# Contribución al estudio de los espacios abstractos

## Ferrari Descole, Esther

1943

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

TESIS

PARA OPTAR AL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

# "CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LOS ESPACIOS ABSTRACTOS"

POR

ESTHER FERRARI DERCOLE

En la moderna organización axiomática de la Matemática, se propende a sistematizar todas las teorías existentes dentro del cuadro de los espacios abstractos. La Matemática aparece así como una serie de cuerpos deducidos de diversos grupos de postulados y se comprende la importancia que tiene dar a cada propiedad su máximo alcance.

Solamente las demostraciones basadas en el grupo mínimo de axiomas necesarios tienen carácter definitivo.

Multitud de propiedades dadas por Fréchet y otros autores con postulados superabundantes pueden ser deducidas de postulados menos exigentes, y éste es el objeto que nos proponemos en este trabajo.

En el primer capítulo después de recordar el concepto de espacio abstracto y algunos postulados que luego utilizaremos, hemos demostrado ciertas propiedades de conjuntos pertenecientes a:

1. Espacios abstractos que satisfacen al postulado $R_1$.
2. " " " " a los postulados $R_1$ y $R_2$.
3. " " " " " " " $R_1, R_2, K$.

También generalizamos en él algunas propiedades de los espacios accesibles dadas por Fréchet.

En el segundo tratamos el producto cartesiano de espacios topológicos generales. Para introducir una topología en el espacio producto cartesiano, se toman dos definiciones de entor=

no, una de ellas da origen a la topología estricta y la otra a la topología amplia.

Considerados ambos casos separadamente se estudia la naturaleza del espacio producto cartesiano de:

1. Espacios (V)

2. " " que cumplen el postulado $R_2$

3. " " " " los postulados $R_2$ y K

4. " accesibles.

En el tercero damos propiedades de espacios intermedios entre los espacios (V) y los métricos. Tales como la semiregularidad de los espacios $D_o$, la prolongación de las funciones semicontinuas en los espacios $D_o$, la generalización del criterio de convergencia de Cauchy en los grupos topológicos y propiedades de entornos completos y abiertos en los grupos topológicos.

En el último capítulo que trata de la medida del espacio abstracto de los triángulos, representando éste espacio sobre el plano euclideano, resolvemos ciertas problemas de probabilidad referentes a la construcción de triángulos.

Agradecemos sinceramente al Doctor Julio Rey Pastor, Director del Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, la valiosa dirección y ayuda en la realización de este trabajo.

## Capítulo I

### 1 Espacios topológicos generales.

Nos proponemos en este capítulo demostrar algunas propiedades sencillas utiles para lo que sigue y que no se encuentran en las obras de Fréchet, Appert, ni en las memorias que hemos consultado.

Asimismo veremos que postulados minimos se necesitan para demostrar algunas propiedades que Fréchet probó para los espacios accesibles, viendo que no son necesarios todos los postulados $R_1$, $R_2$, $R_3$, 5° que caracterizan tales espacios.

Recordemos que <u>espacio abstracto</u> es un conjunto E de entes arbitrarios que satisfacen a los siguientes postulados:

$F_1$. Cada conjunto X formado por elementos (puntos) del espacio E determina otro conjunto $X'$ llamado derivado de X; y si X no es vacio, sus puntos, pertenezcan o no a X, se llaman de acumulación de X.

$F_2$. El conjunto vacío tiene derivado vacío.

$F_3$. Si el punto a de acumulación de X pertenece a éste, también es de acumulación del conjunto $X - a$; y reciprocamente.

Recordemos también simbolicamente el significado de los postulados $R_1$, $R_2$, $R_3$ y 5°.

<u>Post. $R_1$</u>. Si $X \subset Y$ es $X' \leq Y'$ ó $(X + Y) \geq X' + Y'$

$(X + Y)' = X' + Y'$

<u>Post. $R_2$</u>. $(X + Y)' \leq X' + Y'$

Post. $R_3$ . Un conjunto de un solo punto carece de punto de acu=
mulación.

Post. 5° . $X'' < X'$

Al postulado 5° Appert lo designa "condición $\alpha$ " y al postulado que dice: Todo conjunto completado es completo, lo designa "con= dición $\beta$ ". Este es el postulado de Kuratowski que designaremos: Post. K .

## 2 . Espacios (V)

El nombre de espacios (V) dado por Fréchet a los espacios abstrac= tos que satisfacen al postulado $R_1$ queda justificado al probar la existencia de entornos (voisinages) concordantes con la acumu= lación que defino tales espacios.

Def. 1 . Entorno de un punto p en un espacio (V) es todo conjunto del cual p es interior; es decir: U es un entorno de p, si p pertene= ce a él y no es de ac. U .

Por tanto:

La condición necesaria y suficiente para que un punto sea de acu= mulación de un conjunto X es que todo entorno suyo contenga algún punto de X, distinto de p. (Suponemos que p pertenece a X)

En efecto, si p ac. X todo entorno debe contener algún punto de X distinto de p, pues si hubiera un $U_p$ que no cumpla tal condición quedaría $X - p < U_p$ y como por Def.1 p no es ac. $\bar{U}_p$, tampoco lo sería de $X - p$ por post. $R_1$ y por la condición $F_3$ tampoco lo sería de X.

Recíprocamente, si todo entorno de p contiene algún $x \neq p$ debe ser p ac. X pues no serlo equivale por Def. 1 a que $\bar{X}$ sea entorno de p y por tanto este entorno no contiene ningún x.

Consideremos ahora que p no pertenezca a X.

La condición necesaria y suficiente para que p sea ac. X es que todo entorno suyo contenga algún punto de X.

En efecto, si p ac. X, todo entorno suyo debe contener algún punto de X, pues si hubiera un $U_p$ que no cumpla tal condición, quedaría $X < \bar{U}_p$ y como por Def. 1 p no es ac. $\bar{U}_p$, tampoco lo sería de X por Post. $R_1$.

Recíprocamente, si todo entorno de p contiene algún x debe ser p ac. X pues no serlo equivale por Def. 1 a que $\bar{X}$ sea entorno de p y por tanto este entorno no contiene ningún x.

Cuando se adopta como Hausdorff el entorno como idea primitiva para definir la acumulación resulta inmediatamente que:

El conjunto vacío tiene derivado vacío ($F_2$)

Si es p ac. X y pertenece a él, también es p ac. $(X - a)$ ($F_3$)

Que toda acumulación definida por entornos satisface al post. $R_1$, pues si todo entorno contiene puntos de X, también contiene puntos de Y  X.

Espacios (V)

Recordemos que espacios (V) son los espacios abstractos que satisfacen al postulado $R_1$.

Criterio de continuidad cuando X es un conjunto compacto en sí.

Si X es un conjunto compacto en sí, la condición necesaria y suficiente para que f(x) sea continua superirmente en X es que el conjunto de los valores de X que cumplen la condición: $f(x) \geq a$ sea completo en X para todo número a.

Directo. Si $X_1$ es el conjunto de los valores de X que cumplen la condición $f(x) \geq a$ y $x_n$ una sucesión infinita de puntos de X con el punto de acumulación $x_0$, por el postulado $R_1$ y por ser X compacto en sí, es $x_0$ punto de acumulación de X y pertenece a él. El punto $x_0$, debe pertenecer a $X_1$, es decir $f(x_0) \geq a$, pues si fuese $f(x_0) < a$, por la continuidad superior en $x_0$ sería en un entorno $f(x) < a$, cosa imposible por haber en él puntos $x_n$ en los cuales $f(x_n) \geq a$.

Recíproco. Si f(x) no es continua superiormente en $x_0$, hay un $K > f(x_0)$ tal que en cada entorno de $x_0$ hay algún punto en el cual $f(x_n) \geq k$, luego $x_0$ no pertenece al conjunto $X_1$, definido por la condición $f(x) \geq k$, mientras que los $x_n$ sí, es decir $x_0$ es punto de acumulación de $X_1$ y no pertenece a él.

De manera análoga se demuestra que:

II. Si X es un conjunto compacto en sí, la condición necesaria y suficiente para que f(x) sea continua inferiormente en X es que el conjunto de los valores de X que cumplen la condición $f(x) \leq b$, sea completo en X, para todo número b.

De I y II resulta:

Condición necesaria y suficiente para la continuidad de f(x) en X, siendo X un conjunto compacto en sí, es que sean completos los conjuntos de los valores de x que cumplen las condiciones:

$f(x) \geq a$ y $f(x) \leq b$ para todo a y todo b.

Generalización de algunas propiedades de los espacios accesi bles dadas por Fréchet.

I . El mínimo conjunto completo que contiene a un conjunto X es el completado de X.

Los postulados necesarios para demostrar ésta propiedad son el $R_1$ y el K .

Todo conjunto completo F que contiene a X contiene también a $X'$ (Post. $R_1$ )

Como por el post. K : $[E] = E + E'$ es completo, resulta que: $[E]$ es el menor de los conjuntos completos que contiene a E.

II . El completado de un conjunto denso en sí es un conjunto perfecto.

Veamos que son suficientes los postulados $R_1$, $R_2$ y K .

Por ser X denso en sí: $X + X' = X'$

Por el postulado K los puntos de $X''$ pertenecen a X ó a $X'$, pero por ser X denso en sí los puntos de $X''$ pertenecen a $X'$.

Luego:

$$(X + X') = (X + X')' = X'$$

III . La frontera de un conjunto es un conjunto completo.

Para la demostración son suficientes los postulados $R_1$, $R_2$ y 5.

Si $\bar{X}$ es el conjunto complementario de X, por definición

$$F \text{ (frontera de } X) = \bar{X} \cdot X' + \bar{X}' \cdot X$$

Por verificarse los postulados $R_1$ y $R_2$ la derivación es distributiva, luego:

$$F' = \bar{X} \cdot X'' + \bar{X}'' \cdot X' + \bar{X}' \cdot X'$$

Siendo por la condición ó post. 5° completo todo conjunto derivado resulta:

$$F' < \bar{X} \cdot X' + \bar{X}' \cdot X = F$$

IV . <u>Todo conjunto separable X pertenece a un conjunto completo separable, por ej. al completado de X.</u>

Los postulados necesarios para la demostración son el $R_1$ y el K

Por hipótesis, existe un conjunto numerable N tal que:

$$N < X < N + N' \qquad (1)$$

Por el postulado $R_1$ :

$$N' < X' < N' + N''$$

Por el post. K:

$$N' < X' < N' + N'' < N' + N'' \qquad (2)$$

X pertenece al conjunto complet $X + X'$, veamos si éste es separable.

De (1) y (2):

$$N + N' < X + X' < N + N'$$

$$\therefore \quad X + X' = N + N'$$

Luego:

$$N < X + X' < N + N'$$

Es decir que $X + X'$ es también separable.

V . <u>Todo conjunto separable denso en sí pertenece al derivado de uno de sus conjuntos parciales numerables</u> .

