

Tesis de Posgrado

Guía de ondas cilíndrica con dos dieléctricos

Maiztegui, Alberto P.

1960

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Maiztegui, Alberto P.. (1960). Guía de ondas cilíndrica con dos dieléctricos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1083_Maiztegui.pdf

Cita tipo Chicago:

Maiztegui, Alberto P.. "Guía de ondas cilíndrica con dos dieléctricos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1960.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1083_Maiztegui.pdf

1.083 R.

REVISTA

Resumen de "GUIA DE ONDAS CILINDRICA CON DOS DIELECTRICOS", tesis de Alberto Pascual Maistegui para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicomatemáticas de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

En este trabajo se han calculado los modos que pueden propagarse en una guía de ondas cilíndrica circular con dos dieléctricos dispuestos coaxialmente, de constantes dieléctricas distintas y permeabilidades magnéticas iguales.

Las condiciones de contorno en las distintas superficies de separación constituyen, al ser expresadas mediante las componentes del campo electromagnético, un sistema de 6 ecuaciones lineales y homogéneas, con 6 incógnitas. La condición de compatibilidad de ese sistema define una ecuación de autovalores que a cada valor de la frecuencia hace corresponder un conjunto de pares de vectores de propagación (uno para cada medio).

Por otra parte, la solución del sistema provee los valores de los coeficientes de las funciones de Bessel y de Neumann con que se expresa cada componente del campo electromagnético. La forma de la solución muestra que, en general, la guía no propaga modos eléctricos (modos "E", ó "TM") puros, ni modos magnéticos (modos "H", ó "TE") puros, sino combinaciones de ambos.

La solución general también muestra que para $n = 0$ (funciones cilíndricas de orden cero) el sistema se desdobra en dos sistemas de 3 ecuaciones lineales homogéneas con 3 incógnitas, independientes entre sí, que corresponden a modos "E" puros y a modos "H" puros, y que son las soluciones dadas por Pincherle ("Electromagnetic Waves in metal tubes", L. Pincherle, Phys. Rev. 66, 118, (1948)).

De la solución general pueden extraerse dos familias de modos, una de las cuales da origen a modos "H" puros y la otra a modos "E" puros cuando se hace tender a la unidad la razón de las constantes dieléctricas de los dos medios. Y esos modos coinciden con los de una guía circular homogénea. De esa manera es natural que se llame "modo tipo eléctrico" y "modo tipo magnético" a los de una guía heterogénea. Mediante esta identificación se hace posible excitar a voluntad, mediante antenas adecuadas, modos de una u otra familia.

Más adelante se estudian las dos posibilidades que se pueden presentar: a) la parte radial de las componentes del campo electromagnético es oscilante en ambos medios (argumento real de las funciones cilíndricas), o bien b) la parte radial es oscilante en uno de los medios y monótona en el otro (en éste, el argumento es imaginario). Se muestra que para la frecuencia de transición, que anula el vector propagación en el medio de menor constante dieléctrica, no hay solución, salvo para el caso $n = 0$.

Se estudian los casos particulares en que o bien el vector H o el E son transversales, y las estructuras de campo resultan ser formalmente

R. de Terris

te análogas a las de una guía homogénea en el dieléctrico interior, y a la de una guía coaxial en el exterior. En uno de ellos se verifica que la superficie de separación de los dos dieléctricos actúa como una superficie metálica, en cuanto a lo que se refiere a la expresión de las componentes del campo.

En la última parte se dan los resultados del cálculo numérico de los siguientes casos, todos ellos para $n = 1$ (orden de las funciones cilíndricas):

$$1) a = R_2/R_1 = 1,1 ; \epsilon = \epsilon_2/\epsilon_1 = 6,25$$

$$2) a = 2 ; \epsilon = 6,25$$

$$3) a = 1,1 ; \epsilon = 1/6,25$$

$$4) a = 2 ; \epsilon = 1/6,25$$

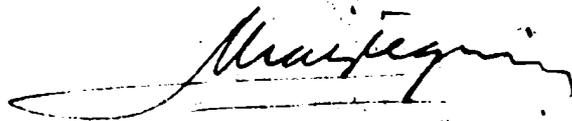
en donde a es la razón de los radios correspondientes a cada dieléctrico; $\epsilon = \epsilon_2/\epsilon_1$ es la razón de la constante dieléctrica del medio exterior a la

del interior. Se ha elegido el valor 6,25 porque corresponde al vidrio para frecuencias del orden de los 10.000 Mc/s.

Se dan tablas de la función $X_1(x) = J_1'(x)/x J_1(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = 7,50$, de 0,02 en 0,02, y de 0,10 en 0,10 hasta $x = 10,50$; también tablas de la misma función para valores imaginarios de x , con los mismos intervalos. También se incluyen tablas de las funciones

$$Y_1(y) = \frac{1}{y} \frac{J_1'(y) H'(ay) - J_1'(ay) H'(y)}{J_1(y) H'(ay) - J_1(ay) H'(y)} ; Y_2(y) = \frac{1}{y} \frac{J_1'(y) H(ay) - J_1(ay) H'(y)}{J_1(y) H(ay) - J_1(ay) H(y)}$$

para los valores indicados de los radios. Para simplificar la escritura se han suprimido todos los subíndices 1 correspondientes al orden de las funciones cilíndricas. En otra tabla se dan los valores de estas mismas funciones para valores imaginarios de y . Por último, se dan tablas con las soluciones de los 6 primeros modos para cada uno de los 4 casos calculados, con los correspondientes gráficos.



TEMA

GUIA DE ONDAS CILINDRICA CON DOS DIELECTRICOS.

Alberto P. Maiztegui

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias
Físicomatemáticas, orientación Matemáticas, de
la Universidad de Buenos Aires

Diciembre 1960

TESIS:

3

GUIA DE ONDAS CILINDRICA CON DOS DIELECTRICOS

1. INTRODUCCION.-- El problema consiste en determinar los modos de propagación de ondas electromagnéticas en una guía cilíndrica metálica en cuyo interior hay dos dieléctricos, dispuestos coaxialmente (fig. 1), de constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 , y permeabilidades magnéticas μ iguales.

El tema ha sido tratado por L. Pincherle [1], quien estudió solamente el caso de simetría axial. Por el contrario, aquí se lo deja a un lado y se estudian las soluciones generales.

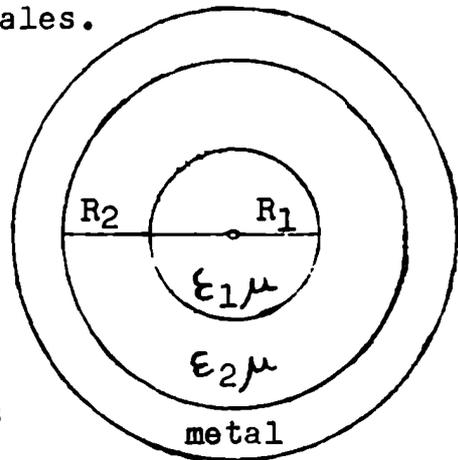


FIGURA 1

Se encuentra que esta guía no propaga, en general, modo eléctricos puros, (modos "E", o modos transversales magnéticos "TM", en los cuales la componente longitudinal del campo magnético es nula), ni modos magnéticos puros (modos "H", o modos transversales eléctricos "TE", en los cuales la com-

[1] "Electromagnetic waves in metal tubes", L. Pincherle, Phys. Rev. 66, 118 (1948)

ponente longitudinal del campo eléctrico es nula), sino superposiciones de ambos.

En algunos casos particulares de la frecuencia, sin embargo, los modos se hacen transversales. En uno de ellos la superficie de separación de los dos dieléctricos actúa estrictamente como una superficie metálica.

Se obtienen dos tipos de soluciones, y por tanto, dos modos de propagación, a los cuales se identifica, como caso límite en que se igualan las constantes dieléctricas de ambos medios, como correspondientes a los conocidos modos "E" y "H" que pueden propagarse en una guía cilíndrica con un solo dieléctrico.

Se discute el caso en que la constante de propagación del medio de menor índice es nula, y se encuentra que para él no existe solución, salvo en el caso de simetría tratado en [1].

Se han calculado numéricamente varios modos de propagación para distintos valores de los radios y de las constantes dieléctricas.-

2. SOLUCIONES GENERALES.- Si \underline{H} y \underline{E} son, respectivamente, los campos eléctrico y magnético de una onda que se propaga en una guía cilíndrica con su eje a lo largo de la coordenada z , la expresión general de sus componentes en coordenadas cilíndricas es:

$$H_{m,n}(z,r,\theta;t) = H_{m,n}(r) e^{in\theta} e^{i(\omega t - \alpha z)}$$

$$E_{m,n}(z,r,\theta;t) = E_{m,n}(r) e^{in\theta} e^{i(\omega t - \alpha z)}$$

con $m = 1, 2, 3$ y $n = 1, 2, \dots$, siendo ω la frecuencia angular y $\lambda_g = \frac{2\pi}{\alpha}$ la longitud de onda medida en la guía.

En forma detallada, las funciones radiales son, de acuerdo con la notación habitual:

$H_{z,n} = A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr)$	a
$H_{r,n} = -i \frac{\alpha}{k} \left[A_n J'_n(kr) + B_n N'_n(kr) \right] - \frac{\omega \epsilon}{k^2 r} n E_{z,n}$	b
$H_{\theta,n} = -i \frac{\omega \epsilon}{k} \left[C_n J'_n(kr) + D_n N'_n(kr) \right] + \frac{\alpha}{k^2 r} n H_{z,n}$	c
$E_{z,n} = C_n J_n(kr) + D_n N_n(kr)$	d
$E_{r,n} = -i \frac{\alpha}{k} \left[C_n J'_n(kr) + D_n N'_n(kr) \right] + \frac{\omega \mu}{k^2 r} n H_{z,n}$	e
$E_{\theta,n} = i \frac{\omega \mu}{k} \left[A_n J'_n(kr) + B_n N'_n(kr) \right] + \frac{\alpha}{k^2 r} n E_{z,n}$	f

donde $J_n(kr)$ y $N_n(kr)$ son las funciones cilíndricas definidas en [2], y $J'_n(kr)$ y $N'_n(kr)$ sus derivadas

[2] Tables of functions, por E. Jahnke y F. Emde

con respecto al argumento kr , mientras que k , la constante de propagación, está definida por

$$k^2 = \omega^2 \cdot \epsilon \mu - \alpha^2 \quad (2)$$

Se considerará que no hay pérdidas a lo largo de la guía, es decir, que la pared metálica tiene conductividad infinita y los dieléctricos, conductividad nula.

Resolver el problema significa que, dada una frecuencia ω o una longitud de onda λ_0 medida en el vacío, es posible determinar:

- 1) el par de valores (k_1, k_2) de cada modo que se propague en la guía;
- 2) los coeficientes A, B, C y D en cada dieléctrico;
- 3) la longitud de onda λ_g que se propaga en la guía.

Las condiciones de contorno son:

a) para $r = R_1$: $E_\theta(1) = E_\theta(2)$

$$E_z(1) = E_z(2)$$

$$H_\theta(1) = H_\theta(2)$$

$$H_z(1) = H_z(2)$$

b) para $r = R_2$: $E_\theta(2) = 0$

$$E_z(2) = 0$$

Ellas constituyen un sistema de 6 ecuaciones lineales homogéneas con 6 incógnitas.

