

Tesis de Posgrado

Cálculo numérico de transformadas de Hilbert

Guarnieri, Angel José

1958

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Guarnieri, Angel José. (1958). Cálculo numérico de transformadas de Hilbert. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0968_Guarnieri.pdf

Cita tipo Chicago:

Guarnieri, Angel José. "Cálculo numérico de transformadas de Hilbert". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1958.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0968_Guarnieri.pdf

CALCULO NUMERICO DE TRANSFORMADAS DE HILBERT

TRABAJO PRESENTADO COMO TESIS POR EL SR. ANGEL JOSE GUARNIERI, LICENCIADO EN CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS, PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS, EN LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES (Abril 10 de 1958)

-----oCo-----

§ 1 - Introducción

1) Integrales conjugadas - Partiendo de la fórmula de la integral de

Fourier: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos u(x-t) \cdot dt = \int_0^{\infty} \left[a(u) \cdot \cos xu + b(u) \cdot \text{sen } xu \right] du$
 en que $a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos ut \cdot dt$ y $b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \text{sen } ut \cdot dt$, y poniendo $g(x) = \int_0^{\infty} \left[b(u) \cdot \cos xu - a(u) \cdot \text{sen } xu \right] du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \text{sen } u(t-x) \cdot dt$

se demuestra (ver, por ej., Titchmarsh: "Fourier Integrals", cap. V) que

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \text{sen } u(t-x) \cdot dt \quad \text{Se tiene:}$$

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \text{sen } u(t-x) \cdot dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda(t-x)}{t-x} f(t) \cdot dt$$

o sea:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \quad (1), \text{ y análogamente: } f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt \quad (2)$$

Estas dos fórmulas representan integrales conjugadas o transformadas de Hilbert, que deben ser calculadas como valores principales:

$$g(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^{+\infty} \right], \quad f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^{+\infty} \right]$$

lo cual permite transformarlas en las siguientes:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt, \quad f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{t} dt \quad (3)$$

Las (1) y (2) se obtienen también de la fórmula de Poisson para el semi-

plano: $F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-t) \cdot F(it)}{x^2 + (y-t)^2} dt$, siendo $z = x + iy$ y $F(z) = f(x, y) + i \cdot g(x, y)$.

Al separar partes real e imaginaria resultan las fórmulas

$$g(x, y) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-t) \cdot f(0, t)}{x^2 + (y-t)^2} dt, \quad f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-t) \cdot g(0, t)}{x^2 + (y-t)^2} dt, \text{ que}$$

para $x=0$ se reducen a las (1) y (2).

Fácilmente se deducen las siguientes propiedades: 1º) la función $f(t+a)$, siendo a real, tiene como conjugada $g(x+a)$ // 2º) la $f(at)$, con $a > 0$, da $g(ax)$ // 3º) la $f(-at)$, con $a > 0$, da $-g(-ax)$ // 4º) la $t \cdot f(t)$ da $x \cdot g(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot dt$ // 5º) la $(t+a) \cdot f(t)$ da $(x+a) \cdot g(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot dt$ // 6º) la $f'(t)$ da $g'(x)$.

Es de notar que si $f(t)$ es función par, su conjugada es impar. En tal caso las (1) y (2) se pueden transformar así:

$$\left\{ \begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right] f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \cdot f(t)}{t^2 - x^2} dt \quad (1') \\ f(x) &= \frac{-1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{g(t)}{t-x} dt + \int_0^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt \right] = \frac{-1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t+x} + \frac{1}{t-x} \right] g(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \cdot g(t)}{t^2 - x^2} dt \quad (2') \end{aligned} \right.$$

Estas fórmulas se aplican a funciones definidas para $x > 0$ solamente, prolongándolas de modo que para $-\infty < x < 0$ sea $f(x)$ par, y resulta $g(x)$ impar.

Interesantes aplicaciones técnicas se les han hallado a las transformadas de Hilbert. En primer término se puede citar su empleo en la teoría de los circuitos lineales en redes de distribución eléctrica, indicado por N. Wiener hace casi treinta años. Llamando $P(\omega)$ a la conductancia, $Q(\omega)$ a la susceptancia, $A(t)$ a la admitancia indicial ($t =$ tiempo, $\omega = 2\pi \times$ frecuencia), la teoría establece que $A(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t \cdot d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \cdot d\omega$

Derivando respecto de t se tiene: $\int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t \cdot d\omega = - \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t \cdot d\omega$

y tomando las transformadas de Fourier por el coseno y por el seno resulta:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega u \cdot du \int_0^{\infty} Q(t) \sin ut \cdot dt \\ Q(\omega) &= - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega u \cdot du \int_0^{\infty} P(t) \cos ut \cdot dt \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

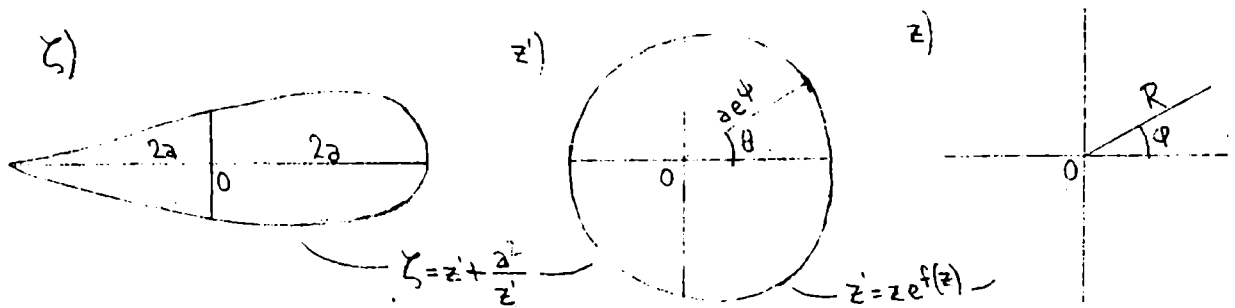
Se ve que $P(\omega)$ es función par y $Q(\omega)$ impar, si bien ω toma valores positivos solamente. Este carácter permite utilizar el intervalo $(-\infty, 0)$ y pasar a las transformadas de Hilbert:

$$\left. \begin{aligned} Q(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(u)}{u-\omega} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega+t) - P(\omega-t)}{t} dt \\ P(\omega) &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(u)}{u-\omega} du = \frac{-1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega+t) - Q(\omega-t)}{t} dt \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En relación con los circuitos lineales y desempeñando un papel muy importante están las transferencias de Wiener, que son funciones de la variable compleja $x + i\omega$ tales que la función límite para $x = 0$ es una $g(\omega) = u(\omega) + i v(\omega)$ cuyas componentes coinciden con $P(\omega)$ y $Q(\omega)$. Estas funciones han sido desarrolladas por Wiener y su discípulo Lee en serie de transformadas de Fourier de ciertas funciones obtenidas a partir de los polinomios de Laguerre.

Otra notable utilización de las transformadas de Hilbert es la que se

efectúa en aerodinámica, en la transformación conforme de un perfil de ala en círculo por el método de Theodorsen-Garrick.⁽²⁾ Para ello se pasa del per-



fil de ala (plano ζ) a una curva aproximadamente circular (plano z') mediante la transformación $\zeta = z' + \frac{a^2}{z'}$, y luego al círculo con la $z' = z \cdot e^{f(z)}$.

Poniendo $\log \frac{z'}{a} = f(z) = \sum_1^{\infty} c_n z^{-n}$, $z = R e^{i\psi}$, $z' = a e^{\psi + i\theta}$, $\frac{c_n}{R^n} = a_n + i b_n$, se

deduce: $\log \frac{a}{R} + \psi + i(\theta - \varphi) = \sum_1^{\infty} (a_n + i b_n)(\cos n\psi - i \cdot \text{sen } n\psi) =$

$= \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\psi + b_n \text{sen } n\psi) + i \sum_1^{\infty} (b_n \cos n\psi - a_n \text{sen } n\psi)$, que da:

$$\psi - \psi_0 = \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\psi + b_n \text{sen } n\psi) \quad (6) \quad \parallel \quad \varphi - \theta = \sum_1^{\infty} (-b_n \cos n\psi + a_n \text{sen } n\psi) \quad (6')$$

Resultan dos series de Fourier conjugadas, desarrollos de las funciones $\psi - \psi_0 = f(\psi)$ y $\varphi - \theta = g(\psi)$, cuya asociación se expresa mediante las fórmulas de Hilbert-Lini:

$$\left. \begin{aligned} g(\psi) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \psi) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) d\psi \\ f(\psi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \psi) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

En este caso la última integral de cada ecuación es nula.

En el problema en cuestión se conoce $\psi(\theta)$, que da el contorno aproximadamente circular, y poniendo $\psi - \theta = \varepsilon(\psi)$ se tiene:

$$\varepsilon(\psi) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi [\psi - \varepsilon(\psi)] \cot \frac{1}{2}(\psi - \psi) d\psi \quad (8) \quad , \text{ ecuación integral que determina}$$

$\varepsilon(\psi)$, y por tanto θ en función de ψ . Esta ecuación se resuelve por aproximaciones sucesivas (método de las conjugadas sucesivas), partiendo de una $\varepsilon_0(\psi)$ convenientemente elegida, que puede ser idénticamente nula, y el proceso se expresa así:

$$\varepsilon_{n+1}(\psi) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi [\psi - \varepsilon_n(\psi)] \cot \frac{1}{2}(\psi - \psi) d\psi \quad (8')$$

La convergencia de este proceso ha sido estudiada por S.S. Warschawski, quien estableció condiciones suficientes. Sin embargo en la práctica se puede prescindir de tales condiciones, pues la sucesión de evaluaciones numéricas converge rápidamente, y Garrick afirma que bastan pocos pasos

para alcanzar la solución. Se entiende que la función ϵ está dada numéricamente mediante un cierto número de valores que se modifican en cada iteración, y en igual forma quedará determinada $\theta(\varphi)$. Aunque $\epsilon(\varphi)$ es solución de la ecuación integral (8), su determinación por aproximaciones sucesivas se efectúa mediante un procedimiento debido a Garrick y Naiman, que consiste en el análisis armónico de la función $\psi(\varphi)$ dada por la (6) y la subsiguiente síntesis de su conjugada $\varphi - \theta$ dada por la (6'). [Ver § 13]

Diversas ecuaciones integrales con núcleo singular pueden ser resueltas mediante las funciones conjugadas. Por ej.: $g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x) dx}{\cos t - \cos x}$

siendo $f(x)$ pará así como $g(t)$. Escribiéndola así:

$$g(t) \sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \frac{\sin t - \sin x}{\cos t - \cos x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cot \frac{1}{2}(x-t) dx, \text{ resulta:}$$

$$f(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \sin t \cot \frac{1}{2}(t-x) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin^2 \frac{1}{2} t dt \quad \left[\text{Ver fórmula 9, más abajo} \right].$$

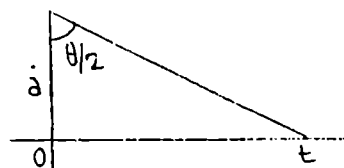
Otros núcleos que se pueden reducir a $\cot \frac{1}{2}(x-t)$ son: $\frac{1}{x-t}$, $\log \sin \frac{1}{2}(x-t)$, $\log \frac{1 - \cos(x-t)}{1 - \cos(x+t)}$, etc.

Nota - La transformada de Hilbert finita $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t) dt}{t-x}$, ha encontrado aplicación en la teoría del ala de avión.

2) Transformación de las fórmulas de Hilbert - Las fórmulas fundamentales

(1) y (2) pueden ser transformadas en otras con límites de integración finitos. Para ello se pone $t = a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$, $x = a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$, $dt = \frac{1}{2} a \cdot \sec^2 \frac{1}{2} \theta \cdot d\theta \therefore$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(t)}{t-x} - \frac{tf(t)}{a^2+t^2} \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{a^2+tx}{(t-x)(a^2+t^2)} dt =$$



$$= \int_{-\pi}^{+\pi} f(a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta) \frac{(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi) \sec^2 \frac{1}{2} \theta}{(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi) \sec^2 \frac{1}{2} \theta} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) \cot \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \cdot d\theta, \text{ y por con-}$$

$$\text{siguiente: } g(x) = g_1(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t-x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) \cot \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \cdot d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \cdot d\theta \quad (9) \quad . \text{ La última integral admite una interesante transformación, que se obtiene aplicando a } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot f(t)}{a^2+t^2} dt \text{ el teorema si-}$$

guiente: "Si $f(x)$ es conjugada de $g(x)$ y $h(x)$ lo es de $k(x)$, se verifica

$$\text{que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot h(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot k(x) \cdot dx \text{ ". Como la conjugada de } f(t) \text{ es}$$

$$g(t) \text{ y la de } \frac{t}{a^2+t^2} \text{ es } \frac{a}{a^2+t^2}, \text{ resulta:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot f(t)}{a^2 + t^2} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} g(a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} g_1(\theta) d\theta, \text{ y la (9) se}$$

escribe así: $g_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cot \frac{1}{2}(\theta - \varphi) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g_1(\theta) d\theta$ (10)

Análogamente y observando que la conjugada de $g(t)$ es $-f(t)$, resulta:

$$f_1(\varphi) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g_1(\theta) \cot \frac{1}{2}(\theta - \varphi) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta$$
 (10')

Teniendo en cuenta la periodicidad de la $\operatorname{tg} t$, se puede reemplazar θ y φ por $\theta - \pi$ y $\varphi - \pi$, con lo cual las fórmulas permanecen invariantes salvo los límites de integración, que ahora son 0 y 2π .

Las (10) y (10') se obtienen en forma más directa de la siguiente fórmula de Poisson: $F(z) = F(0) + \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Rr \cdot \operatorname{sen}(\psi - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos(\psi - \varphi)} F(R, \psi) d\psi$, siendo

$z = re^{i\varphi}$ y $F(z) = F(r, \varphi) = f(r, \varphi) + ig(r, \varphi)$; el camino de integración es el círculo de radio R . Haciendo $r=R$ resulta:

$$F(z) = F(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F(R, \psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi) d\psi, \text{ y al separar partes real e imaginaria se obtienen las (10) y (10').}$$

§ 2 - Procedimientos de cálculo de la conjugada

1) Cálculo directo - Para calcular $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$ como valor principal un primer procedimiento consiste en aplicar la fórmula equivalente de

que procede aquella:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} u(t-x) dt$$
 (11)

Ej. 1º: $f(t) = \frac{a}{a^2 + t^2} \therefore g(x) = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ut \cdot \cos ux - \cos ut \cdot \operatorname{sen} ux}{a^2 + t^2} dt$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} ux \cdot du \int_0^{\infty} \frac{\cos ut}{a^2 + t^2} dt = -\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} ux \cdot du \left(\frac{\pi}{2a} e^{-au} \right) =$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-au} \operatorname{sen} ux \cdot du = -\frac{x}{a^2 + x^2}$$

Ej. 2º: $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2} \therefore g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{\operatorname{sen} ut \cdot \cos ux - \cos ut \cdot \operatorname{sen} ux}{a^2 + t^2} dt$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \cdot du \int_0^{\infty} \frac{t \cdot \operatorname{sen} ut}{a^2 + t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xu \cdot du \left(\frac{\pi}{2} e^{-au} \right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-au} \cdot \cos ux \cdot du = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

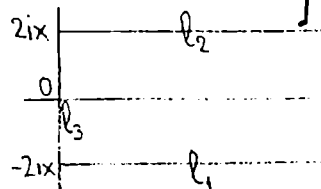
Ej. 3º: $f(t) = e^{-t^2} \therefore g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (\operatorname{sen} ut \cdot \cos ux - \cos ut \cdot \operatorname{sen} ux) dt =$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} ux \cdot du \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos ut \cdot dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} ux \cdot du \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-u^2/4} \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2/4} \cdot \text{sen } ux \cdot du . \text{ Con } \text{sen } ux = \frac{1}{2i} (e^{iux} - e^{-iux}) \text{ se tiene:}$$

$$-\sqrt{\pi} \cdot g(x) = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{-u^2/4 + iux} - e^{-u^2/4 - iux}) du = \frac{e^{-x^2}}{2i} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{4}(u-2ix)^2} - e^{-\frac{1}{4}(u+2ix)^2} \right] du$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2i} \left[\int_{-2ix}^{\infty} e^{-z^2/4} \cdot dz - \int_{2ix}^{\infty} e^{-z^2/4} \cdot dz \right] . \text{ La primera integral}$$



está tomada a lo largo del camino λ_1 de la figura, y la segunda a lo largo del λ_2 , y es evidente que la diferencia de ambas es

$$\int_{-2ix}^{+2ix} e^{-z^2/4} \cdot dz \text{ tomada a lo largo de } \lambda_3 . \text{ Con } z=2iv \text{ resulta:}$$

$$-\sqrt{\pi} g(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} \cdot dv , \text{ que se puede desarrollar en serie integrando}$$

$$\text{por partes reiteradamente: } -\sqrt{\pi} g(x) = 2x - \frac{2^2}{3} x^3 + \frac{2^3}{3 \cdot 5} x^5 - \frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7 + \dots ,$$

que converge para todo x . Para valores grandes de x se puede utilizar el siguiente desarrollo asintótico, que se obtiene también integrando por

$$\text{partes: } -\sqrt{\pi} g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{2^2 x^5} + \frac{3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots$$

$$\text{Ej. 4º : } f(t) = t \cdot e^{-t^2} \therefore g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t^2} (\text{sen } ut \cdot \cos ux -$$

$$- \cos ut \cdot \text{sen } ux) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \cdot du \int_0^{\infty} 2t \cdot e^{-t^2} \text{sen } ut \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \cdot du \left[-e^{-t^2} \cdot \text{sen } ut \Big|_0^{\infty} + u \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos ut \cdot dt \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u \cdot \cos ux \cdot du \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-u^2/4} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} u \cdot e^{-u^2/4} \cos ux \cdot du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-u^2/4} \cdot \cos ux \Big|_0^{\infty} -$$

$$- x \int_0^{\infty} e^{-u^2/4} \cdot \text{sen } ux \cdot du \right] , \text{ y teniendo en cuenta el Ej. 3º resulta:}$$

$$\sqrt{\pi} g(x) = 1 - x \cdot 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} \cdot dv = 1 - 2x^2 + \frac{2^2}{3} x^4 - \frac{2^3}{3 \cdot 5} x^6 + \dots$$

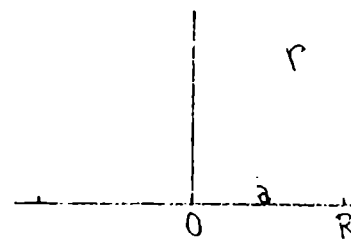
$$\text{y también: } -\sqrt{\pi} g(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2^2 x^4} + \frac{3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots$$

$$\text{En forma más simple: } g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{t-x} \right) e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot dt + \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + x \cdot g_1(x) , \text{ siendo } g_1(x) \text{ la conjugada}$$

$$\text{de } f(t) = e^{-t^2} . \text{ (Ej. 3º)}$$

2) Empleo de residuos - Un segundo procedimiento de cálculo se funda en el empleo de residuos (teorema de Cauchy) con un contorno de integración apropiado. Sea $f(z)$ una función meromorfa en el semiplano superior ($y > 0$), sin polos sobre el eje real, y tal que $f(z)$ tiende a 0 uniformemente cuando $|z| \rightarrow \infty$ y $0 \leq \arg z \leq \pi$. Sean R_j los residuos de $\frac{f(z)}{z-a}$ en el semiplano superior. Aplicando el teorema de Cauchy a la integral $\int_c \frac{f(z)}{z-a} dz$ tomada



sobre el contorno del semicírculo de la figura, y teniendo en cuenta que en el punto $z=a$ el residuo de

$\frac{f(z)}{z-a}$ es $f(a)$, resulta para $R=\infty$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = 2\pi i \sum R_j + \pi i \cdot f(a)$ (12)

si la integral existe en el intervalo infinito y tomando el valor principal en $x=a$. Si el integrando tiene otros polos simples sobre el eje real la fórmula es aún aplicable, pero no lo es si tiene polos de orden superior.

Ej. 5º: $\frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{(z^2+b^2)(z-a)}$. En $z=bi$ el residuo es $\frac{-b+ia}{2b(a^2+b^2)}$, y en $z=a$

es $\frac{1}{a^2+b^2}$. Por tanto: $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \frac{(-b+ia)i}{b(a^2+b^2)} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{-a}{b(a^2+b^2)}$. Reem-

plazando a por x y b por a este resultado coincide con el del Ej. 1º.

Ej. 6º: $\frac{f(z)}{z-a} = \frac{z}{(z^2+b^2)(z-a)}$. En $z=bi$ el residuo es $-\frac{a+bi}{2(a^2+b^2)}$ y en $z=a$

es $\frac{a}{a^2+b^2}$. Por tanto: $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \frac{-(a+bi)i}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. Reempla-

zando a por x y b por a este resultado coincide con el del Ej. 2º.

Ej. 7º: $\frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{(z-a)(z^2+2pz+q^2)}$, siendo $|p| < |q|$ y $\alpha = -p + i\sqrt{q^2-p^2} = -p + ir$

El residuo en $z=\alpha$ es $\frac{1}{2(\alpha-a)(\alpha+p)}$, y en $z=a$: $\frac{1}{a^2+2pa+q^2}$. Entonces:

$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \frac{1}{(\alpha-a)(\alpha+p)} - \frac{1}{(a-\alpha)(a-\beta)} = -\frac{p+a}{r(a^2+2pa+q^2)}$.

Ej. 8º: $\frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{(z-a)(z^4+b^4)}$. Poniendo $\varepsilon = e^{\pi i/4}$, el residuo en $z=b\varepsilon$

es $\frac{1}{4b^3\varepsilon^3(b\varepsilon^3-a)} = \frac{-b+a\varepsilon}{4b^3(a^2+b^2-ab\sqrt{2})}$; en $z=b\varepsilon^3$ es: $\frac{1}{4b^3\varepsilon^9(b\varepsilon^3-a)} =$

$= \frac{-b+a\varepsilon^3}{4b^3(a^2+b^2+ab\sqrt{2})}$, y en $z=a$: $\frac{1}{a^4+b^4}$. Resulta: $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \frac{-a(a^2+b^2)}{\sqrt{2}b^3(a^4+b^4)}$

Sea ahora $Q(z)$ una función meromorfa en el semiplano superior y que tiende a cero uniformemente cuando $|z| \rightarrow \infty$ para $0 \leq \arg z \leq \pi$. Siendo Γ la semicircunferencia de la figura, se verifica: $\int_{\Gamma} e^{imz} \cdot Q(z) dz \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$ y es $m > 0$. Resulta entonces: $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum R_j + \pi i \sum R_s$ (13) siendo los R los residuos de $Q(z)e^{imz}$ en el semiplano superior y los R_s los residuos en los polos simples sobre el eje real. Si $Q(x)$ tiene polos de orden superior sobre el eje real, la fórmula no es aplicable.

Ej. 9º: $Q(z)e^{imz} = \frac{e^{imz}}{z-a}$. En $z=a$ es $R = e^{ima}$, y por consiguiente:

$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx + i \operatorname{sen} mx}{x-a} dx = ie^{ima}$. Resulta el par de transformadas:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x-t} dx = -\operatorname{sen} mt ; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{x-t} dx = \cos mt .$$

Estas se pueden obtener en forma más directa así: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{x-t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} m(t+y)}{y} dy =$

$$= \operatorname{sen} mt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos my}{y} dy + \cos mt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} my}{y} dy = 0 + \pi \cos mt ,$$

y análogamente con la otra.

Ej. 10º: $Q(z)e^{imz} = \frac{e^{imz}}{(z^2+b^2)(z-a)}$. En $z=bi$ es $R = \frac{e^{-mb}(-b+ia)}{2b(a^2+b^2)}$; en $z=a$:

$$R = \frac{e^{ima}}{a^2+b^2} . \text{ Por tanto: } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx + i \operatorname{sen} mx}{(x^2+b^2)(x-a)} dx = \frac{e^{-mb}(-b+ia)i}{b(a^2+b^2)} +$$

$$+ \frac{e^{ima} \cdot bi}{b(a^2+b^2)} = \frac{e^{-mb}(-bi-a) + bi(\cos ma + i \operatorname{sen} ma)}{b(a^2+b^2)} , \text{ que da:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+b^2)(x-a)} dx &= -\frac{a \cdot e^{-mb} + b \cdot \operatorname{sen} ma}{b(a^2+b^2)} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{(x^2+b^2)(x-a)} dx &= \frac{\cos ma - e^{-mb}}{a^2+b^2} \end{aligned} \right\}$$

Se ve que la función conjugada de $f(x) = \frac{\cos mx}{x^2+b^2}$ es $g(x) = -\frac{x e^{-mb} + b \cdot \operatorname{sen} mx}{b(x^2+b^2)}$

y la de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} mx}{x^2+b^2}$ es $g(x) = \frac{\cos mx - e^{-mb}}{x^2+b^2}$ ($m > 0, b > 0$)

Estos resultados se pueden obtener en forma más simple como sigue:

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{x+a}{x^2+b^2} \right] \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx \cdot dx}{(x-a)(x^2+b^2)} = K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x-a} dx -$$

$$= 2aK \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+b^2} dx . \text{ Pero } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x-a} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ma+mt)}{t} dt =$$

$$= \cos ma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mt}{t} dt - \operatorname{sen} ma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} mt}{t} dt = 0 - \pi \operatorname{sen} ma , \text{ y}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-mb} . \text{ La transformada de } f(x) = \frac{\cos mx}{x^2+b^2} \text{ será, pues:}$$

$$g(a) = K(-\operatorname{sen} ma) - 2aK \frac{e^{-mb}}{2b} , \text{ o bien: } g(x) = -\frac{b \cdot \operatorname{sen} mx + x \cdot e^{-mb}}{a^2+b^2} .$$

En forma análoga se opera con $\frac{\operatorname{sen} mx}{x^2+b^2}$.

Ej. 11º: $Q(z)e^{imz} = \frac{e^{imz}}{(z^2+2pz+q^2)(z-a)}$, $m > 0, p^2 < q^2, z^2+2pz+q^2 = F(z)$.

El residuo en $z=a$ es $\frac{e^{ima}}{F(a)}$, y en $z=\alpha = -p + \sqrt{p^2 - q^2} = -p + ir$ es: $\frac{e^{im\alpha}}{2ir(\alpha-a)}$

Resulta: $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+2px+q^2} \frac{dx}{x-a} = \frac{-1}{F(a)} \left[e^{-mr} (\sin mp + \frac{p+a}{r} \cos mp) + \sin ma \right]$

y $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x^2+2px+q^2} \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{F(a)} \left[e^{-mr} \left(\frac{p+a}{r} \sin mp - \cos mp \right) + \cos ma \right]$

Ej. 12º : $\varphi(z) e^{imz} = \frac{e^{imz}}{(z^2+b^4)(z-a)}$, $m > 0$, $b > 0$. El residuo en $z=a$ es:

$\frac{e^{ima}}{a^2+b^4}$; en $z=b\varepsilon$ ($\varepsilon=e^{\pi i/4}$) es $\frac{e^{imb\varepsilon}}{4b^3\varepsilon^3(b\varepsilon-a)}$, y en $z=b\varepsilon^3$ es: $\frac{e^{imb\varepsilon^3}}{4b^3\varepsilon^9(b\varepsilon^3-a)}$.

Poniendo:

$a^2+b^2+\sqrt{2}\cdot ab = P$, $a^2+b^2-\sqrt{2}\cdot ab = Q$, $\frac{a}{\sqrt{2}} = a'$, $\frac{b}{\sqrt{2}} = b'$, resultan las fórmulas:

$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+b^4} \frac{dx}{x-a} = \frac{e^{-mb'}}{2b^3} \left\{ \frac{1}{Q} \left[(b-a') \sin mb' - a' \cos mb' \right] - \frac{1}{P} \left[(b+a') \sin mb' + a' \cos mb' \right] \right\} - \frac{\sin ma}{a^2+b^4}$

$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x^2+b^4} \frac{dx}{x-a} = \frac{e^{-mb'}}{2b^3} \left\{ \frac{1}{Q} \left[(a'-b) \cos mb' - a' \sin mb' \right] + \frac{1}{P} \left[-(a'+b) \cos mb' + a' \sin mb' \right] \right\} + \frac{\cos ma}{a^2+b^4}$

La integral $\int_0^{2\pi} f_1(\theta) \cot_{\frac{1}{2}}(\theta-\varphi) d\theta$, con $f_1(\theta) = f(\operatorname{atg}_{\frac{1}{2}}\theta)$, se puede también calcular mediante residuos. Poniendo $z=e^{i\theta}$, $z_0=e^{i\varphi}$, $z+\frac{1}{z} = 2\cos\theta$, $z-\frac{1}{z} = 2i\sin\theta$, $\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}\theta = i\frac{1-z}{1+z}$, $\operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}\varphi = i\frac{1-z_0}{1+z_0}$, $\cot_{\frac{1}{2}}(\theta-\varphi) = i\frac{z+z_0}{z-z_0}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, el camino de integración es la circunferencia $|z|=1$ y la integral toma la forma $\int_{\Gamma} F(z) dz$. Si R_j es el residuo de $F(z)$ en el polo (o punto singular esencial) z_j interior al círculo unidad y R_α es el residuo en el polo simple $z=\alpha$ sobre el contorno, resulta:

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 2\pi i \sum R_j + \pi i \sum R_\alpha \quad (14)$$

Ej. 13º : $I = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2_{\frac{1}{2}}\theta \cdot \cot_{\frac{1}{2}}(\theta-\varphi) \cdot d\theta = \int_{\Gamma} \frac{(z+1)^2}{4z} i \frac{z+\alpha}{z-\alpha} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \frac{(z+1)^2(z+\alpha)}{z^2(z-\alpha)} dz$. El residuo en el origen es $-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$, y en el polo

$z=\alpha$ es $\frac{2(\alpha+1)^2}{\alpha}$, por lo cual resulta $\frac{\pi i}{4} \left[-\frac{4(\alpha+1)}{\alpha} + \frac{2(\alpha+1)^2}{\alpha} \right] = \frac{\pi i}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$

y con $\alpha=e^{i\varphi}$: $I = \frac{\pi i}{2} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -\pi \sin\varphi$.

Si se aplica la fórmula (9) partiendo de $f(t) = \frac{a}{a^2+t^2}$ se tiene:

$t=\operatorname{atg}_{\frac{1}{2}}\theta$, $x=\operatorname{atg}_{\frac{1}{2}}\varphi$, $f(t)=f_1(\theta) = \frac{1}{a} \cos^2_{\frac{1}{2}}\theta$, $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2_{\frac{1}{2}}\theta \cdot \cot_{\frac{1}{2}}(\theta-\varphi) \cdot d\theta + \frac{1}{2\pi a} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2_{\frac{1}{2}}\theta \cdot \operatorname{tg}_{\frac{1}{2}}\theta \cdot d\theta$. La última integral

es nula, y resulta $g(x) = \frac{1}{2\pi a}(-\pi \cdot \operatorname{sen}\varphi) = \frac{-1}{2a} \operatorname{sen}\varphi = \frac{-1}{2a} \frac{2ax}{a^2+x^2} = \frac{-x}{a^2+x^2}$ como en el Ej.1º.

La fórmula (14) se aplica a cualquier función uniforme $F(z)$ que no tenga sobre la circunferencia $|z|=1$ otras singularidades que polos simples, aunque en el interior tenga polos de cualquier orden y aún puntos singulares esenciales. Con tal limitación puede ser un procedimiento eficaz para el cálculo de funciones conjugadas.

§ 3 - Determinación numérica de la conjugada

Cuando no se pueda obtener la expresión exacta de la conjugada mediante los procedimientos indicados anteriormente o mediante otros procedimientos particulares, hay que recurrir a un método de cálculo aproximado que dará el valor numérico, con cierta aproximación, de la conjugada $g(t)$ para un t cualquiera finito.

Dada la integral convergente $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$, su cálculo aproximado presenta dos dificultades: el punto $t=x$ de discontinuidad infinita y el intervalo infinito de integración. La primera se salva mediante el desarrollo en serie de Taylor de $f(t)$ en $t=x$ y subsiguiente integración entre $x-h$ y $x+h$; la segunda, mediante un cambio de variable que convierta en finito el intervalo infinito de integración. Tal cambio de variable puede ser el que conduce a la fórmula (9).

$$1^\circ) \text{ Poniendo } t=x+u \text{ se tiene: } \pi \cdot g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+u)}{u} du = \int_0^{\infty} \frac{f(x+u)-f(x-u)}{u} du =$$

$$= \int_0^h \left[2f'(x) + \frac{2}{3!} u^2 f'''(x) + \dots + \frac{2}{(2n-1)!} u^{2n-2} f^{(2n-1)}(x) + \frac{u^{2n}}{(2n+1)!} T \right] du +$$

$$+ \int_h^{\infty} \left[\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u} \right] \frac{du}{u} = J + Y, \text{ siendo } J = 2h \cdot f'(x) + \frac{2h^3}{3!3} f'''(x) +$$

$$+ \frac{2h^5}{5!5} f^{(5)}(x) + \dots + \frac{2h^{2n+1}}{(2n-1)!(2n-1)} f^{(2n-1)}(x) + \frac{2h^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} T \quad (15), \text{ y}$$

$$2T = f^{(2n+1)}(x+\theta h) + f^{(2n+1)}(x-\theta h) = 2f^{(2n+1)}(\xi)$$

2º) La integral $Y = \int_{-\infty}^{x-h} \frac{f(t)}{t-x} dt + \int_{x+h}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$ se transforma, con $t = \operatorname{atg}_2^1 \theta$, $x = \operatorname{atg}_2^1 \varphi$ (a es arbitrario y se elige convenientemente), $x-h = \operatorname{atg}_2^1 \tau_1$, $x+h = \operatorname{atg}_2^1 \tau_2$, $f(\operatorname{atg}_2^1 \theta) = F(\theta)$, en la expresión siguiente (ver fórm.9):

$$Y = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\theta) \left[\cot_2^1(\theta-\varphi) + \operatorname{tg}_2^1 \theta \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} F(\theta) \left[\cot_2^1(\theta-\varphi) + \operatorname{tg}_2^1 \theta \right] d\theta = Y_1 + Y_2 \quad (16)$$

Para que sea posible el cálculo numérico de estas integrales es necesario que el integrando sea finito en todo el intervalo de integración; por

tanto, cuando θ tiende a $+\pi$ o $-\pi$ debe ser finito el $\lim_{t \rightarrow \infty} [F(\theta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta]$, o sea el $\lim_{t \rightarrow \infty} [t \cdot f(t)]$. Si esto no se verifica (siendo las integrales Y_1 e Y_2 convergentes), habrá que excluir un pequeño intervalo que empiece en $-\pi$ en la integral Y_1 y otro que termine en π en la integral Y_2 , y efectuar la integración en ellos por desarrollo en serie.

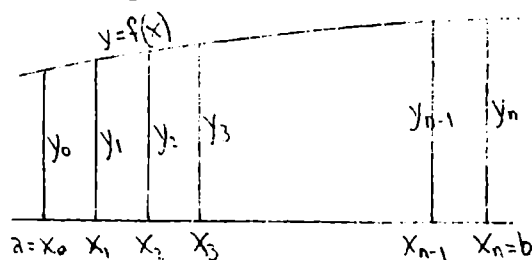
Los dos términos de la (16) se pueden escribir así:

$$Y_1 = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \psi \int_{-\pi}^{\pi_1} \frac{F(\theta) d\theta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\theta - \psi) \cos \frac{1}{2} \theta}, \quad Y_2 = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \psi \int_{\pi_2}^{\pi} \frac{F(\theta) d\theta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\theta - \psi) \cos \frac{1}{2} \theta} \quad (17)$$

El cálculo numérico de las integrales Y_1 e Y_2 se efectúa mediante fórmulas especiales de integración aproximada, de las que mencionaré las más usuales:

a) Fórmulas de Newton-Cotes - Dan el valor, con cierta aproximación, de la integral

$A = \int_a^b f(x) dx$ mediante una combinación lineal



de $n+1$ ordenadas equidistantes de $f(x)$, obtenidas dividiendo el intervalo (a, b) en n partes iguales de amplitud $h = \frac{b-a}{n}$. Se fundan en la sustitución de la función $f(x)$ por un polinomio de grado n que coincide con ella en $n+1$ puntos, y se obtienen integrando la fórmula de interpolación de Lagrange (o la de Newton-Gregory). Los resultados son:

$n=1$: $A = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$, fórmula del trapecio

$n=2$: $A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$, fórmula de Simpson o parabólica

$n=3$: $A = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) - \frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi)$, fórmula de Newton-Simpson

$n=4$: $A = \frac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) - \frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi)$

$n=5$: $A = \frac{5h}{288}(19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5) - \frac{275h^7}{12096} f^{VI}(\xi)$

$n=6$: $A = \frac{h}{140}(41y_0 + 216y_1 + 27y_2 + 272y_3 + 27y_4 + 216y_5 + 41y_6) - \frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\xi)$

Las fórmulas para $n=2k+1$ tienen prácticamente el mismo error que las fórmulas para $n=2k$. Si el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ en $x=c$, punto central del intervalo (a, b) , tiene un radio de convergencia $> \frac{1}{2}(b-a)$, se puede tomar $\xi = c$ en la expresión del error. Esta expresión deja de ser válida si la derivada que en ella interviene no es continua. Si tal derivada varía poco en (a, b) , el error estará determinado con cierta precisión;

en caso contrario estará mal determinado, y sólo se le podrá fijar una cota superior. Estas fórmulas se pueden reiterar para abarcar un intervalo más amplio. Así, dividiendo el intervalo (a,b) en un número par n de partes h , la fórmula de Simpson se transforma en la siguiente:

$$A = \frac{h}{3}(3+4I+2P) - \frac{h^5}{90} \sum_1 f^{IV}(\xi_i), \text{ pudiéndose tomar } \xi_i = x \text{ (i impar)}. \text{ Sustituyendo}$$

do las $f^{IV}(\xi_i)$ por su promedio, el error será $\frac{nh^5}{90} f^{IV}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{90n^4} f^{IV}(\xi)$, y al aumentar n tiende a cero como $1/n^4$. Si se aplica dos veces esta fórmula, primero con intervalo h y luego con $\frac{1}{2}h$, y se obtienen valores aproximados A_1 y A_2 , se deduce fácilmente que $A_2 + \frac{A_2 - A_1}{15}$ es un valor más aproximado de la integral, especialmente si la f^{IV} varía poco en (a,b).

Fórmula de Weddle - Se obtiene mediante una sencilla modificación de la fórmula de Newton-Cotes con 6 divisiones:

$$A = \frac{3h}{10}(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6) - \frac{h^7}{140} f^{IV}(\xi)$$

y es notable por la sencillez de sus coeficientes.