Por ser X denso en sí : $X < X'$

Por ser separable: $N < X < N + N'$

Son suficientes los postulados $R_1$ y 5°

Por verificarse el postulado $R_1$ :

$$N' < X' < N' + N''$$

Por verificarse el postulado 5°:

$$N' < X' < N' + N'' < N'$$

Luego:

$$X' = N' \quad y \quad X < N'$$

VI . <u>Todo conjunto separable perfecto X es el derivado de uno de sus conjuntos parciales numerables.</u>

Los postulados necesarios son el $R_1$ y el 5°

Como todo conjunto perfecto es denso, ya hemos visto en (IV) que :

$$X' = N'$$

Además por ser X perfecto es: $X = X'$

Luego:

$$X = N'$$

VII . Todo conjunto X perfectamente separable y no diluido contiene un conjunto numerable denso en sí .

Para la demostración son necesarios los postulados $R_1$ y el 5°

Siendo X no diluido, existe un conjunto D denso en sí perteneciente a él.

Siendo X perfectamente separable, también es D perfectamente separable y por consiguiente separable.

Por lo tanto, siendo D separable y denso en sí pertenece al derivado de uno de sus conjuntos parciales numerables N (propiedad VI).

Siendo $N < D < N'$ es N denso en sí .

VIII . El nucleo de un conjunto X es el máximo (si existe) de los conjuntos densos en sí contenidos en X

Para la demostración basta con el postulado $R_1$ .

Recordemos que

Nucleo de $X = X \cdot X' = H$

H es pues un conjunto derivado contenido en X. Luego H es denso en si.

Si existe otro K, siendo K denso en sí pertenecerá a $K'$ y por el post. $R_1$ está contenido en $X'$. Luego K estando contenido en X y en $X'$ es parte de H ó coincide con él.

$\therefore$ H es el conjunto máximo denso en sí contenido en X.

Espacios (V) que satisfacen al postulado $R_2$

Anillos de Hausdorff formados por conjuntos abiertos y completos

Recordemos que una familia de conjuntos es un anillo en el sen= tido de Hausdorff cuando la suma y producto de dos conjuntos cualesquiera de la familia es siempre posible y pertenece a la familia.

En los espacios (V) no toda familia de conjuntos abiertos (sea finita ó no) es un anillo de Hausdorff,pues aunque la suma de ~~dos~~ conjuntos es un conjuntos abiertos es un conjunto abierto, el producto de dos conjuntos abiertos,puede no ser abierto.

En los espacios (V) tampoco forman anillo todas las familias de conjuntos completos,pues aunque en este caso el producto de conjuntos completos es completo,la suma de dos conjuntos com= pletos,no es en general conjunto completo.

En cambio,en los espacios (V) que satisfacen al postulado $R_2$ se verifica:

a) Toda familia de conjuntos abiertos forma anillo de Hausdorff.

b) " " " " completos " " " "

Demostración. a) En todo espacio (V) la suma de conjuntos abiertos es un conjunto abierto;y por verificarse el Post. $R_2$ el produc= to de ~~un número~~ finito de conjuntos abiertos es abierto. (1)

b)Por ser un espacio (V),el producto de conjuntos completos es completo;y por el postulado $R_2$ ,la suma de un número finito de conjuntos completos es un conjunto completo. (1)

Conjuntos perfectos.

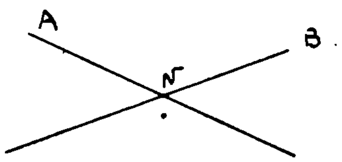
Consideremos una familia de conjuntos perfectos:$E, F, \ldots\ldots, M$

Por ser perfectos: $E = E'$; $F = F'$, ...., $M = M'$

Si se cumplen los postulados $R_1$ y $R_2$

$$E + F = E' + F' = (E + F)'$$

Siendo los conjuntos perfectos son completos,luego por lo visto: $E.F = E'. F' \geqslant (E . F)'$. Sin embargo no puede concuirse la relación inversa,pues cabe que el producto de dos conjuntos sin puntos aislados tengan puntos aislados.




Conjunto A.Conjunto B,tiene el punto aislado N

Luego: "En todo espacio (V) que satisface al postulado $R_2$ cualquier familia de conjuntos perfectos de este espacio no forman un anillo de Hausdorff" .

---

(1) J. Rey Pastor . Teoría de los espacios topológicos (1935), pág. 54,55.

Propiedades de espacios (V) que satisfacen a los postulados $R_2$ y $K$

Ya hemos enunciado el postulado K y es facil ver que es menos exigente que el 5°de Fréchet,el cual no figura en el cuadro de los postulados de Riesz.

I . Todo conjunto X separable denso en sí,pertenece al completado de uno de sus conjuntos parciales numerables.

Por ser X denso en sí,es: $X < X'$

Por ser separable existe un conjunto numerable N tal que:

$$N < X < N + N' \qquad (1)$$

Por el post. $R_1$ :

$$N' < X' < N' + N'' < N + N' \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$N + N' < X + X' < N + N'$$

Luego:

$$X + X' = N + N'$$

$$X' < X' = N + N'$$

II . Todo conjunto X separable perfecto es el completado de uno de sus conjuntos parciales numerables.

Como X es perfecto es $X = X'$ (1)

Por la propiedad anterior era $X' = N + N'$ (2)

De (1) y (2) resulta: $X = N + N'$

III . <u>Dado un número finito de conjuntos, la suma y el producto de las fronteras de estos conjuntos forman un conjunto completo</u>

Sabemos que la frontera de un conjunto X puede expresarse del siguiente modo:

frontera de X $= [X] \cdot [\bar{X}]$

Como por K , $[X]$ y $[\bar{X}]$ son completos, su producto es completo. Luego por verificarse K la frontera de todo conjunto es un conjunto completo.

Puede decirse también que: La suma (producto) de las fronteras de un número finito de conjuntos es un conjunto completo en los espacios (V) que satisfacen al post. $R_{21}$ y al post. K

Anillos con suma, diferencia y producto

Def. 1 Se llama anillo a un conjunto de entes cuando la suma, diferencia y producto de dos cualesquiera del sistema es siempre posible y el resultado pertenece también a él.

Def. 2 Un anillo donde cada elemento A es idempotente, es decir $A^2 = A$, se llama anillo de Boole.

Producto de dos conjuntos X, Y es el conjunto formado por los elementos comunes a los dos.

Def. 3 Suma (S) (según Stone) de dos conjuntos X, Y es el conjunto formado por los elementos de X y los de Y, excepto los elementos comunes a ambos.

Designando por $\Sigma$ la suma ordinaria ó unión de dos conjuntos X, Y al formado por los elementos de X y de Y, resulta:

$$(S) \qquad A + A = 0$$
$$(\Sigma) \qquad A + A = A$$

Def. 4 Diferencia entre dos conjuntos X e Y es un conjunto Z, tal que $Y + Z = X$.

Si consideramos la definición de suma (S), la diferencia siempre es posible.

Además resulta: $X - Y = Y - X = X + Y$

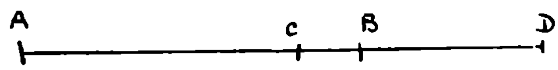
Si consideramos la def. de suma $(\Sigma)$, la diferencia sólo es posible cuando $X \geqslant Y$.

Por consiguiente tomando la def. de suma $(\Sigma)$, como la diferencia en =

tre dos conjuntos cualesquiera no es siempre posible podemos decir que: los conjuntos de un espacio E no forman anillo, respecto de la operación $\Sigma$, pero forman anillo de Stone.

Mientras la definición de suma (S) simplifica como hemos visto algunas relaciones, sucede lo contrario al considerar familias de conjuntos abiertos y completos, aún en el mismo espacio $E_{\omega}$. Basta fijarse en los siguientes ejemplos:

A) Consideremos el espacio formado por los puntos del segmento $\overline{AB}$ y por los puntos del segmento $\overline{CD}$.




$\overline{AB}$ es un conjunto completo.

$\overline{CD}$ " " " "

$\overline{CB} = \overline{AB}.\overline{CD}$ " " " "

En cambio el conjunto suma $(S) = \overline{AB} + \overline{CD}$, no es completo, pues C y B son puntos de acumulación de él y no le pertenecen.

Podemos decir que:

<u>En general los conjuntos completos no forman anillo de Stone, mientras que forman anillo de Hausdorff como ya hemos visto.</u>

B) Consideremos el espacio formado por los puntos de $\langle AB|$ y por los de $|CD\rangle$.

---

(1) En los espacios que satisfacen a los postulados $F_1$, $F_2$, $F_3$, $R_1$ y $R_2$.

## Capítulo II

**Producto cartesiano de espacios topológicos generales**

**Topología estricta.** Si $E = \prod X_b$ es un producto cartesiano de espacios topológicos, cada punto $\underline{x}$ está determinado como producto de sendos puntos $x_b$ llamados sus proyecciones sobre los respectivos espacios factores $X_b$.

Para introducir una topología en el espacio E producto cartesiano de espacios (V) tomaremos como definición de entorno la siguiente:

Def. 1: Entorno del punto $x = (x_b)$ de $E = \prod X_b$ son los productos de entornos cualesquiera de sus proyecciones $x_b$.

I . **Los espacios factores son espacios (V)**

Cada punto tiene infinitos entornos que lo contienen y adoptados para definir la acumulación resulta un espacio (V).

Luego el producto cartesiano de espacios (V) es un espacio (V)

II . **Los espacios factores son espacios (V) que cumplen el postulado $R_1$.**

El postulado $R_1$ dice: Todo punto de acumulación de la suma de dos conjuntos es de acumulación de alguno de ellos. Este postulado equivale a la siguiente propiedad (postulado B de Hausdorff): Dados dos entornos de un punto hay un entorno de éste contenido en ambos.

Sean $U' = \prod_b (U')$, $U'' = \prod_b (U'')$ dos entornos del punto $\underline{x}$ ;como en cada espacio $X_b$ los entornos $U'_b$ y $U''_b$ del punto $x_b$ tienen un entorno común $U_b$ por el postulado $R_i$=B, y el producto $\prod U_b$ constituye por definición un entorno de $\underline{x}$ el cual está contenido en $U'$ y $U''$, resulta que tales entornos U cumplen la condición B.

Por tanto:

Si los espacios factores son espacios (V) que satisfacen al $R_i$ el espacio producto es un espacio (V) que cumple el $R_i$ .

III . <u>Los espacios factores son espacios (V) que cumplen los postulados $R_i$ y C</u> .

El espacio E es un espacio (V) que cumple el $R_i$ .Veamos si se conserva el postulado C.

Recordemos el postulado C:

<u>Post. C</u> .Cada uno de los puntos de un entorno U de a tiene un entorno contenido en U.O sea:Los entornos son abiertos.

