

Tesis de Posgrado

Cohomología de la variedad de Stiefel proyectiva compleja

Ruiz, Carlos Alfredo

1970

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

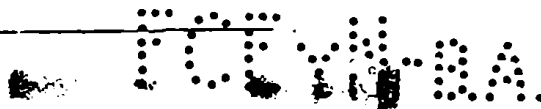
This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Ruiz, Carlos Alfredo. (1970). Cohomología de la variedad de Stiefel proyectiva compleja. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1358_Ruiz.pdf

Cita tipo Chicago:

Ruiz, Carlos Alfredo. "Cohomología de la variedad de Stiefel proyectiva compleja". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1970.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1358_Ruiz.pdf



COHOMOLOGIA DE LA
VARIEDAD DE SPIEFEL
PROYECTIVA COMPLEJA

por

Carlos Alfredo Ruiz

1358 =
42

Tesis presentada en la
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
de la
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES,
para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas.

1970

0 - INTRODUCCION

En este trabajo se estudian las variedades de Stiefel proyectivas complejas $Y_{n,k}$. Se determina la cohomología entera y se dan algunos resultados en K teoría.

$Y_{n,k}$ es en un sentido, un clasificante para los fibrados vectoriales complejos que son suma de n copias de un fibrado de rectas y que admiten k secciones linealmente independientes. Esta propiedad es importante en el estudio de inmersión de variedades. Gitler y Mandel, [G], [G - 3], han calculado la cohomología módulo 2 de las variedades de Stiefel proyectivas reales y utilizan ese resultado en los problemas de inmersión.

Nuestras proposiciones 2 y 4 son similares a resultados de [G - H] para el caso real.

En el caso particular $n = k$, $Y_{n,n}$ es el grupo unitario proyectivo; su cohomología fue calculada por Baum y Browder [B - B]

en el caso $n = p^r$, p primo. Usando este resultado, Petrie [P] calculó la K teoría del grupo unitario proyectivo para $n = p^r$, p primo impar.

Aquí no se intenta aprovechar las propiedades geométricas de $Y'_{n,k}$, en realidad sólo se usa la definición de $Y''_{n,k}$ para identificar su tipo de homotopía.

En la sección 1 se dan las definiciones generales y la notación. Se demuestran propiedades de $Y''_{n,k}$ y se construye un espacio $Y_{n,k}$ del mismo tipo de homotopía con el cual se trabajará en adelante. También se recopilan algunos resultados conocidos que se usarán en el resto del trabajo.

En la sección 2 se calcula la cohomología entera de $Y_{n,k}$. En 2.1 se calcula la cohomología a coeficientes en un cuerpo. En 2.2 se determina el núcleo de la proyección $Y_{n,k} \longrightarrow \underline{CF}$. En 2.3 se utilizan esos resultados para calcular la sucesión espectral de Bockstein para cada primo p . Finalmente, en 2.4 se dan algunos resultados en cohomología relativa.

En la sección 3 se obtienen algunos resultados en K teoría.

Agradecimientos: Al profesor Samuel Gitler quien me propuso el tema y aportó valiosas sugerencias.

A las varias personas que contribuyeron a mi formación en estas cuestiones, especialmente a los profesores H. Mahowald y R. A. Ricabarra.

..

Al profesor Orlando S. Villamayor, director de tesis.

Buenos Aires, octubre de 1970.

1 - GENERALIDADES

1.1. Definiciones.

Con U_n indicamos el grupo de las matrices unitarias de orden n . Tenemos inclusiones, de U_{n-1} en U_n dadas por $A \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En particular, $U_1 \approx \underline{S}^1$.

La variedad de Stiefel compleja, $W_{n,k}$ es el conjunto de los k -marcos ortonormales en $\underline{\mathbb{C}}^n$, con la topología dada por la inclusión en $\underline{\mathbb{C}}^n \times \underline{\mathbb{C}}^n \times \dots \times \underline{\mathbb{C}}^n \approx \underline{\mathbb{C}}^{n \cdot k}$.

U_n opera transitivamente en $W_{n,k}$. Si con $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ indicamos la base canónica de $\underline{\mathbb{C}}^n$, el subgrupo de isotropía del k -marco (e_{n-k+1}, \dots, e_n) es U_{n-k} , luego:

$$W_{n,k} \approx U_n / U_{n-k};$$

en particular:

$$W_{n,1} \approx \underline{S}^{2n-1},$$

$$W_{n,n} \approx U_n.$$

\underline{S}^1 , considerado como los números complejos de norma 1, opera en $W_{n,k}$ mediante: $\theta(v_1, \dots, v_n) = (\theta v_1, \dots, \theta v_n)$; el cociente de

$W_{n,k}$ por esta acción es la variedad de Stiefel proyectiva compleja que indicamos con $Y_{n,k}^i$;

en particular: $Y_{n,1}^0 \approx \underline{CP}^{n-1}$ (espacio proyectivo complejo)

$Y_{n,n}^0 \approx \underline{U}_n$ (grupo unitario proyectivo) .

La relación de equivalencia en $\underline{C}^{n \cdot k} - 0 : v \sim w$ si y sólo si existe un complejo θ tal que $v = \theta w$ coincide con la que acabamos de definir si v y w son k -marcos ortonormales (aquí como en lo que sigue, identificamos $\underline{C}^{n \cdot k}$ con $\underline{C}^n \times \underline{C}^n \times \dots \times \underline{C}^n$) ; luego, podemos pensar a $Y_{n,k}^i$ como un subconjunto de $\underline{CP}^{n \cdot k - 1}$.