Nota - Las fórmulas de N-C pueden ser generalizadas para dar el valor aproximado de $\int_a^b w(x)f(x)dx$ como combinación lineal de valores de $f(x)$ en puntos equidistantes y para diversas funciones $w(x)$. [E.L.Kaplan: "Numerical integration near a singularity"; J.Math.and Phys., 31:1-28, 1952]

Para el cálculo de $\int_0^{\infty} e^{-px}f(x)dx$ hay tablas hechas por H.E.Salzer ["Tables of coefficients for the numerical calculation of Laplace transforms"; NBS Applied mathematics series, vol.30, 1953].

Existen otras muchas fórmulas para integración aproximada, como la de Gauss, notablemente precisa pero de aplicación muy laboriosa; la de Euler-McLaurin (fórmula de los trapecios con términos de corrección); las de Hardy, Shovelton y Woolhouse (análogas a la de N-C); y otras para integrales de tipos particulares: Laguerre, Hermite, Tschebycheff, Mehler, Radau, Lobatto, etc.

Fórmulas con diferencias finitas - Cuando el empleo de diferencias finitas sea más cómodo o más conveniente que el de las derivadas, y especialmente cuando no sea posible utilizar éstas, se aplican fórmulas de integración aproximada que se obtienen integrando las fórmulas usuales de interpolación con diferencias sucesivas. Ya se vio que la fórmula de N-C conduce a las de N-C. Las fórmulas con diferencias centrales: Gauss, Stirling,

Bessel, Everett, Steffensen, originan nuevas fórmulas de cuadratura aproximada. Si en la fórmula de Euler-McLaurin se reemplazan las derivadas por diferencias, se obtiene la fórmula de Gregory.

Más adelante estableceré fórmulas para el cálculo aproximado de integrales del tipo $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) \sin x \cdot dx$, que serán muy precisas si $f(x)$ varía poco en el intervalo de integración. Tales fórmulas permitirán calcular con gran aproximación la integral $\int_{n\pi}^{\infty} f(x) \sin x \cdot dx$, si $f(x)$ tiende a cero monótonamente para $x \rightarrow \infty$. También estableceré fórmulas para el cálculo aproximado de integrales del tipo $\int_0^a f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Determinación numérica de valores principales

§ 4 - Conjugada de $f(t) = (1+t^2)^{-1}$

1) Solución del problema - Comenzaré con un ejemplo muy simple en que la conjugada es conocida: $g(x) = \frac{-x}{1+x^2}$. Se trata de calcular $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt$ para diversos valores de x . Por ser $f(t)$ función par, la $g(x)$ es impar, y se puede tomar solamente valores positivos de x . Para $x=0$ es $g(0)=0$.

Siguiendo el procedimiento indicado en el § 3, hay que calcular la expresión (15), en que h es positiva: $J = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!3} f'''(x) + \frac{2h^5}{5!5} f^{(5)}(x) + \dots$

Se tiene: $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right) \therefore f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{(-i)^n n!}{(1+ix)^{n+1}} + \frac{n! i^n}{(1-ix)^{n+1}} \right]$

y con $1+ix = re^{i\alpha}$ resulta: $f^{(n)}(x) = n! \mathcal{R} \frac{(-i)^n}{(1+ix)^{n+1}} = \frac{n!}{r^{n+1}} \cos \left[(n+1)\alpha + n\frac{\pi}{2} \right]$

siendo $r = \sqrt{1+x^2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = x$. Por tanto:

$J = -\frac{2h}{r^2} \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{2h^3}{3r^4} \operatorname{sen} 4\alpha - \frac{2h^5}{5r^6} \operatorname{sen} 6\alpha + \dots$. Esta serie converge absolutamente para $h < r$, y en virtud de un conocido criterio de Abel converge también para $h=r$.

Tomando $\frac{h}{r}$ suficientemente pequeño, la serie converge con rapidez. Sin embargo no hay necesidad de sumarla término a término, pues es fácil hallar la expresión exacta de su suma, o sea la función de la cual es el desarrollo. En efecto: con $\frac{h}{r} = \rho$, $z = \rho e^{i\alpha}$, se tiene:

$J = -\frac{2}{h} \left[\rho^2 \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{1}{3} \rho^4 \operatorname{sen} 4\alpha + \frac{1}{5} \rho^6 \operatorname{sen} 6\alpha - \dots \right] = -\frac{2}{h} J \left(z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{z^6}{5} - \dots \right)$ Llamando $F(z) = F(u+iv)$ a la última serie:

$F(z) = \frac{z}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{z}{2i} \log \frac{(1-v)+iu}{(1+v)-iu} = \frac{1}{2}(v-iu) \left[\frac{1}{2} \log \frac{1-2v+u^2+v^2}{1+2v+u^2+v^2} + (\operatorname{signe}) \right]$

+ 1. arc tg $\frac{2u}{1-(u^2+v^2)} + 2k\pi$, y resulta:

$$J = -\frac{1}{h} \left[-\frac{u}{2} \log \frac{P}{Q} + v \cdot \text{arc tg} \frac{P'}{Q'} + 2k\pi v \right] = \frac{\cos \alpha}{2r} \log \frac{1-2\rho \sin \alpha + \rho^2}{1+2\rho \sin \alpha + \rho^2} - \frac{\sin \alpha}{r} \left(\text{arc tg} \frac{2\rho \cos \alpha}{1-\rho^2} + 2k\pi \right).$$

Para $\rho = 0$ se ve que es $k=0$. Restable-

ciendo la x queda: $J = \frac{1}{2(1+x^2)} \log \frac{1+(x-h)^2}{1+(x+h)^2} - \frac{x}{1+x^2} \text{arc tg} \frac{2h}{1+x^2-h^2}$ (18)

En particular, para $\rho=1$ o $h=r$ resulta: $J = \frac{-1}{1+x^2} \left[\log(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}\pi x \right]$ (19)

El cálculo de Y_1 e Y_2 es elemental. Tomando $h=r=\sqrt{1+x^2}$ se tiene:

$$Y_1 = - \int_{-\infty}^{x-h} \frac{dt}{(1+t^2)(x-t)} = \frac{-1}{1+x^2} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{2(1-x)}{h} + x \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \frac{h-x}{h} \right) \right\}$$
 (20)

$$Y_2 = \int_{x+h}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(t-x)} = \frac{1}{1+x^2} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{2(h+x)}{h} + x \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \frac{x+h}{h} \right) \right\}$$
 (21)

Como comprobación: $Y_1 + Y_2 = \frac{1}{1+x^2} \left[\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\pi x \right]$, y sumando con (19):

$$Y_1 + Y_2 + J = \frac{-\pi x}{1+x^2} = \pi g(x).$$

El cálculo es, pues, exacto.

Calcularé las integrales Y_1 e Y_2 con fórmulas de integración aproximada, con el objeto de examinar la aproximación. Para aplicar la (16) se pone: $t = \text{tg} \frac{1}{2} \theta$, $x = \text{tg} \frac{1}{2} \phi$, $x-h = \text{tg} \frac{1}{2} \tau_1$, $x+h = \text{tg} \frac{1}{2} \tau_2$, con lo cual resulta:

$$Y_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\tau_1} \cos^2 \frac{1}{2} \theta \left[\cot^2 \frac{1}{2} (\theta - \phi) + \text{tg}^2 \frac{1}{2} \theta \right] d\theta = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \phi \left\{ \int_{-\pi}^{\tau_1} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 (\theta - \phi)} d\theta \right\}$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \phi \int_{\tau_2}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot \text{cosec}^2 (\theta - \phi) d\theta$$

(22)

2) Cálculo de la conjugada para $x=1$ - Tomando $h=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{2}$ y siendo $\phi = \frac{\pi}{2}$,

se tiene: $\text{tg} \frac{1}{2} \tau_1 = 1-\sqrt{2}$, $\text{tg} \frac{1}{2} \tau_2 = 1+\sqrt{2}$ $\therefore \tau_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\tau_2 = \frac{3\pi}{4}$. La gráfica de

la función $y = \cos^2 \theta \cdot \text{cosec} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cot \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right]$ en los intervalos

de integración es la siguiente:

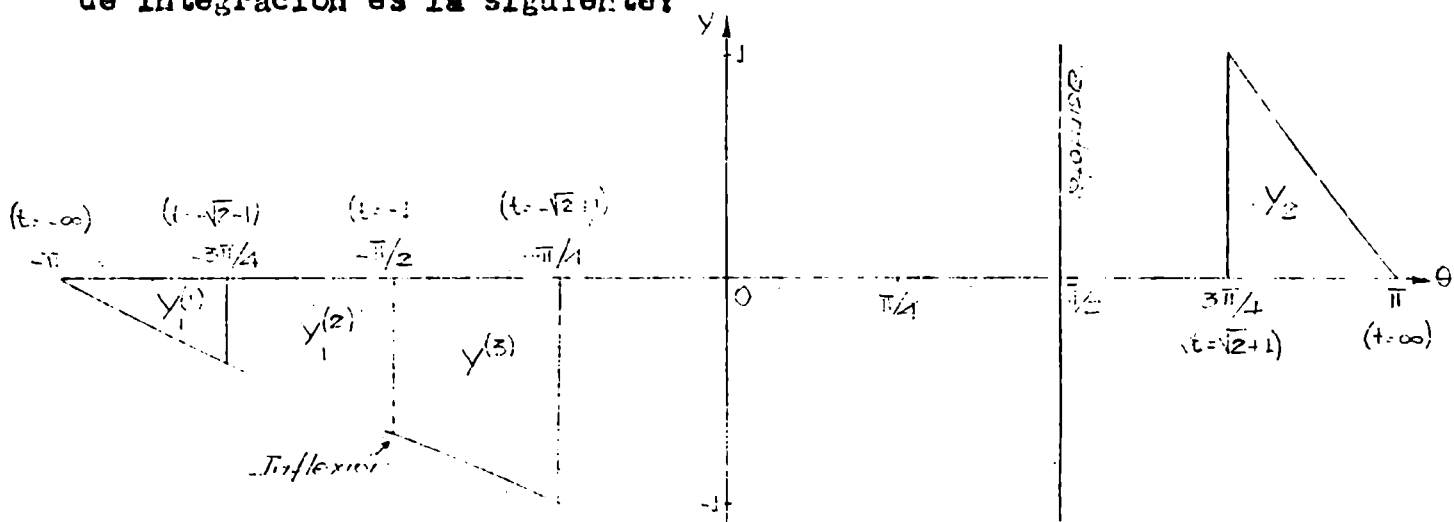


Tabla de valores

-180°	0	-135°	-0,4142136	-90°	-0,7071068	135°	1
-172,5	-0,0369908	-127,5	-0,4670763	-82,5	-0,7534531	142,5	0,7267640
-165	-0,1645247	-120	-0,5176381	-75	-0,8001993	150	0,5176381
-157,5	-0,2346381	-112,5	-0,5664546	-67,5	-0,8477592	157,5	0,3511533
-150	-0,2950585	-105	-0,6140144	-60	-0,8965754	165	0,2144128
-142,5	-0,3684003	-97,5	-0,6607608	-52,5	-0,9471372	172,5	0,0991940
-135°	-0,4142136	-90°	-0,7071068	-45°	-1	180	0

Se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}+1} \frac{dt}{(1+t^2)(1-t)} = - \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}-1} - \int_{-\sqrt{2}-1}^{-1} - \int_{-1}^{-\sqrt{2}+1} = Y_1^{(1)} + Y_1^{(2)} + Y_1^{(3)}$. Estas in-

tegrales se calculan con fórmulas elementales. Además: $Y_2 = \int_{\sqrt{2}+1}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1-t)}$
Aplicando las fórmulas de integración aproximada de Weddle

y de Simpson a estas cuatro integrales, se obtienen los resultados sig^g:

$Y_1^{(1)} = -0,06264953$ $Y_1^{(2)} = -0,15676275$ $Y_1^{(3)} = -0,23593633$ $Y_2 = 0,11063726$
W: -0,06264953 W: -0,1567627 W: -0,2359364 W: 0,1106383
S: -0,06264893 S: -0,1567645 S: -0,2359364 S: 0,1106486

La suma de las cuatro integrales es $Y = -0,34471135$ (W: -0,3447103 SS: -0,3447012)

El valor de J está dado por la (19), poniendo x=1:

$J = -\frac{1}{2} \left[\log(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\pi \right] = -1,22608496$. Resulta, finalmente:

$J + Y = \pi g(1) = -1,57079631 \therefore g(1) = -\frac{1}{2}$. Las fórmulas de integración aproximada dan: $J + Y = 1,5707953$ (Weddle), $-1,5707862$ (Simpson), y por consiguiente: $g(1) = -\frac{1}{2} + 0,0653$ (W), $-\frac{1}{2} + 0,0532$ (S).

Se ve que en el caso de la función $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ el método utilizado es eficaz. Subdividiendo aún más el intervalo de integración se puede mejorar la aproximación casi tanto como se quiera.

§5 - Conjugada de $f(t) = e^{-t^2}$

1) Solución del problema - Se ha visto en el §2, Ej.3º, que tal conjugada está expresada por la integral trascendente

$g(x) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \text{sen } 2tx \cdot dt = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^x e^{v^2} \cdot dv$, que se puede calcular por desarrollo en serie. La g(x) es función impar.

El procedimiento expuesto en el §3 será ahora aplicado al cálculo de

$\pi g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-x} dt = \int_{-\infty}^{x-h} + \int_{x-h}^{x+h} + \int_{x+h}^{\infty} = Y_1 + J + Y_2$ para diversos valores de

x , como iniciando la tabulación de la función conjugada. El cálculo de J se efectúa con la (15), donde aparecen las derivadas de orden impar de $f(x) = e^{-x^2}$. Recordando que $D^m e^{-x^2} = (-1)^m H_m(x) \cdot e^{-x^2}$, en que los $H_m(x)$ son los polinomios de Hermite:

$H_m(x) = (2x)^m - 2 \binom{m}{2} (2x)^{m-2} + 2 \cdot 6 \binom{m}{4} (2x)^{m-4} - 2 \cdot 6 \cdot 10 \binom{m}{6} (2x)^{m-6} + \dots$

se calculan las derivadas sucesivas aplicando la relación de recurrencia $H_{m+1} = 2x \cdot H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, fácil de establecer. Se tiene, pues:

$$J = -2e^{-x^2} \left[h \cdot H_1(x) + \frac{h^3}{3!3} H_3(x) + \frac{h^5}{5!5} H_5(x) + \dots + \frac{h}{(2n-1)!(2n-1)} H_{2n-1}(x) \right] + \frac{2h^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} T, \text{ siendo } 2T = F(x+\theta h) + F(x-\theta h) \text{ y } F(x) = e^{-x^2} \cdot H_{2n+1}(x)$$

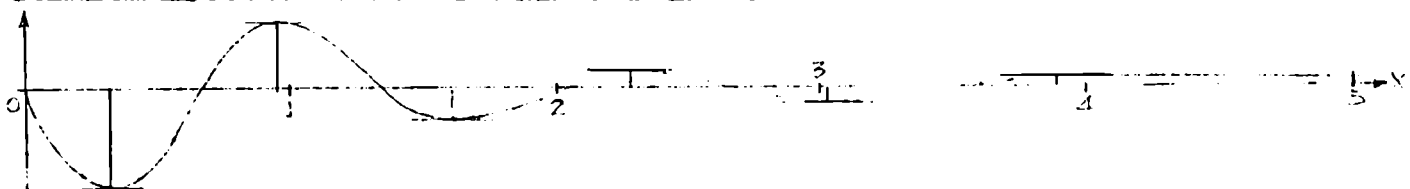
Hay que determinar el máximo de $|T|$ para un h dado. Eligiendo un h conveniente se puede lograr que el último término sea tan pequeño como se quiera. Para $n \rightarrow \infty$ la serie converge, pues se verifica, siendo $k=1,086$ (Cramér) que $|H_n(x)| < k \cdot 2^{\frac{1}{2}n} (n!)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$. Tomando $n=5$ hay que considerar la variación de $e^{-x^2} \cdot H_{11}(x)$, para lo cual se requieren las raíces de su derivada $-e^{-x^2} \cdot H_{12}(x)$. Los polinomios en cuestión son, poniendo $(2x)^2 = z$:

$$H_{11}(x) = 2x(z^5 - 110z^4 + 3960z^3 - 55440z^2 + 277200z - 332640)$$

$$H_{12}(x) = z^6 - 132z^5 + 5940z^4 - 110880z^3 + 831600z^2 - 1995840z + 665280$$

La tablilla siguiente y la gráfica muestran esa variación.

x	$e^{-x^2} H_{11}(x)$	x	$e^{-x^2} H_{12}(x)$	Raíces de $H_{12}(x)$	
0	0	2,5	+5977	$x_1 = 0,3142404$	$z_1 = 0,3949881$
0,314	-131845 (mín)	3	-1287	$x_2 = 0,9477884$	$z_2 = 3,5932113$
0,5	-83260	3,021	-1295 (mín)	$x_3 = 1,5976826$	$z_3 = 10,2103592$
0,948	+87633 (máx)	3,5	-187	$x_4 = 2,2795071$	$z_4 = 20,7846101$
1	+84924	3,880	-53 (máx)	$x_5 = 3,0206370$	$z_5 = 36,4969922$
1,5	-32980	4	+51	$x_6 = 3,8897249$	$z_6 = 60,5198391$
1,598	-37671 (mín)	4,5	+7,4		
2	-2220	5	+0,34		
2,280	+9738 (máx)	5,5	+0,0069		



2) Cálculo de $g(1)$ - Tomando $h=\frac{1}{2}$ hay que acotar el factor T del término complementario de J en el intervalo $(0,5 ; 1,5)$. Observando la gráfica de $e^{-x^2} \cdot H_{11}(x)$ se ve que $|T|$ no excede de 86300, y por tanto dicho término vale, a lo más: $\frac{86300}{11! \cdot 11 \cdot 2^{10}} = \frac{86300}{4,50 \times 10^{11}} \approx 2 \times 10^{-7}$, y se puede calcular J con 6 o 7 decimales.

La relación de recurrencia de los $H_m(x)$ da, para $x=1$: $H_1=2$, $H_2=2$, $H_3=-4$, $H_4=-20$, $H_5=-8$, $H_6=184$, $H_7=464$, $H_8=-1648$, $H_9=-10720$, y por tanto:

$$J = -2e^{-1} \left[1 - \frac{4}{3! \cdot 3 \cdot 2^3} - \frac{8}{5! \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{464}{7! \cdot 7 \cdot 2^7} - \frac{10720}{9! \cdot 9 \cdot 2^9} \right] + \varepsilon = -0,7156986 + \varepsilon \quad |\varepsilon| < 2 \cdot 10^{-7}$$

Para calcular $Y_1 = -\int_{-\infty}^{0,5} \frac{e^{-t^2}}{1-t} dt$ e $Y_2 = \int_{1,5}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-1} dt$ no es necesario efectuar el cambio de variable que produce un intervalo de integración finito, pues

el gran decrecimiento de e^{-t^2} permite utilizar una pequeña parte del intervalo de integración de cada integral: $Y_1 = - \int_{-a}^{0.5} \frac{e^{-t^2}}{1-t} dt - \epsilon_1$, $Y_2 = \int_{1.5}^b \frac{e^{-t^2}}{t-1} dt + \epsilon_2$

$$\epsilon_1 = \int_{-\infty}^{-a} \frac{e^{-t^2}}{1-t} dt = \int_a^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{1-t} dt < \frac{1}{1+a} \int_a^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1+a)} [1 - \Theta(a)]$$

$$\epsilon_2 = \int_b^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-1} dt < \frac{1}{b-1} \int_b^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2(b-1)} [1 - \Theta(b)] , \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0,8862\dots$$

La función $\Theta(t)$ es la conocida función error, que está tabulada:

t	(t)	3,7	0,9 833	4,4	0,9 511
		3,8	0,9 230	4,5	0,9 803
3,2	0,9 397	3,9	0,9 652	4,6	0,9 225
3,3	0,9 694	4	0,9 846	4,7	0,9 701
3,4	0,9 248	4,1	0,9 330	4,8	0,9 386
3,5	0,9 257	4,2	0,9 714	4,9	0,9 578
3,6	0,9 644	4,3	0,9 881	5	0,9 985

Se ve que ya para $a = 3,5$ es $1 - \Theta(a) = 0,0^6 743$, y para $a=4$ es $1 - \Theta(a) = 0,0^7 15$. Se puede adoptar $a=b=3,5$, con lo cual se tiene:

$$Y_1 = - \int_{-3,5}^{0,5} \frac{e^{-t^2}}{1-t} dt - \epsilon_1 (\epsilon_1 < 1,5 \cdot 10^{-7}) ; Y_2 = \int_{1,5}^{3,5} \frac{e^{-t^2}}{t-1} dt + \epsilon_2 (\epsilon_2 < 2,6 \cdot 10^{-7})$$

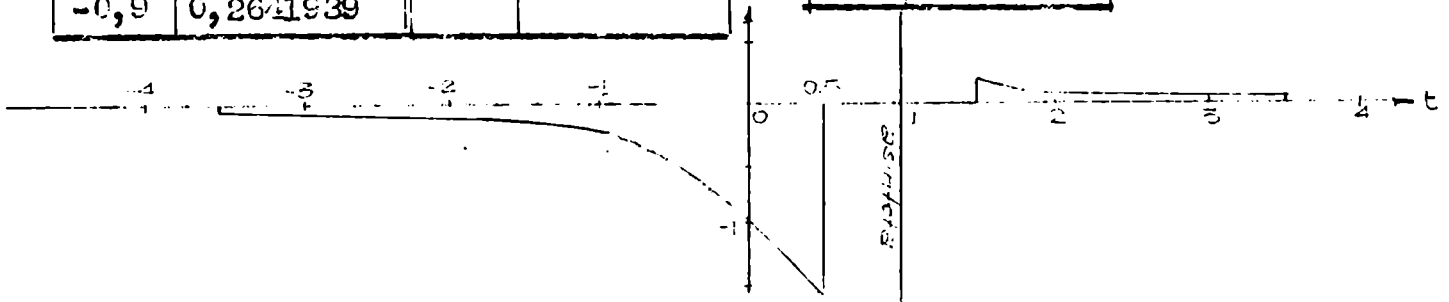
Estas integrales se calculan con fórmulas de integración aproximada:

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{1-t}$

-3,5	0,0000012	-0,8	0,3305477
-3,3	0,0000049	-0,7	0,4066323
-3,1	0,0000184	-0,6	0,4920271
-2,9	0,0000644	-0,5	0,5858551
-2,7	0,0002081	-0,4	0,6868152
-2,5	0,0006224	-0,3	0,7932776
-2,3	0,0017239	-0,2	0,9034457
-2,1	0,0044244	-0,1	1,0155924
-1,9	0,0105258	0	1,1283792
-1,7	0,0232263	0,1	1,2412796
-1,5	0,0475721	0,2	1,3551685
-1,3	0,0906251	0,3	1,4732399
-1,1	0,1602284	0,4	1,6025683
-1	0,2075537	0,5	1,7575652
-0,9	0,2641939		

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t-1}$

1,5	0,2378606
1,6	0,1453818
1,7	0,0895672
1,8	0,0552397
1,9	0,0339164
2	0,0206670
2,1	0,0124638
2,3	0,0043762
2,5	0,0014522
2,7	0,0004529
2,9	0,0001322
3,1	0,0000360
3,3	0,0000091
3,5	0,0000002



Aplicando las fórmulas de Simson y de Weddle y combinando los resultados se obtienen los siguientes valores para las integrales:

$$\int_{-3,5}^{-1} = -0,050382 ; \int_{-1,1}^{+0,5} = -1,343448 ; \int_{1,5}^{2,1} = 0,046074 ; \int_{2,1}^{3,5} = 0,0023415$$

y por consiguiente: $Y_1 = -1,393830 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $Y_2 = 0,048415 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\therefore Y = -1,345415 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Siendo $J = -0,7156986$, resulta finalmente:

$$-g(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (0,6727075 \sqrt{\pi} + 0,7156986) = \boxed{0,607349} . \text{ El valor exacto está da-}$$

dado por la serie siguiente: $-g(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2 - \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3 \cdot 5} - \frac{2^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right) =$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} 1,076159 = 0,6071376$, y el error es $\leq 0,0002$. Para disminuirlo conviene reducir a 0,1 las divisiones sobre el eje CX en la integración aproximada.

NOTA → Los valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ están tomados de la tabla siguiente:

0	1,128379167	1,5	0,113930239	3	0,000139253
0,1	1,117151607	1,6	0,087229059	3,1	75663
0,2	1,084134787	1,7	0,062711040	3,2	40298
0,3	1,031260910	1,8	0,044191723	3,3	21037
0,4	0,961541299	1,9	0,030524740	3,4	10705
0,5	0,878732579	2	0,020666985	3,5	5399
0,6	0,787243432	2,1	0,013715650	3,6	2655
0,7	0,691274860	2,2	0,008922155	3,7	1379
0,8	0,594925786	2,3	0,005629017	3,8	604
0,9	0,501968574	2,4	0,003555649	3,9	280
1	0,415107497	2,5	0,002173284	4	127
1,1	0,336479598	2,6	0,001308050	4,1	56
1,2	0,267344347	2,7	0,000769925	4,2	25
1,3	0,208207937	2,8	0,000444208	4,3	11
1,4	0,158941708	2,9	0,000251211	4,4	4

3) Cálculo de $g(\frac{1}{2})$ - La gráfica de $e^{-x^2} \cdot H_n(x)$ muestra que en el intervalo (0;1) el valor de $|T|$ no excede de 107000, y por tanto, con $h=\frac{1}{2}$, el término complementario de J vale a lo más $\frac{107000}{11111,2^{10}} \approx 2,4 \cdot 10^{-7}$. Entonces J se puede calcular con 6 o 7 cifras decimales.

Para $x=\frac{1}{2}$ se tiene: $H_{m+1} = H_m - 2mH_{m-1}$. Resulta: $H_1=1$; $H_2=-1$; $H_3=-5$; $H_4=1$; $H_5=41$; $H_6=31$; $H_7=-401$; $H_8=-395$; $H_9=6431$, y por consiguiente:

$$J = 2e^{-1/4} \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{3! \cdot 2^3} + \frac{41}{5! \cdot 2^5} - \frac{401}{7! \cdot 2^7} + \frac{6431}{9! \cdot 2^9} \right] + \epsilon = -0,7278905 + \epsilon$$

$|\epsilon| < 2,4 \cdot 10^{-7}$

Para Y_1 e Y_2 se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-t^2}}{0,5-t} dt = - \int_{-3,6}^0 -\epsilon_1$, siendo

$$\epsilon_1 = \int_{-\infty}^{-3,6} \frac{e^{-t^2}}{0,5-t} dt = \int_{3,6}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{0,5+t} dt < \frac{1}{4,1} \int_{3,6}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{8,2} [1 - \Theta(3,6)] = \frac{\sqrt{\pi}}{8,2} 0,06356 \approx 7,7 \cdot 10^{-8}$$

Análogamente: $Y_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-0,5} dt = \int_0^{3,6} + \epsilon_2$, siendo $\epsilon_2 = \int_{3,6}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-0,5} dt <$

$$< \frac{1}{3,1} \int_{3,6}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{6,2} [1 - \Theta(3,6)] = \frac{\sqrt{\pi}}{6,2} 0,06356 \approx 10^{-7}$$

A continuación va el cálculo aproximado:

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{0,5-t}$					
		-2,6	0,0004230	-1,3	0,1156711
		-2,5	7621	-1,2	0,1372614
		-2,4	12261	-1,1	0,2102997
		-2,3	20713	-1	0,2767385
-3,6	0,0000006	-2,2	33045	-0,9	0,3535490
-3,5	13	-2,1	52752	-0,8	0,4576214
-3,4	28	-2	82603	-0,7	0,5760624
-3,3	55	-1,9	127136	-0,6	0,7156758
-3,2	109	-1,8	192132	-0,5	0,8787326
-3,1	210	-1,7	285050	-0,4	1,0626792
-3	393	-1,6	415376	-0,3	1,2690761
-2,9	739	-1,5	594651	-0,2	1,507640
-2,8	1346	-1,4	823635	-0,1	1,7619193
				0	2,2567533

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t-0,5}$					
1	0,8302150	1,8	0,0339936	2,9	0,0001047
1,1	0,5607993	1,9	0,0218034	3	557
1,2	0,3819205	2	0,0137780	3,1	291
1,3	0,2602600	2,1	0,0085723	3,2	149
1,4	0,1766019	2,2	0,0052483	3,3	75
1,5	0,1189303	2,3	31606	3,4	37
1,6	0,0792991	2,4	13714	3,6	18
1,7	0,0522592	2,5	10891	3,6	8
		2,6	6229		
		2,7	3500		
		2,8	1931		

Los valores aproximados de las integrales son:

$Y_1 = \int_{-3,6}^0 = 1,087282$; $Y_2 = \int_1^{3,6} = 0,210877$ $\therefore Y = -0,876405 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, y por consiguiente: $-g(0,5) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (0,438202\sqrt{\pi} + 0,727890) = 0,478924$. El valor exacto es: $-g(0,5) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 10} - \frac{1}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right) = 0,47892517$

4) Cálculo de $g(1,5)$ - En el intervalo (1;2) el valor de $|T|$ no supera a 41300 , y con $h = \frac{1}{2}$ el término complementario de J será $< \frac{41300}{11111 \cdot 2^{10}} \approx 9 \cdot 10^{-8}$. Entonces se podrá calcular J con siete cifras decimales.

Para $x=1,5$ se tiene: $H_{m+1} = 3H_m - 2mH_{m-1}$, y resulta: $H_1=3$, $H_2=7$, $H_3=9$, $H_4=-15$, $H_5=-117$, $H_6=-201$, $H_7=801$, $H_8=5217$, $H_9=2835$. Por consiguiente:

$J = -2\pi^{-3/4} \left[\frac{3}{2} + \frac{9}{3! \cdot 2^3} - \frac{117}{5! \cdot 2^5} + \frac{801}{7! \cdot 2^7} + \frac{2835}{9! \cdot 2^9} \right] + \epsilon =$
 $= -0,3281258 + \epsilon$, siendo $|\epsilon| < 9 \cdot 10^{-7}$. Para Y_1 e Y_2 se tiene:

$Y_1 = - \int_{-\infty}^1 \frac{e^{-t^2}}{1,5-t} dt = - \int_{-3,6}^1 \gamma \epsilon_1$, con $\epsilon_1 < \frac{1}{5,1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \Theta(3,6) \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{10,2} 0,06356 \approx 6,2 \cdot 10^{-8}$

$Y_2 = \int_2^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-1,5} dt = \int_2^{3,6} + \epsilon_2$, con $\epsilon_2 < \frac{1}{2,1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 0,06356 \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$

A continuación va el cálculo aproximado de las integrales, mediante las fórmulas de Simpson y de Newton-Cotes con 4 divisiones.

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{1,5-t}$					
-3,6	0,0000005	-2,2	0,0024114	-0,5	0,4393913
-3,5	11	-2,1	38099	-0,4	5060744
-3,4	22	-2	59048	-0,3	5729227
-3,3	44	-1,9	89778	-0,2	6377263
-3,2	86	-1,8	133914	-0,1	6982197
-3,1	164	-1,7	195972	0	7522528
-3	309	-1,6	281384	0,1	7979654
-2,9	571	-1,5	396434	0,2	8339498
-2,8	1033	-1,4	548075	0,3	8593841
-2,7	1833	-1,3	743600	0,4	8741285
-2,6	3190	-1,2	990164	0,5	8787826
-2,5	5446	-1,1	0,1294152	0,6	8747149
-2,4	9117	-1	1660430	0,7	8640936
-2,3	0,0014971	-0,9	2091536	0,8	8499797
		-0,8	2586895	0,9	8366143
		-0,7	3142158	1	0,8302150
		-0,6	0,3748778		

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t-1,5}$ (Ver pág. 20)

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t-1,5}$

2	0,0413340	2,5	0,0021783	3	0,0000928
2,1	223594	2,6	11891	3,1	473
2,2	127459	2,7	6416	3,2	237
2,3	71113	2,8	3417	3,3	117
2,4	39507	2,9	1794	3,4	57
				3,5	27
				3,6	13

Resulta: $Y_1 = -1,3497521 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $Y_2 = 0,0070039 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\therefore Y = -0,6713741 \sqrt{\pi}$, y

~~El valor exacto es:~~ $g(1,5) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (J+Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-0,3281258 - 0,6713741 \sqrt{\pi}) = -0,4832280$

El valor exacto es:

$g(1,5) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(3 - \frac{3^3}{6} + \frac{3^5}{6 \cdot 10} - \frac{3^7}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} (0,8564984) = -0,4832276$ 17 términos

5) Cálculo de g(2) - En el intervalo (1,5 ; 2,5) es $|T| < 20000$, y con

$h = \frac{1}{2}$ el término complementario de J es $< \frac{20000}{11! 11 \cdot 2^{10}} \approx 4,4 \cdot 10^{-8}$

Para $x=2$ se tiene: $H_{m+1} = 4H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, y por tanto: $H_1=4$, $H_2=14$, $H_3=40$, $H_4=76$, $H_5=16$, $H_6=824$, $H_7=3104$, $H_8=820$, $H_9=46144$. Entonces:

$J = -2e^{-4} \left[2 + \frac{40}{3! \cdot 2^3} - \frac{16}{5! \cdot 2^5} + \frac{3104}{7! \cdot 2^7} - \frac{46144}{9! \cdot 2^9} \right] + \epsilon = -0,0833832 + \epsilon$ $|\epsilon| < 4,4 \cdot 10^{-8}$

Para Y_1 e Y_2 se tiene: $Y_1 = - \int_{1,5}^{2,5} \frac{e^{-t^2}}{2-t} dt = - \int_{3,5}^{4,5} -\epsilon_1$, siendo $\epsilon_1 = \int_{-4,5}^{-3,5} \frac{e^{-t^2}}{2-t} dt = \int_{3,5}^{4,5} \frac{e^{-t^2}}{2-t} dt < \frac{1}{5,5} \int_{3,5}^{4,5} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{11} [1 - \Phi(3,5)] = \frac{\sqrt{\pi}}{11} (0,06743) \approx 1,2 \cdot 10^{-7}$

Análogamente: $Y_2 = \int_{2,5}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-2} dt = \int_{2,5}^{3,5} + \epsilon_2$, siendo $\epsilon_2 < \frac{\sqrt{\pi}}{3} (0,06743) \approx 4,4 \cdot 10^{-7}$

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{2-t}$

-2	0,0051667	-0,2	0,4927885
-1,9	78269	-0,1	5319770
-1,8	116294	0	5641896
-1,7	169489	0,1	5879745
-1,6	242303	0,2	6022971
-1,5	339801	0,3	6066241
-1,4	467476	0,4	6009633
-1,3	630933	0,5	5859217
-1,2	835451	0,6	5623167
-1,1	1085418	0,7	5317499
-1	1383692	0,8	4958215
-0,9	1730926	0,9	4563351
-0,8	2124949	1	4151075
-0,7	2560277	1,1	3738662
-0,6	3027859	1,2	3341804
-0,5	3515130	1,3	2974400
-0,4	4006423	1,4	2649028
-0,3	0,4483743	1,5	0,2378606

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t-2}$

2,5	0,0043566
2,6	21801
2,7	10999
2,8	5553
2,9	2791
3	1393
3,1	688
3,2	336
3,3	162
3,4	77
3,5	36

Resulta: $Y_1 = -1,1119099 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $Y_2 = 0,0006315 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $Y = Y_1 + Y_2 = -0,5556392 \sqrt{\pi}$

y finalmente: $g(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (J+Y) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} (0,0833832 + 0,5556392 \sqrt{\pi}) = -0,3400276$

El valor exacto es: $g(2) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(4 - \frac{4^3}{6} + \frac{4^5}{6 \cdot 10} - \frac{4^7}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} (0,6026808) = -0,3400263$. El error cometido es $0,0^5 13$. 22 términos

6) Cálculo de $g(2,5)$ - En el intervalo $(2;3)$ es $|T| < 7900$. Entonces, con $h = \frac{1}{2}$, el término complementario de J es $< \frac{7900}{11!11 \cdot 2^{10}} \approx 1,8 \cdot 10^{-8}$

Para $x=2,5$ se tiene: $H_{m+1} = 5H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, y por tanto: $H_1=5, H_2=23, H_3=95$
 $H_4=337, H_5=925, H_6=1255, H_7=-4825, H_8=-41695, H_9=-131275$. Entonces:

$$J = -2e^{-4,25} \left[\frac{5}{2} + \frac{95}{3!3 \cdot 2^3} + \frac{925}{5!5 \cdot 2^5} - \frac{4825}{7!7 \cdot 2^7} - \frac{131275}{9!9 \cdot 2^9} \right] + \epsilon = -0,0123810 + \epsilon$$

$|\epsilon| < 1,5 \cdot 10^{-8}$

Para Y_1 e Y_2 se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^2 \frac{e^{-t^2}}{2,5-t} dt = - \int_{-3,6}^2 -\epsilon_1$, siendo $\epsilon_1 = \int_{-\infty}^{-3,6} \frac{e^{-t^2}}{2,5-t} dt = \int_{3,6}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t+2,5} dt < \frac{1}{6,1} \int_{3,6}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{12,2} [1 - \Phi(3,6)] = \frac{\sqrt{\pi}}{12,2} (0,0^6 356) \approx 5,2 \cdot 10^{-8}$

Análogamente: $Y_2 = \int_3^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-2,5} dt = \int_3^{3,6} + \epsilon_2$, siendo $\epsilon_2 < \sqrt{\pi} (0,0^6 356) \approx 6,3 \cdot 10^{-7}$

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{2,5-t}$					
-3,6	0,0000004	-1,6	0,0212754	0,7	0,3840416
-3,5	9	-1,5	297326	0,8	3499916
-3,4	18	-1,4	407543	0,9	3137304
-3,3	36	-1,3	547916	1	2767383
-3,2	71	-1,2	722552	1,1	2403426
-3,1	135	-1,1	934666	1,2	2056495
-3	253	-1	1186021	1,3	1735067
-2,9	465	-0,9	1476378	1,4	1444925
-2,8	838	-0,8	1802987	1,5	1189303
-2,7	1481	-0,7	2160234	1,6	969212
-2,6	2565	-0,6	2539495	1,7	783883
-2,5	4357	-0,5	2929275	1,8	631310
-2,4	7265	-0,4	3315660	1,9	508746
-2,3	11852	-0,3	3683075	2	0,0413340
-2,2	18983	-0,2	4015314		
-2,1	29817	-0,1	4296737		
-2	45927	0	4513517		
-1,9	69374	0,1	4654798		
-1,8	102771	0,2	4713629		
-1,7	0,0149312	0,3	4687550		
		0,4	4578768		
		0,5	4393913		
		0,6	0,4143386		

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{t-2,5}$	
3	0,0002785
3,1	1261
3,2	576
3,3	263
3,4	120
3,5	54
3,6	24

Resulta: $Y_1 = -0,8783997 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$Y_2 = 0,0000350 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\therefore Y = Y_1 + Y_2 = -0,4391823 \sqrt{\pi}$, y finalmente:

$g(2,5) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(J+Y) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,0123810 + 0,4391823 \sqrt{\pi}) = \boxed{-0,2517231}$ El valor exacto

es: $g(2,5) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(5 - \frac{5^3}{6} + \frac{5^5}{6 \cdot 10} - \frac{5^7}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \frac{5^9}{6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18} - \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,4461674) = \boxed{-0,2517231}$ \swarrow 29 términos

7) Cálculo de $g(3)$ - En el intervalo $(2,5; 3,5)$ es $|T| < 2900$, y el término complementario de J es $< \frac{2900}{11!11 \cdot 2^{10}} \approx 6,4 \cdot 10^{-9}$. Para $x=3$ se tiene:

$H_{m+1} = 6H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, y por tanto: $H_1=6, H_2=34, H_3=180, H_4=876, H_5=3816$
 $H_6=14136, H_7=39024, H_8=36240, H_9=-406944$. Entonces:

$$J = -2e^{-3} \left[3 + \frac{180}{3!3 \cdot 2^3} + \frac{3816}{5!5 \cdot 2^5} + \frac{39024}{7!7 \cdot 2^7} - \frac{406944}{9!9 \cdot 2^9} \right] + \varepsilon = -0,00110011 + \varepsilon$$

$|\varepsilon| < 6,4 \cdot 10^{-9}$

Para Y_1 e Y_2 se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^{2,5} \frac{e^{-t^2}}{3-t} dt = - \int_{-3,5}^{2,5} -\varepsilon_1$, siendo

$$\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{-3,5} \frac{e^{-t^2}}{3-t} dt = \int_{3,5}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-3} dt < \frac{\sqrt{\pi}}{13} [1 - \Phi(3,5)] = \frac{\sqrt{\pi}}{13} (0,0743) \approx 10^{-7}$$

Análogamente: $Y_2 = \int_{3,5}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-3} dt < 2 \int_{3,5}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} [1 - \Phi(3,5)] \approx -1,3 \cdot 10^{-6}$, por

lo cual no hay necesidad de calcularla.

