Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Funciones de segunda especie de Legendre, Hermite y Laguerre, definidas mediante valores principales en el sentido de Cauchy

Cappa de Campi, Margarita Lucía

1958

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Cappa de Campi, Margarita Lucía. (1958). Funciones de segunda especie de Legendre, Hermite y Laguerre, definidas mediante valores principales en el sentido de Cauchy. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0974_CappadeCampi.pdf

Cita tipo Chicago:
Cappa de Campi, Margarita Lucía. "Funciones de segunda especie de Legendre, Hermite y Laguerre, definidas mediante valores principales en el sentido de Cauchy". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1958.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_0974_CappadeCampi.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

R E S U M E N

DE

T E S I S

FUNCIONES DE SEGUNDA ESPECIE DE LEGENDRE, HERMITE y LAGUERRE, DEFINIDAS MEDIANTE VALORES PRINCIPALES EN EL SENTIDO DE CAUCHY

-1958-

Res. de Tesis: 974

M. L. C. de Campi

R974

RESUMEN DE TESIS

Las llamadas funciones de Legendre de segunda especie $Q(x)$ - que son soluciones de la ecuación diferencial de Legendre - pueden definirse por la clásica fórmula de Heine:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt. \qquad (1)$$

Esta fórmula, que tiene sentido para todo z no perteneciente al intervalo $(-1, +1)$, permite deducir con facilidad muchas propiedades de las funciones $Q_n(z)$.

No sucede lo mismo si z es real y $|z| < 1$, pues entonces la integral (1) carece de sentido; lo tiene en cambio, si la integral se interpreta como valor principal de Cauchy:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\fint_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt \qquad (2)$$

Nos proponemos, en Capítulo I, utilizar sistemáticamente la definición (2) y deducir las propiedades de $Q_n(x)$ para $|x|<1$, utilizando los métodos clásicos de las operaciones con integrales con valores principales. También aplicaremos los Teoremas sobre pares de funciones transformadas de Hilbert mediante la sencilla definición de la función $\mathscr{P}_n(x)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_n(x) &= 0, \qquad |x| > 1,\\ &= P_n(x), \; |x| < 1.\end{aligned}$$

En Capítulo II estudiamos las propiedades de las funciones de segunda especie de Hermite -definidas en la famosa Memoria de P. Appell-J. Kampé De Fériot mediante un cuadro de condiciones para la solución trascendente de la ecuación de Hermite- con la definición:

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{x^2}{2}}\fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2/2}H_n(t)}{x-t}\,dt \qquad . \qquad (3)$$

FCEN-BA

Empleamos los mismos recursos del Capítulo anterior: operaciones con valores principales combinadas con las propiedades de los polinomios $H_n(x)$ y aplicación de Teoremas relativos a pares de funciones transformadas de Hilbert.

Las funciones de segunda especie de Laguerre $l_n(x)$, soluciones trascendentes de la ecuación de Laguerre, pueden ser definidas por la fórmula:

$$l_n(x) = e^x \fint_0^\infty \frac{e^{-t} L_n(t)}{t-x}\, dt \,. \qquad (4)$$

De ella deducimos - en Capítulo III - las propiedades de $l_n(x)$ y la relacionamos con la función exponencial integral:

$$-\mathrm{Ei}(x) = \int_{-x}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du, \qquad x < 0,$$

y la función exponencial modificada:

$$-\overline{\mathrm{Ei}(x)} = \fint_{-x}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du, \qquad x > 0.$$

Con las fórmulas de recurrencia obtenidas en los tres Capítulos, las funciones $Q_n(x)$, $h_n(x)$ y $l_n(x)$ pueden ser tabuladas en todo el campo real a partir de su expresión para $n=0$:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| ;$$

$$h_0(x) = \begin{cases} -Ei(x), & x<0; \\ -\overline{Ei(x)}, & x>0; \end{cases}$$

$$l_0(x) = -\sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\, dt \,.$$

En la última parte de este Trabajo expresamos las funciones de Legendre, Hermite y Laguerre en el espacio de las Distribuciones de Schwartz como productos de convolución de funciones convenientemente elegidas y la seudo función v.p. $1/x$.

Para ello introducimos la función $\underline{h}$ diferencia de dos funciones de Heaviside trasladadas a +1, -1, y escribimos:

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n(x)\, h * v.p.\frac{1}{x} ;$$

$$h_n = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-x^2/2} H_n(x) * v.p.\frac{1}{x} \right\} ;$$

$$l_n = u(x)\, L_n(x) * e^{x}\, v.p.\frac{1}{x} . \qquad (5)$$

siendo u(x) la función de Heaviside.

Algunos de los Teoremas anteriores se demuestran ahora con un instrumento que simplifica las operaciones de derivación pues, para derivar en el sentido de las Distribuciones un producto de convolución, se deriva cualquiera de los dos factores resultando considerablemente abreviados los desarrollos correspondientes.

)-(

FCEN-BA R 2 1

Margarita L. Cappa de Campi

Licenciada en Ciencias Físico-Matemáticas

TESIS DE DOCTORADO

FUNCIONES DE SEGUNDA ESPECIE DE LEGENDRE, HERMITE y LAGUERRE, DEFINIDAS MEDIANTE VALORES PRINCIPALES EN EL SENTIDO DE CAUCHY

-año 1958-

TESIS: 974

)-(

Presentada ante la

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la

Universidad Nacional de Buenos Aires

no 974

FCEFN-BA.

Esta Memoria ha sido realizada bajo la dirección del Dr Gonsáles Domínguez, a quien agradezco su valioso aporte bibliográfico y la orientación impresa al desarrollo del tema, producto de su competencia profesional y reconocida experiencia en la materia.

Margarita L. C. de Campos

PREFACIO

En el presente trabajo de Tesis se estudian las propiedades de las funciones de segunda especie de Legendre, Hermite y Laguerre definidas mediante integrales con valores principales en el sentido de Cauchy.

Las funciones de Legendre de segunda especie, solución trascendente de la ecuación de segundo orden de Legendre, pueden definirse mediante la clásica fórmula de Heine:

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt \quad , \; P_n(t) \text{ polinomio n-ésima de Legendre,}$$

válida para $\underline{x}$ no perteneciente al intervalo (-1, +1). La integral no es convergente en este intervalo, pero sí tiene sentido si se la interpreta como valor principal.

En el Capítulo I del presente trabajo se define:

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\,⨍_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt \quad , \quad -1<x<+1; \tag{1}$$

y se demuestra que esta fórmula representa la función de Legendre para $-1<x<+1$.

A partir de (1) se deducen las propiedades de $Q_n(x)$ utilizando sistemáticamente el cálculo de Valores Principales y los Teoremas relativos a pares de transformadas de Hilbert, dado que las funciones $Q_n(x)$ pueden interpretarse - salvo un factor constante - como transformadas de Hilbert de la función:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_n(x) = 0; & |x| > 1, \\ \quad\quad\;\; = P_n(x); & |x| < 1. \end{cases}$$

Con el mismo criterio, el Capítulo II estudia las propiedades de las funciones de segunda especie de Hermite definidas por la fórmula:

$$h_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{x^2}{2}}\,⨍_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)}{x-t}\,dt.$$

El Capítulo III estudia las propiedades de las funciones de segunda especie de Laguerre, las que se definen mediante la fórmula:

$$l_n(x) = e^x \int_0^\infty \frac{e^{-t} L_n(t)}{t-x}\, dt$$

La Teoría de las Distribuciones de L. Schwartz permite demostrar muchas de estas propiedades en forma más sencilla; en el Apéndice del presente trabajo se incluyen algunas de ellas obtenidas partiendo de la expresión de las funciones estudiadas y mediante los productos de convolución:

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n(x)\, h * v.p.\frac{1}{x};$$

$$h_n = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) * v.p.\frac{1}{x} \right\};$$

$$l_n = u(x)\, L_n(x) * e^x\, v.p.\frac{1}{x},$$

donde u(x) es la función de Heaviside y h(x) = $u_{-1} - u_{+1}$ es diferencia de dos funciones de Heaviside trasladadas respectivamente a -1 y +1.

)-(

INDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

APENDICE

)-(

CAPITULO I

FUNCIONES DE LEGENDRE DE SEGUNDA ESPECIE

1.1.- Preliminar.

Una solución de la ecuación diferencial de Legendre de segundo orden:

$$(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0,$$

linealmente independiente de la solución (fórmula de Rodrigues):

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n, \qquad .1.1.(1)$$

Puede expresarse bajo la forma (fórmula de Neumann): (°)

$$\mathcal{Q}_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{z-t}\,dt \qquad .1.1.(2)$$

en el plano complejo cortado en el segmento $[-1, +1]$.

En el segmento (-1, +1) la función de Legendre, segunda solución de la ecuación, es: (*)

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{Q}_n(x+i0)+\mathcal{Q}_n(x-i0)\right\}. \qquad .1.1.(3)$$

Definiremos la función de segunda especie de Legendre $Q_n(x)$ mediante una integral semejante a la .1.1.(2) pero con valor principal en el sentido de Cauchy, estudiando sus propiedades con esta nueva definición.

1.2.- Función de Legendre de segunda especie en (-1, +1).

La función de Legendre de segunda especie en el intervalo (-1, +1) está definida como límite de una función analítica en el semiplano $y > 0$. Utilizando la fórmula de Neumann .1.1.(2), será:

(°) Hobson (1), §31, §32, pp 49-52.-
(*) Hobson (1), §40, p 63.-

$$Q_n(x) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\left[\mathcal{Q}_n(x+iy)+\mathcal{Q}_n(x-iy)\right] = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)\,dt}{(x+iy)-t}+\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)\,dt}{(x-iy)-t}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(t)(x-t)\,dt}{(x-t)^2+y^2}.$$

Pero (°):

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)(x-t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt \longrightarrow ⨍_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt, \text{ cuando } y\to 0.$$

Por consiguiente:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}⨍_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt.$$

A este mismo resultado puede llegarse, sin recurrir a Teoremas generales, considerando que: (*)

$$\mathcal{Q}_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\,\lg\frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z).$$

Esto conduce a:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\,\lg\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - W_{n-1}(x)\ ;\quad -1<x<1;$$

y de la observación:

$$⨍_{-1}^{+1}\frac{dt}{x-t} = \lg\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \ ;\quad W_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t}\,dt,$$

resulta:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}⨍_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt\ ,\quad -1<x<1; \qquad .1.2.(1)$$

donde la integral es el valor principal de Cauchy:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left[\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x-\varepsilon}^{+1}\right].$$

(°) Hille & Tamarkin (1); *Lema 3.1 (p 341), en el que:*

$$g(x) = P_n(x) \quad \text{para } |x|<1\ ;\quad g(x)=0 \quad \text{para } |x|>1;$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt\ ;\quad \tilde{P}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)(x-t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt;$$

nótese que en nuestro caso $g(x)\in\mathcal{L}^2$ y existe $\tilde{g}(x)$ por el Teorema de Riesz(Riesz(1)).

(*) Copson (1); §11.4 p 285.

1.3.- Ortogonalidad de la familia de funciones $Q_n(x)$.