Proposición 1. $W_{n,k} \longrightarrow Y_{n,k}^i$, es un fibrado en circunferencias con grupo U_1 .

Demostración: Vamos a probar que es un fibrado principal de fibra \underline{S}^1 para lo cual basta construir una sección local para cada punto de $Y_{n,k}^i$.

Sea W_i la aplicación $(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \frac{1}{|v_i|} (v_1, \dots, v_n)$ definida para los conjuntos de k -vectores de \underline{C}^n tales que $|v_i| \neq 0$. Si $v = (v_1, \dots, v_k)$ define en $\underline{CP}^{n \cdot k - 1}$ el mismo punto que un k -marco ortonormal, entonces $W_i(v)$ es un k -marco ortonormal.

Sea $z = (z_{11}, \dots, z_{1n}, \dots, z_{k1}, \dots, z_{kn})$ un vec-

tor que representa al punto $\langle z \rangle$ de $\mathbb{C}P^{n,k-1}$, entonces existen i, j tales que $z_{ij} \neq 0$. Definimos s_{ij} como la aplicación $\langle z \rangle \rightarrow \frac{1}{z_{ij}} z$, definida en el conjunto A_{ij} de los puntos $\langle z \rangle$ cuyos representantes cumplen $z_{ij} \neq 0$.

Entonces si $\langle v \rangle$ es la clase de un k -marco ortonormal $v = (v_1, \dots, v_n)$, existen i, j tales que $\langle v \rangle$ pertenece a A_{ij} y $\cup_i s_{ij} : A_{ij} \rightarrow Y_{n,k}$ es una sección. \square

Sea \mathbb{E} el fibrado vectorial (de dimensión compleja 1) asociado al fibrado en circunferencias $W_{n,k} \rightarrow Y_{n,k}$, entonces el fibrado $n \cdot \mathbb{E} = \mathbb{E} + \mathbb{E} + \dots + \mathbb{E}$ admite k secciones linealmente independientes y es universal para los fibrados de rectas \mathbb{F} tales que $n \cdot \mathbb{F}$ admite k secciones linealmente independientes.

Este hecho se demuestra en la proposición que sigue, enunciada en términos de los fibrados en variedades de Stiefel asociados. Una demostración similar puede verse para el caso real en [G-H] :

Proposición 2.

El fibrado de fibra $W_{n,k}$ asociado a \mathbb{E} admite una sección s . Si el fibrado de fibra $W_{n,k}$ asociado a un fibrado de rectas \mathbb{F} , de base X admite una sección s' , entonces \mathbb{F} es isomorfo a $f^* \mathbb{E}$ donde f representa una clase de homotopía de funcio-

nes $X \longrightarrow Y'_{n,k}$ y s' es la sección $x \longrightarrow fs(x)$.

Además esta correspondencia es funtorial.

Demostración: El fibrado asociado a \mathbb{E} con fibra $W_{n,k}$

es también el fibrado asociado al fibrado principal

$W_{n,k} \longrightarrow Y'_{n,k}$, por lo tanto su espacio total es $W_{n,k} \times_{\underline{S}^1} W_{n,k}$

que se obtiene como cociente de $W_{n,k} \times W_{n,k}$ por la siguiente

acción de \underline{S}^1 : $(v,w)c = (vc, w\bar{c})$ entonces una sección queda

definida por: $s(\langle v \rangle) = \langle (v,v) \rangle$.

Si \mathbb{F} es un fibrado de rectas sobre X ,

sea T el espacio total del fibrado principal asociado, entonces,

como antes el espacio total del fibrado en $W_{n,k}$ asociado

es $T \times_{\underline{S}^1} W_{n,k}$. Si s' es una sección a este último fibrado,

obtenemos una aplicación $g: T \longrightarrow W_{n,k}$, compatible con la ac-

ción de \underline{S}^1 poniendo $s'(x) = \langle (x, g(x)) \rangle$ y la aplicación

$f: X \longrightarrow Y'_{n,k}$ deducida de g cumple con lo pedido. \square

1.2. Espacios clasificantes.

Si G es un grupo topológico, con BG indicamos su espacio clasificante. En particular, BU_n es la variedad de Grassman compleja infinita.

Sea U un espacio contráctil sobre el que opera U_n , entonces U_{n-k} también opera sobre U . BU_n (respectivamente BU_{n-k}) se obtiene como el cociente de U por U_n (respectivamente U_{n-k}).

La aplicación $\pi^0: BU_{n-k} \longrightarrow BU_n$ definida por $x.U_{n-k} \longrightarrow x.U_n$ es una fibración de fibra $W_{n,k}$. [St]

$$W_{n,k} \xrightarrow{i^0} BU_{n-k} \xrightarrow{\pi^0} BU_n \quad (A)$$

Sean $\underline{CP} = \underline{PS}^1$ el espacio proyectivo infinito complejo, H el fibrado canónico sobre \underline{CP} y f_n una aplicación que clasifica al fibrado $n.H$. Finalmente sea

$$W_{n,k} \xrightarrow{i} Y_{n,k} \xrightarrow{i \cdot \pi} \underline{CF} \quad (B)$$

la fibración inducida de (A) por f_n . Obtenemos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} W_{n,k} & \xrightarrow{i^0} & BU_{n-k} & \xrightarrow{\pi^0} & BU_n \\ & & \bar{f}_n & & f_n \\ W_{n,k} & \xrightarrow{i} & Y_{n,k} & \xrightarrow{\pi} & \underline{CF} \end{array} \quad (C)$$

Proposición 3. $Y_{n,k}$ y $Y_{n,k}^i$ tienen el mismo tipo de homotopía.

