Teoría de las funciones D lambda

Ferrari, María Angélica Lucrecia

1942

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

TESIS

PARA OPTAR AL TÍTULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

TEORÍA DE LAS FUNCIONES D_λ

POR

MARÍA ANGÉLICA LUCRECIA FERRARI

---o---

Sobre la Transformación de Laplace, no incluída en los tratados generales de Análisis (salvo un Capítulo que le dedica S. Pincherle en "Gli elementi della Teoría delle funzioni analitiche") existe ya una obra de con junto publicada por Doetsch "Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation" en que sistematiza los más im portantes resultados conocidos, pero refiriéndose ex clusivamente a integrales de Riemann.
Sobre la integral de Riemann-Stieltjes que constituye su generalización inmediata y a veces indispensable , no existe obra de conjunto análoga a la de Doetsch, aunque sí Memorias dispersas, especialmente de Widder, y el Curso sobre Series e Integrales D del Doctor Rey Pastor, pero faltando una teoría sistemática.
Hay además otra generalización, que en dicho Curso fué desarrollada para integrales de Riemann paralelamente con la Teoría de Series de Dirichlet, que consiste en tomar como factor exponencial $e^{-z\lambda(r)}$ en vez del e^{-zr} de la transformación clásica y que es el adoptado por Widder en su generalización para integrales de Riemann Stieltjes. Es claro que en ese caso la integral de Stieltjes se reduce a una de Riemann perdiendo por tanto interés, mientras que la introducción de ese factor $\lambda(r)$ que da origen a la transformación D_λ permite organizar una teoría más general que comprende a las Series de Dirich -

let y one no es reducible a la clásica Transformación de Laplace por mero cambio de variable si no se imponen a $\lambda(r)$ condiciones restrictivas, que, solo excepcionalmente nos hemos visto precisados a suponer.

Es tan sencillo el desarrollo de esta Teoría, que aún en los casos en que se supone $\lambda(r)$ derivable es útil dar los teoremas en forma general pues así resultan aplicables a las transformaciones del tipo Hermite y otras, sin necesidad de efectuar cambio de variable.

Agradecemos al Doctor Julio Rey Pastor la dirección en el desarrollo del tema por él propuesto, y la atención benevolente con que guió nuestros primeros pasos en la investigación.

-------- - ------

M. A. Ferrari

ÍNDICE

------0------

SEMIPLANO DE ACOTACION

Dada una función D_λ, puede ocurrir que su módulo esté acotado en un semiplano $R(z) \geq \sigma$; en ese caso, se llama abcisa de acotación de:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(\tau)}\, d\alpha(\tau)$$

al número μ, extremo inferior de los σ, es decir:

$$\mu = \inf \sigma$$

tales que:

$$|f(z)| < M = M(\sigma) \quad \text{para} \quad R(z) \geq \sigma$$

El semiplano $R(z) \geq \mu$ se llama semiplano de acotación.

Entramos a considerar la relación que existe entre las abcisas de acotación, de convergencia uniforme y de convergencia absoluta, y algunos casos en que puede determinarse sobre ciertas hipótesis, el semiplano de acotación.

Casos en que la acotación de f (z) en un semiplano es inmediata.

1º Si en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, la integral D_λ converge absolutamente, está f(z) acotada en el semiplano $R(z) \geq x_0$.

En efecto:

$$\left| f(z) \right| = \left| \int_0^\infty e^{-(z-x_0)\lambda(r)} e^{-x_0\lambda(r)} d\alpha(r) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-(x-x_0)\lambda(r)} e^{-x_0\lambda(r)} \left| d\alpha(r) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-x_0\lambda(r)} \left| d\alpha(r) \right|$$

que converge por Hipótesis, y llamando entonces K a su valor, es :

$$\left| f(z) \right| \leq K \qquad \text{para} \qquad x \geq x_0$$

2º Si la integral D_λ converge uniformemente para $R(z) \geq x_0$, f(z) está acotada en el mismo semiplano.

En efecto, según un Teorema ya demostrado, si la integral converge en x_0, f(z) tiende uniformemente a cero en cualquier punto del ángulo arc. $(z - x) \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, cuando el punto tiende a infinito; por tanto, converge hacia cero en las rectas que formen con el eje real un ángulo, menor que $\frac{\pi}{2}$

Además, un Teorema demostrado en los trabajos de Seminario, establece: "Si la integral converge uniformemente para $R(z) \geq x_0$, f(z) tiende

de uniformemente acero en las lineas verticales"
Por lo tanto como,consecuencia de los dos Teoremas enunciados, en el semiplano $R(z) \geq x_0$, es :

$$|f(z)| < f(x_0) = K$$

Teniendo en cuenta las dos conclusiones anteriores, es inmediato que, designando por μ , γ y ∂ , respectivamente, a las abscisas de acotación, de convergencia uniforme y de convergencia absoluta de f(z), se verifica:

$$\mu \leq \gamma \leq \partial$$

Veremos ahora otras condiciones que aseguran la acotación de f(z)
Tendremos en cuenta para ello, los siguientes Lemas de Análisis General: (Doetsch pag. 56)

LEMA 1ª Dada una función $\varphi(z)$ regular en un ángulo simétrico con respecto al eje real, de vértice $z_0(x_0; 0)$ y amplitud $2\alpha \leq 2\pi$, si en los lados del ángulo la función $\varphi(z)$ está acotada $|\varphi(z)| \leq M$ y en el interior es $\varphi(z) = O\left(e^{\varepsilon r \frac{\pi}{2\alpha}}\right)$ siendo $r = |z - z_0|$ (esdecir de orden $\frac{\pi}{2\alpha}$ y tipo mínimo) entonces es $|\varphi(z)| \leq M$ en todo el ángulo.
Este Lema es aplicación del Principio general de Phragmen y Lindelöff.

LEMA 2ª Si $\varphi(z)$ es regular en el semiplano $R(z) \geq x_0$, y cumple las siguientes condiciones:

1ª) $|\varphi(z)| \leq M$ para $x = x_0$

II) $|\varphi(z)| = O\left(e^{|y|^k}\right)$ uniformemente en $x > x_0$, con $k > 2$, es decir , $\varphi(z)$ es por lo menos de orden 2 en las líneas verticales.

III) $|\varphi(z)| \leq M$, en el ángulo $|\text{arc.}\ (z-x_0)| \leq \theta$, donde es

$$\frac{k-2}{k}\,\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Entonces es $|\varphi(z)| \leq M$ en el semiplano $R(z) \geq x_0$.

Utilizaremos además el siguiente :

Teorema Auxiliar

Si $f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$ converge para $z = z_0$, $f(z)$ está acotada en cada ángulo $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ con vértice en z_0 .

Demostración.

En efecto es así, pues, de acuerdo con una transformación demostrada en los Trabajos de Seminario, es:

$$f(z) = (z - z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)\lambda(r)}\, S(r, z_0)\, d\lambda(r)$$

donde

$$S(r, z_0) = \int_0^r e^{-z_0\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

y , como en z_0 la integral converge, es:

$$|S(r, z_0)| < M$$

Luego:

$$|f(z)| < |z - z_0| \int^\infty e^{-(x-x_0)\lambda(r)}\, M\, d\lambda(r) =$$

$$= \frac{M\,|z - z_0|}{-(x - x_0)}\, e^{-(x-x_0)\lambda(r)}\Big|_0^\infty$$

Para $r = 0$, la exponencial vale uno, y para $r \to \infty$ y $x > x_0$, la expo nencial tiende a cero. en consecuencia :

$$\left| f(z) \right| < \frac{M\,|z-z_0|}{(x-x_0)}$$

y si el punto z es interior al ángulo $\theta < \frac{\pi}{2}$, como el coseno es decreciente en el primer cuadrante, es:

$$\left| f(z) \right| < \frac{M}{\cos\theta}$$

lo que demuestra el teorema.

TEOREMA

Si la función regular f(z) , definida por

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(\tau)}\, d\alpha(\tau)$$

de abscisa de convergencia c . se puede prolongar analíticamente en el semiplano $x \geq \sigma$ ($\sigma \leq c$) y cumple las siguientes condiciones:

a) $|f(z)| \leq M$ sobre $x = \sigma$

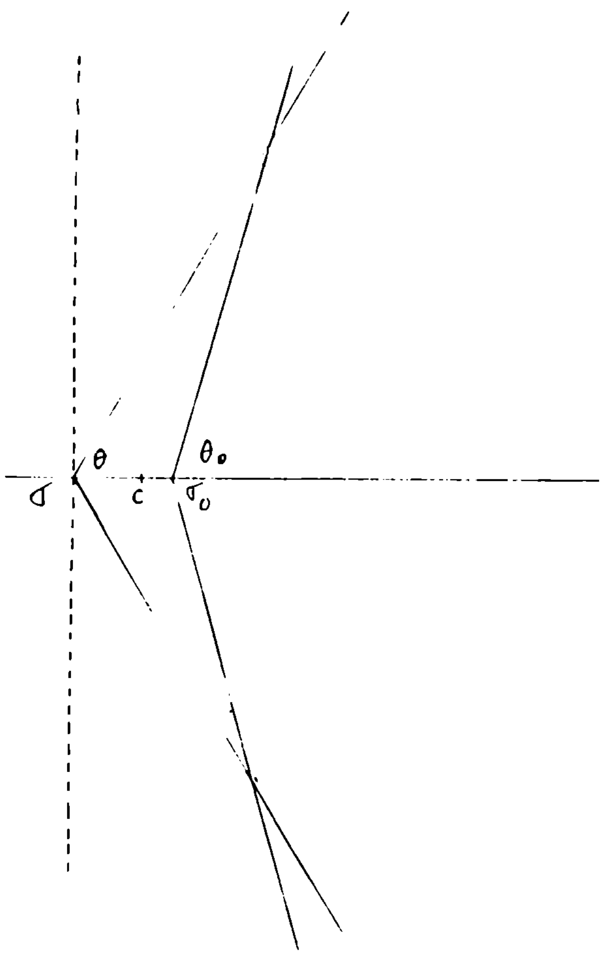
b) $|f(z)| = O\left(e^{|y|^k}\right)$ uniformemente para $x > \sigma$, donde k es fijo pero arbitrariamente grande. (es decir, es de ordenfinito en las rectas verticales)

entonces es $|f(z)| \leq M$ en el semiplano $x \geq \sigma$.

Demostración.

Si elegimos $\sigma_0 > c$, en todo ángulo $2\theta_0 < \pi$ con vértice en σ_0 y simétrico con respecto al eje de las x, se verifica, según el Teorema auxiliar anterior, que

$$|f(z)| < M_1 \qquad (I)$$



Considerando con vértice en σ el ángulo simétrico con respecto al eje x $2\theta < 2\theta_0$, en la región de 2θ común con $2\theta_0$, está $|f(z)|$ acotado, según (I), y en la región finita restante de 2θ está, naturalmente, acotada.