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{3-t}$					
-3,5	0,0000008	-1,7	0,0133428	0,4	0,3698236
-3,4	17	-1,6	129628	0,5	3515130
-3,3	33	-1,5	264290	0,6	3280181
-3,2	65	-1,4	361231	0,7	3005543
-3,1	124	-1,3	484205	0,8	2704481
-3	232	-1,2	636534	0,9	2390327
-2,9	426	-1,1	820682	1	2075508
-2,8	766	-1	1037769	1,1	1770945
-2,7	1351	-0,9	1287099	1,2	1435246
-2,6	2336	-0,8	1565752	1,3	1224753
-2,5	3961	-0,7	1868310	1,4	993386
-2,4	6584	-0,6	2186787	1,5	792868
-2,3	10734	-0,5	2510807	1,6	623065
-2,2	17153	-0,4	2829063	1,7	482393
-2,1	26893	-0,3	3125033	1,8	367264
-2	41334	-0,2	3387921	1,9	277498
-1,9	62302	-0,1	3603715	2	206670
-1,8	0,0092066	0	3761264	2,1	152306
		0,1	3852247	2,2	111527
		0,2	3871910	2,3	81272
		0,3	0,3819485	2,4	59261
				2,5	0,0043566

Resulta: $Y_1 = -0,7118439 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = Y$, $Y = -0,6308552 \therefore g(3) = \frac{1}{\pi}(J+Y) =$

$= \frac{-1}{\pi}(0,0011001 + 0,6308552) = -0,2011576$. El valor exacto es:

$$g(3) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(6 - \frac{6^3}{6} + \frac{6^5}{6 \cdot 10} - \frac{6^7}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} (0,3565418) = -0,2011572$$

8) Cálculo de $g(3,5)$ - En el intervalo (3,4) es $|T| < 741$, y el término complementario de J será $< \frac{741}{11!11 \cdot 2^{10}} \approx 1,6 \cdot 10^{-9}$. Para $x=3,5$ se tiene:

$H_{m+1} = 7H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, y por tanto: $H_1=7$, $H_2=47$, $H_3=301$, $H_4=1825$, $H_5=10367$, $H_6=54319$, $H_7=255829$, $H_8=1030337$, $H_9=3119095$. Entonces:

$$J = -2e^{-3,5} \left[\frac{7}{2} + \frac{301}{3!3 \cdot 2^3} + \frac{10367}{5!5 \cdot 2^5} + \frac{255829}{7!7 \cdot 2^7} + \frac{3119095}{9!9 \cdot 2^9} \right] + \varepsilon = -0,00005923 + \varepsilon$$

$|\varepsilon| < 1,8 \cdot 10^{-9}$

Para Y_1 e Y_2 se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^3 \frac{e^{-t^2}}{3,5-t} dt = - \int_{-3,6}^3 -\varepsilon_1$, siendo

$$\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{-3,6} \frac{e^{-t^2}}{3,5-t} dt = \int_{3,6}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{3,5+t} dt < \frac{\sqrt{\pi}}{14,2} (0,0356) \approx 4,4 \cdot 10^{-8}$$

Análogamente: $Y_2 = \int_{3,6}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-3,5} dt < 2 \int_{3,6}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} [1 - \Phi(4)] = \sqrt{\pi} (0,0154) \approx 2,7 \cdot 10^{-8}$

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{3,5-t}$					
-3,6	0,0000004	-1,6	0,0171037	0,7	0,2463739
-3,5	8	-1,6	237861	0,8	2203651
-3,4	16	-1,4	324371	0,9	1930648
-3,3	31	-1,3	433767	1	1660430
-3,2	60	-1,2	568313	1,1	1401998
-3,1	115	-1,1	731477	1,2	1162367
-3	214	-1	922461	1,3	946400
-2,9	353	-0,9	1140838	1,4	756365
-2,8	705	-0,8	1383638	1,5	594651
-2,7	1242	-0,7	1645393	1,6	459100
-2,6	2144	-0,6	1920106	1,7	348395
-2,5	3630	-0,5	2196956	1,8	259951
-2,4	6027	-0,4	2465491	1,9	190720
-2,3	9809	-0,3	2713844	2	137780
-2,2	15653	-0,2	2930094	2,1	97969
-2,1	24492	-0,1	3103199	2,2	68632
-2	37576	0	3223940	2,3	47408
-1,9	56527	0,1	3285740	2,4	32324
-1,8	83381	0,2	3285257	2,5	21783
-1,7	0,0020598	0,3	3222693	2,6	14534
		0,4	3101746	2,7	9624
		0,5	2929275	2,8	6346
		0,6	0,2714633	2,9	4197
				3	0,0002785

Resulta: $Y_1 = -0,5934196 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = Y$, $Y = -0,5303355 \therefore g(3,5) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(J+Y) =$

$= \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,0000592 + 0,5303355) = -0,1688299$. El valor exacto es:

$$g(3,5) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(7 - \frac{7^3}{6} + \frac{7^5}{6 \cdot 10} - \frac{7^7}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,29824219) = -0,16882933$$

49 términos

9) Cálculo de g(4) - En el intervalo (3,5; 4,5) es $|T| < 90$, y el término

complementario de J será $< \frac{90}{11!11 \cdot 2^{10}} \approx 2 \cdot 10^{-10}$. Para $x=4$ se tiene:

$H_{m+1} = 3H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, y por tanto: $H_1=8$, $H_2=62$, $H_3=464$, $H_4=3340$,

$H_5=23008$, $H_6=150664$, $H_7=929216$, $H_8=5324432$, $H_9=27728000$. Entonces:

$$J = -2e^{-16} \left[4 + \frac{464}{3!3 \cdot 2^3} + \frac{23008}{5!5 \cdot 2^5} + \frac{929216}{7!7 \cdot 2^7} + \frac{27728000}{9!9 \cdot 2^9} \right] + \epsilon = -0,000001945 + \epsilon$$

$\epsilon = 8,64291$

Para Y_1 e Y_2 se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^{3,5} \frac{e^{-t^2}}{4-t} dt = - \int_{-3,5}^{+3,5} -\epsilon_1$, $\epsilon_1 = \int_{3,5}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{4+t} dt =$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{15}(0,06743) \approx 8,8 \cdot 10^{-8}$$

$$= \sqrt{\pi}(0,09197) \approx 3,4 \cdot 10^{-10}$$

Valores de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{4-t}$

-3,5	0,0000007	-2	0,0034445	-0,5	0,1952250	1	0,1383692
-3,4	15	-1,9	51737	-0,4	2185321	1,1	1160274
-3,3	29	-1,8	76193	-0,3	2398281	1,2	954801
-3,2	56	-1,7	110019	-0,2	2581273	1,3	771141
-3,1	107	-1,6	155766	-0,1	2724760	1,4	611314
-3	199	-1,5	216237	0	2820942	1,5	475721
-2,9	304	-1,4	294336	0,1	2864491	1,6	363454
-2,8	653	-1,3	392845	0,2	2852986	1,7	272654
-2,7	1149	-1,2	514124	0,3	2787192	1,8	200871
-2,6	1982	-1,1	659764	0,4	2670948	1,9	145346
-2,5	3551	-1	830215	0,5	2510807	2	103335
-2,4	5556	-0,9	1024426	0,6	2315422	2,1	72188
-2,3	9080	-0,8	1239554	0,7	2094772	2,2	49568
-2,2	14396	-0,7	1470798	0,8	1859331	2,3	33465
-2,1	22425	-0,6	1711399	0,9	1619253	2,4	22223

Final de la tablilla
del pie de la pág. 23

2,5	14522	2,9	2204	3,3	301
2,6	9543	3	1393	3,4	179
2,7	5922	3,1	841	3,5	108
2,8	3702	3,2	504		

Resulta: $Y_1 = -0,5173907 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = Y$, $Y = -0,4535255 \therefore g(4) = \frac{1}{\pi}(J+Y) =$
 $= \frac{-1}{\pi}(0,0519 + 0,4535255) = -0,1459538$. El valor exacto está dado por la
 serie asintótica: $\frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 4^3} + \frac{3}{2^2 \cdot 4^5} + \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 4^7} + \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,25869604) =$
 $= -0,1459536$ 16 términos

10) Cálculo de $g(4,5)$ - En el intervalo $(4;5)$ es $|T| < 29,2$, y el término complementario de J será $< \frac{29,2}{11! \cdot 11 \cdot 2^{10}} \cong 6,5 \cdot 10^{-11}$. Para $x=4,5$ se tiene:

$H_{m+1} = 9H_m - 2m \cdot H_{m-1}$, y por tanto: $H_1=9$, $H_2=79$, $H_3=675$, $H_4=5601$,
 $H_5=45009$, $H_6=349071$, $H_7=2601531$, $H_8=18526785$, $H_9=125116569$. Entonces

$$J = -2e^{-2025} \left[\frac{9}{2} + \frac{675}{3! \cdot 5 \cdot 2^3} + \frac{45009}{3! \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{2601531}{7! \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{125116569}{9! \cdot 9 \cdot 2^9} \right] + \varepsilon = -0,07391 + \varepsilon$$

$S = 12,1826$

Para Y_1 se tiene: $Y_1 = - \int_{-\infty}^u \frac{e^{-t^2}}{4,5-t} dt = - \int_{-3,6}^4 -\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{-3,6} = \int_{3,6}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{4,5+t} dt <$
 $< \frac{\sqrt{\pi}}{16,2} [1 - \Theta(2,6)] = \frac{\sqrt{\pi}}{16,2} (0,06366) \cong 3,9 \cdot 10^{-8}$. Análogamente:

$$Y_2 = \int_5^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-4,5} dt < \sqrt{\pi} [1 - \Theta(\varepsilon)] = \sqrt{\pi} (0,01215) \cong 2,7 \cdot 10^{-13}$$

Valores de $\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi} (4,5-t)}$

-3,6	0,0000003	-1,9	0,0047695	0,1	0,2538981	2,1	0,0057149
-3,5	7	-1,8	70146	0,2	2521244	2,2	38792
-3,4	14	-1,7	101147	0,3	2455383	2,3	25859
-3,3	27	-1,6	142098	0,4	2345223	2,4	16932
-3,2	52	-1,5	198217	0,5	2196956	2,5	10891
-3,1	100	-1,4	269893	0,6	2018873	2,6	6884
-3	186	-1,3	358979	0,7	1819544	2,7	4277
-2,9	340	-1,2	469025	0,8	1608070	2,8	2613
-2,8	609	-1,1	600956	0,9	1394357	2,9	0,0001570
-2,7	1069	-1	754741	1	1186021	3	928
-2,6	1842	-0,9	929571	1,1	989646	3,1	540
-2,5	3112	-0,8	0,1122615	1,2	0,0810134	3,2	310
-2,4	5153	-0,7	1329375	1,3	650650	3,3	175
-2,3	8266	-0,6	1543015	1,4	512715	3,4	98
-2,2	13317	-0,5	1757565	1,5	396424	3,5	54
-2,1	20781	-0,4	1962029	1,6	300790	3,6	30
-2	0,0031795	-0,3	2148460	1,7	223968	3,7	16
		-0,2	2306670	1,8	163673	3,8	0,0000009
		-0,1	2428590	1,9	117403	3,9	5
		0	0,2507509	2	0,0082668	4	2

Resulta: $Y_1 = -0,4563543 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = Y$, $Y = -0,4044335 \therefore g(4,5) = \frac{1}{\pi}(J+Y) =$
 $= \frac{-1}{\pi}(0,4044335) = -0,1287352$. El valor exacto es:

$$g(4,5) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9^3} + \frac{2 \cdot 6}{9^5} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{9^7} + \dots \right) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,22317721) = -0,12873521$$

11) Cálculo de $g(5)$ - Es inútil calcular J. En cuanto a Y_1 se tiene:

$$Y_1 = - \int_{-\infty}^{4,5} \frac{e^{-t^2}}{5-t} dt = - \int_{-3,5}^{4,5} -\varepsilon_1$$
, $\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{-3,5} = \int_{3,5}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{5+t} dt < \frac{\sqrt{\pi}}{17} [1 - \Theta(3,5)] \cong 7,7 \cdot 10^{-8}$

Valores de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{5-t}$							
-3,5	0,0000006	-1,2	0,0064988	0,3	0,2194172	2,4	0,0013676
-3,4	13	-1,7	92509	0,4	2090307	2,5	8713
-3,3	25	-1,6	132165	0,5	1952350	2,6	5450
-3,2	49	-1,5	182970	0,6	1729190	2,7	3347
-3,1	93	-1,4	242246	0,7	1507616	2,8	2019
-3	174	-1,3	330429	0,8	1416633	2,9	1196
-2,9	318	-1,2	431201	0,9	1224314	3	696
-2,8	569	-1,1	551606	1	1037769	3,1	398
-2,7	1000	-1	691346	1,1	862768	3,2	224
-2,6	1721	-0,9	850794	1,2	703508	3,3	124
-2,5	2904	-0,8	1025232	1,3	562724	3,4	67
-2,4	4805	-0,7	1212763	1,4	441505	3,5	36
-2,3	7793	-0,6	1405792	1,5	339201	3,6	19
-2,2	12002	-0,5	1597737	1,6	256556	3,7	10
-2,1	19318	-0,4	1780632	1,7	190033	3,8	5
-2	29524	-0,3	1945775	1,8	138099	3,9	3
-1,9	0,0044239	-0,2	2084274	1,9	98467	4	1
		-0,1	2190493	2	68890	4,1	1
		0	2256758	2,1	47295	4,2	0
		0,1	2279201	2,2	31865		
		0,2	0,2258614	2,3	0,0021070		

Resulta: $Y_1 = -0,4085362 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = Y$; $g(5) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,2042681) = -0,1152459$

El valor exacto es: $\frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^3} + \frac{3}{2^2 \cdot 5^5} + \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 5^7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 5^9} + \dots \right) =$
 $= \frac{-1}{\sqrt{\pi}}(0,20426815) = -0,11524596$

Con los datos obtenidos se puede dibujar la gráfica de la función buscada, o sea $g(x)$ (Ver pág.26). La tabbilla adjunta permite comparar los

x	g(x)	calculados
0,5	0,4789252	0,478924
1	0,6071576	0,607349
1,5	0,4832276	0,4832280
2	0,3402263	0,340276
2,5	0,2517231	0,2517231
3	0,2011572	0,2011576
3,5	0,1682293	0,1682299
4	0,1459536	0,1459538
4,5	0,12873521	0,1287352
5	0,11524596	0,1152459

~~XXXXXXXX~~ valores calculados con los exactos.

La función $g(x)$ se expresa así:

$$-\sqrt{\pi} g(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8x^5}{3 \cdot 5} - \frac{16x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$\therefore -\sqrt{\pi} g'(x) = 2 - 4x^2 + \frac{8}{3}x^4 - \frac{16}{15}x^6 + \dots,$$

que se anula para $x = 0,9241388$, y el máximo de $g(x)$ vale $0,6105031$. Utilizando la

$g''(x)$ se encuentran los puntos de inflexión de la curva, que corresponde a $x=0$ y $x=1,502$.

§ 6 - Conjugada de $f(t) = t \cdot e^{-t^2}$

Los cálculos efectuados para obtener la conjugada de e^{-t^2} pueden ser utilizados en la determinación numérica de la conjugada de $t \cdot e^{-t^2}$.

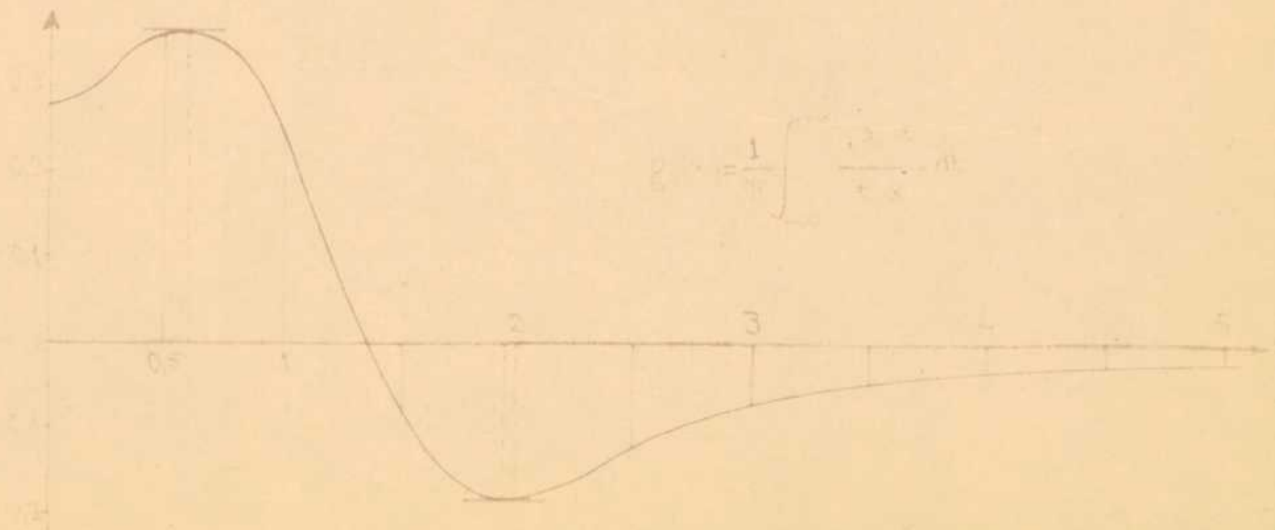
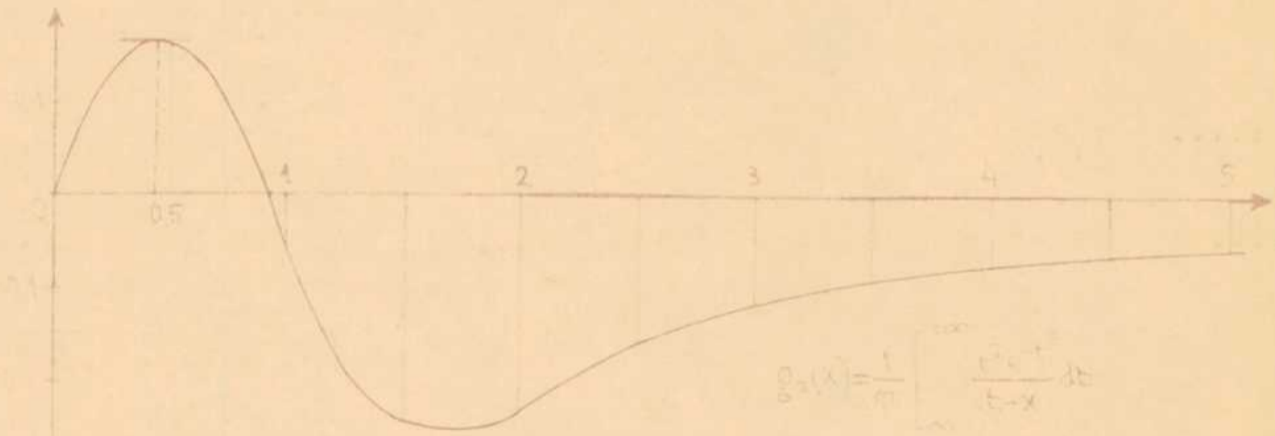
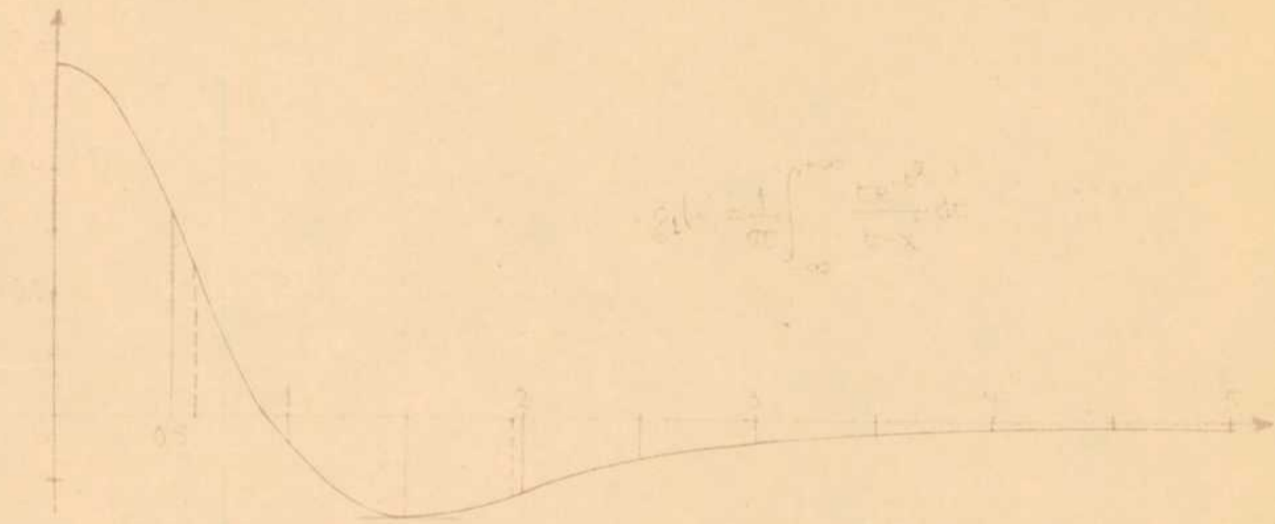
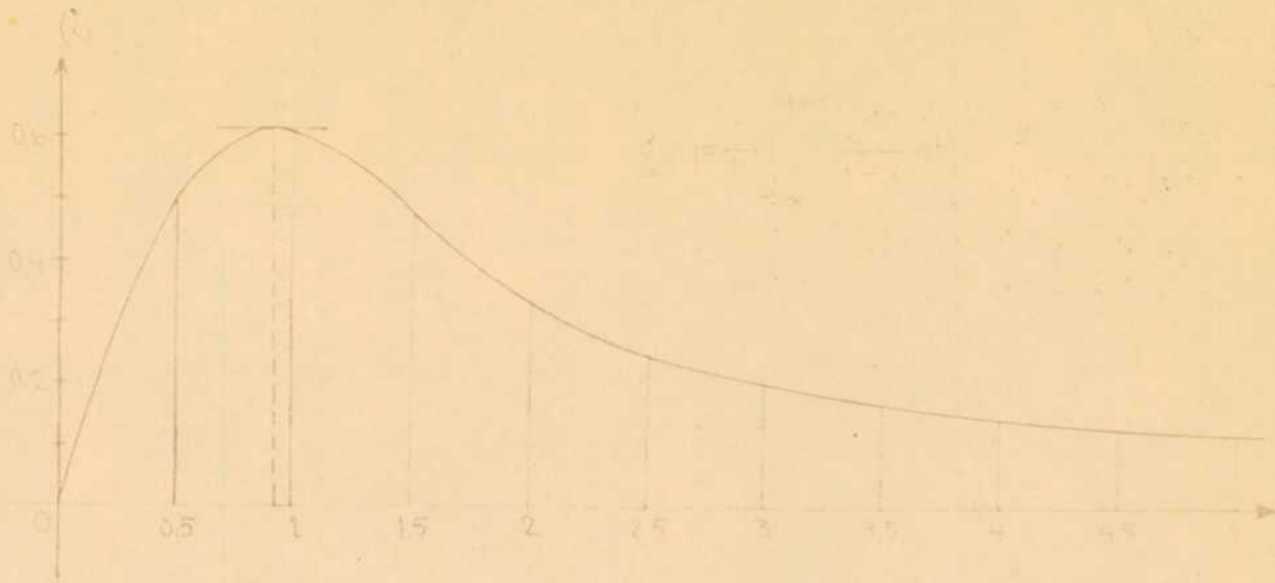
Se tiene: $g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot e^{-t^2}}{t-x} dt$, función par que para $x=0$ vale

$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$. Para calcular J con la (15) basta observar

que $f(t) = \frac{1}{2} D e^{-t^2} = \frac{1}{2} H_1(t) \cdot e^{-t^2}$, siendo $H_1(t)$ uno de los polinomios

de Hermite; entonces: $f'(t) = \frac{1}{2} D^2 e^{-t^2} = \frac{1}{2} H_2(t) \cdot e^{-t^2}$, $f''(t) = \frac{1}{2} H_3(t) e^{-t^2}$

Bestimmen Sie die Funktionen $g(x)$ und $g'(x)$



etc., y resulta: $J = -e^{-t^2} \left[h.H_2 + \frac{h^3}{3!3} H_4 + \frac{h^5}{5!5} H_6 + \dots + \frac{h}{(2n-1)!(2n-1)!} H_{2n} \right] - \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} T$, siendo $2T = F(t-\theta h) + F(t+\theta h)$ y $F(t) = H_{2n+2}(t) \cdot e^{-t^2}$.

Teniendo tabulada la conjugada $g(x)$ de e^{-t^2} , la $g_1(x)$ de $t \cdot e^{-t^2}$ resulta

$$g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t-x}\right) e^{-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + x \cdot g(x)$$

Recordando que para x grande es $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \dots \right)$, será:

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot g(x) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = 0$. La gráfica de esta función puede verse en la pág.26; la tablilla adjunta muestra su variación. La expresión exacta está dada por la serie

x	$g_1(x)$
0	0,56149
0,5	0,32473
1	0,04297
1,5	-0,16065
2	-0,11586
2,5	-0,06512
3	-0,03928
3,5	-0,02671
4	-0,01962
4,5	-0,01512
5	-0,01204

$$\sqrt{\pi} g_1(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2^2}{3} x^4 - \frac{2^3}{3 \cdot 5} x^6 + \dots$$

y se verifica fácilmente que $g_1(x) = -\frac{1}{2} g'(x)$. El mínimo se presenta en $x=1,502$; los puntos de inflexión en $x=0,5956$ y cerca de $x=2$, y la curva corta al eje OX en $x=0,92414$.

La conjugada de $t^2 e^{-t^2}$ se obtiene en forma análoga:

$$g_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t + x + \frac{x^2}{t-x} \right) e^{-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t^2} dt +$$

x	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0	0	0,2821
0,5	0,1624	0,3633
1	-0,0430	0,2391
1,5	-0,2410	-0,0793
2	-0,2517	-0,1813
2,5	-0,1628	-0,1249
3	-0,1178	-0,0714
3,5	-0,0935	-0,0451
4	-0,0785	-0,0318
4,5	-0,0680	-0,0241
5	-0,0602	-0,0189

$$+ \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{x}{\sqrt{\pi}} + x^2 g(x),$$

siendo $g(x)$ la conjugada de e^{-t^2} . Se ve que $g_2(x) = x g_1(x)$

Su gráfica puede verse en pág.26: presenta un máximo en $x=0,45934$ que vale 0,1640; corta al eje OX en $x=0$ y $x=0,92414$, y pasa por un mínimo entre $x=1,5$ y $x=2$. Se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x) = 0$

Para la conjugada de $t^3 e^{-t^2}$ se tiene:

$$g_3(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t^2 + tx + x^2 + \frac{x^3}{t-x} \right) e^{-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt +$$

$$+ \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t^2} dt + \frac{x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{x^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} + x^3 g(x)$$

Se ve que $g_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + x \cdot g_2(x)$; su gráfica puede verse en pág.26. Presenta un máximo en $x=0,59568$ que vale 0,36950, un mínimo en $x=0$ y otro en $x=1,95$. Se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} g_3(x) = 0$.

§ 7 - Funciones de variación sinusoidal

1) Procedimiento para evaluar el resto de la integral $\int_a^\infty f(x) \operatorname{sen} x \cdot dx$ -
 Sea $f(x)$ una función que tiende monótonamente a cero para $x \rightarrow \infty$. En tal caso la integral mencionada consiste en la suma de las áreas de infinitas arcadas positivas y negativas alternativamente. Si x es suficientemente grande como para que la variación de $f(x)$ en una arcada sea casi insensible, se puede evaluar el área de la arcada con la aproximación que se quiera sustituyendo $f(x)$ por un polinomio apropiado. Si el polinomio es de 2º grado y ha de coincidir con $f(x)$ en los tres puntos inicial, medio y final del intervalo, su ecuación será, tomando como origen el punto medio del intervalo y aplicando la fórmula de interpolación de Stirling:

$$P(t) = y_1 + \frac{t}{\pi} (y_2 - y_0) + \frac{2t^2}{\pi^2} (y_2 - 2y_1 + y_0).$$

Entonces para el área de la arcada se tendrá: $A \approx \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P(t) \cos t \cdot dt = 2y_1 + \frac{\pi^2 - 8}{\pi^2} (y_2 - 2y_1 + y_0)$, o sea:

$$A \approx \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) (y_0 + y_2) + \frac{16}{\pi^2} y_1 = 0,18943053086 (y_0 + y_2) + 1,62113893828 \cdot y_1 \quad (\alpha)$$

Como dos arcadas consecutivas tienen áreas de signos contrarios, al sumarlas quedan solamente los términos $\frac{16}{\pi^2} y_1$. Estos forman una serie alternada de convergencia lenta que se puede sumar mediante la siguiente transformación debida a Euler: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \frac{u_1}{2} + \frac{\Delta u_1}{2^2} - \frac{\Delta^2 u_1}{2^3} + \dots$ siendo $\Delta u_1 = u_1 - u_2$, $\Delta^2 u_1 = \Delta u_1 - \Delta u_2$, etc. Este procedimiento es tanto más efectivo cuanto más lentamente decrecen los términos de la serie.

El área de la primera mitad de la arcada está dada por la fórmula

$$A_1 = \int_{-\pi/2}^0 P(t) \cos t \cdot dt \approx y_1 + \frac{2-\pi}{2\pi} (y_2 - y_0) + \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} (y_2 - 2y_1 + y_0) =$$

$$= y_0 - \frac{1}{\pi} (y_0 - y_2) - \frac{4}{\pi^2} (y_2 - 2y_1 + y_0) \quad (\beta)$$

y la de la 2ª por la fórmula

$$A_2 = \int_0^{+\pi/2} P(t) \cos t \cdot dt \approx y_2 + \frac{1}{\pi} (y_0 - y_2) - \frac{4}{\pi^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) \quad (\beta')$$

Ej. 1º - Aplicando la (α) a la integral $\int_{30\pi}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ resulta la serie

$$\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \frac{1}{30\pi} + \frac{16}{\pi^3} \left(\frac{1}{30,5} - \frac{1}{31,5} + \frac{1}{32,5} - \dots\right) = \frac{\pi^2 - 8}{30\pi^3} + \frac{32}{\pi^3} \left(\frac{1}{61} - \frac{1}{63} + \frac{1}{65} - \dots\right)$$

1/61 = 0,0163934426	Δ					
1/63 = 0,0158730159	5204267	Δ^2				
1/65 = 0,0153846154	4934005	320262	Δ^3			
1/67 = 0,0149253731	4592423	291582	28680	Δ^4		
1/69 = 0,0144927536	4326195	266228	25354	3326	Δ^5	
1/71 = 0,0140845070	4082466	243729	22499	2855	471	
						0,0021967213
						1301067
						40033
						1792
						104
						7

$$s = 0,0083310216$$

Resulta: $\int_{30\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{1}{\pi^3} \left[0,0622201467 + 32(0,0083310216) \right] = 0,0106079438$

El valor exacto de esta integral, dado por las tablas de la función

$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt$, es $\frac{1}{2}\pi - 1,5601883330 = 0,0106079438$, y por tanto el error que se comete al aplicar la (α) es inferior a 10^{-10} .

Ej. 2º - Aplicando la (β) a la integral $\int_{21\pi}^{215\pi} \frac{\text{sen } x}{x} dx$, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 0,047619048\pi^{-1} \\ y_1 &= 0,046511628\pi^{-1} \\ y_2 &= 0,045454545\pi^{-1} \end{aligned} \right\} A_1 \approx \frac{1}{\pi} \left[0,047619048 - \frac{1}{\pi} (0,002164503) - \frac{4}{\pi^2} (0,0450337) \right] = 0,01493131 \text{ (neg.)}$$

El valor exacto dado por las tablas de $\text{Si}(x)$ es 0,0149317006.

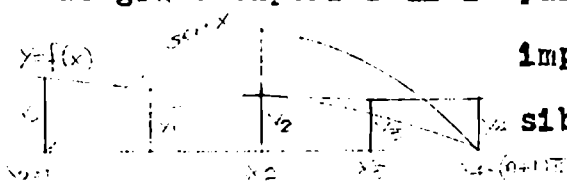
2) Error de las fórmulas anteriores - Es fácil determinar el error que se comete al aplicar la (α) . Tomando como origen el punto medio del intervalo, la fórmula de Taylor da: $f(x) = f(x_1+t) = y_1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \dots$

y el área exacta será: $S = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (y_1 + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + \dots) \cos t \cdot dt = 2y_1 + \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right)B + \left(\frac{\pi^4}{8} - 6\pi^2 + 48\right)D + \dots$. Siendo $y_2 = y_1 + A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi^2}{4} + C\frac{\pi^3}{8} + D\frac{\pi^4}{16} + \dots$, $y_0 = y_1 - A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi^2}{4} - C\frac{\pi^3}{8} + D\frac{\pi^4}{16} - \dots$, la (α) da el área aproximada $S' = 2y_1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \left(B\frac{\pi^2}{2} + D\frac{\pi^4}{8} + \dots\right)$, y el error será $S - S' = (48 - 5\pi^2)D + \dots \approx -0,348 \frac{f^{IV}(x_1)}{24} = -0,0145 \cdot f^{IV}(x_1)$ (y)

Por ej., en el caso de la integral $\int_{30\pi}^{31\pi} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ se tendrá: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f^{IV}(x) = \frac{24}{x^5}$, y el error será $\approx -\frac{0,348}{(30,5\pi)^5} \approx -4,3 \cdot 10^{-11}$. Entonces el error que afecta a la suma de la serie del Ej. 1º, que da $\int_{30\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$, será $< 4,3 \cdot 10^{-11}$, y valdrá aproximadamente la mitad de esta cota.

En cuanto al error de la fórmula (β) se obtiene, procediendo en forma análoga: $S_1 - S_1' \approx \left(-6 + 3\pi - \frac{\pi^2}{4}\right)C = 0,9574 \frac{f'''(x_1)}{6} \approx 0,16 \cdot f'''(x_1)$, y el de la (β') es el opuesto: $-0,16 \cdot f'''(x_1)$. Al sumar ambas mitades se produce una compensación y resulta el error dado por la (y). En el caso de la integral del Ej. 2º el error será $\approx \frac{0,96}{(21,5\pi)^4} \approx 4,6 \cdot 10^{-3}$.