Definiremos las funciones $\mathcal{P}_n(x)$ tales que :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}_n(x) &= -\frac{\pi}{2} P_n(x), && \text{para } |x|<1 \\ &= 0, && \text{para } |x|>1 \end{aligned}\right\} \qquad .1.3.(1)$$

y las funciones $Q_n(x)$ tales que:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \fint_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)}{x-t}\, dt, \qquad .1.3.(2)$$

donde la integral será ordinaria si $|x| > 1$, o bien un valor principal si $|x| < 1$.

Definida la transformada de Hilbert de una función f(x) por:

$$\mathcal{H}\left[f(x)\right] = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt,$$

resultan las funciones $\mathcal{P}_n(x)$ y $Q_n(x)$, pares de transformadas, pues de acuerdo con 1.3.(1) y 1.3.(2), es:

$$Q_n(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{P}_n(t)}{t-x}\, dt.$$

Aplicando la fórmula de inversión para transformadas de Hilbert:

$$\mathcal{H}\left[\mathcal{H}(f(x))\right] = -f(x), \quad \text{es:} \quad \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_n(t)}{t-x}\, dt = -\mathcal{P}_n(x).$$

Esta fórmula nos permite, conocidas las propiedades de las funciones de segunda especie en $(-\infty, +\infty)$, deducir propiedades de los polinomios de Legendre en el intervalo (-1, +1).

Puesto que $\mathcal{P}_n(x) \in \mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$, podemos aplicar los Teoremas correspondientes (°), y es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[Q_n(t)\right]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathcal{P}_n(t)\right]^2 dt = \frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^{+1} \left[P_n(t)\right]^2 dt = \frac{\pi^2/4}{n+1/2} = \frac{\pi^2}{2(2n+1)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(t) \cdot Q_m(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_n(t) \cdot \mathcal{P}_m(t)\, dt = \frac{\pi^2}{4} \int_{-1}^{+1} P_n(t) \cdot P_m(t)\, dt = 0; \quad m \neq n.$$

(°) Titchmarsh (1); pp 121-138.

De manera que la familia de funciones $Q_n(x)$, definidas en $(-\infty, +\infty)$ constituye un sistema ortogonal de funciones con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x).\, Q_m(x)\, dx = \pi^2/2(2n+1), \text{ para } n = m \qquad .1.3.(3)$$
$$= 0, \qquad \text{para } n \neq m.$$

1.4.- $\int_{-1}^{+1} [Q_n(x)]^2 dx = \dfrac{\frac{\pi^2}{2} - \psi'(n+1)}{2n+1}$, siendo $\psi'(n+1) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1+m)^2}$.

De acuerdo con 1.3 (3), es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Q_n(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{-1} [\mathcal{Q}_n(x)]^2 dx + \int_{-1}^{+1} [Q_n(x)]^2 dx + \int_{+1}^{+\infty} [\mathcal{Q}_n(x)]^2 dx = \frac{\pi^2/4}{2(2n+1)};$$

además sabemos que $\mathcal{Q}_n(-x) = (-1)^{n+1}\mathcal{Q}_n(x)$, y por consiguiente:

$$\int_{1}^{\infty} [\mathcal{Q}_n(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{-1} [\mathcal{Q}_n(x)]^2 dx,$$

de modo que:

$$\int_{-1}^{+1} [Q_n(x)]^2 dx = \frac{\pi^2/4}{n+1/2} - 2\int_{1}^{\infty} [\mathcal{Q}_n(x)]^2 dx. \qquad .1.4.(1)$$

La integral del segundo miembro vale (°):

$$\int_{1}^{\infty} [\mathcal{Q}_n(x)]^2 dx = \frac{\psi'(n+1)}{2n+1}, \qquad .1.4.(a)$$

siendo $\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(z+n)^2}$ la derivada de la función $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, que es la derivada logarítmica de la función gamma (*).

Reemplazando .1.4.(a) en .1.4.(1), se obtiene:

$$\int_{-1}^{+1} [Q_n(x)]^2 dx = \frac{\pi^2/4}{n+1/2} - \frac{2\psi'(n+1)}{2n+1} = \frac{\frac{\pi^2}{2} - 2\psi'(n+1)}{2n+1}.$$

Este resultado aparece consignado en el Tratado de Erdélyi (°°).

1.5.- $\int_{-1}^{+1} Q_m(x).\, Q_n(x)\, dx = \dfrac{[\psi(m+1) - \psi(n+1)][1 + \cos m\pi . \cos n\pi]}{(n-m)(n+m+1)}$.

De acuerdo con 1.3 (3), para $m \neq n$, es:

(°) Erdélyi (1); Vol I, p 170 fórm (6).

(*) Erdélyi (1); Vol I, pp 1 y 15.

(°°) Erdélyi (1); Vol I, p 170 fórm (12), con $\nu = n$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} \mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n\, dx + \int_{-1}^{+1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx + \int_{+1}^{\infty} \mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n(x)\, dx = 0.$$

Cuando $m + n = 2p$, es

$$\mathcal{Q}_m(-x)\, \mathcal{Q}_n(-x) = (-1)^{m+1}(-1)^{n+1} \mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n(x) = \mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n(x);$$

y en tal caso es (°):

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = -2\int_{1}^{\infty} \mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n(x)\, dx = -2\, \frac{\psi(m+1) - \psi(n+1)}{(m-n)(m+n+1)},$$

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = 2\, \frac{\psi(m+1) - \psi(n+1)}{(n-m)(m+n+1)}. \qquad .1.5.(1)$$

Cuando $m + n = 2p + 1$, es

$$\mathcal{Q}_m(-x)\, \mathcal{Q}_n(-x) = -\mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n(x);$$

resulta:

$$\int_{-\infty}^{-1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = -\int_{1}^{\infty} \mathcal{Q}_m(x)\, \mathcal{Q}_n(x)\, dx,$$

y por consiguiente:

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = 0. \qquad .1.5.(2)$$

Los resultados 1.5.(1) y 1.5.(2) pueden expresarse con:

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, dx = \frac{[\psi(m+1) - \psi(n+1)][1 + \cos(m\pi)\cos(n\pi)]}{(n-m)(n+m+1)}, \quad m \neq n;$$

y en esta forma figuran en el tratado de Erdélyi (*).

1.6.- <u>Fórmula de recurrencia.</u>

Demostraremos la fórmula de recurrencia para $Q_n(x)$ en $(-1, +1)$, análoga a la fórmula de recurrencia de los polinomios de Legendre.

Por ser:

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x)$$

será:

(°) Erdélyi (1); Vol I, p 170 fórm (5).

(*) Erdélyi (1); Vol I, p 170 fórm (11) con ν, σ enteros no negativos.

$$(n+1)\, Q_{n+1}(x) = (2n+1)\, \frac{1}{2} \fint_{-1}^{+1} \frac{t P_n(t)}{x-t}\, dt - n\, Q_{n-1}(x) \qquad .1.6.(1)$$

de acuerdo con la definición de $Q_n(x)$ (1.2 (1)).

Además, por ser $\int_{-1}^{+1} P_n(t)\,dt = 0$, tendremos que:

$$\frac{1}{2} \fint_{-1}^{+1} \frac{t P_n(t)}{x-t}\, dt = x\, \frac{1}{2} \fint_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)\, dt}{x-t} = x\, Q_n(x) . \qquad .1.6.(a)$$

Reemplazando .1.6.(a) en .1.6.(1), resulta:

$$(n+1)\, Q_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, Q_n(x) - n\, Q_{n-1}(x) , \qquad .1.6.(2)$$

que es la fórmula de recurrencia buscada.

1.7.- Algunos valores de $Q_n(x)$.

Utilizando la definición 1.2 (1), podemos verificar las fórmulas siguientes:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{1+x}{1-x}\right); \quad Q_0(0) = 0 ; \qquad .1.7.(1)$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2}\, x \lg \left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1; \; Q_1(0) = -1 ; \qquad .1.7.(2)$$

$$Q_{2p}(0) = 0, \quad p = 1,2,3,\ldots\ldots ; \qquad .1.7.(3)$$

$$Q_{2p+1}(0) = (-1)^{p+1} \frac{2.4.6.\cdots.2p}{3.5.7.\cdots(2p+1)} , \quad p = 1,2,3,\ldots ; \qquad .1.7.(4)$$

$$Q_n'(x) = \frac{1}{2} \left\{ \fint_{-1}^{+1} \frac{P_n'(t)\, dt}{x-t} + \frac{P_n(-1)}{x+1} - \frac{P_n(1)}{x-1} \right\} ; \qquad .1.7.(5)$$

$$Q_0'(0) = 1 ; \qquad .1.7.(6)$$

$$Q_1'(0) = 0 ; \qquad .1.7.(7)$$

$$Q_{2m}'(0) = (-1)^m \frac{2.4.\cdots.2m}{3.5.\cdots(2m-1)} , \quad m = 1,2,3,\ldots ; \qquad .1.7.(8)$$

$$Q_{2m+1}'(0) = 0 , \qquad m = 1,2,3,\ldots ; \qquad .1.7.(9)$$

$$\fint_{-1}^{+1} \frac{P_{2m+1}'(t)\, dt}{t} = 0 . \qquad .1.7(10)$$

Las fórmulas .1.7.(1) y .1.7.(2) resultan por cálculo directo pues es $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$. Con aquéllas fórmulas y la de recurrencia .1.6.(2), para $n = 0$, se obtienen .1.7.(3) y .1.7.(4).

La fórmula .1.7.(5) es aplicación de un Teorema de Hardy (°), relativo a la derivación de este tipo de integrales con valores principales. Las fórmulas .1.7.(6) y .1.7.(7) resultan casos particulares de .1.7.(5) con $P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$, $P_0'(x) = 0$, $P_1'(x) = 1$.

Para obtener .1.7.(8) y .1.7.(9), puede derivarse la fórmula de recurrencia .1.6.(2), escribirla para $x = 0$ y usar .1.7.(6) y .1.7.(7). Obtenida .1.7.(9), comparándola con .1.7.(5), resulta .1.7.(10).

1.8.- $\underline{(1-x^2)\,Q_n''(x) - 2x\,Q_n'(x) + n(n+1)\,Q_n(x) = 0.}$

Demostraremos que la función de Legendre $Q_n(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\fint_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)\,dt}{x-t}$, satisface a la ecuación de Legendre en $(-1, +1)$.