Si dejamos a un lado el subíndice n , y hacemos $k_1 R_1 = x$, $k_2 R_1 = y$, $R_2/R_1 = a$, y $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \epsilon$, el sistema se escribe

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{J'(x)}{x} A_1 - \frac{J'(y)}{y} A_2 - \frac{N'(y)}{y} B_2 - \\
 -i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \frac{J(x)}{x^2} C_1 + i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \frac{J(y)}{y^2} C_2 + i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \frac{N(y)}{y^2} D_2 &= 0 \\
 J(x) C_1 - J(y) C_2 - N(y) D_2 &= 0 \\
 i \frac{\alpha}{\omega \epsilon_1} n \frac{J(x)}{x^2} A_1 - i \frac{\alpha}{\omega \epsilon_1} n \frac{J(x)}{y^2} A_2 - i \frac{\alpha}{\omega \epsilon_1} n \frac{N(y)}{y^2} B_2 + \\
 + \frac{J'(x)}{x} C_1 - \epsilon \frac{J'(y)}{y} C_2 - \epsilon \frac{N'(y)}{y} D_2 &= 0 \\
 J(x) A_1 - J(y) A_2 - N(y) B_2 &= 0 \\
 J'(ay) A_2 + N'(ay) B_2 &= 0 \\
 J(ay) C_2 + N(ay) D_2 &= 0
 \end{aligned} \right\} (3)$$

Si hacemos,

$$\begin{array}{rcl}
 X & = & \frac{J'(x)}{x J(x)} \quad \left. \begin{array}{l} a \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\
 Y_1 & = & \frac{1}{y} \frac{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} \quad \left. \begin{array}{l} b \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\
 Y_2 & = & \frac{1}{y} \frac{J'(y) N(ay) - J(ay) N'(y)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \quad \left. \begin{array}{l} c \\ \\ \\ \end{array} \right\}
 \end{array} \quad (4)$$

la condición de compatibilidad del sistema (3) define la ecuación de autovalores:

$$(X - Y_1)(X - \epsilon Y_2) - n \left(\frac{\epsilon}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \quad (5)$$

A cada valor de la frecuencia ω , esta ecuación hace corresponder un conjunto de pares (x, y) que definen una solución cuando satisfacen el sistema:

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 = (k_1 R_1)^2 = (\omega^2 \epsilon_1 \mu - \alpha^2) R_1^2 & a \\
 y^2 = (k_2 R_1)^2 = (\omega^2 \epsilon_1 \mu - \alpha^2) R_1^2 & b
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (6)$$

La solución del sistema es, considerando como coeficiente arbitrario la amplitud A_1 de excitación del campo magnético:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{N'(ay)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} \cdot J(x) A_1 & \text{a)} \\
 B_2 &= \frac{J'(ay)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} \cdot J(x) A_1 & \text{b)} \\
 C_2 &= \frac{N(ay)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \cdot J(x) C_1 & \text{c)} \\
 D_2 &= \frac{J(ay)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \cdot J(x) C_1 & \text{d)} \\
 C_1 &= i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1} \cdot \frac{X - Y_1}{X - \epsilon Y_2}} \cdot A_1 & \text{e)}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Resulta así que, en general, la guía propaga modos que no son modos "H" o "E" puros sino superposiciones de ellos.

Sin embargo, puede observarse que en caso $n = 0$ el sistema (3) se desdobra en dos sistemas

$$\left. \begin{aligned} \frac{J'_0(x)}{x} A_1 - \frac{J'_0(y)}{y} A_2 - \frac{N'_0(y)}{y} B_2 &= 0 \\ J_0(x) A_1 - J_0(y) A_2 - N_0(y) B_2 &= 0 \\ J'_0(ay) A_2 + N'_0(ay) B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (3')$$

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) C_1 - J_0(y) C_2 - N_0(y) D_2 &= 0 \\ \frac{J'_0(x)}{x} C_1 - \frac{J'_0(y)}{y} C_2 - \frac{N'_0(y)}{y} D_2 &= 0 \\ J_0(ay) C_2 + N_0(ay) D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (3'')$$

lo que hace que las soluciones magnéticas y eléctricas sean independientes entre sí y existan modos puros.

Se ve, además, que la ecuación de autovalores (5) se reduce, para

$$n = 0, \text{ a } X = Y_1 \text{ ó } X = \epsilon Y_2,$$

que corresponden a los casos estudiados en (1).

3.- LOS MODOS DE PROPAGACION.-

Los autovalores correspondientes a cada modo de propagación están definidos por el sistema de ecuaciones (4) y (5), que puede escribirse así:

$$X(x) = \frac{Y_1 + \epsilon Y_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Y_1 - \epsilon Y_2}{2}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\epsilon}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \right\} (8)$$

$$x^2 - y^2 = \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu R_1^2$$

donde la segunda ecuación se obtiene de (6) por simple sustracción.

El doble signo implica la existencia de dos soluciones independientes para cada valor de la frecuencia, y , en consecuencia, dos modos distintos de propagación.

Para identificar esos modos podemos recurrir al caso bien conocido de la guía homogénea (con un solo dieléctrico), para lo cual hacemos $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$, o sea $\epsilon \rightarrow 1$, lo que trae como consecuencia que $x \rightarrow y$. De (8) resulta, al tomar el signo positivo, $X = Y_1$; y esta igualdad, considerada en las (7) hace que $C_1 = C_2 = D_2 = 0$. Es decir, se ha obtenido la conocida solución magnética de una guía circular homogénea.

Si en (8) se considera el signo negativo, se obtiene $X \in Y_2$, en cuyo caso de las (7) resulta $A_1 = A_2 = B_2 = 0$, lo que corresponde a la solución eléctrica en una guía homogénea.

Con esto se ha logrado identificar los dos modos resultantes del doble signo de (8), como los correspondientes a los modos magnéticos y eléctricos de una guía homogénea, y por ello los llamaremos, respectivamente, modos "tipo magnético" y "tipo eléctrico".

Además, esta identificación nos permitirá excitar unos u otros modos a voluntad. En efecto, así como en una guía homogénea se excitan modos magnéticos con una antena magnética (conductor circular, con su plano normal al eje de la guía), y modos eléctricos con una antena eléctrica (conductor rectilíneo normal al eje de la guía), en nuestra guía heterogénea esas antenas excitarán, respectivamente, los modos que hemos llamado "tipo magnético" y "tipo eléctrico".

Con las soluciones (x, y) correspondientes a cada modo, teniendo presente que de (6) se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \omega^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu R_1^2 \\ \epsilon_2 x^2 - \epsilon_1 y^2 &= \alpha^2(\epsilon_1 - \epsilon_2) R_1^2 \end{aligned}$$

y, además, que $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ y que $\omega = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot c = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu}}$

(siendo c la velocidad de la luz en el vacío;
 λ_0 la longitud de onda medida en el vacío y ϵ_0
la constante dieléctrica del vacío), se llega a

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{y^2 - \epsilon x^2}{y^2 - x^2}$$

que permite calcular λ_g para cada par (x, y)
conociendo λ_0 (1).

La velocidad de fase en la guía $v = \frac{\omega}{\alpha}$
variará, de acuerdo con la frecuencia, entre infi-
nito y la velocidad de la luz en el medio de mayor
constante dieléctrica. En efecto, como veremos más
adelante, (§ 6 pag. 30) cada modo comienza a pro-
pagarse a partir de una frecuencia mínima, ω_c , lla-
mada frecuencia de corte, que está definida por
 $\alpha = 0$, o sea $v = \infty$.

A medida que se inyecten frecuencias
cada vez mayores la velocidad de fase v va dismi-
nuyendo hasta alcanzar su valor límite, que es la
velocidad de la luz en el medio de mayor constante
dieléctrica.

(1) En la práctica es cómodo expresar los resulta-
dos de una manera ligeramente diferente (pag. 30)

De acuerdo con ello se presentarán dos casos, según que sea $\epsilon_2 \gtrless \epsilon_1$.

a) $\epsilon_2 > \epsilon_1$, en cuyo caso se cumple, llamando $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu}}$ a la velocidad de la luz en el medio 2:

$$d \geq v \geq c_2$$

o, lo que es lo mismo:

$$0 \leq d \leq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu}$$

Dentro de este caso se tienen tres posibilidades:

$$1) 0 \leq d < \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} \therefore k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu - d^2 > 0$$

$$2) d = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} \therefore k_1^2 = 0$$

$$3) \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} < d \leq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu} \therefore k_1^2 < 0$$

b) $\epsilon_2 < \epsilon_1$, en cuyo caso

$$0 \leq d \leq \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu}$$

y, en forma análoga al caso anterior:

$$1) d \leq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu} \therefore k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu - d^2 > 0$$

$$2) d = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu} \therefore k_2^2 = 0$$

$$3) \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} < d \leq \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} \therefore k_2^2 < 0$$

En los casos a, 1) y b, 1), las partes

radiales están dadas por funciones oscilantes en ambos medios, mientras que en los a, 3) y b, 3) son oscilantes en los medios de mayor constante dieléctrica. En cuanto a los casos a, 2) y b, 2), veamos uno de ellos (por cuanto son análogos) con mayor detalle:

4. El caso límite $k_1 = 0$.

Como $n \neq 0$ se cumple $J(x) = 0$; con ello, las ecuaciones 2a. y 4a. del (3) se reducen a

$$2a.) \quad J(y) C_2 + N(y) D_2 = 0$$

$$4a.) \quad J(y) A_2 + N(y) B_2 = 0$$

Entonces, para que el sistema constituido por las 2a. y 6a. sea compatible debe cumplirse

$$J(y) N(ay) - J(ay) N(y) = 0 \quad (9)$$

y si ello no ocurre, será

$$C_2 = D_2 = 0 \quad (9')$$

Análogamente, para que el sistema formado por las 4a. y 5a. sea compatible debe ser

$$J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y) = 0 \quad (10)$$

y si ello no ocurre, será

$$A_2 = B_2 = 0 \quad (10')$$

Como las (9) y (10) no tienen ceros comunes debe verificarse (9) y (10') o bien (9') y (10); consideremos el primer caso:

$$a) J(y) N(ay) - J(ay) N(y) = 0$$

$$A_2 = B_2 = 0$$

El sistema (3) ha quedado ahora reduci-

do a

$$\left. \begin{aligned} \frac{J'(x)}{x} A_1 - i \frac{\alpha}{\omega^\mu} \frac{n J(x)}{x^2} C_1 &= 0 \\ J(y) C_2 - N(y) D_2 &= 0 \\ i \frac{\alpha}{\omega \epsilon_1} \frac{n J(x)}{x^2} A_1 + \frac{J'(x)}{x} C_1 - \epsilon \frac{J'(y)}{y} C_2 - \frac{N'(y)}{y} D_2 &= 0 \\ J(ay) C_2 + N(ay) D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

De la 1a. resulta:

$$A_1 = i \frac{\alpha}{\omega^\mu} \frac{n J(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{J'(x)} C_1$$

y reemplazando en la 3a., la suma de los dos primeros términos es

$$\frac{J'(x)}{x} C_1 \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2 \epsilon_1 \mu} \left[\frac{n J(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{J'(x)} \right]^2 \right\}$$

Si $x \rightarrow 0$, se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{n J(x)}{x^2} &\approx \frac{x^{n-2}}{2^n (n-1)!} \\ \frac{J'(x)}{x} &\approx \frac{x^{n-2}}{2^n (n-1)!} \end{aligned} \right\} \therefore \frac{n J(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{J'(x)} \approx 1$$

Además, como para $x \rightarrow 0$ es $\alpha^2 \rightarrow \omega^2 \epsilon_1 \mu$ los dos primeros términos de la 3a. ecuación tienden a anularse. Las tres últimas ecuaciones del sistema quedan reducidas a

$$\begin{cases} J(y) C_2 + N(y) D_2 = 0 \\ J'(y) C_2 + N'(y) D_2 = 0 \\ J(ay) C_2 + N(ay) D_2 = 0 \end{cases}$$

que es un sistema incompatible; por tanto $C_2 = D_2 = 0$

Sólo queda $A_1 = i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} C_1$, lo que indicaría la existencia de campo en el medio 1; pero reemplazando en la expresión de las componentes (1) se verifica que $E = H = 0$. Por lo tanto, no hay solución.

$$b) \quad J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y) = 0$$

$$C_2 = D_2 = 0$$

En forma análoga a la del caso a), se demuestra que tampoco hay solución.

Obsérvese que para $k_1 = 0$ con $n = 0$ es $J_0(x) = 1$ y $J'_0(x) = 0$, con cuyos valores el sistema (3) es compatible y se llega a las soluciones obtenidas en [1].

Para el caso $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$ se debe considerar $k_2 = 0$; por tanto, $J(y) = J(ay) = 0$

Esto trae como consecuencia en el sistema (3) que la ecuación 6a. se reduzca a

$$N(ay) D_2 = 0$$

y como $N(0) = -\infty$, debe ser $D_2 = 0$

La 2a. ecuación queda ahora

$$J(x) C_1 = 0$$

y como en general será $J(x) \neq 0$, resulta $C_1 = 0$

Análogamente, de la 4a. se llega a que $A_1 = 0$

En la 5a. se observa que $J'(ay) A_2 = 0$, y como esta ecuación vale para cualquier n , incluso $n = 1$, en cuyo caso $J'_1(0) = \frac{1}{2}$, resulta $A_2 = 0$

En la misma forma, la 3a. nos conduce a $C_2 = 0$

Por tanto, no hay solución.