Teniendo en cuenta esta conclusión y las condiciones impuestas en la Hipótesis, resulta que la función f(z) en el ángulo 2θ satisface las exigencias del Lema 2º, y, en consecuencia está acotada, es decir:

$$|f(z)| < M$$

en el semiplano $R(z) \geq \sigma$.

TEOREMA

Si la función $$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

está acotada sobre una recta interior al semiplano de convergencia a la derecha de esta recta, la función se mantiene menor que esa misma cota.

Demostración

En efecto por Hipótesis, en la recta $R(z)=\sigma$ es $|f(z)|\leq M$.

Además según un Teorema que hemos demostrado, que dice: "Si la integral B_λ converge en z_0, es

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}d\,\alpha(r)=o(|y|)$$ uniformemente para todo $x\geq x_0+b$."

y por lo tanto es:

$$f(z)=O\left(e^{|y|^k}\right)$$

verificándose así, las condiciones del Teorema anterior; en consecuencia es válida la conclusión, y es

$$|f(z)|\leq M$$ en todo el semiplano.

---------o--------

TEOREMA

Si la integral $$f(z)=\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}d\,a(r)$$

tiene un semiplano de acotación ($x\geq\sigma$) es : $\log M(x)$ una función convexa de x.

Demostración

En todo el semiplano de acotación es $f(z)$, una función regular y acotada; por lo tanto, cumple las condiciones del Teorema de las Tres Rectas, que dice "Si $f(z)$ es regular y acotada en la faja $\sigma_1\leq x\leq\sigma_2$ y llamamos $M(x)$ al extremo superior de $|f(z)|$ en la recta $R(z)=x$

(límite que es finito por ser acotada la función) se verifica que : log $M(x)$ es función convexa de x ; simbólicamente:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \log M(x_1) & 1 \\ x_2 & \log M(x_2) & 1 \\ x_3 & \log M(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

o sea:

$$M(x_2)^{x_3-x_1} \leqslant M(x_1)^{x_3-x_2} \cdot M(x_3)^{x_2-x_1}$$ »

En consecuencia el Teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN

Si $f(z)$ tiene un semiplano de convergencia absoluta, tiene un semiplano de acotación que comprende al anterior, y por el Teorema anterior es log $M(x)$ función convexa de x.

TEOREMA

Si $\alpha(r)$ es creciente, en el semiplano de convergencia es log $f(x)$ una función convexa.

DEMOSTRACIÓN

Para $R(z) = x$, es:

$$\left| f(z) \right| = \left| \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) \right| \leqslant \int_0^\infty e^{-x\lambda(r)} d\alpha(r) = f(x)$$

y , por lo tanto:

$$M(x) = f(x)$$

Como por ser $\alpha(r)$ creciente, el semiplano de convergencia simple coincide con el de convergencia absoluta, podemos aplicar la observación anterior y , por tanto:

$$\log f(x) \text{ es función convexa.}$$

---------o--------

UNA CONDICIÓN SUFICIENTE PERO NO NECESARIA PARA QUE

(f(z) SEA UNA FUNCIÓN DEL TIPO D_λ

Orden y tipo de una función entera.

Unos de los problemas que se presentan en la Teoría de las Funciones determinantes es el de establecer las condiciones que debe reunir una función f(z) , para ser una función D_λ Nosotros estudiamos el caso, en que por ser f(z) analítica y nula en el infinito, puede asegurarse que es una función D_λ , siempre que $\lambda(r)$ cumpla ciertas condiciones.
Pero veremos luego, que esta condición suficiente no siempre es necesaria, salvo el caso en que la función determinante es entera y de orden unidad.
La consideración del tipo de la función $\alpha(r)$ permite determinar la región de analiticidad de f(z).

TEOREMA

Si $f(z)$ es una función analítica y nula en el infinito, y $\lambda(r)$ es continua e infitamente creciente, es :

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r)$$

desde un z en adelante .

Demostración.

Por las condiciones que $f(z)$ debe cumplir por hipótesis es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z^{n+1}}$$

donde

(1) $$\overline{\lim} \left(|a_n|\, n!\right)^{\frac{1}{n}} = k \geq 0$$ pero finito

de donde se deduce

(2) $$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$$

Formemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \lambda(r)^n$$

que converge, pues

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\, \lambda(r)^n} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\, \lambda(r) = 0$$ por (2)

y la convergencia es uniforme en todo intervalo finito.

Si multiplicamos esta serie por $e^{-z\lambda(r)}$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, a_n\, \lambda(r)^n$$

y la integramos término a término, respecto de $\lambda(r)$ veremos que la serie que resulta es uniformemente convergente; en efecto

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-x\lambda(r)} \lambda(r)^n \, d\lambda(r)$$

tiene por mayorante

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \lambda(r)^n \, d\lambda(r)$$

Integrando por partes

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \lambda(r)^n \, d\lambda(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left. \frac{e^{-x\lambda(r)}}{-x} \lambda(r)^n \right|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} n \, \lambda(r)^{n-1} \, d\lambda(r)$$

Para $x > 0$, el primer término se anula, e integrando por partes nuevamente:

$$(5) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n}{x} \left[\cancel{\left. \frac{e^{-x\lambda(r)}}{-x} \lambda(r)^{n-1} \right|_0^{\infty}} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} (n-1) \lambda(r)^{n-2} \, d\lambda(r) \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{x^2} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \lambda(r)^{n-2} \, d\lambda(r)$$

y repitiendo la integración por partes, resulta:(*)

$$(5) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| \, n!}{x^{n+1}} \; .$$

serie que es independiente de r y que, para x mayor que el radio

(*) Se podría evitar este cálculo por medio de un cambio de variable, pero según se dijo en la introducción, preferimos deducirlo directamente.

de convergencia k, converge según (I) .

Si la serie mayorante converge, la (4) converge uniformemente, luego es lícita la integración término a término de (3) .

Si repetimos con la (4) la reiterada integración por partes realizada con la (5), resulta

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-z\lambda(r)} \lambda(r)^n d\lambda(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{z^{n+1}} = f(z)$$

Por otra parte acabamos de ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-z\lambda(r)} \lambda(r)^n d\lambda(r)$$

converge uniformemente, luego, podemos permutar la sumatoria con la integral, en consecuencia :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-z\lambda(r)} \lambda(r)^n d\lambda(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda(r)^n \right) d\lambda(r)$$

y como la serie del integrando converge uniformemente y representa por tanto una función continua, existe para cada r la integral:

$$\alpha(r) = \int_0^{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda(r)^n \right) d\lambda(r)$$

y por las propiedades de la integral de Stieltjes:

resulta

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \, d\alpha(r)$$

Orden y Tipo de una Función entera

Recordamos estas definiciones para aplicarlas en los Teoremas que figuran a continuación.(Ludwig Bieberbach "Lehrbuch der Funktionen theorie ")

Orden Dada la función entera $f(z)$, sea $M(r)$ el máximo de su valor absoluto para $|z|=r$.
Si existe un número positivo ρ tal que, dado un ε arbitrariamente pequeño, para cualquier r es :

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

y para algún r suficientemente grande se verifica

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

se dice que la función es de orden ρ.
es inmediato que

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

Hay también funciones de orden nulo y de orden infinito.

Tipo Dada una función de orden ρ, si existe la acotación:

$$M(r) < e^{A r^{\rho}}$$

para $A \geq 0$ y r suficientemente grande,y σ es el límite inferior de los números A que cumplen esta condición, la función se llama de orden ρ y tipo σ ; en particular, si $\sigma > 0$ lafunción se dice de tipo normal; si $\sigma = 0$ de tipo mínimo, y si no existe algún A que veri fiee la acotación anterior, de tipo máximo.

Es inmediato que

$$\sigma = \overline{\lim}\ \frac{\log M(r)}{r^{\rho}}$$

Extendemos estas definiciones en la siguiente forma:

Dadas las funciones de variable real $\alpha(r)$ (función compleja) y $\lambda(r)$ (real e infinitamente creciente) , si existe un número positivo ρ tal que, dado un ε arbitrariamente pequeño, para cualquier r es :

$$|\alpha(r)| < e^{\lambda(r)^{\rho+\varepsilon}}$$

y para algún r suficientemente grande

$$|\alpha(r)| > e^{\lambda(r)^{\rho-\varepsilon}}$$

se dice que la función $\alpha(r)$ es de orden ρ con respecto a $\lambda(r)$.

Si se verifica además que:

$$|\alpha(r)| < e^{A\,\lambda(r)^{\rho}}$$

para $A \geq 0$ Y r suficientemente grande, y σ es el límite inferior de los númerod A que cumplen esa condición, la función $\alpha(r)$ es de orden ρ y tipo σ con respecto a $\lambda(r)$.

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que la función definida por:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) = f(z)$$

sea analítica y nula en el infinito, y tenga una singularidad en la circunferencia de radio $|z| = k$, es que $\alpha(r)$ sea una función entera de orden unidad y tipo k ($k \geq 0$; $k \neq \infty$) con respecto a $\lambda(r)$, siendo $\lambda(r)$ estrictamente creciente .

Demostración.

Condición necesaria- supongamos que f(z) sea analítica y nula en el infinito y k su ardio de convergencia, por lo tanto:

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z^{n+1}}$$

y

$$(2) \qquad \overline{\lim} \left(|a_n| \cdot n!\right)^{\frac{1}{n}} = k$$

y de acuerdo con el Teorema anterior, la generatriz correspondiete es la función $\alpha(r)$ tal que

$$\alpha'_{\lambda}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \lambda(r)^n$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$$

es

$$(3) \qquad \overline{\lim} \quad n\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = k \cdot e$$

Por otra parte, siendo:

$$\alpha'_{\lambda}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \lambda(r)^n$$

es

$$\alpha'_\lambda(0) = a_0 \qquad \alpha''_\lambda(r) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \lambda(r)^{n-1}$$

$$\alpha''_\lambda(0) : 1 a_1 \qquad \alpha'''_\lambda(r) : \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \lambda(r)^{n-2}$$

$$\alpha'''_\lambda(0) = 2.1.\, a_2$$

y, así siguiendo:

$$\alpha_\lambda^{(n+1)}(0) = n!\, a_n$$

Reemplzando en (3)

$$(4) \qquad \overline{\lim}\ n \left| \frac{\alpha_\lambda^{(n+1)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = k.e$$

Esta es de acuerdo con la definición, condición necesaria y sufi ciente para que $\alpha(r)$ sea una función de orden unidad y tipo k con respecto a $\lambda(r)$.

Condición suficiente - Si suponemos que $\alpha(r)$ verifica las condicio nes del enunciado, se satisface (4), que implica (3) y (2); en con secuencia k es el radio de convergencia de (I) y, por lo tanto f(z) es analítica fuera del círculo $|z| = k$.