Escribiendo la ecuación com la primera solución:

$$(1-t^2)\,P_n''(t) - 2t\,P_n'(t) + n(n+1)\,P_n(t) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)\,P_n'(t)\right\} + n(n+1)\,P_n(t) \equiv 0, \quad -1 < t < +1,$$

podremos deducir:

$$\frac{1}{2}\fint_{-1}^{+1}\frac{\frac{d}{dt}\{(1-t^2)P_n'(t)\}}{x-t}\,dt + n(n+1)\,Q_n(x) = 0.$$

La integral puede calcularse utilizando reiteradamente el Teorema de Hardy ya citado, según el cual será:

$$\frac{1}{2}\fint_{-1}^{+1}\frac{\frac{d}{dt}\{(1-t^2)P_n(t)\}}{x-t}\,dt = \frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{2}\fint_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)P_n(t)}{x-t}\,dt + \frac{d}{dt}\fint_{-1}^{+1}\frac{t\,P_n(t)}{x-t}\,dt \quad .1.8.(1)$$

Además, utilizando la fórmula (*):

$$x^z\fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(y)\,dy}{x-y} = \fint_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^z h(y)\,dy}{x-y} + \sum_{\nu=1}^{z} x^{z-\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,y^{\nu-1}\,dy, \quad z \geq 1, \quad .1.8.(2)$$

(°) Hardy (1); p.87.-
(*) Gonzalez Domínguez-Scarfiello (1); fórm (3,0;5).-

pondremos:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{t^2 P_n(t)}{x-t}\,dt = x^2 Q_n(x) - \frac{x}{2}\int_{-1}^{+1} t\,P_n(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_n(t)\,dt, \qquad .1.8.(a)$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{t\,P_n(t)}{x-t}\,dt = 2x\,Q(x) - \int_{-1}^{+1} P_n(t)\,dt. \qquad .1.8.(b)$$

Derivando .1.8.(a) y .1.8.(b) resulta:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)P_n(t)}{x-t}\,dt = (1-x)^2 Q_n''(x) - 4x\,Q_n'(x) - 2\,Q_n(x), \qquad .1.8.(a')$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{t\,P_n(t)}{x-t}\,dt = 2x\,Q_n'(x) + 2\,Q_n(x). \qquad .1.8.(b')$$

Reemplazando .1.8.(a') y .1.8.(b') en .1.8.(1), queda:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\frac{d}{dt}\{(1-t^2)P_n(t)\}}{x-t}\,dt = (1-x^2)\,Q_n''(x) - 2x\,Q_n'(x). \qquad .1.8.(3)$$

Finalmente, de 1.8.(1) y 1.8.(3), resulta:

$$(1-x^2)\,Q_n''(x) - 2x\,Q_n'(x) + n(n+1)\,Q_n(x) = 0.$$

1.9.- <u>Wronskiano</u> <u>$W_n(x)$</u> $= \begin{vmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ P_n'(x) & Q_n'(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{1-x^2}.$

Las funciones $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ satisfacen la ecuación de Legendre en (-1, +1):

$$(1-x^2)\,P_n''(x) - 2x\,P_n'(x) + n(n+1)\,P_n(x) = 0,$$

$$(1-x^2)\,Q_n''(x) - 2x\,Q_n'(x) + n(n+1)\,Q_n(x) = 0;$$

de lo cual resulta:

$$(1-x^2)\left\{Q_n(x)\,P_n''(x) - Q_n''(x)\,P_n(x)\right\} - 2x\left\{Q_n(x)\,P_n'(x) - Q_n'(x)\,P_n(x)\right\} = 0,$$

$$-\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_n(x)\,Q_n'(x) - P_n'(x)\,Q_n(x)\right]\right\} = 0.$$

Para $-1 < x < +1$, se obtiene:

$$W_n(x) = P_n(x)\,Q_n'(x) - P_n'(x)\,Q_n(x) = \frac{K}{1-x^2}.$$

El valor de <u>K</u> resulta de calcular $W_n(0) = K$; para ello basta utilizar las fórmulas 1.7 (3), 1.7 (4), 1.7 (8), 1.7 (9), obteniéndose K = 1 para <u>n</u> par o impar.

Por consiguiente:

$$W_n(x) = \frac{1}{1-x^2}\ , \quad -1 < x < +1,$$

lo cual indica que $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ son linealmente independientes.

Observamos que, fuera del segmento (-1, +1), el wronskiano de $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ tiene la misma forma: (°)

$$W_n(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

1.10.- $P_n(x)\,Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\,Q_n(x) = \frac{1}{n}$.

Para demostrar esta fórmula, consideremos la integral:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)\,P_{n-1}(t)}{x-t}\,dt,$$

siendo los $P_{n-1}(t)$ y $P_n(t)$:

$$P_{n-1}(t) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^m \ ; \quad P_n(t) = \sum_{m=0}^{n} b_m t^m.$$

Por consiguiente:

$$I = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{t^m P_n(t)}{x-t}\,dt = \sum_{m=0}^{n-1} a_m I_m.$$

La integral I_m es inmediata utilizando la fórmula de González Domínguez 1.8 (2), y tomando en cuenta que:

$$\int_{-1}^{+1} t^{\nu-1} P_n(t)\,dt = 0 \ , \quad \nu \leq n,$$

se obtiene $I_m = x^m Q_n(x)$, con lo cual resulta:

$$I = P_{n-1}(x)\,Q_n(x). \qquad .1.10.(1)$$

Cuando consideramos:

$$I = \sum_{m=0}^{n} b_m \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{t^m P_{n-1}(t)}{x-t}\,dt,$$

el mismo razonamiento nos conduce a:

(°) Hobson (1); p 72 form (79).-

$$I = P_n(x)\, Q_{n-1}(x) - \frac{b_n}{2}\int_{-1}^{+1} t^{n-1} P_{n-1}(t)\, dt.. \qquad .1.10.(2)$$

Esta última integral es:

$$I = \int_{-1}^{+1} t^{n-1} P_{n-1}(t)\, dt = \frac{1}{a_{n-1}}\int_{-1}^{+1}\left\{P_{n-1}(t) - \sum_{m=0}^{n-2} a_m t^m\right\} = \frac{1}{a_{n-1}}\int_{-1}^{+1}\left(P_{n-1}(t)\right)^2 dt,$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{a_{n-1}} \cdot \frac{2}{(2n-1)}\ . \qquad .1.10.(a)$$

De .1.10.(a) y .1.10.(2), resulta:

$$I = P_n(x)\, Q_n(x) - \frac{b_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{1}{(2n-1)}\ . \qquad .1.10.(3)$$

Podemos calcular b_n / a_{n-1} , pues es:

$$\frac{b_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{1.3.5.\dots.(2n-1)}{n!}}{\dfrac{1.3.5.\dots.(2n-3)}{(n-1)!}} = \frac{2n-1}{n}\ . \qquad .1.10.(b)$$

De .1.10.(b) y .1.10.(3), se obtiene:

$$I = P_n(x)\, Q_n(x) - \frac{1}{n}\ . \qquad .1.10.(4)$$

Igualando .1.10.(1) y .1.10.(4), quedará:

$$P_n(x)\, Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\, Q_n(x) = \frac{1}{n} \qquad .1.10..(5)$$

Esta fórmula coincide con:

$$P_n(x)\, Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\, Q_n(x) = \frac{1}{n}$$

válida para $|x| > 1$. (°)

1.11.- $\dfrac{Q_n(x)}{P_n(x)} = Q_0(x) - \left\{\dfrac{1}{n\, P_n(x)\, P_{n-1}(x)} + \dfrac{1}{(n-1)\, P_{n-1}(x)\, P_{n-2}(x)} + \dots + \dfrac{1}{P_1(x)\, P_0(x)}\right\}$

Esta fórmula resulta directamente de aplicar la 1.10 (5), pues dividiéndola por $P_n(x)\, P_{n-1}(x)$, se obtiene:

(°) Hobson (1); p 72 fórm (76).-

$$\frac{Q_{n-1}(x)}{P_{n-1}(x)} - \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{n\,P_n(x)\,P_{n-1}(x)},$$

$$\frac{Q_{n-2}(x)}{P_{n-2}(x)} - \frac{Q_{n-1}(x)}{P_{n-1}(x)} = \frac{1}{(n-1)\,P_{n-1}(x)\,P_{n-2}(x)},$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{Q_0(x)}{P_0(x)} - \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} - \frac{1}{P_1(x)\,P_0(x)}.$$

Sumando miembro a miembro se obtiene la fórmula propuesta:

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = Q_0(x) - \left\{ \frac{1}{n\,P_n(x)\,P_{n-1}(x)} + \cdots\cdots + \frac{1}{P_1(x)\,P_0(x)} \right\},\ -1<x<1,$$

la cual es - por supuesto - semejante a la que resulta de cambiar $Q_n(x)$ por $\mathcal{Q}_n(x)$ y considerar $\underline{x}$ fuera del intervalo (-1, +1).

)-(

CAPITULO II

FUNCIONES DE HERMITE DE SEGUNDA ESPECIE

2.1.- Funciones de Hermite de segunda especie.

Definiremos la función de Hermite de segunda especie por:

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t}\, dt, \qquad .2.1.(1)$$

donde la integral es un valor principal y $H_n(x)$ es el polinomio n-ésimo de Hermite, que tiene las propiedades siguientes:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right); \qquad .2.1.(2)$$

$$H_n(x) - x\, H_{n-1}(x) + (n-1)\, H_{n-2}(x) = 0\ , \quad n > 1; \qquad .2.1.(3)$$

$$H_n'(x) = n\, H_{n-1}(x); \qquad .2.1.(4)$$

$$H_n''(x) - x\, H_n'(x) + n\, H_n(x) = 0; \qquad .2.1.(5)$$

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2^n}\,\frac{2n!}{n!}\ ; \quad H_{2n}'(0) = 0; \qquad .2.1.(6)$$

$$H_{2n+1}(0) = 0 \quad ; \quad H_{2n+1}'(0) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[H_n(x)\right]^2 dx = n!\sqrt{2\pi}; \qquad .2.1.(7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = 0.$$

2.2.- La integral $\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\, dt$.

Sea:

$$y(x) = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\, dt,$$

derivando resulta: (°)

$$y'(x) = -\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{t\, e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\, dt = -x\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -x\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\, dt - \sqrt{2\pi}.$$

(°) Aplicando el Teorema de Hardy (1), p 87.-

Observemos que la integral considerada es solución particular de la ecuación lineal:

$$y' = -xy - \sqrt{2\pi}\ ,$$

cuya solución general es:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-\sqrt{2\pi}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt + C\right].$$

La solución particular

$$y_p = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\,dt$$

corresponde al caso en que $C = 0$, pues:

$$C = y_p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\,dt = 0.$$

Por consiguiente resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\,dt = -\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt. \qquad .2.2.(1)$$

A este resultado puede llegarse también utilizando la fórmula:

$$\mathcal{H}\left[f(x)\right] = -i\,\mathcal{F}^{-1}S\,\mathcal{F}\left[f(x)\right] \qquad .2.2.(2)$$

siendo S el operador signo: $S\left[\varphi(x)\right] = \operatorname{sgn} x\ \varphi(x)$, y $\mathcal{F}^{-1}$ la inversa de la transformación $\mathcal{F}$ de Fourier. (°)

Esta fórmula es válida para $f(x) \in \mathcal{L}^2(-\infty,\infty)$ y por consiguiente aplicable a $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

De acuerdo con .2.2.(2), y tomando en cuenta la paridad de las funciones es:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t-x}\,dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn} u\ e^{-iux}du\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{iut}dt =$$

$$= -\frac{4}{2\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{sen} ux\,dx\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cos ut\,dt.$$

Las transformadas seno y coseno de Fourier de $e^{-\frac{t^2}{2}}$ figuran tabuladas (*) y de acuerdo con ellas se llega nuevamente a .2.2.(1).

(°) Titchmarsh (1) Cap V p 119.-
(*) Erdélyi (2); Vol I form (11) p 15; form (18) p 73.-

2.3 Las funciones $h_n(x)$ y sus transformadas de Hilbert.

Dada una función $f(x)$ su transformada de Hilbert es:

$$\mathcal{H}\left[f(x)\right] = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt\ ;$$

siendo:

$$h_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{t-x}\, dt\ ,$$

las funciones de cuadrado sumable:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} h_n(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{t-x}\, dt\ ,$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} h_n(t)}{t-x}\, dt\ ,$$

resultan pares de transformadas de Hilbert.