5.- MODOS TRANSVERSALES.-

Consideremos ahora dos casos particulares que definen modos de propagación en los cuales o bien el campo \underline{H} o el \underline{E} , son transversales.

(I).- En principio, cabe la posibilidad de que a ciertos valores de ω corresponda $y = y_j$ tal que

$$J(y_j) N'(ay_j) - (J'(ay_j) N(y_j)) = 0 \quad (12)$$

siendo y_j , además de raíz de (12), una solución de (8).

Deberá cumplirse que el par (x_j, y_j) defina en (8, b) un valor $\omega^2 > 0$.

La (12) implica, teniendo presente la 4. b

$$\lim_{y \rightarrow y_j} Y_1 = \infty$$

Resulta conveniente escribir la (8, a)

en la forma siguiente

$$f_1, f_2 = \frac{Y_1 + \varepsilon Y_2}{2} \pm \frac{Y_1 - \varepsilon Y_2}{2} \sqrt{1 + n^2 \frac{\left(\frac{\varepsilon}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{Y_1 - \varepsilon Y_2}{2}\right)^2}} \quad (13)$$

donde f_1 corresponde al signo positivo, y f_2 al negativo, porque se advierte con facilidad que

$$\lim_{y \rightarrow y_j} f_1 = \lim_{y \rightarrow y_j} Y_1 = \infty$$

$$\lim_{y \rightarrow y_j} f_2 = \lim_{y \rightarrow y_j} \varepsilon Y_2 = \text{finito}$$

a) Consideremos en (13) la solución

$X = f_1$. En este caso, de 4a. resulta $J(x) = 0$, lo que tiene como consecuencia que en (3) las ecuaciones 2a. y 4a. se reduzcan, respectivamente, a

$$J(y) C_2 + N(y) D_2 = 0$$

$$J(y) A_2 + N(y) B_2 = 0$$

Las 4a. y 5a. de (3) constituyen un sistema lineal homogéneo cuya condición de compati-

bilidad es, precisamente, la (12). Pero las 2a. y 6a. constituyen otro sistema cuya condición de compatibilidad es

$$J(y) N(ay) - N(ay) N(y) = 0 \quad (14)$$

y como las (12) y (14) no tienen ceros comunes resulta

$$C_2 = D_2 = 0$$

Teniendo presente la 4a., de la 3a. se deduce que $C_1 = 0$.

Con esto, el sistema (3) se reduce a

$$1a.) \quad \frac{J'(x)}{x} A_1 - \frac{J'(y)}{y} A_2 - \frac{N'(y)}{y} B_2 = 0$$

$$5a.) \quad J'(ay) A_2 + N'(ay) B_2 = 0$$

de donde se obtiene, considerando a A_1 arbitrario,

$$A_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{N'(ay)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J'(x) A_1$$

$$B_2 = -\frac{y}{x} \cdot \frac{J'(ay)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J'(x) A_1$$

Con estos coeficientes, las componentes de campo se expresan: Medio 1

$$\begin{aligned} H_z &= A_1 J(k_1 r) & E_z &= 0 \\ H_r &= -i \frac{\alpha}{k_1} A_1 J'(k_1 r) & E_r &= \frac{\omega \mu}{k_1^2 r} n A_1 J(k_1 r) \\ H_\theta &= \frac{\alpha}{k_1^2 r} n A_1 J(k_1 r) & E_\theta &= i \frac{\omega \mu}{k_1} A_1 J'(k_1 r) \end{aligned}$$

Estas expresiones son formalmente iguales a la solución magnética de una guía metálica, de radio R_1 , llena con un solo dieléctrico de constantes $\epsilon_1 \mu$. Como en ésta, el campo eléctrico es transversal, pero la configuración de campos no es la misma debido a que los autovalores están dados por los ceros de $J(x)$ en la guía heterogénea y por los ceros de $J'(x)$ en la homogénea.

A las frecuencias que hacen $Y_1 \rightarrow \infty$, la superficie de separación de los dos dieléctricos es una superficie nodal de H_z , y en ella el campo electromagnético sólo tiene componentes H_r y E_θ .

Medio 2

$$H_z = \frac{y}{x} \cdot \frac{J(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N(k_2 r)}{J'(x) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J'(x) A_1$$

$$H_r = -i \frac{\alpha}{k_1} \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J'(x) A_1$$

$$H_\theta = \frac{\alpha}{k_2 r} n H_z$$

$$E_z = 0$$

$$E_r = \frac{\omega \mu}{k_2 r} n H_z$$

$$E_\theta = i \frac{\omega \mu}{k_1} \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J'(x) A_1$$

Esta es formalmente análoga a la estructura del campo en una guía coaxial metálica transmitiendo una onda "H", con la diferencia que en nuestro caso $E_{\theta}(r = R_1) \neq 0$ y $H_z(r = R_1) = 0$ mientras que en la metálica $E_{\theta}(r = R_1) = 0$ y $H_z(r = R_1) \neq 0$.

b) Consideremos ahora las soluciones $X = f_2$.

Si $y \rightarrow y_j$ se tendrá

$$X = \lim_{y \rightarrow y_j} f_2 = \epsilon Y_2 = \text{finito}$$

Entonces, de acuerdo con 4a., es $J(x) \neq 0$.

Por otra parte, en el sistema (3) se observa que la (12) trae como consecuencia que $J(y)A_2 + N(y)B_2 = 0$ y por tanto, en la 4a., $J(x)A_1 = 0$, y con ello $A_1 = 0$.

El sistema (3) queda reducido, cuando $y = y_j$, a

$$\left. \begin{aligned} - \frac{J'(y)}{y} A_2 - \frac{N'(y)}{y} B_2 - i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \frac{J(x)}{x^2} C_1 + i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \frac{J(y)}{y^2} C_2 + i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \frac{N(y)}{y^2} D_2 &= 0 \\ J(x) C_1 - J(y) C_2 - N(y) D_2 &= 0 \\ \frac{J'(x)}{x} C_1 - \left\{ \frac{J'(y)}{y} C_2 - \epsilon \frac{N'(y)}{y} D_2 \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} J'(ay) A_2 + N'(ay) B_2 &= 0 \\ - J(ay) C_2 + N(ay) D_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si se consideran las 2a., 3a. y 5a. del (15) constituyen un sistema lineal homogéneo cuya condición de compatibilidad es

$$\begin{vmatrix} J(x) & -J(y) & -N(y) \\ J'(x) & -\epsilon \frac{J'(y)}{y} & -\epsilon \frac{N'(y)}{y} \\ 0 & J(ay) & N(ay) \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo del determinante conduce a $X = \epsilon Y_2$; por tanto, el sistema es compatible y las soluciones son

$$C_2 = \frac{N(ay)}{J(y)N(ay) - J(ay)N(y)} \cdot J(x) C_1$$

$$D_2 = \frac{J(ay)}{N(ay)} C_2$$

Con éstas y las ecuaciones 1a. y 4a. del sistema (15) se obtiene

$$B_2 = - \frac{J'(ay)}{N'(ay)} A_2$$

$$A_2 = i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{N'(ay)}{J'(y)N'(ay) - J'(ay)N'(y)} \cdot y \cdot J'(x) C_1$$

Con estos coeficientes, la configuración del campo, para $y = y_j$, es:

Medio 1

$$\begin{aligned}
 H_z &= 0 & E_z &= C_1 J(k_1 r) \\
 H_r &= -\frac{\omega \epsilon_1}{k_1^2 r} n C_1 J(k_1 r) & E_r &= -i \frac{\alpha}{k_1} C_1 J'(k_1 r) \\
 H_\theta &= -i \frac{\omega \epsilon_1}{k_1} C_1 J'(k_1 r) & E_\theta &= \frac{\alpha}{k_1^2 r} n C_1 J(k_1 r)
 \end{aligned}$$

Medio 2

$$\begin{aligned}
 H_z &= i \frac{\alpha}{\omega \mu} n \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{J(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} \cdot y \cdot J(x) C_1 \\
 H_r &= \frac{\alpha^2}{\omega \mu} n R_1 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J(x) C_1 - \frac{\omega \epsilon_2}{k_2^2 r} n E_z \\
 H_\theta &= -i \frac{\omega \epsilon_2}{k_2} \cdot \frac{J'(k_2 r) N(ay) - J(ay) N'(k_2 r)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} J(x) C_1 + \frac{\alpha}{k_2^2 r} n H_z \\
 E_z &= \frac{J(k_2 r) N(ay) - J(ay) N(k_2 r)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} J(x) C_1 \\
 E_r &= -i \frac{\alpha}{k_2} \cdot \frac{J'(k_2 r) N(ay) - J(ay) N'(k_2 r)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} + \frac{\omega \mu}{k_2^2 r} n H_z \\
 E_\theta &= -\frac{\alpha}{k_2} n R_1 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J(x) C_1 + \frac{\alpha}{k_2^2 r} n E_z
 \end{aligned}$$

Se observa que la solución es un modo que en el medio 1 es transversal magnético, pero que no lo es en el 2.

A estas frecuencias, también en este caso corresponde una superficie nodal de H_z para $r = R_1$; y en el medio 1 también se encuentra la analogía entre esta solución y la solución eléctrica de una guía homogénea. Pero no se encuentra analogía en el medio 2, entre esta solución y la de una guía coaxial. Obsérvese que para $n = 0$, el modo se hace transversal magnético también en el medio 2.

II).-En principio, también cabe la posibilidad de que a ciertos valores de ω correspondan valores $y = y_k$ tales que

$$J(y_k)N(ay_k) - J(ay_k)N(y_k) = 0 \quad (16)$$

siendo y_k , además de raíz de (16), una solución de (8).

Deberá cumplirse que el par (x_k, y_k) defina en 8,b un valor $\omega^2 > 0$.

La (16) implica, teniendo presente la 4,b

$$\lim_{y \rightarrow y_k} \epsilon Y_2 = \infty$$

De la (13) resulta, ahora, que

$$\lim_{y \rightarrow y_k} f_1 = \lim_{y \rightarrow y_k} Y_1 = \text{finito}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_k} f_2 = \lim_{y \rightarrow y_k} \epsilon Y_2 = \infty$$

a) Consideremos en 8,a la solución $X = f_1$. En este caso, de 4,a resulta

$$J(x) \neq 0$$

Por otra parte, en (3) la (16) trae como consecuencia que $J(x) C_1 = 0$ y por tanto,

$$C_1 = 0$$

El sistema (3) queda reducido, ahora, a:

$$\begin{array}{r}
 \frac{J'(x)}{x} A_1 - \frac{J'(y)}{y} A_2 - \frac{N'(y)}{y} B_2 = 0 \\
 i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_1} n \frac{J(x)}{x^2} A_1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_1} n \frac{J(y)}{y^2} A_2 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_1} n \frac{N(y)}{y^2} B_2 - \epsilon \frac{J'(y)}{y} C_2 - \epsilon \frac{N'(y)}{y} D_2 = 0 \\
 J(x) A_1 - J(y) A_2 - N(y) B_2 = 0 \\
 J'(ay) A_2 + N'(ay) B_2 = 0 \\
 J(ay) C_2 + N(ay) D_2 = 0
 \end{array} \quad (17)$$

Las ecuaciones 1a., 3a. y 4a. constituyen un sistema lineal homogéneo cuya condición de compatibilidad conduce, precisamente, a $X = Y_1$

Finalmente, se encuentra que la solución del (17) es

$$B_2 = - \frac{J'(ay)}{N'(ay)} A_2$$

$$A_2 = \frac{N'(ay)}{J(y)N'(ay) - J'(ay)N(y)} J(x) A_1$$

$$D_2 = - \frac{J(ay)}{N(ay)} C_2$$

$$C_2 = i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_1} n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \cdot \frac{y}{\epsilon} \cdot \frac{N(ay)}{J'(y)N(ay) - J(ay)N'(y)} J(x) A_1$$

Con esos coeficientes se encuentra:

Medio 1

$$H_z = A_1 J(k_1 r)$$

$$E_z = 0$$

$$H_r = -i \frac{\alpha}{k_1} A_1 J'(k_1 r)$$

$$E_r = \frac{\omega \mu}{k_1^2} n A_1 J(k_1 r)$$

$$H_\theta = \frac{\alpha}{k_1^2 r} n A_1 J(k_1 r)$$

$$E_\theta = i \frac{\omega \mu}{k_1} A_1 J'(k_1 r)$$

Medio 2

$$H_z = \frac{J(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N(k_2 r)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} J(x) A_1$$

$$H_r = -i \frac{\alpha}{k_2} \cdot \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} J(x) A_1 - \frac{\omega \epsilon_2}{k_2^2} n E_z$$

$$H_\theta = \alpha n R_1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J(x) A_1 + \frac{\alpha}{k_2^2} n H_z$$

$$E_z = i \frac{\alpha}{\omega \epsilon_2} n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \frac{y}{\epsilon} \cdot \frac{J(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J(x) A_1$$

$$E_r = \frac{\alpha^2}{\omega \epsilon_2} n R_1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J(x) A_1 + \frac{\omega \mu}{k_2^2} n H_z$$

$$E_\theta = i \frac{\omega \mu}{k_2} \cdot \frac{J'(k_2 r) N'(ay) - J'(ay) N'(k_2 r)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} J(x) A_1 + \frac{\alpha}{k_2^2} E_z$$

Este caso es análogo al I,b): la solución es un modo que tiene la característica de ser transversal en el medio 1 y de no serlo en el 2. También aquí, en el medio 1 se tiene una semejanza formal con la solución magnética de una guía homogénea, mientras que en el medio 2 no hay semejanza con las soluciones de una guía coaxial. Obsérvese que para $n = 0$ el modo se hace transversal eléctrico también en el medio 2.

b) Consideremos en 8,a la solución $X = f_2$. Entonces, de 4,a resulta

$$J(x) = 0$$

lo que trae como consecuencia que en (3) las ecuaciones 2a. y 4a. se reduzcan a

$$J(y) C_2 + N(y) D_2 = 0$$

$$J(y) A_2 + N(y) B_2 = 0$$

Las ecuaciones 2a. y 6a. de (3) constituyen un sistema lineal y homogéneo cuya condición de compatibilidad es, precisamente, la (16). Pero las 4a. y 5a. forman otro sistema cuya compatibilidad exige que se cumpla la (12), por lo cual se verifica

$$A_2 = B_2 = 0$$

Si se tiene presente la 2a., de la 1a. resulta

$$A_1 = 0$$

El sistema (3) se ha reducido ahora a:

$$\frac{J'(x)}{x} C_1 - \epsilon \frac{J'(y)}{y} C_2 - \epsilon \frac{N'(y)}{y} D_2 = 0$$

$$J(ay)C_2 + N(ay)D_2 = 0$$

de donde se obtiene:

$$D_2 = - \frac{J(ay)}{N(ay)} C_2$$

$$C_2 = \frac{y}{\epsilon x} \cdot \frac{N(ay)}{J'(y) N(ay) - J(ay) N'(y)} \cdot J'(x) C_1$$

Con estos coeficientes la expresión de los campos es:

Medio 1

$$H_z = 0$$

$$E_z = C_1 J(k_1 r)$$

$$H_r = \frac{\omega \epsilon_1}{k_1^2 r} n E_z$$

$$E_r = -i \frac{\alpha}{k_1} C_1 J'(k_1 r)$$

$$H_\theta = -i \frac{\omega \epsilon_1}{k_1} C_1 J'(k_1 r)$$

$$E_\theta = \frac{\alpha}{k_1^2 r} n E_z$$

En el medio 1 el campo es estrictamente el de una onda E que se propaga en una guía cilíndrica de radio R_1 con dieléctrico ϵ_1 .

Medio 2

$$H_z = 0$$

$$H_r = -\frac{\omega \epsilon_2}{k_2^2 r} n E_z$$

$$H_\theta = -i \frac{\omega \epsilon_1}{k_1} \frac{J'(k_2 r) N(ay) - J(ay) N'(k_2 r)}{J'(y) N(ay) - J(ay) N'(y)} J'(x) C_1$$

$$E_z = \frac{y}{\epsilon x} \cdot \frac{J(k_2 r) N(ay) - J(ay) N(k_2 r)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} J'(x) C_1$$

$$E_r = -i \frac{\alpha}{k_1} \cdot \frac{J'(k_2 r) N(ay) - J(ay) N'(k_2 r)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \cdot J'(x) C_1$$

$$E_\theta = \frac{\alpha}{k_2^2 r} n E_z$$

En el medio 2 el campo es estrictamente el de una onda "E" en una guía coaxial metálica. Es de señalar que la superficie de separación de los dos dieléctricos actúa, en estas frecuencias particulares como una superficie metálica.

6.- EL CALCULO NUMERICO.-

Las frecuencias de corte.- La frecuencia de corte de un modo es aquella a la que corresponde $\alpha = 0$, o sea $\lambda_g = \omega$. Por tanto, de las (6)

$$y_c = \sqrt{\epsilon} x_c$$

y con ello

$$\frac{\epsilon}{y_c^2} - \frac{1}{x_c^2} = 0$$

Reemplazando en la (5):

$$\left[X(x_c) - Y_1(y_c) \right] \left[X(x_c) - \epsilon Y_2(y_c) \right] = 0$$

Puede verificarse

$$X(x_c) = Y_1(y_c)$$

o bien

$$X(x_c) = \epsilon Y_2(y_c)$$

La primera posibilidad tiene como soluciones los pares (x_c, y_c) que corresponden a las frecuencias de corte de los modos de tipo magnético; la segunda, los correspondientes a los de tipo eléctrico.

El cálculo numérico.- A partir de los valores de corte de cada modo, y dando a y valores y_k convenientes, se resuelven los sistemas formados por 8b) con cada una de las

$$X(x) = f_1(x, y_k) \quad (8', a)$$

$$X(x) = f_2(x, y_k) \quad (8'', a)$$

Por otra parte, cuando se está en la frecuencia de corte la $\delta_{g,b}$ toma la forma

$$y_c^2 - x_c^2 = R_1^2 \omega_c^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mu \quad (8', b)$$

y de la $\delta_{g,b}$ y $\delta'_{g,b}$ resulta, por cociente:

$$\left(\frac{\lambda_o}{\lambda_c} \right)^2 = \frac{y_c^2 - x_c^2}{y^2 - x^2}$$

que junto a la

$$\left(\frac{\lambda_o}{\lambda_g} \right)^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_o} \frac{y^2 - \epsilon x^2}{y^2 - x^2}$$

permiten construir las curvas $(\lambda_o/\lambda_g, \lambda_o/\lambda_c)$.

Los modos calculados.- Se han calculado los siguientes casos, todos ellos con $n = 1$:

1) $a = R_2/R_1 = 1,1$

$\epsilon = \epsilon_2/\epsilon_1 = 6,25$

2) $a = 2$

$\epsilon = 6,25$

3) $a = 1,1$

$\epsilon = 1/6,25$

4) $a = 2$

$\epsilon = 1/6,25$

Se ha elegido el valor $\epsilon = 6,25$ porque corresponde aproximadamente al vidrio para una frecuencia del orden de 10.000 megaciclos.

T A B L A I

$$X_1(x) = \frac{J_1'(x)}{x \cdot J_1(x)} \approx -\frac{1}{x^2} + \frac{J_0(x)}{x \cdot J_1(x)}$$

x	X	x	X	x	X
0	∞	0,50	3,7466	1,00	0,7387
0,02	2499,5	52	3,4454	02	6995
04	624,50	54	3,1756	04	6624
06	277,28	56	2,9345	06	6268
08	155,75	58	2,7189	08	5943
0,10	99,900	0,60	2,5259	1,10	0,5628
12	69,175	62	2,3481	12	5328
14	50,811	64	2,1870	14	5048
16	38,855	66	2,0402	16	4778
18	30,6375	68	1,9080	18	4522
0,20	24,7487	0,70	1,7855	1,20	0,4279
22	20,4226	72	1,6730	22	4048
24	17,1232	74	1,5706	24	3827
26	14,5441	76	1,4751	26	3615
28	12,5103	78	1,3870	28	3413
0,30	10,8624	0,80	1,3059	1,30	0,3221
32	9,5105	82	1,2297	32	3036
34	8,3946	84	1,1596	34	2857
36	7,4653	86	1,0938	36	2689
38	6,6727	88	1,0042	38	2526
0,40	6,0000	0,90	0,9759	1,40	0,2370
42	5,4174	92	9222	42	2218
44	4,9143	94	8718	44	2074
46	4,4725	96	8247	46	1935
48	4,0860	98	7804	48	1801
0,50	3,7466	1,00	0,7387	1,50	0,1671

x	X	x	X	x	X
1,50	0,1671	2,00	-0,0559	2,50	-0,1989
52	1546	02	623	52	2045
54	1426	04	687	54	2101
56	1310	06	749	56	2157
58	1198	08	811	58	2213
1,60	0,1088	2,10	-0,0872	2,60	-0,2270
62	983	12	931	62	2328
64	880	14	990	64	2386
66	781	16	1049	66	2445
68	685	18	1107	68	2506
1,70	0,0592	2,20	-0,1164	2,70	-0,2566
72	501	22	1220	72	2628
74	412	24	1277	74	2692
76	327	26	1332	76	2756
78	243	28	1388	78	2822
1,80	0162	2,30	-0,1443	2,80	-0,2888
82	82	32	1498	82	2957
84	0,0004	34	1552	84	3028
86	-0,0071	36	1607	86	3099
88	146	38	1661	88	3173
1,90	218	2,40	-0,1716	2,90	-0,3249
92	289	42	1771	92	3327
94	358	44	1825	94	3408
96	426	46	1879	96	3492
98	494	48	1934	98	3578
2,00	-0,0559	2,50	-0,1989	3,00	-0,3668

x	X	x	X	x	X
3,00	-0,3668	3,50	-0,8728	4,00	1,4417
02	3761	52	9242	02	1,2759
04	3857	54	9823	04	1,1419
06	3957	56	-1,0493	06	1,0305
08	4062	58	-1,1270	08	0,9374
3,10	-0,4172	3,60	-1,2168	4,10	0,8583
12	4286	62	-1,3246	12	7900
14	4407	64	-1,4536	14	7301
16	4532	66	-1,6142	16	6778
18	4665	68	-1,8158	18	6318
3,20	-0,4806	3,70	-2,0785	4,20	0,5903
22	4953	72	-2,4315	22	5525
24	5110	74	-2,9467	24	5188
26	5278	76	-3,7420	26	4880
28	5455	78	-5,1367	28	4602
3,30	-0,5646	3,80	-8,3464	4,30	0,4343
32	5851	82	-22,498	32	4106
34	6069	84	31,711	34	3889
36	6306	86	9,0820	36	3685
38	6562	88	5,3059	38	3496
3,40	-0,6844	3,90	3,7220	4,40	0,3320
42	7148	92	2,8508	42	3155
44	7484	94	2,3044	44	3000
46	7855	96	1,9260	46	2855
48	8262	98	1,6509	48	2718
3,50	-0,8728	4,00	1,4417	4,50	2588

x	X	x	X	x	X
4,50	0,2588	5,00	0,0684	5,50	-0,0294
52	2467	02	636	52	328
54	2351	04	589	54	362
56	2241	06	544	56	395
58	2136	08	499	58	429
4,60	0,2036	5,10	0,0455	5,60	-0,0463
62	1942	12	412	62	496
64	1851	14	370	64	530
66	1764	16	329	66	564
68	1681	18	288	68	598
4,70	0,1600	5,20	0,0248	5,70	-0,0632
72	1524	22	209	72	666
74	1450	24	170	74	701
76	1379	26	132	76	735
78	1310	28	94	78	770
4,80	0,1244	5,30	0,0057	5,80	-0,0806
82	1180	32	21	82	841
84	1118	34	-0,0015	84	877
86	1058	36	52	86	914
88	1000	38	87	88	951
4,90	0,0943	5,40	-0,0122	5,90	-0,0988
92	889	42	157	92	1026
94	836	44	192	94	1065
96	784	46	226	96	1104
98	733	48	260	98	1144
5,00	0,0684	5,50	-0,0294	6,00	-0,1185

x	X	x	X	x	X
6,00	-0,1185	6,50	-0,2838	7,00	-9,1420
02	1227	52	2960	02	32,864
04	1270	54	3090	04	5,8173
06	1314	56	3232	06	3,1727
08	1358	58	3386	08	2,1833
6,10	-0,1405	6,60	-0,3551	7,10	1,6519
12	1452	62	3735	12	1,3327
14	1501	64	3936	14	1,1107
16	1551	66	4158	16	0,9497
18	1603	68	4408	18	8292
6,20	-0,1657	6,70	-0,4688	7,20	0,7355
22	1713	72	5002	22	6581
24	1771	74	5360	24	5953
26	1831	76	5772	26	5430
28	1894	78	6252	28	4981
6,30	-0,1959	6,80	-0,6827	7,30	0,4592
32	2028	82	7504	32	4256
34	2099	84	8350	34	3963
36	2174	86	-0,9409	36	3697
38	2254	88	-1,0751	38	3463
6,40	-0,2338	6,90	-1,2589	7,40	0,3252
42	2425	92	-1,5197	42	3060
44	2519	94	-1,9123	44	2886
46	2618	96	-2,5991	46	2727
48	2725	98	-4,0360	48	2583
6,50	-0,2838	7,00	-9,1420	7,50	0,2448

x	X	x	X	x	X
7,50	0,2448	8,50	0,0042	9,50	-0,1376
60	1906	60	-0,0073	60	1669
70	1512	70	185	70	2067
80	1207	80	298	80	2658
90	962	90	413	90	3651
8,00	0,0759	9,00	-0,0532	10,00	-0,5753
10	583	10	661	10	-1,3496
20	429	20	802	20	3,6981
30	290	30	962	30	0,7589
40	162	40	1149	40	4125
8,50	0,0042	9,50	-0,1376	10,50	0,2765
				11,00	0,0797
				12,00	-0,0247

