

## Tesis de Posgrado

# Factorización de operadores característicos de puertos de Hilbert y síntesis de $2N$ -puertos reactivos de matriz de transferencia prefijada

Gnavi, Graciela Delia

1974

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias  
Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Gnavi, Graciela Delia. (1974). Factorización de operadores característicos de puertos de Hilbert y síntesis de  $2N$ -puertos reactivos de matriz de transferencia prefijada. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1474\\_Gnavi.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1474_Gnavi.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Gnavi, Graciela Delia. "Factorización de operadores característicos de puertos de Hilbert y síntesis de  $2N$ -puertos reactivos de matriz de transferencia prefijada". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1974.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1474\\_Gnavi.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1474_Gnavi.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

GRACIELA DELIA GNAVI

FACTORIZACION DE OPERADORES CARACTERISTICOS DE PUERTOS  
DE HILBERT Y SINTESIS DE  $2N$ -PUERTOS REACTIVOS DE MATRIZ  
DE TRANSFERENCIA PREFIJADA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTORA EN MATEMATICA

BUENOS AIRES, NOVIEMBRE DE 1974.

A Graciela, Sarita y Rodrigo.

Quiero expresar mi reconocimiento al Doctor ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ, cuyo infa tigable interés ha sido permanente estímulo en la realización de este trabajo. Es para mí un honor ser su discípula. He recibido de él inapreciables enseñanzas que sólo puedo retribuir con cariño y gratitud.

Agradezco a mi amiga KITTY LANG la exce lente transcripción del manuscrito.

## I N D I C E

INTRODUCCION .....	1-4
 <u>PARTE I. FACTORIZACION DE OPERADORES J-BIEXPANSIVOS.</u>	
§ 1. Notación y resumen de algunos resultados conocidos .....	5-7
§ 2. Desigualdad fundamental para operadores J-bicon <u>tractivos</u> en el interior del círculo unidad .....	8-11
§ 3. Operadores J-biexpansivos en el semiplano de la derecha. Desigualdad fundamental .....	12-14
§ 4. Operadores elementales. Propiedades .....	15-16
§ 5. Factorización de operadores J-biexpansivos .....	17-23
§ 6. Factorización a base de operadores elementales primarios .....	24
§ 7. Factorización de operadores J-bicon <u>tractivos</u> reales .....	25-26
 <u>PARTE II. FACTORIZACION DE OPERADORES CARACTERISTICOS DE PUERTOS DE HILBERT.</u>	
§ 1. Definiciones y teorema básico .....	27-29
§ 2. Factorización bimembre del operador de transferencia .....	30-33
§ 3. Factorización bimembre del operador de scattering	33
§ 4. Factorización bimembre del operador de cadena ...	34-35
§ 5. Factorización bimembre de un operador real de scattering .....	36-40

§ 6. Factorización bimembre de un operador real de transferencia .....	41
§ 7. Factorización bimembre de un operador real de cadena .....	41
§ 8. Operadores J-unitarios en un intervalo del eje imaginario. Su factorización .....	42
§ 9. Operadores de circuitos racionales .....	43
§ 10. Factorización trimembre de un operador real de scattering .....	44-47

PARTE III. SINTESIS DE 2n-PUERTOS REACTIVOS DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA PREFIJADA.

§ 1. Matrices reales de transferencia. Matrices elementales simples .....	48-49
§ 2. Matrices primarias simples .....	50-54
§ 3. Caracterización de las matrices reales de transferencia .....	55-62
§ 4. Realización física de las matrices reales de transferencia de 2n-puertos reactivos .....	63-76
BIBLIOGRAFIA .....	77-79

## I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo consta de tres partes. Los párrafos 2 y 3 de la parte primera contienen una desigualdad matricial para operadores  $J$ -bicontractivos. Esta desigualdad fundamental es una generalización, a operadores en espacios de Hilbert de dimensión infinita, de un teorema de A.V. Efimov y V.P. Potapov, para operadores definidos en un espacio de Hilbert de dimensión finita (cf. [3], pág. 87). El resultado obtenido incluye como caso particular el principio de máximo para operadores  $J$ -bicontractivos de Ju. P. Ginzburg (cf. [1], pág. 42).