Por consiguiente, para $m=n$, es: (°)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} h_n(x)\right]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\right]^2 dx\ ;$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left\{h_n(x)\right\}^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left\{H_n(x)\right\}^2 dx\ .$$

Análogamente, si $m \neq n$, resulta:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} h_m(x)\, h_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx\ .$$

Además, sabemos que: (*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = (-1)^{\frac{m-n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right), \quad (m+n) \text{ par}\ ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = 0, \qquad (m+n) \text{ impar};$$

de lo cual se deduce:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} h_m(x)\, h_n(x)\, dx = 0\ , \qquad (m+n) \text{ impar},$$

$$= \frac{\pi}{2} (-1)^{\frac{m-n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right), \quad (m+n) \text{ par},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left[h_n(x)\right]^2 dx = \frac{\pi}{2}\, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad m=n.$$

(°) Titchmarsh (1), pp 121 y 138.-
(*) Erdelyi (2), vol II, p 289.-

2.4.- Algunos valores de $h_n(x)$.

De acuerdo con .2.2.(1), y siendo $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, resulta:

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t} dt = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt. \qquad .2.4.(1)$$

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} =$$

$$= x \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt - e^{\frac{x^2}{2}};$$

$$\therefore \quad h_1(x) = H_1(x)\, h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}}. \qquad .2.4.(2)$$

2.5.- $h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} h_0(x) \right\}$.

Aplicando .2.1.(1) y 2.1.(2), resulta:

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t} dt =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{d^n(e^{-\frac{t^2}{2}})}{dt^n}}{x-t} dt = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t} dt =$$

$$= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} h_0(x) \right\}. \qquad .2.5.(1)$$

Este resultado se consigna en la memoria de P. Appell-J. Kampé De Fériet. (°)

2.6.- $h_n(x) - x\, h_{n-1}(x) + (n-1)\, h_{n-2}(x) = 0, \quad n > 1$

Sabemos que:

$$H_n(t) - t\, H_{n-1}(t) + (n-1)\, H_{n-2}(t) = 0, \quad n > 1;$$

$$H_n(t) = t\, H_{n-1}(t) - (n-1)\, H_{n-2}(t).$$

Por consiguiente, y de acuerdo con la definición de $h_n(x)$ -.2.1.(1)- resulta:

(°) P. Appell-J. Kampé De Fériet (1), p 362, fórm (72).-

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} \{t H_{n-1}(t) - (n-1) H_{n-2}(t)\}}{x-t} dt ;$$

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-\frac{t^2}{2}} H_{n-1}(t)}{x-t} dt - (n-1) h_{n-2}(x). \qquad .2.6.(1)$$

La integral del segundo miembro de .2.6.(1), vale - teniendo en cuenta la .2.1.(7):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-\frac{t^2}{2}} H_{n-1}(t)}{x-t} dt = x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{n-1}(t)}{x-t} dt$$

Reemplazando este resultado en .2.6.(1), se obtiene:

$$h_n(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{n-1}(t)}{x-t} dt - (n-1) h_{n-2}(x) = x h_{n-1}(x) - (n-1) h_{n-2}(x);$$

$$\therefore\ h_n(x) - x h_{n-1}(x) + (n-1) h_{n-2}(x) = 0. \qquad .2.6.(2)$$

2.7.- $\underline{h_n'(x) = n\, h_{n-1}(x)}$.

$$h_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \left\{ e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t} \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ x e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t} dt + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)\, dt}{x-t} \right\} \qquad .2.7.(a)$$

Aplicando el Teorema de Hardy (*) para $a \to \infty$, $A \to -\infty$, resulta:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{d}{dt}\{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)\}}{x-t} dt =$$

$$= -x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n'(t)}{x-t} dt. \qquad .2.7.(b)$$

Reemplazando .2.7.(b) en .2.7.(a), se obtiene:

$$h_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n'(t)}{x-t} dt.$$

Sabemos que $H_n'(t) = n\, H_{n-1}(t)$ y, por consiguiente:

$$h_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{n-1}(t)}{x-t} dt$$

$$\therefore\ h_n'(x) = n\, h_{n-1}(x). \qquad .2.7.(1)$$

(*) Hardy (1), p 87.-

2.8.- $h_n''(x) - x\, h_n'(x) + n\, h_n(x) = 0.$

De acuerdo con .2.7.(1), es:

$$h_{n-1}(x) = \frac{h_n'(x)}{n}\ , \quad h_{n-2}(x) = \frac{h_n''(x)}{n(n-1)}\ , \quad n > 1.$$

Reemplazando estos valores en .2.6.(2), resulta:

$$h_n(x) - \frac{1}{n}\, x\, h_n'(x) + \frac{(n-1)}{n(n-1)}\, h_n''(x) = 0\ ,$$

de manera que para $n > 1$, $h_n(x)$ satisface la ecuación de Hermite:

$$h_n''(x) - x\, h_n'(x) + n\, h_n(x) = 0.$$

Verificaremos que para $n = 0$ y $n = 1$, $h_n(x)$ satisface también dicha ecuación.

(a) Para $n = 0$, es:

$$h_0(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt\ ; \quad h_0'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\ ; \quad h_0''(x) = x\, e^{\frac{x^2}{2}};$$

y en la ecuación de Hermite será:

$$h_0''(x) - x\, h_0'(x) + n\, h_0(x) = x\, e^{\frac{x^2}{2}} - x\, e^{\frac{t^2}{2}} = 0.$$

(b) Para $n = 1$, es:

$$h_1(x) = x \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt - e^{\frac{x^2}{2}};$$

$$h_1'(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt + x e^{\frac{x^2}{2}} - x e^{\frac{x^2}{2}} = \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt; \quad h_1''(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Con estos valores, la ecuación de Hermite será:

$$h_1''(x) - x\, h_1'(x) + h_1(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - x \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt + x \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt - e^{\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Conclusión: La función $h_n(x)$ satisface la ecuación de Hermite para $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$

2.9.- Valor de $h_n(x)$ y de $h'_n(x)$ para $x=0$.

Para $x=0$, la fórmula de recurrencia .2.6.(1) se reduce a:

$$h_n(0) = -(n-1)\, h_{n-2}(0).$$

Consideremos dos casos; n par y n impar.

(a) Si $n = 2m$, es:

$$h_{2m}(0) = -(2m-1)\, h_{2m-2}(0)\,;$$
$$h_{2m-2}(0) = -(2m-3)\, h_{2m-4}(0)\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_2(0) = (-1)\, h_0(0).$$

Por consiguiente:

$$h_{2m}(0) = (-1)^m (2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 3.1\, h_0(0) = 0, \text{ pues } h_0(0) = 0.$$

resulta: $$h_{2m}(0) = 0.$$

(b) Si $n = 2m + 1$, es:

$$h_{2m+1}(0) = -2m\, h_{2m-1}(0)\,;$$
$$h_{2m-1}(0) = -(2m-2)\, h_{2m-3}(0)\,;$$
$$h_{2m-3} = -(2m-4)\, h_{2m-5}(0)\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_3(0) = -2h_1(0) = -2(-1)\,; \text{ pues } h_1(0) = -1.$$

Por consiguiente:

$$h_{2m+1}(0) = (-1)^m(-1)\, 2m\,(2m-2)\cdots\cdots 2 = (-1)^{m+1} 2^m\, m!\,;$$

resulta: $$h_{2m+1}(0) = (-1)^{m+1} 2^m\, m!.$$

(c) Calcularemos $h'_n(0)$ para $n = 2m$ utilizando .2.7.(1):

$$h'_{2m}(0) = 2m\, h_{2m-1}(0) = 2m\, h_{(2m-2)+1}(0) = 2m\, h_{2(m-1)+1}(0).$$

Aplicando el resultado de (b), quedará:

$$h'_{2m}(0) = 2m\,(-1)^m 2^m\, m!\,.$$

(d) Nuevamente utilizaremos .2.7.(1); con $n = 2m + 1$, quedando:

$$h'_{2m+1}(0) = (2m+1)\, h_{2m}(0) = 0.$$

En resumen:

$$\left\{\begin{array}{ll} h_{2m}(0)=0\ ; & h'_{2m}(0)=(-1)^m 2^m m!\ ; \\ h_{2m+1}(0)=(-1)^{m+1}2^m m!\ ; & h'_{2m+1}(0)=0\ . \end{array}\right. \qquad .2.9.(1)$$

Esto cuadro es el de las condiciones que definen a $h_n(x)$ en la memoria citada. (°)

Estos mismos resultados pueden obtenerse directamente de la definición de $h_n(x)$.

(a)

$$h_{2m}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m}(t)}{t}\, dt\ ;$$

observamos que el integrando es función impar, dado que $H_{2m}(-t)=H_{2m}(t)$, y resulta:

$$h_{2m}(0) = 0.$$

(b)

$$h_{2m+1}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)}{t}\, dt$$

Utilizando la fórmula de recurrencia - para $H_{2m+1}(t)$ - es:

$$h_{2m+1}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} \left[t H_{2m}(t) - 2m H_{2m-1}(t)\right]}{t}\, dt \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -2m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m-1}(t)}{t}\, dt \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (-1)^m 2m(2m-2)\ldots\ldots 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_1(t)}{t}\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^{m+1} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^{m+1} 2^m m! \sqrt{2\pi}.$$

$$\therefore\ h_{2m+1}(0) = (-1)^{m+1} 2^m m!.$$

(c)

$$h'_{2m}(0) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H'_{2m}(t)}{x-t}\, dt \right]_{x=0} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 2m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m-1}(t)}{t}\, dt = 2m\, h_{2m-1}(0)\ ;$$

$$\therefore\ h'_{2m}(0) = (-1)^m 2^m m!.$$

(°) P. Appell-Kampé De Fériet (1); p 357.-

(d)

$$h'_{2m+1}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}H'_{2m+1}(t)}{t}dt = -\frac{(2m+1)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}H_{2m}(t)}{t}dt =$$
$$= (2m+1)\, h_{2m}(0) = 0 .$$

2.10.- <u>Wronskiano de $H_n(x)$ y $h_n(x)$</u>.

Siendo $H_n(x)$ y $h_n(x)$ soluciones de la ecuación de Hermite linealmente independientes, su wronskiano será distinto de cero. Demostraremos que:

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} H_n(x) & h_n(x) \\ H'_n(x) & h'_n(x) \end{vmatrix} = H_n(x)\, h'_n(x) - H'_n(x)\, h_n(x) = n!\, e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Sabemos que:

$$H''_n(x) - x\, H'_n(x) + n\, H_n(x) = 0,$$

$$h''_n(x) - x\, h'_n(x) + n\, h_n(x) = 0 .$$

Multiplicando la primera ecuación por $h_n(x)$, la segunda por $H_n(x)$ y restando miembro a miembro resulta:

$$\frac{d}{dx}\left\{ e^{-\frac{x^2}{2}}\left[H'_n(x)\, h_n(x) - H_n(x)\, h'_n(x)\right]\right\} \equiv 0 ;$$

$$\frac{d}{dx}\left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} W_n(x)\right\} \equiv 0 ;$$

$$W_n(x) = C e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Para calcular la constante C, hacemos $x = 0$ obteniendo:

$$W_n(0) = C.$$

Los valores en el orígen de $h_n(x)$ se calcularon ya en 2.9; por consiguiente se tiene:

$$W_{2m}(0) = H_{2m}(0)\, h'_{2m}(0) - H'_{2m}(0)\, h_{2m}(0) = \left\{\frac{(-1)^m 2m!}{2^m m!}\right\}\cdot\left\{(-1)^m 2^m m!\right\} = 2m!$$

$$W_{2m+1} = -\left\{\frac{(-1)^m (2m+1)}{2^m m!}\right\}\left\{(-1)^m 2^m m!\right\} = (2m+1)! \;;\quad \therefore\quad C = W_n(0) = n! \;;$$

$$W_n(x) = n!\, e^{\frac{x^2}{2}}. \qquad .2.10.(1)$$

2.11.- $h_n(x) = H_n(x)\, h_0(x) - G_{n-1}(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}$.