Dado el entorno $U = \prod U_b$ del punto $\underline{x} = (x_b)$ producto de los entornos $U_b$, si $y = (y_b)$ es un punto de U, es decir si cada $y_b$ es punto del correspondiente $U_b$, hay un entorno $Y_b$ de $y_b$ contenido en $U_b$ y el producto $(Y_b)$ es un entorno del punto $y = (y_b)$ contenido en el $U = (U_b)$.

Luego el espacio F es un espacio (V) que conserva los postulados $R_i$ y C.

Analogamente si en lugar del postulado C se adopta el menos res =

trictivo K (condición $\alpha$ de Appert) resulta que el espacio E satisface a esta mínima condición.

Basta en efecto, sustituir esta por el postulado topológico ~~esu~~ equivalente:

En cada entorno U de cada punto p, hay otro entorno de p tal que cada uno de sus puntos tiene un entorno contenido en U.

V . <u>Los espacios factores son espacios accesibles.</u>

Se ha visto (1) que el espacio E producto cartesiano de espacios topológicos de Hausdorff es también un espacio topológico de Hausdorff.

Recordemos que espacios topológicos H (2) son los que satisfacen a los postulados A,B,C,D de Hausdorff.

Ya hemos demostrado la conservación de cada postulado A,B,C independientemente de los demás.

Los espacios accesibles de Fréchet y los topológicos de Hausdorff difieren en un solo postulado, pues en los accesibles se cumple además de los A,B,C el siguiente:

---

(1) J.Rey Pastor .Espacios y grupos topológicos.Curso del1939 y 1943

(2) No confundir con los que Fréchet llama accesibles y que designa por ( $\mathcal{H}$ ).

Topología amplia

En vez de tomar entornos en todos los espacios factores se to = man solamente en un número finito de ellos ,dejando libres las restantes coordenadas.Es decir $U = \prod U_b$ donde casi todos los $U_b$ son los respectivos espacios $X_b$.

I . Los espacios factores son espacios (V )

Cada punto $(x_b)$ de E tiene un entorno $(U_b)$producto cartesiano de un número finito de entornos $U_b$ por los restantes espacios $X_b$. Por el mismo razonamiento hecho para la tppología estricta resul= ta que:

El producto cartesiano de espacios (V) es un espacio (V) en la topología amplia.

Veamos si subsisten los restantes postulados.

Dados dos entornos $U = \prod(U_b)$ ,$V = \prod_{W_b < U_b} (V_b)$ del punto $\underline{x}$ en cada espa = cio $X_b$ existe un entorno $W_b < V_b$ ,el cual es de la naturaleza si= guiente:Si ambos son entornos cualesquiera de $x_b$ hay por el pos = tulado B un $W_b$ contenido en ambos;si uno $U_b$ es entorno cualquie = ra y el otro es el espacio $X_b$ ,es claro que $U_b < X_b$ ;finalmente salvo un número finito (que a lo mas es la suma de los números finitos de componentes de U y V)los dos entornos $U_b$ y $V_b$ coinci= den con $X_b$ ,luego resulta un entorno de los adoptados en la topo = gía amplia.Queda así demostrada la conservación del postulado B. Evidentemente se conservan también el C y el D.

## Capítulo III

### Espacios intermedios entre los (V) y los métricos

Dados dos conjuntos completos cualesquira en un espacio $D_e$ (1) ¿ existe una función continua $f(x)$ ,tal que $f(A) \neq f(B)$?

Alexandroff llama espacio <u>normal</u> (2) a un espacio accesible que satisface a la siguiente condición:

$T_3$ .Cualesquiera sean los conjuntos completos $C_1$ y $C_2$ ,existen dos conjuntos sin puntos comunes a los cuales $C_1$ y $C_2$ son interiores.

Urysohn (3) ha dado otra definición de espacio normal equivalente a la anterior:

Para que un espacio accesible sea normal es necesario y suficiente que se pueda definir para todo par A,B de conjuntos completos sin puntos comunes,una función continua $F(x)$ nula sobre A,igual a 1 sobre B y tal que $0 \quad F(x) \quad 1$.

En los espacios métricos la función $F(x) = \dfrac{xA}{xA + xB}$ cumple estas condiciones.

---

(1) J. Rey Pastor.Espacios $D_e$.Rev. de la Universidad Nac. de Tucumán.Mat.y Fis. teórica.Serie A.Vol.I;Diciembre 1940

(2) M. Fréchet.Les espaces abstraits,p. 206

(3) P. Urysohn.Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängender Mengen.Mat. Ann., 94 p p.262

**Semiregularidad de los espacios $D_\bullet$**

Consideremos la función $F(x) = \dfrac{xA}{xA + xB}$ en un espacio $D_\bullet^1$ $(D_\bullet^2)$

En este espacio $xA$ es función cont. sup. (inf.) de $x$.

$xA + xB$ " " " " " " "

Luego en un espacio $D_\bullet^1$ $(D_\bullet^2)$ no podemos decir que la función $F(x) = \dfrac{xA}{xA + xB}$ sea continua superior ó inferiormente, pues en ambos casos $F(x)$ es igual al producto de una función continua superiormente por otra continua inferiormente.

En cambio si B se reduce al punto $p$ y formamos $f(x) = \dfrac{xA}{px + Ap}$ resulta:

$$\text{Si} \quad x \angle A \quad \text{es } f(x) = 0$$

$$\text{Si} \quad x \neq p \quad \text{es } f(x) = \frac{pA}{Ap} \neq 0$$

y $f(x)$ cociente de función continua superiormente (inferiormente) por otra continua inferiormente (superiormente) es continua superiormente (inferiormente).

El espacio $D_\bullet^1$ $(D_\bullet^2)$ es por tanto <u>semiregular</u> llamando así a todo espacio en que existe función continua superiormente (inferiormente) que toma valores distintos en un conjunto completo y un punto arbitrariamente elegidos.

Prolongación de las funciones semicontinuas en los espacios $D_o$

Dada una función $f(x)$ acotada y continua sobre un conjunto com= pleto C de un cierto espacio ¿es posible formar una función continua y acotada $F(x)$ en todo el espacio e igual a $f(x)$ sobre C ?

Este problema fué resuelto por Lebesgue cuando el conjunto C pertenece a un espacio euclideano y por Tietze cuando pertenece a un espacio (D).

Finalmente Urysohn, no sólo demostró la existencia de la función $F(x)$ en los espacios normales, sino que demostró que: La condición necesaria y suficiente para que un espacio sea normal, es que: Dada una función acotada y continua $f(x)$ sobre un conjunto com= pleto C perteneciente a él, se pueda formar una función acotada y continua en todo el espacio e igual a $f(x)$ sobre C.

Queda así resuelto que: En todo espacio $D_o$ no existe tal función $F(x)$, porque los espacios $D_o$ no son en general accesibles, por consiguiente no son en general normales.

Vamos ha demostrar que:

"Si la función $f(x)^{>0}$, está definida en un conjunto completo C de un espacio $D_o^1$ ($D_o^2$) y es continua en él, existe una función semi= continua superiormente (inferiormente) $F(x)$ en todo el espacio y que coincide con $f(x)$ en C."

$$\left|\begin{array}{l} F(x) = f(x) \text{ en } C \\ F(x') = \text{máx.} \dfrac{x'C}{x\,x'} . f(x) \qquad \text{en } C \\ \qquad x < C \\ \qquad x' < \bar{C} \end{array}\right.$$

Como en C es $F(x) = f(x)$ es $F(x)$ continua en C

Veamos fuera de C.

La distancia $x'C$, es función semicontinua superiormente de $x'$.

Para cada $x$, la distancia $xx'$ es función semicontinua inferior = mente de $x'$.

Luego el cociente $\dfrac{x'C}{xx'}$ $(xx' \neq 0)$ es función semicontinua su = periormente de $x'$.

Como para cada $x$, $f(x)$ se conseva constante, para cada $x$ al va riar $x'$, $\dfrac{x'C}{x\,x'} . f(x)$ es función semicontinua superiormente de $x'$, es decir que para un h suficientemente pequeño, si $x'$ varía de $x'$ a $x' + h$, se verifica:

$$\frac{(x' + h)\, C}{x(x' + h)} . f(x) \leq \frac{x'C}{x\,x'} f(x) + \varepsilon$$

Considerando el valor máximo resulta:

$$F(x' + h) \leq F(x') + \varepsilon$$

Queda así demostrado que $F(x)$ es función semicontinua superior =

mente fuera de C.

Falta demostrar ahora que tomando $x'$ suficientemente próximo a $x_o$ ($x_o$ = punto frontera de C), se verificará :

$$F(x') < F(x_o) + \varepsilon$$

Por pertenecer $x_o$ a un espacio $D_o^1$ y ser de acumulación de C existen puntos $x'$ de C tales que $x'x_o < \varepsilon$. Luego como $x\,x_o < x\,x' + x'x_o$ es : $x\,x' > x\,x_o - \varepsilon$ para $x'x_o < \varepsilon$

Además por ser $x'x_o < \varepsilon$ es :

$$x'C < x_oC + \varepsilon$$

Luego: $F(x') < \text{máx.} \dfrac{x_oC}{x\,x_o + \varepsilon} f(x) = \text{máx.} \left( \dfrac{x_o\,C}{x\,x_o - \varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{x\,x_o - \varepsilon} \right) f(x)$

Al tender $\varepsilon$ a cero resulta:

$$F(x') < F(x_o)$$

Queda asi demostrado que:

"Si la función $f(x) > 0$ está definida en un conjunto completo C de un espacio $D_o^1$ y es continua en él existe una función $F(x)$ semicontinua superiormente en todo el espacio y que coincide con $f(x)$ en C".

Analogamente se demostrará:

"Si la función $f(x) > 0$ está definida en un conjunto comple = to C de un espacio $D_0^2$ y es continua en él ,existe una función $F(x)$ semicontinua inferiormente entodo el espacio y que coin= cide con $f(x)$ en C".

$$F(x) \doteq f(x) \quad \text{en } C$$

$$F(x') = \text{máx.} \frac{x'C}{x\,x'} f(x) \quad \text{en } \bar{\dot{C}}$$

$$x < C$$

$$x' < \bar{\dot{C}}$$

Como en C es $F(x) \doteq f(x)$ es $F(x)$ continua en C.

Veamos fuera de C.

Para cada x al variar $x'$, $x\,x'$ es función semicontinua superior mente de $x'$.

$x'C$ es función semicontinua inferiormente de $x'$.

Luego:

$F(x') \doteq \text{máx.} \dfrac{x'C}{x\,x'} f(x) \quad (xx' \neq 0)$ es función semicontinua inferiormente fuera de C.

Falta demostrar ahora que tomando x suficientemente próximo a $x_0$ ($x_0$ = punto frontera de C) se verificará:

$$F(x') > F(x_0) + \varepsilon$$

Por pertenecer $x_0$ a un espacio $D_0^2$ y ser de acumulación de $\bar{C}$ existen puntos $x'$ de C tales que $x_0 x' < \varepsilon$ .