En el párrafo 4 se define una clase de operadores que llamamos elementales y se estudian sus propiedades. Estos operadores permiten descomponer un operador  $J$ -bicontractivo en producto de operadores más simples; es decir, operadores en los cuales el orden de algunos de sus polos o ceros es inferior al orden de dichos polos en el operador de partida. Los resultados a que llegamos están consignados en el Teorema 5 del párrafo 5. Este tipo de descomposición permite reducir en una unidad el orden de un número finito arbitrario de ceros o polos del operador simultáneamente empleando un solo operador.

El párrafo 6 estudia una nueva factorización en la cual intervienen operadores de rango de dimensión uno. Este tipo de factorización tiene interés en la teoría de síntesis de puertos de Hilbert, y la usaremos en la segunda parte del trabajo. Los operadores  $J$ -bicontractivos reales desempeñan un papel importante en dicha teoría y debido a esto incluimos en el párrafo 7 un teorema de factorización para esta clase de operadores. Teoremas análogos

a los consignados en los párrafos 4, 5 y 6, para espacios de Hilbert de dimensión finita, han sido demostrados por A.V. Efimov y V.P. Potapov (cf. [3]).

Los operadores de la teoría clásica de  $n$ -puertos eléctricos son operadores  $J$ -contractivos con dominio y rango en  $\mathbb{C}^n$ . Una extensión de esta teoría es la llamada teoría de los puertos de Hilbert. Los puertos de Hilbert están caracterizados por operadores  $J$ -bicontractivos con dominio y rango en  $l^2$  o en  $l^2 \times l^2$  (\*) Los teoremas de factorización para operadores  $J$ -bicontractivos demostrados en la Parte I se aplican en esta segunda parte para obtener descomposiciones de operadores que definen puertos de Hilbert como producto de operadores elementales. En el párrafo 1 demostramos un teorema que da una condición necesaria y suficiente para que exista una transformación  $J$ -unitaria entre dos subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert separable. Este teorema se aplica en los párrafos 2, 3 y 4 para generalizar al caso de operadores  $J$ -bicontractivos en el espacio  $H = l^2 \times l^2$  una propiedad de factorización de matrices  $J$ -contractivas demostrada por V.P. Potapov (cf. [4], Cap. 3, § 1). En los párrafos 5, 6 y 7 estudiamos factorizaciones bimembres de operadores reales de puertos de Hilbert. El párrafo 8 trata brevemente el problema de los operadores  $J$ -unitarios en un intervalo del eje imaginario. El resultado allí consignado es una consecuencia inmediata de un teorema de Ju. P. Ginzburg (cf. [1], Teorema 6). Por último, obtenemos en el párrafo 10 una fórmula explícita de factorización, mediante operadores reales trimembres, de un operador real de scattering definido en  $l^2$ . Youla ha demostrado una fórmula similar para un operador de scattering en un espacio de Hilbert de dimensión finita (cf. [8],

(\*) Más generalmente, el dominio puede estar constituido por un espacio de Hilbert arbitrario.



pág. 55).

En la parte tercera aplicamos los teoremas de factorización establecidos en las dos primeras (especializados al caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita) para resolver ciertos problemas de síntesis de 2n-puertos lineales. A fin de enunciar los resultados, comenzaremos por anteponer algunas definiciones. Dado un 2n-puerto con matriz de impedancia  $Z(p)$  (ver definición en [16], p.51 ), es bien sabido que

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = Z(p) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} ,$$

donde  $v_j$  e  $i_j$  ( $j = 1, 2$ ) son vectores de  $n$  componentes que definen los voltajes e intensidades en los puertos del circuito. Pongamos  $x_j \stackrel{\text{def}}{=} v_j + i_j$  e  $y_j \stackrel{\text{def}}{=} v_j - i_j$  ( $j = 1, 2$ ). Llamamos matriz de transferencia  $T(p)$  de un 2n-puerto la matriz definida por la relación