Demostración: De la inspección del diagrama (C) se deduce que el fibrado sobre $Y_{n,k}$, $n \cdot \pi^*(H)$ admite k secciones linealmente independientes y es universal para los fibrados

de la forma $n \cdot \mathbb{F}$, donde \mathbb{F} es un fibrado de rectas, que admiten k secciones linealmente independientes. Puesto que por la proposición 2, $Y_{n,k}$ es base de un fibrado con las mismas propiedades, ambos espacios tienen el mismo tipo de homotopía. \square

1.3. Notación y resultados en cohomología singular.

Dada una fibración $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ se obtiene una fibración relativa: $(CF, F) \longrightarrow (Cp, E) \longrightarrow B$, donde CF indica el cono de F y Cp es el cono de la aplicación p ; por lo tanto CF es contractil y Cp tiene el tipo de homotopía de B . [Sp]

Aplicamos esto a las fibraciones (A) y (B) y obtenemos el siguiente diagrama, donde hemos puesto $W = W_{n,k}$, $Y = Y_{n,k}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 (CW, W) & \xrightarrow{\alpha'} & (C\pi', BU_{n-k}) & \longrightarrow & BU_n \\
 \vdots & & \gamma & & f_n \\
 (CW, W) & \xrightarrow{\alpha} & (C\pi, Y) & \longrightarrow & CF
 \end{array} \quad (D)$$

Introducimos las siguientes notaciones para las inclusiones:

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xrightarrow{i'} & BU_{n-k} & \xrightarrow{h'} & (BU_{n,k}, W) \\
 W & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{h} & (Y, W)
 \end{array}$$

$$W \xrightarrow{i'} CW \xrightarrow{h'} (C\pi', W)$$

(los homomorfismos de conexión de las respectivas sucesiones exactas de cohomología llevarán los mismos superíndices).

$$j' : BU_n \xrightarrow{\tilde{i}} C\pi' \longrightarrow (C\pi', BU_{n,k})$$

$$j : \underline{CP} \xrightarrow{\tilde{i}} C\pi \longrightarrow (Y, W)$$

$$g : (Y, W) \longrightarrow (BU_{n-k}, W) .$$

Aplicaremos ahora a (D) cohomología singular. Para los siguientes resultados remitimos a [B] y [A-H].

$$1.3.1 \quad H^*(\underline{CP}) = \underline{Z} [w] \quad , \quad \text{grado de } w = 2$$

$$1.3.2 \quad H^*(BU_n) = \underline{Z} [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \quad , \quad \text{donde } \sigma_i \text{ son las clases de Chern universales . grado de } \sigma_i = 2i$$

$$1.3.3 \quad H^*(W_{n,k}) = \underline{Z} (z_{n-k+1}, \dots, z_n) \quad , \quad (\text{álgebra exterior}).$$

(grado de $z_i = 2i-1$)

$$1.3.4 \quad \pi'^* \sigma_i = \sigma_i \quad , \quad i \leq n-k$$

$$\pi'^* \sigma_i = 0 \quad , \quad i > n-k .$$

$$1.3.5 \quad i'^* \sigma_i = 0 .$$

$$1.3.6 \quad f_n^* \sigma_i = \binom{n}{i} w^i .$$

Obtenemos los siguientes diagramas:

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21 (BU)

21-41(W) (CP) (C) (S)

21-41(W) (CP) (C) (S)

21-41(W) (CP) (C) (S)

21-41(W) (CP) (C) (S)

21-41(W) (CP) (C) (S)

21-41(W) (CP) (C) (S) (K) (A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) (I) (J) (K) (L) (M) (N) (O) (P) (Q) (R) (S) (T) (U) (V) (W) (X) (Y) (Z)

21-41(W) (CP) (C) (S)

21-41(W) (CP) (C) (S)

Para la fibración (A), los generadores z_i son trasgresivos:

$$1.3.7 \quad t z_i = \sigma_i, \quad i = n-k+1, \dots, n.$$

De 1.3.6 y 1.3.7 se deduce, por naturalidad de la trasgresión, que los elementos z_i son trasgresivos en la fibración (B):

$$1.3.8 \quad t z_i = \binom{n}{i} w^i, \quad i = n-k+1, \dots, n.$$

Finalmente en [A - P] se demuestra que la trasgresión puede calcularse en términos de la fibración relativa:

$$- t : H^*(F) \xrightarrow{u} H^*(CF, F) \xleftarrow{v} H^*(Cp, E) \xrightarrow{w} H^*(B)$$

donde u es la conexión de la sucesión exacta del par (CF, F) ,

v es el homomorfismo inducido por la inclusión de (CF, F) en

(Cp, E) y w es el homomorfismo deducido de la composición de la

equivalencia homotópica entre B y Cp con la inclusión de Cp en

el par (Cp, E) .

Se ve fácilmente a partir de la definición que la trasgresión induce un isomorfismo entre $\Gamma^* / \text{Im } i^*$ y $\text{Ker } p^* / q(\text{Ker } \tilde{p}^*)$.