Luego como $x'x \leq x x_0 + x_0 x'$ es: $x x' < x x_0 + \varepsilon$

Además para $x_0 x' < \varepsilon$ es: $x_0 C \leq x'C + \varepsilon$

$$\therefore \quad x'C \geq x_0 C - \varepsilon$$

$$F(x') \geq \text{máx.}\left( \frac{x_0 C}{x x_0 + \varepsilon} f(x) - \frac{\varepsilon f(x)}{x x_0 + \varepsilon} \right)$$

Al tender a cero el número $\varepsilon$ resulta:

$$F(x') \geq F(x_0)$$

Nota. Facilmente se ve que:

"Si la función $f(x) \geq 0$ está definida en un conjunto completo $C$ de un espacio $D_0^1$ $(D_0^2)$ y es semicontinua superiormente (inferiormente) en él existe una funciónsemicontinua superiormente (inferiormente) $F(x)$ en todo el espacio y que coincide con $f(x)$ en $C$."

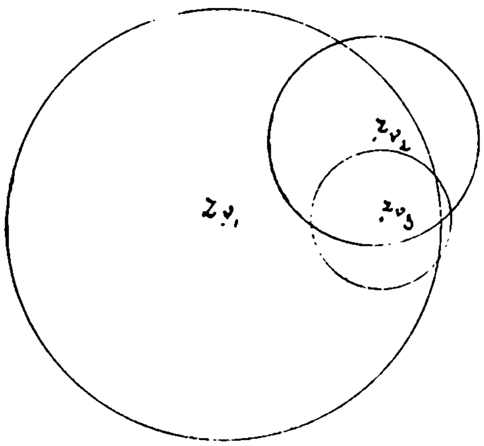
## Generalización del criterio de convergencia de Cauchy

### 1. Demostración del criterio de convergencia de Cauchy en el plano utilizando el teorema de Riesz (1)

Criterio de Cauchy. La condición necesaria y suficiente para que una sucesión de puntos $z_n$ sea convergente es que dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, la diferencia $|z_{n'} - z_{n''}|$ sea menor que $\varepsilon$, para todo par de indices superiores a un valor $\nu$ de n.

Demostración. LLamaremos $C_{(m)}$ a la circunferencia de centro $z_{\nu_m}$ y radio $\frac{1}{m}$ $(m = 1,2,3,\ldots.)$

Si damos a $\varepsilon$ el valor 1, los puntos posteriores a un cierto valor de z que designaremos $z_{\nu_1}$ quedan dentro del circulo $C_{(1)}$.




Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, desde $\nu_2 > \nu_1$, los puntos posteriores a un cierto valor z que designaremos $z_{\nu_2}$ quedan en la interferencia de $C_{(1)}$ y $C_{(2)}$

---

(1) Teorema de Riesz. Dada una familia de conjuntos completos $X^t$ si cualquier número finito de ellos tiene algún punto común situado en el conjunto perfectamente compacto en sí Z, existe algún punto común a todos los conjuntos de la familia.

Si $\varepsilon = \frac{1}{3}$, desde $\nu_3 > \nu_2$, los puntos posteriores a $z_{\nu_3}$ están en la inte=ferencia de $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, y $C_{(3)}$.

Siendo el conjunto de los circulos $C_{(n)}$ perfectamente compacto en sí y los $C_{(n)}$ conjuntos completos tales que cualquier nú=mero finito tiene un punto común, por el teorema de Riesz exis=te un punto de z común a todos los $C_{(n)}$.

Este punto z es el limite de la sucesión $z_n$, puesto que dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un valor $n = \nu_n$ tal que para $z_{\nu_n}$ y todos los términos siguientes, la diferencia $z_{\nu_n} - z$ es en va=lor absoluto menor que $\varepsilon$.

2. <u>Demostración del criterio de convergencia de Cauchy en el plano utilizando el teorema de Cantor</u> (2)

El conjunto de los circulos $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, $C_{(3)}$, ..... antes defini=dos es compacto en sí.

Si llamamos $X_1$ a $C_{(1)}$

$X_2$ al $\Pi\,[C_{(1)} \,.\, C_{(2)}]$

$X_3$ al $\Pi\,[C_{(1)} \,.\, C_{(2)} \,.\, C_{(3)}]$

.............................

(2) <u>Teor. de Cantor</u>. Toda sucesión monótona numerable de conjun=tos parciales completos no vacios de un conjunto compacto tie=ne al menos un punto común a todos. Si el conjunto es compacto en sí, el punto común a todos pertenece a él.

### 3. Generalización

La ventaja de estas dos demostraciones estriba en su caracter topológico que permite generalizar el teorema de Cauchy a espacios no métricos. Tal sucede por ej. en los grupos topológicos en que existe suma y diferencia de puntos y hay una sucesión de entornos $V_1 > V_2 > V >$ ...... del origen que caracterizan la convergencia en ese punto; por tanto en cualquier ~~ot~~ otro punto, por simple traslación.

El teorema generalizado de Cauchy para tales grupos topológicos expresa, por consiguiente:

Condición necesaria y suficiente para que una sucesión $x_n$ de un grupo topológico sea convergente es que para cada indice m exista un indice n tal que todos los puntos $x_{n+1}$, $x_{n+2}$ ..... queden contenidos en el entorno $x_n \; V_m$ .

## Grupos topológicos

### Entornos de los puntos de un grupo topológico

Weil (1) define un grupo topológico de la siguiente manera:

Un grupo topológico G es un grupo abstracto tal ,que se han definido en él entornos de la unidad que deben satisfacer a los siguientes postulados:

G T I. La intersección de todos los entornos de la unidad se reduce a la unidad.(equivale al postulado de separación de Riesz $R_3$ menos exigente que el D de Hausdorff)

G T II. Dados dos entornos de la unidad V y V' existe un entorno V'' de ella tal que: $V'' \subset V \cap V'$. (Es el postulado B de Hausdorff)

G T III. Dado un entorno V de la unidad existe otro entorno V' de ella tal que: $V'(V')^{-1} \subset V$ (Implica el postulado 5° de Fréchet)

G T IV. Dado un entorno V de la unidad y un $x \in G$ existe un V' de la unidad tal que : $V' \subset xVx^{-1}$.

Weil considera solamente entornos de la unidad. Por traslación (producto en el grupo) se definen los entornos en los demás puntos.

---

(1) A. Weil. L'Integration dans les Groupes Topologiques et ses Applications (1942)

Conjuntos completos.

Sea V un entorno completo de la unidad y x un punto cualquiera de G;puede suceder que los conjuntos V y xV estén conectados ó no.

1)Si los conjuntos completos V y xV están conectados tienen p puntos comunes.

2)Si los conjuntos completos V y xV no tienen puntos comunes, no están bien encadenados ni por tanto conectados.

Si V es completo: $V' < V$ ,como también es $(xV)' < xV$ ,resulta:

$$V'(xV) + V(xV)' + V'(xV)' = 0$$

Entornos abiertos.

Del mismo modo:Si V es un entorno abierto de la unidad y x un punto cualquiera de G,puede suceder que los conjuntos V y xV estén conectados ó no.

1)Si los conjuntos abiertos V y xV están conectados tienen puntos comunes.

2)Si los conjuntos abiertos V y xV no tienen puntos comunes no están conectados,pero pueden estar bien encadenados.

a)Si V es abierto,xV es abierto.Luego todo punto de V no es de acumulación de $\overline{V}$,luego no es de acumulación de $Y < \overline{V}$;por tanto $(xV)\ V' = 0$ y analogamente $(xV)'V = 0$

Siendo $(xV)V' + (xV)'V = 0$ resulta:

xV y V no están conectados.

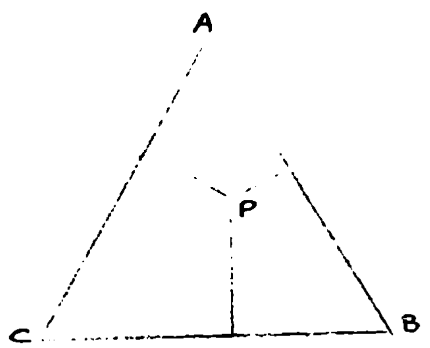
# Capítulo IV

## Medida del espacio abstracto de los triángulos

## Problemas de probabilidad referentes a la construcción de triángulos

Un triángulo queda determinado por tres datos. En lo sucesivo supondremos que los tres datos son segmentos (por ej. lados, alturas, radio del circulo inscripto, etc.). Suponiendo que los tres segmentos con los cuales debe construirse el triángulo se dan al azar, aparece el problema de ver cuál es la probabilidad para que el triángulo sea efectivamente construible y en este caso cuál es la probabilidad de que el triángulo sea acutángulo u obtusángulo.

En primer lugar hay que definir lo que se entiende por dar tres segmentos (datos del problema) al azar. Nosotros supondremos que el método para ello consiste en fijar arbitrariamente un punto P en el interior de un triángulo equilátero y tomar por segmentos las tres distancias de este punto a los lados. Esto equivale a representar el espacio abstracto de los triángulos sobre el plano euclideano y adoptar como métrica del espacio abstracto la de este plano euclideano.

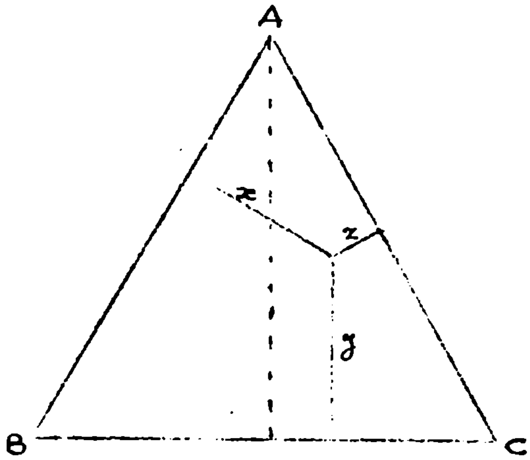



Como medida de un conjunto de triángulos tomaremos pues el área que en el interior del triángulo equilátero ABC llenan los puntos representativos. La medida de todos los casos posibles será pues, el area total del triángulo: con ello se consideran todos los triángulos semejantes como equivalentes.

Consideraremos únicamente algunos casos, aunque naturalmente se podrían plantear muchos más, pues a cada problema de construcción de triángulos corresponde una probabilidad de que la construcción sea posible.

Si los segmentos se dan al azar del modo dicho anteriormente, se impone la condición de que su suma sea constante e igual a la altura del triángulo equilátero.

Esta altura la tomaremos igual a la unidad. Por cosiguiente, la medida de casos posibles es: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .




En lo que sigue:

x será la distancia del punto a $\overline{AB}$

y " " " " " " $\overline{BC}$

z " " " " " " $\overline{AC}$

Consideraremos los siguientes casos:

I _ .x, y lados, z altura.

a) z altura correspondiente al lado no dado.

b) " " " a x.

c) z " " " y.