T A B L A II

$$x(\xi) = \frac{1}{\xi^2} - \frac{I_0(\xi)}{\xi \cdot I_1(\xi)};$$

ξ	-x	ξ	-x	ξ	-x
0,00	∞	0,50	4,2474	1,00	1,2401
02	2500,50	52	3,9454	02	1,2008
04	625,50	54	3,6751	04	1,1641
06	278,28	56	3,4362	06	1,1292
08	156,75	58	3,2186	08	1,0959
0,10	100,100	0,60	3,0239	1,10	1,1649
12	69,945	62	2,8469	12	1,0352
14	51,208	64	2,6867	14	1,0071
16	39,257	66	2,5408	16	0,9802
18	31,097	68	2,4085	18	0,9549
0,20	25,245	0,70	2,2861	1,20	0,9307
22	20,904	72	2,1743	22	0,9091
24	17,598	74	2,0704	24	0,8859
26	15,040	76	1,9755	26	0,8648
28	13,001	78	1,8879	28	0,8449
0,30	11,359	0,80	1,8058	1,30	0,8259
32	10,011	82	1,7766	32	0,8075
34	8,8960	84	1,6606	34	0,7901
36	7,9761	86	1,5943	36	0,7734
38	7,1617	88	1,5337	38	0,7574
0,40	6,5000	0,90	1,4766	1,40	0,7420
42	5,9159	92	1,4233	42	0,7273
44	5,4114	94	1,3728	44	0,7131
46	4,9749	96	1,3258	46	0,6994
48	4,5868	98	1,2819	48	0,6864
0,50	4,2474	1,00	1,2401	1,50	0,6738

1,50	0,6738	2,00	0,4667	2,50	0,3628
52	0,6618	02	0,4617	52	0,3598
54	0,6501	04	0,4557	54	0,3567
56	0,6388	06	0,4507	56	0,3539
58	0,6281	08	0,4456	58	0,3510
1,60	0,6176	2,10	0,4407	2,60	0,3481
62	0,6076	12	0,4360	62	0,3452
64	0,5977	14	0,4311	64	0,3426
66	0,5883	16	0,4265	66	0,3398
68	0,5793	18	0,4221	68	0,3372
1,70	0,5706	2,20	0,4177	2,70	0,3346
72	0,5619	22	0,4134	72	0,3321
74	0,5538	24	0,4092	74	0,3296
76	0,5458	26	0,4053	76	0,3271
78	0,5378	28	0,4012	78	0,3246
1,80	0,5307	2,30	0,3974	2,80	0,3222
82	0,5232	32	0,3938	82	0,3199
84	0,5161	34	0,3899	84	0,3176
86	0,5094	36	0,3863	86	0,3153
88	0,5027	38	0,3827	88	0,3131
1,90	0,4964	2,40	0,3792	2,90	0,3109
92	0,4900	42	0,3760	92	0,3088
94	0,4839	44	0,3726	94	0,3066
96	0,4779	46	0,3692	96	0,3045
98	0,4722	48	0,3661	98	0,3024
2,00	0,4667	2,50	0,3628	3,00	0,3005

3,00	0,3005	3,50	0,2580	4,00	0,2270
02	0,2985	52	0,2566	02	0,2259
04	0,2965	54	0,2552	04	0,2248
06	0,2946	56	0,2538	06	0,2238
08	0,2926	58	0,2525	08	0,2228
3,10	0,2907	3,60	0,2510	4,10	0,2217
12	0,2889	62	0,2498	12	0,2207
14	0,2871	64	0,2484	14	0,2197
16	0,2852	66	0,2472	16	0,2187
18	0,2834	68	0,2459	18	0,2177
3,20	0,2817	3,70	0,2442	4,20	0,2167
22	0,2800	72	0,2433	22	0,2158
24	0,2783	74	0,2420	24	0,2148
26	0,2766	76	0,2408	26	0,2138
28	0,2750	78	0,2396	28	0,2129
3,30	0,2733	3,80	0,2384	4,30	0,2120
32	0,2717	82	0,2372	32	0,2110
34	0,2701	84	0,2360	34	0,2101
36	0,2685	86	0,2349	36	0,2093
38	0,2669	88	0,2337	38	0,2083
3,40	0,2654	3,90	0,2326	4,40	0,2074
42	0,2639	92	0,2314	42	0,2065
44	0,2624	94	0,2303	44	0,2056
46	0,2609	96	0,2292	46	0,2048
48	0,2595	98	0,2281	48	0,2039
3,50	0,2580	4,00	0,2270	4,50	0,2030

4,50	0,2030	5,00	0,1838	5,50	0,1680
52	0,2022	02	0,1831	52	0,1675
54	0,2014	04	0,1825	54	0,1670
56	0,2005	06	0,1818	56	0,1664
58	0,1997	08	0,1812	58	0,1659
4,60	0,1989	5,10	0,1805	5,60	0,1653
62	0,1981	12	0,1798	62	0,1647
64	0,1973	14	0,1792	64	0,1642
66	0,1965	16	0,1785	66	0,1635
68	0,1957	18	0,1778	68	0,1631
4,70	0,1949	5,20	0,1772	5,70	0,1625
72	0,1941	22	0,1766	72	0,1620
74	0,1933	24	0,1760	74	0,1615
76	0,1926	26	0,1753	76	0,1610
78	0,1919	28	0,1747	78	0,1604
4,80	0,1911	5,30	0,1741	5,80	0,1599
82	0,1903	32	0,1735	82	0,1594
84	0,1896	34	0,1729	84	0,1589
86	0,1888	36	0,1723	86	0,1584
88	0,1880	38	0,1717	88	0,1579
4,90	0,1873	5,40	0,1711	5,90	0,1574
92	0,1866	42	0,1704	92	0,1569
94	0,1859	44	0,1698	94	0,1564
96	0,1852	46	0,1692	96	0,1559
98	0,1845	48	0,1686	98	0,1555
5,00	0,1838	5,50	0,1680	6,00	0,1549

6,00	0,1549	7,50	0,1254	9,00	0,1055
10	0,1525	60	0,1239	10	0,1044
20	0,1502	70	0,1224	20	0,1033
30	0,1479	80	0,1209	30	0,1022
40	0,1458	90	0,1194	40	0,1012
6,50	0,1436	8,00	0,1180	9,50	0,1002
60	0,1416	10	0,1166	60	0,0992
70	0,1396	20	0,1153	70	0,0982
80	0,1377	30	0,1140	80	0,0973
90	0,1358	40	0,1127	90	0,0963
7,00	0,1340	8,50	0,1114	10,00	0,0954
10	0,1322	60	0,1102		
20	0,1304	70	0,1090		
30	0,1287	80	0,1078		
40	0,1270	90	0,1066		
7,50	0,1254	9,00	0,1055		

T A B L A III

$a = R_2/R_1 = 2; \quad Y_1 = Y_1(y, a) ; \quad Y_2 = Y_2(y, a)$

y	Y ₁	Y ₂	$\epsilon = 6,25$		$\epsilon = 1/6,25$	
			ϵY_2	x _c	ϵY_2	x _c
0,2	-13,91	-41,39	-258,7	0,08	-6,622	0,5
4	-2,607	-10,10	-63,12	16	-1,616	1,0
6	-0,418	-4,305	-26,91	24	-0,689	1,5
8	0,500	-2,275	-14,22	32	-0,364	2,0
1,0	1,211	-1,329	-8,306	40	-0,213	2,5
2	2,331	-0,808	-5,050	48	-0,129	3,0
4	7,731	-0,487	-3,044	56	-0,078	3,5
6	-5,615	-0,268	-1,675	64	-0,043	4,0
8	-1,876	-0,106	-0,662	72	-0,017	4,5
2,0	-1,031	0,025	0,156	80	0,004	5,0
2	-0,648	147	0,912	88	024	5,5
4	-0,430	274	1,938	96	044	6,0
6	-0,204	446	2,788	1,04	071	6,5
8	-0,179	733	4,581	12	117	7,0
3,0	-0,096	1,525	9,531	20	244	7,5
2	-0,027	-83,69	-523	28	-13,39	8,0
4	0,036	-1,409	-8,806	36	-0,225	8,5
6	0,102	-0,670	-4,188	44	-0,107	9,0
8	0,170	-0,402	-2,512	52	-0,064	9,5
4,0	0,263	-0,263	-1,644	60	-0,042	10,0
2	0,401	-0,174	-1,088	68	-0,029	10,5
4	0,701	-0,108	-0,675	76	-0,017	11,0
6	2,166	-0,057	-0,356	84	-0,009	11,5
8	-2,005	-0,012	-0,075	92	-0,002	12,0
5,0	-0,654	-0,030	0,188	2,00	0,005	12,5

$$a = R_2/R_1 = 2; \quad Y_1 = Y_1(y, a); \quad Y_2 = Y_2(y, a)$$

y	Y ₁	Y ₂	$\epsilon = 6,25$		$\epsilon = 1/6,25$	
			ϵY_2	x_c	ϵY_2	x_c
5,0	-0,654	0,030	0,188	2,00	0,005	12,5
2	-0,362	073	456	2,08	012	13,0
4	-0,232	122	762	16	020	13,5
6	-0,152	186	1,162	24	030	14,0
8	-0,100	286	1,788	32	046	14,5
6,0	-0,059	494	3,088	40	079	15,0
2	-0,025	1,394	8,712	48	0,223	15,5
4	0,009	-1,769	-11,056	56	-0,283	16,0
6	041	-0,517	-3,231	64	-0,083	16,5
8	076	-0,313	-1,956	72	-0,050	17,0
7,0	118	-0,181	-1,131	80	-0,029	17,5
2	174	-0,118	-0,738	88	-0,019	18,0
4	272	-0,079	-0,494	96	-0,013	18,5
6	0,521	-0,046	-0,288	3,04	-0,007	19,0
8	2,762	-0,018	-0,114	12	-0,003	19,5
8,0	-0,807	0,0075	0,047	3,20	-0,001	20,0