2.1. Cohomología a coeficientes en un cuerpo.

En todo este capítulo n y k indican enteros positivos, $k \leq n$ y escribiremos, por comodidad tipográfica, $m = n - k$.

Con b_i indicaremos el máximo común divisor de los números combinatorios $\binom{n}{m+1}, \dots, \binom{n}{i}$; $i = m+1, \dots, n$. Luego, $b_n = 1$ y $b_{m+1} = \binom{n}{m+1}$. También pondremos $c_i = b_{i-1} / b_i$, $i = m+2, \dots, n$.

Dado un primo p , llamaremos $N(p)$ al menor de los índices i tales que $m+1 \leq i < n$ y $\binom{n}{i}$ no es congruente a $0 \pmod{p}$.

I_p será el conjunto de los i tales que p no divide a c_i , $i = m+2, \dots, n$; y J_p será el conjunto de los i tales que no pertenecen a I_p y $m+1 \leq i \leq n$. Entonces $m+1$ y $N(p)$ pertenecen a J_p . Los elementos de J_p los supondremos ordenados y escribiremos: $m+1 = i(0) < i(1) < \dots < i(j) < \dots < i(k) = N(p)$.

Escribiremos $R_p : H^*(X) \longrightarrow H^*(X; \underline{Z}_p)$ y $R : H^*(X) \longrightarrow H^*(X; \underline{Q})$ para las reducciones de coeficientes y pondremos x en lugar de $R_p(x)$ o $R(x)$ cuando no haya lugar a confusión.

La demostración del siguiente teorema es una adaptación de la que se da en [G - H] para el caso real y coeficientes \underline{Z}_2 . Un argumento similar aparece en [B - B] para el caso $n = k = p^r$ y coeficientes \underline{Z}_p pero se usa otra sucesión espectral.

Teorema 4

$$H^*(Y_{n,k}; \underline{Z}_p) = \underline{Z}_p[y] / [y^{i(p)}] \quad E(x_{m+1}, \dots, \hat{x}_{i(p)}, \dots, x_n)$$

$$H^*(Y_{n,k}; \underline{Q}) = \underline{Q}[y] / [y^{m+1}] \quad E(v_{m+2}, \dots, v_m) .$$

Demostración: Si K es un cuerpo, sea N el menor entero i tal que $m+1 \leq i < n$ $i \neq 0$ en K .

En la sucesión espectral de la fibración (B), con coeficientes en K

$$E_2 = K[w] \cdot E(z_{m+1}, \dots, z_n) .$$

Puesto que los elementos z_i son trasgresivos y $t z_i = d_{2i} z_i$; z_i debe sobrevivir hasta el paso $2i$, luego:

$$d_r z_i = 0 \quad , \quad r < 2i .$$

Aplicando 1.3.8 :

$$d_{2i} z_i = \binom{n}{i} w^i = 0 \quad , \quad \text{para } i < N .$$

Puesto que $d_{2i-1} = 0$, pues su codominio es 0 y el término E_2 (y por lo tanto los isomorfos a él) es un producto tensorial de álgebras diferenciales:

$$E_2^{*,0} \otimes E_2^{0,*} = E_2,$$

todos los diferenciales en la sucesión espectral son nulos hasta el término $2N$, y el único diferencial no nulo en E_{2N} es

$$d_{2N} z_N = \binom{n}{N} w^N \neq 0.$$

$d_r z_i = 0$, si $r > 2i$, por razones de dimensión, luego z_i , $i < N$, sobreviven en E_{∞} . En cambio z_N no sobrevive en E_{2N+1} y mata al ideal generado por w^N ; entonces E_{2N+1} sigue siendo un producto tensorial, pero ahora todas las trasgresiones que siguen son necesariamente nulas, luego todos los diferenciales son nulos y

$$E_{\infty} = E_{2N+1} = K[w] / [w^N] \otimes E(z_{m+1}, \dots, \hat{z}_N, \dots, z_n).$$

Un resultado de Borel [B] asegura que cuando el álgebra bigraduada asociada a la filtración de un álgebra graduada tiene esta forma, lo mismo sucede con el álgebra graduada, luego el teorema queda demostrado. \square

Nota: Los generadores del teorema anterior cumplen las siguientes relaciones:

$$i^* x_i = z_i ; \quad i^* v_i = z_i ; \quad \pi^* w = y .$$

Corolario 5. $H^*(Y_{n,k})$ tiene p torsión si y sólo si p divide a $\binom{n}{m+1}$.

Demostración: Basta observar que $N(p) = m+1$ si y sólo si p no divide a $\binom{n}{m+1}$. \square

2.2. El núcleo de π^* .

Proposición 6. $\text{Ker } \pi^* = [b_{m+1} w^{r+1}, \dots, b_n w^n]$.

Demostración: La sucesión espectral de la fibración (B) a coeficientes enteros es trivial hasta el término E_{2m+2} . Entonces $E_{2m+2}^{2m+2,0}$ es isomorfo a $y^{2m+2}(\mathbb{C}P)$ y por lo tanto $\text{Ker}^q \bar{\pi}^* = 0$, $q \leq 2m+2$.