Según la fórmula de González Dominguez - 1.8.(2) - es:

$$⨍_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^p e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t}\,dt = x^p ⨍_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t}\,dt - g_{p-1}(x), \qquad .2.11.(1)$$

donde: (°)

$$g_{p-1}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \right\} x^{p-1-k} \qquad .2.11.(2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0 , \quad \text{para k impar} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}\,(k/2)!}{2^{k/2}\, k!}, \text{ para k par} \end{array}\right\} \qquad .2.11.(3)$$

El polinomio $H_n(x)$ es de la forma:

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p.$$

De acuerdo con la definición .2.1.(1) de $h_n(x)$, y tomando en cuenta las .2.11.(1) y .2.11.(2), resulta:

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \left[\sum_{p=0}^{n} a_p x^p ⨍ \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x-t}\,dt - \sum_{p=0}^{n} a_p\, g_{p-1}(x) \right]$$

Finalmente queda:

$$h_n(x) = H_n(x) . h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}} G_{n-1}(x), \qquad .2.11.(4)$$

siendo $G_{n-1}(x)$ un polinomio de grado n - 1 de la forma:

$$G_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=0}^{n} a_p \left[\sum_{k=0}^{p-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \right) x^{p-k-1} \right]. \qquad .2.11.(5)$$

Observamos que, en virtud de .2.11.(3), k tomará valores pares en la fórmula de $G_{n-1}(x)$, pues en caso de ser impar se anula la integral.

2.12.- $G_{n-1}(x) - x\, G_{n-2}(x) + (n+1)\, G_{n-3}(x) = 0$.

Según .2.11.(3), se tiene:

$$h_n(x) = H_n(x)\, h_0(x) - G_{n-1}(x)\, e^{\frac{x^2}{2}},$$

(°) P. Appell - J. Kampé De Fériet (1) p 342.-

de acuerdo con la definición de $h_n(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t}\, dt = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}{x-t} - G_{n-1}(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore\ G_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{H_n(x)-H_n(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt .$$

Aplicando la fórmula de recurrencia para los polinómios de Hermite .2.1.(b), se tiene:

$$G_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x\, H_{n-1}(x) - t\, H_{n-1}(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{(n-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{H_{n-2}(x) - H_{n-2}(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Sabemos, por .2.6.(a), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t}\, dt = x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t}\, dt ,$$

obteniéndose por tanto:

$$G_{n-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{H_{n-1}(x) - H_{n-1}(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}} -$$

$$- \frac{(n-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{H_{n-2}(x) - H_{n-2}(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ;$$

$$\therefore\ G_{n-1}(x) - x\, G_{n-2}(x) + (n-1)\, G_{n-3}(x) = 0 .$$

2.13.- $\underline{H_n(x)\, G_n(x) = H_{n+1}(x)\, G_{n-1}(x) + n!}$.

Sabemos, por .2.12.(1), que

$$G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{H_{n+1}(x) - H_{n+1}(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt ;$$

$$G_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{H_n(x) - H_n(t)}{x-t} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Multiplicando la primera igualdad por $H_n(x)$ y la segunda por $H_{n+1}(x)$, y restando miembro a miembro:

$$H_n(x)\, G_n(x) - H_{n+1}(x)\, G_{n-1}(x) = \frac{H_{n+1}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)}{x-t}\, dt - \frac{H_n(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} H_{n+1}(t)}{x-t}\, dt =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n+1}(x)\, h_n(x) - e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\, h_{n+1}(x) .$$

De acuerdo con las .2.1.(c) y 2.7.(1), es:

$$H_n(x)\,G_n(x) - H_{n+1}(x)\,G_{n-1}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{ \frac{H_{n+1}(x)\,h'_{n+1}(x) - H'_{n+1}(x)\,h_{n+1}(x)}{n+1} \right\}$$

y con .2.10.(1) se obtiene:

$$H_n(x)\,G_n(x) - H_{n+1}(x)\,G_{n-1}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\,W_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{(n+1)!}{n+1} = n!$$

$$H_n(x)\,G_n(x) = H_{n+1}(x)\,G_{n-1}(x) + n!$$

)-(

CAPITULO III

FUNCIONES DE LAGUERRE DE SEGUNDA ESPECIE

3.1.- Funciones de Laguerre de segunda especie.

Los polinomios de Laguerre son soluciones de la ecuación de Laguerre:

$$x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0, \qquad .3.1.(1)$$

y tienen las propiedades siguientes: (°)

$$n!\, L_n(t) = e^t \frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n}; \qquad .3.1.(2)$$

$$L_0(t) = 1; \quad L_1(t) = 1-t; \quad L_2(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + 1; \qquad .3.1.(3)$$

$$L_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{n-m} \frac{(-t)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{(-t)^m}{m!};$$

$$L_n'(t) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{n-m} \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!};$$

$$L_n(0) = 1; \quad L_n'(0) = -n;$$

$$(n+1) L_{n+1}(x) - (2n+1-x) L_n(x) + n L_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1; \qquad .3.1.(4)$$

$$n L_n(x) - (2n-1-x) L_{n-1}(x) + (n-1) L_{n-2}(x) = 0, \quad n \geq 2; \qquad .3.1.(4')$$

$$x L_n'(x) - n L_n(x) = -n L_{n-1}(x); \qquad .3.1.(5)$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx &= 0, & n \neq m; \\ &= 1, & n = m. \end{aligned}\right\} \qquad .3.1.(6)$$

Definiremos las funciones de Laguerre de segunda especie por la fórmula:

$$\ell_n(x) = e^x \fint_0^\infty \frac{e^{-t} L_n(t)}{t-x}\, dt \qquad .3.1.(7)$$

(°) Erdélyi (1), Vol II, p 188.-

donde la integral es un valor principal en el sentido de Cauchy cuando $x>0$. Estas funciones son también soluciones de la ecuación de Laguerre .3.1.(1).

3.2.- <u>Las funciones de Laguerre de segunda especie y las transformadas de Hilbert.</u>

Las funciones $l_n(x)$ y los polinomios $L_n(x)$ pueden estudiarse como pares de transformadas de Hilbert. En efecto, definiendo:

$$\mathcal{L}_n(t) = 0 \quad \text{para} \quad -\infty < t < 0, \qquad .3.2.(1)$$
$$= L_n(t) \quad '' \quad \infty > t > 0;$$

las funciones:

$$e^{-x}\ell_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi e^{-t}\mathcal{L}_n(t)}{t-x}\,dt\,; \quad \pi e^{-x}\mathcal{L}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t}\ell_n(t)}{t-x}\,dt,$$

son pares de transformadas de Hilbert y es válido el Teorema de Parseval: (°)

$$\pi^2\int_0^\infty e^{-2x}L_m(x)\,L_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}\ell_m(x)\,\ell_n(x)\,dx,$$
$$\pi^2\int_0^\infty e^{-2x}\overline{L_n(x)}^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}\overline{\ell_n(x)}^2\,dx. \qquad .3.2.(2)$$

Observemos que $\int_0^\infty e^{-2x}L_m(x)L_n(x)dx$ es el valor de la transformada de Laplace de $L_m(x)L_n(x)$ cuando $p=2$. Utilizando la fórmula: (*)

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^\alpha L_n^\alpha(\lambda t)\,L_m^\alpha(kt)\,dt = \frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{m!\,n!}\,\frac{(p-\lambda)^n(p-k)^m}{p^{m+n+\alpha+1}}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left[-m,-n,-m-n-\alpha,\frac{p(p-\lambda-k)}{(p-\lambda)(p-k)}\right],$$

donde ${}_2F_1\left[a,b,c,x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(a)_n}\frac{x^n}{n!}$, con $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$; $(a)_0 = 1$;

para $\alpha=0$, $\lambda=k=1$, $p=2$, resulta:

(°) Titchmarsh (1); p 120 form.(5.1.11).-
(*) Erdelyi (2); Vol I p 175 form 35.-

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2t} L_n(t)\, L_m(t)\,dt &= \frac{(m+n)!}{2^{m+n+1} m!\, n!}\,,\\ \int_0^\infty e^{-2t}\, \overline{L_n(t)}^{\,2}\,dt &= \frac{2n!}{2^{2n+1}(n!)^2}\,.\end{aligned}\right\} \qquad .3.2.(a)$$

De .3.2.(2) y .3.2.(a), resulta finalmente:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}\, \ell_m(x)\, \ell_n(x)\,dx &= \pi^2 \frac{(m+n)!}{2^{m+n+1} m!\, n!}\,,\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}\, \overline{\ell_n(x)}^{\,2}\,dx &= \pi^2 \frac{(m+n)!}{2^{m+n+1}(n!)^2}\,.\end{aligned}\right\} \qquad .3.2.(3)$$

De acuerdo con .3.2.(3) las funciones $l_n(x)$ no forman una familia ortogonal en $(-\infty, +\infty)$ con distribución. e^{-2x}.