2 _ x e y lados, z bisectriz correspondiente al lado no dado.

3 - x e y lados, z mediana correspondiente al lado no dado.

4 - x, y, z alturas.

5 - x mediana, y altura, z bisectriz, trazadas desde un mismo vértice.

6 - x e y mediana y altura de un mismo lado, z altura de otro lado.

7 - x e y alturas, z radio del circulo inscripto.

8 - x e y lados, z radio del circulo circunscripto.

**x, y lados z altura.**

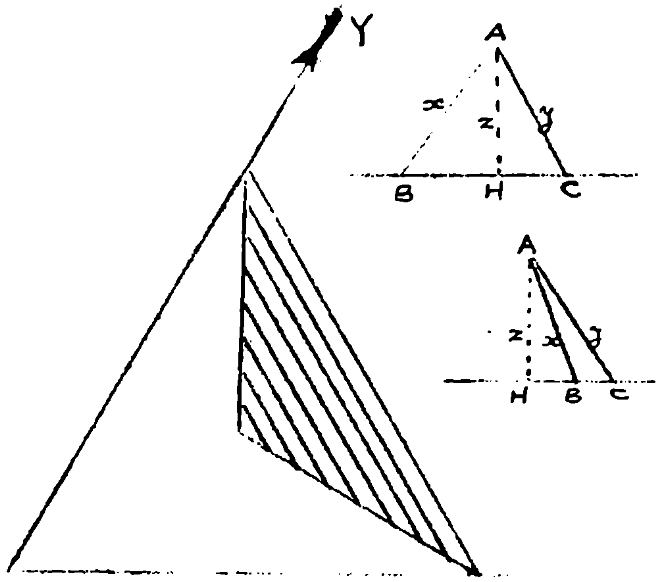
a) **z altura correspondiente al lado no dado.**

**Construcción.** Desde un punto A que diste z de la recta a se trazan los segmentos AC y, y AB x. Como la altura puede considerarse exterior ó interior al triángulo tendremos dos soluciones. Condiciones que deben cumplirse:

$x \geq z$

$y \geq z$

prob. $= \frac{1}{3}$



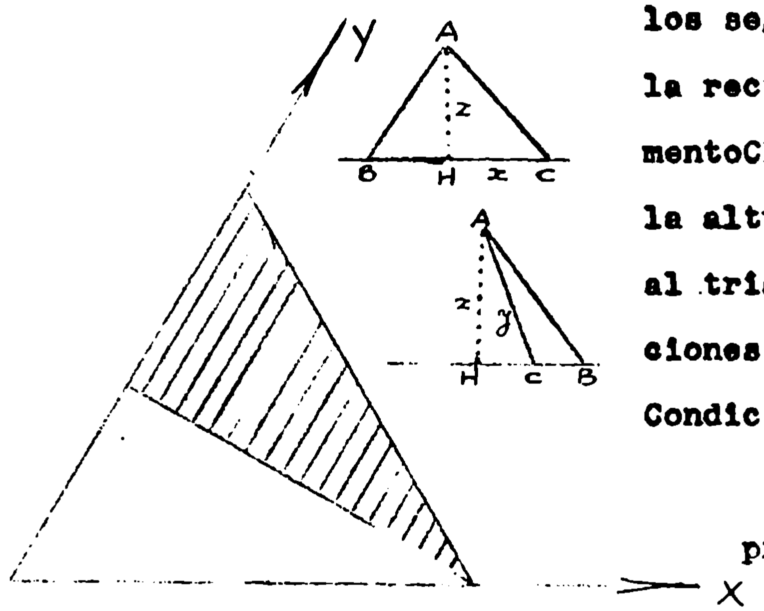

b) **z altura correspondiente a x.**

**Construcción.** Desde un punto A que diste z de la recta a se trazan los segmentos AH z y AC y. Sobre la recta a se determina el segmento CBC x. Según se considere la altura contenida ó exterior al triángulo tendremos dos soluciones.

Condición que debe cumplirse:

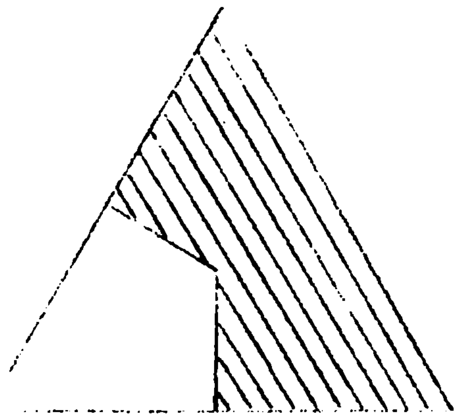
$y \geq z$

prob. $= \frac{1}{2}$




c) Si z es la altura correspondiente al lado y el problema es análogo al anterior.

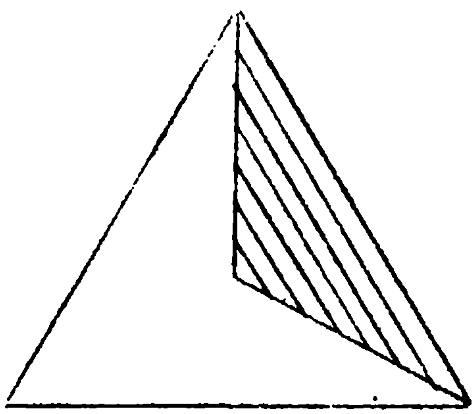
Si hallamos la medida de la suma de los conjuntos que cumplen las condiciones (a),(b),(c) tenemos que:



la probabilidad de existencia de un triángulo siendo x,y lados,z altura sin prefijar al que ésta corresponde es:

$$\text{prob.} = \frac{2}{3}$$

Si hallamos la medida del producto de los conjuntos que cumplen esas mismas condiciones tenemos que:



la probabilidad de construir un triángulo siendo x,y lados y z altura de uno cualquiera de los tres lados es:

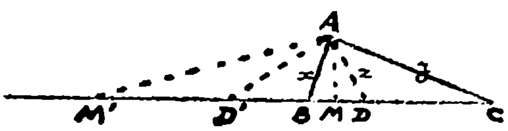
$$\text{prob} = \frac{1}{3}$$

<u>x e y lados, z bisectriz interior correspondiente al lado no dado.</u>

<u>Construcción</u>. Como la bisectriz $\overline{AD}$ del ángulo $\widehat{BAC}$ divide al lado opuesto en segmentos aditivos proporcionales a los lados adyacentes, y la bisectriz $\overline{AD'}$ del ángulo exterior $\widehat{BAC}$ divide al lado opuesto en segmentos substractivos $\overline{D'B}, \overline{D'C}$ proporcionales a los lados adyacentes, utilizaremos estas propiedades para obtener las abscisas $x_1$ y $x_2$ correspondientes a D y D' sobre la recta BC.

Tomando como origen B resulta:

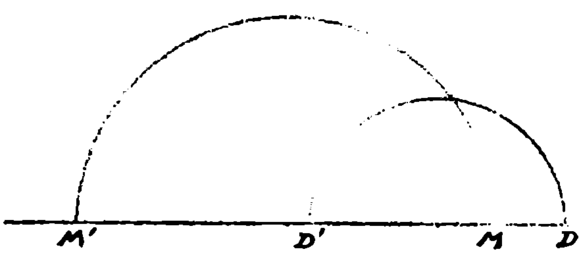
$$x_1 = \frac{xc}{x+y} \qquad x_2 = \frac{xc}{x-y}$$





Procediendo de igual manera para obtener los valores $x_1'$ y $x_2'$ correspondientes a M y M' se tiene:

$$x_1' = \frac{x^2 c}{(x+y)(x+z)} \qquad x_2' = \frac{-x^2 c}{(x+y)(z-x)}$$





Siendo la circunferencia de diámetro BD' el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a B y C están en la relación $\frac{x}{z}$ y la circunferencia de diámetro MM' el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a B y D están en la relación $\frac{x}{z}$ el problema tendrá solución cuando estas circunferencias se corten. Esto sucede cuando:

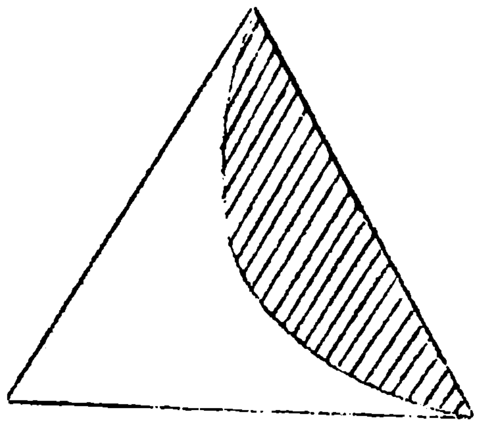
$$\frac{-x^2}{(x+y)(z-x)} < \frac{cx}{x-y}$$

$$-x(x-y) > (x+y)(z-x)$$
$$z(x+y) < 2xy$$

Reemplazando z por su valor resulta:

$$0 < 3Y^2 + (12X - 2\sqrt{3})Y + 3X^2 - 2\sqrt{3}X$$

El punto de intersección de las circunferencias es el punto A. Refiriendo las coordenadas al sistema XY resulta:



$$0 < 3Y^2 + (12X - 2\sqrt{3})Y + 3X^2 - 2\sqrt{3}X$$

medida del conjunto de casos favorables:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left(-2X + \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3X^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}X + \frac{1}{3}}\right) dX$$

Luego:

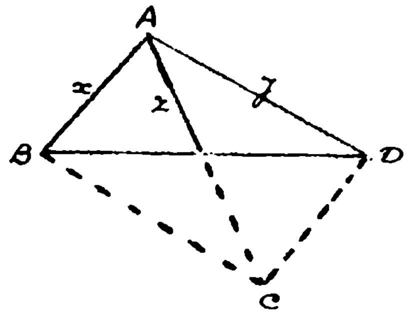
$$\text{prob.} = 1 - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left(-2X + \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3X^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}X + \frac{1}{3}}\right) dX =$$

$$= 2 - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \sqrt{3X^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}X + \frac{1}{3}}\, dX =$$

$$= 0{,}431.$$

3.x,y lados,z mediana correspondiente al lado no dado.

Construcción.Se construye el triángulo ABC de lados x,y,2z.Por el punto A se traza una paralela a BC y por el punto C una paralela a BA.Uniendo B con D se tiene el triángulo ABD pedido.