Usando 1.3.8 y teniendo en cuenta la identificación entre la trasgresión y los diferenciales:

$$\text{Ker}^q \pi^* = 0, \quad q < 2m+2 \quad \text{y} \quad \text{Ker}^{2m+2} \pi^* = \left[\binom{n}{m+1} w^{r+1} \right]^{2m+2} .$$

Ahora podemos aplicar repetidamente 1.3.8

F O R M A

y resulta que $\binom{n}{i} w^i$ pertenece a $\text{Ker } \pi^*$, luego:

$$[b_{m+1} w^{m+1}, \dots, b_n w^n] \subset \text{Ker } \pi^* .$$

Para la otra inclusión, supongamos que un elemento $h w^i$ pertenece a $\text{Ker } \pi^*$, entonces también pertenece a $\text{Ker } \pi^* d w^i$, donde d es el máximo común divisor de h y b_i ; entonces podemos limitarnos a considerar $d w^i$ con d un divisor de b_i .

Supongamos $b_i = a p^r$, donde p es primo y p no divide a a . Supongamos que $p^s c w^i$ pertenece a $\text{Ker } \pi^*$, donde $s < r$ y c divide a a ; entonces $p^s c R_{\frac{\mathbb{Z}_p^r}{-p}}(w^i)$ pertenece a $\text{Ker } \pi^*_{\frac{\mathbb{Z}_p^r}{-p}}$ pero es distinto de 0 porque c no es un divisor de 0 en $\frac{\mathbb{Z}_p^r}{-p}$.

Sin embargo, en la sucesión espectral de (3) con coeficientes $\frac{\mathbb{Z}_p^r}{-p}$, para $q < i$, p^r divide a $\binom{n}{q}$ y por lo tanto:

$$t z_q = \binom{n}{q} w^q = 0, \quad q < i .$$

Luego la sucesión espectral es trivial hasta el término $2i$ y $\text{Ker}^{2i} \pi^*_{\frac{\mathbb{Z}_p^r}{-p}} = 0$.

Luego ningún primo p aparece en d con un exponente menor que en b_i y $b_i = d$. \square

Corolario 7.

$$\text{Ker } \bar{\pi}^* = [b_{m+1} w^{m+2}, \dots, b_n w^{n+1}].$$

Demostración: Es inmediato a partir de la identificación entre la trasgresión y los diferenciales y el teorema 6. \square

Corolario 8.

Existen elementos u_1 en $H^*(Y_{n,k})$ tales que $i^* u_1 = z_1$.

Demostración: La trasgresión induce un isomorfismo entre $T^{q-1} / \text{Im } i^*$ y $\text{Ker}^0 \pi^* / \text{Ker}^q \bar{\pi}^*$. Luego,

$$T^q / \text{Im } i^* = 0, \quad q \geq 2n$$

$$T^{2m+1} / \text{Im } i^* = \underline{\mathbb{Z}}$$

$$T^{2i-1} / \text{Im } i^* = \underline{\mathbb{Z}}_{c_i}, \quad m+2 \leq i \leq n,$$

como se deduce inmediatamente del teorema 6 y el corolario 7.

La última igualdad implica que existen en $H^{2i-1}(Y_{n,k})$ elementos trasgresivos que se aplican en $c_i z_1$. \square

Los elementos u_1 del corolario 8 no son únicos, para nuestros propósitos basta elegir un conjunto arbitrario de ellos. A partir de un conjunto de u_1 así determinados vamos a proceder a elegir nuevos generadores para $H^*(Y_{n,k}; \underline{\mathbb{Z}}_p)$ y $H^*(Y_{n,k}; \underline{\mathbb{Q}})$.

Observemos primero que de la naturalidad de R y de R_p tenemos las siguientes relaciones:

$$2.2.1 \quad R_p u_i = c_i x_i + k ; k \in \text{Ker } i_{\mathbb{Z}/p}^* , \text{ para } i \text{ en } I_p .$$

$$2.2.2 \quad R_p u_i \in \text{Ker } i_{\mathbb{Z}/p}^* , \text{ para } i \text{ en } J_p , i \neq m+1 .$$

$$2.2.3 \quad R u_i = c_i v_i + k ; k \in \text{Ker } i_{\mathbb{Z}}^* , i = m+2, \dots, n .$$

Elegimos entonces nuevos generadores , que provisoriamente indicamos con $'$, de manera que se satisfagan las relaciones:

$$2.2.4 \quad c_i x_i' = R_p u_i , \text{ para } i \text{ en } I_p ,$$

$$2.2.5 \quad x_i' = x_i , \text{ para } i \text{ en } J_p , i \neq m(p) .$$

$$2.2.6 \quad c_i v_i' = R u_i , i = m+2, \dots, n .$$

Este conjunto de generadores será utilizado en lo que sigue, por conveniencia resumimos sus propiedades en el siguiente:

Teorema 9. En $H^*(Y_{n,k})$ existen generadores u_i de grado $2i-1$, tales que $i^* u_i = c_i z_i$, $i = m+2, \dots, n$.

Además, los generadores del teorema 4 pueden ser elegidos de manera que:

$$R_p u_i = c_i x_i \text{ para } i \text{ en } I_p$$

$$R u_i = c_i v_i . \quad \square$$

2.3. La sucesión espectral de Bockstein.

Para los siguientes resultados remitimos a [Br.] o [A - T] .

La sucesión espectral de Bockstein es la sucesión espectral deducida de la cupla

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(Y_{n,k}) & \xrightarrow{(\cdot)_p^*} & H^*(Y_{n,k}) \\
 \delta \swarrow & & \searrow R_p \\
 & H^*(Y_{n,k}; \underline{Z}_p) &
 \end{array}$$

En esta sucesión espectral $E_1 = H^*(Y_{n,k}; \underline{Z}_p)$ y

$E_\infty = H^*(Y_{n,k}) / \text{Torsión } \underline{Z}_p$, es decir E_∞ es un álgebra con

“Los mismos” generadores y relaciones que $H^*(Y_{n,k}; \underline{Q})$.