Los polinomios de Laguerre son ortogonales - .3.1.(6) - y mediante sus transformadas de Hilbert se puede hallar una combinación lineal de funciones $l_n(x)$ que forman una familia ortogonal. En efecto:

$$\mathcal{H}\left[e^{-x}\mathcal{L}_n(2x)\right] = \frac{1}{\pi} \fint_0^\infty \frac{e^{-t} L_n(2t)}{t-x}\,dt$$

y por ser: (°)

$$L_n(2t) = n!\,2^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{2^m m!(n-m)!} L_{n-m}(t)\,,$$

resulta:

$$\mathcal{H}\left[e^{-x}\mathcal{L}_n(2x)\right] = \frac{n!\,2^n e^{-x}}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{2^m m!(n-m)!} \ell_{n-m}(x)\,;$$

$$\therefore\quad \mathcal{H}\left[e^{-x}\mathcal{L}_n(2x)\right] = e^{-x}\,\ell_n^*(x) \qquad .3.2.(4)$$

con:

$$\ell_n^*(x) = \frac{n!}{\pi} 2^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{2^n m!(n-m)!} \ell_{n-m}(x)\,.$$

De acuerdo con el Teorema de Parseval (*) y .3.2.(4), .3.1.(6), resulta finalmente:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2x}\, \ell_n^*(x)\, \ell_m^*(x)\,dx &= 0 \quad, \quad n \neq m\,;\\ &= 1/2 \;, \quad n = m\,.\end{aligned}$$

3.3.- $\underline{\ell(x) = e^{x} \fint_0^\infty \frac{e^{-t}}{t-x}\,dt.}$

La función $\ell(x) = e^{x} \fint_0^\infty \frac{e^{-t}}{t-x}\,dt$ está representada por una integral con

---

(°) Erdélyi (1); Vol II p 192, form (40).- (*) Titchmarsh (1) pp 121-138 valor principal de Cauchy si $x > 0$, y vale:

$$l_0(x) = \fint_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = -\overline{Ei(x)} \qquad , \text{ para } x > 0,$$

donde $\overline{Ei(x)}$ es la función exponencial integral modificada (°), cuyo desarrollo es:

$$\overline{Ei(x)} = \gamma + \lg x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,n} \qquad , x > 0;$$

con la constante de Euler:

$$\gamma = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t} dt = -\left\{ \frac{d \lg \Gamma(x)}{dx} \right\}_{x=1} = 0{,}5772156649.....$$

Cuando $x < 0$, resulta:

$$l_0(x) = \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = -Ei(x) = \Gamma(0,-x) \quad , x < 0,$$

donde la función exponencial integral $Ei(x)$ tiene por desarrollo:

$$Ei(x) = \gamma + \lg(-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,n} \quad , \text{ para } x<0.$$

En resúmen:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= e^x \fint_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-x}\, dt = -\overline{Ei(x)} \quad , x > 0 \\ &= -Ei(x) \quad , x < 0 \end{aligned} \qquad .3.3.(1)$$

Este resultado figura en las Tablas de Erdélyi (*), pues definiendo:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \qquad \text{para} \quad -\infty < x < 0, \\ &= e^{-x} \qquad \text{para} \quad 0 < x < \infty, \end{aligned}$$

$$\text{es: } \mathcal{H}\left[f(x)\right] = \pi^{-1} e^{-x} l_0(x).$$

Calcularemos l_0' aplicando un Teorema de Hardy (°°):

$$l_0'(x) = \frac{d}{dx}\left\{ e^x \fint_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t-x} \right\} = e^x \fint_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t-x} - e^x \fint_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t-x} - \frac{e^x}{x}$$

(°) Erdélyi (1); Vol II p 143.-
(*) Erdélyi (2); Vol II p 251 fórm (37) con $a=0$, $b=1$.-
(°°) Hardy (1); p 87 Teorema 3.-

$$l_0' = -\frac{e^x}{x}. \qquad .3.3.(2)$$

3.4.- Derivadas primera y segunda de $l_n(x)$.

Para calcular $l_n'(x)$ utilizaremos nuevamente el Teorema de Hardy (°) y será, teniendo en cuenta que $L_n(0) = 1$,

$$l_n'(x) = e^x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n(t)\,dt}{t-x} + e^x\left\{ \fint_0^\infty \frac{(e^{-t}L_n(t))'\,dt}{t-x} - \left[\frac{e^{-t}L_n(t)}{t-x}\right]_0^\infty \right\},$$

$$\therefore \quad l_n'(x) = e^x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n'(t)\,dt}{t-x} - \frac{e^x}{x}. \qquad .3.4.(1)$$

Derivando nuevamente, con $L_n'(0) = -n$, resulta:

$$l_n''(x) = e^x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n'(t)}{t-x}\,dt + e^x\left\{ \int_0^\infty \frac{(e^{-t}L_n'(t))'\,dt}{t-x} - \left[\frac{e^{-t}L_n'(t)}{t-x}\right]_0^\infty \right\} + \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x},$$

$$\therefore \quad l_n''(x) = e^x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n''(t)}{t-x}\,dt + \frac{e^x}{x^2} + \frac{(n-1)}{x}e^x \qquad .3.4.(2)$$

3.5.- La ecuación de Laguerre.

La ecuación de Laguerre:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

tiene como soluciones independientes de los polinomios de Laguerre las funciones $l_n(x)$. En efecto, de acuerdo con .3.4.(1) y .3.4.(2), es

$$xl_n''(x) + (1-x)l_n'(x) + nl_n(x) = e^x\left[x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n''(t)\,dt}{t-x} + (1-x)\fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n'(t)\,dt}{t-x} + \right.$$

$$\left. + \, n \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n(t)\,dt}{t-x} \right] + ne^x. \qquad .3.5.(1)$$

Según la fórmula de González Domínguez (*), y mediante una integración por partes, se tiene:

$$x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n''(t)\,dt}{t-x} = \fint_0^\infty \frac{te^{-t}L_n''(t)\,dt}{t-x} - n + 1, \qquad .3.5.(a)$$

$$x \fint_0^\infty \frac{e^{-t}L_n'(t)\,dt}{t-x} = \fint_0^\infty \frac{te^{-t}L_n'(t)\,dt}{t-x} + 1. \qquad .3.5.(b)$$

Tomando en cuenta .3.5.(1), .3.5.(a) y .3.5.(b), se obtiene:

(°) Hardy (1); p 87 Teorema3.-
(*) González Domínguez-Scarfiello (1); form (3,0;5).-

$$x l_n''(x) + (1 - x) l_n'(x) + n l_n(x) = 0.$$

3.6.- $l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \displaystyle\fint_0^\infty \frac{e^{-t} t^n}{t-x} dt \right\}$.

De acuerdo con .3.1.(2), se tiene:

$$l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \fint_0^\infty \frac{\frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n}}{t-x} dt \qquad .3.6.(1)$$

Por ser:

$$\left[\frac{d^\nu(e^{-t}t^n)}{dt^\nu}\right]_{t=0} = \left[e^{-t} \sum_{p=0}^{\nu} a_p t^{n-p}\right]_{t=0} = 0, \qquad \text{para } \nu = 1,2,3,\ldots,n-1;$$

la fórmula de derivación de Hardy (°) nos conduce a:

$$\frac{d^n}{dx^n} \fint_0^\infty \frac{e^{-t} t^n}{t-x} dt = \fint_0^\infty \frac{\frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n}}{t-x} dt, \qquad .3.6.(2)$$

y de .3.6.(1) y .3.6.(2), resulta:

$$l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \fint_0^\infty \frac{e^{-t} t^n}{t-x} dt. \qquad .3.6.(3)$$

3.7.- $l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n \ell_0(x) \right)$.

Utilizando la fórmula de Gonzáles Domínguez .1.8.(2), es:

$$\fint_0^\infty \frac{e^{-t} t^n}{t-x} dt = x^n \fint_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{t-x} + \sum_{\nu=1}^{n} x^{n-\nu} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt; \qquad .3.7.(1)$$

$$\therefore \fint_0^\infty \frac{e^{-t} t^n}{t-x} dt = e^{-x} x^n \ell_0(x) + p_{n-1}(x), \qquad .3.7.(2)$$

donde $p_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$.

Si se reemplaza 3.7.(1) en 3.6.(3), queda:

$$l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-x} x^n \ell_0(x) \right\}. \qquad .3.7.(3)$$

Este resultado coincide con el de Tricomi (*):

$$l_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ e^{-x} x^n \Gamma(0, -x) \right\}.$$

(°) Hardy (1); p 87.-
(*) Tricomi (1); p 3 fórm (6), con $m = 0$, $\Gamma(0,-x) = \displaystyle\int_{-x}^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = \ell_0(x)$.-

3.8.- Fórmulas de recurrencia.

De acuerdo con la fórmula de recurrencia para polinómios de Laguerre .3.1.(4), resulta:

$$(n+1)\,\ell_{n+1}(x)-(2n+1)\,\ell_n(x)+e^x\!\!\int_0^\infty\frac{t e^{-t}L_n(t)}{t-x}dt+n\,\ell_{n-1}(x)=0, \qquad n\geq 1,$$

y tomando en cuenta que:

$$\int_0^\infty\frac{t e^{-t}L_n(t)}{t-x}dt=x\,\ell_n(x)+\int_0^\infty e^{-t}L_n(t)\,dt=x\,\ell_n(x), \qquad n\geq 1,$$

se obtiene:

$$(n+1)\,\ell_{n+1}(x)-(2n+1-x)\,\ell_n(x)+n\,\ell_{n-1}(x)=0, \qquad n\geq 1, \quad .3.8.(1)$$

$$n\,\ell_n(x)-(2n-1-x)\,\ell_{n-1}(x)+(n-1)\,\ell_{n-2}(x)=0, \qquad n\geq 2, \quad .3.8.(1')$$

De acuerdo con .3.1.(5):

$$e^x\!\!\int_0^\infty\frac{t e^{-t}L_n'(t)}{t-x}dt-n\,\ell_n(x)=-n\,\ell_n(x); \qquad .3.8.(2)$$

y considerando .3.5.(b) y .3.4.(1), será:

$$e^x\!\!\int_0^\infty\frac{t e^{-t}L_n'(t)}{t-x}dt=e^x\left\{x\!\int_0^\infty\frac{e^{-t}L_n'(t)}{t-x}dt-1\right\}=x\left\{\ell_n'(x)+\frac{e^x}{x}\right\}-e^x$$

$$\therefore\quad e^x\!\!\int_0^\infty\frac{t e^{-t}L_n'(t)}{t-x}dt=x\,\ell_n'(x). \qquad .3.8.(a)$$

Reemplazando .3.8.(a) en .3.8.(2), resulta la fórmula:

$$x\,\ell_n'(x)-n\,\ell_n(x)=-n\,\ell_{n-1}(x). \qquad .3.8.(3)$$

3.9.- $l_n(x)=L_n(x)\,\ell_0(x)+e^x\lambda_{n-1}(x)$.

$$l_n(x)=e^xL_n(x)\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{t-x}dt+e^x\int_0^\infty e^{-t}\left\{\frac{L_n(t)-L_n(x)}{t-x}\right\}dt.$$

Observamos que:

$$p_{n-1}(x)=\frac{L_n(t)-L_n(x)}{t-x}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\,x^k t^{n-1-k}. \qquad .3.9.(1)$$

y por consiguiente:

$$l_n(x) = L_n(x)\, l_0(x) + e^x \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1-k} dt. \qquad .3.9.(2)$$

Mediante sucesivas integraciones por partes se obtiene:

$$\int_0^\infty t^p e^{-t} dt = p!, \qquad .3.9.(a)$$

$$\therefore \; l_n(x) = L_n(x)\, l_0(x) + e^x \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k)!\, a_k\, x^k.$$

Con $\lambda_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k)!\, a_k\, x^k$, polinomio de grado n - 1, cuyos coeficientes se calculan de acuerdo con .3.9.(1), podemos expresar:

$$l_n(x) = L_n(x)\, l_0(x) + e^x \lambda_{n-1}(x). \qquad .3.9.(3)$$

3.10.- Fórmula de recurrencia para $\lambda_n(x)$.