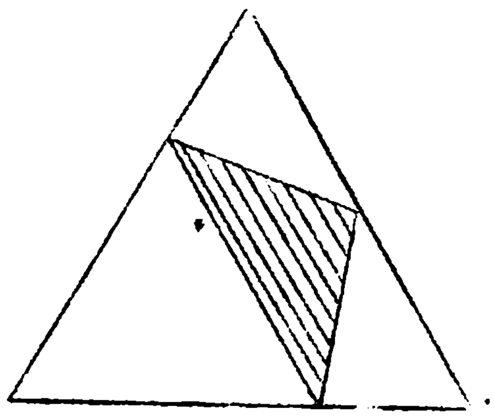



Luego:Dados x,y,z el problema tiene solución si existe el triángulo ABC.
Por consiguiente deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$x \leq y + z$$
$$y \leq x + 2z$$
$$2z \leq x + y$$

o sea sustituyendo $z = 1 - x - y$ queda:

$$2 \leq 3x + 3y$$
$$2 \geqslant 3x + y$$
$$2 \geqslant 3y + x$$



Refiriendo las coordenadas triángulares x,y al sistema XY resulta:

$$2 \leq \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad X \quad \frac{3}{2} \quad \sqrt{3} \quad Y$$

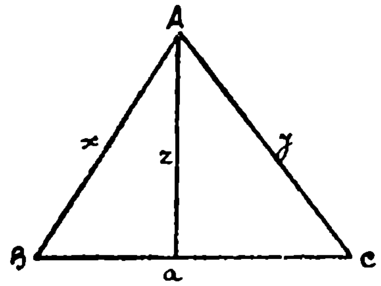
$$2 \geq \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad X \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad Y$$

$$2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad X \quad \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad Y$$

medida de casos favorables: $\frac{1}{9\sqrt{3}}$

$$\text{prob.} = \frac{2}{9}$$

**Calcularemos ahora en este caso la probabilidad de construir triángulos acutángulos y obtusángulos.**




Condiciones que deben cumplirse para que el triángulo sea acutángulo:

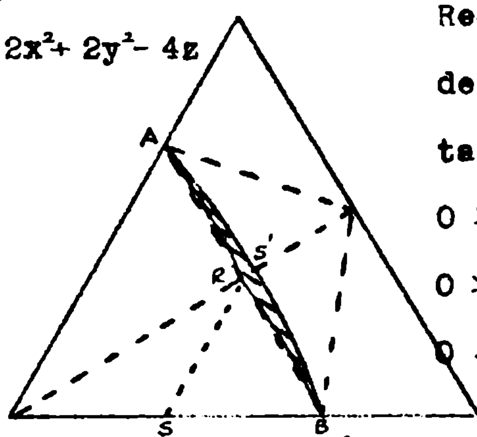
$$x^2 < y^2 + a^2 \qquad (1)$$

$$y^2 < x^2 + a^2 \qquad (2)$$

$$a^2 < x + y \qquad (3)$$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2(x^2 + y^2) - a^2}$$

$$a^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4z$$




Reemplazando a por su valor en función de x e y, y pasando al sistema XY resulta:

$$0 > 9X^2 + 3Y^2 + 24XY - 16\sqrt{3}X - 16\sqrt{3}Y + 16$$

$$0 > 3X^2 + 9Y^2 + 24XY - 16\sqrt{3}X - 16\sqrt{3}Y + 16$$

$$0 < 9X^2 + 9Y^2 + 24XY - 16\sqrt{3}X - 16\sqrt{3}Y + 16$$

prob. de construir triángulo acutángulo $P_1 = \dfrac{\text{medida ARBS}'}{0{,}866}$

$$\text{medida de OAS}'\text{S} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{8}{9}\sqrt{3} - \frac{4}{3}X - \sqrt{\frac{7}{9}X^2 - \frac{16}{27}\sqrt{3}X + \frac{16}{27}}\right) dX = 0{,}2895$$

$$\text{medida ORB} = \text{medida ORS} + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{2}{9}\sqrt{3}}^{\frac{4}{9}\sqrt{3}} \left(\frac{8}{3}\sqrt{3} - 4X - \sqrt{13X^2 - 16\sqrt{3}X + 16}\right) dX$$

$$0{,}0641 + 0{,}0721 = 0{,}1362$$

$$\text{medida ARBS}' = 0{,}2895 - 0{,}2724 = 0{,}0171$$

$$\therefore\ P_1 = \frac{0{,}0171}{0{,}866} = 0{,}0197$$

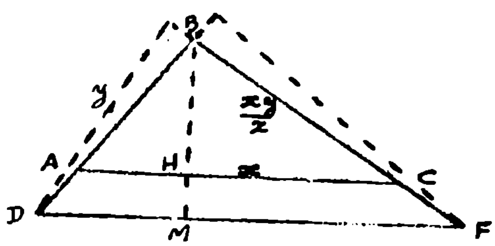
y la probabilidad de construir triángulo obtusángulo es:

$$P_2 = 0{,}2222 - 0{,}0197 = 0{,}2025$$

Siendo x e y lados de un triángulo y z la mediana correspondiente

4. x,y,z alturas

Construcción. Siendo a,b,c los lados del triángulo y x,y,z las alturas correspondientes sabemos que:




$$ax = by = cz$$

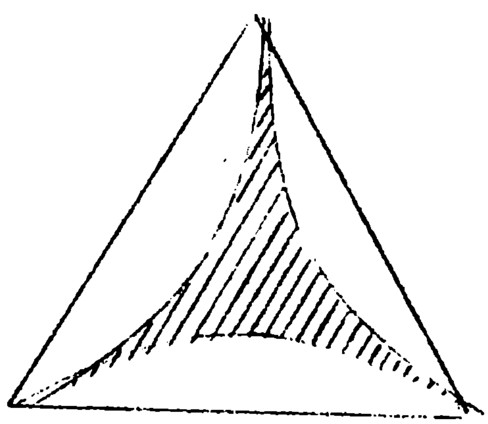
Dividiendo por xy

$$\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{c}{\frac{x.y}{z}}$$

El triángulo buscado es semejante al triángulo que tiene por lados x,y,z.

Se construye el triángulo ABC de lados x,y $\frac{xy}{z}$ y sobre la altura BH correspondiente al lado x se traza BM y. Por el punto M tracemos la paralela a AB. Se tiene así el triángulo pedido DFB.

Luego la condición para construir el triángulo de alturas x,y,z es que se pueda construir el triángulo ABC.



Condiciones que deben cumplirse:

$$\frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \qquad (3)$$

Refiriendo las coordenadas cartesianas al sistema XY las condiciones que deben cumplirse son:

$$3Y^2 + (9X - 2\sqrt{3})Y + 3X^2 - 2\sqrt{3}\,X \leq 0 \quad (a)$$

$$3Y^2-(3X+2\sqrt{3})Y-3X^2+2\sqrt{3}\,X\leq 0 \quad (b)$$

$$3X^2-(3Y+2\sqrt{3})X-3Y+2\sqrt{3}\,Y\leq 0 \quad (c)$$

Hallaremos la medida del conjunto de puntos que no cumplen la condición (b).

Si a esta medida la llamamos B resulta:

$$B=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{X}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{\frac{5}{4}X^2-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}}\right)dX=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{\frac{5}{4}X^2-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}}\right)dX=\frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}1717$$

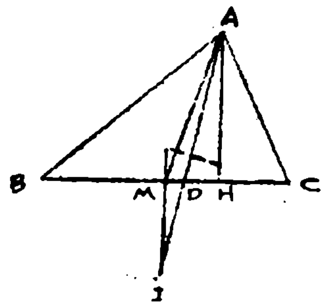
Como los conjuntos que no cumplen las condiciones (a),(b),(c) no tienen partes comunes y siendo la medida de cada uno de ellos igual a B resulta:

medida de casos favorables: $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1-\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{\frac{5}{4}X^2-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}}\right)dX$

Luego prob. = 0,2274

5.x mediana,y altura,z bisectriz trazadas desde un mismo vértice.

Construcción. Se pueden construir los triángulos rectángulos AHD y AHM lo que da una parte de la figura.



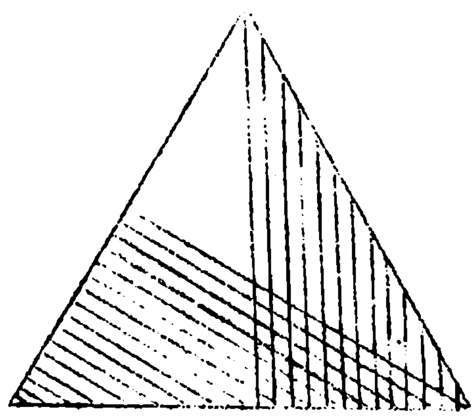

Suponiendo trazada la circunferencia circunscripta al triángulo pedido,la bisectriz AD pasa por el punto medio I del arco inferior BC.Este punto se puede determinar porque también está sobre la per pendicular a la recta MH trazada por el punto M.

La perpendicular a AI que pasa por su punto medio,cortará a IM en O

La circunferencia de centro O y radio OI cortará a MH en los vértices buscados B y C.

Como el punto I debe estar debajo de BC es necesario que M esté a la izquierda de D y por consiguiente $x > z$.

La bisectriz debe estar en el interior del ángulo formado por la altura y la mediana.



Condiciones que deben cumplirse:

$$z \geq y \qquad (1)$$

$$z \leq x \qquad (2)$$

Reemplazando z por 1 x y,y pasando al sistema XY resulta:

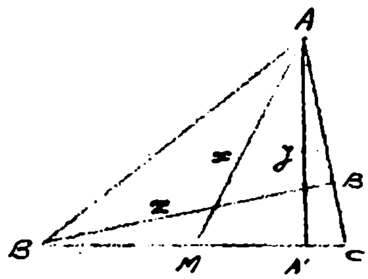
$$0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} X + \sqrt{3} Y - 1 \qquad (1')$$

$$0 \leq \sqrt{3} X + \frac{\sqrt{3}}{2} Y - 1 \qquad (2')$$

$$\text{prob.} = \frac{1}{6}$$

6. x e y mediana y altura de un mismo lado, z altura de otro lado.

Construcción. La distancia del punto M al lado AC es igual a la mitad de la altura BB', es decir que el lado AC es tangente al circulo de centro M y de diámetro igual a BB'.

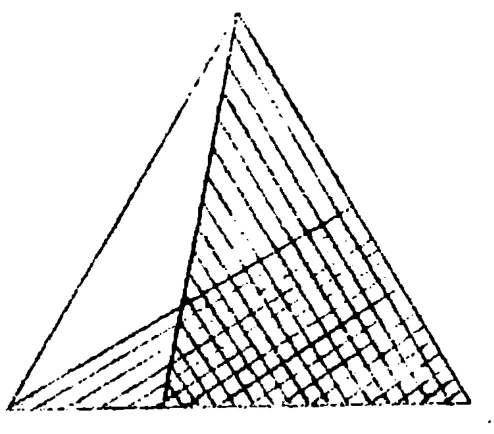



Luego una vez construido el triángulo rectángulo AMA', basta trazar por A una tangente a ese circulo. El punto en que la tangente corta a la recta MA' es C. Tomando MB  MC queda determinado B.