3) Fórmula para cinco ordenadas - Es evidente que la aproximación que se logra con este procedimiento puede ser aumentada utilizando un polinomio de grado superior al 2º para sustituir a $f(x)$ en cada arcada, lo cual se impone cuando la curvatura de $y=f(x)$ se hace sensible. Tomando cinco ordenadas equidistantes, como



muestra la figura, y como origen el punto medio del intervalo, el polinomio de 4º grado que sustituirá a $f(x)$ está dado por la fórmula de interpolación de Stirling:

$$P(t) = y_2 + r \mu \mathcal{J} y_2 + \frac{r^2}{2} \mathcal{J}^2 y_2 + \frac{r(r^2-1)}{6} \mu \mathcal{J}^3 y_2 + \frac{r^2(r^2-1)}{24} \mathcal{J}^4 y_2, \text{ siendo } r = \frac{4t}{\pi}$$

Ordenando según las potencias de t y desarrollando las \mathcal{J} se obtiene:

$$P(t) = y_2 + \frac{t}{3\pi} (y_0 - 8y_1 + 8y_2 - y_3) + \frac{2t^2}{3\pi^2} (-y_0 + 16y_1 - 30y_2 + 16y_3 - y_4) + \frac{16t^3}{3\pi^3} (-y_0 + 2y_1 - 2y_3 + y_4) + \frac{32t^4}{3\pi^4} (y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4). \text{ El área aproximada será:}$$

$$S' = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P(t) \cos t \cdot dt = \frac{3\pi^4 - 184\pi^2 + 1536}{23\pi^4} (y_0 + y_4) + \frac{128(5\pi^2 - 48)}{3\pi^4} (y_1 + y_3) + \frac{16(192 - 19\pi^2)}{\pi^4} y_2 \quad (\mathcal{J}), \text{ o sea calculando los coeficientes:}$$

$$S' = 0,041816984335(y_0 + y_4) + 0,590454186105(y_1 + y_3) + 0,735457659120 \cdot y_2 \quad (\mathcal{J})$$

Siendo $f(t) = y_2 + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + Ft^6 + \dots$, el área exacta será:

$$S = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (y_2 - At - Bt^2 - Ct^3 - \dots) \cos t \cdot dt = 2y_2 + \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) B + \left(\frac{\pi^4}{8} - 6\pi^2 + 48\right) D + \left(\frac{\pi^6}{32} - \frac{15\pi^4}{4} + 180\pi^2 - 1440\right) F + \dots, \text{ y expresando } y_0, y_1, y_2, y_4 \text{ en función de } y_2$$

en la fórmula (\mathcal{J}) , el error de ésta resulta ser $\frac{\epsilon}{2} \left(-\frac{31}{16}\pi^4 + 165\pi^2 - 1440\right) F = -0,2454 \frac{f''(x_1)}{720} = -0,00341 \cdot f''(x_1) \quad (\epsilon)$

4) Fórmula para siete ordenadas - En forma análoga se tiene:

$$P(t) = y_3 + r \mu \mathcal{J} y_3 + \frac{r^2}{2} \mathcal{J}^2 y_3 + \frac{r(r^2-1)}{6} \mu \mathcal{J}^3 y_3 + \frac{r^2(r^2-1)}{24} \mathcal{J}^4 y_3 + \frac{r(r^2-1)(r^2-4)}{120} \mu \mathcal{J}^5 y_3 + \frac{r^2(r^2-1)(r^2-4)}{720} \mathcal{J}^6 y_3, \text{ siendo } r = \frac{6t}{\pi}. \text{ Entonces:}$$

$$P(t) = y_3 + \frac{r^2}{360} [2(y_0 + y_6) - 27(y_1 + y_5) + 270(y_2 + y_4) - 490y_3] + \frac{r^4}{144} [-(y_0 + y_6) + 12(y_1 + y_5) - 39(y_2 + y_4) + 56y_3] + \frac{r^6}{720} [(y_0 + y_6) - 6(y_1 + y_5) + 15(y_2 + y_4) - 20y_3] + \text{términos con exponentes impares, e introduciendo } t:$$

$$P(t) = y_3 + \frac{t^2}{10\pi^2} [\dots] + \frac{9t^4}{\pi^4} [\dots] + \frac{324t^6}{5\pi^6} [\dots] + T. \text{ Entonces el área de una arcada es: } S' = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P(t) \cos t \cdot dt = 2y_3 + \frac{\pi^2 - 8}{20\pi^2} [\dots] + \frac{6}{8\pi^4} (\pi^4 - 48\pi^2 + 384) \cdot [\dots] + \frac{81}{40\pi^6} (\pi^6 - 120\pi^4 + 5760\pi^2 - 45080) [\dots], \text{ o sea:}$$

$$S' = (y_0 + y_6) [1 - 189,8\pi^2 - 11232\pi^4 - 93312\pi^6] + (y_1 + y_5) [820,8\pi^2 - 64800\pi^4 + 142800\pi^6 + 559372\pi^8] + (y_2 + y_4) [-1647\pi^2 + 158112\pi^4 - 1399680\pi^6] + y_3 [2032\pi^2 - 209088\pi^4 + 1866240\pi^6], \text{ y calculando los coeficientes:}$$

$$S' = 0,01720984201904(y_0 + y_6) + 0,226031755819(y_1 + y_5) + \left. \begin{aligned} &+ 0,40585917630(y_2 + y_4) + 0,58179845181 \cdot y_3 \end{aligned} \right\} \quad (\xi)$$

El área exacta es: $S = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [y_3 + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + \dots + Ht^8 + \dots] \cos t \cdot dt =$
 $= 2y_3 + \frac{B}{2}(\pi^2 - 8) + \frac{D}{8}(\pi^4 - 48\pi^2 + 384) + \frac{H}{32}(\pi^6 - 120\pi^4 + 5760\pi^2 - 46080) + 2H \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 - \right.$
 $\left. - \frac{7}{8}\pi^6 + 105\pi^4 - 5040\pi^2 + 40320 \right] + \dots$ Comparando con la expresión de S' , donde hay que expresar $y_0, y_1, y_2, y_4, y_5, y_6$ en función de y_3 , resulta el error:

$$e \approx -2H \left\{ \pi^6 \left[-\frac{189,8}{2^8} + \frac{820,8}{3^8} - \frac{1647}{6^8} + \frac{7}{8} \right] + \pi^4 \left[\frac{11232}{2^8} - \frac{64800}{3^8} + \frac{158112}{6^8} - 105 \right] \right.$$

$$\left. + \pi^2 \left[-\frac{93312}{2^8} + \frac{559872}{3^8} - \frac{1399680}{6^8} + 5040 \right] - 40320 \right\} = -2H(0,0563), \text{ o bien:}$$

$$e \approx -0,1126 \frac{f^{(8)}(x_3)}{8!} = -0,05279 \cdot f^{(8)}(x_3) \quad (\eta)$$

5) Fórmulas análogas a la de Gauss - Es posible obtener fórmulas aún más precisas si se prescinde de la condición de que los puntos de división sean equidistantes, exigiendo solamente que sean simétricos con respecto al punto medio del intervalo de integración.

Así, para tres ordenadas se pone: $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(t) \cos t \cdot dt \approx P \cdot f(0) + Q [f(h) + f(-h)] \quad (\alpha')$
 y desarrollando ambos miembros se tiene:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [f(0) + At + Bt^2 + Ct^3 + \dots] \cos t \cdot dt = 2f(0) + 2BI_2 + 2DI_4 + 2FI_6 + \dots \approx$$

$$\approx (P + 2Q)f(0) + 2BQ \cdot h^2 + 2DQ \cdot h^4 + 2FQ \cdot h^6 + \dots, \text{ siendo } I_n = \int_0^{\pi/2} t^n \cos t \cdot dt$$

Resultan las ecuaciones $P + 2Q = 2$, $Qh^2 = I_2$, $Qh^4 = I_4$, que dan:

$$h^2 = I_4 / I_2, \quad Q = I_2^2 / I_4, \quad P = 2 - 2Q, \text{ y el error es: } e \approx 2F(I_6 - Qh^6) =$$

$$= \frac{f^{(6)}(0)}{360} (I_6 - I_4^2 / I_2). \text{ Los valores numéricos son: } I_2 = \frac{\pi^2 - 8}{4} = 0,46740110027234,$$

$$I_4 = \frac{1}{16}(\pi^4 - 48\pi^2 + 384) = 0,479254986357080;$$

$$h^2 = I_4 / I_2 = 1,02536127124612, \quad h = 1,012601239398; \quad Q = I_2^2 / I_4 =$$

$$= 0,45584040803911, \quad P = 1,08831918392178; \quad I_6 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 - 30I_4 = 0,64405;$$

$$e \approx 2F(I_6 - I_4^2 / I_2) = 0,30528 \frac{f^{(6)}(0)}{720} = 0,0004240 \cdot f^{(6)}(0) \quad (\beta')$$

Análogamente, para cinco ordenadas: $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(t) \cos t \cdot dt \approx Pf(0) + Q[f(h) + f(-h)] + R[f(k) + f(-k)] \quad (\gamma')$, y desarrollando:

$$2f(0) + 2EI_2 + 2GI_4 + 2FI_6 + 2HI_8 + \dots \approx (P + 2Q + 2R)f(0) + 2B(Qh^2 + Rk^2) +$$

$$+ 2D(Qh^4 + Rk^4) + 2F(Qh^6 + Rk^6) + 2H(Qh^8 + Rk^8) + \dots$$
 Resultan las ecuaciones $P + 2Q + 2R = 2$, $Qh^2 + Rk^2 = I_2$, $Qh^4 + Rk^4 = I_4$, $Qh^6 + Rk^6 = I_6$, $Qh^8 + Rk^8 = I_8$, de las que se deduce, por eliminación de Q y R , la ecuación siguiente:

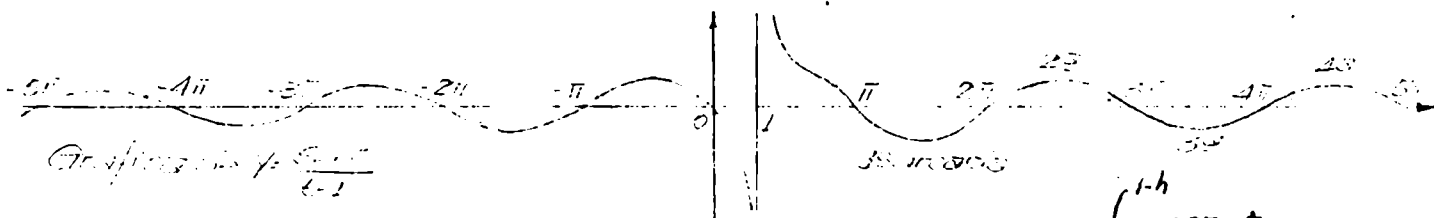
$(I_4^2 - I_2 L_4) x^2 + (I_2 I_4 - L_4 I_4) x + (I_4^2 - I_4 L_4) = 0$, cuyas raíces son h^2 y k^2 .

El error de la fórmula es: $e \approx \frac{2f^{(10)}(0)}{10!} [I_{10} - (Qh^{10} + Rk^{10})]$. He aquí los resul-

tados: $h = 0,725981673796$ $P = 0,752210978810$ $e \approx 0,10999 \frac{f^{(10)}(0)}{10!} =$
 $k = 1,29644028004$ $Q = 0,503782512403$ $- 0,073031 \cdot f^{(10)}(0)$ } (f')
 $R = 0,120111998192$

§ 8 - Conjugada de $f(t) = \text{sen } t$

Se tiene: $\mathcal{P} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } t}{t-x} dt = \int_{-\infty}^{x-h} + \int_{x-h}^{x+h} + \int_{x+h}^{+\infty} = Y_1 + J + Y_2$, siendo
 $J = \int_{x-h}^{x+h} \frac{\text{sen } t}{t-x} dt = \int_{-h}^{+h} \frac{\text{sen}(x+u)}{u} du = 2 \cdot \cos x \left(h - \frac{h^3}{3!3} + \frac{h^5}{5!5} - \dots \right)$, que converge para todo valor de h , mientras que Y_1 e Y_2 se reducen a dos series alternadas cuyos términos son las áreas de las arcadas sucesivas de la curva $\frac{\text{sen } t}{t-x}$. Las fórmulas del § 7 se prestan muy bien para evaluar estas integrales. Así, si es $x=1$ y se quiere calcular Y_2 con 7 cifras decimales, la fórmula (α) da $\int_{2\pi}^{8\pi} \frac{\text{sen } t}{t-1} dt$ con error $\approx -6 \cdot 10^{-8}$, y por tanto resultará $\int_{2\pi}^{+\infty}$ con error $\approx -3 \cdot 10^{-8}$. La fórmula (δ) da $\int_{3\pi}^{+\infty}$ con error $\approx -2,5 \cdot 10^{-8}$, y las tres arcadas siguientes con error menor. La fórmula (ξ) da $\int_{2\pi}^{3\pi}$ con error $\approx -10^{-9}$, mientras la (η') da $\int_{\pi}^{2\pi}$ con error $\approx 6 \cdot 10^{-8}$. Si en J se toma $h = \pi - 1$, no queda más por calcular para obtener Y_2 . Se tiene: $J = 2(0,5403023058168)(1,6654182123) = 1,7996586007$



Para el cálculo de Y_1 se procede en forma análoga: $Y_1 = \int_{-\infty}^{x-h} \frac{\text{sen } t}{t-1} dt = \int_{h-1}^{+\infty} \frac{\text{sen } t}{t-1} dt$. La (α) da $\int_{2\pi}^{8\pi}$ con error $\approx -4 \cdot 10^{-8}$, y entonces se obtendrá $\int_{2\pi}^{+\infty}$ con $e \approx -2 \cdot 10^{-8}$. La (δ) da $\int_{3\pi}^{+\infty}$ con $e \approx -7 \cdot 10^{-9}$, y las tres arcadas siguientes con error menor. La (ξ) da $\int_{2\pi}^{3\pi}$ con $e \approx -3 \cdot 10^{-10}$, y $\int_{\pi}^{2\pi}$ con error $\approx -2 \cdot 10^{-8}$. Como es $h = \pi - 1$ queda la integral $\int_{\pi-2}^{\pi}$, que se calcula mediante la fórmula de Newton-Cotes u otra análoga.

A continuación se desarrolla el cálculo de Y_2 . Los valores exactos que sirven para control se han obtenido mediante las tablas de $Si(x)$ y $CI(x)$

Arcadas	P. ^o de div.	Ordenadas			
$\int_{\pi}^{2\pi}$	3,415948700	0,413916074	$\left. \begin{array}{l} 3\pi \\ 2\pi \end{array} \right\}$	6,283185307	0,189279751
	3,986402342	0,334851075		6,806784083	0,172212362
	4,712380680	0,269368325		7,330382258	0,157962329
	5,438375718	0,225307649		7,853981634	0,145900595
	6,008829260	0,199647452		8,377580410	0,135545795
				8,901179185	0,126563387
		9,424777961	0,118697490		

(Siguiendo)

Arcadas	P. ^s de divis.	Ordenadas	Arcadas	P. ^s de divis.	Ordenadas
- $\left. \begin{matrix} 4\pi \\ 3\pi \end{matrix} \right\}$	9, 424777961	0, 112697490	- $\left. \begin{matrix} 6\pi \\ 5\pi \\ 4\pi \\ 3\pi \\ 2\pi \\ \pi \end{matrix} \right\}$	15, 707963268	0, 067990379
	10, 210176124	0, 108575557		16, 493361431	0, 064543773
	10, 992537423	0, 100044277		17, 278759595	0, 061429742
	11, 720972451	0, 092750011		18, 064157758	0, 058602365
	12, 506370614	0, 086437514		19, 849555922	0, 056023203
	13, 351763773	0, 080960065		20, 634954085	0, 053662595
	14, 137166941	0, 076119913		21, 420352248	0, 051492372
14, 922565105	0, 071225845	22, 205750412	0, 049490862		
15, 707963268	0, 067990379	21, 991149575	0, 047639127		

Cálculo de $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{t-1} dt$

$$\int_{-\pi}^{\pi} = -0,55851638$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} = 0,29476973$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} = -0,06834407$$

t	f(t) = $\frac{1}{t-1}$	Diferencias
7π	0, 0476391273	Δ
7, 5π	0, 0443224201	Δ ²
8, 5π	0, 039051506	54172695
9, 5π	0, 0346673909	42372537
10, 5π	0, 0313029713	34049256
11, 5π	0, 0284070638	27059075
12, 5π	0, 0261301907	23358731
13, 5π	0, 0241478812	19223095
14, 5π	0, 0224451805	17027507
15, 5π	0, 0209666963	14704042
16, 5π	0, 0196709913	12057050

3476377	1243777	510514	232380
2233100	733263	278134	117665
1439837	455129	160469	63434
1044708	294660	97035	35960
750048	107625	61075	
552423	136550		
415373			
	Δ ⁷	Δ ⁸	Δ ⁹
	114715	60484	33727
	54231	26757	
	27474		

Aplicando la fórmula de transformación de Euler (ver § 7) a la serie de valores de f(t)

se obtiene como suma $C, 023689687$, y por consiguiente:

$$- \int_{-\pi}^{\pi} = 0,189430531(0,0476391273) + 1,621138938(0,023689687) = 0,04742858.$$

Finalmente resulta: $Y_2 = -0,37951925$. El valor exacto es $-0,3795191552$.

Ahora se desarrolla el cálculo de Y_1 :

Arcada	P. ^s de divis.	Ordenadas	Arcada	P. ^s de divis.	Ordenadas
- $\left. \begin{matrix} 2\pi \\ \pi \end{matrix} \right\}$	3, 141592654	0, 241453007	- $\left. \begin{matrix} 4\pi \\ 3\pi \\ 2\pi \\ \pi \end{matrix} \right\}$	9, 424777961	0, 095925304
	3, 565191429	0, 214353473		10, 210176124	0, 080204665
	4, 129700205	0, 192723151		10, 995574298	0, 083364079
	4, 712398980	0, 175059107		11, 720972451	0, 078241308
	5, 235937756	0, 160350519		12, 506370614	0, 073711682
	5, 759596532	0, 147938042		13, 351763773	0, 069677823
	6, 283135307	0, 137302362		14, 137166941	0, 066062560
	6, 806734083	0, 128093718		14, 922565105	0, 062803951
	7, 320332352	0, 120042502		15, 707963268	0, 059251700
	7, 853981634	0, 112943537		16, 493361431	0, 057164542
- $\left. \begin{matrix} 3\pi \\ 2\pi \end{matrix} \right\}$	8, 377580410	0, 106637215	- $\left. \begin{matrix} 6\pi \\ 5\pi \\ 4\pi \\ 3\pi \\ 2\pi \end{matrix} \right\}$	17, 278759595	0, 054708307
	8, 901179155	0, 100993071		18, 064157758	0, 052454455
	9, 424777961	0, 095925304		18, 849555922	0, 050372961
				19, 634954085	0, 048401460
				20, 420352248	0, 046684573
		21, 205750412	0, 045033380		
		21, 991149575	0, 043495000		

Resultados:

$$\int_{-\pi}^{\pi} = -0,12304376$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} = -0,05098346$$

Cálculo de $\int_{-\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t+1} dt$

t	f(t) - $\frac{1}{t+1}$	Diferencias					
7π	0,0434948996	△	△ ²	△ ³	△ ⁴	△ ⁵	△ ⁶
7,5π	407133883	46169152	9404706	2607999	882701	344318	149516
8,5π	360964731	36764446	6796707	1725298	538383	194802	78863
9,5π	324200255	29967739	5071409	1186915	343581	115939	43992
10,5π	294232546	24896330	3884494	843334	227642	71947	25652
11,5π	269336216	21011836	3041160	615692	155695	46295	
12,5π	248324380	17970676	2425468	459997	109400		
13,5π	230353704	15545208	1935471	350597			
14,5π	214808496	13579737	1614874				
15,5π	201228759	11964863					
16,5π	189263896						
					70653	35782	19251
					34871	16531	
					18340		

Para la suma de valores de f(t) la transformación de Euler da 0,021648233, y por consiguiente:

$$-\int_{-\pi}^{\infty} = 0,189430531(0,0434948996) + 1,021130933(0,021648233) = 0,04333407$$

Teniendo en cuenta que $\int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t+1} dt = 0,499631498$, resulta finalmente:

Y $\frac{1}{2} (0,27727021)$. El valor exacto es $(0,277270309)$.

Reuniendo los resultados anteriores se obtiene para la conjugada, en x=1 el siguiente valor: $g(1) = \frac{1}{\pi} (J + Y_1 + Y_2) = \frac{1}{\pi} (1,69740956) = (0,540302243)$
El valor exacto es: $\cos 1 = (0,5403023050)$

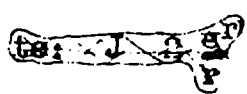
§ 9 - Conjugada de f(t) = $\frac{\cos t}{1+t^2}$

1) Introducción - Se tiene: $\pi \cdot g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-x)(1+t^2)} = \int_{-\infty}^{x-h} + \int_{x-h}^{x+h} + \int_{x+h}^{\infty} =$
 $= Y_1 + J + Y_2$. El cálculo de J = $2h \cdot f'(x) + \frac{2h^3}{3!3} f'''(x) + \frac{2h^5}{5!5} f^{(5)}(x) + \dots$

no ofrece dificultad, eligiendo un h adecuado para que la convergencia sea rápida. Las derivadas sucesivas se calculan con la fórmula siguiente, en que $r^2 = 1+x^2$ y $\text{tg}(\varphi - \frac{\pi}{2}) = x$:

$$D^n \frac{\cos x}{1+x^2} = \frac{\text{sen } \varphi}{r} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cdot \frac{\text{sen } 2\varphi}{r^2} \cos\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + 2! \binom{n}{2} \frac{\text{sen } 3\varphi}{r^3} \cos\left(x + \frac{n-2}{2}\pi\right) + 3! \binom{n}{3} \frac{\text{sen } 4\varphi}{r^4} \cos\left(x + \frac{n-3}{2}\pi\right) + \dots \quad (1)$$

Con respecto a la convergencia de la serie que figura en el 2º miembro de la expresión de J, se tiene: $|D^n| < \frac{1}{r} + \frac{n}{r^2} + \frac{2!}{r^3} \binom{n}{2} + \frac{3!}{r^4} \binom{n}{3} + \dots + \frac{n!}{r^{n+1}} \binom{n}{n} = \frac{n!}{r^{n+1}} \left[\frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{r^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + r + 1 \right] < \frac{n!}{r^{n+1}} e^r$, y por tan-



to: $|r| < 2e^r \left[\frac{h}{r} + \frac{h^3}{3r^3} + \frac{h^5}{5r^5} + \dots \right]$, que converge para $h < r$.

Las integrales Y_1 e Y_2 se expresan mediante series alternadas de áreas positivas y negativas de arcañas sucesivas de la curva $y = \frac{\cos t}{(t-x)(1+t^2)}$, que se pueden calcular con gran aproximación mediante las fórmulas (α), (δ) y (ε) del § 7. Los errores de estas fórmulas se expresan mediante las derivadas 4ª, 6ª y 8ª de $f(x) = \frac{1}{(x-a)(1+x^2)}$

$$= \frac{1}{1+a^2} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{x+a}{1+x^2} \right] = \frac{1}{1+a^2} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{a+1}{2(1+ix)} - \frac{a-1}{2(1-ix)} \right]. \text{ Poniendo } a = \cot \varphi,$$

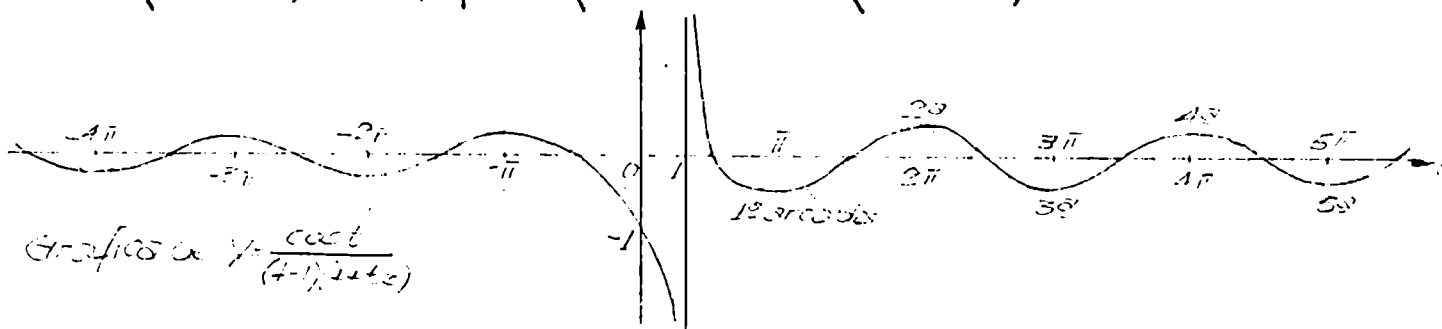
$a^2+1 = r^2$, $x = \operatorname{tg} \omega$, $1+x^2 = \rho^2$, resulta:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{1+a^2} \left\{ \frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{r}{\rho^{n+1}} \cos \left[\varphi + \frac{n\pi}{2} - (n+1)\omega \right] \right\}, \text{ y por consiguiente, tomando } a=1: \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2(x-1)^{n+1}} - \frac{\cos(5\omega - 45^\circ)}{\sqrt{2} \cdot \rho^{n+1}} \quad (2)$$

$$\frac{f^{(4)}(x)}{4!} = \frac{1}{2(x-1)^5} - \frac{\cos(7\omega - 45^\circ)}{\sqrt{2} \cdot \rho^5} \quad (3) \quad \left\| \quad \frac{f^{(8)}(x)}{8!} = \frac{1}{2(x-1)^9} - \frac{\cos(9\omega - 45^\circ)}{\sqrt{2} \cdot \rho^9} \quad (4) \right.$$

La siguiente derivada será también útil: $D^n \left(\frac{a+x}{1+x} \cos x \right) =$

$$= \frac{a+x}{1+x^2} \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{n!}{\rho^2} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} - 2\omega \right) \cdot \cos \left(x + \frac{n-1}{2}\pi \right) + 2! \left(\frac{n}{2} \right) \frac{r}{\rho^3} \cos \left(\varphi + \pi - 3\omega \right) \cdot \cos \left(x + \frac{n-2}{2}\pi \right) - 3! \left(\frac{n}{3} \right) \frac{r}{\rho^4} \cos \left(\varphi + \frac{3\pi}{2} - 4\omega \right) \cdot \cos \left(x + \frac{n-3}{2}\pi \right) + \dots \quad (5)$$



2) Desarrollos en serie - Teniendo en cuenta que $f(x) = \frac{1}{(x-a)(1+x^2)}$ se

puede descomponer así: $f(x) = \left[\frac{1}{1+a^2} \frac{1}{x-a} - \frac{a+x}{1+x^2} \right]$, se tiene:

$$\int \frac{\cos x}{(x-a)(1+x^2)} dx = \frac{1}{1+a^2} \left[\int \frac{\cos x}{x-a} dx - a \int \frac{\cos x}{1+x^2} dx - \int \frac{x \cdot \cos x}{1+x^2} dx \right]$$

De las tres últimas integrales la 1ª se puede calcular mediante las tablas de $Si(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ y $Co(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt$, pues con $x-a = t$ se transforma en $\int \frac{\cos(t+a)}{t} dt = \cos a \int \frac{\cos t}{t} dt - \operatorname{sen} a \int \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$.

Para las 2ª y 3ª deduciré a continuación interesantes desarrollos en serie que serán útiles para el cálculo numérico.

Para $|x| > 1$ son válidos los desarrollos $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \dots$,

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \dots \text{Entonces: } \int \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int \frac{\cos x}{x^{2n}} dx,$$

$$\int \frac{x \cdot \cos x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{\cos x}{x^{2n+1}} dx. \text{ Poniendo } E = e^{ix} \text{ se tiene:}$$

$$\int \frac{E \cdot dx}{x^{n+1}} = -\frac{E}{nx^n} - \frac{iE}{n(n-1)x^{n-1}} - \frac{i^2 E}{n(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \dots - \frac{i^{n-1} E}{n!x} + \frac{i^n}{n!} \int \frac{E}{x} dx$$

Calculando con esta fórmula los términos de la serie de integrales

$$\int \frac{E \cdot dx}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int \frac{E \cdot dx}{x^{2n}} \text{ y ordenando según las potencias de } x, \text{ resulta}$$

el desarrollo siguiente en que $S = \text{Sh } 1 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = 1,1752011936438014\dots$

$$\int \frac{E \cdot dx}{1+x^2} = iS \int \frac{E}{x} dx - S \frac{E}{x} + \frac{E}{ix^2}(1-S) + \frac{2!E}{i^2x^3}(1-S) + \frac{3!E}{i^3x^4} \left(1 + \frac{1}{3!} - S \right) +$$

$$+ \frac{4!E}{i^4x^5} \left(1 + \frac{1}{3!} - S \right) + \dots, \text{ y separando partes real e imaginaria:}$$

$$\int \frac{\cos x}{1+x^2} dx = -S \int \frac{\sen x}{x} dx - S \overset{F_1}{\frac{\cos x}{x}} - (S-1) \overset{F_2}{\frac{\sen x}{x^2}} + (S-1) 2! \overset{F_3}{\frac{\cos x}{x^3}} +$$

$$+ \underbrace{\left(S-1 - \frac{1}{3!} \right)}_{F_4} 3! \frac{\sen x}{x^4} - \underbrace{\left(S-1 - \frac{1}{3!} \right)}_{F_5} 4! \frac{\cos x}{x^5} - \dots \quad (6)$$

$$\int \frac{\sen x}{1+x^2} dx = S \int \frac{\cos x}{x} dx - S \frac{\sen x}{x} + (S-1) \frac{\cos x}{x^2} + (S-1) 2! \frac{\sen x}{x^3} -$$

$$- \left(S-1 - \frac{1}{3!} \right) 3! \frac{\cos x}{x^4} - \left(S-1 - \frac{1}{3!} \right) 4! \frac{\sen x}{x^5} + \dots \quad (7)$$

que convergen para $|x| > 1$, pues el coeficiente numérico se acota así:

$$\left(S-1 - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{(2n-1)!} \right) (2n)! = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} - \dots <$$

$$< \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots = \frac{2n+1}{4n^2+4n}, \text{ y se ve que tiende a cero}$$

para $n \rightarrow \infty$. En forma análoga y siendo $C = \text{Ch } 1 = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) = 1,5430806348152438\dots$

$$\int \frac{x E}{1+x^2} dx = C \int \frac{E}{x} dx + \frac{E}{ix}(1-C) + \frac{E}{i^2x^2}(1-C) + \frac{2!E}{i^3x^3} \left(1 + \frac{1}{2!} - C \right) +$$

$$+ \frac{3!E}{i^4x^4} \left(1 + \frac{1}{2!} - C \right) + \frac{4!E}{i^5x^5} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - C \right) + \dots, \text{ que se desdobra en}$$

$$\int \frac{x \cdot \cos x}{1+x^2} dx = C \int \frac{\cos x}{x} dx - \underbrace{(C-1)}_{G_1} \frac{\sen x}{x} + \underbrace{(C-1)}_{G_2} \frac{\cos x}{x^2} + \underbrace{\left(C-1 - \frac{1}{2!} \right)}_{G_3} 2! \frac{\sen x}{x^3} -$$

$$- \underbrace{\left(C-1 - \frac{1}{2!} \right)}_{G_4} 3! \frac{\cos x}{x^4} - \underbrace{\left(C-1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \right)}_{G_5} 4! \frac{\sen x}{x^5} + \dots \quad (8)$$

$$\int \frac{x \cdot \sen x}{1-x^2} dx = C \int \frac{\sen x}{x} dx + (C-1) \frac{\cos x}{x} + (C-1) \frac{\sen x}{x^2} - \left(C-1 - \frac{1}{2!} \right) 2! \frac{\cos x}{x^3} -$$

$$- \left(C-1 - \frac{1}{2!} \right) 3! \frac{\sen x}{x^4} + \left(C-1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \right) 4! \frac{\cos x}{x^5} + \dots \quad (9)$$

Los valores numéricos de los coeficientes son:

$F_3 = 0,350402387287603$	$G_3 = 0,086161269630488$
$F_4 = 0,051207161802808$	$G_4 = 0,25248380889146$
$F_5 = 0,20482864745123$	$G_5 = 0,03393523556585$
$F_6 = 0,02414323725617$	$G_6 = 0,16967617782925$
$F_7 = 0,1448594235370$	$G_7 = 0,0180570669755$
$F_8 = 0,014015964759$	$G_8 = 0,126399468828$
$F_9 = 0,11212771807$	$G_9 = 0,01119575063$
$F_{10} = 0,00914946264$	$G_{10} = 0,1007617556$
$F_{11} = 0,0214946264$	$G_{11} = 0,0076175566$
$F_{12} = 0,006440291$	$G_{12} = 0,083793123$
$F_{13} = 0,07729069$	$G_{13} = 0,00551747$
$F_{14} = 0,004779$	$G_{14} = 0,0717272$
$F_{15} = 0,06691$	$G_{15} = 0,00419$
	$G_{16} = 0,0628$

3) Otros desarrollos en serie - La integral $\int \frac{a+x}{1+x^2} \cos x \cdot dx$ admite otro interesante desarrollo en serie apropiado para pequeños valores de x .

Siendo $\frac{a+x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{a+i}{1+ix} + \frac{a-i}{1-ix} \right] = \Re \frac{a+i}{1+ix}$, se tiene:

$$I = \int \frac{a+x}{1+x^2} \cos x \cdot dx = \Re \int \frac{a+i}{1+ix} \cos x \cdot dx, \text{ y con } 1+ix = z = r e^{i\varphi}, r = \sqrt{1+x^2},$$

$\text{tg } \varphi = x$, resulta:

$$I = \Re \frac{a+i}{1} \int \frac{\text{Ch}(z-1) dz}{z} = \Re \left\{ (1-ia) \left[\text{Ch } 1 \int \frac{\text{Ch } z}{z} dz - \text{Sh } 1 \int \frac{\text{Sh } z}{z} dz \right] \right\}$$

Pero $\int \frac{\text{Ch } z}{z} dz = \log z + \frac{z^2}{2!2} + \frac{z^4}{4!4} + \frac{z^6}{6!6} + \dots = P + Q i$, siendo

$$\begin{cases} P = \log r + \frac{r^2}{2!2} \cos 2\varphi + \frac{r^4}{4!4} \cos 4\varphi + \frac{r^6}{6!6} \cos 6\varphi + \dots \\ Q = \varphi + \frac{r^2}{2!2} \sin 2\varphi + \frac{r^4}{4!4} \sin 4\varphi + \frac{r^6}{6!6} \sin 6\varphi + \dots \end{cases}$$

Además: $\int \frac{\text{Sh } z}{z} dz = z + \frac{z^3}{3!3} + \frac{z^5}{5!5} + \frac{z^7}{7!7} + \dots = P' + Q' i$, siendo

$$\begin{cases} P' = r \cdot \cos \varphi + \frac{r^3}{3!3} \cos 3\varphi + \frac{r^5}{5!5} \cos 5\varphi + \frac{r^7}{7!7} \cos 7\varphi + \dots \\ Q' = r \cdot \sin \varphi + \frac{r^3}{3!3} \sin 3\varphi + \frac{r^5}{5!5} \sin 5\varphi + \frac{r^7}{7!7} \sin 7\varphi + \dots \end{cases}$$

Entonces: $I = \Re \left\{ (1-ia) \left[\text{Ch } 1 \cdot (P+Q i) - \text{Sh } 1 \cdot (P'+Q' i) \right] \right\} =$
 $= \text{Ch } 1 \cdot (P+aQ) - \text{Sh } 1 \cdot (P'+aQ') \quad (10)$

También se tiene: $\int \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \text{Ch } 1 \cdot Q - \text{Sh } 1 \cdot Q' \quad (11)$

$\int \frac{x \cdot \cos x}{1+x^2} dx = \text{Ch } 1 \cdot P - \text{Sh } 1 \cdot P' \quad (12)$. Estas series convergen rápidamente.

Procederé ahora a calcular el valor numérico de la conjugada para $a=1$.

con siete cifras decimales. En la pág. 41 está el cálculo de J con h=0, que da por resultado $J = -0,2763575282$.

4) Cálculo de Y_2 - Aplicando la fórmula (α) a la 7ª arcada a contar de $\frac{\pi}{2}$; se comete un error, dado por la (γ'), que vale $2,3 \cdot 10^{-9}$, pues la (2) de este § da: $\frac{f^{IV}(7\pi)}{24} = 0,03653$, y al sumar las infinitas arcadas que equi-

vales a $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)}$

el error será aún menor, aproximadamente la mitad de aquél.

Arcada	Fórm.	Error
7ª	(α)	$2,3 \cdot 10^{-9}$
6ª	(α)	$6,9 \cdot 10^{-9}$
5ª	(α)	$2,0 \cdot 10^{-8}$
4ª	(δ)	$1,1 \cdot 10^{-9}$
3ª	(δ)	$1,6 \cdot 10^{-8}$
2ª	(ξ)	$1,4 \cdot 10^{-8}$
1ª	(ξ)	$6 \cdot 10^{-5}$
1ª	(γ')	$1,3 \cdot 10^{-5}$

La tablilla adjunta da los errores de las diversas fórmulas aplicadas a distintas arcadas. Se ve que es posible obtener con 7 decimales el valor de $\int_{3\pi/2}^{\infty}$ mediante las fórmulas (α), (δ) y (ξ), pero la primera arcada, o sea $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}$, se obtendrá solamente con 4 decimales mediante la fórmula (ξ) o la (γ'). Para calcularla con más aproximación hay que utilizar el desarrollo en serie ex-

puesto en la sección 3. En las pág.^s 42 a 44 figura el cálculo de

$-\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+x}{1+x^2} \cos x \cdot dx = 0,4005839713$. Agregándole $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1-x}{1-x^2} \cos x \cdot dx$ -
 $\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos x}{x-1} dx = -0,5299854616$, resulta: $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} = -0,1294014903$.

