3)$$

Surge así la posibilidad de resolver empíricamente, mediante una membrana, el problema del potencial, esto es calcular valores de una función  $u(x,y)$  que tome sobre el contorno del recinto  $D$  valores prefijados y que satisfaga en el contorno a la ecuación (3). Esto es lo que se aplica, por ejemplo, en la determinación de las tensiones con los métodos de la fotoelasticidad <sup>(1)</sup>.

---

(1) E.E. Weibel: "Application of Soap Film Studies to Photoelastic Stress Determination". Assoc. Int. des Ponts et Charpentiers. Memoires v3 (1935) p. 421-38.

Del mismo autor: ver Schweizerische Bauzeitung v.105 (1935) p. 289 y



Sin entrar en la explicación de las técnicas adoptadas para la determinación de las ordenadas  $u(x,y)$  y que pueden estudiarse en los trabajos que se mencionan en la nota, conviene hacer algunas observaciones sobre la determinación del potencial por la analogía de la membrana.

Las ordenadas de la membrana, esto es las que hacen mínima la integral ( 1 ) satisfacen no a ( 3 ) sino a la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad ( 4 )$$

que es la ecuación diferencial de las superficies de área mínima. (Superficies de curvatura media nula) (1).

Por ejemplo, la superficie

$$u = \frac{1}{\lambda} [ \log \cos \lambda x - \log \cos \lambda y ] \quad ( 5 )$$

que es de área mínima, no satisface la ecuación ( 3 ) idénticamente.

---

H y Am. Soc. Mech. Eng. Transactions v. 56 (1934) p. 637 y 649.

J. G. Mc Givern - H. L. Sapper: "Complement a la théorie de la Photoelasticité. Utilisation d'une membrane en caoutchouc". Genie Civil, v. 103 (1933) p. 495. Sobre el mismo tema en Am. Soc. Mech. Eng. Transactions, v. 56 (1934) p. 601-605.

(1) La relación entre el problema de superficie mínima y el potencial puede verse en el trabajo de R. Courant: "Plateau's Problem and Dirichlet Principle". Annals of Mathematics, v. 38 (1937) No 3.

La utilización de la membrana de jabón para el cálculo mecánico de la superficie mínima es analizada por R. Courant: "Soap film Experiments with minimal surfaces", The American Mathematical Monthly, v. 47 (1940) p. 169.

te puesto que es

$$\Delta u = -\frac{\lambda^2}{\omega^2 \lambda x} + \frac{\lambda^2}{\omega^2 \lambda y} \quad \text{FORMA}$$

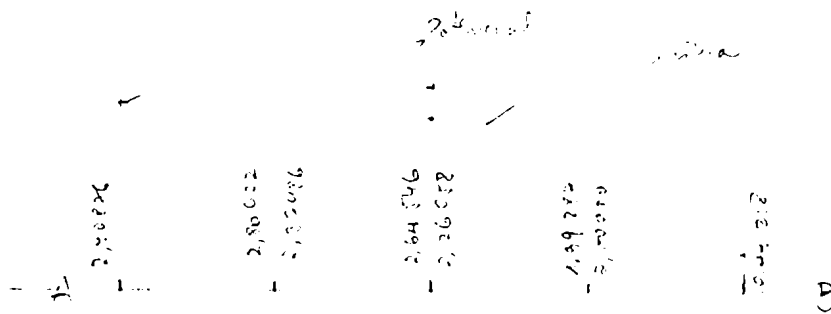
Si en un cuadrado de lado igual a 1,56 se toman los valores

3.96687	3.93208	3.89870	3.86722	2.00000
2.40878				-0.44218
2.14878				-0.18160
2.03370				-0.06732
2.00000	1.96610	1.83182	1.57124	-0.03312

consignados en la figura (dados por la expresión (5) con  $\lambda = 1$ ) y se determinan los valores de la función potencial con el procedimiento de los puntos múltiples, explicando anteriormente, resultan respecto a la solución

que da la membrana (5), diferencias apreciables.

Sección AB.



Como se ve con el ejemplo, la analogía de la membrana falla en el caso en que los valores de las pendientes son elevados; y si para reducirlos se toman módulos más pequeños en las escalas, la precisión de las medidas de las ordenadas disminuye considerablemente. En consecuencia, la analogía puede usarse solo en ciertos casos y dado que el método de los puntos múltiples es de aplicación tan fácil no se justifica que se lo sustituya por el de la membrana.

*Handwritten signature*