Condiciones que deben cumplirse:

$$x \geq y \quad (1)$$

$$\frac{z}{2} \leq x \quad (2) \text{ ó bien } 0 \leq 3x + y - 1$$



Pasando al sistema XY estas condiciones toman las formas siguientes:

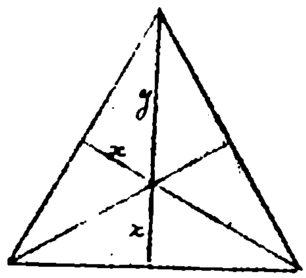
$$X \geq Y$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} X + \frac{\sqrt{3}}{2} Y - 1 \geq 0$$

$$\text{prob.} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{24}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{8}$$

## 7. x e y alturas, z radio del circulo inscripto.

Recordemos que dadas tres alturas las condiciones de construcción son:

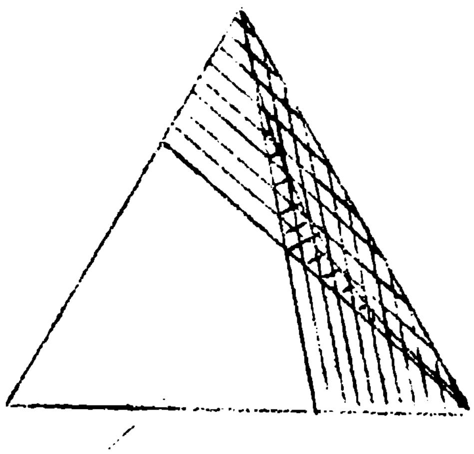



$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{h} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{h} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{h} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{h} \qquad (3)$$

y que $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{h}$



Hallando el valor de h en función de x, y, z las condiciones que deben cumplirse son:

$$\frac{2}{x} \leq \frac{1}{z} \qquad (1')$$

$$\frac{2}{y} \leq \frac{1}{z} \qquad (2')$$

$$\frac{1}{z} \leq \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \qquad (3')$$

Reemplazando a z por su valor en función de x e y y pasando al sistema XY las condiciones (1'), (2'), (3'), se expresan así:

$$0 \leq 3\sqrt{3}\,X + 2\sqrt{3}\,Y - 4 \qquad (1'')$$

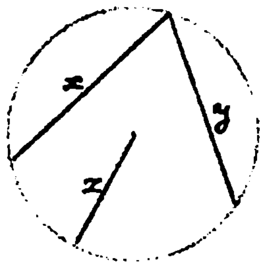
$$0 \leq 2\sqrt{3}\,X + 3\sqrt{3}\,Y - 4 \qquad (2'')$$

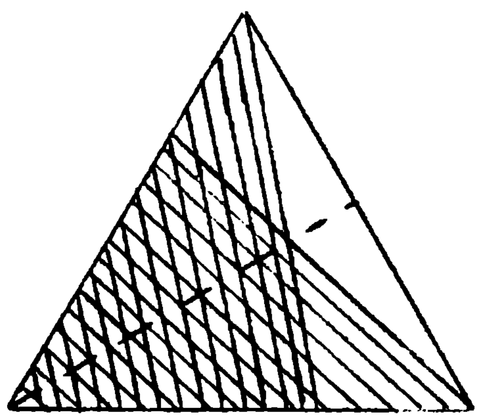
$$0 \geq 15\,XY + 6\,Y^2 + 6X^2 - 4\sqrt{3}\,X - 4\sqrt{3}\,Y \qquad (3'')$$

medida de casos favorables: $\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{4\sqrt{3} - 15X + \sqrt{81X^2 - 24\sqrt{3}\,X + 48}}{12} - \frac{4\sqrt{3}}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{45}\right) dX$

prob. = 0,055

8.x e y lados,z radio del circulo circunscripto.



Construcción SE traza la circunferen=
cia de radio z y desde un punto cual:
quiera se trazan las cuerdas x e y.
Las condiciones que deben cumplirse
son:

$x \leq 2z$ (1)

$y \leq 2z$ (2)

Reemplazando z por su valor 1 - x - y,
y pasando al sistema XY las condicio
es que deben cumplirse son:

$3\sqrt{3}\,X + 2\sqrt{3}\,Y - 4 \leq 0$ (1')

$3\sqrt{3}\,Y + 2\sqrt{3}\,X - 4 \leq 0$ (2')

Se demuestra facilmente que $\overline{AE} = 4\overline{HE}$,
y por tanto:

área BEC $= \frac{1}{5}$ T (T = área del triángulo tota

Además:

área BB'C $= \frac{1}{3}$ T

DE aqui:

área EB'C $= \frac{1}{3}$ T $- \frac{1}{5}$ T $= \frac{2}{15}$ T

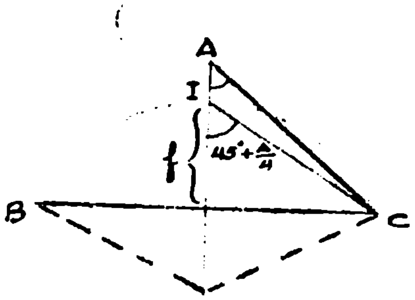
Por tanto:

área AB'EC' (favorable)$= \frac{2}{3}$ T$- \frac{2}{15}$ T $= \frac{8}{15}$ T

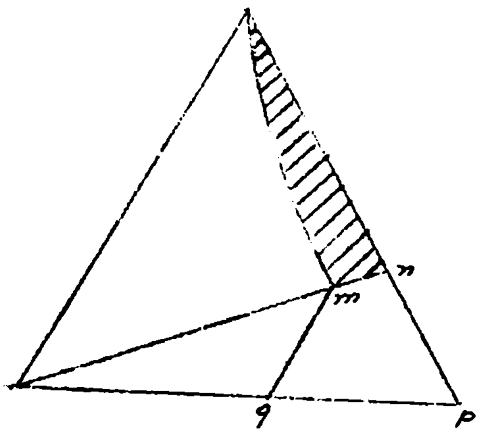
prob. $= \frac{8}{15}$

9. <u>x lado, z radio del circulo inscripto, y radio del circulo circunscripto.</u>

<u>Construcción.</u> Se construye el circulo de radio <u>y</u>, después el de lado x, que permite conocer el ángulo A, y el punto medio del arco BC, donde la bisectriz IM corta al circulo circunscripto. Todo se reduce a construir esa bisectriz, donde se encuentra el centro I del circulo inscripto.




Conociendo su distancia z a BC, y siendo el ángulo BIC $= 90° + \frac{A}{2}$




el punto I se determinará trazando un segmento capaz y la paralela a BC que diste de ella z.

Condiciones que deben cumplirse:

$$x \leq 2y$$

$$z \leq f$$

Siendo $tg(45° - \frac{A}{4}) = \frac{2f}{x}$, y $sen A = \frac{x}{2y}$, el valor de f en función de x y de y es:

$$f = y\left(\sqrt{1+\frac{x}{2y}} - 1 + \sqrt{1-\frac{x^2}{4y^2}} - \sqrt{1-\frac{x}{2y}}\right.$$

Pasando al sistema XY y recordando que $z = 1 - x - y$, las condiciones que deben cumplirse son:

$$0 \leq 2Y - X \qquad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - X \leq Y\left(\sqrt{1+\frac{X}{2Y}} + \sqrt{1-\frac{X^2}{4Y^2}} - \sqrt{1-\frac{X}{2Y}}\right. \qquad (2)$$

Dividiendo por Y los dos miembros de (2) resulta:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3Y} - X : Y \leq \sqrt{1+\frac{X}{2Y}} + \sqrt{1-\frac{X^2}{4Y^2}} - \sqrt{1-\frac{X}{2Y}}$$

y tomando como parámetro t las coordenadas X e Y que cumplen la condición (2) son:

$$X = \frac{2\sqrt{3}\,t}{3\left(2t+\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t}\right)}$$

$$Y = \frac{2\sqrt{3}}{3\left(2t+\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t}\right)}$$

medida de casos favorables:

$$N = \frac{\sqrt{3}}{3} - med.(mnpq) - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_m^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} X \, dX$$

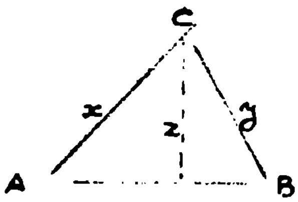
prob. $= N\sqrt{3}$

1. x y lados,z altura correspondiente al lado no dado.

Ya hemos visto que en este caso la probabilidad de construir triángu= lo es .


El triángulo es rectángulo cuando se ve= rifica alguna de estas condiciones:

$$x = z \qquad (1)$$




$$y = z \qquad (2)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 - z^2} + \sqrt{y^2 - x^2} \qquad (3)$$

Elevando dos veces al cuadrado y reemplazando z por su valor en fun= ción de x y de y, la condición (3) puede expresarse así:

$$x^2\, y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1)$$

Haciendo $\frac{x}{y} = t$ resulta:

$$x = \frac{t^3 + t^2 + t + 1 - t\sqrt{t^2+1}}{t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1} \cdot t \qquad y = \frac{t^3 + t^2 + t + 1 - t\sqrt{t^2+1}}{t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1}$$

$$0 \leq t \leq \infty$$

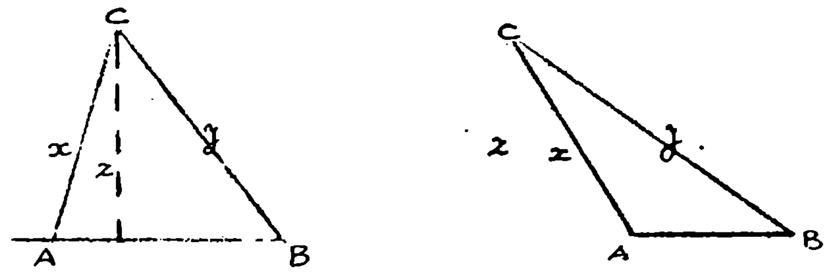
Si convenimos en adoptar como solución el triángulo que tiene altura contenida en el mismo, el triángulo es acutángulo, cuando

$$\left( \sqrt{x^2 - z^2} + \sqrt{y^2 - z^2} \right) < x^2 + y^2$$

Efectuando operaciones resulta: $x^2\, y^2\ (x^2 + y^2)\,z^2$

Los puntos que cumplen esta condición son los de la región limitada por los segmentos AC, Cb y el arco de curva AB (fig. II ).

Si consideramos como solución el triángulo que tiene ~~como~~ altura exterior al mismo, la probabilidad de construir triángulo acutángulo es nula.