En cuanto a la integral $\int_{1+h}^{\pi/2}$ conviene calcularla con la fórmula de N-C. En la pág. 41 figura el cálculo de $-\frac{1}{2} \int_{1/2}^{\pi/2} \frac{1+x}{1+x^2} \cos x \cdot dx$, que da

$-0,0287156559$. Agregándole $\frac{1}{2} \int_{1/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x-1} dx = 0,1124115096$, resulta:
 $\int_{1/2}^{\pi/2} = 0,0836958537$. A continuación va el cálculo de $\int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)}$

Arcada	P. ^s de divis.	Ordenadas	Arcada	P. ^s de divis.	Ordenadas	
5π/2	4,	712322980	9π/2	10,	995574288	
	5,	235987756		7π/2	11,	780972451
	5,	759526532			12,	566370614
6,	283185307	13,	351768778			
3π/2	6,	806784083	5π/2	14,	137166941	
	7,	330322858		15,	707963268	
	7,	853981634		17,	278759595	
7π/2	8,	639379797	3π/2	18,	349555922	
	9,	424777961		20,	420352248	
	10,	210176124		21,	991148575	
5π/2	10,	995574288	9π/2	23,	561944902	
		0,011607397			0,03820690	
		8307856			663532	
		6148225			544054	
		4676066			451610	
		3632368			378971	
		2826083			274442	
		2327519			205070	
		1730600			157235	
		1321409			123190	
		1032619			98304	
		820690			79693	

Las áreas de estas arcadas son:

$\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} = 0,01013415$; $\int_{5\pi/2}^{7\pi/2} = -0,00273438$
 $\int_{7\pi/2}^{9\pi/2} = 0,00110873$; $\int_{9\pi/2}^{11\pi/2} = -0,00043626$

Cálculo de $\int_{1,5\pi}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)}$

t	f(t)	$\frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)}$	Diferencias								
8π	0,0 ⁴ 554278	Δ	196922	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9
9π	458056	125274	71648	29833	13746	6855	3641	2031	1168	668	
10π	332782	83459	41815	16087	6891	3214	1610	863	500		
11π	249323	57731	25728	9196	3677	1604	747	363			
12π	191592	41199	16532	5519	2073	857	384				
13π	150393	30186	11013	3446	1216	473					
14π	120207	22619	7567	2230	743						
15π	97588	17282	5337	1487							
16π	80306	13432	3850								
17π	66874										

La transformación de Euler, aplicada a la serie de valores de f(t), da la suma 0,0⁴382116, y por consiguiente:

$$\int_{1,5\pi}^{\infty} = 0,189430(0,0^4 79693) + 1,621139(0,0^4 382116) = 0,0^4 78016$$

Reuniendo los resultados parciales se obtiene finalmente: $Y_2 = -0,0360229$

5) Cálculo de $Y_1 = \int_{-\infty}^{0,8} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)} = - \int_{-0,8}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t+1)(1+t^2)}$. Por ser

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{1+x^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1-1}{2(1+ix)} + \frac{1+1}{2(1-ix)} \right], \text{ resulta:}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} (-1)^n n! \left\{ \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{\rho^{n+1}} \cos \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} - (n+1)\omega \right] \right\} \text{ y por consiguiente:}$$

$$\frac{f^{(4)}(x)}{24} = \frac{1}{2(x+1)^5} + \frac{1}{\sqrt{2} \rho^5} \cos(5\omega + 45^\circ) \quad (2')$$

$$\frac{f^{(6)}(x)}{720} = \frac{1}{2(x+1)^7} + \frac{1}{\sqrt{2} \rho^7} \cos(7\omega + 45^\circ) \quad (3')$$

$$\frac{f^{(8)}(x)}{8!} = \frac{1}{2(x+1)^9} + \frac{1}{\sqrt{2} \rho^9} \cos(9\omega - 45^\circ) \quad (4')$$

Arcada	Fórm.	Error
6ª	(α)	5.10 ⁻⁹
5ª	(α')	2.10 ⁻⁸
4ª	(δ)	7.10 ⁻¹⁰
3ª	(δ)	8.10 ⁻⁵
2ª	(ξ)	4.10 ⁻⁹
1ª	(γ')	9.10 ⁻⁸

La tablilla adjunta da los errores de las diversas fórmulas del §7 aplicadas a distintas arcadas, a contar desde $x = \frac{1}{2}\pi$. Se ve que es posible obtener con 7 decimales el valor de $\int_{3\pi/2}^{\infty}$ mediante las fórmulas (α), (δ) y (ξ), y el de $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}$ con la (γ'). La integral $\int_0^{3\pi/2}$ se puede calcular mediante el desarro-

llo en serie establecido en la sección 3. En la pág. 46 figura el cálculo de $\frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \frac{1-x}{1+x^2} \cos x \cdot dx$, que da 0,3918140741. Agregando $\frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \frac{\cos x}{x+1} dx =$

= 0,0883509128 resulta: $\int_0^{3\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{(1+t)(1+t^2)} = 0,4801649869$. En cuanto al va-

lor de $\int_{-0,8}^0 \frac{\cos t \cdot dt}{(1+t)(1+t^2)} = \int_0^{0,8} \frac{\cos t \cdot dt}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int_0^{0,8} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1+t}{1+t^2} \right] \cos t \cdot dt$, se lo

calcula con la fórmula de N-C. En la pág. 45 está hecho el cálculo de

$$\frac{1}{2} \int_0^{0.8} \frac{1+x}{1+x^2} \cos x \cdot dx = 0,4131090291 ; \text{ agregando } \frac{1}{2} \int_0^{0.8} \frac{\cos t}{1-t} dt = 0,686793499.$$

resulta: $\int_{-0.8}^0 \frac{\cos t \cdot dt}{(1+t)(1+t^2)} = 1,0999025884.$

A continuación se desarrolla el cálculo de $\int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(1+t)(1+t^2)}$;

Arcada	P. ^o de divis.	Ordenadas	Arcada	P. ^o de divis.	Ordenadas
25π	4,	712382980	1,5π	10,	99557429
	5,	235987756		11,	78097245
	5,	750586532		12,	56637061
	6,	283185307		13,	35176878
	6,	806784083		14,	13716694
3,5π	7,	330382258	2,5π	15,	70796327
	7,	853981634		17,	27875260
	8,	639379797		18,	84956592
2,5π	9,	424777961	20,	42035225	
	10,	210176124	21,	99114857	
	10,	995574288	23,	56194490	40713

Cálculo de $\int_{7,5\pi}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t+1)(1+t^2)} = 0,007231159$

t	f(t) = $\frac{\cos t \cdot dt}{(t+1)(1+t^2)}$	Diferencias									
8π	0,0 ⁵ 604851	Δ	Δ ²	Δ ³	Δ ⁴	Δ ⁵	Δ ⁶	Δ ⁷	Δ ⁸	Δ ⁹	
9π	426762	178089	63577	26016	11797	5797	3037	1670	840	510	
10π	312250	114512	37561	14219	6000	2760	1367	730	430		
11π	235299	76951	23342	8219	3240	1393	637	300			
12π	181690	53609	15123	4979	1847	756	337				
13π	143204	38486	10144	3132	1091	419					
14π	114862	28342	7012	2041	672						
15π	93532	21330	4271	1369							
16π	77173	16359	3602								
17π	64416	12757									

Aplicando la transformación de Euler a la serie de valores de f(t) se obtiene la suma 0,0⁴357012 , y por consiguiente:

$$\int_{7,5\pi}^{\infty} = 0,129430(0,0^4 40713) + 1,621139(0,0^4 357012) = 0,0^4 65589. \text{ Entonces:}$$

Reuniendo los resultados parciales se obtiene finalmente: $\int_{3\pi/2}^{\infty} 0,00566167$

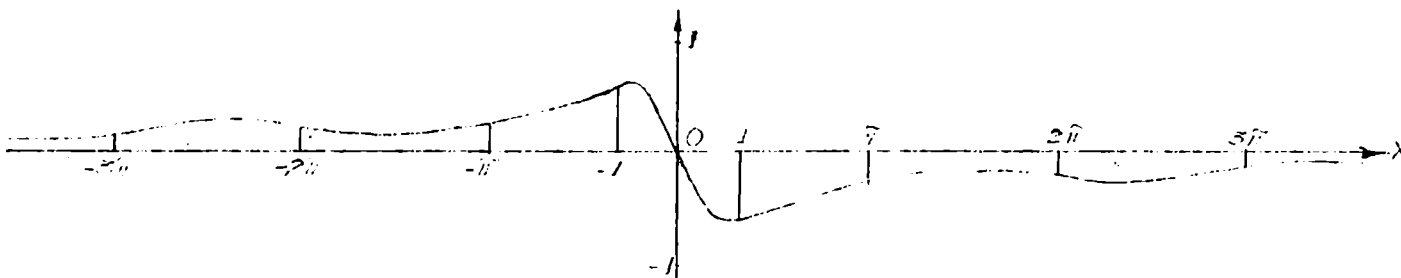
Y₁ = -1,58572925. Entonces el valor de la conjugada para x=1 resulta ser:

$$g(1) = \frac{1}{\pi}(J+Y_1+Y_2) = \frac{1}{\pi}(-1,89964216) = -0,60467488.$$

El valor exacto está dado por la expresión $g(x) = -\frac{x \cdot e^{-1} + \operatorname{sen} x}{1+x^2}$ (Ej.10^o del

§ 2), que para x=1 da: $g(1) = -\frac{1}{2}(e^{-1} + \operatorname{sen} 1) = -0,6046752129297$

La gráfica de la conjugada es la siguiente:



§ 10 - Cálculo de la conjugada de $f(t) = \frac{\cos t}{1+t^2}$ para $x=1$, con 10 decimales

1) Cálculo de J - Los valores de las derivadas hasta $f^{(VI)}(1)$ son los siguientes, siendo $S = \text{sen } 1^r = 0,841470984808$ y $C = \text{cos } 1^r = 0,540302305868$

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\frac{1}{2}(S+C) = -0,69088664534 & \parallel & f^{(VII)}(1) = 200.S - 311,5.C = -0,00997132 \\ f''(1) &= \frac{3}{2}C - S = -0,0310175260 & \parallel & f^{(VIII)}(1) = -14724,5.S - 9454,5.C = -17498,528 \\ f^{(V)}(1) &= \frac{1}{2}(39S+25C) = 23,16246303 & \parallel & f^{(IX)}(1) = 616775,5.C - 396027.S = -0,00482 \end{aligned}$$

Tomando $h = 0,2$ resulta: $J = -0,2763575282$. Por ser $|D^{(III)}(1)| < \frac{13! e^{\sqrt{2}}}{2^7}$, el error es $< \frac{2(0,2)^{13}}{13!13} \frac{13! e^{\sqrt{2}}}{128} = 4 \cdot 10^{-12}$.

2) Cálculo de $Y_2 = \int_{1/2}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)}$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{(t-a)(1+t^2)} = \frac{1}{1+a^2} \left[\frac{1}{t-a} - \frac{a+t}{1+t^2} \right], \text{ se puede escribir: } Y_2 = \frac{1}{2} \int_{1/2}^{\infty} \frac{\cos t}{t-1} dt - \frac{1}{2} \left[\int_{1/2}^{\pi/2} \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt + \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt \right] = \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}(A_2 + A_3 + A_4)$$

De estas cuatro integrales la 1ª se descompone así:

$$A_1 = \int_{0,2}^{\infty} \frac{\cos(t+1)}{t} dt = \cos 1 \int_{0,2}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt - \text{sen } 1 \int_{0,2}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt, \text{ y utilizando las tablas de las funciones Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt \text{ y Ci}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \text{ resulta: } A = 0,5403023059(1,0422055957) - 0,8414709848(1,3712402363) = -0,5907527871$$

La 2ª integral se puede calcular mediante las fórmulas de Simpson y de Weddle con 12 divisiones de amplitud $h = 0,03$, que dan $\int_{1,2}^{1,56}$. Queda un residuo $\int_{1,56}^{\pi/2}$, que se calcula mediante la fórmula de Simpson con dos divisiones de amplitud $h' = \frac{\pi}{4} - 0,78 = 0,0053981634$. Con la tablilla adjunta la fórmula de Simpson da:

t	cos t	1+t ²	$\frac{1+t}{1+t^2} \cos t$
1,20	0,362357754	2,44	0,326716008
1,23	0,334237727	2,5129	0,296609547
1,26	0,305816908	2,5876	0,267099324
1,29	0,277120875	2,6641	0,238206925
1,32	0,248175452	2,7424	0,209950061
1,35	0,219006687	2,8225	0,182343920
1,38	0,189640831	2,9044	0,155400488
1,41	0,160104312	2,9881	0,129129344
1,44	0,130423709	3,0736	0,103537822
1,47	0,100625733	3,1609	0,078631263
1,50	0,070737202	3,25	0,054413232
1,53	0,040785011	3,3409	0,030885713
1,56	0,010796117	3,4336	0,008049295

La fórmula de Simpson da: $\int_{1,2}^{1,56} = 0,0573879360$, con un error $\leq \frac{-1}{15}(0,03)^5 f^{(IV)}(\xi)$. Tomando $\xi = 1,4$ la (5) del § 9 da: $f^{(IV)}(1,4) = -2,56$ y dicho error será $\leq 4,1 \cdot 10^{-9}$.

La fórmula de Weddle da: $\int_{1,2}^{1,56} = 0,05738794079$, con error $\leq \frac{-1}{70}(0,03)^7 f^{(VII)}(\xi)$. Para $\xi = 1,4$

la (5) antes citada da $f^{(VII)}(1,4) = -32,1$ y el error valdrá 10^{-11} . Se puede adoptar, pues: $\int_{1,2}^{1,56} = 0,0573879408$.

La ordenada en $x = \frac{1}{2}\pi = h' = 1,5653981634$ vale $0,0040134723$, y así resulta: $\int_{1,56}^{\pi/2} = 0,0000433710$, con un error despreciable. Sumando ambos resultados se obtiene finalmente: $A_2 = 0,0574313118$.

3) Cálculo de A_3 - El cálculo de la 3ª integral $A_3 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt$ se efectúa mediante el desarrollo en serie establecido en la sección 3 del §9. Con $a=1$, $1+t^2=r^2$, $\operatorname{tg} \phi = t$, se tiene:

$$I = \int \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt = \operatorname{Ch} 1 \left[\log_e r + \phi + \frac{r^2 \sqrt{2}}{2!2} \cos(2\phi - 45^\circ) + \frac{r^4 \sqrt{2}}{4!4} \cos(4\phi - 45^\circ) + \frac{r^6 \sqrt{2}}{6!6} \cos(6\phi - 45^\circ) + \dots \right] - \sqrt{2} \cdot \operatorname{Sh} 1 \left[r \cdot \cos(\phi - 45^\circ) + \frac{r^3}{3!3} \cos(3\phi - 45^\circ) + \frac{r^5}{5!5} \cos(5\phi - 45^\circ) + \dots \right] = \operatorname{Ch} 1 \cdot S_1 - \operatorname{Sh} 1 \cdot S_2$$

Hay que sumar estas series para $t = \frac{3\pi}{2}$ y $t = \frac{1}{2}\pi$. A continuación se desarrolla el cálculo para $t = \frac{3\pi}{2}$. Se tiene: $r^2 = 23,2066099024511$, $r = 4,8173239358020$, $\log r = 1,5722185738408$, $\phi = 1,3616916829712$ (78°1'9"07115628)

El siguiente cuadro se refiere a S_1 :

CUADRO Nº 1

n	$n\phi - \frac{\pi}{4}$	$\cos\left(n\phi - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{r^n \sqrt{2}}{n!n}$	$\frac{r^n \sqrt{2}}{n!n} \cos\left(n\phi - \frac{\pi}{4}\right)$
2	1,93792'52025449	-0,35899'31185892	8,20477'5615187	-2,94545'7985421
4	4,661363'5684873	-0,05099'32797219	7,933542793283	-0,40459'7034557
6	1,1015666272500	0,452199'3756258	4,091347394403	1,85010'4737217
8	3,8249499931923	-0,7754572687049	1,27160'2271750	-0,98607'3224530
10	0,2651480519550	0,9650537141249	0,26230'7353358	0,25314'0690909
12	2,9885314178973	-0,9883089803409	0,03842'7700452	-0,03798'0418068
14	5,7119147833396	0,8412146807228	4200108636	0,00353'3193045
16	2,152112842602	-0,549124677853	353360405	-0,00019'5137168
18	279°20'43"281	0,16238497	23955585	0,3890027
20	75°29'1"42	0,2523441	1316671	0,332254
22	231°25'20"	-0,623576	60125	-0,37493
24	27°27'38"	0,88732	2317	0,2056
26	183°29'56"	-0,998	76	-0,76
28	339°32'14"	0,94	2	0,2

Resulta: $S_1 = 0,666339265009$ y $\operatorname{Ch} 1 \cdot S_1 = 1,02829'2370084$

El cuadro siguiente, que se refiere a S_2 , se construye en base al anterior. En efecto: $\cos(k\phi - 45^\circ) = \frac{1}{2} \sec \phi \left[\cos(\overline{k-1} \cdot \phi - 45^\circ) + \cos(\overline{k+1} \cdot \phi - 45^\circ) \right]$ siendo $\frac{1}{2} \sec \phi = \frac{1}{2} r = 2,40866'18672010$ ($\cos \phi = 0,20758'413038577$). Además: $\sqrt{2} = 1,41421'3562373097$, $\cos 45^\circ = 0,70710'6781186548$. Conviene poner:

$$S_2 = r \left[\sqrt{2} \cdot \cos(\phi - 45^\circ) + \frac{r^2 \sqrt{2}}{3!3} \cos(3\phi - 45^\circ) + \frac{r^4 \sqrt{2}}{5!5} \cos(5\phi - 45^\circ) + \dots \right]$$

NOTA - Los cosenos del cuadro 1 se pueden calcular con la fórmula siguiente (desde el 3º): $\cos(k\phi - 45^\circ) = 2\cos(\overline{k-2} \phi - 45^\circ) \cdot \cos 2\phi - \cos(\overline{k-4} \phi - 45^\circ)$ siendo $\cos 2\phi = -0,91381'7657623967$

CUADRO Nº 2

n	$n\varphi - 45^\circ$	$\cos(n\varphi - 45^\circ)$	$\frac{r^{n-1}\sqrt{2}}{n!n}$	$\frac{r^{n-1}\sqrt{2}}{n!n}\cos(n\varphi - 45^\circ)$
1	33° 1' 9",07	0,8384881396048	1,414213562373	1,185801298919
3	189 3 27,21	-0,9875306882785	1,823283470042	-1,800548380097
5	345 5 45,35	0,9663578211840	1,269366846925	1,226662580478
7	141 8 3,49	-0,7786189928834	0,500981313600	-0,390073565849
9	297 10 21,63	0,4566737473324	0,125590347827	0,057353814771
11	93 12 39,77	-0,0560140752870	0,021678204120	-0,001214289599
13	249 14 57,91	-0,3543004451852	2728736127	-0,966792425
15	45 17 16,05	0,7035460811	261340093	0,183864798
17	201 19 34,21	-0,93152523	19673932	-0,18326764
19	357 21 52,35	0,9989423	1194461	0,1193198
21	153 24 10,49	-0,894177	59713	-0,53394
23	309 26 28,64	0,63529	2500	0,1538
25	105 28 46,78	-0,267	89	-0,24

Resulta: $S_2 = r(0,277181345600) = 1,335272330717 \therefore$

$Shl.S_2 = 1,569213636398$. Entonces en el limite superior $t = \frac{3\pi}{2}$ de la integral A_3 se tiene: $Chl.S_1 - Shl.S_2 = -0,540921266814$.

Hay que repetir estos cálculos para $t = \frac{1}{2}\pi$. Se tiene:

$r^2 = 3,46740110027235$, $r = 1,86209538911859$, $\log_e r = 0,621702675444$, $\varphi = 1,0038848218539$ ($58^\circ 31' 6",1082742$). El cuadro sig. se refiere a S_1 :

CUADRO Nº 3

n	$n\varphi - \frac{\pi}{4}$	$\cos(n\varphi - \frac{\pi}{4})$	$\frac{r^n\sqrt{2}}{n!n}$	$\frac{r^n\sqrt{2}}{n!n}\cos(n\varphi - \frac{\pi}{4})$
2	1,2223714803104	0,3414177264530	1,225911415548	0,418547888329
4	3,2301411240182	-0,9960821451330	0,177113607958	-0,176419702547
6	5,2379107677260	0,5016644515015	0,013647192202	0,006846314201
8	0,9624951042542	0,57147423459	633754153	0,362174170
10	2,9702647479620	-0,9853592398	19533154	-0,19247174
12	285°13'13",30	0,2625321	427584	0,112254
14	40 15 25,52	0,76315	6982	0,5328
16	155 17 38	-0,908	88	-0,80

Resulta: $S_1 = 1,874905041779$ y $Chl.S_1 = 2,893129662086$.

El siguiente cuadro se refiere a S_2 . Se tiene: $\cos\varphi = 0,53702927214631$, $\cos 2\varphi = -0,42319912171600$, $\frac{1}{2}\sec\varphi = 0,9310479445593$.

CUADRO Nº 4

n	$n\varphi - 45^\circ$	$\cos(n\varphi - 45^\circ)$	$\frac{r^{n-1}\sqrt{2}}{n!n}$	$\frac{r^{n-1}\sqrt{2}}{n!n}\cos(n\varphi - 45^\circ)$
1	12° 31' 6",11	0,9762265876598	1,414213562373	1,380592880215
3	127 33 18,32	-0,6095239613881	0,272424759011	-0,166049418293
5	242 35 30,54	-0,4603265774094	0,028338177274	-0,013044816154
7	357 37 42,76	0,99914356791	1671085494	0,1669654323
9	112 39 54,97	-0,3853467834	62593003	-0,24120012
11	227 42 7,19	-0,67298673	1614310	-0,1086409
13	342 44 19,41	0,9549615	30361	0,28994
15	97 46 31,62	-0,1353	434	-0,59
17	212 48 43,84	-0,840	5	-0,4

Resulta: $S_2 = r(1,203143122601) = 2,240367862616 \therefore$

Shl. $S_2 = 2,632882986347$. Entonces en el límite ~~superior~~ inferior $t = \frac{1}{2}\pi$ de la integral A_2 se tiene: $Chl.S_1 - Shl.S_1 = 0,260246675739$, y el valor de la integral resulta ser: $A_3 = -0,80116794255$.

4) Cálculo de A_4 - La integral $A_4 = \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt$ se calcula mediante los desarrollos en serie establecidos en la sección 2 del § 9. Con los límites ∞ y $\frac{3}{2}\pi$ ~~superior~~, poniendo $p = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 = (0,2122065907892)^2 = 0,0450316371744$

$p^2 = 0,0020278483466$	$p^5 = 0,061851777$	$p^8 = 0,01169$
$p^3 = 0,04513173310$	$p^6 = 0,0883389$	$p^9 = 0,0128$
$p^4 = 0,0541121689$	$p^7 = 0,093755$	

se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt &= -S \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt - \left[F_2 p - F_4 p^2 + F_6 p^3 - \dots \right] \\ \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{t \cdot \cos t}{1+t^2} dt &= C \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt - \frac{2}{3\pi} \left[G_1 - G_3 p + G_5 p^2 - \dots \right] \\ \text{Pero } S \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt &= S(-0,0375764272) = -0,0441588621 \\ \text{y } C \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt &= C(0,1984075607) = 0,3061588647 \end{aligned} \right\}$$

Además:	$F_2 p = 0,007889596585$	$G_1 = 0,543080634815$
	$F_4 p^2 = 0,000103840358$	$G_3 p = 0,003879983032$
	$F_6 p^3 = 0,2204696$	$G_5 p^2 = 0,68815511$
	$F_8 p^4 = 0,57636$	$G_7 p^3 = 0,1648923$
	$F_{10} p^5 = 0,1694$	$G_9 p^4 = 0,46039$
	$F_{12} p^6 = 0,54$	$G_{11} p^5 = 0,1411$
	$F_{14} p^7 = 0,2$	$G_{13} p^6 = 0,46$
	<hr/>	$G_{15} p^7 = 0,2$
	$0,007787804929$	

$$0,539267863043 \times \frac{2}{3\pi} = 0,114436194738$$

Resulta:

$$\int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = 0,0363719571 ; \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{t \cdot \cos t}{1+t^2} dt = 0,1917226700$$

$A_4 = 0,2280946271$. Finalmente: $Y_2 = -0,0360223382$.

5) Cálculo de Y_1 - Esta integral se descompone así:

$$\begin{aligned} Y_1 &= - \int_{-\infty}^{0,8} \frac{\cos t \cdot dt}{(1-t)(1+t^2)} = - \int_{-0,8}^{\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(1+t)(1+t^2)} = -\frac{1}{2} \int_{-0,8}^{\infty} \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1-t}{1+t^2} \right] \cos t \cdot dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-0,8}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t} dt - \frac{1}{2} \int_{-0,8}^0 \frac{1-t}{1+t^2} \cos t \cdot dt + \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \frac{t-1}{1+t^2} \cos t \cdot dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{t-1}{1+t^2} \cos t \cdot dt = -\frac{1}{2} B_1 - \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{2} B_3 + \frac{1}{2} B_4 \end{aligned}$$

Para la 1ª integral se tiene, con $1+t=x$: $B_1 = \int_{0,2}^{\infty} \frac{\cos(x-1) dx}{x} =$

$$= \cos 1 \int_{0,2}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + \operatorname{sen} 1 \int_{0,2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = 0,5403023059(1,0422055957) + 0,8414709848(1,3712402383) = 1,7169649603.$$

La 2ª integral: $B_2 = \int_0^{0,8} \frac{1+t}{1+t^2} \cos t \cdot dt$, se puede calcular mediante la fórmula de N-C para 6 divisiones aplicada 4 veces sobre 24 divisiones de amplitud $h = 0,033$, y completando con la fórmula de Simpson sobre el intervalo residual $2h' = 0,008$. El error de la 1ª fórmula es

$e \approx \frac{-9h^9}{1400} f^{(9)}(\xi)$, y tomando $\xi = 0,4$ la (5) de la sección 3 del §9 da: $f^{(9)}(0,4) = -30108$, con lo cual resulta $e \approx 9 \cdot 10^{-12}$ para seis divisiones, y $2,6 \cdot 10^{-11}$ para 24 divisiones. El error de la 2ª fórmula es mucho menor.

A continuación se desarrolla el cálculo:

t	cos t	$\frac{1+t}{1+t^2} \cos t$	t	cos t	$\frac{1+t}{1+t^2} \cos t$
0	0	1	0,462	0,895162810	1,078523630
0,033	0,999455549	1,031314480	0,495	0,879968710	1,056648033
0,066	0,997822790	1,059065803	0,528	0,863316411	1,032161393
0,099	0,995103501	1,083004223	0,561	0,846723501	1,005335265
0,132	0,991300642	1,102934791	0,594	0,828708593	0,976432758
0,165	0,986413355	1,118720225	0,627	0,809791304	0,945734711
0,198	0,980461956	1,130281853	0,660	0,789992231	0,913476667
0,231	0,973437931	1,137597689	0,693	0,769332936	0,879906462
0,264	0,965353928	1,140704803	0,726	0,747835912	0,845252485
0,297	0,956218742	1,139685223	0,759	0,725524570	0,809728510
0,330	0,946042344	1,134670630	0,792	0,702423202	0,773532984
0,363	0,934835791	1,125831492	0,796	0,699570552	0,769103965
0,396	0,922611295	1,113370983	0,800	0,696706709	0,764678095
0,429	0,909382166	1,097512679			

Aplicando 4 veces la fórmula $A = \frac{0,033}{140} [41(y_0 + y_6) + 216(y_1 + y_5) + 27(y_2 + y_4) + 272y_3]$ resulta: $A = 0,8200653156$. Para el intervalo residual se tiene:

$$A' = \frac{0,004}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = 0,0061528626, \text{ y por tanto resulta:}$$

$$B_2 = A + A' = 0,8262181782.$$

6º) Cálculo de la 3ª integral - En virtud ~~de la fórmula~~ del desarrollo establecido en la sección 3 del §9 se tiene:

$$B_3 = \int_0^{3\pi/2} \frac{t-1}{1+t^2} \cos t \cdot dt = \left[\operatorname{Chl} \cdot (P-Q) - \operatorname{Shl} \cdot (P'-Q') \right]_0^{3\pi/2}.$$

Para $t = \frac{3\pi}{2}$ se puede

utilizar parte de los valores calculados en los cuadros 1 y 2, pues subsisten los valores de r y ϕ . Recordemos que

$$\begin{cases} P-Q = \log_e r - \phi - \left[\frac{r^2 \sqrt{2}}{2!2} \operatorname{sen}(2\phi - 45^\circ) + \frac{r^4 \sqrt{2}}{4!4} \operatorname{sen}(4\phi - 45^\circ) + \dots \right] = S_1 \\ P'-Q' = -\sqrt{2} \left[r \cdot \operatorname{sen}(\phi - 45^\circ) + \frac{r^3}{3!3} \operatorname{sen}(3\phi - 45^\circ) + \frac{r^5}{5!5} \operatorname{sen}(5\phi - 45^\circ) + \dots \right] = S_2 \end{cases}$$

Sustituyendo en los cuadros 1 y 2 los cosenos por los senos de los mismos ángulos,^(A) resultan los cuadros siguientes:

CUADRO Nº 5

CUADRO Nº 6

n	$\text{sen}(n\psi - 45^\circ) = s_n$	$\frac{r^n \sqrt{2}}{n!n} \cdot s_n$	n	$s_n = \text{sen}(n\psi - 45^\circ)$	$\frac{r^n \sqrt{2}}{n!n} \cdot s_n$
2	0,9333402063586	7,657846965305	1	0,5449198470804	0,770633032147
4	-0,9986937410953	-7,923219200077	3	-0,1574266168928	-0,287033348336
6	0,8919168821608	3,649141811852	5	-0,2572014024770	-0,326482933287
8	-0,6314000510076	-0,802889739244	7	0,6274969231969	0,314364262922
10	0,2620521491100	0,068738207116	9	-0,8896342442248	-0,111728474171
12	0,152464288858	0,005859156950	11	0,9984299792022	0,021644258748
14	-0,54070126774	-0,002271004064	13	-0,9351316455674	-0,002551727505
16	0,83574044306	0,296989062	15	0,7106496405855	0,185721243
18	-0,926727420	-0,22627634	17	-0,36367671	-0,7154951
20	0,96763755	0,1274060	19	-0,0459813	-0,54923
22	-0,721761	-0,47003	21	0,447713	0,25734
24	0,46114	0,1068	23	-0,77226	-0,1931
26	-0,061	-0,5	25	0,964	0,86
28	-0,35	-0,1	27	-0,99	-0,3

Resulta: $S_1 = \log_e r - \psi - 2,653420777885 = -2,442953887015$ y
 $\text{Chl.}(P-Q) = -3,76967483480$; $S_2 = -r(0,379022612773) = -1,825874704721$
 y $\text{Shl.}(P'-Q') = -2,14577013243$. Por tanto, en el límite superior de la integral se obtiene el valor $-1,62390470237$.

Hay que repetir estos cálculos para $t=0 \therefore r=1$, $\psi=0$. Se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} P-Q &= \frac{1}{2!2} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{6!6} + \dots = 0,260651276079 = S_1 \\ P'-Q'-1 &= \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} + \frac{1}{7!7} + \dots = 1,057250875376 = S_2 \end{aligned} \right.$$

$\text{Chl.}S = 0,40220593656$; $\text{Shl.}S_2 = 1,24248249072$. En el límite inferior resulta el valor $-0,84027655416$, y finalmente: $B_3 = -0,78362814820$.

7) Cálculo de la 4ª integral: $B_4 = \int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{t-1}{1+t^2} \cos t \cdot dt$ - Anteriormente se obtuvo: $\int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = 0,0363719571$, $\int_{3\pi/2}^{\infty} \frac{t \cdot \cos t}{1+t^2} dt = 0,1917226700$, y por tanto: $B_4 = 0,1553507129$.

8) Resultado final - Reuniendo estos cuatro resultados se obtiene finalmente: $Y_1 = \frac{1}{2}(-B_1 - B_2 + B_3 + B_4) = -1,5857302869$, y por tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t \cdot dt}{(t-1)(1+t^2)} = J + Y_1 + Y_2 = -1,8996432068. \text{ El valor numérico de la con-}$$

jugada de $\frac{\cos t}{1+t^2}$ para $x=1$ resulta ser, entonces:

$\frac{1}{\pi}(-1,8996432068) = -0,60467521295$. El valor exacto es: $-0,6046752129897$
 El error cometido en el cálculo anterior es, pues: $4 \cdot 10^{-11}$

§ 11 - Conjugada de la función de Bessel $J_0(t)$

La transformada de Hilbert de esta función es $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(t)}{t-x} dt =$
 $= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(x+u) \frac{du}{u}$, y teniendo en cuenta la fórmula de adición⁽¹⁾ de la J_0 :
 $J_0(x+u) = J_0(x) \cdot J_0(u) + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n J_n(x) \cdot J_n(u)$, resulta:

$$g(x) = \frac{-4}{\pi} \sum_0^{\infty} J_{2n+1}(x) \int_0^{\infty} J_{2n+1}(u) \frac{du}{u} = \frac{-4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{J_{2n+1}(x)}{2n+1} \quad (1)$$
, de acuerdo con una fórmula debida a Weber⁽²⁾.

También se puede obtener la transformada mediante la fórmula análoga a la de la integral de Fourier (ver § 1):

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \text{sen } u(t-x) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(t) \cdot (\text{sen } ut \cdot \text{cos } ux - \text{cos } ut \cdot \text{sen } ux) dt = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen } ux \cdot du \int_0^{\infty} J_0(t) \cdot \text{cos } ut \cdot dt$$
. La última integral es uno de los "factores discontinuos de Weber"⁽³⁾, y vale $(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}$ si es $0 < u < 1$, ∞ si es $u=1$, y 0 si es $u > 1$. Por tanto resulta:

$$g(x) = \frac{-2}{\pi} \int_0^1 \frac{\text{sen } ux}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x \cdot \text{sen } t) \cdot dt = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x \cdot \text{sen } t - \frac{x^3}{3!} \text{sen}^3 t + \frac{x^5}{5!} \text{sen}^5 t - \dots \right] dt = \frac{-2}{\pi} \left[x - \frac{x^3}{1 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2} - \dots \right] \quad (2)$$
. Esta fórmula

es conveniente para x pequeño, y la (1) para x grande.

Aplicando el método expuesto en el § 3 para la determinación numérica de la conjugada, se empieza por calcular la expresión

$$E = 2h \cdot f'(x) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \frac{2h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots, \text{ siendo } f(x) = J_0(x).$$

Las derivadas sucesivas de $J_0(x)$ se obtienen con la fórmula

$$2^r J_0^{(r)}(x) = J_{-r} - \binom{r}{1} J_{-r+2} + \binom{r}{2} J_{-r+4} - \binom{r}{3} J_{-r+6} + \dots \quad (3)$$
, que da: $J_0' = -J_1$;

$$J_0'' = \frac{1}{4}(3J_1 - J_3); \quad J_0''' = \frac{1}{16}(-10J_1 + 5J_3 - J_5); \quad J_0^{(4)} = \frac{1}{64}(35J_1 - 21J_3 + 7J_5 - J_7);$$

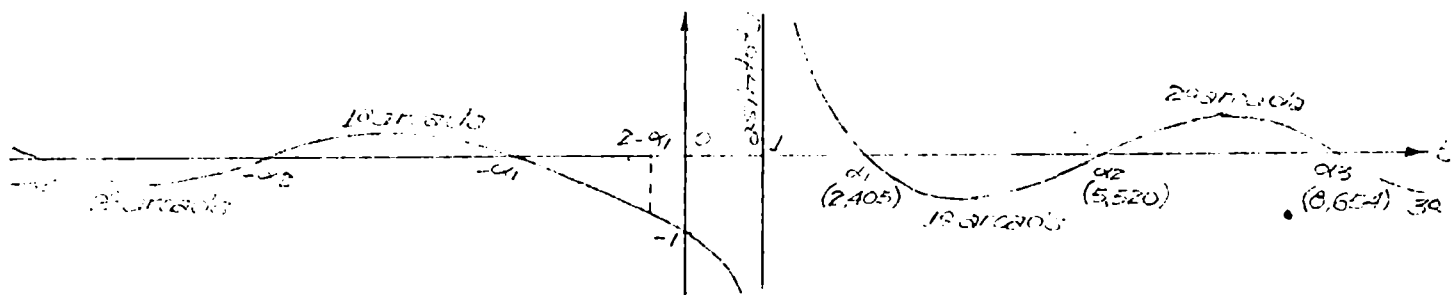
$$J_0^{(5)} = \frac{1}{256}(-126J_1 + 84J_3 - 36J_5 + 9J_7 - J_9); \quad J_0^{(6)} = \frac{1}{1024}(462J_1 - 330J_3 + 165J_5 - 55J_7 + 11J_9 - J_{11})$$

Como para $n \geq 1$ y x real es $|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⁽⁴⁾, se ve que

$$|J_0^{(r)}(x)| < \frac{1}{2^r} \left[1 + \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \dots + \binom{r}{r} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 2^r}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
, y por tanto la serie que

da E converge para cualquier valor de h .

Efectuaré el cálculo de la conjugada para $x=1$. La gráfica de la función $\frac{J_0(t)}{t-1}$ encabeza la pág.48.



Siendo $\alpha_1 = 2,4048256$ la primera raíz de $J_0(t)$, se puede tomar $h = \alpha_1 - 1 = 1,4048256$. Se tiene, para $x=1$:

$J_1 = 0,440050586$	$J_1' = -0,440050586$	$-1,23638866$
$J_3 = 0,019563354$	$J_3'' = 0,325147101$	$0,10016237$
$J_5 = 0,0^3 249758$	$J_5''' = -0,268933678$	$-0,00490497$
$J_7 = 0,0^3 1502$	$J_7^{(4)} = 0,234260732$	14340
$J_9 = 0,0^8 5$	$J_9^{(5)} = -0,210203242$	274
$J_{11} = 0,0^{10} 1$	$J_{11}^{(6)} = 0,192274015$	4
		$E = -1,14099056$

El último término de E es el que contiene h^6 , y el error que se comete es $\approx \frac{2h^6 |J_0^{(6)}|}{13113} \approx 4 \cdot 10^{-10}$

Ahora hay que calcular $\int_{\alpha_n}^{\infty} \frac{J_0(t)}{t-1} dt$, que se descompone en la suma de las áreas positivas y negativas de las infinitas arcadas indicadas en la figura. La tablilla siguiente contiene los primeros 40 ceros de $J_0(x)$. Se

los puede calcular con la fórmula $\alpha_n^{(j)} = \left(n\pi - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{8\alpha} - \frac{31}{384\alpha^3} + \frac{3779}{15360\alpha^5} - \dots$

Se ve que $\alpha_{n+1} - \alpha_n \approx \pi - \frac{2}{\pi(4n-1)(4n-3)}$

n	α_n	10	30,6346066	21	65,1899648	32	99,7468199
1	2,4048256	11	33,7758202	22	68,3314693	33	102,8883743
2	5,5200781	12	36,9170984	23	71,4729816	34	106,0299309
3	8,6537279	13	40,0584258	24	74,6145006	35	109,1714896
4	11,7915344	14	43,1997917	25	77,7560256	36	112,3130503
5	14,9309177	15	46,3411884	26	80,8975569	37	115,4546127
6	18,0710640	16	49,4826099	27	84,0390908	38	118,5961766
7	21,2116366	17	52,6240518	28	87,1806298	39	121,7377421
8	24,3524715	18	55,7655108	29	90,3221726	40	124,8793089
9	27,4934791	19	58,9069839	30	93,4637188		
		20	62,0484692	31	96,6052680		

Para calcular el área de una arcada se puede aplicar uno de los siguientes procedimientos:

- 1º) Integración aproximada mediante la fórmula de Newton-Cotes u otras.
- 2º) Desarrollo por la fórmula de Taylor en el punto medio c del intervalo e integración de la serie:

$$\int_a^b \frac{J_0(t)}{t-a} dt = \int_{-h}^{+h} \frac{J_0(c-x)}{c-a+x} dx = \int_{-h}^{+h} \left[J_0(c) + x J_0'(c) + \frac{x^2}{2!} J_0''(c) + \dots \right] \frac{dx}{b+x}$$

La serie converge para todo valor de x , pues se ha visto que $|J_0^{(n)}(c)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

⁴⁾ Watson, pág. 505

Se tiene: $h \cong \frac{1}{2}\pi \cong 1,571$. El cálculo de las derivadas sucesivas de $J_0(x)$ no ofrece dificultad.

3º) Desarrollo mediante la fórmula de adición e integración de la serie:

$$\int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{J_0(t) dt}{t-a} = \int_{\beta}^{\beta'} \frac{J_0(a+x)}{x} dx = \int_{\beta}^{\beta'} \left[J_0(a) \cdot J_0(x) + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n J_n(a) \cdot J_n(x) \right] \frac{dx}{x} \quad (4)$$

Por ser $\left| J_n(x) \right| \leq \left(\frac{x}{2} \right)^n \frac{e^{x^2}}{n!}$ para $n \geq 0$ (1), la serie converge para todo x y a .