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que la función definida por :

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} d\,\alpha(r)$$

sea analítica en todo el plano excepto en el origen es que $\alpha(r)$ sea una función entera, y satisfage la desigualdad

$$|\alpha(r)| < e^{\varepsilon\lambda(r)}$$

para todo ε positivo tan pequeño como se quiera.

En efecto: Según el Teorema anterior, la condición necesaria y suficienete es que $\alpha(r)$ sea una función entera de orden unidad y de tipo mínimo con respecto a $\lambda(r)$.

Pero esto equivale a la desigualdad

$$|\alpha(r)| < e^{\varepsilon\lambda(r)}$$

con lo que el Teorema queda demostrado.

SUMA DE SINGULARIDADES

En la memoria "The singularities of function defined by a Dirichlet Series "By D.V.Widder(American Journal of Mathematics -1927) el autor ha demostrado el Teorema que enunciara en C. R. del mismo año(pag.1038) que es una generalización del Teorema de Hadamard relativo a la multiplicación de singularidades de funciones definidas por desarrollos en series de potencia.El teorema citado, de Hadamard, da un resultado inmediato para las series de Dirichlet del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-sn}$, pero deja de ser válido al considerar las series generales de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Widder demuestra el Teorema correlativo para series de este último tipo, y lo extiende, estableciendo que: Si $f(s)$ y $\phi(s)$ admiten respectivamente las singularidades α_i y β_j , cumpliendo ciertass condiciones (que detallamos más adelante) la integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(s)\,\phi(z-s)}{s^{\rho+1}}\,ds$$

admite a lo sumo como puntos singulares, los puntos α_i y $\alpha_i+\beta_j$

Nosotros aplicaremos esta conclusión para el estudio de las singularidades de la función:

$$F(Z)=\int_0^{\infty} e^{-Z\lambda(r)}\,D_r^{-\rho}\alpha(r)\,d\beta(r)$$

Demostraremos luego, un Teorema relativo a la suma de singularidades de dos funciones definidas por series factoriales; para ello estudiaremos previamente, la condición necesaria y suficiente para que una función f(s) sea desarrollable en serie factorial.

------0-----

TOEREMA

Si

$$(1) \qquad f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

converge para $x > a_1$, y

$$(2) \qquad \phi(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\beta(r)$$

converge absolutamente para $x > a_2$, llamando:

$\alpha_k = \alpha'_k + i\ \alpha''_k$ a los puntos singulares de $f(z)$

$\beta_j = \beta'_j + i\ \beta''_j$ a los puntos singulares de $\phi(z)$

y $\gamma_l = \gamma'_l + i\ \gamma''_l$ a los puntos obtenidos por la suma de puntos α_k con puntos β_j; si todos estos puntos son aislados y además existe un número r tal que: las distancias entre las proyecciones de dos puntos α cualesquiera sobre los ejes es mayor que r; la distancia entre dos puntos β y entre dos puntos γ es también mayor que r, es decir, se satisfacen las condiciones:

$$(3) \qquad \begin{aligned} |\alpha'_k - \alpha'_l| &> r \\ |\alpha''_k - \alpha''_l| &> r \\ |\beta_k - \beta_l| &> r \\ |\gamma_k - \gamma_l| &> r \end{aligned}$$

Si además para un número η arbitrariamente pequeño, existen μ y ν tales que:

$$f(z) = O(|y|^{\mu}) \quad \text{uniformemente para} \quad |z - \alpha_k| \geq \eta$$

(4)

y

$$\phi(z) = O(|y|^{\nu}) \quad \text{uniformemente para} \quad |z - \beta_j| \geq \eta$$

(que son las condiciones impuestas por Widder en el Teorema citado) entonces se verifica que la función:

$$F(Z) = \int_0^{\infty} e^{-Z\lambda(r)} D_r^{-\rho} \alpha(r) \, d\beta(r)$$

tiene a lo sumo singularidades, en los puntos β y $\alpha + \beta$; siendo $\rho > \mu + \nu$ y $\rho > \mu$.

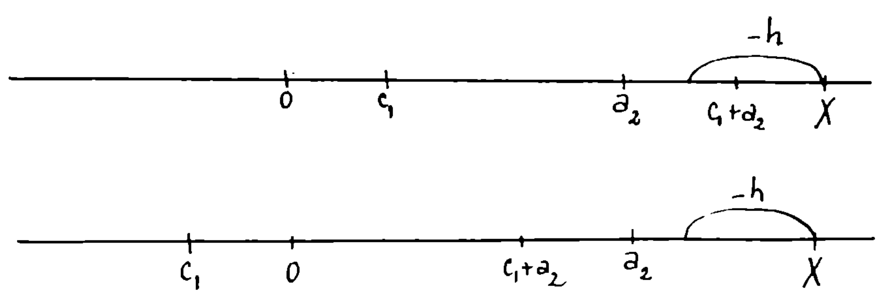
Demostración.

Sea $Z = X + iY$ un punto en que converjan las dos integrales $f(z)$ y $\phi(z)$, tal que:

$$X > c_1 + a_2 \qquad \text{y} \qquad X > a_2$$

por lo tanto es posible encontrar siempre, un número h tal que satisfaga :

$$X - h > a_2 \qquad \text{y} \qquad h > c_1$$



Formemos la función:

$$(5) \qquad F(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)\,\phi(Z-z)}{z^{\rho+1}}\,dz$$

donde $\rho > \mu+\nu$; $\rho > \mu$ y $\rho > 0$.

Esta integral define una función holomorfa en el semiplano $x \geq X$.
En efecto , como h, según hemos visto está a la derecha de c_1, con respecto a $f(z)$ no hay puntos excepcionales, y como $X-h > a_2$, la $\phi(Z-z)$ está considerada a la derecha de a_2 y por lo tanto, con respecto a ella tampoco aparecen singularidades; teniendo en cuenta que los órdenes de $f(z)$ y $\phi(z)$ con respecto a $|y|$ son μ y ν y que $\rho > \mu+\nu$, la integral converge uniformemente en el semiplano indicado.
Si esta función $F(Z)$ se prolonga analíticamente en el otro semiplano los únicos puntos singulares posibles son los β y ($\alpha+\beta$) de acuerdo con el Teorema de Widder que hemos recordado.
Vamos a transformar la función $F(Z)$ para darle la forma con que figura en la Tesis.
Reemplazando en la (5), la función $\phi(Z-z)$ por su valor resulta:

$$(6) \qquad F(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)}{z^{\rho+1}}\,dz \int_0^\infty e^{-(Z-z)\lambda(r)}\,d\beta(r)$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{R}(z) = h$ es:

$$\left| \int_0^\infty e^{-(Z-z)\lambda(r)} d\beta(r) \right| \leq \int_0^\infty e^{-(X-h)\lambda(r)} |d\beta(r)|$$

que converge , ya que $X-h > a_2$; y como además:

$$\int_0^\infty \frac{|f(z)|}{|z|^{\rho+1}} e^{h\lambda(r)} dy$$

(consideraremos la integral de 0 a ∞, e y en lugar de z, pues integramos sobre la recta $h-i\infty$, $h+i\infty$) converge dado que $\rho > \mu$, converge también:

$$\int_0^\infty |d\beta(r)| e^{-X\lambda(r)} \int_0^\infty \frac{|f(z)|}{|z|^{\rho+1}} e^{h\lambda(r)} dy$$

por ser producto de dos integrales convergentes.

Por lo tanto, es lícito el cambio del órden de integración en (6) y resulta:

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-Z\lambda(r)} d\beta(r) \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)}{z^{\rho+1}} e^{z\lambda(r)} dz$$

Pero , según se ha establecido en el Teorema referente a derivadas fraccionarias de $\alpha(r)$ es:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)}{z^{\rho+1}} e^{z\lambda(r)} dz = D_r^{-\rho} \alpha(r) \qquad \text{para} \quad \rho > 0$$

En consecuencia

$$F(Z) = \int_0^\infty e^{-Z\lambda(r)} D_r^{-\rho}\alpha(r)\, d\beta(r)$$

y como F(Z), según hemos visto, tiene a lo sumo singularidades en los puntos β y $\alpha+\beta$,el Teorema queda demostrado.

-----------0---------

En forma análoga , puede demostrarse que, cuando $\rho = 0, -1, -2, \ldots$ cumpliéndose las demás condiciones de Hipótesis, el Teorema *subsiste en la forma:*

$$F(Z) = \int_0^\infty e^{-Z\lambda(r)} D_r^{-\rho} \frac{\alpha(r+0)+\alpha(r-0)}{2}\, d\beta(r)$$

-----------0----------

TEOREMA

Una condición necesaria y suficiente para que una función f(z) pueda ser desarrollada en una serie factorial convergente de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

es que sea una función D_λ

$$(1) \qquad f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

tal que:

$$(2) \qquad \alpha(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n$$

donde los coeficientes a_n cumplen la condición:

$$(3) \qquad |a_n| < n^k$$

para algún valor de k y n suficientemente grande.

Demostración.

Veremos primero que la condicioón es suficiente.

Consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$$

cuyo radio de convergencia es, por lo menos, igula a 1. En efecto siendo por Hipótesis:

$$|a_n| < n^k$$

es

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^k$$

y, en consecuencia:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant 1$$

Luego, la serie de potencias converge para todos los valores de $|Z|$ menores que 1 y, en consecuencia, la (2) converge para:

$$\left| e^{-\lambda(r)} - 1 \right| < 1$$

es decir, para todo $0 \leq r < \infty$, pues para ellos $\lambda(r)$ está definida y es positiva o nula.

Probaremos que, al multiplicar la (2) por $e^{-z\lambda(r)}$ se puede integrar término a término con respecto a $\lambda(r)$, de 0 a ∞.

La serie(2), converge uniformemente en el intervalo arbitrario $0 \leq r \leq R$, pues, para cualquier r de ese intervalo, es:

$$\alpha(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{-\lambda(R)} - 1\right)^n$$

que converge.