Según la fórmula de recurrencia de los polinimios de Laguerre - .3.1.(4) - es:

$$n\left[L_n(t) - L_n(x)\right] = (2n-1)\left\{L_{n-1}(t) - L_{n-1}(x)\right\} - \left\{t L_{n-1}(t) - x L_{n-1}(x)\right\} - (n-1)\left\{L_{n-2}(t) - L_{n-2}(x)\right\}$$

y por ser:

$$\lambda_{n-1}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\left[L_n(t) - L_n(x)\right]}{t-x} dt, \qquad .3.10.(1)$$

resulta:

$$n\,\lambda_{n-1}(x) = (2n-1)\,\lambda_{n-2}(x) - \left\{\int_0^\infty \frac{t L_{n-1}(t) e^{-t}}{t-x} dt - x\int_0^\infty \frac{L_{n-1}(x) e^{-t}}{t-x} dt\right\} - (n-1)\,\lambda_{n-3}(x),$$

$$\therefore \; n\,\lambda_{n-1}(x) = (2n-1)\,\lambda_{n-2}(x) - x\,\lambda_{n-2}(x) - (n-1)\,\lambda_{n-3}(x);$$

o bien:

$$(n+1)\,\lambda_n(x) - (2n+1-x)\,\lambda_{n-1}(x) + n\,\lambda_{n-2}(x) = 0 \qquad .3.10.(2)$$

3.11.- Algunos valores de $\lambda_n(x)$.

Por ser:

$$L_1(x) = 1-x; \quad L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 1 \;; \quad L_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \;;$$

considerando la definición .3.10.(1) de $\lambda_{n-1}(x)$, y la integral .3.9.(a), resulta inmediatamente:

$\lambda_0(x) = -1,$

$\lambda_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},$

$\lambda_2(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{6}x - \frac{11}{6};$

y los valores correspondientes de $l_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned} l_1(x) &= (1-x)\,\ell_0(x) - e^x, \\ l_2(x) &= \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)\ell_0(x) + e^x\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right), \\ l_3(x) &= \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1\right)\ell_0(x) + \frac{e^x}{6}\left(-x^2 + 8x - 11\right). \end{aligned}\right\} \quad .3.11.(1)$$

La fórmula de recurrencia para los $\lambda_n(x)$ permite también calcularlos y, a partir de ellos, elaborar una Tabla de funciones de Laguerre.

3.12.- <u>Wronskiano de</u> $L_n(x)$ y $l_n(x)$: $W_n(x) = -\frac{e^x}{x}$.

Por ser $L_n(x)$ y $l_n(x)$ soluciones linealmente independientes, su wronskiano:

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} L_n(x) & \ell_n(x) \\ L_n'(x) & \ell_n'(x) \end{vmatrix} = L_n(x)\,\ell_n'(x) - L_n'(x)\,\ell_n(x),$$

será distinto de cero.

Utilizando las fórmulas .3.1.(5) y .3.8.(3), resulta:

$$xW_n(x) = L_n(x)\left\{n\,\ell_n(x) - n\,\ell_{n-1}(x)\right\} - \left\{n\,L_n(x) - n\,L_{n-1}(x)\right\}\ell_n(x);$$

$$xW_n(x) = n\left\{L_{n-1}(x)\,\ell_n(x) - L_n(x)\,\ell_{n-1}(x)\right\}. \qquad .3.12.(1)$$

Las fórmulas de recurrencia .3.8.(1') y .3.1.(4') - aplicadas reiteradamente en .3.12.(1) - conducen a:

$$xW_n(x) = L_0(x)\,\ell_1(x) - L_1(x)\,\ell_0(x).$$

Los valores del segundo miembro son conocidos - .3.1.(3),.3.11.(1)- y de acuerdo con ellos se obtiene:

$$xW_n(x) = (1-x)\,\ell_0(x) - e^x - (1-x)\,\ell_0(x) = -e^x,$$

$$\therefore\; W_n(x) = -\frac{e^x}{x}.$$

)-(

APENDICE

DEDUCCION DE ALGUNAS DE LAS FORMULAS ANTERIORES EN LA TEORIA DE LAS DISTRIBUCIONES

4.1.- Preliminar.

Las funciones de segunda especie de Legendre, Hermite y Laguerre pueden definirse mediante productos de convolución de funciones convenientemente elegidas y la seudofunción v.p. $\frac{1}{x}$.

La utilización sistemática de la teoría de las distribuciones de Schwartz permite demostrar, a veces en forma más breve, las fórmulas estudiadas en los Capítulos anteriores. Es propósito de este Apéndice llegar a algunas de las propiedades enunciadas en aquéllos, empleando estas nuevas definiciones.

Se hará uso de la función de Heaviside u, igual a cero para $x<0$, y a +1 para $x>0$. Si $\varphi(x)$ es una función de prueba del espacio $\mathcal{D}$ de Schwartz, se define la distribución; (°)

$$u(\varphi)=\int_0^\infty \varphi(x)\,dx,$$

cuya derivada, en el sentido de las distribuciones, es:

$$u'(\varphi)=-u(\varphi')=\delta(\varphi),$$

siendo δ la distribución de Dirac:

$$\delta(\varphi)=\varphi(0).$$

Además, se considerará la distribución v.p. $\frac{1}{x}$ = Pf $\frac{1}{x}$, (*)

$$\text{v.p.}\,\frac{1}{x}(\varphi)=\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

cuya derivada es:

$$(\text{v.p.}\,\frac{1}{x})'=-\text{Pf}\,\frac{1}{x^2}.$$

(°) Schwartz (1); Vol I Ej 1 p 36.-
(*) Schwartz (1); Vol I p 43.-

Dadas dos funciones S y T, su producto de convolución o composición se define por la fórmula:

$$(S * T)_x\, \varphi(x) = (S_\xi \times T_\eta)\, \varphi(\xi + \eta),$$

y para derivarlo, se deriva uno cualquiera de los factores:

$$(S * T)' = S' * T = S * T' \qquad .4.1.(1)$$

4.2.- Las funciones de Legendre de segunda especie.

Sean u_{+1}, u_{-1} las funciones de Heaviside trasladadas:

$$\begin{cases} u_{+1} = +1, & \text{para } x > +1, \\ \quad\;\; = 0, & \text{para } x < +1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{-1} = +1, & \text{para } x > -1, \\ \quad\;\; = 0, & \text{para } x < -1. \end{cases}$$

Llamemos h la función:

$$h = u_{-1} - u_{+1} \qquad .4.2.(1)$$

la cual vale +1 para $-1 < x < +1$, y 0 fuera de $(-1, +1)$.

Si $\varphi(x)$ es una función de prueba del espacio $\mathcal{D}$ de Schwartz, se tiene:

$$h(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, dx,$$

y su derivada, como distribución:

$$h'(\varphi) = -h(\varphi') = -\int_{-1}^{+1} \varphi'(x)\, dx = \varphi(-1) - \varphi(+1),$$

$$\therefore\; h'(\varphi) = \delta_{-1} - \delta_{+1}, \qquad .4.2.(2)$$

donde δ_{-1} y δ_{+1} son las distribuciones de Dirac trasladadas.

Las funciones de Legendre de segunda especie, definidas en .1.2.(1), se pueden expresar por el producto de convolución:

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n(x)\, h * v.p. \frac{1}{x}. \qquad .4.2.(3)$$

La derivada será:

$$Q_n' = \frac{1}{2} \left\{ P_n'(x)\, h * v.p. \frac{1}{x} + P_n(x)\, \delta_{-1} * v.p. \frac{1}{x} - P_n(x)\, \delta_{+1} * v.p. \frac{1}{x} \right\}$$

Por ser: $P_n(x)\,\delta_{+1} = P_n(+1)\,\delta_{+1}$, $P_n(x)\,\delta_{-1} = P_n(-1)\,\delta_{-1}$, es:

$$Q'_n = \frac{1}{2}\left\{ P'_n x\, h * v.p.\frac{1}{x} + P_n(-1)\, v.p. \frac{1}{1+x} - P(1)\, v.p.\frac{1}{x-1}\right\} \qquad .4.2.(4)$$

resultado que se corresponde con .1.7.(5).

4.3.- Fórmula de recurrencia para Q_n

De la fórmula de recurrencia para los polinomios de Legendre:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)\; x\, P_n\,(x) - nP_{n-1}(x),$$

y de la definición .4.2.(3), resulta:

$$(n+1)\, Q_{n+1} = (2n+1)\frac{1}{2}\, x\, P_n(x)\, h * v.p.\frac{1}{x} - n\, Q_{n-1}.$$

El producto de convolución del segundo miembro, es: (°)

$$\frac{1}{2}\, x\, P_n(x) h * v.p.\frac{1}{x} = x\, Q_n - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_n\, dx = x\, Q_n ,$$

y por consiguiente:

$$(n+1)\, Q_{n+1} = (2n+1)\; x\, Q_n - n\, Q_{n-1}.$$

4.4.- Algunos valores de Q_n.

Tomando en cuenta los valores de $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$, y que $v.p.\frac{1}{x} = (\lg|x|)'$, utilizando las fórmulas relativas al producto de convolución de dos distribuciones S y T: (°)

$$x\,(S * T) = xS * T + S * xT \qquad .4.4.(a)$$

$$x^2(S * T) = x^2S * T + 2xS * T + S * x^2T, \qquad .4.4.(b)$$

se obtiene:

$$Q_0 = \frac{1}{2}\left[\delta_{-1} * \lg|x| - \delta_{+1} * \lg|x|\right],$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}\, x\left[\delta_{-1} * \lg|x| - \delta_{+1} * \lg|x|\right] - \frac{1}{2}\left[h * 1\right],$$

$$Q_2 = \frac{3}{4}\, x^2\left[\delta_{-1} * \lg|x| - \delta_{+1} * \lg|x|\right] - \frac{3}{4}\, x\left[h * 1\right] - \frac{1}{4}\left[\delta_{-1} * \lg|x| - \delta_{+1} * \lg|x|\right].$$

Estos valores coinciden con .1.7.(1), .1.7.(2), dado que por ser $h * 1 = 2$, los expresaremos:

(°) Schwartz (1); Vol II p 25 (VI, 4, 15).-

$$Q_0 = \frac{1}{2}\left[\delta_{-1} - \delta_{+1}\right] * \lg|x|, \qquad .4.4.(1)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}\, x\left[\delta_{-1} - \delta_{+1}\right] * \lg|x| - 1, \qquad .4.4.(2)$$

$$Q_2 = \frac{3}{4}\, x^2\left[\delta_{-1} - \delta_{+1}\right] * \lg|x| - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\left[\delta_{-1} - \delta_{+1}\right] * \lg|x|. \qquad .4.4.(3)$$

4.5.- $(1 - x^2)\, Q_n'' - 2x\, Q_n' + n(n + 1)\, Q_n = 0$.

Verificaremos que la ecuación de Legendre se satisface con Q_n definida según .4.2.(3), para lo cual haremos uso de las fórmulas .4.4.(a) y .4.4.(b):

$$2\left\{(1-x^2)\, Q_n'' - 2x\, Q_n' + n(n+1)\, Q_n\right\} =$$

$$= (1-x^2)\left\{(P_n h)' * \left(v.p.\frac{1}{x}\right)'\right\} - 2x\left\{(P_n h)' * v.p.\frac{1}{x}\right\} + n(n+1)\, P_n h * v.p.\frac{1}{x} =$$

$$= -(1-x^2)(P_n h)' * Pf\frac{1}{x^2} + 2x\,(P_n h)' * x\, Pf\frac{1}{x^2} + (P_n h)' * x^2\, Pf\frac{1}{x^2} -$$

$$- 2x(P_n h)' * v.p.\frac{1}{x} - 2(P_n h)' * x\, v.p.\frac{1}{x} + n(n+1)\, P_n h * v.p.\frac{1}{x} =$$

$$= \left\{(1-x^2)(P_n h)'\right\}' * v.p.\frac{1}{x} + n(n+1)\, P_n h * v.p.\frac{1}{x} =$$

$$= \left\{(1-x^2)\, P_n'' - 2x\, P_n' + n(n+1) P_n\right\} * v.p.\frac{1}{x} = 0,$$

$$\therefore \qquad (1-x^2)\, Q_n'' - 2x\, Q_n' + n(n+1)\, Q_n = 0.$$

4.6.- Las funciones de Hermite se segunda especie.