Para el cálculo de las integrales $\int \frac{J_n(x)}{x} dx$ se aplican las fórmulas de recurrencia $\frac{n}{x} J_n \cong J_{n-1} - J_{n+1}$, $J_{n+1} = J_{n-1} - 2J_n'$. Las integrales $\int J_0(x) \cdot dx$ y $\int \frac{J_0(x)}{x} dx$ no se pueden expresar en forma finita, pero están tabuladas para ciertos intervalos; también se las puede calcular mediante apropiados desarrollos en serie. He aquí los resultados:

$$\begin{aligned} \int \frac{J_1(x)}{x} dx &= -J_1(x) + \int J_0(x) \cdot dx & \int \frac{J_2(x)}{x} dx &= -\frac{J_1(x)}{x} \\ \int \frac{J_3(x)}{x} dx &= \frac{1}{3} \int J_0(x) \cdot dx - \frac{1}{3} (2J_1 + J_3) & \int \frac{J_4(x)}{x} dx &= -\frac{1}{4} (J_0 + 2J_2 + J_4) \\ \int \frac{J_5(x)}{x} dx &= -\frac{1}{5} (2J_1 + 2J_3 + J_5) + \frac{1}{5} \int J_0(x) \cdot dx & \int \frac{J_6(x)}{x} dx &= -\frac{1}{6} (J_0 + 2J_2 + 2J_4 + J_6) \\ \int \frac{J_7(x)}{x} dx &= -\frac{1}{7} (2J_1 + 2J_3 + 2J_5 + J_7) + \frac{1}{7} \int J_0(x) \cdot dx, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Estas fórmulas permiten obtener el valor de $\int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{J_0(t) dt}{t-1}$ sin considerar cada arcada por separado.

4º) Aplicación de fórmulas aproximadas análogas a las establecidas en el §7. Así, con tres ordenadas en los puntos inicial, medio y final del intervalo de una arcada, se tiene:

$$F = \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{J_0(t) dt}{t-a} = \int_{-h}^{+h} \frac{J_0(c-x)}{c-a+x} dx = \int_{-h}^{+h} J_0(c+x) \cdot f(x) \cdot dx \cong \int_{-h}^{+h} \left[y_1 + \frac{x}{2h} (y_2 - y_0) + \frac{x^2}{2h^2} (y_2 - 2y_1 + y_0) \right] J_0(c+x) dx = F', \text{ o bien:}$$

$F' = \int_{-h}^{+h} (A+Bx+Cx^2) J_0(c+x) dx$ (5). La semi-amplitud h del intervalo difiere poco de $\frac{1}{2}\pi$ y tiende a este valor cuando $c \rightarrow \infty$. Teniendo en cuenta que $\int J_0(t) \cdot dt$ está tabulada, que $\int t \cdot J_0(t) \cdot dt = \int J_1(t)$ y que

$$\int t^2 J_0(t) \cdot dt = t^2 J_1(t) + t \cdot J_0(t) - \int J_0(t) \cdot dt, \text{ resulta:}$$

$$P = \int_{-h}^{+h} J_0(c+x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\alpha'} J_0(t) \cdot dt; \quad Q = \int_{-h}^{+h} x \cdot J_0(c+x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\alpha'} (t-c) J_0(t) \cdot dt = \underbrace{\int_{\alpha}^{\alpha'} t \cdot J_0(t) \cdot dt}_{Q'} - c \underbrace{\int_{\alpha}^{\alpha'} J_0(t) \cdot dt}_{P'} = Q' - cP';$$

$$R = \int_{-h}^{+h} x^2 J_0(c+x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\alpha'} (t-c)^2 J_0(t) \cdot dt =$$

(1)

$$= \int_{\alpha}^{\alpha'} (t^2 - 2ct + c^2) J(t) dt = \left[t^2 J_1(t) \right]_{\alpha}^{\alpha'} - \left[2t J_0(t) \right]_{\alpha}^{\alpha'} - \int_{\alpha}^{\alpha'} J_0(t) dt - 2c \left[t J_1(t) \right]_{\alpha}^{\alpha'} + c^2 \int_{\alpha}^{\alpha'} J_0(t) dt = R' - 2cQ' + (c^2 - 1)P, \text{ y por consiguiente:}$$

$$F' = AP + BQ + CR = Py_1 + Q \frac{y_2 - y_0}{2h} + R \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \left(\frac{R}{2h^2} - \frac{Q}{2h} \right) y_0 + \left(P - \frac{R}{h^2} \right) y_1 + \left(\frac{R}{2h^2} + \frac{Q}{2h} \right) y_2 \quad (6)$$

Los coeficientes de y_0 e y_2 no son iguales porque la arcada de $J_0(t)$ no es simétrica con respecto a la ordenada central. El error que afecta a esta fórmula se determina así:

$$F' = A_0(y_1 - hf_1' + \frac{h^2}{2} f_1'' - \dots) + A_1 y_1 + A_2(y_1 + hf_1' + \frac{h^2}{2} f_1'' + \dots) = (A_0 + A_1 + A_2) y_1 + (A_2 - A_0) hf_1' + (A_2 + A_0) \frac{h^2}{2!} f_1'' + (A_2 - A_0) \frac{h^3}{3!} f_1''' + (A_2 + A_0) \frac{h^4}{4!} f_1^{IV} + \dots = Py_1 + Qf_1' + \frac{1}{2} Rf_1'' + \frac{h^2}{6} Qf_1''' + \frac{h^2}{24} Rf_1^{IV} + \dots$$

$$F = \int_{-h}^{+h} f(x) \cdot J_0(c+x) \cdot dx = \int_{-h}^{+h} \left[y_1 + xf_1' + \frac{x^2}{2} f_1'' + \frac{x^3}{6} f_1''' + \frac{x^4}{24} f_1^{IV} + \dots \right] J_0(c+x) \cdot dx = Py_1 + Qf_1' + \frac{1}{2} Rf_1'' + \frac{S}{6} f_1''' + \dots, \text{ siendo } S = \int_{-h}^{+h} x^3 J_0(c+x) dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\alpha'} (t-c)^3 J_0(t) dt. \text{ Pero } \int t^3 J_0(t) dt = t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t) = t^3 J_1 - 4t J_2 + 2t^2 J_0$$

$$\text{y } \int_{\alpha}^{\alpha'} t^3 J_0(t) dt = \left[t(t^2 - 4) J_1 \right]_{\alpha}^{\alpha'} = \left[t^3 J_1 \right]_{\alpha}^{\alpha'} - 4Q' = S' - 4Q', \text{ y por tanto:}$$

$$S = (S' - 4Q') - 3c(R' - P) + 3c^2 Q' - c^3 P = S' - 3cR' + (3c^2 - 4)Q' + (3c - c^3)P$$

$$\text{Entonces el error buscado será: } e \approx \frac{1}{6} (S - h^2 c) f_1''' = \frac{1}{6} H \cdot f_1'''(c) \quad (7)$$

$$\text{con } H = \left[\left[t^2 + 3c(c-t) - (h^2 + 4) \right] t J_1(t) - c(\alpha\alpha' - 3) \int_{\alpha}^{\alpha'} J_0(t) dt \right]_{\alpha}^{\alpha'}$$

Ejemplo - Evaluando con la (6) la integral $\int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{J_0(t)}{t-1} dt$, siendo

$\alpha = 46,34118237167$, $\alpha' = 49,48260939740$, el error cometido se calcula as

$c = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = 47,9118991345$; $2h = 3,1414215257$; $\alpha\alpha' = 2293,082946377$;

$2c^2 = 4591,1001573554$; $J_1(\alpha) = 0,11721119889$; $J_1(\alpha') = -0,11342919262$;

$\int_{\alpha}^{\alpha'} J_0(t) dt = -0,2305398773$; $H = -0,00198$; $\frac{1}{6} f_1''' = \frac{-1}{(c-1)^2} = -2,065 \cdot 10^{-7}$, y fi

nalmente: $e \approx 4,1 \cdot 10^{-10}$

Hé aquí el cálculo de F' , dada por la (6):

$P = -0,2305398773$; $c^2 - 1 = 2294,5500726774$; $(c^2 - 1)P = -528,98529360$

$$\begin{cases} \alpha' J_1(\alpha') = -5,6127724894 & \alpha'^2 J_1(\alpha') = -277,73463154 & 1/2h = 0,31832722601 \\ \alpha J_1(\alpha) = 5,4317062470 & \alpha^2 J_1(\alpha) = 251,71172237 & 1/2h = 0,20266444564 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Q' &= -11,0444787364 & R' &= -529,44635391 & R &= -0,10774509 \\ -cP &= 11,045603348 & -2cQ' &= 1058,89270782 & R/2h^2 &= -0,021836099 \\ Q &= 0,001124612 & R'-2cQ' &= 528,87754851 & Q/2h &= 0,0003579946 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_0 = -0,022194093 \\ A_1 = -0,186867679 \\ A_2 = -0,021478104 \end{cases} \begin{cases} y_0 = 0,0220550020 \\ y_1 = 0,0213165533 \\ y_2 = 0,0206259523 \end{cases} \quad \text{Resultado: } F' = -0,0049158720 \pm 4$$

Evaluación del resto - Se trata de evaluar o acotar $R = \int_x^\infty \frac{J(t)}{t-a} dt$. Mediante integración por partes reiterada y aplicando la fórmula

$\int t^n J_{n-1} dt = t^n J_n$, se obtiene fácilmente para R un desarrollo en serie útil para valores grandes de x . En efecto:

$$\int \frac{J_0 dt}{t-a} = \int \frac{t J_0 dt}{t(t-a)} = \int \frac{d(tJ_1)}{t(t-a)} = \frac{J_1}{t-a} + \int t J_1 \left[\frac{1}{(t-a)^2} - \frac{1}{t^2} \right] dt. \text{ La última integral se transforma así: } \int \left[\frac{1}{t(t-a)^2} - \frac{1}{t^3} \right] d(t^2 J_2) = J_2 \left[\frac{t}{(t-a)^2} - \frac{1}{t} \right] + \int t^2 J_2 \left[\frac{2}{t(t-a)^3} + \frac{1}{t^2(t-a)^2} - \frac{3}{t^4} \right] dt, \text{ etc.}$$

Aplicando los límites de integración y haciendo $\frac{x}{x-a} = r$, resulta el desarrollo buscado:

$$\int_x^\infty \frac{J_0(t)}{t-a} dt = \frac{J_1}{x-a} + \frac{J_2}{x} (r^2 - 1) + \frac{J_3}{x^2} (2r^3 + r^2 - 3) + \frac{J_4}{x^3} (6r^4 + 6r^3 + 3r^2 - 3.5) + \frac{J_5}{x^4} (24r^5 + 36r^4 + 30r^3 + 15r^2 - 3.5.7) + \frac{J_6}{x^5} (120r^6 + 240r^5 + 270r^4 + 210r^3 + 105r^2 - 3.5.7.9) + \frac{J_7}{x^6} (720r^7 + 1800r^6 + 2520r^5 + 2520r^4 + 1890r^3 + 945r^2 - 3.5.7.9.11) + \frac{J_8}{x^7} (5040r^8 + 16120r^7 + 25200r^6 + 30240r^5 + 28350r^4 + 20790r^3 + 10395r^2 - 3.5 \dots 13) + \dots \quad (8)$$

Dentro de cada paréntesis la suma de coeficientes es cero, por lo cual, para $x \rightarrow \infty$ (o sea $r \rightarrow 1$) el valor del correspondiente polinomio tiende a cero. Considerando, por ejemplo, el 6º término del desarrollo, se lo puede escribir así:

$$\frac{J_6}{x^5} \left[120(r^6 - 1) + 240(r^5 - 1) + \dots + 105(r^2 - 1) \right] = \frac{J_6}{x^5} (r-1) \left[120(r^5 + r^4 + \dots + 1) + 240(r^4 + r^3 + \dots + 1) + \dots + 105(r-1) \right] = T_6. \text{ Si es } r > 1 \text{ se verifica que } |T_6| < \frac{|J_6|}{x^5} \cdot (r-1) 6r^5 (120 + 240 + \dots + 105) = \frac{6|J_6|}{(x-a)^5} (r-1) (3.5.7.9),$$

$$\text{y en general: } |T_n| < \frac{n|J_n|}{(x-a)^{n-1}} (r-1) [3.5.7 \dots (2n-3)] <$$

$$< \frac{n(r-1)}{(x-a)^{n-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{e^{x^2}}{n!} [3.5.7 \dots (2n-3)], \text{ término general de una serie para la}$$

cual el cociente de d'Alembert es $\frac{x}{x-a} \frac{2n-3}{2n-2}$. Tal serie mayorante diverge aunque con suma lentitud, y el desarrollo (8) puede ser convergente, aunque esto no es seguro. Si es $r < 1$ se tiene:

$|T_n| < 3.5.7 \dots (2n-3) \frac{|J_n|}{x^{n-1}} < 3.5.7 \dots (2n-3) \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{e^{x^2}}{n! n x^{n-1}}$, y el cociente de d'Alembert es ahora $\frac{2n-3}{2n}$; aplicando el criterio de Raabe se ve que la serie mayorante converge, y por tanto también la (8).

Cálculo de la conjugada para x-1 - Es evidente la conveniencia del tercer procedimiento. Se tiene, siendo $\alpha_1 = 2,4048256$ y $\beta = 1,4048256$:

$$Y_1 = \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{J_0(t)}{t-1} dt = \int_{\beta}^{\infty} J_0(x+1) \frac{dx}{x} = \int_{\beta}^{\infty} \left[J_0(1)J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(1) \cdot J_n(x) \right] \frac{dx}{x}$$

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{J_0(x)}{x} dx = 0,0080393; \quad \int_{\beta}^{\infty} J_0(x) dx = -0,19023115 = B. \text{ Poniendo}$$

$$I_n = \int_{\beta}^{\infty} \frac{J_n(x)}{x} dx, \text{ se tiene:}$$

$J_0(1) = 0,765197687$	$J_0(\beta) = 0,56423780$	$I_1 = J_1(\beta) + B = 0,36257938$
$J_1(1) = 0,440050586$	$J_1(\beta) = 0,54281053$	$I_2 = J_1(\beta)/\beta = 0,38638998$
$J_2(1) = 0,114903485$	$J_2(\beta) = 0,20854214$	$I_3 = 0,31545579$
$J_3(1) = 0,019563354$	$J_3(\beta) = 0,05097744$	$I_4 = 0,24762606$
$J_4(1) = 0,002476639$	$J_4(\beta) = 0,00918215$	$I_5 = 0,19973131$
$J_5(1) = 0,0^3 \ 249788$	$J_5(\beta) = 0,00131176$	$I_6 = 0,16664030$
$J_6(1) = 0,0^4 \ 20938$	$J_6(\beta) = 0,0^3 \ 15541$	$I_7 = 0,14225486$
$J_7(1) = 0,0^5 \ 1502$	$J_7(\beta) = 0,0^4 \ 1573$	$I_8 = 0,12499982$
$J_8(1) = 0,0^6 \ 94$	$J_8(\beta) = 0,0^5 \ 139$	$I_9 = 0,$
$J_9(1) = 0,0^8 \ 5$	$J_9(\beta) = 0,0^6 \ 11$	

Poniendo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(1) \int_{\beta}^{\infty} \frac{J_n(x)}{x} dx = -M + N$, resulta: $\begin{cases} M = 0,16137422 \\ N = 0,04501434 \end{cases}$

Sea, además: $J_0(1) \int_{\beta}^{\infty} \frac{J_0(x)}{x} dx = P = 0,0061516$. Entonces:

$$Y_1 = P + 2(-M + N) = P - 0,23271976. \text{ Análogamente:}$$

$$Y_2 = \int_{-\infty}^{2-\alpha_1} \frac{J_0(t)}{t-1} dt = - \int_{\alpha_1-2}^{\infty} \frac{J_0(t)}{t+1} dt = - \int_{\beta}^{\infty} J_0(x-1) \frac{dx}{x} = - \int_{\beta}^{\infty} \left[J_0(1) \cdot J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(1) \cdot J_n(x) \right] \frac{dx}{x} = -P - 2(M+N) = -P - 0,41277712.$$

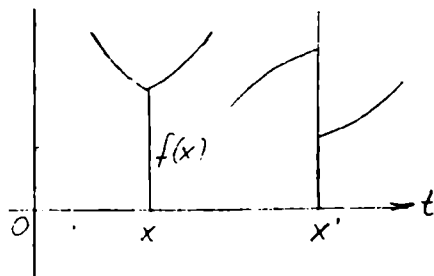
Para la conjugada resulta: $g(1) = \frac{1}{\pi} (B + Y_1 + Y_2) = \frac{1}{\pi} (-1,7864874) = \boxed{-0,56865660}$, mientras que el valor dado por la serie (2) es $g(1) = \boxed{-0,56865662705}$.

Nota sobre la tabulación de la función conjugada

Los ejemplos anteriores muestran que es posible calcular, en general con la aproximación que se quiera, el valor numérico de $g(x)$ para un x dado. Pero también muestran que el cálculo es muy laborioso si la aproximación requerida es grande (por ej. 7 a 10 cifras decimales), y así la tabulación de $g(x)$ con un pequeño Δx será una tarea impropia y sujeta a errores difíciles de evitar. El problema se simplifica mucho si se conoce la ecuación diferencial de $g(x)$, pues la tabulación se reduce a la determinación numérica de la curva integral, para lo cual basta conocer valores de $g(x)$ y sus derivadas en puntos espaciados (ver Apéndice, pág. 71). Si la aproximación requerida es de pocas cifras decimales, el análisis gráfico (ver §13) y los procedimientos prácticos (§14) resuelven el problema satisfactoriamente.

§ 12 - Caso en que no existen derivadas

Si para $t=x$ la función $f(t)$ carece de derivada o ésta se hace infinita, la fórmula 15 del §3 no es aplicable, y se trata de ver en qué casos existe el valor principal de $\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt$.



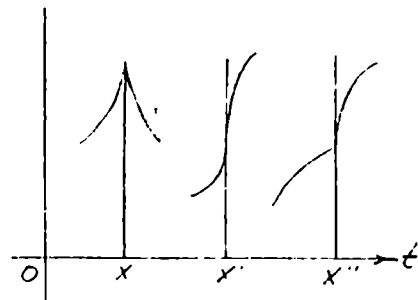
1º) Si en $t=x$ la curva $y=f(t)$ presenta un punto anguloso, no siendo vertical cada semitangente, la integral $\int_{x-h}^{x+h} \frac{f(t)}{t-x} dt$ existe. En efecto, con

$t=x+u$ y siendo $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ las derivadas a la derecha y a la izquierda, se tiene: $f(x+u) = f(x) + u.f'_1(x) + \dots$,

$$f(x-u) = f(x) - u.f'_2(x) + \dots, \quad \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} = [f'_1(x) + f'_2(x)] + \dots$$

Agregar (*)

2º) Si en $t=x$ la curva $y=f(t)$ presenta un punto cuspidal, o un punto de inflexión con tangente vertical, o un punto anguloso con una semitangente vertical, el valor principal en cuestión existe,

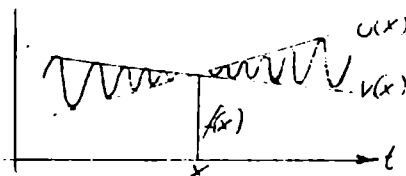


pues a la derecha o a la izquierda de x debe ser $f(t) = f(x+u) = f(x) + |u|^r$, con $0 < r < 1$, y la integral $\int_0^h \frac{u^r}{u} du = \int_0^h u^{r-1} du$ existe. Por consiguiente,

si en un intervalo (a,b) la función satisface la condición de Lipschitz $|f(x') - f(x)| < A|x' - x|^r$, con $0 < r < 1$, existe el valor principal de $\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt$ para todo x del intervalo.

3º) Si el punto $t=x$ es de empalme de dos curvas distintas sin ser anguloso, la $f(t)$ y la $f'(t)$ serán continuas, pero en general no lo será $f''(t)$. Fácilmente se deduce que el V.P. existe, y lo mismo sucederá si la primera derivada discontinua es $f^{(n)}(t)$.

4º) Consideremos la función $f(t) = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) \cdot \text{sen} \frac{\pi}{t-x}$, siendo $u(t)$ y $v(t)$ continuas y derivables en un intervalo (a,b) que contiene a $t=x$, donde es $u(x) = v(x)$. En un entorno de x la curva $y=f(t)$ presenta infinitas oscilaciones, y puede suceder que en ese punto no exista la derivada $f'(t)$ por carecer de límite

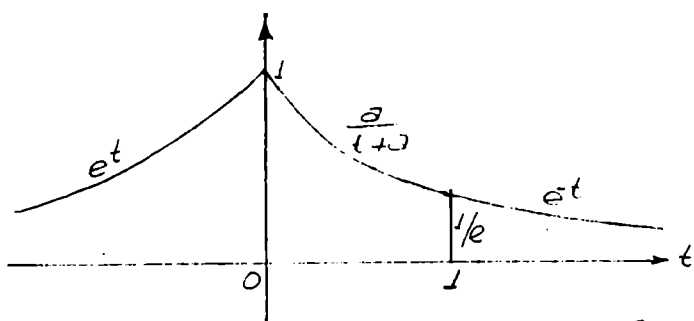


el cociente incremental $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, que en tal caso oscilará entre los cocientes $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ y $\frac{v(x+h) - v(x)}{h}$. Si se verifican las condiciones $|u(x+h) - u(x)| \leq A|h|^r$, $|v(x+h) - v(x)| \leq B|h|^{r'}$, con $r > 0$, $r' > 0$, se ve inmediatamente que el V.P. en cuestión existe.

Ej. 1º: sea $f(t) = e^t$ para $t \leq 0$, $f(t) = \frac{a}{t+a}$ ($a = \frac{1}{e-1}$) para $0 \leq t \leq 1$, y $f(t) = e^{-t}$ para $t \geq 1$. La gráfica (ver pág. 53) presenta puntos angulosos en $t=0$ y $t=1$. En $t=0$ es: $D^- = 1$ y $D^+ = 1 - e$; en $t=1$ es $D^- = \frac{1-e}{e^2}$ y $D^+ = -1/e$. Calcularé $g(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-1} dt$, que se descompone así:

(*) Si $f(t)$ presenta un salto en $t=x'$, se ve que no existe el V.P. considerado.

$$\pi g(1) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{t-1} dt + \int_0^{1-h} \frac{a}{t+a} \frac{dt}{t-1} + \int_{1-h}^{1+h} \frac{f(t)}{t-1} dt + \int_{1+h}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-1} dt = Y_1 + Y_2 + J + Y_3$$



El cálculo de la integral singular J exige el empleo de las derivadas sucesivas a la derecha y a la izquierda de $f(t)$ en $t=1$, que son:

$$D_1^{(n)}(1) = (-1)^n e^{-1}, \quad D_2^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{n! a}{(1-a)^{n+1}}$$

Por ser: $f(x+u) = f(x) + u f_1'(x) + \frac{u^2}{2!} f_2''(x) + \dots$; $f(x-u) = f(x) - u f_1'(x) + \dots$

$$\text{y } \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} = \left[f_1'(x) + f_1'(x) \right] + \frac{u}{2!} \left[f_2''(x) + f_2''(x) \right] + \frac{u^2}{3!} \left[f_3'''(x) + f_3'''(x) \right] + \dots =$$

$$= A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + \dots, \text{ resulta: } J = \int_0^h \left[f(x+u) - f(x-u) \right] \frac{du}{u} = A_1 h + A_2 \frac{h^2}{2} + A_3 \frac{h^3}{3} + \dots, \text{ e introduciendo valores numéricos:}$$

$$J = - \left[\frac{1}{e} + \frac{a}{(1+a)^2} \right] h + \left[\frac{1}{2!e} - \frac{a}{(1+a)^3} \right] \frac{h^2}{2} - \left[\frac{1}{3!e} + \frac{a}{(1+a)^4} \right] \frac{h^3}{3} + \dots =$$

$$= - \frac{1}{e} \left(h - \frac{h^2}{2! \cdot 2} + \frac{h^3}{3! \cdot 3} - \dots \right) - \frac{a}{1+a} \left[\frac{h}{1+a} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{1+a} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{1+a} \right)^3 + \dots \right] = - \frac{5}{e} +$$

$+ \frac{1}{e} \log \left(1 - \frac{e-1}{e} h \right)$. Esta serie converge para $h < \frac{e}{e-1} = 1,582\dots$. Tomando $h=1$ desaparece la integral Y_2 y resulta: $J = -\frac{5+1}{e} = -\frac{1}{e}(1,79659'959930) =$

$= -0,66093'206660\dots$ La Y_1 se calcula con las tablas de la función $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$. Se tiene: $\int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{t-1} dt = e \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^t}{t} dt = e(-0,21938'3934) =$
 $= -0,59634'7361$. Análogamente: $Y_3 = \int_2^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-1} dt = e^{-1} \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt =$
 $= e^{-1}(0,21938'3934) = 0,08070'68390$. Entonces para $g(1)$ resulta:
 $g(1) = \frac{1}{\pi}(-1,17657'2579) = -0,37451'46838$.

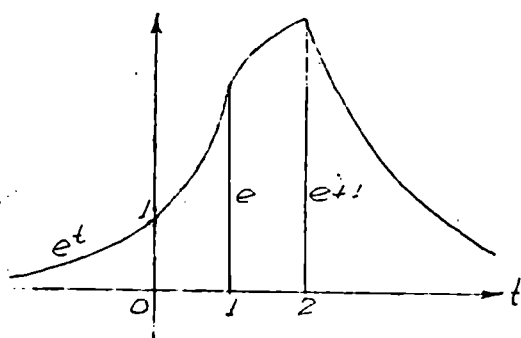
Ej. 2º: sea $f(t) = e^t$ para $-\infty < t \leq 1$, $f(t) = e + \sqrt{t-1}$ para $1 \leq t \leq 2$,
 $f(t) = (e+1)e^{2-t}$ para $2 \leq t < \infty$. La gráfica presenta puntos angulosos en $t=1$ y $t=2$. En $t=1$ es $D^- = e$, $D^+ = +\infty$; en $t=2$ es $D^- = 0,5$, $D^+ = -(e+1)$.

$$\text{Calcularé } g(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-1} dt. \text{ Se tiene: } \pi g(1) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{t-1} dt + \int_{1-h}^1 \frac{e^t - e}{t-1} dt +$$

$$+ \int_1^{1+h} \frac{\sqrt{t-1}}{t-1} dt + \int_{1+h}^2 \frac{e + \sqrt{t-1}}{t-1} dt + (e+1) \int_2^{\infty} \frac{e^{2-t}}{t-1} dt =$$

$$= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5. \text{ Para determinar } h \text{ hay que considerar } Y_2 = \int_{1-h}^1 \frac{e^t - e}{t-1} dt = e \int_0^h \frac{1 - e^{-u}}{u} du =$$

$$= e \left(h - \frac{h^2}{2! \cdot 2} + \frac{h^3}{3! \cdot 3} - \frac{h^4}{4! \cdot 4} + \dots \right), \text{ que converge}$$



para todo valor de h . Tomando $h=1$ la integral Y_1 desaparece y queda:

$$Y_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{t-1} dt = e \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^t}{t} dt = e(-0,21938'3934) = -0,59634'7361. \text{ Además:}$$

$$Y_2 = e(0,79659'959930) = 2,16538'22153 ; Y_3 = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = 2 ; Y_4 = (e+1) \int_2^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-1} dt =$$

$$= e(e+1) \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e(e+1)(0,21938'3934) = 2,21738'7555. \text{ Reuniendo estos resultados se obtiene finalmente: } g(1) = \frac{1}{\pi}(5,78642'2409) = 1,84187'5458.$$

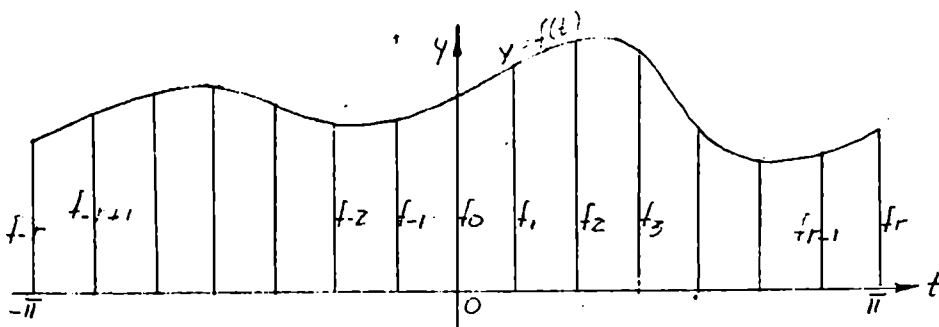
§ 13 - Empleo del análisis armónico

Sea $f(t)$ una función continua y acotada de período 2π , y sea

$$a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1) \text{ su desarrollo en serie de Fourier.}$$

La función conjugada $g(t)$ tiene como desarrollo la serie conjugada

$$a'_0 + \sum_1^{\infty} (-b_n \cos nt + a_n \sin nt) \quad (2), \text{ por lo cual si se efectúa el análisis armónico de la } f(t) \text{ será posible la síntesis de la } g(t). \text{ En esto consiste el método de Garrick y Faiman. Para aplicarlo se divide el intervalo } (-\pi, \pi) \text{ de la figura en } 2r \text{ partes iguales de amplitud } h = \frac{\pi}{r}; \text{ al punto de división } t = kh \text{ corresponde la ordenada } f_k \text{ de } f(t), \text{ y por la periodicidad: } f_{-r} = f_r. \text{ Por los extremos de las ordenadas se hace pasar un polinomio trigonométrico, que coincidirá aproximadamente con } f(t), \text{ y para fines prácticos se lo identifica con ésta:}$$



lo $(-\pi, \pi)$ de la figura en $2r$ partes iguales de amplitud $h = \frac{\pi}{r}$; al punto de división $t = kh$ corresponde la ordenada f_k de $f(t)$, y por la periodicidad:

$f_{-r} = f_r$. Por los extremos de las ordenadas se hace pasar un polinomio trigonométrico, que coincidirá aproximadamente con $f(t)$, y para fines prácticos se lo identifica con ésta:

$$f(t) = a_0 + \sum_1^r (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (3). \text{ Poniendo } a_n + ib_n = A_n,$$

$$a_n - ib_n = A_{-n}, \quad 2a_0 = A_0, \text{ se tiene: } f(t) = \frac{1}{2} \sum_{-r}^r A_n e^{int} \quad (4), \text{ y se trata de}$$

calcular los coeficientes A_n mediante los $2r$ valores $f_k = \frac{1}{2} \sum_{-r}^r A_n e^{-inkh}$, siendo $k = -r+1, -r+2, \dots, r-1, r$. Formando la suma

$$\sum_k f_k e^{imkh} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_n A_n e^{i(m-n)kh} = \frac{1}{2} \sum_n A_n B, \text{ se tiene: } B = \sum_k e^{i(m-n)kh} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 2r & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\text{y por tanto: } A_n = \frac{1}{r} \sum_k f_k e^{inkh} \quad (5). \text{ Entonces: } a_n = \frac{1}{r} \sum_k f_k \cos nkh \quad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{r} \sum_k f_k \sin nkh \quad (6'). \text{ La función conjugada es: } g(t) = \sum_1^r (a_n \sin nt -$$

$$- b_n \cos nt) = \frac{1}{2} \sum_n^r i A_n e^{-int} (\text{sg } n) \quad (7), \text{ indicando con } \text{sg } n \text{ el signo de } n \text{ y}$$

variando n de $-r$ a $+r$ con exclusión del cero.

$$\text{En particular, para } t=0 \text{ se tiene: } g(0) = \frac{1}{2} \sum_1^r (A_n - A_{-n}) = \frac{1}{2r} \sum_n \sum_k f_k (e^{inkh} - e^{-inkh}) = \frac{-1}{r} \sum_n \sum_k f_k \sin nkh. \text{ El coeficiente de } f_k \text{ es:}$$

$\sum_{n=1}^r \text{sen } nkh = \text{sen } \frac{kr}{2} \text{sen} \left(\frac{kr}{2} + \frac{kh}{2} \right) \text{cosec } \frac{kh}{2}$, nulo para k par, e igual a $\text{cot } \frac{kh}{2}$ para k impar, por lo cual resulta: $g(0) = -\frac{1}{r} \sum_{k \text{ impar}} (f_k - f_{-k}) \text{cot } \frac{kh}{2}$ (8)

Aplicación: conjugada de e^{-x^2} (Ver § 5) - Con $x = \text{tg } \frac{1}{2} t$ se tiene:

$f(t) = e^{-\frac{1}{2} \text{tg}^2 \frac{t}{2}}$, definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y periódica con periodo 2π . El cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier es muy laborioso, por lo cual es preferible el análisis armónico aproximado o interpolación trigonométrica. Tomando $r=10$ será $h = \frac{\pi}{10}$ (-18°), y resultan los f_k indicados en la tablilla adjunta (Nº 1). Como la $f(t)$

Tabla 1

k	kh	f_k
0	0°	1
1	18°	0,9752263
2	36°	0,8998090
3	54°	0,7713475
4	72°	0,5898636
5	90°	0,3678794
6	108°	0,1504044
7	126°	0,0212406
8	144°	0,0000770
9	162°	0
10	180°	0

Tabla 3

t	$e^{-\frac{1}{2} \text{tg}^2 \frac{t}{2}}$	fórm.(9)	discrep.
9°	0,9938252	0,9937934	-0,0 ⁴ 32
27°	0,9439917	0,9440277	+0,0 ⁴ 36
45°	0,8423388	0,8421776	-0,0 ³ 16
63°	0,6869227	0,6871534	+0,0 ³ 23
81°	0,4821723	0,4818843	-0,0 ³ 29
99°	0,2538812	0,2541927	+0,0 ³ 31
117°	0,0697429	0,0695428	-0,0 ³ 19
135°	0,0029427	0,0026970	-0,0 ³ 25

Tabla 2

a_n	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	a_n
a_1	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	0,5464192
a_2	36	72	108	144	180	216	252	288	324	360	0,0710725
a_3	54	108	162	216	270	324	18	72	126	180	-0,0547466
a_4	72	144	216	288	360	72	144	216	288	360	0,0057512
a_5	90	180	270	360	90	180	270	360	90	180	0,0079454
a_6	108	216	324	72	180	288	36	144	252	360	-0,0054583
a_7	126	252	18	144	270	36	162	288	54	180	0,0013216
a_8	144	288	72	216	360	144	288	72	216	360	0,0006037
a_9	162	324	126	288	90	252	54	216	18	180	-0,0009396
a_{10}	180	360	180	360	180	360	180	360	180	360	0,0004460

es función par, los coeficientes b_n son nulos. Los a_n se calculan con la fórmula (6): $a_n = 0,1 \sum_{k=1}^{10} f_k \cos(nk \cdot 18^\circ)$, $k = -9, -8, \dots, 0, 1, \dots, 10$, y resulta la siguiente expresión: $f(t) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{10} a_k \cos kt$ (9). El valor de a_0 se obtiene como

Tabla 4

x	t	fórm.(10)	valor ex.	discrep.
0,5	53° 7'48,4	0,4787359	0,4789252	-0,0 ³ 19
1	90	0,6068500	0,6071576	-0,0 ³ 31
1,5	112 37 11,5	0,4834000	0,4832276	+0,0 ³ 17
2	126 52 11,6	0,3400373	0,3400263	+0,0 ⁴ 11
2,5	136 23 49,9	0,2516625	0,2517231	-0,0 ⁴ 61
3	143 7 48,4	0,2007084	0,2011572	-0,0 ³ 45
3,5	148 6 33,1	0,1684613	0,1688293	-0,0 ³ 37
4	151 55 39,1	0,1458729	0,1459536	-0,0 ⁴ 81
4,5	154 56 32,6	0,1289042	0,1287352	+0,0 ³ 17
5	157 22 48,5	0,1155497	0,1152460	+0,0 ³ 30

de a_0 se obtiene como promedio de las ordenadas: $a_0 = 0,4275248$. El valor medio de la función es $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = 0,4275437$ (calculando la integral con la fórmula de N-C-5). Es de notar que la constante

a₀ no se requiere para la determinación de la conjugada. La tabla 3 muestra las discrepancias de la (9) con respecto a la función $e^{-t^2} \frac{t}{2}$

La función conjugada es impar y tiene por expresión: $g(t) \approx \sum_{n=1}^{10} a_n \operatorname{sen} nt$ (10)
 Para volver a la variable x se pone $x = tg \frac{1}{2} t$. En el §5 están calculados los valores de esta conjugada para varios valores de x ; la tabla 4 muestra esos valores y los dados por la (10).

§14 - Cálculo de la conjugada con la fórmula de Hilbert para el círculo

Esta fórmula es: $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cot \frac{1}{2}(t-x) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \operatorname{tg} \frac{1}{2} t dt$ (1) siendo nulo el último término si $f(t)$ es función par (ver §1, fórm. 2). En todo caso la última integral debe ser convergente, y como es igual a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) dt = g_0$, se puede escribir la (1) así:

$$g(x) - g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cot \frac{1}{2}(t-x) dt \quad (1')$$

Para calcular la integral singular $J = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cot \frac{1}{2}(t-x) dt = \int_{-\pi}^{x-h} + \int_{x+h}^{+\pi} + \int_{x+h}^{\pi}$ se puede aplicar el procedimiento expuesto en el §3 con una ligera modificación para la integral J . Con $t-x = u$ se tiene:

$$J = \int_{x-h}^{x+h} f(t) \cot \frac{1}{2}(t-x) dt = \int_0^h [f(x+u) - f(x-u)] \cot \frac{1}{2} u du = 2 \int_0^h \left[u f'(x) + \frac{u^3}{3!} f'''(x) + \frac{u^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots \right] \cot \frac{1}{2} u du$$

y poniendo $\int_0^h u \cot \frac{1}{2} u du = J_1$, $\int_0^h u^3 \cot \frac{1}{2} u du = J_3$, etc., resulta: $J = 2f'(x) \cdot J_1 + \frac{2}{3!} f'''(x) \cdot J_3 + \frac{2}{5!} f^{(5)}(x) \cdot J_5 + \dots$ (2). El cálculo de las integrales J_1, J_3, J_5 , etc., se

efectúa mediante desarrollo en serie, partiendo de $x \cdot \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} - \dots$ Se deduce que: $J = 2h - \frac{h^3}{18} - \frac{h^5}{1800} - \frac{h^7}{105840} - \frac{h^9}{6443200} - \frac{h^{11}}{263450820} - \dots$; $J_3 = \frac{2h^3}{3} - \frac{h^5}{30} - \frac{h^7}{2520} - \frac{h^9}{136080} - \frac{h^{11}}{6652800} - \dots$; $J_5 = \frac{2h^5}{5} - \frac{h^7}{42} - \frac{h^9}{3240} - \frac{h^{11}}{165320} - \dots$; $J_7 = \frac{2h^7}{7} - \frac{h^9}{54} - \frac{h^{11}}{3960} - \dots$; $J_9 = \frac{2h^9}{9} - \frac{h^{11}}{66} - \dots$; $J_{11} = \frac{2h^{11}}{11} - \dots$; etc. Como entre $u=0$ y $u = \frac{\pi}{2}$ es $u \cdot \cot \frac{1}{2} u < 1$, se elige el intervalito h de modo que la serie $h \cdot f'(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \dots$ converja rápidamente.