Al multiplicarla por el factor decreciente $e^{-z\lambda(r)}$ $(\mathcal{R}(z) > 0)$ continúa siendo uniformemente convergente y, por lo tanto, al considerar su integral con respecto a $\lambda(r)$, de 0 a R, puede permutarse la sumatoria con el signo integral, y resulta:

$$\int_0^R e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) = \int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z\lambda(r)} a_n \left[e^{-\lambda(r)} - 1\right]^n d\lambda(r)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^R e^{-z\lambda(r)} \left[e^{-\lambda(r)} - 1\right]^n d\lambda(r)$$

Ahora bien:

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^R e^{-z\lambda(r)} \left(e^{-\lambda(r)}-1\right)^n d\lambda(r) \ll$$

$$\ll \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \int_0^R e^{-x\lambda(r)} \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^n d\lambda(r) \ll \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^n d\lambda(r)$$

Integrando , término a término, por partes, reiteradamente, la serie mayorante(paso que más adelante justificaremos) resulta:

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^n d\lambda(r) = \sum_{n=0} \frac{|a_n|\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En efecto, consideremos la integral correspondiente a un término cualquiera, por ejemplo para $n=3$

$$\int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^3 d\lambda(r) =$$

$$= \frac{e^{-x\lambda(r)}}{-x} \left[1-e^{-\lambda(r)}\right]^3 \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)}\, 3 \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^2 e^{-\lambda(r)}\, d\lambda(r) =$$

$$= \frac{3}{x} \int_0^{\infty} e^{-(x+1)\lambda(r)} \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^2 d\lambda(r) =$$

$$= \frac{3}{x} \left[\frac{e^{-(x+1)\lambda(r)}}{-(x+1)} \left(1-e^{-\lambda(r)}\right)^2 \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x+1} \int_0^{\infty} e^{-(x+1)\lambda(r)}\, 2\left(1-e^{-\lambda(r)}\right) e^{-\lambda(r)} d\lambda(r) \right]$$

$$= \frac{3\times 2}{x(x+1)}\left[\cancel{\frac{e^{-(x+2)\lambda(r)}}{-(x+2)}(1-e^{-\lambda(r)})}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x+2}\int_0^{\infty} e^{-(x+2)\lambda(r)}e^{-\lambda(r)}\,d\lambda\right]$$

$$= \frac{3\times 2\times 1}{x(x+1)(x+2)}\int_0^{\infty} e^{-(x+3)\lambda(r)}\,d\lambda(r) =$$

$$= \frac{3\times 2\times 1}{x(x+1)(x+2)}\;\frac{e^{-(x+3)\lambda(r)}}{-(x+3)}\Big|_0^{\infty} = \frac{3\times 2\times 1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Luego, la integral correspondiente al término general es de la forma:

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

con lo que se justifica la igualdad (5).

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|\,n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

converge para $x > k+1$; en efecto , como

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|a_n|\,n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} : \frac{|a_{n-1}|\,\underline{|n-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\;\frac{n}{x+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$$

su radio de convergencia es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}$$

es decir, el mismo que el de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^x}$$

puesto que, para ésta:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{|a_n|}{n^x} : \frac{|a_{n-1}|}{(n-1)^x} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^x$$

y esta última serie converge, según la condición (3), para $x > k+1$

Es decir, la serie mayorante converge uniformemente , y queda justificada así, la integración término a término.

Luego, la serie(4) converge uniforme y absolutamente para cualquier R tan grande como se quiera , y puede escribirse:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n d\lambda(r) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-z\lambda(r)} \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n d\lambda(r)$$

o sea:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n d\lambda(r)$$

y repitiendo para el segundo miembro, el procedimiento seguido para la integral de módulos, su valor resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

en consecuencia:

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

y, como por Hipótesis

$$(7) \qquad f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

de (6) y (7)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

con lo que queda demostrado que la condición es suficiente.

Para ver que es también necesaria, supongamos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

converge para x suficientemente grande.

Por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^x}$$

converge para algún valor positivo de x , por ejemplo, para $x = k$. Luego, su término general tiende a 0 y para n suficientemente grande es:

$$\frac{|a_n|}{n^k} < 1$$

es decir, los coeficientes a_n cumplen la condición

$$|a_n| < n^k$$

y por lo tanto

$$\alpha(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n$$

es una función determinante de la función generatriz definida por la serie factorial

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \, n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

---------0---------

De los Teoremas anteriores, se obtiene una consecuencia relativa a la suma de singularidades, en el caso en que las funciones generatirces están definidas por series factoriales.

Supongamos las funciones $f(z)$ y $\phi(z)$ definidas respectivamente por las series:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

ambas convergentes para x suficientemente grande, De acuerdo con el último Teorema, estas funciones son generatrices:

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d A(r)$$

y

$$\phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \beta(r)\, d\lambda(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d B(r)$$

donde

$$A(r) = \int_0^{r} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

y

$$B(r) = \int_0^{r} \beta(r)\, d\lambda(r)$$

y tales que:

$$\alpha(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n$$

$$\beta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(e^{-\lambda(r)} - 1\right)^n$$

Si las singularidades de $f(z)$ y $\phi(z)$ que llamemos α_i y β_j respectivamente, cumplen las condiciones (3), impuestas en el Teorema relativo a la suma de singularidades, y las funciones $f(z)$ y $\phi(z)$ son con respecto a $|y|$ del orden establecido en ese mismo Teorema, para poder aplicarle nos falta ver unicamente que $\phi(z)$ converge absolutamente, y en efecto es así, pues:

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-z\lambda(r)} d\beta(r) \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right)^n d\lambda(r)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_n|\, n!}{x\,(x+1)\cdots(x+n)}$$

serie que según hemos visto es convergente.

Luego, si $\rho > \mu + \nu$, $\rho > \mu$ y $\rho > 0$, se verifica que:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} D_r^{-\rho} A(r)\, d\beta(r)$$

tiene singularidades a lo sumo, en los puntos β_j y $\alpha_i + \beta_j$.

FUNCIONES D_λ DESARROLLABLES EN SERIES DE FRACCIONES

En los teoremas relativos a este tipo de funciones, haremos uso de ciertos teoremas generales, para cuya demostración, en el caso particular de series uniformemente convergentes e integrales de Riemann, Bronwich, remite a series dobles; Hamburger (M. Z. 4 pág. 192) los demuestra unicamente para series de potencia e integrales de Riemann, si bien afirma que se puede generalizar (H. ... 7) .

Nosotros hemos extendido los resultados, a integrales de Stieltjes y aún en el caso de convergencia no uniforme, mediante el teorema de Osgood- Arzelá .(*)

En base a estos resultados demostramos por una parte que: dada una función f(z) meromorfa, desarrollable en serie de fracciones simples, cumpliéndose además ciertas hipótesis es:

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r)$$

y encontramos la expresión de $\alpha(r)$ correspondiente.

Por otra que: partiendo de ciertas condiciones de $\alpha(r)$, se puede asegurar la existecia de la f(z) correspondiente y que es desarrollable en serie de fracciones .

---------O---------

(*) Que generalizamos para dicho tipo de integrales.

TEOREMA

Sean infinitas funciones $f_n(x)$ continuas en el intervalo $(0;\infty)$

Si las series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

y

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

convergen uniformemente para todo x , y $\varphi(x)$ es una función de variación acotada definida en $0 \leq x < \infty$, tal que converja una de las dos expresiones siguientes:

(a) $$\int_0^{\infty} |d\varphi(x)| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)| \, |d\varphi(x)|$$

Entonces se verifica:

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cdot d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x) \, d\varphi(x)$$

Demostración.

1º Supongamos que converja (a).

Si consideramos una suma parcial , de 0 a n es:

(I) $$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{n} |f_n(x)| \, |d\varphi(x)| \leq \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \, |d\varphi(x)|$$

por ser todos los términos positivos.

Pero el primer miembro expresa una integral de una suma finita de términos, puede por tanto integrarse término a término, es decir:

(2) $$\int_0^\infty \sum_0^n |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \sum_0^n \int_0^\infty |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

de (I) y (2)

$$\sum_0^n \int_0^\infty |f_n(x)|\cdot|d\varphi(x)| \leq \int_0^\infty \sum_0^\infty |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

Esta igualdad es válida para cualquier n, y , como la integral del segundo miembro converge por Hipótesis, el límite para $n \to \infty$ del primer miembro, cumplirá también:

(3) $$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| \leq \int_0^\infty \sum_0^\infty |f_n(x)|\,|d\varphi(x)$$

Como hemos supuesto que la serie converge uniformemente, en un intervalo finito $0 \leq x \leq R$, podemos integrar término a término :

(4) $$\int_0^R \sum_{n=0}^\infty |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \sum_{n=0}^\infty \int_0^R |f_n(x)|\,|d\varphi(x)$$

y como:

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^R |f_n(x)|\cdot|d\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty |f_n(x)|\cdot|d\varphi(x)|$$

por ser el integrando positivo, podemos escribir:

$$\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

Como esta desigualdad se verifica para todo R y la integral del primer miembro converge por Hipótesis, para $R \to \infty$ es:

$$(5) \qquad \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

de (3) y (5)

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

Como la integral del primer miembro es convergente, según hemos supuesto, la serie de valores absolutos del segundo miembro, también converge, y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, d\varphi(x)$$

converge absolutamente; en efecto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} f_n(x)\, d\varphi(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

Consideremos la suma parcial:

$$S_n(x) = \sum_{0}^{n} f_n(x)$$

Se verifica:

$$\int_{0}^{\infty} S_n(x)\, d\varphi(x) = \sum_{0}^{n} \int_{0}^{\infty} f_n(x)\, d\varphi(x)$$

y tomando límites:

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} S_n(x)\, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f_n(x)\, d\varphi(x)$$

Vamos a demostrar que:

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} S_n(x)\, d\varphi(x) = \int_{0}^{\infty} f(x)\, d\varphi(x)$$

En efecto:

$$\int_{R}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

por ser el resto de una integral que converge por Hipótesis.
Dado que $\tilde{f}(x)$ es mayor que $|f(x)|$ y que $|S_n(x)|$ es:

$$(9) \qquad \left| \int_{R}^{\infty} \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) \right| \leq 2 \int_{R}^{\infty} \tilde{f}(x)\, |d\varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otra parte, siendo $\varphi(x)$ una función de variación acotada es:

$$\int_0^R |d\varphi(x)| = K$$

y por la convergencia uniforme de $f(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq R$ es desde un n en adelante:

$$\left| f(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$$

y por lo tanto:

$$(10) \qquad \left| \int_0^R \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) \right| \leq \int_0^R \left| f(x) - S_n(x) \right| \left| d\varphi(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2K} \int_0^R |d\varphi(x)| = \frac{\varepsilon}{2}$$

De (9) y (10)

$$\left| \int_0^\infty \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^R \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) \right| + \left| \int_R^\infty \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) \right| < \varepsilon$$

Es decir:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) = 0$$

o sea:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty S_n(x)\, d\varphi(x) = \int_0^\infty f(x)\, d\varphi(x)$$

que es la (8). Substituyendo en (7)

$$\int_0^\infty f(x)\,d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,d\varphi(x)$$

o sea:

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,d\varphi(x)$$

2ª: Si suponemos, en cambio, la convergencia de (b), se ve facilmente que converge también (a). En efecto:

$$\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^R |f_n(x)|\,|d\varphi(x)$$

por la convergencia de la serie en el intervalo finito $0 \leq x \leq R$/ Pero siendo el integrando positivo en cada uno de los términos de la serie del segundo miembro, dicha serie es menor que la que resulta al extender el intervalo de integración de 0 a.