Estando la altura contenida en el triángulo tenemos como medida de triángulos obtusángulos:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\; d\left(t\cdot\frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\right)$$

Luego, la probabilidad de construir triángulo obtusángulo dando x e y lados, z altura contenida en él, correspondiente al lado no dado es:

$$P = 1-4\int_0^1 \frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\; d\left(t\cdot\frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\right)$$

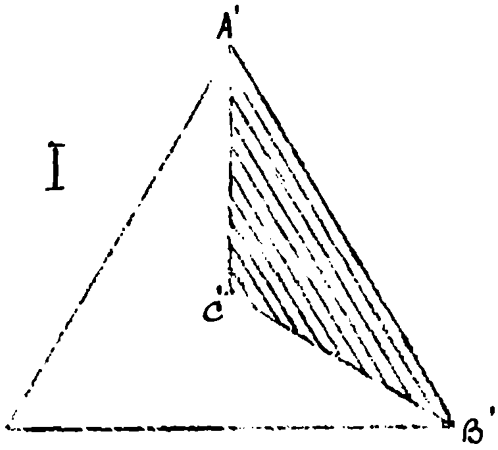
Y en el mismo caso la probabilidad de construir triángulo acutángulo es:

$$P_2 = -\frac{2}{3} + 4\int_0^1 \frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\; d\left(t\cdot\frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\right)$$

$$P_1 > P_2$$

X e y lados, z altura correspondiente al lado no dado.

I

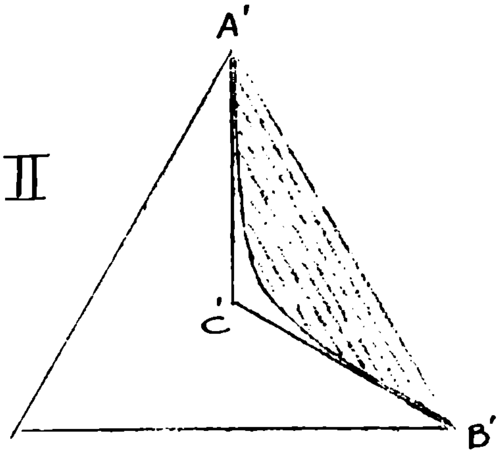



Considerando altura exterior al triángulo

prob. de construir triáng. acutángulo = 0

" " " " obtusángulo = $\frac{1}{3}$

II




Considerando altura interior al triángulo

prob. de construir triángulo obtusángulo

$$P_1 = 1 - 4\int_0^1 \frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\, d\left(t\,\frac{t^3+t^2+t+1-t\sqrt{t^2+1}}{t^4+2t^3+2t+1}\right)$$

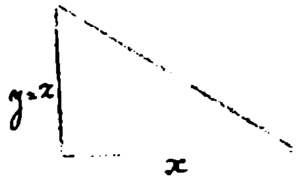
prob. de construir triángulo acutángulo:

$$P_2 = \frac{1}{3} - P_1$$

<u>x e y lados, z altura correspondiente a x.</u>

En este caso la probabilidad de construir triángulo es .

El triángulo es rectángulo cuando se verifica alguna de estas con = diciones:



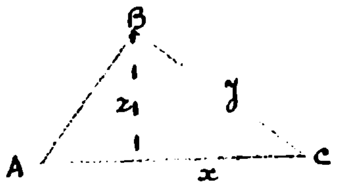
(1)

$$y = z \qquad (1)$$

$$y^4 + x^4 + 2x^3 y - 2x^3 - 2yx^2 + x^2 = 0 \qquad (2)$$

$$2x^2 + 2\,x\,y - 2\,x - 2\,y + 1 = 0 \qquad (3)$$

(3)

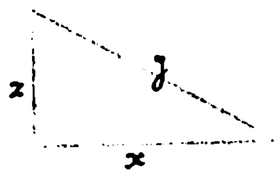


(2)

Haciendo $\frac{x}{y} = t$ los valores de x e y que satisfacen a (2) son:

$$x = \frac{t^2 + t - \sqrt{t^2 - 1}}{\frac{1}{t^2} + t^2 + 2t}$$

para $t \geq 1 \therefore x \geq y$.



(3)

$$y = \frac{t^2 + t - \sqrt{t^2 - 1}}{t\left(\frac{1}{t^2} + t^2 + 2t\right)}$$

Procediendo analogamente obtenemos en función del parámetro t los valores de x e y que cumplen la condición (3).

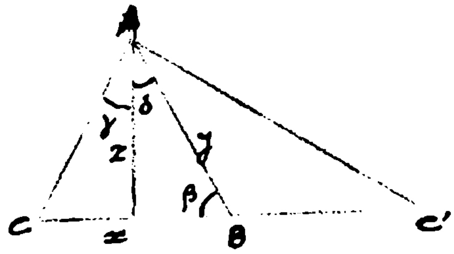
$$x = \frac{t + 1 - \sqrt{1 - t^2}}{2t^2 + 2t} \cdot t$$

para $1 \geq t$

luego $x \leq y$

$$y = \frac{t + 1 - \sqrt{1 - t^2}}{2t^2 + 2t}$$

Si convenimos en adoptar como solución el triángulo que tiene la altura contenida en el mismo veremos cua = les son las condiciones para que el tri = ángulo sea acutángulo



Como el ángulo $\beta$ es siempre agudo; si $x < \sqrt{y^2 - z^2}$ el triángulo ABC sería ob tuso, luego es necesario que: $x^2 > y^2 - z^2$

ó bien $x^2 - y^2 < x^2 + y^2 - 2\,x\sqrt{y^2 - z^2}$ (a)

Como el ángulo $\delta$ es complementario del $\beta$, el ángulo $\gamma$ debe ser menor que el ángulo $\beta$, ó sea que:

$$\frac{x-\sqrt{y^2-z^2}}{z} < \frac{z}{\sqrt{y^2-z^2}} \qquad \text{ó bien: } y^2-x^2 < x^2+y^2-2x\sqrt{y^2-z^2}$$

(a) Siendo $x^2-y^2 < x^2+y^2-2x\sqrt{y^2-z^2}$ resulta:

$$y^4+x^4+2x^3y-2x^3-2x^2y+1 > 0$$

El lugar de los puntos que cumplen esta condición son los de $mn$.

(b) Siendo $y^2-x^2 < x^2+y^2-2x\sqrt{y^2-z^2}$ resulta:

$$2x^2+y^2+2xy-2x-2y+1 > 0$$

El lugar de los puntos que cumplen esta condición son los de .

medida del conjunto de puntos que determinan triángulos obtusán=gulos:

$$= \frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\int_0^1 \frac{t+1-\sqrt{1-t^2}}{2t^2+2t}\, d\, \frac{t+1-\sqrt{1-t^2}}{2t^2+2t}\cdot t + \int_0^\infty \frac{t^2+t-\sqrt{t^2-1}}{t\left(\frac{1}{t^2}+t^2+2t\right)}\, d\, \frac{t^2+t-\sqrt{t^2-1}}{\frac{1}{t^2}+t^2+2t}\right]$$

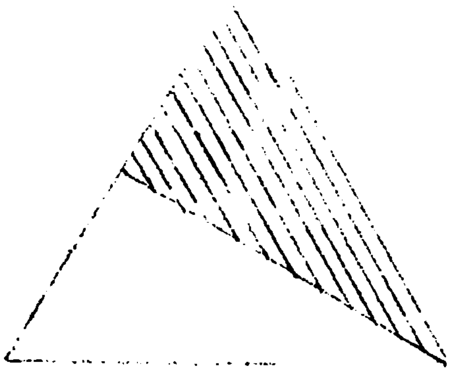
Prob. de obtener triángulo obtusángulo:

$$P_1 = \frac{7}{4} + 2M$$

Prob. de obtener triángulo acutángulo:

$$P_2 = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{12} - \frac{2\sqrt{3}}{3}M\right) \div \frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{5}{4} - 2M$$

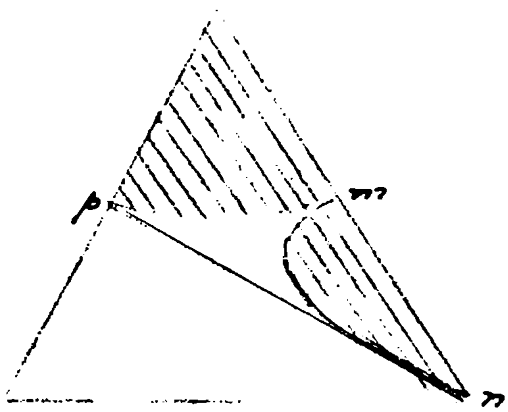
x e y lados, z altura correspondiente a x.



Considerando altura exterior al tri = ángulo.

Prob. de construir triáng. obtusáng. $= \frac{1}{2}$

" " " " acutáng. $= 0$




Considerando altura interior al tri = ángulo.

Prob. de construir triáng. obtusángulo

$$P_1 = \frac{7}{4} + 2M$$

Prob. de construir triáng. acutángulo

$$P_2 = -\frac{5}{4} - 2M$$

siendo:

$$M = \int_0^1 \frac{t+1-\sqrt{1-t^2}}{2t^2+2t}\, d\, \frac{t+1-\sqrt{1-t^2}}{2t^2+2t} \cdot t + \int_0^\infty \frac{t^2+t-\sqrt{t^2-1}}{t\left(\frac{1}{t^2}+t^2+2t\right)}\, d\, \frac{t^2+t-\sqrt{t^2-1}}{\frac{1}{t^2}+t^2+2t}$$

# Bibliografia

M. Fréchet .Les espaces abstraits (1928)

J. Rey Pastor . Teoría de los espacios topológicos.Revista Ciencia y Técnica.Vol.101,n°494,pág.91
Propiedades de los espacios topológicos.Revista Ciencia y Técnica.Vol.101,n°495 , pág. 199 (1943)

A. Appert . Actualités Scientifiques et industrielles.Propriétés des espaces abstraits les plus généraux 145 (1934)

F. Riesz . Atti del IV Congresso internazionale dei matematici.Roma.Vol. II,p.18 (1909)

M. Fréchet . Démonstration de quelques propriétés des ensembles abstraits (Am.Journ.Math.,vol.L,p.47 72 , 1928)
Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits (Bull. Sc. math.,t.XLII,p.138 156 , 1918)
Sur les ensembles abstraits (Ann.Éc. Norm.sup., t.38,1921,p. 341 387)
Quelques propriétés des ensembles abstraits (Fund. Math., t. X,p. 328 355 ,1927)

Tychonoff et Vedenissoff . Sur le développement moderne de la théorie des espaces abstraits (Bull. Sc. math.,t.L,p.1 12 , 1926)

M.H.Stone . The theory of representations for Boolean Algebras.(Transactions of the Am.Math.Soc.Vol. 40, p. 37 ,1936)

A. Weil . L'Integration dans les Groupes Topologiques et ses Applications .(1942)

F. Leja . Sur la notion de groupe abstrait topologique,Fund. Math.,t.9 (1927) p.37

J.Rey Pastor . Espacios D°.Revista de la Universidad Nacional de Tucumán.Serie A.Matemáticas y Fisica teórica.Vol. I (1940)

P. Urysohn . Ueber die Mächtigkeit der zusammendhängenden Mengen (Math. Annal.,Bd 94,1925,p.290 - 295)

H. Tietze . Ueber die Funktionen die auf einer abgeschlossenen Mengen stetig sind (journal de Crelle, Bd 145,1915,p.9 - 14)