Las funciones de Hermite de segunda especie definidas en .2.1.(1) pueden expresarse mediante el producto de convolución:

$$h_n = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) * v.p.\frac{1}{x}\right\} \qquad .4.6.(1)$$

y por consiguiente es (.2.4.(1)):

$$h_0 = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} * v.p.\frac{1}{x}\right\}.$$

Tomando en cuenta la fórmula .4.4.(a) de Schwartz (°), siendo $H_1(x) = x$, se tiene:

(°) Schwartz (1) Vol II p 25 (VI, 4; 15).-

$$h_1 = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{ x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} * v.p.\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{x^2}{2}} * 1 \right\}$$

y resulta .2.4.(2):

$$h_1 = H_1 h_0 - e^{\frac{x^2}{2}}.$$

4.7.- $\underline{h_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} h_0\right]}$.

De acuerdo con la definición .4.6.(1) de h_n, y la propiedad .2.1.(2) de los polinomios $H_n(x)$, se tiene:

$$h_n = (-1)^n \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} * v.p.\frac{1}{x}\right],$$

y aplicando la regla de derivación de un producto de convolución .4.1.(1), resulta .2.5.(1):

$$h_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} h_0\right).$$

4.8.- <u>Relaciones entre las funciones h_n</u>.

De la fórmula de recurrencia para los polinomios de Hermite .2.1.(3), se obtiene:

$$h_n - \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{ x e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) * v.p.\frac{1}{x}\right\} + (n-1) h_{n-2} = 0,$$

y utilizando la fórmula .4.4.(a), observando que $e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) * 1 = 0$, para $n > 1$, resulta la fórmula .2.6.(2):

$$h_n - x h_{n-1} + (n-2) h_{n-2} = 0, \qquad n > 1.$$

Derivando .4.6.(1), y de acuerdo con .4.1.(1), se obtiene:

$$h_n' = x h_n + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{ -x e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) * v.p.\frac{1}{x} + e^{-\frac{x^2}{2}} H_n'(x) * v.p.\frac{1}{x}\right\},$$

teniendo en cuenta la .4.4.(a), y observando que $e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) * 1 = 0$, para $n > 0$, es:

$$h_n' = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n'(x) * v.p.\frac{1}{x}\right\}, \qquad n > 1;$$

finalmente, con .2.1.(4), obtenemos .2.7.(1):

$$h_n' = n\, h_{n-1} \quad , \quad n>1.$$

4.9.- $\underline{h_n'' - x\, h_n' + n\, h_n = 0.}$

Verificaremos que las funciones h_n definidas por .4.6.(1), satisfacen a la ecuación de Hermite.

Derivando h_n resulta:

$$h_n'' = x\, h_n' + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} H_n'(x) * v.p.\frac{1}{x} \right\},$$

$$h_n'' - x\, h_n' + n\, h_n = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} \left(H_n'' - x\, H_n' + n\, H_n \right) * v.p.\frac{1}{x} \right\}$$

$$h_n'' - x\, h_n' + n\, h_n = 0.$$

4.10.- <u>Las funciones de Laguerre de segunda especie.</u>

Definiremos las funciones de Laguerre de segunda especie mediante:

$$l_n = u(x)\, L_n(x) * e^x\, v.p.\frac{1}{x}, \qquad .4.10.(1)$$

donde $L_n(x)$ son los polinomios de Laguerre y $u(x)$ la función de Heaviside.

Su derivada será:

$$l_n' = (u.L_n)' * e^x\, v.p.\frac{1}{x} =$$

$$= u(x)\, L_n'(x) * e^x\, v.p.\frac{1}{x} + L_n(x)\, \delta * e^x\, v.p.\frac{1}{x} .$$

Tomando en cuenta que $L_n(x)\,\delta = L_n(0)\,\delta = \delta$, y que la medida de Dirac δ es para el producto de convolución la unidad ($\delta * T = T$):

$$l_n' = u(x)\, L_n'(x) * e^x\, v.p.\frac{1}{x} + e^x\, v.p.\frac{1}{x}. \qquad .4.10.(2)$$

Para $n=0$ es:

$$l_o = u(x) * e^x\, v.p.\frac{1}{x},$$

$$l_o' = e^x\, v.p.\frac{1}{x}.$$

La derivada segunda l_n'' será, derivando .4.10.(2):

$$l_n'' = uL_n'' * e^x v.p.\frac{1}{x} + L_n'\delta * e^x v.p.\frac{1}{x} + e^x v.p.\frac{1}{x} - e^x Pf\frac{1}{x^2} =$$

$$= uL_n'' * e^x v.p.\frac{1}{x} + L_n'(0)e^x v.p.\frac{1}{x} + e^x v.p.\frac{1}{x} - e^x Pf\frac{1}{x^2};$$

$$l_n'' = uL_n'' * e^x v.p.\frac{1}{x} + (n-1)e^x v.p.\frac{1}{x} - e^x Pf\frac{1}{x^2}. \qquad .4.10.(3)$$

En particular, si $n=0$, es:

$$l_0'' = e^x\, v.p.\frac{1}{x} - e^x\, Pf\frac{1}{x^2}.$$

4.11.- $\underline{x\, l_n'' + (1-x)\, l_n' + n\, l_n = 0.}$

De acuerdo con .4.10.(1), .4.10.(2) y .4.10.(3), y aplicando la fórmula .4.4.(a), es:

$$x\, l_n'' + (1-x)\, l_n' + n\, l_n = (xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n)u * e^x v.p.\frac{1}{x} +$$
$$+ (L_n'' - L_n')u * e^x - ne^x;$$

$$xl_n'' + (1-x)l_n' + nl_n = L_n''u * e^x - L_n'u * e^x - ne^x. \qquad .4.11.(a)$$

Observando que:

$$L_n''u * e^x = \left[(L_n'u)' - L_n'\delta\right] * e^x = L_n'u * e^x - L_n'(0)e^x;$$

$$L_n''u * e^x = L_n'u * e^x + ne^x; \qquad .4.11.(b)$$

finalmente, de .4.11.(a) y .4.11.(b), resulta:

$$x\, l_n'' + (1-x)\, l_n' + n\, l_n = 0.$$

4.12.- $\underline{l_n = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n l_0).}$

Verificaremos la fórmula .3.7.(3) partiendo de la propiedad .3.1.(2) de los polinomios de Laguerre, de la definición .4.10.(1) y de la fórmula (°):

$$e^x\, S * e^x\, T = e^x\,(S * T),$$

según lo cual es:

(°) Schwartz (1); Vol II Fórm (VI, 4; 12) p 25.-

$$l_n = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x}x^n\right)u * e^x v.p.\frac{1}{x} = \frac{e^x}{n!}\left[u\,\frac{d^n e^{-x}x^n}{dx^n} * v.p.\frac{1}{x}\right].$$

Observamos que:

$$\frac{d}{dx}\,(e^{x}x^n u) = u\,\frac{d}{dx}\,e^{-x}x^n + e^{-x}x^n\delta = u\,\frac{d}{dx}(e^{-x}x^n) \quad ,$$

mediante n derivaciones será:

$$u\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n u),$$

resultando en consecuencia:

$$l_n = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}x^n u * v.p.\frac{1}{x}). \qquad .4.12.(1)$$

Calcularemos el producto de convolución de la fórmula anterior considerando que en un producto de convolución S * T es:

$$x^n(S * T) = \sum_{p=0}^{n} c_p\, x^{n-p}S * x^p T,$$

$$e^{-x}(S * e^{x}T) = e^{-x}S * T.$$

Por consiguiente:

$$e^{-x}x^n u * v.p.\frac{1}{x} = e^{-x}(x^n u * e^x v.p.\frac{1}{x}) =$$

$$= e^{-x}x^n\,(u * e^x v.p.\frac{1}{x}) - e^{-x}\sum_{p=1}^{n} a_p\, x^{n-p}u * x^{p-1}e^x;$$

y derivando n veces:

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n u * v.p.\frac{1}{x}) = \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^n(u * e^x v.p.\frac{1}{x})\right]$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}x^n u * v.p.\frac{1}{x}) = \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n l_0) \quad .4.12.(a)$$

Reemplazando .4.12(a) en .4.12.(1), resulta:

$$l_n = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n l_0).$$

4.13.- <u>Relaciones entre las funciones l_n.</u>

De acuerdo con la fórmula de recurrencia para polinomios de Laguerre .3.1.(4), es:

$$(n+1)\,\ell_{n+1}-(2n+1)\,\ell_n+x\,u\,\ell_n * e^{x}\,v.p.\frac{1}{x}+n\,\ell_{n-1}=0.$$

Utilizando .4.4.(a) y la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre .3.1.(6), se obtiene:

$$(n+1)\,\ell_{n+1}-(2n+1-x)\,\ell_n+n\,\ell_{n-1}=0,\quad n>0$$

La propiedad .3.1.(5) de los polinomios de Laguerre y la fórmula .4.4.(a) para el producto de convolución, conducen inmediatamente a la relación:

$$x\,l'_n - n\,l_n = -n\,l_{n-1}.$$

)-(

REFERENCIAS

P. Appell - J. Kampé De Fériet

(1) "Fonctions Hypergéometriques et Hypersphériques" Paris (1926).

E. T. Copson

(1) "An introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable" Oxford University Press (1935).

Erdélyi - Magnus - Oberhettinger - Tricomi

(1) "Higher transcendental functions" Vols I-II California Institute of Technology (1953).

(2) "Tables of Integrals Transforms" Vols I-II California Institute of Technology (1954).

A. González Domínguez - R. Scarfiello

(1) "Nota sobre la fórmula v.p. $\frac{1}{x}\delta = \frac{-1}{2}\delta'$ " Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires.

G. H. Hardy

(1) "The theory of Cauchy's Principal Values; Third Paper: Differentiation and Integration of Principal Values" Proc. London Math. Soc. Vol 35, pp 81-107.

E. Hille - J. D. Tamarkin

(1) "On the absolute integrability of Fourier transforms" Fundamenta Mathematicae, Vol 25, pp 329-352 (1935).

E. W. Hobson

(1) "The theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics" New York (1955).

M. Riesz

(1) "Sur les fonctions conjugueés" Math. Zeitschrift 27, pp 218-244 (1927).

G. Szegö

(1) "Orthogonal Polynomials" American Math. Soc. (1939).

L. Schwartz

(1) "Théorie des Distributions" Vols I-II
Paris (1951).

E. C. Titchmarsh

(1) "Introduction to the Theory of Fourier Integrals"
Oxford (1937).

F. Tricomi

(1) "La seconda soluzione dell'equazione di Laguerre" Bollettino dell'Un. Mat. It. (3)7, pp 1-4 (1952).