Los diferenciales son los homomorfismos de Bockstein β_r y gozan de las siguientes propiedades:

2.3.1 Un elemento x de E_1 está en la imagen de R_p si y sólo si

$$\beta_r x = 0 \quad \text{para todo } r .$$

2.3.2 Un elemento y de $H^*(Y_{n,k})$ verifica $p^r y = 0$ si y sólo si $R_p y$ no está en la imagen de β_j para $j < r$ pero está en la imagen de β_r .

Para un x en E_r llamaremos $F x$ a su imagen en

E_∞ .

Vamos ahora a calcular la sucesión espectral de Bockstein para $H^*(Y_{n,k})$ y para cada primo p ; de las cuales conocemos sus términos E_1 y E_∞ .

Si p no divide a $\binom{n}{m+1}$, la sucesión espectral es trivial, de acuerdo con el corolario 5. Falta determinar la sucesión espectral para los divisores primos de $\binom{n}{m+1}$, lo que hacemos a continuación.

Comenzamos por registrar algunos resultados inmediatos

$$2.3.3 \quad Fy = y \quad ; \quad Fx_i = v_i \quad , \quad \text{para } i \text{ en } I_p .$$

De 2.3.1 y el teorema 9 se deduce:

$$2.3.4 \quad \beta_r y = 0 \quad , \quad \beta_r x_i = 0 \quad , \quad \text{para todo } r \text{ y para } i \text{ en } I_p$$

Puesto que $v_i \neq 0$, se deduce de 2.3.3 que

$$2.3.5 \quad x_i \text{ no está en la imagen de } \beta_r \text{ para ningún } r, \\ i \text{ en } I_p .$$

De la proposición 6 y de 2.3.2 deducimos la próxima relación

$$2.3.6 \quad y^i \text{ no está en } \text{Im } \beta_r \quad , \quad \text{para } r < r(j) \text{ pero} \\ y^i \text{ está en la } \text{Im } \beta_{r(j)} \quad ; \quad i(j) \leq i < i(j+1) .$$

Donde $i(j)$ son los elementos de J_p y donde hemos puesto $b_{i(j)} = p^{r(j)} a_j$ con a_j no divisible por p .

(Notese que de la definición de $r(j)$ se deduce que

$r(j) > r(j+1)$ y que $b_1 = p^{r(j)} a_1$, $i(j) \leq i < i(j+1)$.

De lo anterior es inmediato que:

$$2.3.7 \quad E_1^q = E_{\infty}^q \quad \text{para } q < 2i(0) - 1.$$

Proposición 10. Las siguientes fórmulas valen para todo j :

$$2.3.8 \quad \beta_r x_{i(j)} = 0, \quad r < r(j)$$

$$2.3.9 \quad \alpha_{r(j)} x_{i(j)} = \alpha_j y^{i(j)}, \quad \text{con } \alpha_j \text{ en } \mathbb{Z}_p, \alpha_j \neq 0,$$

$$2.3.10 \quad E_1^q = E_{r(j)}^q, \quad q < 2i(j+1) - 1$$

Domostración: Por 2.3.6 existe un elemento x tal que

$$\beta_{r(0)} x = y^{i(0)} \quad \text{pero } x \text{ debe ser un múltiplo escalar de } x_{i(0)}$$

luego 2.3.8 y 2.3.9 valen para $j = 0$.

El mismo argumento prueba que si 2.3.10 vale para $j = h-1$, entonces 2.3.8 y 2.3.9 valen para $j = h$.

Finalmente, si 2.3.8 vale para todo $j \leq h$, esto junto con 2.3.4 implica 2.3.10 para $j = h$. (Recordar que los β_r son derivaciones).

□

Proposición 11. Para todo j :

$$2.3.11 \quad \alpha_{r(j)} x_{i(j)} y^s = \alpha_j y^{i(j)+s} \neq 0, \quad 0 \leq s < i(j+1) - i(j)$$

$$2.3.12 \quad \beta_{r(j)} x_{i(j)} y^{i(j+1) - i(j)} = 0.$$

Demostración: 2.3.9 y 2.3.10 dan inmediatamente 2.3.11, recordando que estamos trabajando con una sucesión espectral de álgebras. Por otra parte 2.3.12 es consecuencia de 2.3.9. \square

Por la proposición anterior, la imagen de $x_{i(j)}y^{i(j+1)-i(j)}$ en $E_{r(j)+1}$ es no nula ; la llamaremos $k_{i(j+1)}$.

Hasta ahora hemos exhibido varios diferenciales no nulos, para de terminar completamente la sucesión espectral (salvo una pequeña indeterminación que no nos molesta y que corresponde a la indeterminación de los generadores de $H^*(Y_{n,k})$) falta probar que los restantes diferenciales son todos nulos; Esta es la próxima proposición.

Proposición 12. $\beta_r = 0$ para $r \neq r(j)$;

$$E_{\infty} = E_{r(0)} .$$

Demostración: Vamos a usar inducción . Si asignamos y a F y (recuérdese el abuso de notación) \mathfrak{v}_i a x_i para los i en I_p tales que $i < i(1)$; las fórmulas 2.3.8 al 2.3.12 y $\dim E_{\infty} \leq \dim E_{r(0)}$ dicen que esta correspondencia se puede extender a un isomorfismo de E_{∞} en $E_{r(0)}$ hasta el grado $2i(1)-2$.