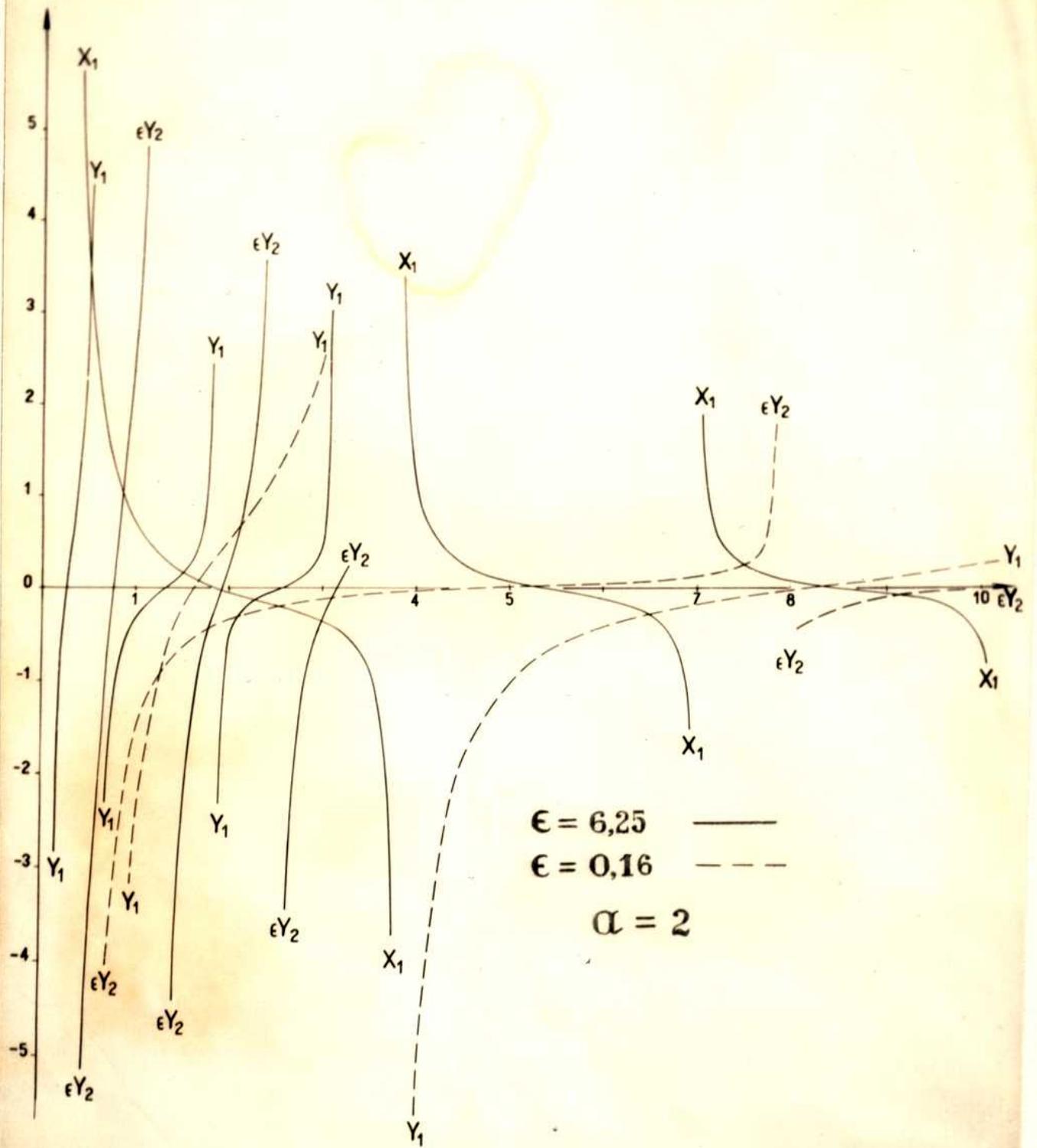


FIGURA 2

T A B L A IV

$$a = \frac{R_2}{R_1} = 1,1 ; \quad Y_1 = Y_1(y, a) ; \quad Y_2 = Y_2(y, a)$$

y	Y ₁	Y ₂	ε = 6,25		ε = 1/6,25	
			ε Y ₂	x _c	ε Y ₂	x _c
0,2	-2,27	-263,8	-1649,	0,08	-42,22	0,5
4	-0,489	-65,78	-411,1	16	-10,52	1
6	-0,159	-29,18	-182,4	24	-4,68	1,5
8	-0,044	-16,41	-102,5	32	-2,625	2
1,0	0,010	-10,503	-65,64	40	-1,680	2,5
2	041	-7,2763	-45,48	48	-1,164	3
4	056	-5,3376	-33,36	56	-0,854	2,5
6	068	-4,0766	-25,48	64	-0,652	4
8	076	-3,2152	-20,10	72	-0,514	4,5
2,0	082	-2,6053	-16,28	80	-0,417	5
2	086	-2,1407	-13,38	88	-0,342	5,5
4	090	-1,7931	-11,21	0,96	-0,287	6
6	093	-1,5241	-9,526	1,04	-0,244	6,5
8	095	-1,3087	-8,179	12	-0,209	7
3,0	097	-1,1357	-7,098	20	-0,182	7,5
2	099	-0,9946	-6,216	28	-0,159	8
4	100	-0,8764	-5,478	36	-0,140	8,5
6	101	-0,7784	-4,865	44	-0,124	9
8	103	-0,6953	-4,346	52	-0,111	9,5
4,0	105	-0,6240	-3,900	60	-0,100	10
2	106	-0,5573	-3,483	68		
4	107	-0,5097	-3,185	76		
6	108	-0,4639	-2,900	84		
8	109	-0,4229	-2,643	92		
5,0	111	-0,3829	-2,393	2,00		

y	Y ₁	Y ₂	ε = 6,25	
			ε Y ₂	x _c
5,0	0,111	-0,3829	-2,393	2,00
5,2	112	-0,3536	-2,210	08
5,4	113	-0,3237	-2,023	16
5,6	114	-0,2995	-1,872	24
5,8	115	-0,2760	-1,725	32
6,0	117	-0,2585	-1,616	40
6,2	118	-0,2390	-1,494	48
6,4	118	-0,2231	-1,395	56
6,6	119	-0,2080	-1,300	64
6,8	120	-0,1945	-1,216	72
7,0	125	-0,1802	-1,127	80
7,2	128	-0,1697	-1,060	88
7,4	130	-0,1586	-0,991	96
7,6	131	-0,1485	-0,928	3,04
7,8	133	-0,1387	-0,867	12
8,0	134	-0,1295	-0,810	20
8,2	137	-0,1227	-0,767	28
8,4	140	-0,1159	-0,724	36
8,6	142	-0,1083	-0,677	44
8,8	145	-0,1007	-0,630	52
9,0	148	-0,0949	-0,593	60
9,2	151	-0,890	-0,556	68
9,4	153	-0,0845	-0,528	76
9,6	155	-0,0787	-0,492	84
9,8	156	-0,0740	-0,463	92
10,0	156	-0,0696	-0,435	4,00

y	Y ₁	Y ₂	ε = 6,25	
			ε Y ₂	x _c
10,0	0,156	-0,0696	-0,435	4,00
2	162	-0,0653	-0,408	08
4	168	-0,0613	-0,383	16
6	177	-0,0565	-0,353	24
8	185	-0,0541	-0,338	32
11,0	193	-0,0506	-0,316	40
2	202	-0,0475	-0,297	48
4	208	-0,0436	-0,273	56
6	215	-0,0415	-0,259	64
8	224	-0,0388	-0,242	72
12,0	234	-0,0362	-0,226	80
2	245	-0,0336	-0,210	88
4	260	-0,0312	-0,195	96
6	273	-0,0288	-0,180	5,04
8	293	-0,0266	-0,166	12
13,0	314	-0,0245	-0,153	20
2	337	-0,0224	-0,140	28
4	368	-0,0205	-0,128	36
6	400	-0,0186	-0,116	44
8	446	-0,0168	-0,105	52
14,0	504	-0,0150	-0,094	60
2	575	-0,0133	-0,083	68
4	679	-0,0115	-0,073	76
6	832	-0,0101	-0,063	84
8	1,083	-0,0088	-0,055	92
15,0	1,549	-0,0071	-0,044	6,00

y	Y ₁	Y ₂	$\epsilon = 6,25$ ϵY_2	x_c
15,0	1,549	-0,0071	-0,044	6,00
2	2,848	-0,0056	-0,035	08
4	17,91	-0,0043	-0,027	16
6	-3,835	-0,0029	-0,018	24
8	-1,755	-0,0015	-0,010	32
16,0	-1,121	-0,0005	-0,003	40
2	-0,822	0,0001	0,006	48
4	-0,640	0024	015	56
6	-0,523	0036	022	64
8	-0,443	0048	030	72
17,0	-0,373	0060	038	80
2	-0,328	0073	046	88
4	-0,294	0085	053	96
6	-0,263	0094	059	7,04
8	-0,238	0107	067	12
18,0	-0,216	0118	074	20
19	-0,145	0,0165	0,103	7,60
20	-0,104	0215	135	8,00
21	-0,079	0266	166	40
22	-0,066	0319	200	80
23	-0,048	0376	235	9,20
24	-0,038	0444	278	60
25	-0,030	0526	329	10,00

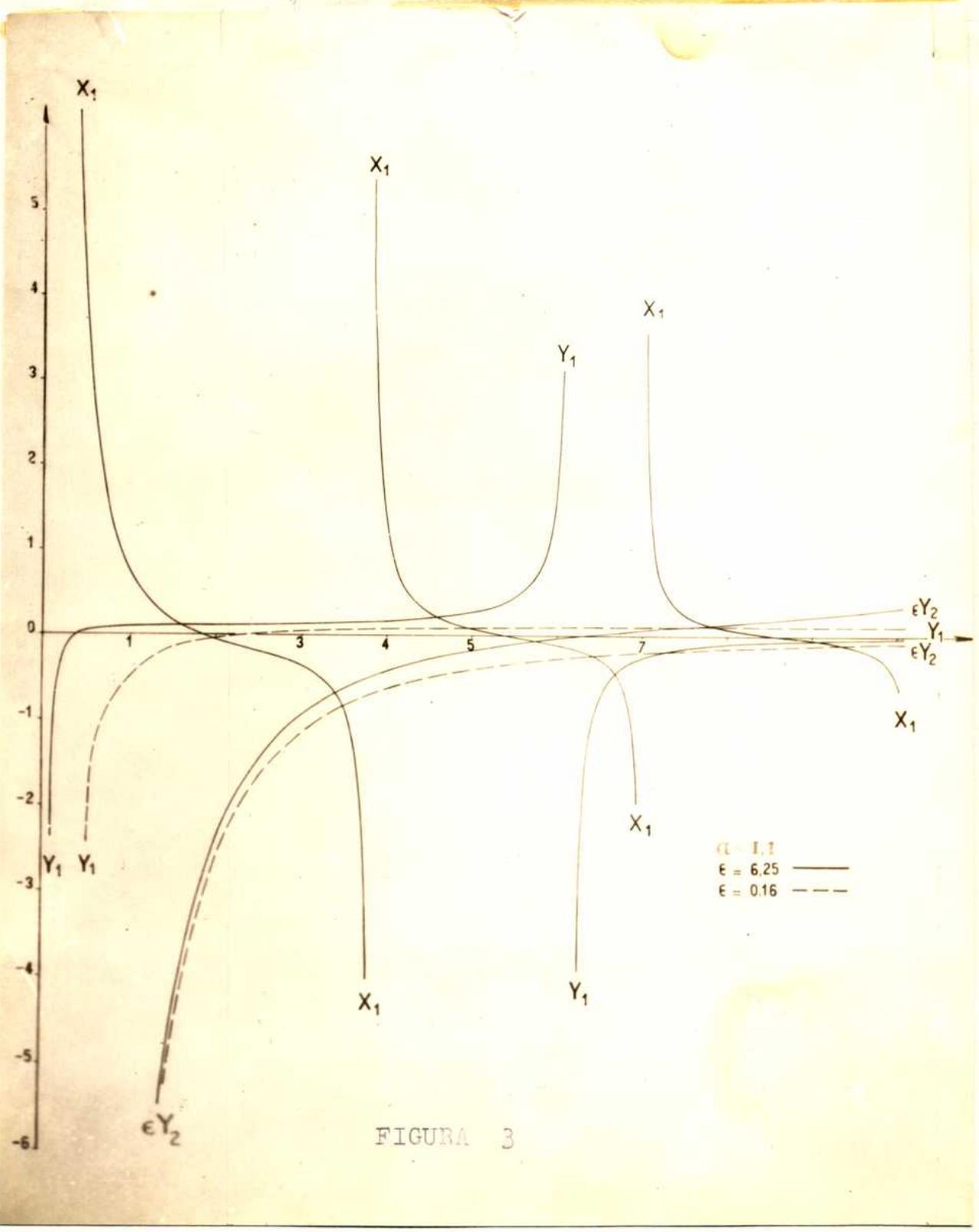


FIGURA 3

T A B L A V

$$y = i\eta \quad \epsilon = 1/6,25$$

a = 2			a = 1,1		
η	Y_1	ϵY_2	η	Y_1	ϵY_2
0,20	16,058	6,720	0,20	2,460	42,269
0,30	2,6145	0,7901	0,60	0,3683	4,6834
1,00	1,4282	0,3094	1,00	0,1991	1,6885
----	--	--	1,20	0,1712	1,1739
----	--	--	1,50	0,1457	0,7534
2,00	0,6370	0,1078	2,00	0,1266	0,4264
4,50	0,2502	0,0400	----	--	--
			5,00	0,0999	0,0726
			9,00	0,0713	-0,0151