Luego:

$$\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

Comos el segundo miembro converge, por Hipótesis, y la desigualdad es válida para todd R es:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

En consecuencia

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

también converge, que es la condición (a), por lo tanto, por la demostración anterior, queda establecida también el Teorema en este segundo caso.

------0------

TEOREMA

Si admitimos las mismas condiciones de Hipótesis que en el Teorema Anterior, con excepción de que la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ hacia $f(x)$ y $\tilde{f}(x)$ respectivamente, no es uniforme, la conclusioón de dicho Teorema es igual mente válida.

En efectò: La demostración es exactamente igual a la anterior, salvo en el razonamiento que permite establecer la igualdad (4) y al desigualdad (10).

Para salvar estas lagunas tenemos en cuenta que:

$$\int_0^R \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \lim_{N\to\infty} \int_0^R \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

$$\int_0^R \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \lim_{N\to\infty} \int_0^R \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^R |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

(por el Teorema de Arzelá, generalizado para integrales de Stieltjes(*))

O sea :

$$\int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|\,|d\varphi(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^R |f_n(x)|\,|d\varphi(x)|$$

que es la igualdad (4) .

Para obtener la desigualdad (IO), como de acuerdo con el Teorema de Arzelá es :

$$\int_0^R f(x)\,d\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^R S_n(x)\,d\varphi(x)$$

podemos escribir:

$$\left| \int_0^R \left[f(x) - S_n(x) \right] d\varphi(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

que es la desigualdad (IO). Por lo tanto, el Teorema queda demostrado.

---------0---------

(*) Teorema generalizado de Arzelá : Si una sucesión de funciones integrables $\psi_n(x)$, acotadas en su conjunto en un intervalo (a;b), tienden hacia una función $\psi(x)$ integrable en el mismo intervalo, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

Es sabido que Osgood encontró años después el mismo Teorema en el caso particular de funciones continuas .

TEOREMA

Sea $f(z)$ una función meromorfa, tal que todos sus polos z_ν están situados en el semiplano $\Re(z)<\sigma$ y desarrollable en la serie:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_1^{(\nu)}}{z-z_\nu} + \cdots\cdots\cdots + \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^{m_\nu}} \right)$$

(donde los $a_\mu^{(\nu)}$ son los residuos de las funciones $f(z)\cdot(z-z_\nu)^{\mu-1}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots m_\nu)$ en los polos z_ν)

Supongamos además que la serie :

$$\alpha(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \cdots\cdots + a_{m_\nu} \frac{\lambda(r)^{m_\nu-1}}{(m_\nu-1)!} \right) e^{z_\nu \lambda(r)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(r)$$

sea uniformemente convergente, igual que la serie de módulos correspondientes, en cada intervalo finito $0 < R_0 \leq r \leq R_1$, y que converja una de las dos expresiones siguientes:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma\lambda(r)} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu(r)| \, d\lambda(r)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\sigma\lambda(r)} |\alpha_\nu(r)| \, d\lambda(r)$$

entonces es para toda $\lambda(r)$ infinitamente creciente:

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r) \, d\lambda(r)$$

para $\Re(z) \geq \sigma$.

Demostración

Por las condiciones de la Hipótesis es :

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(r)\, d\lambda(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha_\nu(r)\, d\lambda(r)$$

para $\Re(z) \geq \sigma$ y $\Re(z)$ positiva (de acuerdo con el Teorema general que acabamos de demostrar)

O sea:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \alpha(r)\, d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} \left[a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \cdots\cdots + \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!}\, a_{m_\nu}^{(\nu)} \right] e^{z_\nu \lambda(r)}\, d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} \left[a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \cdots + a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right] d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} a_1^{(\nu)}\, d\lambda(r) + \cdots\cdots + \int_0^{\infty} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!}\, d\lambda(r) \right.$$

Integrando el término primero:

$$\int_0^{\infty} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} a_1^{(\nu)}\, d\lambda(r) = a_1^{(\nu)} \left. \frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)} \right|_0^{\infty} = \frac{a_1^{(\nu)}}{z - z_\nu}$$

Integrando por partes el segundo término:

$$\int_0^\infty e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, a_2^{(\nu)}\, \frac{\lambda(r)}{1!}\, d\lambda(r) =$$

$$= a_2^{(\nu)} \left[\cancel{\frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)}\, \lambda(r)} \Big|_0^\infty + \frac{1}{z-z_\nu} \int_0^\infty e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, d\lambda(r) \right] =$$

$$= \frac{a_2^{(\nu)}}{z-z_\nu}\; \frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)} \Big|_0^\infty = \frac{a_2^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^2}$$

Integrando por partes dos veces el tercer término:

$$a_3^{(\nu)} \int_0^\infty e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, \frac{\lambda(r)^2}{2!}\, d\lambda(r) =$$

$$= a_3^{(\nu)} \left[\cancel{\frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)\; 2!}\, \lambda(r)^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\cancel{2!}\,(z-z_\nu)} \int_0^\infty e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, \cancel{2}\, \lambda(r)\, d\lambda(r) \right] =$$

$$= \frac{a_3^{(\nu)}}{z-z_\nu} \left[\cancel{\frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)}\, \lambda(r)} \Big|_0^\infty + \frac{1}{(z-z_\nu)} \int_0^\infty e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, d\lambda(r) \right] =$$

$$= \frac{a_3^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^2}\; \frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)} \Big|_0^\infty = \frac{a_3^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^3}$$

y así siguiendo con los demás términos de (1), se obtiene en definitiva:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\lambda(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_1^{(\nu)}}{z-z_\nu} + \cdots\cdots + \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^{m_\nu}}$$

pero el segundo miembro es , pro Hipótesis igual a f(z) , luego:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, d\lambda(r) = f(z)$$

para $\mathcal{R}(z) \geq \sigma$.

------0-------

OBSERVACION

Como hemos extendido el Teorema general utilizado, para el caso en que las series convergan simplemente, el Teorema es válido también cuando $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu(r)|$ converge simplemente.

------0-------

TEOREMA

Si $\alpha(r)$ es una función que puede expresarse en todo intervalo finito (R_0 R_1) mediante la serie

$$\alpha(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \cdots + a_m^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right] e^{z_\nu \lambda(r)}$$

que es uniformemente convergente, suponiendo que lo son:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} e^{z_\nu \lambda(r)} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} e^{z_\nu \lambda(r)} ,$$

si además:

$$(1) \qquad \int_0^{\infty} e^{-x\lambda(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| a_1^{(\nu)} e^{z_\nu \lambda(r)} z_\nu \right| d\lambda(r)$$

es convergente, entonces la $\alpha(r)$ es una función de repartición de una función D_λ, definida por la serie convergente:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^{(\nu)} z_\nu}{z - z_\nu} + \frac{a_2^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^2} + \qquad + \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^{m_\nu}} \right)$$

o sea:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} -a_1^{(\nu)} + z \left(\frac{a_1^{(\nu)}}{z - z_\nu} + \frac{a_2^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^{m_\nu}} \right)$$

Demostración.

De acuerdo con la Hipótesis es:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = \int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_1^{(\nu)} + \cdots\cdots\cdots + a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right) e^{z_\nu \lambda(r)}$$

y por la convergencia uniforme de la serie:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d \sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} e^{z_\nu \lambda(r)} + \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} e^{z_\nu\lambda(r)} +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d \sum_{\nu=1}^{\infty} a_3^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^2}{2!} e^{z_\nu\lambda(r)} + \cdots + \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu-1}}{(m_\nu-1)!} e^{z_\nu\lambda(r)}$$

El primer término, dá por resultado:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} e^{z_\nu\lambda(r)} = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} e^{z_\nu\lambda(r)} z_\nu \, d\lambda(r)$$

por la convergencia uniforme.

Pero según (1) , de acuerdo con el Teorema general demostrado

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} e^{z_\nu\lambda(r)} z_\nu \, d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_1^{(\nu)} z_\nu \int_0^\infty e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_1^{(\nu)} z_\nu}{-(z-z_\nu)} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} \Big|_0^\infty = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_1^{(\nu)} z_\nu}{z-z_\nu}$$

para $\mathcal{R}(z) > \sigma$

Integrando por partes el segundo término:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\sum_{\nu=1}^{\infty} a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} e^{z_\nu\lambda(r)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{ e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty a_2^{(\nu)} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} \frac{\lambda(r)}{1!}\, d\lambda(r)\right\}$$

Integrando nuevamente por partes:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} z\int_0^\infty \frac{a_2^{(\nu)}}{1!} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\lambda(r)\, d\lambda(r) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{ \frac{z\, a_2^{(\nu)}}{-(z-z_\nu)\, 1!} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\lambda(r)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{z\, a_2^{(\nu)}}{(z-z_\nu)\, 1!} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, d\lambda(r) =\right.$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_2^{(\nu)} z}{-(z-z_\nu)^2 \cdot 1!} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\Big|_0^\infty = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_2^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^2}$$

que es el valor del segundo término.

Repitiendo los pasos anteriores para el tercer término, se tiene (Integrando tres veces por partes) :

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\sum_{\nu=1}^{\infty} a_3^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^2}{2!} e^{z_\nu\lambda(r)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_3^{(\nu)}}{2!} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\lambda(r)^2 + z\int_0^\infty \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_3^{(\nu)}}{2!}\lambda(r)^2 e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}\, d\lambda(r) =$$

$$= z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_3^{(\nu)}}{2!} \frac{\lambda(r)^2}{-(z-z_\nu)} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ z \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_3^{(\nu)}}{2!} \frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{z-z_\nu} 2\lambda(r)\, d\lambda(r) =$$

$$= z \sum_{\nu=1}^{\infty} a_3^{(\nu)} \frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{-(z-z_\nu)^2} \lambda(r) \Big|_0^{\infty}$$

$$+ z \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_3^{(\nu)} \frac{e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)}}{(z-z_\nu)^2} d\lambda(r) =$$

$$= z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_3^{(\nu)}}{-(z-z_\nu)^3} e^{-(z-z_\nu)\lambda(r)} \Big|_0^{\infty} = \sum \frac{a_3^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^3}$$

que es el valor del tercer término.

Y así siguiendo con los demás términos , hasta el de orden m_ν , se obtiene en definitiva:

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_1^{(\nu)} z_\nu}{z-z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_2^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^2} + \cdots\cdots + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^{m_\nu}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_1^{(\nu)} z_\nu}{z-z_\nu} + \frac{a_2^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{a_{m_\nu}^{(\nu)} z}{(z-z_\nu)^{m_\nu}}$$

que es convergente y define f(z) para $\mathcal{R}(z) > \sigma$.