Si en $t=x$ la $f(t)$ carece de derivada, siendo continua, se estudia la existencia del V.P. mediante las consideraciones expuestas en el §12, ya que para u pequeña es $\cot \frac{1}{2} u \approx \frac{2}{u}$.

(1)

Procedimiento gráfico de A. Walz - Permite obtener valores de la función

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cot^2(t-x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \dots \text{ con cierta aproximación reemplazando la integral por la suma } \sum_1 \frac{1}{2\pi} (f_m - f_{m-1}) \cot^2 \left| \frac{t_m - x}{\Delta t_m} \right| \Delta t_m +$$

$\frac{1}{2\pi} \int_{x-h}^{x+h} \left[f(x) + (t-x)f'(x) \right] \frac{2dt}{t-x}$. La sumatoria se extiende al intervalo $(x-\pi, x+\pi)$, excepto el $(x-h, x-h)$, y los valores t_m, f_m, f_{m-1} se refieren al punto medio de cada división Δt_m ; estas divisiones se numeran desde $x+h$ y $x-h$ a derecha e izquierda. En la última integral el factor $\frac{2}{t-x}$ sustituye a $\cot^2(t-x)$, y calculándola resulta como valor aproximado:

$\frac{1}{\pi} f'(x) \cdot 2h \approx \frac{1}{\pi} (f_0 - f_{-1})$, siendo $f_0 = f(x+h)$ y $f_{-1} = f(x-h)$. Si ahora se pone: $\frac{1}{2} \cot^2 \left| \frac{t_m - x}{\Delta t_m} \right| \Delta t_m = a_m$, resulta finalmente:

$$g(x) \approx \frac{1}{\pi} \left[a_0 (f_0 - f_{-1}) + a_1 (f_1 - f_0) + a_2 (f_2 - f_1) + \dots + a_k (f_k - f_{k-1}) \right]; a_0 = 1.$$

Los intervalitos Δt_m son desiguales; se toma Δt_0 muy chico (lo más que permita el dibujo), y $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ cada vez mayores. Los intervalitos Δt_m son simétricos de los Δt_{m-1} con respecto al punto $t=x$. En la figura adjunta (ver pág. 59) y siendo $u=3$ cms la unidad de longitud, se ha tomado $h = 1/30$; a continuación van 12 intervalitos $\Delta t = 0,1$; luego 7 intervalitos $\Delta t = 2/15$, y finalmente 5 intervalitos $\Delta t = 1/6$, con un residual $\Delta t = \pi - 3 \approx 0,142$. Los correspondientes valores de a_m están dados en

m	$\frac{1}{2}(t_m - x)$	a_m
1	2°23'14,4	1,19931
2	5 15 7,6	0,54392
3	8 7 0,8	0,35058
4	10 58 54,1	0,25767
5	13 50 47,3	0,20285
6	16 42 40,6	0,16654
7	19 34 33,8	0,14060
8	22 26 27,1	0,12106
9	25 18 20,3	0,10575
10	28 10 13,5	0,09337
11	31 2 6,8	0,08310
12	33 54 0	0,07441
13	37°14'32"	0,08769
14	41 3 43	0,07652
15	44 52 54	0,06694
16	48 42 5	0,05857
17	52 31 16	0,05112
18	56 20 27	0,04439
19	60 9 38	0,03824
20	64 27 28	0,03282
21	69 13 57	0,03160
22	74 0 25	0,02383
23	78 46 54	0,01653
24	83 33 23	0,00941
25	87 58 19	0,00251

La tablilla adjunta.

Las rectas que parten del punto P (ver figura) tienen, con respecto a P, una pendiente proporcional a a_m . En la figura la pendiente es a_m para $m=1, \dots$ y $10a_m$ para $m=9, \dots, 25$. El factor de proporcionalidad

se elige de modo que las rectas no se acumulen a tender a cero la pendiente. Si se dibuja la curva $y=f(t)$ haciendo coincidir el punto de abscisa $t=x$ con el x de la figura, es evidente que las rectas del haz de centro P permitirán obtener los productos $f_m a_m$ y $f_{m-1} a_{m-1}$, y por tanto $g(x)$. Desplazando en sentido horizontal la curva se obtendrán valores diversos de la función conjugada, y aunque tengan escasa aproximación permitirán dibujar la gráfica de aquella. Por ser $\int_0^{2\pi} \cot^2(t-x) dt = 0$ se puede agregar a $f(t)$ una constante arbitraria, lo cual permite elevar la curva con respecto al eje t y leer con más seguridad los valores $f_m a_m$. Para poder desplazar la gráfica de $f(t)$ se la dibuja en papel transparente

Rayos Factor

- { 138.1
- { 9325.10

Grafico de Walz con la curva $y = 3 + e^{-\frac{t^2}{2}}$

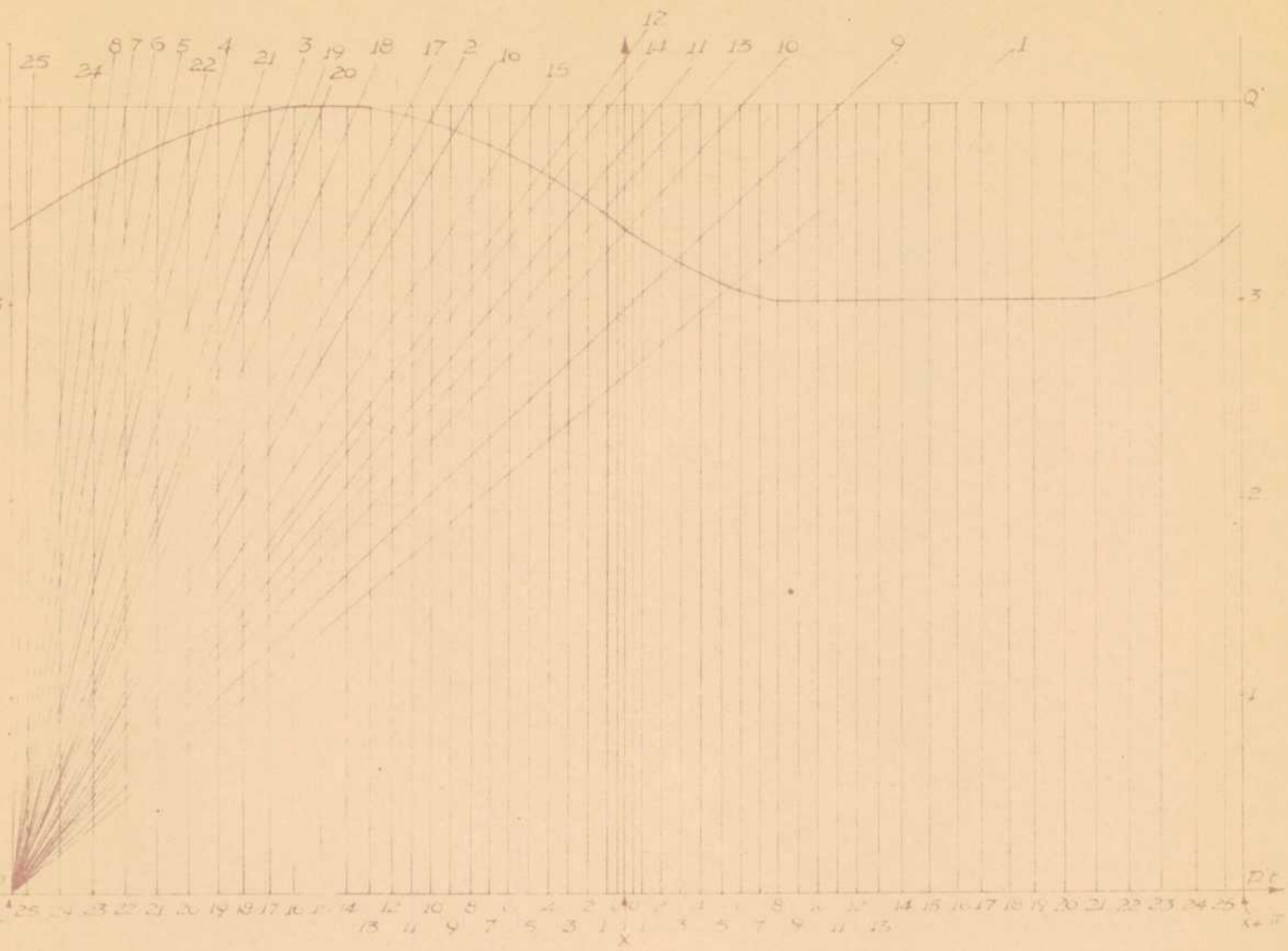
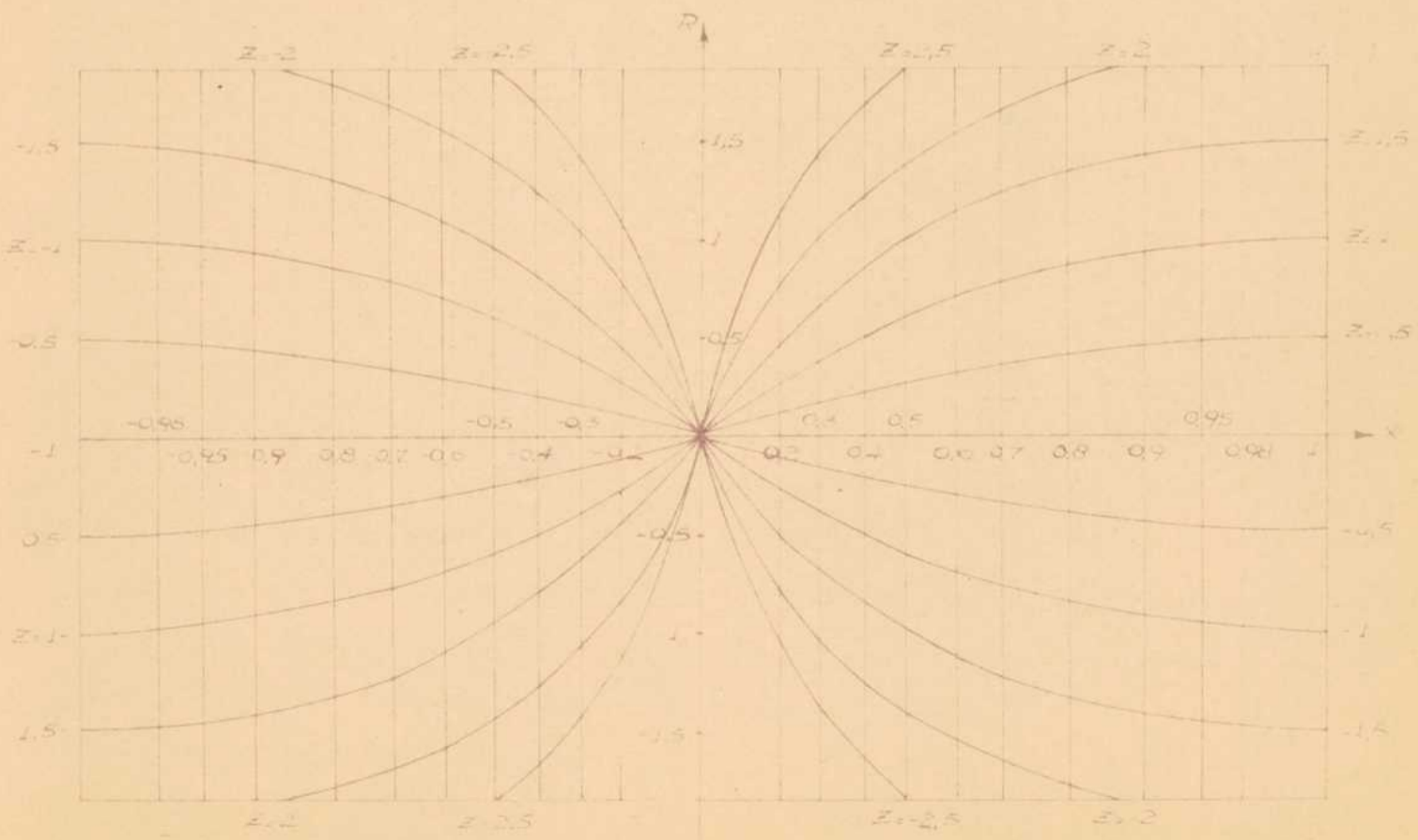


Grafico de Mangler



y mejor es dibujarla en papel milimetrado para desplazar sobre ella el gráfico de la figura dibujado en papel transparente.

En la figura de pág. 59 está dibujada también la curva $y = 3 + e^{-\frac{1}{2}x}$ (ver §13), dispuesta para el cálculo de $g\left(\frac{1}{2}\pi\right)$. Este dió -0,63, siendo el valor exacto -0,607. El procedimiento es, pues, eficaz, y más lo será con gráficos grandes y bien contruidos.

Procedimiento gráfico de W. Mangler⁽¹⁾ - Dada la función

$$g(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} f(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi-\varphi) d\psi, \text{ se pone } \psi-\varphi = \lambda, \quad x = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\lambda, \quad f(\psi) = y(x),$$

$$\text{y resulta: } g(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi+\lambda) \cot \frac{1}{2}\lambda d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y(x)}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y(x)-y(0)}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} z(x) dx. \text{ El gráfico dibujado en la pág. 59 muestra rectas verticales de abscisas } \lambda = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, \text{ para diversos valores de } x, \text{ que figuran indicados en ellas, y curvas } R(\lambda) = f(\psi) - f(\varphi) = y(x) - y(0) = z(x) \cdot x = z_j \operatorname{sen} \frac{1}{2}\lambda$$

para $z(x)$ constante; estas últimas son sinusoides que pasan por 0. Para $z(x) = z_j$ se tiene: $g(\varphi) = \frac{2}{\pi} z_j$. Si $z(x)$ no es constante la curva $R(\lambda)$ corta a las sinusoides z_j en puntos de abscisas λ_j o x_j , y la función conjugada $g(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} z(x) \cdot dx$ se calcula aproximadamente con la fórmula

$$g(\varphi) \approx \frac{1}{\pi} \left[\sum_{-1}^{+1} z_j \Delta x_j + J \right], \text{ excluyendo en la sumatoria un entorno de } x=0 \text{ o } \lambda=0.$$

Como es $R(0)=0$, la curva puede adaptarse en dicho entorno a una de las sinusoides, en cuyo caso aquél contribuirá a la sumatoria anterior con el término $\frac{2}{\pi} z_j h$, siendo $2h$ la amplitud del entorno. Si no se adapta, se calcula $J = \int_{-h}^{+h} z(x) \cdot dx$ mediante la fórmula de Gauss para integración aproximada; con dos ordenadas se tiene: $J = h [z(x_{-1}) + z(x_1)]$, siendo $x_1 = x_{-1} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

El cálculo de J es inmediato si se trazan por x_{-1} y x_1 rectas verticales con la escala de z_j , determinada por los puntos de intersección de las rectas y las sinusoides. Entonces la curva $R(\lambda)$ corta a las rectas en puntos $z(x_{-1})$ y $z(x_1)$. La red de rectas y sinusoides se puede dibujar en papel transparente y aplicar sobre la gráfica de $f(\psi)$, haciendo coincidir el eje R de la red con la ordenada $\psi = \varphi$. Por ser $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 0$ se puede sumar a $z(x)$ una constante arbitraria, lo cual permite colocar la curva $f(\psi)$ de modo que la lectura de los z_j sea lo más cómoda posible.

§15 - Un problema resuelto por H.W. Bode⁽²⁾

Sea $F(z) = f(x,y) + i.g(x,y)$. La fórmula de Poisson para el semiplano es

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-t)F(it)}{x^2+(y-t)^2} dt \quad (1), \text{ que se descompone en las siguientes:}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-y)f(0,t)}{x^2 + (t-y)^2} dt, \quad f(x,y) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-y)g(0,t)}{x^2 + (t-y)^2} dt \quad (2)$$

y para $x=0$ resultan las transformadas de Hilbert:

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-y} dt, \quad f(y) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-y} dt \quad (3)$$

Se ve que estas fórmulas vinculan, sobre el eje imaginario, las componentes $f(x,y)$ y $g(x,y)$ de la $F(z)$. Si se conoce $f(y)$ en todo el eje imaginario, se puede calcular $g(y)$ y reciprocamente. Si $f(y)$ se conoce en una parte del eje imaginario y $g(y)$ se conoce en la parte restante, se tiene un problema que H.W.Bode resolvió de la siguiente manera. Sean $f(y)$ y $g(y)$ funciones definidas para $y \geq 0$ solamente, lo cual permite utilizar

las fórmulas (1') y (2') del §1: $g(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(t)}{t^2-x^2} dt$ (4), $f(x) = \frac{-2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{tg(t)}{t^2-x^2} dt$ (5)

Supongamos que $f(y)$ se conoce para $0 \leq y \leq y_0$ y $g(y)$ para $y \geq y_0$. Si se divide $f(y)+ig(y)$ por el factor $\sqrt{1-y^2/y_0^2}$, que es real para $0 \leq y \leq y_0$ e imaginario para $y > y_0$, la nueva función tiene la forma $\frac{f(y)+ig(y)}{\sqrt{1-y^2/y_0^2}}$ para $0 < y < y_0$, y $\frac{g(y)-if(y)}{\sqrt{y^2/y_0^2-1}}$ (7) para $y > y_0$. Sustituyendo en la (4) resulta la fórmula:

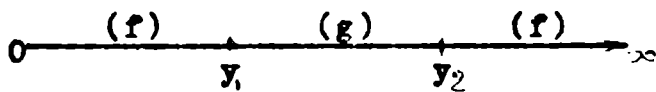
$$\frac{2y}{\pi} \int_0^{y_0} \frac{f(t).dt}{(t^2-y^2)\sqrt{1-t^2/y_0^2}} + \frac{2y}{\pi} \int_{y_0}^{\infty} \frac{g(t).dt}{(t^2-y^2)\sqrt{t^2/y_0^2-1}} = \begin{cases} \frac{g(y)}{\sqrt{1-y^2/y_0^2}} & \text{para } 0 < y < y_0 \\ \frac{-f(y)}{\sqrt{y^2/y_0^2-1}} & \text{para } y > y_0 \end{cases} \quad (8)$$

que resuelve el problema.

Si $g(y)$ se conoce para $0 \leq y \leq y_0$ y $f(y)$ para $y \geq y_0$, se utiliza la (5) y resulta:

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{y_0} \frac{tg(t)dt}{(t^2-y^2)\sqrt{1-t^2/y_0^2}} + \frac{2}{\pi} \int_{y_0}^{\infty} \frac{tf(t)dt}{(t^2-y^2)\sqrt{t^2/y_0^2-1}} = \begin{cases} \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2/y_0^2}} & \text{para } 0 \leq y < y_0 \\ \frac{g(y)}{y^2/y_0^2-1} & \text{para } y > y_0 \end{cases} \quad (9)$$

Si las funciones $f(y)$ y $g(y)$ se conocen en los segmentos indicados en la figura, se divide $f(y)+i.g(y)$ por el factor $\sqrt{(1-y^2/y_1^2)(1-y^2/y_2^2)}$



Cálculo de la expresión (8) - Suponiendo $0 \leq y \leq y_0$, la (8) se puede escribir así:

$$\frac{\pi g(y)}{\sqrt{y_0^2-y^2}} = \int_0^{y_0} \left(\frac{1}{t-y} - \frac{1}{t+y} \right) \frac{f(t)dt}{\sqrt{y_0^2-t^2}} + \int_{y_0}^{\infty} \frac{2y.g(t)dt}{(t^2-y^2)\sqrt{t^2-y_0^2}} = Y_1 + Y_2$$

Se tiene, en primer término: $Y_1 = \int_0^{y-h} \frac{f(t)dt}{(t-y)\sqrt{y_0^2-t^2}} + \int_{y-h}^{y+h} \frac{f(t)dt}{(t-y)\sqrt{y_0^2-t^2}} + \int_{y+h}^{y_0-k} \frac{f(t)dt}{(t-y)\sqrt{y_0^2-t^2}} - \int_0^{y_0-k} \frac{f(t)dt}{(t-y)\sqrt{y_0^2-t^2}} + \int_{y_0-k}^{y_0} \frac{2y.f(t)dt}{(t^2-y^2)\sqrt{y_0^2-t^2}}$

De estas cinco integrales, las 1ª, 3ª y 4ª no ofrecen dificultad para su cálculo, y la 2ª se calcula por desarrollo en serie, como se indicó en el §3 (integral singular J). La 5ª se calcula así:

$$\int_{y_0-k}^{y_0} \frac{2y \cdot f(t) dt}{(t^2-y^2)\sqrt{y_0+t}\sqrt{y_0-t}} = \int_{y_0-k}^{y_0} \frac{F(t) dt}{\sqrt{y_0-t}} = \int_0^k \frac{F(y_0-x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^k \left[F(y_0) - x \cdot F'(y_0) + \right. \\ \left. + \frac{x^2}{2!} F''(y_0) - \frac{x^3}{3!} F'''(y_0) + \dots \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{k} \cdot F(y_0) - \frac{2}{3} k^{3/2} \cdot F'(y_0) + \frac{2k^{5/2}}{2!5} F''(y_0) - \\ - \frac{2k^{7/2}}{3!7} F'''(y_0) + \dots \quad (10)$$

Análogamente: $Y_2 = \int_0^{y_0+k} \frac{2y \cdot g(t) dt}{(t^2-y^2)\sqrt{t^2-y^2}} + \int_{y_0+k}^{\infty} \frac{2y \cdot g(t) dt}{(t^2-y^2)\sqrt{t^2-y_0^2}}$. La 2ª integral no ofrece dificultad, y la 1ª se calcula así:

$$\int_{y_0}^{y_0+k} \frac{2y \cdot g(t) dt}{(t^2-y^2)\sqrt{t+y_0}\sqrt{t-y_0}} = \int_{y_0}^{y_0+k} \frac{G(t) dt}{\sqrt{t-y_0}} = \int_0^k \frac{G(y_0+x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{k} \cdot G(y_0) + \frac{2}{3} k^{3/2} \cdot G'(y_0) + \\ + \frac{2k^{5/2}}{2!5} G''(y_0) + \frac{2k^{7/2}}{3!7} G'''(y_0) + \dots \quad (11)$$

Cálculo gráfico de la expresión (8) - Considerando como funciones pares a $f(t)$ para $0 < t < y_0$ y a $g(t)$ para $t > y_0$, la (8) se puede escribir así; en el caso de ser $0 \leq y < y_0$:

$$\frac{\pi \cdot g(y)}{\sqrt{y_0^2-y^2}} = \int_{y_0}^{+y_0} \frac{f(t) dt}{(t-y)\sqrt{y^2-t^2}} + \left(\int_{-\infty}^{-y_0} + \int_{y_0}^{\infty} \right) \frac{g(t) dt}{(t-y)\sqrt{t^2-y_0^2}} \quad (12)$$

y el cambio de variable $t = tg \frac{1}{2} \psi$, con $y = tg \frac{1}{2} \psi$, $y_0 = tg \frac{1}{2} \psi_0$, permite pasar al intervalo finito $(-\pi, +\pi)$ y aplicar la (9) del §1 sin el último término que es nulo.

Por ser: $(y_0^2-t^2)^{-1/2} = \frac{\cos \frac{1}{2} \psi_0 \cdot \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 + \psi) \text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 - \psi)}}$, y poniendo $f(tg \frac{1}{2} \psi) = F(\psi)$

$g(tg \frac{1}{2} \psi) = G(\psi)$, se tiene, para $0 \leq \psi < \psi_0$:

$$\frac{2\pi \cdot G(\psi) \cdot \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 + \psi) \text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 - \psi)}} = \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{F(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot \frac{1}{2} (\psi - \varphi) d\psi}{\sqrt{\text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 + \psi) \text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 - \psi)}} + \\ + \left(\int_{-\pi}^{-\psi_0} + \int_{\psi_0}^{\pi} \right) \frac{G(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot \frac{1}{2} (\psi - \varphi) d\psi}{\sqrt{\text{sen} \frac{1}{2} (\psi + \psi_0) \text{sen} \frac{1}{2} (\psi - \psi_0)}} \quad (13)$$

$$\text{Sea } R(\psi) = \frac{F(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 + \psi) \text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 - \psi)}} \quad (14) \text{ para } -\psi_0 < \psi < \psi_0$$

$$\text{y } R(\psi) = \frac{G(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\text{sen} \frac{1}{2} (\psi + \psi_0) \text{sen} \frac{1}{2} (\psi - \psi_0)}} \quad (14') \text{ para } |\psi| > |\psi_0|$$

$$y T(\varphi) = \frac{2\pi G(\varphi) \cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi_0 + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\psi_0 - \varphi)}} \quad (15) \text{ . Resulta:}$$

$$T(\varphi) = \int_{-\pi}^{+\pi} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi) . d\psi \quad (16)$$

que se puede calcular gráficamente mediante el procedimiento de A. Walz (ver §14), con una modificación a causa de la discontinuidad en ψ_0 y $-\psi_0$. En el intervalo $(\psi_0 - \varepsilon ; \psi_0 + \varepsilon')$ y siendo

$$r(\psi) = \frac{F(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi_0 + \psi)}} \quad (17) \text{ para } \psi < \psi_0 ; \quad r(\psi) = \frac{G(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi + \psi_0)}} \quad (17') \text{ para } \psi > \psi_0 ;$$

se tiene:
$$\int_{\psi_0 - \varepsilon}^{\psi_0 + \varepsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi) . d\psi \cong r(\psi_1) \cot \frac{1}{2}(\psi_1 - \varphi) \int_{\psi_0 - \varepsilon}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}} +$$

$$+ r(\psi_2) \cot \frac{1}{2}(\psi_2 - \varphi) \int_{\psi_0}^{\psi_0 + \varepsilon'} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\psi - \psi_0)}} , \text{ o sea}$$

$$\int_{\psi_0 - \varepsilon}^{\psi_0 + \varepsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi) d\psi \cong 2\sqrt{2} \left[\sqrt{\varepsilon} . r(\psi_1) \cot \frac{1}{2}(\psi_1 - \varphi) + \sqrt{\varepsilon'} . r(\psi_2) \cot \frac{1}{2}(\psi_2 - \varphi) \right] \quad (18)$$

siendo ψ_1 un punto intermedio del intervalo $(\psi_0 - \varepsilon, \psi_0)$ y ψ_2 uno análogo de $(\psi_0, \psi_0 + \varepsilon)$. Si $r(\psi)$ es continua en ψ_0 y varía poco, se puede reemplazar ψ_1 y ψ_2 por un valor común, por ej. ψ_0 , y el 2º miembro se reduce a

$$2\sqrt{2}(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'}) r(\psi_0) \cot \frac{1}{2}(\psi_0 - \varphi) \quad (19) \text{ . Si no es continua, se puede tomar el va-}$$

$$\text{lor } 2\sqrt{2} \sqrt{\varepsilon} . r(\psi_0 - 0) + \sqrt{\varepsilon'} . r(\psi_0 + 0) \cot \frac{1}{2}(\psi_0 - \varphi) \quad (20) \quad (21)$$

Análogamente, en el intervalo $(-\psi_0 - \varepsilon ; -\psi_0 + \varepsilon')$ y siendo $r(\psi) = \frac{F(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}}$

$$\text{para } \psi > -\psi_0 , \quad r(\psi) = \frac{G(\psi) \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}} \quad (21') \text{ para } \psi < -\psi_0 , \text{ se tiene:}$$

$$\int_{-\psi_0 - \varepsilon}^{-\psi_0 + \varepsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi) d\psi \cong 2\sqrt{2} \left[\sqrt{\varepsilon} . r(\psi_1) . \cot \frac{1}{2}(\psi_1 - \varphi) + \sqrt{\varepsilon'} . r(\psi_2) . \cot \frac{1}{2}(\psi_2 - \varphi) \right] \quad (22)$$

Por consiguiente, sobre el gráfico de Walz se dispone la curva $y = R(\psi)$ suprimiendo los arcos infinitos en los entornos de ψ_0 y $-\psi_0$, y reemplazándolos por cuatro arcos de la $r(\psi)$, uno en cada semi-entorno considerado. Ya se vio que la $r(\psi)$ es distinta en cada semi-entorno.

No es necesario dibujar los arcos de la $r(\psi)$; basta calcular las expresiones (18) y (22). Las amplitudes ε y ε' de los semi-entornos se determinan sobre el gráfico de Walz así: el punto ψ_0 de la curva $R(\psi)$ cae en cierto intervalito de la base; ε y ε' son las distancias de ψ_0 a los extremos del intervalito. Teniendo en cuenta que el gráfico permite multiplicar la ordenada en ψ_0 por $\cot \frac{1}{2} |\psi_0 - \varphi| \Delta\psi$, siendo $\Delta\psi$ la amplitud del intervalito, se toma como ordenada el valor $2\sqrt{2}(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'}) \frac{r(\psi_0)}{\Delta\psi}$ o el

$\frac{2\sqrt{2}}{\Delta\psi} \left[\sqrt{\varepsilon} r(\psi_0 - 0) + \sqrt{\varepsilon'} r(\psi_0 + 0) \right]$, fácil de calcular teniendo ya calculado el valor $r(\psi_0)$ o los valores $r(\psi_0 - 0)$ y $r(\psi_0 + 0)$, y se obtiene gráficamente la (19) o la (20).

Observación - Teniendo en cuenta que la función $R(\psi)$ tiene discontinuidad

infinita en ψ_0 y en $-\psi_0$, su gráfica se empina mucho en la proximidad de esos puntos, y el intervalo que se le suprime para aplicar la (18) o (22) debe tener una amplitud conveniente para que fuera de él la $R(\psi)$ varíe poco, pues en caso contrario el procedimiento de Walz no será aplicable. Pero si dicho intervalo no es bastante pequeño como para que se pueda considerar lineal la variación de $r(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \varphi)$, las (18) y (22) pueden dar un error considerable, por lo cual conviene aplicar una fórmula más aproximada, que estableceré a continuación.

Fórmula aproximada para la integral $\int_0^a f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (convergente) - Si $f(x)$ es continua y varía poco en el intervalo de integración, se la aproxima mediante un polinomio de 2º grado que coincide con ella en tres puntos: $x=0$, $x=h$, $x=2h=a$. El polinomio está dado por la fórmula de interpolación de Newton-Gregory: $f(x) \approx y_0 + r(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(r^2 - r)(y_2 - 2y_1 + y_0)$, con $r = \frac{x}{h}$

Entonces: $\int_0^a f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx \int_0^a \left[y_0 + \frac{x}{2h}(4y_1 - y_2 - 3y_0) + \frac{x^2}{2h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} = S'$ (23)

$$= \frac{2\sqrt{a}}{15}(6y_0 + 8y_1 + y_2) = S'$$

La expresión exacta es:

$$\int_0^a \left(y_0 + x y_0' + \frac{x^2}{2} y_0'' + \frac{x^3}{6} y_0''' + \dots \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{a} \left(y_0 + \frac{a}{3} y_0' + \frac{a^2}{10} y_0'' + \frac{a^3}{42} y_0''' + \dots \right) = S$$

mientras el desarrollo en serie de la S' da:

$$S' = 2\sqrt{a} \left(y_0 + \frac{a}{3} y_0' + \frac{a^2}{10} y_0'' + \frac{a^3}{45} y_0''' + \dots \right)$$

Por consiguiente el error de la (23) es: $S - S' \approx \frac{a^3 \cdot \sqrt{a}}{315} y_0'''$ (24)

Si la integral es $\int_0^a \frac{f(x)}{\sqrt{\sin x}} dx$, se pone $f(x) \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = F(x)$ y resulta:

$\int_0^a \frac{F(x)}{\sqrt{x}} dx$. Si se reemplaza $\sin x$ por x en la primera integral, el error que se comete se determina así, poniendo $\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{6} + \dots \right) = x(1-u)$:

$$\int_0^a f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = f(\xi) \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1 \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = f(\xi) \int_0^a \left(\frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + \dots \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = f(\xi) \int_0^a \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{160} + \dots \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx \frac{a^2 \sqrt{a}}{30} \left(1 - \frac{a^2}{24} \right) f(\xi) \approx \frac{a^2}{30} \sqrt{a} \cdot f(\xi)$$
 (25)

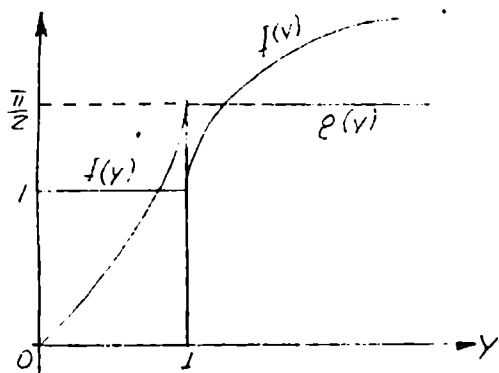
Por ejemplo, si es $a = 0,1$ el error será $\approx 0,0001 \cdot f(\xi)$

Aplicación

El siguiente ejemplo es del mismo Bode: $f(y) = 1$ para $0 \leq y \leq 1$; $g(y) = \frac{1}{2}\pi$ para $y \gg 1$. Resulta: $g(y) = \arcsen y$ para $0 \leq y \leq 1$; $f(y) = 1 + \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ para $y \gg 1$. La figura adjunta (ver pág. 65) muestra las gráficas de ambas funciones. El cálculo de $g(y)$ para $0 \leq y \leq 1$ se efectúa con la (12) o, después del cambio de variable, con la (13), siendo $\psi_0 = \frac{1}{2}\pi$. Para utilizar el gráfico de Walz, dibujado en la pág. 70 con los

intervalitos indicados en el § 14, se requiere la gráfica de la función $R(\psi)$ dada por las (14) y (14'). Se tiene:

$R(\psi) = \cos \frac{1}{2} \psi \sqrt{2, \sec \psi}$ para $-\frac{1}{2}\pi < \psi < \frac{1}{2}\pi$; $R(\psi) = \frac{1}{2}\pi \cdot \cos \frac{1}{2} \psi \sqrt{-2, \sec \psi}$ para $|\psi| > \frac{1}{2}\pi$. Además: $T(\varphi) = 2, \pi \cdot G(\varphi) \cdot \cos \frac{1}{2} \psi \sqrt{2, \sec \varphi}$, siendo $0 \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$, y resulta: $G(\varphi) = g(y)$. En la pág. 69 está dibujada la gráfica de $R(\psi)$, y mediante el gráfico de Walz calcularé $G(\pi/4) =$

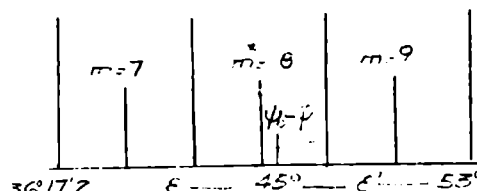


dante el gráfico de Walz calcularé $G(\pi/4) = g(\text{tg } 22^{\circ}30') = g(0,41421)$, cuyo valor exacto es $\text{arc sen } (\sqrt{2}-1) = 0,427088$; el punto $\varphi = \frac{\pi}{4}$ del eje ψ debe coincidir con el x , punto central de la base PP' . Se tiene: $T(\varphi) = 9,76265 \cdot G(\varphi)$. $\therefore G(\varphi) = 0,10243 \cdot T(\varphi)$.

Es de notar que los rayos del haz de centro P s

han trazado de acuerdo con los valores de $a_m = \cot \frac{1}{2} |\psi_m - \varphi| \Delta \psi_m$ (doble del a del § 14), por lo cual el gráfico da directamente la integral (16), exceptuando en ésta dos pequeños intervalos que comprenden ψ_0 y $-\psi_0$. En estos se aplican las (18) y (22), determinando los valores de ϵ y ϵ' según la amplitud del intervalito de PP' en que cae ψ_0 o $-\psi_0$. La tablilla inserta en el § 14 muestra que $\psi_0 = \frac{1}{2}\pi$ cae en el intervalito correspondiente a $m=8$ (mu cerca del punto medio), por ser $\frac{1}{2}(\psi_0 - \varphi) = 22^{\circ}30'$, mientras que $-\psi_0 = -\frac{1}{2}\pi$ cae en el correspondiente a $m=21$, por ser $\frac{1}{2}(-\psi_0 - \varphi) = -67^{\circ}30'$. Como el intervalito de PP' correspondiente a $m=8$ mide $0,8$ ($5^{\circ}44'$), si se lo adopta como intervalo de integración para la (18) resultará muy empinada la gráfica de $R(\psi)$ en su proximidad, por lo cual conviene adoptar como tal el formado por los intervalitos $m=7,8,9$ de PP' , que dan: $\epsilon = 8^{\circ}42;8$ (o sea $0^{\circ}15207$), y $\epsilon' = 8^{\circ}26;6$ (o sea $0^{\circ}14793$) . La (17) es: $r(\psi) = \frac{\cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} + \frac{1}{2} \psi)}}$ y por consiguiente:

$$\int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0} R(\psi) \cot \frac{1}{2} (\psi - \varphi) d\psi \approx \int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0} \frac{\cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot(\frac{1}{2} \psi - 22^{\circ}30')}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} + \frac{1}{2} \psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}} . \text{ Aplicando la}$$



(23) el valor de esta integral es (aproximadam.

$$\frac{2\sqrt{2}\epsilon}{15} (6y_0 + 8y_1 + y_2) = 0,073532 [6(1,7071) +$$

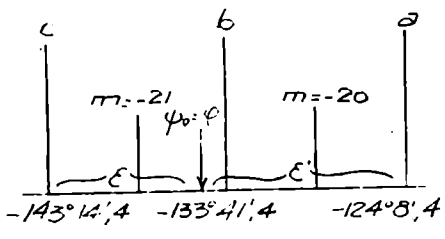
$$+ 8(1,9813) + 2,3189] \approx 2,0892 . \text{ La sustitución}$$

del $\text{sen} \frac{1}{2} (\psi_0 - \psi)$ por el arco origina un error, dado por la (25), que es en este caso: $0,0002$, y la integral anterior tiene como valor más preciso:

$$\text{La (17')} \text{ es: } r(\psi) = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot \cos \frac{1}{2} \psi}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} + \frac{1}{2} \psi)}} , \text{ y por consiguiente:}$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi_0 + \epsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2} (\psi - \varphi) d\psi \approx \int_{\psi_0}^{\psi_0 + \epsilon'} \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot \cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot(\frac{1}{2} \psi - 22^{\circ}30')}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} + \frac{1}{2} \psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\psi - \psi_0)}} \approx \frac{2\sqrt{2}\epsilon'}{15} (6y_0 + 8y_1 + y_2)$$

= 0,072524 [6(2,6815) + 8(2,3334)] + 2,0385 = 2,6685 . La corrección dada por la (25) es 0,0002 , y el valor de la integral será 2,6687 . Reuniendo ambos resultados se tiene: $\int_{\psi_0-\epsilon}^{\psi_0+\epsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi-\phi) d\psi \cong 4,7351$ (26) .