Esta tablas se han obtenido con las siguientes fórmulas

$$Y_1 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{A}{B} \right) \quad Y_2 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{C}{D} \right)$$

$$A = \eta \left[I_0(\eta) \cdot iH_0^{(1)}(ia\eta) - I_0(a\eta) \cdot iH_0^{(1)}(i\eta) \right] -$$

$$- \frac{1}{a} \left[I_0(\eta) \cdot H_1^{(1)}(ia\eta) - I_1(a\eta) \cdot iH_0^{(1)}(i\eta) \right]$$

$$B = \eta \left[I_1(\eta) \cdot iH_0^{(1)}(ia\eta) - I_0(a\eta) \cdot H_1^{(1)}(i\eta) \right] -$$

$$- \frac{1}{a} \left[I_1(\eta) \cdot H_1^{(1)}(ia\eta) - I_1(a\eta) \cdot iH_1^{(1)}(i\eta) \right]$$

$$C = I_0(\eta) \cdot H_1^{(1)}(ia\eta) - I_1(a\eta) \cdot iH_0^{(1)}(i\eta)$$

$$D = I_1(\eta) \cdot H_1^{(1)}(ia\eta) - I_1(a\eta) \cdot H_1^{(1)}(i\eta)$$

donde $H_0^{(1)}$ y $H_1^{(1)}$ son las funciones de Hankel como está definido en (2).

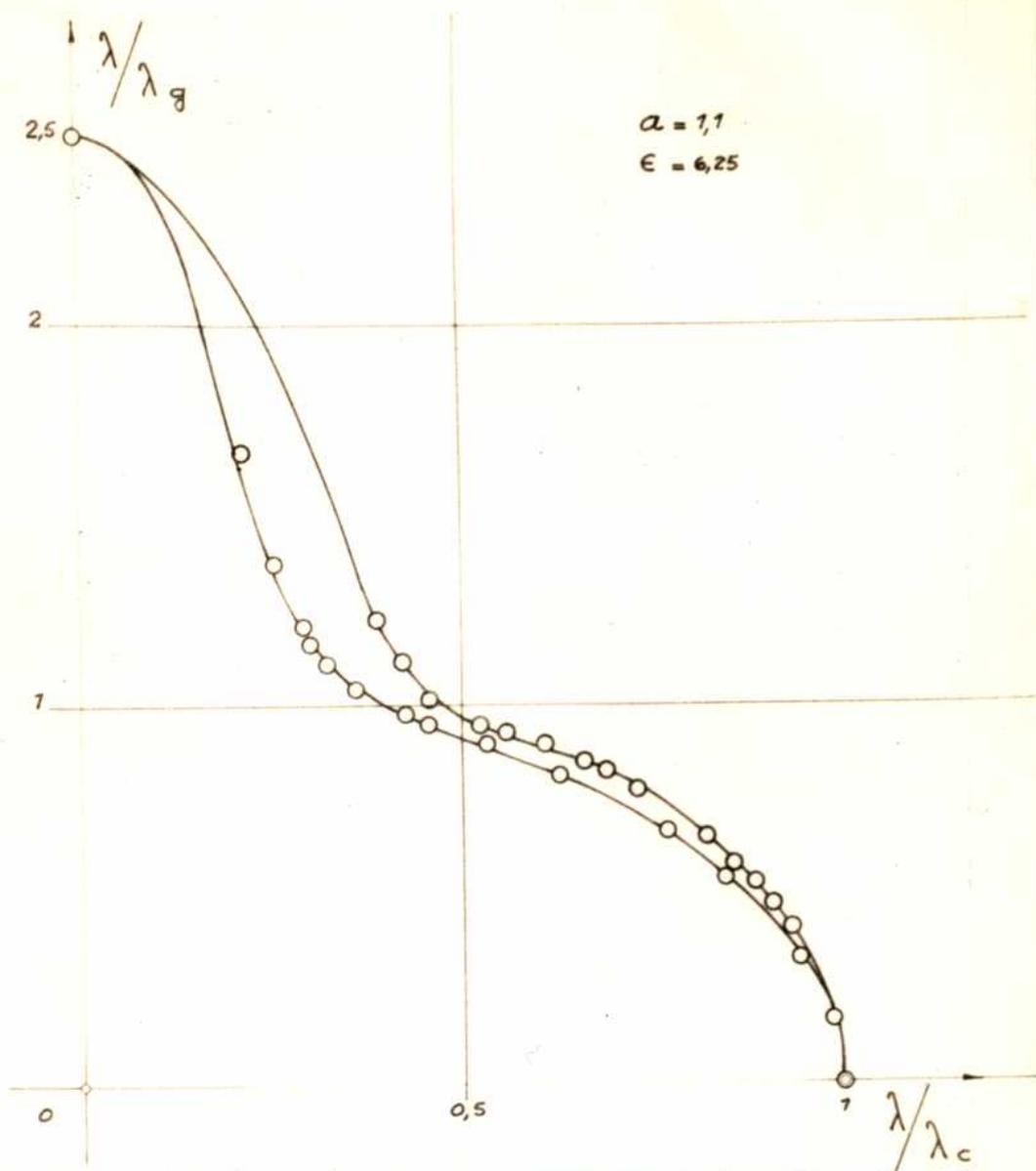


FIGURA 4. Sólo se ha representado el primer modo de cada tipo, pues los demás difieren ligeramente del primero. La curva exterior corresponde al primer modo "tipo magnético".

T A B L A VI

Soluciones de los 6 primeros modos para $\alpha = 1,1$ $\epsilon = 6,25$

	$1(X_1 Y_1)$	$1(X_1 \in Y_2)$	$2(X_1 Y_1)$	$2(X_1 \in Y_2)$	$3(X_1 Y_1)$	$3(X_1 \in Y_2)$	
x_c	1,60	3,41	4,60	5,75	6,69	7,81	} Valores de corte
y_c	4,00	8,52	11,50	14,38	16,72	19,52	

y	x	x	ξ	ξ	ξ	ξ	y
4,20	1,598	--	4,578				11,60
4,60	1,580	--	4,540				12
5,00	1,552	--	4,420				13
6,00	1,474	--	4,242				14
7,00	1,341	--	3,997	5,590			15
8,00	1,095	--	3,580	5,342			16
8,60	0,835	3,395	3,374	5,247			16,40
9,00	0,41	3,328	3,167	5,170	6,681		16,80
9,20	0,18	3,300	2,712	4,964	6,357		18
	0		2,544	4,856	6,120		19
	0		2,442	4,756	5,933	7,750	20
	0		2,376	4,668	5,793	7,660	21
9,40	0,55	3,264	2,333	4,595	5,728	7,580	22
9,60	0,845	3,220	2,282	4,530	5,623	7,514	23
10,00	1,230	3,140	2,243	4,463	5,564	7,444	24
11,00	2,30	2,912	2,213	4,397	5,514	7,396	25
11,60	3,08	2,772					
12,00	3,69	2,684					
13,00	5,87	2,476					
14,00	10	2,285					
15,00	--	2,056					
16,00	--	1,587					
16,40	--	1,09					
		0					
16,80	--	0,91					
18,00	--	3,840					
19,00	--	6,21					
20,00	--	6,74					

Con $k(X_1 Y_1)$ y $k(X_1 \in Y_2)$ ($k = 1,2,3$) se representa el k-ésimo modo "tipo magnético" y "tipo eléctrico", respectivamente.

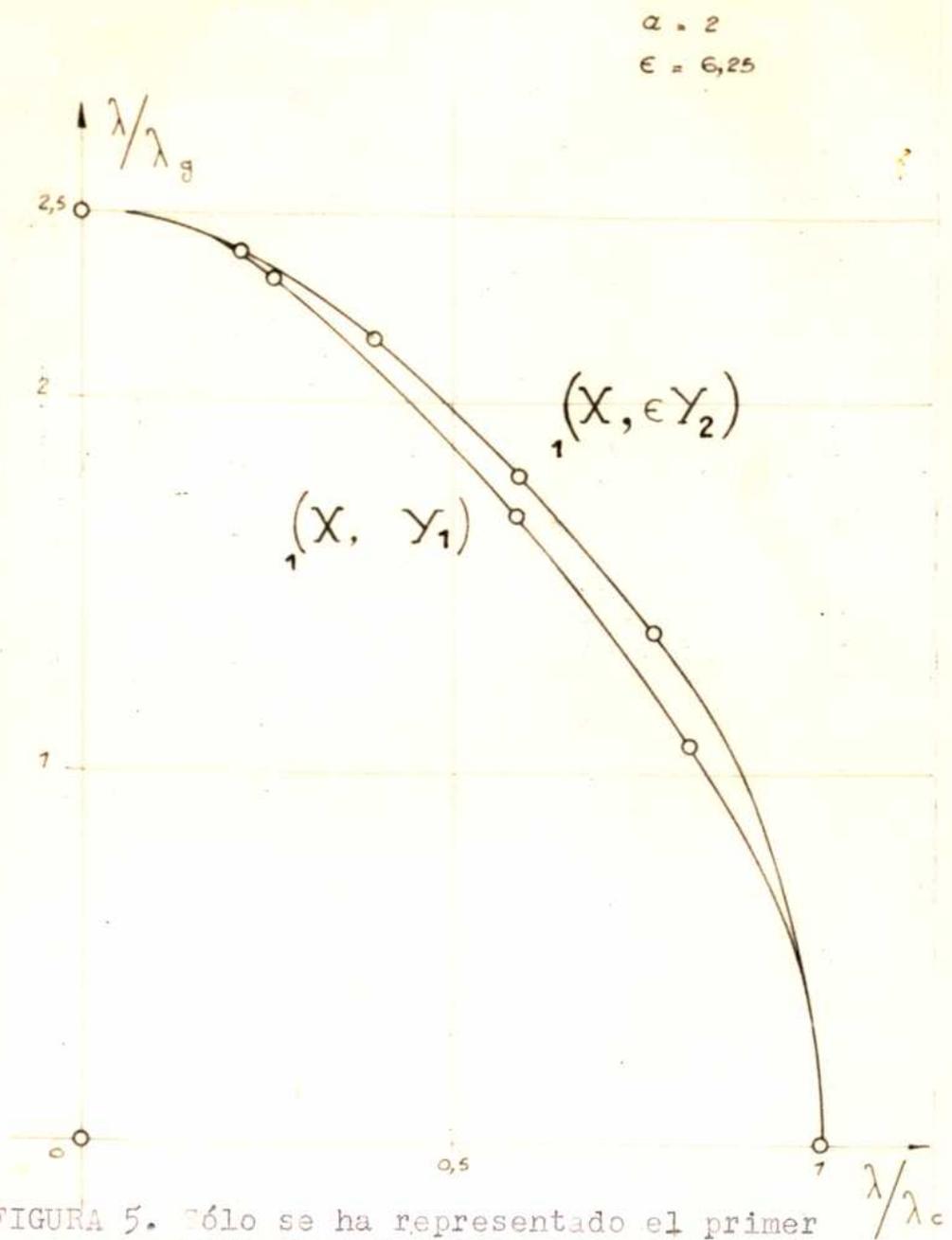


FIGURA 5. Sólo se ha representado el primer modo de cada tipo, pues los demás difieren ligeramente del primero. La curva exterior corresponde al primer modo "tipo magnético".