TEOREMA

Si f(z) es una función regular en todo el plano excepto en los polos z_ν de orden m_ν($\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) situados todos en el semiplano $\Re(z) < \gamma$ y tal que:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r) \tag{1}$$

cúmpliéndose la condición necesaria para la inversión, de que sea $\lambda(r)$ estrictamente creciente , y, en consecuencia

$$\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h-i\infty}^{h+i\infty} \frac{f(z)}{z}\, e^{z\lambda(r)}\, dz$$

Si además existe un k fijo mayor que cero, de modo que: $|z^k f(z)|$ esté acotado sobre los arcos $|z| = \rho_n$ (n $= 1, 2, \ldots\ldots$ $\rho_n \to \infty$). $\Re(z) \leq \gamma$; entonces es:

$$\alpha(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} \frac{\lambda(r)}{1!} + \ldots\ldots\ a_{m_\nu}^{(\nu)} \frac{\lambda(r)^{m_\nu - 1}}{(m_\nu - 1)!} \right) \frac{e^{z_\nu \lambda(r)}}{z},$$

donde los $a_\mu^{(\nu)}$ son los coeficientes de las potencias de exponente negativo, del desarrollo en serie de Laurentz de f(z) en el entorno de z_ν:

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{a_\mu^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(\nu)} (z-z_\nu)^\mu$$

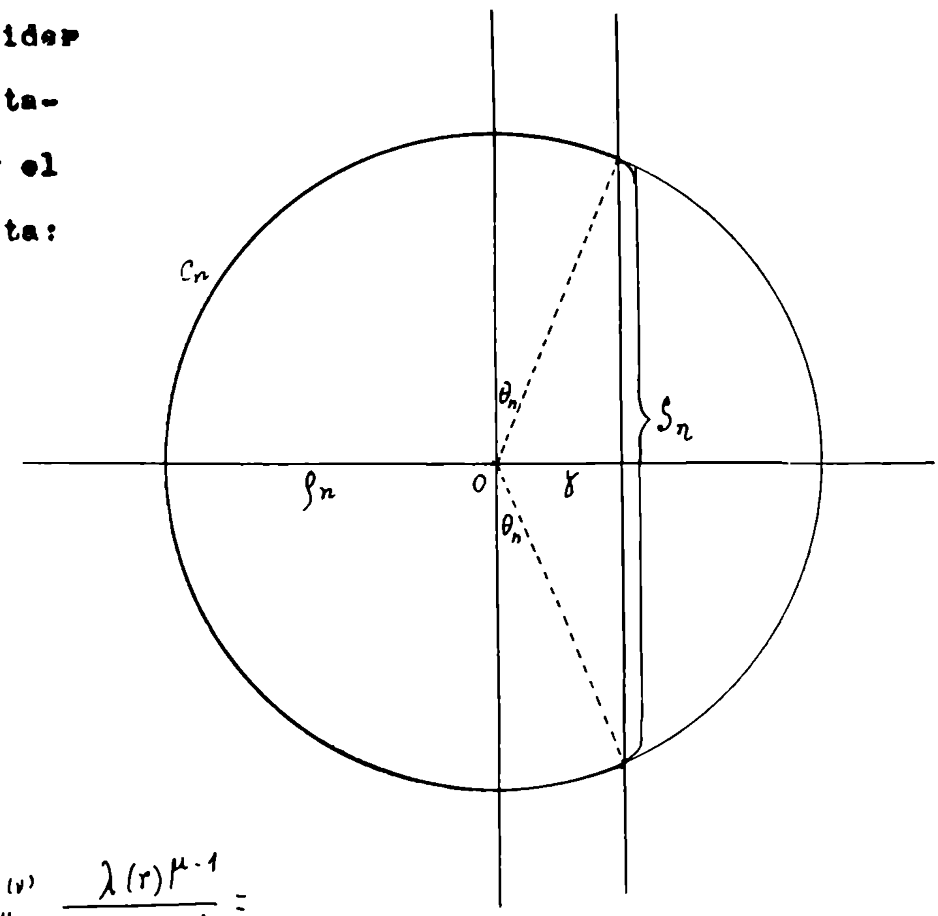
$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z} \left[\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{a_\mu^{(\nu)}}{(z-z_\nu)^\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu^{(\nu)} (z-z_\nu)^\mu \right]$$

Demostración.

El residuo de $e^{z\lambda(r)}\dfrac{f(z)}{z}$ en el polo z_ν es:

$$\frac{e^{z_\nu \lambda(r)}}{z}\sum_{\mu=1}^{m_\nu} a_\mu^{(\nu)}\frac{\lambda(r)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \qquad (*)$$

Siendo k_n el número de polos de f(z) en el círculo de radio ρ_n aplicamos el Teorema del resto de Cauchy, considerando el recinto limitado por el arco C_n y el segmento S_n, resulta:



$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^{k_n}\frac{e^{z_\nu\lambda(r)}}{z}\sum_{\mu=1}^{m_\nu} a_\mu^{(\nu)}\frac{\lambda(r)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_n} e^{z\lambda(r)}\frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} e^{z\lambda(r)}\frac{f(z)}{z}\,dz$$

(*) Resulta de desarrollar $e^{z\lambda(r)}$ en el polo z_ν

$$e^{z\lambda(r)} = e^{z_\nu\lambda(r)}\cdot e^{(z-z_\nu)\lambda(r)} = e^{z_\nu\lambda(r)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(z-z_\nu)^\mu\lambda(r)^\mu}{\mu!}$$

multiplicar por f(z) e integrar; entonces se anulan todos los términos menos la expresión indicada.

Probaremos que la integral, a lo largo de C_n tiende a cero para $r > 0$ y $n \to \infty$.

Hagamos:

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\left| e^{z\lambda(r)} \right| = e^{\rho\cos\theta\,\lambda(r)}$$

$$f(z) = f(\rho e^{i\theta})$$

$$dz = \rho e^{i\theta}\, i\, d\theta$$

Ahora bien:

$$\left| \int_{C_n} e^{z\lambda(r)} \frac{f(z)}{z}\, dz \right| \leq \int_{C_n} \left| e^{z\lambda(r)} \right| \frac{|f(z)|}{|z|}\, |dz|$$

y , al reemplazar en la integral extendida sobre el arco C_n , los límites de integración son $\frac{\pi}{2} - \theta_n$ y $\frac{3\pi}{2} + \theta_n$ y considerando las igualdades anteriores para el radio ρ_n es :

$$|z| = \rho_n$$
$$|dz| = \rho_n\, d\theta$$

Luego: $$\left| \int_{C_n} e^{-z\lambda(r)} \frac{f(z)}{z}\, dz \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\theta_n}^{\frac{3\pi}{2}+\theta_n} e^{\rho_n \cos\theta\,\lambda(r)} \frac{|f(\rho_n e^{i\theta})}{\cancel{\rho_n}} \cancel{\rho_n}\, d\theta$$

Como por Hipótesis es:

$$\left| z^k . f(z) \right| < M$$

$$\left| f(z) \right| < \frac{M}{\rho^k}$$

$$\left| \int_{C_n} e^{-z\lambda(r)} f(z)\, dz \right| < \frac{1}{\rho_n^k} M \int_{\frac{\pi}{2}-\theta_n}^{\frac{3\pi}{2}+\theta_n} e^{\rho_n \cos\theta\, \lambda(r)}\, d\theta$$

$$= \rho_n^{-k} M \int_{\frac{\pi}{2}-\theta_n}^{\frac{3\pi}{2}+\theta_n} e^{\rho_n \cos\theta\, \lambda(r)}\, d\theta = J$$

Consideremos el intervalo de integración, como el duplo del arco ($\frac{\pi}{2} - \theta_n$, π) ; se tiene:

$$J = 2 \rho_n^{-k} M \int_{\frac{\pi}{2}-\theta_n}^{\pi} e^{\rho_n \cos\theta\, \lambda(r)}\, d\theta$$

y aplicando al arco de integración un giro de $-\frac{\pi}{2}$ es:

$$\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta_1$$

$$J = 2 \rho_n^{-k} M \int_{-\theta_n}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho \operatorname{sen}\theta_1 \lambda(r)}\, d\theta_1$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\theta}{2} < \operatorname{sen}\theta < \theta$ **para** $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **,**
consideremos:

1º $\gamma \leq 0$

$$J \leq 2\rho_n^{-k} M \int_{-\theta_n}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho_n \frac{\theta_1}{2} \lambda(r)} \, d\theta =$$

$$= \frac{4M}{\lambda(r)\, \rho_n^{k+1}} \left[e^{\rho_n \frac{\theta_n}{2} \lambda(r)} - e^{-\rho_n \frac{\pi}{4} \lambda(r)} \right]$$

como

$$\theta_n = \operatorname{arc.\,sen} \frac{\gamma}{\rho_n}$$

$$\rho_n \theta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma$$

y por lo tanto:

$J \to 0$ **para** $n \to \infty$

2º $\gamma > 0$

$$J = 2\rho_n^{-k} M \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho_n \frac{\theta_1}{2} \lambda(r)} \, d\theta_1 + \int_0^{\theta_n} e^{\rho_n \theta_1 \lambda(r)} \, d\theta_1 \right]$$

$$J \leq 2\rho_n^{-k} M \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho_n \frac{\theta_1}{2} \lambda(r)} \, d\theta_1 + \int_0^{\theta_n} e^{\rho_n \theta_1 \lambda(r)} \, d\theta_1 \right]$$

$$= \frac{2M}{\rho_n^{k+1} \lambda(r)} \left[1 - 2 e^{-\rho_n \frac{\pi}{4} \lambda(r)} + e^{\rho_n \theta_n \lambda(r)} \right]$$

que tiende a cero pa ra n tendiendo a ∞ .

Luego el segundo miebro de (2) tiene por límite su primer término para n $\to \infty$.

Pero este término para n $\to \infty$ es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{h-i\infty}^{h+i\infty} e^{-z\lambda(r)}\,\frac{f(z)}{z}\,dz$$

que de acuerdo con la fórmula de la inversión es $\alpha(r)$.

El primer miembro para n $\to \infty$ es:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)}\frac{\lambda(r)}{1!} + \cdots\cdots\cdots + a_\mu^{(\nu)}\frac{\lambda(r)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\right)\frac{e^{z_\nu\lambda(r)}}{z}$$

Luego:

$$\alpha(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)}\frac{\lambda(r)}{1!} + \cdots\cdots + a_\mu^{(\nu)}\frac{\lambda(r)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\right)\frac{e^{z_\nu\lambda(r)}}{z}$$

-------0------

PUNTOS REGULARES DE LA FUNCIÓN D_λ EN LA RECTA DE CONVERGENCIA

Como es sabido, en un punto de la recta de convergencia, la integral puede o no ser convergente.

El siguiente teorema, generalización de uno de Riesz relativo a series de Dirichlet, permite reconocer el caracter de algunos de estos puntos.