Además es inmediato que para $r \neq r(0)$

$\beta_r = 0$ hasta el grado $2i(1)-2$.

Supongamos ahora que tenemos elementos

$\underline{k}_{i(j)}$, $j = 1, \dots, h$ tales que:

i) grado de $\underline{k}_{i(j)} = 2i(j)-1$.

ii) $\underline{k}_{i(j)} x_i = -x_i \underline{k}_{i(j)}$; $(\underline{k}_{i(j)})^2 = 0$;

$$\underline{k}_{i(j)} \underline{k}_{i(j')} = - \underline{k}_{i(j')} \underline{k}_{i(j)} .$$

iii) Si asignamos F y a a y , v_i a x_i para los i en I_p tales que $i < i(j+1)$ y $v_{i(j)}$ a $\underline{k}_{i(j)}$; determinamos un isomorfismo de E_{∞} sobre $E_{r(0)}$ hasta el grado $2i(h+1) - 2$;

Supongamos además que $\beta_r = 0$ hasta el grado $2i(h+1)-2$ salvo que $r = r(j)$ para algún j .

Estas suposiciones y las fórmulas 2.3.8 al 2.3.12 implican que $\dim E_{r(0)}^q = \dim E_{\infty}^q$ para $q \leq 2i(h+1)-1$ y determinan todos los diferenciales en todos los elementos de grado $\leq 2i(h+1)-1$, salvo para el elemento $\underline{k}_{i(h+1)}$ de $E_{r(h)+1}$ y sus imágenes en E_r para $r > r(h)+1$.

Entonces , para cada r , $\beta_r \underline{k}_{i(h+1)}$ pertenece al subespacio de E_r generado por los $\beta_r a$ donde a recorren los productos. Esto significa que $\beta_r \underline{k}_{i(h+1)} = 0$ para

$r < r(h-1)$. Luego , por razones de dimensión , hay un elemento k' en $E_{r(h-1)}^{2i(h+1)-1}$ tal que $\beta_{r(h-1)} k' = 0$ y que no pertenece a la subálgebra generada por los elementos de grado menor que $2i(h+1)-1$.

Es inmediato que k' verifica !!) . Además $\beta_r k' = 0$ para $r < r(h-2)$ y repetimos este argumento hasta obtener en $E_{r(0)}$ un elemento $k_{i(h+1)}$ que asignaremos a $v_{i(h+1)}$.

Continuamos ahora asignando a v_i el elemento x_i para i en I_p tal que $i < i(h+2)$ y obtenemos un isomorfismo hasta el grado $2i(h+2)-1$. Esto finaliza la demostración de que el conjunto de los $k_{i(j)}$, $j = 1, \dots, h+1$, verifica i) , !!) y !!!) para $h+1$.

Aplicando 2.3.4 se ve que $\beta_r = 0$ hasta el grado $2i(h+2)-1$ salvo que $r = r(j)$ para algún j ; con lo que se completa el paso inductivo. \square

Los resultados anteriores identifican $H^*(Y_{n,k}; \mathbb{Q})$ con $E_{r(0)}$ para cada primo p , como álgebras, luego $H^*(Y_{n,k})$ queda determinado y obtenemos el siguiente teorema, que es el resultado fundamental de este trabajo.

Teorema 13

$$H^*(Y_{n,k}) = \mathbb{Z}[y] // L \oplus E(u_{n+2}, \dots, u_n) \quad \text{donde}$$

$u_i = c_i z_i$ $\pi^* w = \bar{y}$ \bar{y} es el ideal generado por

$$b_i y^i \quad i = n+1, \dots, 2n$$

□

2. 4. Cohomología relativa.

Sea A el anillo de coeficientes, en el diagrama (E) se ve inmediatamente que

$$H^*(C\pi^0, \mathbb{Z}U_{n-k}) = \text{Ker } \pi^0 = A[\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}] \otimes \tilde{A}[\sigma_{n-k+1}, \dots, \sigma_n] .$$

Llamemos $t_{i_1 \dots i_s} = \delta^0(z_{i_1}; z_{i_2}, \dots, z_{i_s})$, para

$i_1 < i_2 < \dots < i_s$, en particular:

$$t_{i_1} = \delta^0 z_{i_1} = \bar{\pi}^* \sigma_{i_1} , \quad \text{recordando la trasgresión .}$$

Puesto que en dimensión impar δ_1 es un isomorfismo,

$H^{2i+1}(\mathbb{Z}U_{n-k}, \mathbb{Z})$ es un A modulo libre generado por los elementos

$$t_{i_1 \dots i_s} \text{ tales que } i_1 + i_2 + \dots + i_s - s/2 = i .$$

Observemos que $H^* \bar{\pi}^* \sigma_i = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-k$;

luego $\bar{\pi}^*$ aplica los generadores en grado $\leq 2(n-k)$ en elementos

algebraicamente independientes y por lo tanto

$$\text{Ker}^q \bar{\pi}^* = 0 \quad q \leq 2(n-k)+1 .$$

Podemos calcular $\text{Ker } \bar{\pi}^*$ razonando como en el corolario 7 y

resulta:

$$2.4.1 \quad a t_{i_1} = 0 \quad \text{implica} \quad a = 0 ,$$

$$(t_{i_1})^2 = 0 \quad ; \quad t_{i_1} t_{j_1} = 0 \quad ;$$

$$t_{i_1} , \bar{\pi}^* \sigma_{j_1} .$$

Aplicando el isomorfismo inducido por la trasgresión resulta

$$T^{2i-1} = A \quad \text{y} \quad T^q = 0, \quad q \neq 2i-1.$$

Calculando la trasgresión mediante la fibración relativa y usando que j^* es inyectiva, deducimos:

$$2.4.2 \quad \alpha^* \sigma_i = -\delta^i z_i, \quad i > n-k.$$

Pasamos ahora al diagrama (F), definimos

$$\underline{w} = \bar{\pi}^* w; \quad \text{de la trasgresión resulta:}$$

$$\delta z_i = \binom{n}{i} w^i.$$

Por el corolario 7, resulta

$$2.4.3 \quad b_i \underline{w}^{i+1} = 0 \quad \text{en} \quad \underline{Z}, \quad i = n-k+1, \dots, n;$$

$$w^{(p)+1} = 0 \quad \text{en} \quad \underline{Z}_p$$

$$w^{m+2} = 0 \quad \text{en} \quad \underline{Q}.$$

Finalmente definimos $s_k = \gamma^* \sigma_i$, $i > n-k$.

Por la conmutatividad de las aplicaciones entre los diagramas

tenemos $f_n^* \sigma_i = \binom{n}{i} w^i$, luego, aunque j^* no es inyectiva:

$$2.4.4 \quad j^* s_i = \binom{n}{i} w^i, \quad i > n-k$$

Aplicando otra vez la conmutatividad entre los diagramas,

$$2.4.5 \quad \alpha^* s_i = \alpha^* j_i = - \delta^* z_i$$

Entonces para cualquier anillo de coeficientes A , $\alpha^* s_i \neq 0$

luego: $s_i \neq 0$, $i > n-k$.

Tomemos $A = \mathbb{Z}_p$ entonces $j^* s_i = \binom{n}{i} w^i = 0$ para

$n-k < i < N(p)$ entonces en $H^*(Y, \mathbb{Z}_p)$ existen elementos e_i

tales que

$$2.4.6. \quad \alpha_* e_i = s_i ; i^* e_i = z_i .$$

3 - K T E O R I A

La sucesión espectral asociada a $* \longrightarrow X \longrightarrow X$, en K teoría, es trivial cuando $X = BU_n$, $X = \underline{CP}$, $X = W_{n,k}$. Remitimos a [A - H] para los dos primeros y a [W] para el último.

En esos mismos lugares se prueba que

$$K^*(BU_n) = \underline{Z} [[\sigma_1^e, \dots, \sigma_n^e]]$$

$$K^*(\underline{CP}) = \underline{Z} [[w^e]]$$

$$K^*(W_{n,k}) = E(z_{n-k+1}^e, \dots, z_n^e)$$

donde hemos puesto, para un elemento a de $H^*(X)$, x^e para un representante de su imagen en E_∞ .

Reemplazando H^* por K^* obtenemos dos diagramas análogos a (E) y (F), graduados por 0, 1,

entonces, por naturalidad de la sucesión espectral obtenemos formulas correspondientes a las de 2.4, agregando ' a los elementos.

$$3.1 \quad \alpha^{**} s_i' = \alpha'^{**} \sigma_i' = -\delta'' z_i'$$

Luego, $s_i' \neq 0$ $i > n-k$, y esto vale para cualquier anillo

A que pueda ser usado como anillo de coeficientes en K teoría de manera que $K^*(X;A)$ sea un álgebra asociativa y las reducciones de coeficientes sean homomorfismos de álgebras.

Según [A - T] esto se cumple para $A = \frac{Z}{p}$, $p \neq 2$, primo, entonces como en 2.4.6, obtenemos elementos e_i' , $m+1 < i < N(p)$, en $K^1(Y)$ tales que

$$3.2 \quad \delta e_i' = s_i' \quad ; \quad i^{**} e_i' = z_i' \quad .$$

B I B L I O G R A F I A

- [A - T] S. ARAKI and H. TOTA : Multiplicative structures in mod q cohomology theories, I, Osaka Math. J. 2 (1965), 71-115.
- [A - H] P. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH : Vector bundles and homogeneous spaces, Differential Geometry, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol.3, American Math. Soc., 1961.
- [B - S] P. BAU and W. BROWDER : The cohomology of quotients of classical groups, Topology 3 (1965), 305-336.
- [B] A. BOREL : Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compact, Ann. Math. 57 (1953), 115-207.
- [Br] W. BROWDER : Torsion in H-Spaces Annals of Math. 74 (1961): 24-51.
- [G] S. GITLER : The projective Stiefel manifolds, II. Topology 7, (1968), 47.
- [G - H] S. GITLER and D. H. DEL : The projective Stiefel manifolds, Topology 7, (1968), 39-46.
- [M - P] W. MASSEY and F.P. PETERSON : The cohomology structure of certain fibre spaces-I, Topology 4 (1965), 47-65.

- [P] T. PERLIS : The K-theory of the projective unitary groups.
Topology 6, (1967), 103-115.
- [Sp] E. H. SPANIER : Algebraic topology. McGraw-Hill 1966.
- [St] S. STEENROD; The topology of fibre bundles, Princeton
University Press, 1951.
- [W] I. WALKER : Tesis. Manchester.