T A B L A VII

Soluciones de los 6 primeros modos, para $a = 2$ $\epsilon = 6,25$

$_1(X_1 Y_1)$ $_1(X_1 \in Y_2)$ $_2(X_1 Y_1)$ $_2(X_1 \in Y_2)$ $_3(X_1 Y_1)$ $_3(X_1 \in Y_2)$

$x_c =$	0,51	0,89	1,52	1,93	2,27	3,02
$y_c =$	1,28	2,21	3,80	4,82	5,68	7,55
y	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ

1,40	0,25	---	---	---	---	---
1,60	1,19	---	---	---	---	---
1,80	4,12	---	---	---	---	---
2,00	---	---	---	---	---	---
2,40	---	$\sum = 1,096$	---	---	---	---
2,60	---	2,270	---	---	---	---
2,80	---	4,320	---	---	---	---
3,00	---	9,05	---	---	---	---
4,00	---	---	1,308	---	---	---
4,40	---	---	0,11	---	---	---
4,60	---	---	$\sum = 2,275$	---	---	---
4,80	---	---	$\xi = 13$	---	---	---
5	---	---	---	1,11	---	---
5,20	---	---	---	$\sum = 1,65$	---	---
5,40	---	---	---	3,36	---	---
5,60	---	---	---	5,69	---	---
5,80	---	---	---	9,10	2,154	---
6	---	---	---	15	2,024	---
7	---	---	---	---	1,354	---
7,60	---	---	---	---	$\sum = 2,727$	2,806
8	---	---	---	---	---	1,380

Con $_k(X_1 Y_1)$ y $_k(X_1 \in Y_2)$ ($k = 1,2,3$) se representa el k -ésimo modo "tipo magnético" y "tipo eléctrico", respectivamente.

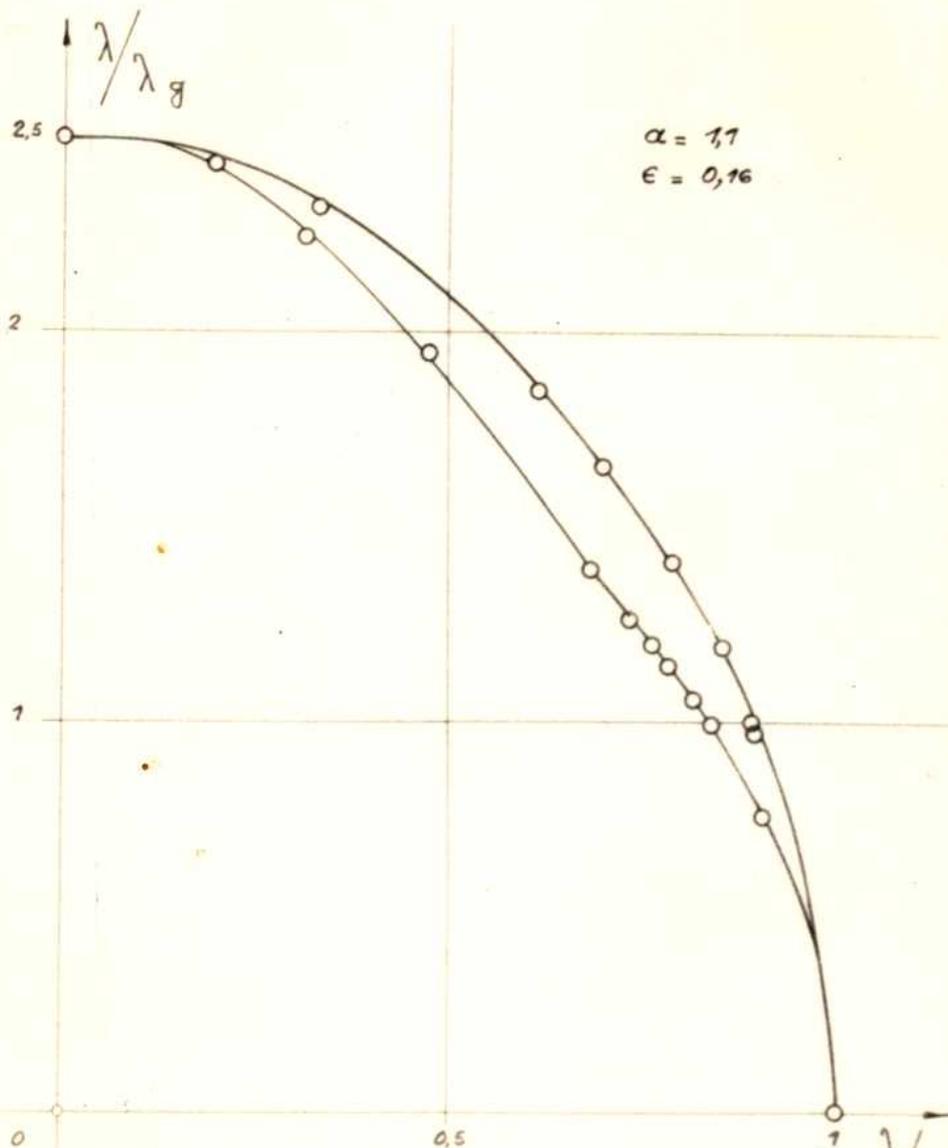


FIGURA 6. Sólo se ha representado el primer modo de cada tipo, pues los demás difieren ligeramente del primero. La curva exterior corresponde al primer modo "tipo magnético".

T A B L A VIII

Soluciones de los 6 primeros modos, para $a = 1,1 = 0,16$

${}_1(X_1 Y_1)$ ${}_1(X_1 \in Y_1)$ ${}_2(X_1 Y_1)$ ${}_2(X_1 \in Y_1)$ ${}_3(X_1 Y_1)$ ${}_3(X_1 \in Y_2)$

x_c 9,35 7,87 6,13 4,96 3,49 $x_c = 1,97$
 y_c 3,74 3,15 2,57 1,98 1,40 $y_c = 0,79$

y ${}_3(X_1 \in Y_2) \cdot {}_3(X_1 Y_1) \cdot {}_2(X_1 \in Y_2) \cdot {}_2(X_1 Y_1) \cdot {}_1(X_1 \in Y_2) \cdot {}_1(X_1 Y_1)$

3,60	9,44	--	--	--	--	--
3,00	9,64	7,90	--	--	--	--
2,00	9,94	7,92	6,66	--	--	--
1,00	10,12	7,93	6,93	4,97	3,67	--
0,20	10,17	7,96	7,01	5,00	3,83	2,03

$y = j \eta$

η						
0,60	10,19	7,97	7,04	4,99	3,88	2,03
1,00	10,23	7,94	7,09	4,99	3,97	2,07
1,20		7,94		4,99	4,02	2,08
1,50	10,29	7,98	7,18	5,00	4,10	2,11
2,00	10,38	7,96	7,29	5,02	4,25	2,15
5,00	10,67	8,09	7,64	5,10	4,61	2,20
9,00	11,03	8,46	7,99	5,37	4,88	2,33

Con ${}_k(X_1 Y_1)$ y ${}_k(X_1 \in Y_2)$ ($k = 1, 2, 3$) se representa el k -ésimo modo "tipo magnético" y "tipo eléctrico", respectivamente

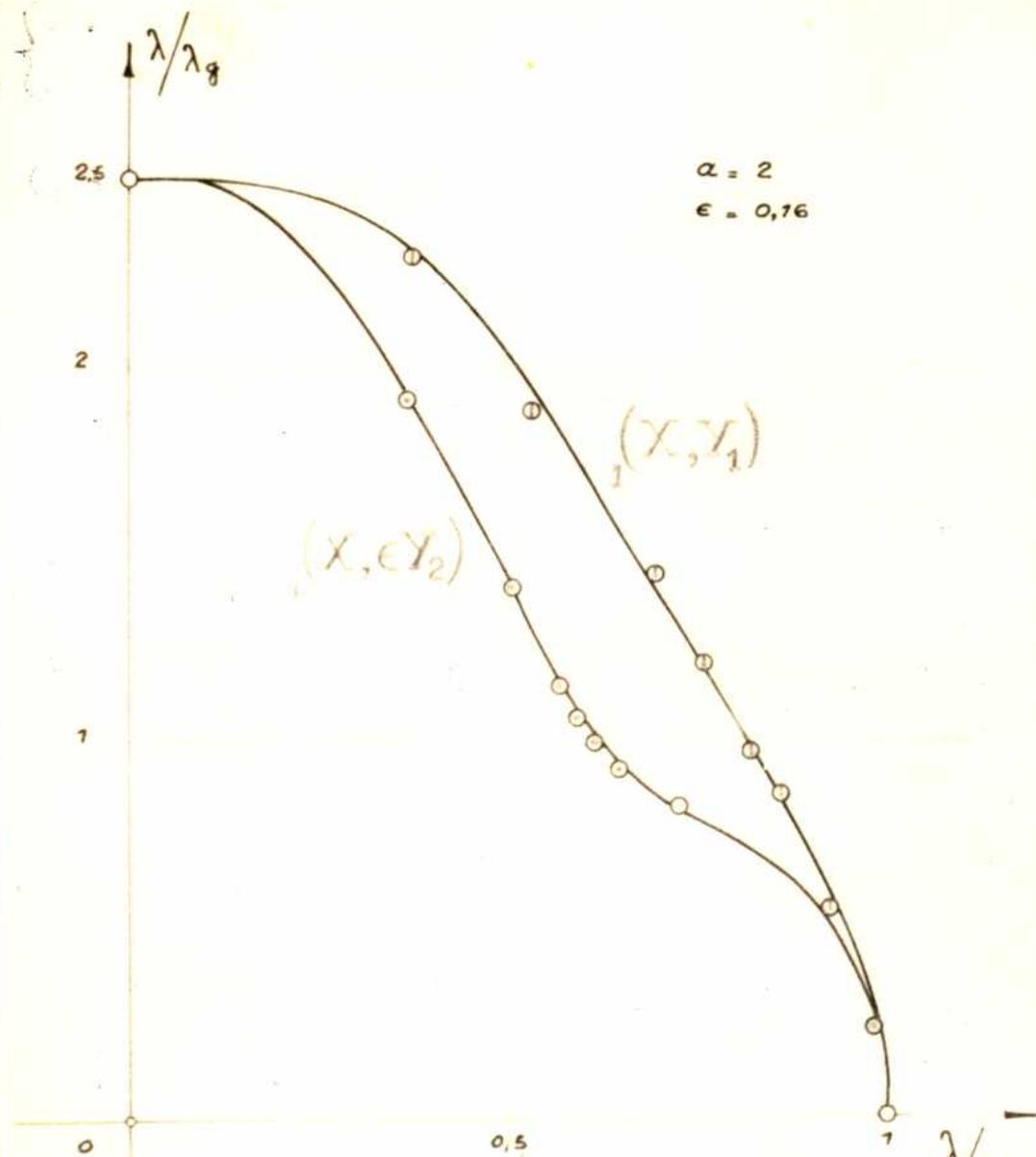


FIGURA 7. Sólo se ha representado el primer modo de cada tipo, pues los demás difieren ligeramente del primero. La curva exterior corresponde al primer modo "tipo magnético".

F. O. S. S. A.

T A B L A IX

Soluciones de los 6 primeros modos, para $a = 2 \quad = 0,16$

x_c	1,68	2,55	3,82	5,25	6,50	7,50	}	Valores de corte
y_c	0,67	1,02	1,53	2,10	2,60	3,00		

$1(X_1 Y_1) \quad 1(X_1 \in Y_2) \quad 2(X_1 Y_1) \quad 2(X_1 \in Y_2) \quad 3(X_1 Y_1) \quad 3(X_1 \in Y_2)$

	x	x	x	x	x	x
3,00	--	--	--	--	--	7,50
2,90	--	--	--	--	--	7,72
2,40	--	--	--	--	6,67	8,16
2,00	--	--	--	5,30	6,88	8,45
1,40	--	--	3,86	5,79	7,04	9,22
1,20	--	--	--	--	--	9,57
1,00	--	2,56	4,02	6,53	7,12	9,86
0,80	--	3,32	--	--	--	10,02
0,60	1,77	3,65	4,26	6,93	7,26	10,12
0,40	1,83	--	--	--	7,32	10,15
0,20	1,88	3,82	4,43	7,01	7,37	10,17

$y = j \eta$

	η					
0,20	1,92	3,84	4,46	7,02	7,41	10,18
0,60	1,93	3,90	4,59	7,06	7,50	10,21
1,00	1,97	3,98	4,74	7,10	7,66	10,24
2,00	2,07	4,16	5,00	7,22	7,98	10,33

4,50 2,19 4,47 5,21 7,48 8,27 10,53

Con $k(X_1 Y_1)$ y $k(X_1 \in Y_2)$ ($k = 1, 2, 3$) se representa el k -ésimo modo "tipo magnético" y "tipo eléctrico", respectivamente.

M. S. S. A.