TEOREMA

Si la función definida por

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r) \qquad (a)$$

es regular en un punto de la recta de convergencia $R(z) = c$ $(c > 0)$ la integral converge en dicho punto y la convergencia es uniforme en todo segmento de la recta $R(z) = c$ constituido por puntos de regularidad de la función .

Demostración .

Puesto que la integral (a) converge para $R(z) > c$ es :

$$\alpha(r) = o\left(e^{c\lambda(r)}\right) \qquad (1)$$

es decir

$$\alpha(r) \cdot e^{-c\lambda(r)} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (3)$$

Consideremos

$$\int_0^r e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

integrando por partes:

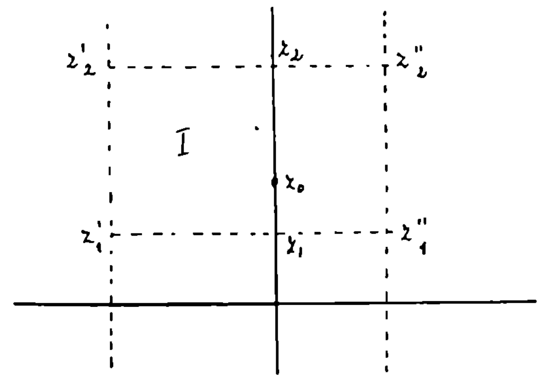
$$(2) \qquad \int_0^r e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) = \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\Big|_0^r + z\int_0^r \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\,\lambda(r)$$

$$= \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)} + z\int_0^r \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\,\lambda(r)$$

Además integrando (a) por partes

$$f(z) = z\int_0^\infty \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\, d\,\lambda(r) \qquad (4)$$

Sea $z_0 = c + y_0 i$ un punto de $R(z) = c$ en que $f(z)$ es función regular. Consideremos el rectángulo z_1' z_2' z_2'' z_1'' entorno del punto z_0; en él la función $f(z)$ es regular.



Formemos la función:

$$\varrho(r,z) = e^{\lambda(r)(z-c)}(z-z_1)(z-z_2)\left(f(z) - \int_0^r e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)\right)$$

Vamos a demostrar que, en el rectángulo es: $\quad |\varrho(r,z)| < \varepsilon \qquad (5)$

De (3) resulta que dado un $\delta > 0$ arbitrario, se puede determinar un número ρ tal que para todo $r > \rho$ es:

$$\left|\alpha(r)\, e^{-c\lambda(r)}\right| < \delta \qquad (6)$$

Ahora bien, para todo z tal que $R(z) = x > c$ es, teniendo en cuenta (2) y (4)

$$\left| f(z) - \int_0^r e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)\right| = \left| z \int_r^\infty \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\,d\lambda(r) - \alpha(r)\, e^{-z\lambda(r)}\right|$$

y como $\quad e^{-z\lambda(r)} = e^{-c\lambda(r)}\, e^{-(z-c)\lambda(r)}$

es, teniendo en cuenta (6)

$$\left| f(z) - \int_0^r e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)\right| < |z|\,\delta \int_r^\infty e^{-(x-c)\lambda(r)}\,d\lambda(r) + \delta e^{-(x-c)\lambda(r)} \qquad \text{para } r > \rho$$

$$= |z|\,\delta \left. \frac{e^{-(x-c)\lambda(r)}}{-(x-c)} \right|_r^\infty + \delta e^{-(x-c)\lambda(r)}$$

$$= |z|\,\delta\, \frac{e^{-(x-c)\lambda(r)}}{x-c} + \delta\, e^{-(x-c)\lambda(r)}$$

$$\left| f(z) - \int_0^r e^{-z\lambda(r)}\,d\alpha(r)\right| < \delta\, e^{-(x-c)\lambda(r)}\left(1 + \frac{|z|}{x-c}\right)$$

y llamando K el máximo de módulo de z en el rectángulo es:

$$\left| f(z) - \int_{0}^{r} e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| < \delta\, e^{-(x-c)\lambda(r)} \left(1 + \frac{K}{x-c}\right) \qquad (9)$$

Sea, además, H el máximo de $|z-z_1|$ $|z-z_2|$ para todo z del rectángulo.

Consideraremos ahora el valor de $|g(r,z)|$ en los lados del rectángulo.

1ª Para todo punto z del segmento (z_1 z''_1) es $|z-z_1| = x-c$ y teniendo en cuenta (9) se deduce:

$$|g(r,z)| < e^{\lambda(r)(x-c)} (x-c)\, H\, \delta\, e^{-(x-c)\lambda(r)} \left(1 + \frac{K}{x-c}\right)$$

$$= \delta\,(x-c)\, H \left(1 + \frac{K}{x-c}\right) \leqslant \delta H\,(d-c+K)$$

2ª Para todo punto del segmento (z_2 z''_2) vale un razonamiento análogo.

3ª Para todo z del segmento z''_1 z''_2 es :

$$|g(r,z)| < e^{\lambda(r)(d-c)} H^2\, \delta\, e^{-(d-c)\lambda(r)} \left(1 + \frac{K}{d-c}\right)$$

$$= \delta\, H^2 \left(1 + \frac{K}{d-c}\right)$$

Sea M el máximo de $|f(z)|$ en el rectángulo y A el máximo de $|\alpha(r)|$ en el intervalo $(0, \rho)$; para todo punto tal que $b \leq x \leq c$ $y_1 \leq y \leq y_2$ es decir del rectángulo o semientorno I, se verifica, teniendo en cuenta (2) y (6)

$$(12)\qquad \left| f(z) - \int_0^r e^{-z\lambda(r)}\, d\alpha(r) \right| < M + \delta e^{-(x-c)\lambda(r)} + K \int_0^\rho |d(r) e^{-z\lambda(r)}|\, d\lambda(r)$$

$$+ K \int_\rho^r |d(r) e^{-z\lambda(r)}|\, d\lambda(r) < M + \delta e^{(c-x)\lambda(r)} + KA \int_0^\rho e^{-x\lambda(r)}\, d\lambda(r) +$$

$$+ K\delta \int_\rho^r e^{-(x-c)\lambda(r)} d\lambda(r) < M + \delta e^{(c-x)\lambda(r)} + KA\lambda(\rho) e^{\lambda(\rho)(c-x)} + \frac{K\delta}{c-x} e^{(c-x)\lambda(r)}$$

4º En el segmento $(z_1' \; z_1)$ es $|z - z_1| = c - x$

$$\left| e^{(z-c)\lambda(r)} (z-z_1)(z-z_2) \right| \leq e^{-\lambda(r)(c-x)} (c-x) H$$

y como $c - x = c - b$ teniendo en cuenta (12)

$$(13)\qquad |g(r,z)| < (c-x) H e^{-\lambda(r)(c-x)} \left(M + KA\lambda(\rho) e^{\lambda(\rho)(c-x)} \right) + \delta H (c-b+K)$$

Si consideramos la función $\varphi(u) = u e^{-\lambda(r)u}$ se ve que su máximo corresponde a $u = \frac{1}{\lambda(r)}$.

En efecto, si

$$\varphi'(u) = e^{-\lambda(r)u} - u\lambda(r) e^{-\lambda(r)u} = 0$$

es $\quad 1 - u\lambda(r) = 0 \qquad u = \frac{1}{\lambda(r)}$

y como $\quad \varphi(0) = \varphi(\infty) = 0 \qquad \varphi\left(\frac{1}{\lambda(r)}\right) = \text{máx}.$

En nuestro caso el máximo de $(c-x)\, e^{-\lambda(r)(c-x)}$ corresponde a $c - x = \frac{1}{\lambda(r)}$ y su valor es:

$$\frac{1}{\lambda(r)} e^{-\lambda(r)\frac{1}{\lambda(r)}} = \frac{1}{\lambda(r)} e^{-1} \qquad \text{para } x < c$$

$$(c-x)\, e^{-\lambda(r)(c-x)} < \frac{1}{\lambda(r)}$$

En consecuencia para r suficientemente grande es en (z_1' z_1)

$$(14) \qquad |g(r,z)| < \delta \left[1 + H(c-b+K)\right]$$

5ª para todo punto del segmento (z_2' z_2) se razona análogamente.
6ª Para los puntos de (z_1' z_2') es $c - x = c - b$ y se obtiene, de (12)

$$|g(r,z)| < e^{-\lambda(r)(c-b)} H^2 \left(M + \delta e^{\lambda(r)(c-b)} + KA\,\lambda(\rho)\, e^{\lambda(\rho)(c-b)} + \frac{K\delta}{c-b} e^{\lambda(r)(c-b)}\right)$$

$$= e^{-\lambda(r)(c-b)} H^2 \left(M + KA\,\lambda(\rho)\, e^{\lambda(\rho)(c-b)}\right) + \delta H^2 \left(1 + \frac{K}{c-b}\right)$$

Las desigualdades (10), (11), (14), (15) permiten afirmar que en el contorno del rectángulo z_1' z_1'' z_2'' z_2' la función $g(r,z)$ cumple la condición (5), y como es regular en el rectángulo su módulo alcanza el máximo en el contorno; por lo tanto es :

$$|g(r,z)| < \varepsilon$$

en todo el rectángulo en torno del punto z_0.
Por lo tanto

$$\left| f(z) - \int_0^r e^{-z\lambda(r)} d\alpha(r) \right| < \frac{\varepsilon}{|z-z_1|\,|z-z_2|}$$

para r suficientemente grande. Es decir, la integral converge en el punto considerado.

Si existe un segmento (z_1 z_2) de la recta $R(z) = c$ tal que todos sus puntos son regulares, la acotación (16), expresa que la convergencia es uniforme en dicho segmento.

NOTA

En el resumen que figura al final, se ve que en la transformación funcional D, la integración de la función $\alpha(r)$ se traduce en una división por z de la función correspondiente $f(z)$.

Veremos en el siguiente Teorema, una generalización de esta propiedad, para las transformaciones D_λ, aunque es mucho menos sencilla y útil que aquella.

TEOREMA

Si

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\alpha(r)$$

converge para un número real $x_0 > 0$ y existe $\lambda'(r) > k$, también converge para x_0 la integral:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, \alpha(r)\, dr$$

y es:

1ª $$x_0 \int_0^\infty e^{-x_0\lambda(r)}\alpha(r)\, dr = \int_0^\infty e^{-x_0\lambda(r)}\, d\,\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)}$$

2ª $$z \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\alpha(r)\, dr = \int_0^\infty e^{-z\lambda(r)}\, d\,\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)}$$

3ª $$\alpha(r) = o\left(e^{\lambda(r)z_0}\,\lambda'(r)\right) \quad \text{para} \quad r \to \infty$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr$$

converge absolutamente si $\lambda'(r) < H$.

Demostración.