Pasando ahora al punto $-\psi_0 = -\frac{1}{2}\pi$, que cae en el intervalito de PP' correspondiente a $m = -21$ pero muy cerca de su extremo derecho, conviene tomar como intervalo de integración para aplicar la (20) el formado por los intervalitos $m = -20$ y $m = -21$, para evitar el arco muy empinado que la $R(\psi)$ presenta entre a y b (ver figura). Entonces se tiene: $\epsilon = 8^{\circ}14,4$ ($0,14331$), $\epsilon' = 10^{\circ}51,5$ ($0,18953$), pero el intervalo de integración es algo grande para aplicar la (20), por lo cual conviene

aplicar la (23). La (21) es: $r(\psi) = \frac{\cos \frac{1}{2}\psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}}$, y por consiguiente:

$$\int_{\psi_0}^{-\psi_0+\epsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi-\phi) d\psi \cong \int_{\psi_0}^{-\psi_0+\epsilon'} \frac{\cos \frac{1}{2}\psi \cdot \cot(\frac{1}{2}\psi - 22,5)}{\sqrt{\sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\psi_0 + \psi)}} \cong$$

$$\cong \frac{2\sqrt{2}\epsilon'}{15} (6y_0 + 8y_1 + y_2) = -0,082091 [6(0,29289) + 8(0,34856) + 0,40957] = -0,4068$$

La corrección dada por la (25) vale 0,0002 , y el valor de la integral será: -0,4070. La (21') es: $r(\psi) = \frac{\frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}}$, y por consiguiente:

$$\int_{-\psi_0-\epsilon}^{-\psi_0} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi-\phi) d\psi \cong \int_{-\psi_0-\epsilon}^{-\psi_0} \frac{\frac{1}{2}\pi \cos \frac{1}{2}\psi \cot(\frac{1}{2}\psi - 22,5)}{\sqrt{\sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(-\psi_0 - \psi)}} \cong$$

$$\cong \frac{2\sqrt{2}\epsilon}{15} (6y_0 + 8y_1 + y_2) = -0,071507 [6(0,46008) + 8(0,39895) + 0,34202] = -0,4501$$

La corrección (25) vale 0,0001 , y el valor de la integral será -0,4502. Reuniendo ambos resultados se obtiene finalmente:

$$\int_{-\psi_0-\epsilon}^{-\psi_0+\epsilon'} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi-\phi) d\psi \cong -0,8572 \quad (27)$$

La gráfica de $R(\psi)$ muestra aún arcos empinados en la proximidad de cada intervalo de integración utilizado en las (26) y (27). Para evitarlos se puede ampliar tales intervalos, tomando en la (26) los intervalitos de PP' correspondientes a $m = 6,7,8,9,10$ y en la (27) los correspondientes a $m = -19,-20,-21,-22$. Pero entonces la fórmula (23) puede no ser suficientemente aproximada, por lo cual conviene aplicar otra fórmula con cuatro ordenadas que estableceré a continuación.

Segunda fórmula aproximada para la integral $\int_a^b f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - Ahora se aproxima $f(x)$ mediante un polinomio de tercer grado por la fórmula de interpolación de Newton-Gregory, que coincide con $f(x)$ en $x=0, x=h, x=2h, x=3h=a$

Se tiene: $f(x) \approx y_0 + r(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(r^2 - r)(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{1}{6}(r^3 - 3r^2 + 2r)(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$, con $r = \frac{x}{h}$, y por consiguiente:

$$\int_0^a f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx \int_0^a \left[y_0 + \frac{x}{6h}(2y_3 - 9y_2 + 18y_1 - 11y_0) + \frac{x^2}{2h^2}(-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0) + \frac{x^3}{6h^3}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{a}}{105}(34y_0 + 45y_1 + 18y_2 + 8y_3) = S' \quad (28)$$

La expresión exacta es: $\int_c^d \left(y_0 + x \cdot y_0' + \frac{x^2}{2!} y_0'' + \frac{x^3}{3!} y_0''' + \frac{x^4}{4!} y_0^{IV} + \dots \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} =$
 $= 2\sqrt{a} \left(y_0 + \frac{a}{3} y_0' + \frac{a^2}{10} y_0'' + \frac{a^3}{42} y_0''' + \frac{a^4}{216} y_0^{IV} + \dots \right) = S$, mientras el desarro-

llo en serie de la S' da: $S' = 2\sqrt{a} \left(y_0 + \frac{a}{3} y_0' + \frac{a^2}{10} y_0'' + \frac{a^3}{42} y_0''' + \frac{109a^4}{216 \cdot 105} y_0^{IV} \right)$

Entonces el error de la (28) es: $S - S' \approx \frac{a^4 \sqrt{a}}{2235} y_0^{IV} + \dots \quad (29)$

Aplicaré la (28) al cálculo de $\int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0 + \epsilon} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi = \int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0} + \int_{\psi_0}^{\psi_0 + \epsilon}$, con los datos indicados al margen. Como el intervalo de integración no permite reemplazar el $\text{sen} \frac{1}{2}(\psi - \psi_0)$ por su arco, hay que escribir la 1ª integral

$(11^{\circ} 26' 32'')$	$(9^{\circ} 57' 42'')$	$(4^{\circ} 48' 51'')$	$(\psi_0 = 90^{\circ})$	$(4^{\circ} 44' 7'')$	$(9^{\circ} 28' 14'')$	$(14^{\circ} 12' 20'')$
$30^{\circ} 23' 23''$		45°			$59^{\circ} 12' 20''$	
$C = 0,252064$		$C = 0,247934$				

así: $\int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0} \frac{\cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot(\frac{1}{2} \psi - 22^{\circ} 15')}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} - \frac{1}{2} \psi)}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}{\text{sen} \frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(\psi_0 - \psi)}} \approx \frac{2\sqrt{2}\epsilon}{105} (34y_0 + 45y_1 + 18y_2 + 8y_3)$
 $= 0,0135242 [34(1,7707107) + 45(2,013652) + 18(2,401470) + 8(2,902727)] =$
 $= 0,0135242(216,15225) = 2,90976$.

La 2ª integral es: $\int_{\psi_0}^{\psi_0 + \epsilon} \frac{\frac{1}{2} \pi \cdot \cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot(\frac{1}{2} \psi - 22^{\circ} 15')}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} - \frac{1}{2} \psi)}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\psi - \psi_0)}{\text{sen} \frac{1}{2}(\psi - \psi_0)}} \frac{d\psi}{\frac{1}{2}(\psi - \psi_0)} \approx$
 $\frac{2\sqrt{2}\epsilon}{105} (34y_0 + 45y_1 + 18y_2 + 8y_3) = 0,0134129 [34(2,681518) + 45(2,296650) +$
 $+ 18(1,976950) + 8(1,707003)] = 0,0134129(243,76199) = 3,26956$. Reuniendo am-

bos resultados se obtiene: $\int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0 + \epsilon} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi = 6,17932 \quad (30)$

$(7^{\circ} 47' 19'')$	$(11^{\circ} 51' 32'')$	$(5^{\circ} 55' 46'')$	$(\psi_0 = 90^{\circ})$	$(6^{\circ} 9' 58'')$	$(12^{\circ} 9' 56'')$	$(18^{\circ} 29' 55'')$
$-152^{\circ} 47' 19''$		-135°			$-116^{\circ} 30' 5''$	
$C = 0,310470$		$C = 0,322862$				

Calcularé ahora $\int_{\psi_0 - \epsilon}^{\psi_0 + \epsilon} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi =$
 $= \int_{\psi_0 - \epsilon}^{-\psi_0} + \int_{-\psi_0}^{\psi_0 + \epsilon}$ con los datos indicados al margen. La primera integral es:

$\int_{\psi_0 - \epsilon}^{-\psi_0} \frac{\frac{1}{2} \pi \cdot \cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot(\frac{1}{2} \psi - 22^{\circ} 15')}{\sqrt{\text{sen}(45^{\circ} - \frac{1}{2} \psi)}} \frac{\frac{1}{2}(-\psi_0 - \psi)}{\text{sen} \frac{1}{2}(-\psi_0 - \psi)} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{2}(-\psi_0 - \psi)}} \frac{2\sqrt{2}\epsilon}{105} (34y_0 + 45y_1 + 18y_2 + 8y_3)$
 $= -0,0150095 [34(0,4600756) + 45(0,3735223) + 18(0,2956462) + 8(0,2258444)] =$
 $= -0,0150095(39,579461) = -0,594068$. Para la segunda se tiene:

$$\int_{-\psi_0}^{-\psi_0+\epsilon} \frac{\cos \frac{1}{2} \psi \cdot \cot(\frac{1}{2} \psi - 2295)}{\sqrt{\text{sen}(45^\circ - \frac{1}{2} \psi)}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\psi_0 + \psi)}{\text{sen} \frac{1}{2}(\psi_0 + \psi)}} \frac{d\psi}{\frac{1}{2}(\psi_0 + \psi)} \approx \frac{2\sqrt{2}\epsilon'}{105} (34y_0 + 45y_1 + 18y_2 + 8y_3)$$

$$= -0,0153061 [34(0,2928934) + 45(0,3565960) + 18(0,4275266) + 8(0,5065960)] =$$

$$= -0,0153061(37,753442) = -0,577858 . \text{ Y reuniendo ambos resultados:}$$

$$\int_{-\psi_0-\epsilon}^{-\psi_0+\epsilon} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi \approx -1,17193 \quad (31)$$

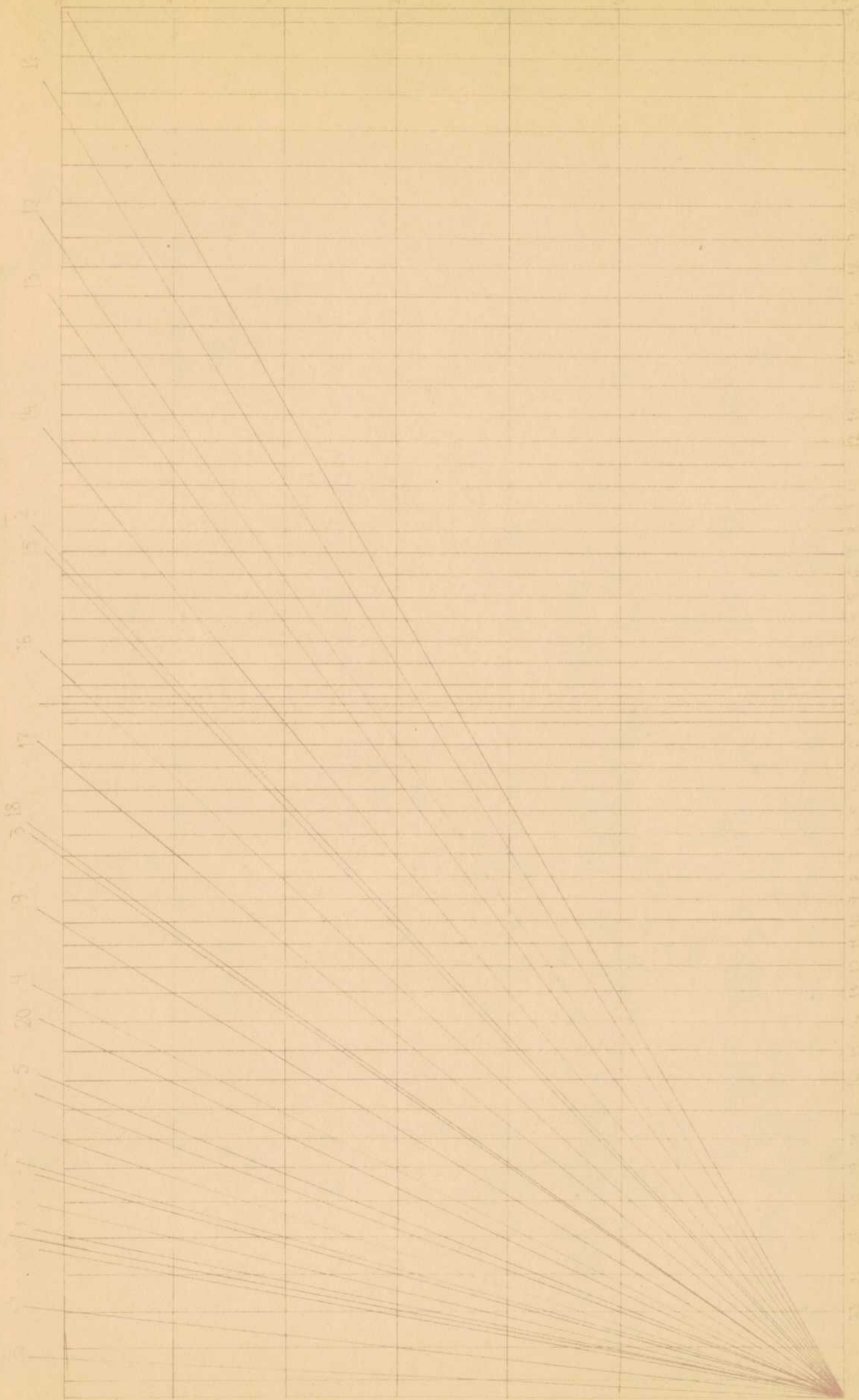
Sólo queda, finalmente, aplicar el método gráfico de Walz para efectuar la integración aproximada sobre el intervalo $(-\pi, +\pi)$ excluyendo los intervalitos $m = 6, 7, 8, 9, 10$ y $m = -19, -20, -21, -22$, a los cuales corresponden los resultados (30) y (31). Es de notar que si una porción de la curva $R(\psi)$, entre ψ_1 y ψ_2 , se eleva h unidades para lograr lecturas más precisas sobre el gráfico, el valor de la integral $\int_{\psi_1}^{\psi_2} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi$ aumenta en $h \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi = 2h \cdot \log \frac{\text{sen} \frac{1}{2}(\psi_2 - \phi)}{\text{sen} \frac{1}{2}(\psi_1 - \phi)}$. Pero no es necesario desplazar la curva; basta multiplicar las ordenadas f_m por un factor conveniente antes de obtener gráficamente los productos por los a_m , y luego dividir éstos por el factor.

He aquí el cálculo sobre el gráfico de Walz; las $f_m^{(*)}$ son ordenadas medidas en cm (la unidad es 5 cm); los $f_m^{(*)} a_m^{(*)}$ son productos de las anteriores por pendientes $a_m^{(*)}$ que son las verdaderas a_m multiplicadas por los factores indicados en el ángulo superior izquierdo del gráfico. Las sumas 59,05 y -63,13 deben ser divididas por 5 (por ser 5 cm la unidad de longitud) antes de agregarles los resultados (30) y (31). Finalmente, obtenida $T(\phi) = \int_{-\pi}^{+\pi} R(\psi) \cot \frac{1}{2}(\psi - \phi) d\psi$, se obtiene $G(\phi) = g(y)$ mediante la fórmula $G(\phi) = 0,10243 \cdot T(\phi)$ (Ver pág. 65).

m	$f_m^{(*)}$	$f_m^{(*)} a_m^{(*)}$	Divisor	Sumas parciales	-m	$f_m^{(*)}$	$f_m^{(*)} a_m^{(*)}$	Divisor	Sumas parciales	
0	7,87	7,87	1	7,87	-0	7,66	7,66	1	7,66	Suma pos.: 59,05
1	8	14,35	3/4	19,13	-1	7,60	13,55	3/4	18,07	% 5 11,81
2	8,33	9,05	1	24,27	-2	7,44	8,05	1	28,51	(30) 6,18
3	8,85	6,15			-3	7,30	5,10			Area pos.: 17,98
4	9,55	4,90			-4	7,20	3,70			Suma neg.: -63,13
5	10,60	4,27			-5	7,14	2,88			% 5 -12,63
11	11,70	19,30			-6	7,10	2,33			(31) -1,17
12	9,55	14,15	10	3,35	-7	7,08	1,96	10	2,25	Area neg.: -13,80
13	7,70	10,83			-8	7,07	1,69			Area total:
14	6,25	7,60			-9	7,08	1,48			T(φ) = 4,19
15	5,03	5,40			-10	7,09	1,32			G(φ) = 4,19 x 0,1024
16	3,95	3,68			-11	7,12	11,20			= 0,429 = g(y)
17	3,05	2,52	8	4,05	-12	7,20	10,70	8	6,14	Valor exacto:
18	2,15	1,53			-13	7,32	10,25			g(y) = 0,4271
19	1,38	0,35			-14	7,50	9,10			
20	0,50	0,24			-15	7,80	8,30			
21	0,30	0,11			-16	8,15	7,65			
22	1,25	0,36	66	0,26	-17	8,68	7,10	6	0,47	
23	2,25	0,45			-18	9,50	6,70			
24	3,35	0,33			-23	10,10	2,00			
25	4,50	0,23			-24	7,35	0,82			
					-25	5,80	0,30			10

Suma: 59,05

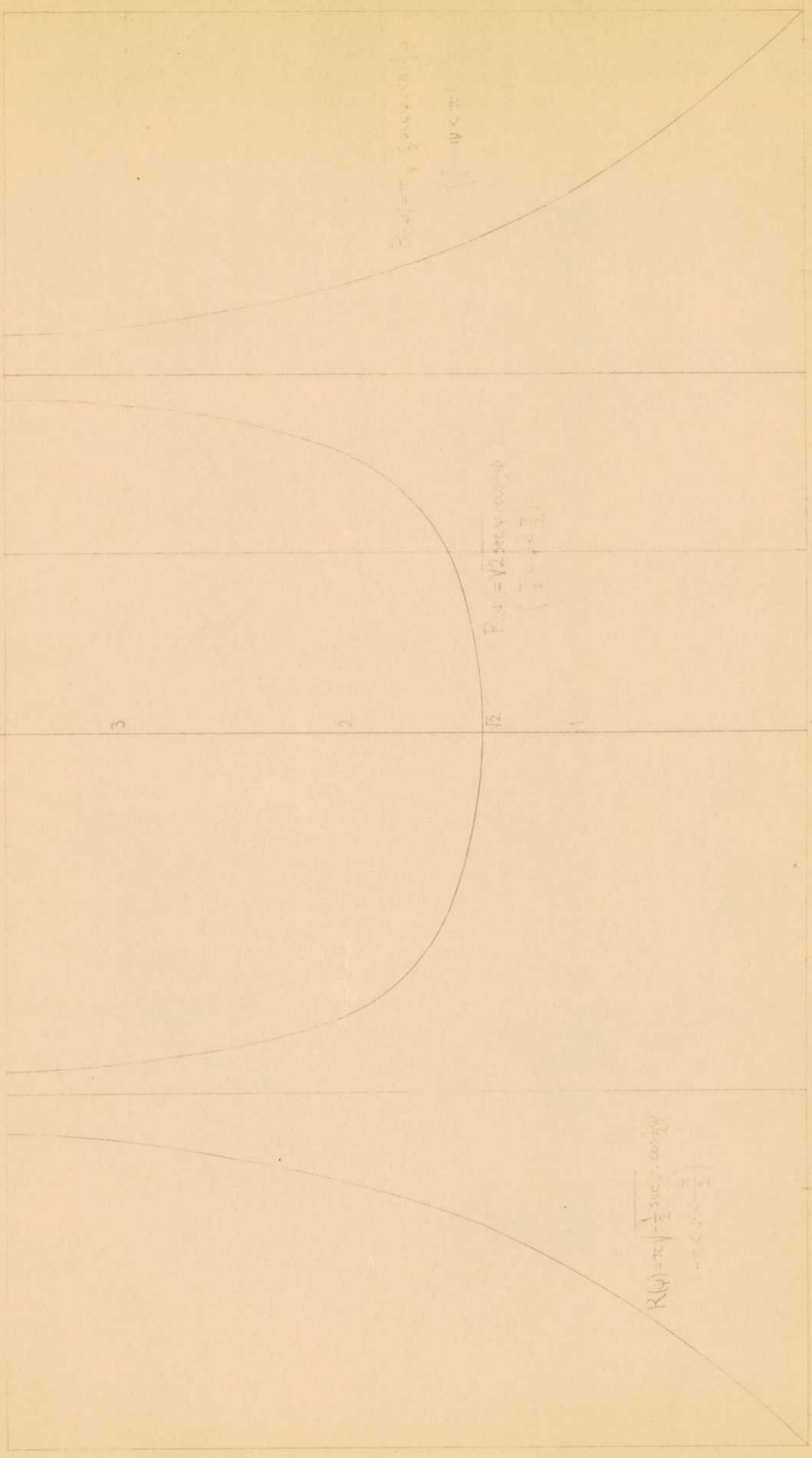
Suma: 63,13



one
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

Gráfica de la Función Real

y



$$R(\psi) = \pi \left(\frac{1}{2} \sec \psi + \cos \frac{\psi}{2} \right)$$

$$-\pi < \psi < -\frac{\pi}{2}$$

$$R(\psi) = \sqrt{2} \sec \psi \cos \frac{\psi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$R(\psi) = \pi \left(\frac{1}{2} \sec \psi + \cos \frac{\psi}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$$

APENDICE 1 - Tabulación de las funciones $g_n(x)$ del § 6

1) Relaciones entre las funciones $g_n(x)$ - Por ser $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1.3.5\dots(n-1)}{2^{n/2}} \sqrt{\pi}$ si n es par, se tiene: $g_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-t^2}}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{t-x}\right) t^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) + x.g_n$ (n =par) y $g_{n+1}(x) = x.g_n$ (n =impar)

Estas son relaciones de recurrencia.

Teniendo en cuenta que si $G(x)$ es la conjugada de $F(t)$ será $G'(x)$ la conjugada de $F'(t)$, resulta de $g_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n e^{-t^2}}{t-x} dt$ la fórmula siguiente:

$$g'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nt^{n-1} - 2t^{n+1}}{t-x} e^{-t^2} dt = ng_{n-1} - 2g_{n+1} \quad (n \geq 1). \text{ Además: } g'(x) = -2g_1(x)$$

Entonces: $g''_n(x) = n(n-1)g_{n-2} - (4n+2)g_n + 4g_{n+2}$ ($n \geq 0$). En particular:

$$g''(x) = -2g + 4g_2. \text{ Se tiene: } \begin{cases} g'_1 = g - 2g_2 \\ g''_1 = 4g_3 - 6g_1 \end{cases} \quad \begin{cases} g'_2 = 2g_1 - 2g_3 \\ g''_2 = 2g - 10g_2 + 4g_4 \end{cases} \quad \begin{cases} g'_3 = 3g_2 - 2g_4 = -xg_2 \\ g''_3 = 6g - 14g_2 + 4g_4 \end{cases}$$

También se puede expresar $g'_n(x)$ en función de $g_n(x)$ así:

$$xg'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}(x-t+t) - 2xt^n(t-x+x)}{t-x} e^{-t^2} dt = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n e^{-t^2}}{t-x} dt -$$

$$- \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-1} e^{-t^2} dt - \frac{2x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt - \frac{2x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n e^{-t^2}}{t-x} dt, \text{ que da:}$$

$$g'_n(x) = \left(\frac{n}{x} - 2x\right) g_n - \frac{2}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad (n=\text{par}); \quad g'_n(x) = \left(\frac{n}{x} - 2x\right) g_n - \frac{n}{\pi x} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \quad (n=\text{impar}).$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de las funciones $g_n(x)$

2) Tabulación de las funciones $g_n(x)$ - Se efectúa cómodamente mediante las ecuaciones diferenciales que acabo de establecer, pues equivale al trazado de la curva integral $y = g_n(x)$ en forma numérica, para lo cual existen varios métodos. Aplicaré el método de Milne para tabular la $g_2(x)$ entre $x=1,5$ y $x=2$ (ver gráfica en pág.26), con intervalo $h=0,05$.

Se empieza por calcular g_2 y g'_2 para $x_0 = 1,5$; $x_1 = 1,55$; $x_2 = 1,6$; $x_3 = 1,65$ mediante la fórmula de Taylor, para lo cual se requieren las derivadas sucesivas en el primer punto. Poniendo $y = g_2(x)$, $\frac{1}{x} = r$, se

tiene: $y' = 2(r-x)y - k$, siendo $k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5641896$, y de aquí:

$$y'' = 2(r-x)y' - 2(r^2+1)y, \quad y''' = 2(r-x)y'' - 4(r^2+1)y' + 4r^3y,$$

$$y^{IV} = 2(r-x)y''' - 6(r^2+1)y'' + 12r^3y' - 12r^4y, \quad y^V = 2(r-x)y^{IV} - 8(r^2+1)y''' +$$

$$+ 24r^3y'' - 48r^4y' + 48r^5y, \quad y^{VI} = 2(r-x)y^V - 10(r^2+1)y^{IV} + 40r^3y''' - 120r^4y'' +$$

$$+ 240r^5y' - 240r^6y, \text{ etc. Para } x_0 = 1,5 \text{ es } y_0 = -0,2409777, y'_0 = -0,162560$$

$$y''_0 = 0,9670913, y'''_0 = -0,9581860, y^{IV}_0 = -6,791266, y^V_0 = 29,28634,$$

$$y^{VI}_0 = 14,94526. \text{ Entonces la serie de Taylor da:}$$

$$y_1 = -0,2479185, \quad y_2 = -0,2525838, \quad y_3 = -0,2551454, \quad y \quad \text{con la}$$

ecuación diferencial se obtiene: $y'_1 = -0,1155371$, $y'_2 = -0,0716512$, $y'_3 = -0,0314769$. Aplicando reiteradamente las fórmulas:

$$y_n^{(1)} = y_{n-1} + \frac{4h}{3}(2y'_{n-1} - y'_{n-2} + 2y'_{n-1}) , \quad y_n^{(2)} = y_{n-2} + \frac{h}{3}(y'_{n-2} + 4y'_{n-1} + y'_n) ,$$

siendo $\epsilon = \frac{1}{29}(y_n^{(2)} - y_n^{(1)})$ el error de la 2ª, se obtiene la tablilla 1, y de ésta la 2 mediante las relaciones de recurrencia.

Tablilla 1			Tablilla 2		
x	ϵ_2	ϵ'_2	ϵ_1	ϵ	ϵ_3
1,5	-0,2409777	-0,1625601	-0,1606518	-0,4832276	-0,0793718
1,55	-0,2479185	-0,1155371	-0,1599474	-0,4671852	-0,1021789
1,6	-0,2525838	-0,0716512	-0,1578649	-0,4512841	-0,1220393
1,65	-0,2551454	-0,0314769	-0,1546336	-0,4356504	-0,1388961
1,7	-0,2558000	0,0045893	-0,1504706	-0,4203884	-0,1527652
1,75	-0,2547587	0,0363131	-0,1455764	-0,4055806	-0,1637329
1,8	-0,2522423	0,0636134	-0,1401346	-0,3912912	-0,1719413
1,85	-0,2484703	0,0865340	-0,1343083	-0,3775664	-0,1775753
1,9	-0,2436592	0,1052320	-0,1282417	-0,3644375	-0,1808577
1,95	-0,2380134	0,1199464	-0,1220582	-0,3519219	-0,1820313
2,0	-0,2317257	0,1309875	-0,1158629	-0,3400263	-0,1812566

La tablilla 1 permite determinar el mínimo de $g_2(x)$, que se presenta en $x = 1,693293$ y vale $-0,2558155$. Este último valor se calcula con la fórmula que da $g'(x)$.

La tabulación con intervalo más chico (por ej. 0,01) se efectúa fácilmente mediante fórmulas especiales con diferencias finitas (subtabulación).

APENDICE 2 - Tabulación de la conjugada de $J(t)$

Si $f(t)$ satisface a una ecuación diferencial lineal de cualquier orden cuyos coeficientes sean polinomios en t , se deduce fácilmente que su conjugada $g(x)$ satisface también a una ecuación análoga. En efecto, sea $P(t)y'' + Q(t)y' + R(t) = 0$ la ecuación a que satisface $f(t)$. Se tendrá:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [Py'' + Qy' + Ry] \frac{dt}{t-x} = 0, \text{ o bien: } \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [A(t,x) + \frac{P(x)}{t-x}] y'' + [B(t,x) + \frac{Q(x)}{t-x}] y' + [C(t,x) + \frac{R(x)}{t-x}] y \right\} dt = 0,$$

que da la ecuación $\int_{-\infty}^{\infty} A(t,x) y'' dt + \int_{-\infty}^{\infty} B(t,x) y' dt + \int_{-\infty}^{\infty} C(t,x) y dt + \pi [P(x)g'' + Q(x)g' + R(x)g] = 0$, o sea: $Pg'' + Qg' + Rg = G(x)$.

Entonces si se conocen las soluciones particulares de la primera ecuación el método de Lagrange permite resolver la segunda. Y si la solución no es satisfactoria para el cálculo numérico, la ecuación obtenida servirá para determinar numéricamente la curva integral a partir de un punto x conociendo $g(x)$ y $g'(x)$.

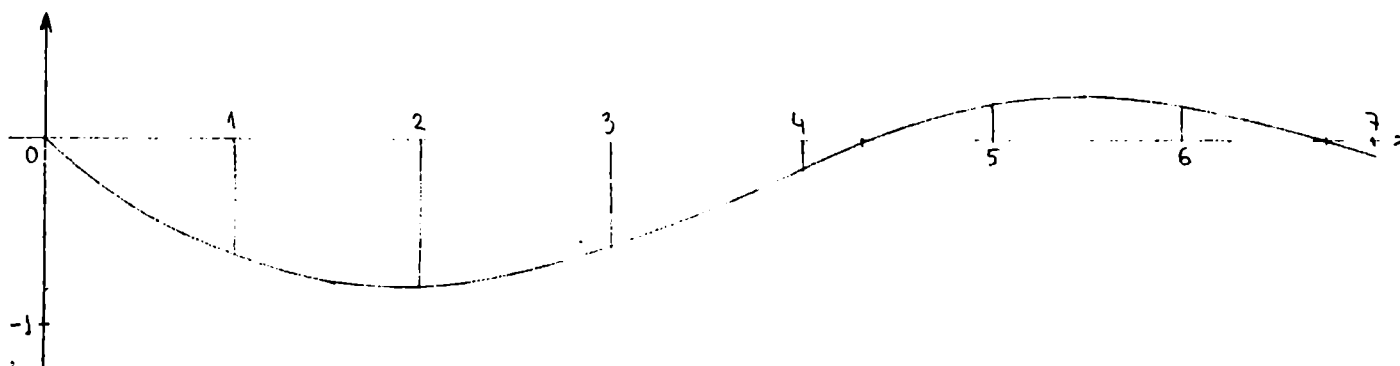
La función $J_0(t)$ de Bessel satisface la ecuación $ty'' + y' + ty = 0$, que da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (tJ_0'' + J_0' + tJ_0) \frac{dt}{t-x} = 0, \text{ o bien: } \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{t-x}\right) J_0'' + \frac{J_0'}{t-x} + \left(1 + \frac{x}{t-x}\right) J_0 \right] dt = [J_0']_{-\infty}^{\infty}$$

+ $\int_{-\infty}^{+\infty} J_0(t)dt + \pi(xg'' + g' + xg) = 0$. Por ser $J_0' = -J_1$ y $\int_0^{\infty} J_0(t)dt = 1$, resulta: $xg'' + g' + xg = -\frac{2}{\pi}$. Las funciones $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ son soluciones de la ecuación sin 2º miembro, y entonces el método de Lagrange da la solución general de la ecuación completa para $x \geq 0$, teniendo en cuenta que $J_0 Y_0' - Y_0 J_0' = \frac{2}{\pi x}$: $g(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) + J_0(x) \int_0^x Y_0(x)dx - Y_0(x) \int_0^x J_0(x)dx$. Debe ser $g(0) = 0$, y como $J_0(0) = 1$, $Y_0(0) = -\infty$ se deduce que $C_1 = C_2 = 0$, y la función buscada es: $g(x) = J_0(x) \int_0^x Y_0(x)dx - Y_0(x) \int_0^x J_0(x)dx$, fácil de tabular disponiendo de tablas de $J_0(x)$, $Y_0(x)$ y de las dos integrales definidas. Se tiene, también: $g'(x) = Y_0(x) \int_0^x J_0(x)dx - J_0(x) \int_0^x Y_0(x)dx$, con $g'(0) = \frac{-2}{\pi} = -0,63662$.

x	$J_0(x)$	$Y_0(x)$	$\int_0^x J_0(x)dx$	$\int_0^x Y_0(x)dx$	$g(x)$
0	1	$-\infty$	0	0	0
0,2	0,9900250	-1,0811053	0,19933433	-0,34570884	-0,1267590
0,4	0,9603982	-0,6060246	0,39460257	-0,50952483	-0,2501497
0,6	0,9120049	-0,3085099	0,58224127	-0,59927156	-0,3669114
0,8	0,8462874	-0,0868023	0,80018979	-0,63786890	-0,4703621
1	0,7651977	+0,0882570	0,91973041	-0,63706938	-0,6092787
1,2	0,6711327	0,2280835	1,06355767	-0,60490270	-0,6485499
1,4	0,5662551	0,3378951	1,18750205	-0,54783193	-0,7117924
1,6	0,4554022	0,4204269	1,28982097	-0,47156130	-0,7570255
1,8	0,3399864	0,4774317	1,36939857	-0,38136241	-0,7834523
2	0,2238908	0,5103767	1,42577029	-0,28219285	-0,7908589
2,2	0,1103623	0,5207843	1,45912634	-0,17871504	-0,7796135
2,4	0,0025077	0,5104147	1,47029299	-0,07526504	-0,7506484
2,6	-0,0968050	0,4813306	1,46069961	+0,02420250	-0,7054223
2,8	-0,1850360	0,4359160	1,43231169	+0,11657784	-0,6458647
3	-0,2600520	0,3768500	1,38756725	0,19765826	-0,5743061
3,2	-0,3201882	0,3070533	1,32928404	0,26620207	-0,4933958
3,4	-0,3642956	0,2296153	1,26056178	0,31996996	-0,4060079
3,6	-0,3917690	0,1477100	1,18467597	0,35775040	-0,3151440
3,8	-0,4025564	0,0645032	1,10496780	0,37896743	-0,2238297
4	-0,3971498	-0,0169407	1,02473416	0,38366965	-0,1350146
4,2	-0,3765571	-0,0937512	0,94712134	0,37250066	-0,0514740
4,4	-0,3422568	-0,1633365	0,87502609	0,34665164	+0,0242798
4,6	-0,2961378	-0,2234600	0,81100729	0,30779779	0,0900771
4,8	-0,2404253	-0,2723038	0,75721109	0,25802068	0,1441562
5	-0,1775868	-0,3085176	0,71531192	0,19971939	0,1852168
5,2	-0,1102904	-0,3312509	0,68647105	0,13551348	0,2124483
5,4	-0,0412101	-0,3401679	0,67131394	0,06814125	0,2255513
5,6	+0,0269709	-0,3354442	0,66992677	0,00036580	0,2247134
5,8	0,0917026	-0,3177464	0,68187187	-0,06517048	0,2106860
6	0,1506453	-0,2881947	0,70622122	-0,12595061	0,1845553

La gráfica de $g(x)$ es la siguiente:



NOTA

Conjugada de $J_n(t)$ - Estas funciones satisfacen la ecuación diferencial $t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$. Entonces se tiene: $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[t^2 J_n'' + t J_n' + (t^2 - n^2) J_n \right] \frac{dt}{t-x} = 0$,

o bien: $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(t+x + \frac{x^2}{t-x} \right) J_n'' + \left(1 + \frac{x}{t-x} \right) J_n' + \left(t+x + \frac{x^2-n^2}{t-x} \right) J_n \right] dt =$
 $\pi \left[x^2 g_n'' + x g_n' + (x^2 - n^2) g_n \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(t J_n'' + J_n' + t J_n)}_P dt + x \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(J_n'' - J_n)}_Q dt = 0$

Pero $P = \frac{n^2}{t} J_n \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} P \cdot dt = \begin{cases} 2n & (n=\text{impar}) \\ 0 & (n=\text{par}) \end{cases}$ y $Q = \frac{n^2}{t^2} J_n - \frac{1}{t} J_n' \therefore$

$\int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot dt = \left[-\frac{1}{t} J_n \right]_{-\infty}^{+\infty} + (n^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} J_n \frac{dt}{t^2} = \begin{cases} 2 & (n=\text{par}) \\ 0 & (n=\text{impar}) \end{cases}$. Resulta, pues, la ecuación:

$x^2 g_n'' + x g_n' + (x^2 - n^2) g_n = -\frac{2n}{\pi}$ ($n=\text{impar}$), o bien:

$x^2 g_n'' + x g_n' + (x^2 - n^2) g_n = -\frac{2x}{\pi}$ ($n=\text{par}$). Aplicando el método de Lagrange

y teniendo en cuenta que $J_n Y_n' - J_n' Y_n = \frac{2}{\pi x}$, se obtiene la solución general para cada caso:

$g_n(x) = C_1 J_n + C_2 Y_n + J_n \int Y_n dx - Y_n \int J_n dx$ ($n=\text{par}$)

$g_n(x) = C_1 J_n + C_2 Y_n + n \left(J_n \int Y_n \frac{dx}{x} - Y_n \int J_n \frac{dx}{x} \right)$ ($n=\text{impar}$). Las constantes C_1 y C_2 deben ser calculadas convenientemente.

Nota-Por ser $J_1 = -J_0'$, resulta: $g_1(x) = -g'(x) = J_1 \int_0^x Y_0 dx - Y_1 \int_0^x J_0 dx$.

Para $g_2(x)$ se tiene: $J_2 = J_0 - 2J_1' = J_0 + 2J_0''$, y por tanto:

$g_2(x) = g(x) + 2g''(x) = J_2 \int_0^x Y_0 dx - Y_2 \int_0^x J_0 dx - \frac{4}{\pi x}$. Se ve que las constantes C_1 y C_2 son nulas.

-----oOo-----

Angel José Guarnieri

Ang