Llamemos

$$\phi(\rho) = \int_0^{\rho} e^{-x_0\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr$$

y expresémosla como cociente de las funciones

$$G(\rho) = e^{\lambda(\rho)x_0}\,\phi(\rho) \qquad \phi(\rho) = \frac{G(\rho)}{H(\rho)}$$
$$H(\rho) = e^{\lambda(\rho)x_0}$$

Aplicando el Teorema de Stolz es:

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{G(\rho)}{H(\rho)} = \lim_{\rho\to\infty}\frac{G'(\rho)}{H'(\rho)} = \lim_{\rho\to\infty}\frac{\cancel{e^{\lambda(\rho)x_0}}\left[\lambda'(\rho)x_0\phi(\rho)+\phi'(\rho)\right]}{\cancel{e^{\lambda(\rho)x_0}}\,\lambda'(\rho)x_0}$$

$$= \lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{x_0}\left[x_0\phi(\rho)+\frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)}\right]$$

Ahora bien

$$x_0\phi(\rho)+\frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)} = x_0\int_0^{\rho} e^{-x_0\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr\,\frac{\lambda'(r)}{\lambda'(r)} + \frac{e^{-x_0\lambda(\rho)}\alpha(\rho)}{\lambda'(\rho)}$$

Integrando por partes:

$$x_0\phi(\rho)+\frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)} = -\left.\frac{e^{-x_0\lambda(r)}\,\alpha(r)}{\lambda'(r)}\right|_0^{\rho} + \int_0^{\rho} e^{-x_0\lambda(r)}\,d\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)} + \frac{e^{-x_0\lambda(\rho)}\alpha(\rho)}{\lambda'(\rho)}$$

que , admitiendo $\alpha(0)=0$ se transforma en

$$x_0\,\phi(\rho)+\frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)}=\int_0^{\rho} e^{-x_0\lambda(r)}\,d\,\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{x_0}\left\{x_0\phi(\rho)+\frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)}\right\}\right]=\frac{1}{x_0}\int_0^{\infty} e^{-x_0\lambda(r)}\,d\,\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)}$$

que converge puesto que $\lambda'(r)>K$; y por lo tanto:

$$x_0\int_0^{\infty} e^{-\lambda(r)x_0}\,\alpha(r)\,dr=\int_0^{\infty} e^{-x_0\lambda(r)}\,d\,\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)}$$

2º) Si ambas integrales convergen en x_0 , también serán convergentes en todo z tal que $\mathcal{R}(z)\geq x_0$ y y repitiendo el razonamiento

$$z\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\,\alpha(r)\,dr=\int_0^{\infty} e^{-z\lambda(r)}\,d\,\frac{\alpha(r)}{\lambda'(r)}$$

3-) Como:

$$\lim_{\rho \to \infty} \phi(\rho) = \lim \frac{1}{x_0}\left[\lambda_0 \phi(\rho) + \frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)}\right]$$

es:

$$\lim_{\rho \to \infty} \phi(\rho) = \lim \phi(\rho) + \lim \left[\frac{1}{x_0} \frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)}\right]$$

En consecuencia

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[\frac{1}{x_0} \frac{\phi'(\rho)}{\lambda'(\rho)}\right] = 0$$

o sea:

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{e^{x_0 \lambda(\rho)} \alpha(\rho)}{\lambda'(\rho)} = 0$$

Por lo tanto:

$$\alpha(\rho) = o\left[e^{x_0 \lambda(\rho)} \lambda'(\rho)\right]$$

RESUMEN DE LA TEORÍA PRELIMINAR

DE LAS FUNCIONES D_λ

Dejamos aquí constancia de algunas definiciones y propiedades fundamentales, que son necesarias para el desarrollo de nuestro trabajo. Ellas fueron tomadas, de la recopilación del Curso completo que sobre el Asunto, desarrollara el Doctor Rey Pastor .

------------0-----------

Definición: Se llama función D_λ , a la función f(z) definida por la integral:

$$\int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} \, dA(t)$$

donde $\lambda(t)$, función real de variable real es infinitamente creciente para $t\to\infty$, y A(t), función completa de variable real es continua; o bien A(t) discontinua de variación acotada y $\lambda(t)$ continua pudiendo ocurrir aún que la integral exista siendo las dos funciones de variación acotada con discontinuidades no coincidentes.

Abscisa de convergencia

La abscisa de convergencia de la función D_λ , esta dada por la fórmula :

$$c = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log |A(t)|}{\lambda(t)}$$

y se demuestra que: Si la integral converge en un punto z_0, converge en el semiplano $\mathcal{R}(x) \geq x_0$.

---------0--------

Convergencia uniforme

Si la integral D_λ, converge en un punto z_0, converge uniformemente en todo recinto interior al ángulo menor que π, de vértice en z_0 y simétrico con respecto a la paralela al eje real.

La integral D_λ converge uniformemente en todo dominio acotado interior al semiplano de convergencia.

Si la convergencia de la integral D_λ, es uniforme en la recta $x = x_0$ es también uniforme en el semiplano $x \geq x_0$

---------0--------

Convergencia absoluta

La fórmula de la abcisa de convergencia absoluta de D_λ es:

$$a = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log V_0^t A(t)}{\lambda(t)}$$

Si la intergral D_λ , converge absolutamente en el punto $x = h$, en todo el semiplano $x \geq h$ se verifica que:

$$\left| f(x) \right| \leq \int_0^\infty \left| \alpha(t) \right| e^{-th} \, dt$$

donde $\alpha(t)$ es tal que

$$A(t) = \int_0^t \alpha(t) \, dt$$

Entre las abcisas de convergencia simple , uniforme y absoluta , se verifica la siguiente relación:

$$c \leq u \leq a$$

----------0-------

Número D

El orden de crecimiento de la función $\lambda(t)$ respecto del logaritmo de t, puede medirse por la número :

$$D = \overline{\lim} \frac{Lt}{\lambda(t)}$$

y caracteriza las propiedades de las funciones D_λ .

Se consideran tres tipos de funciones D_λ :

1º $\lambda(t)$ tiene crecimiento superior al de lt es decir $D=0$.

2º $\lambda(t)$ tiene crecimiento logarítmico es decir : $0<D<\infty$.

3º $\lambda(t)$ tiene crecimiento inferior al de lt es decir $D=+\infty$.

Las abscisas de convergencia simple y de convergencia absoluta de las integrales D_λ, de integrando que tiende a cero están ligadas por la acotación:

$$0 \leq a - c \leq D$$

----- 0 ------

La función analítica f(z)

La función f(z) definida por la integral :

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} \, dA(t)$$

es holomorfa en el interior de su semiplano de convergencia y su derivada está expresada por la integral convergente:

$$f'(z) = -\int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} \lambda(t) \, dA(t)$$

La derivada n-sima de $f(z)$ está expresada por la integral:

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \int_c^{\infty} e^{-z\lambda(t)} \lambda(t)^n \, dA(t)$$

que tiene el mismo semiplano de convergencia que la que define $f(z)$.

Si la integral converge en el punto z_0 de la recta de convergencia, su valor en él es el límite de la función $f(z)$ al tender z a z_0 dentro de un ángulo de vértice z_0 interior al semiplano.

---------O--------

Puntos singulares

Si la función de repartición $A(t)$ es monótona, el punto real del eje de convergencia es singular.

--------o--------

Condición suficiente para que una función analítica sea función D .

a) $f(z)$ regular y acotada para $x > c$.

b) $f(z) \to 0$ para $x \to \infty$.

c) Las integrales parciales de la integral de Riemann están acotadas uniformemente.

La condición c) puede ser reemplazada por:

c') Las componentes de f(z) tienden monótonamente a 0 para $x = h$ y $|y| \to \infty$.

Las funciones D_λ, de repartición creciente son completamente crecientes en todo intervalo finito de convergencia; por lo tanto :

Toda función D_λ, cuya $A(t)$ sea creciente es expresable por una serie de polinomios del tipo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-x_1)(x-x_2) \cdots\cdots (x-x_n) \left[1.2 \ldots n\right]$$

Operador D_λ

Aplicar el operador D_λ a una función $A(t)$ es encontrar la función f(z) tal que:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\lambda(t)} d\,A(t)$$

En la pág ina siguiente figura un cuadro de propiedades de este operador.

función $\alpha(r)$	función $f(z)$	
a) Producto por k	Producto por k	$D_\lambda\left[k\alpha\right] = k\,f(z)$
b) Producto por e $^{-h\lambda(t)}$	Incremento de z en h	$D_\lambda\left[e^{-h\lambda(t)}\alpha\right] = f(z+h)$
c) Producto por $-\lambda(t)$	Derivación	$D_\lambda\left[-\lambda(t)\cdot\alpha\right] = f'(z)$
Producto por $\left[-\lambda(t)\right]^n$	Derivación n-sima	$D_\lambda\left[-\overline{\lambda(t)}^n\alpha\right] = f^{(n)}(z)$
D) División por $-\lambda(t)$	Integración	$D_\lambda\left[\alpha:(-\lambda(t))\right] = f^{-1}(z)$
e) Integración	División por z	$D\left[A\right] = \frac{f(z)}{z}$
f) Derivación	Multiplicación por z	$D\left[\alpha'\right] = z\,f(z)$

Las dos últimas operaciones se refiern al tipo D .

BIBLIOGRAFIA

Knopp Konrad- Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.

Bieberbach Ludwig- Lehrbuch der funktionentheorie.

Valiron G.- Théorie général des series de Dirichlet- Mémorial des Sciences Mathématiques - 1926 .

Widder D. V. -The singularities of a function defined by a Dirichlet series- American Journal of Mathematics-1927.

Doetsch Gustav- Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation 1937.-

Rey Pastor Julio- Algoritmos de convergencia -1931

Series e integrales D.-1926.-

Bernstein V. - Séries de Dirichlet.-

Bromwich T. J. - An introduction to the theory of infinite series.

Hamburger - (M. Z. 4 M. Z. 7)

Bohr Harald- Ein satz uber Dirichletsche reihn- Sitzungsberichte der Bayer. Akademie der Wissenschaften zu Munchen-1913.-

Marchaud A. - Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles- Journal de Mathématiques pures et appliquées .-1927.

Smith C. V. L. - The fractional derivative of a Laplace integral-

Duke Mathematical Journal - 8 - 1941.

Hobson E. W. - The Theory of fonctions of a variable and the Theory of Foufier's series- 1926.

Widder D. V. - A generalitzation of Dirichlet's series of Laplace's integrals by means of a Stieltjes integral- Transactios of the American Mathematical Society- 31 - 1929.-

The inversión of the Laplace integral and related moment problem.- Transactions of the American Mathematical Society -1934

Bohr Harald - Uber eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen- Mathematischen Annalen 1922.

Riesz Marcel - Ein Konvergenzsatz fur Dirichletsche Reihen - Actha Mathematica -1916

Bohr Harald- Uber diophantische Approximationen und ihre Anwendungen - Jahrbuch- 1923.

Sur les fonctions presque-périodiques- C. R. 1923