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = T(p) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La matriz de transferencia posee una propiedad interesante: si conectamos en tándem dos circuitos cuyas matrices son  $T_1(p)$  y  $T_2(p)$ , el circuito resultante tiene por matriz de transferencia la matriz  $T(p) = T_1(p) \cdot T_2(p)$ . Como consecuencia de esta propiedad, el empleo de los teoremas de factorización anteriormente demostrados permite expresar la matriz de un circuito como producto de matr*ic*

ces de circuitos máximamente simples. El problema de la síntesis queda de esta manera reducido a diseñar estos circuitos simples que aparecen como factores en la expresión general de la matriz  $T(p)$ . El primero que obtuvo teoremas generales de síntesis por factorización, cuando el dato prefijado es la matriz de scattering, fue Belevitch (cf.[7], Capítulo 11) (\*). Recientemente Efimov y Potapov (cf.[3], Capítulos 3, 4 y 5) generalizando resultados de Livshitz, Flekser y Rutkas (cf.[9], [11], [13]), han dado una solución completa del problema cuando el dato es la matriz de cadena. Nosotros, inspirándonos en los métodos desarrollados en el profundo trabajo de Efimov y Potapov, hemos dado una solución del problema de la síntesis por factorización de  $2n$ -puertos lineales reactivos cuando el dato que se prefija es la matriz de transferencia, que aparece muy a menudo en las aplicaciones. Para el diseño efectivo de los circuitos elementales nuestra obra de consulta ha sido el texto de Belevitch (cf.[7]).

Deseamos señalar, en conclusión, que no sólo para la síntesis de  $n$ -puertos lineales ( $n < \infty$ ) son importantes las ideas de Potapov. Es nuestro convencimiento de que también en el caso  $n = \infty$ , es decir para puertos de Hilbert (\*\*), están destinadas las ideas de Potapov y sus discípulos a desempeñar prominente papel. Esta es la razón principal que nos ha movido a generalizar en las dos primeras partes de este trabajo los teoremas de Potapov y de Potapov-Efimov.

(\*) El teorema básico de factorización de Belevitch (cf.[7], p. 331)

es caso particular de nuestro Teorema 7 de p. 40. Ver también [12], donde aparentemente por primera vez se enuncia un teorema de factorización "a la Blaschke" de la matriz de scattering.

(\*\*) Una exposición de la teoría de los puertos de Hilbert figura en el libro de Zemanian (cf. [14]). Véase también el artículo de Newcomb (cf. [15].) que contiene una excelente bibliografía acerca de las conexiones entre teoría de operadores y teoría de circuitos.

P A R T E I  
=====

FACTORIZACION DE OPERADORES J-BIEXPANSIVOS

1. NOTACION Y RESUMEN DE ALGUNOS RESULTADOS CONOCIDOS.

Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $x \in H$ , llamaremos  $\bar{x}$  al elemento conjugado de  $x$  (\*). Sea  $E_+$  un proyector en  $H$ ,  $E_- = I - E_+$ . Definamos el operador

$$J \stackrel{\text{def}}{=} E_+ - E_- .$$

Diremos que un operador lineal acotado  $U$  definido en  $H$  es J-unitario si

$$U^* J U = J \quad , \quad U J U^* = J$$

donde  $U^*$  denota el operador adjunto de  $U$  .

Diremos que un operador lineal acotado  $Y$  es J-contractivo si

$$Y^* J Y \leq J$$

y diremos que  $Y$  es J-expansivo si

$$Y^* J Y \geq J$$

Notemos que si  $Y$  es J-contractivo, es (-J)-expansivo.

Un operador se llamará J-bicontractivo si  $Y$  e  $Y^*$  son J-contractivos.

Sea  $Y(z)$  un operador holomorfo en el interior del círculo unidad, salvo en un conjunto de puntos aislados y tal que en cada punto de holomorfismo es igual a un operador J-bicontractivo. Si  $Y(z)$  cumple estas condiciones diremos que  $Y(z) \in S_J$ . Trabajaremos además con la clase  $K_J$  de operadores  $S_J$  para los que existe un punto  $z_0$  en el interior del círculo unidad donde  $Y(z_0)$  tiene

(\*) Postulando; naturalmente, que está definida en  $H$  una operación de conjugación.

inverso acotado y el operador  $J - Y^*(z_0) J Y(z_0)$  es compacto.

Diremos que un operador  $N(z)$  holomorfo en el interior del círculo unidad pertenece a la clase  $\mathcal{N}$  si

$$Q(z) \stackrel{\text{def}}{=} I_m N(z) = \frac{1}{2i} (N(z) - N^*(z)) \geq 0.$$

A continuación consignaremos varios resultados conocidos ([1], [2], [5]) que usaremos más adelante.

- 1) Si  $Y = I - T$ , con  $T$  compacto y además  $Y$  es  $J$ -contractivo, entonces  $Y$  es  $J$ -bicontractivo.
- 2) El operador

$$Y_e \stackrel{\text{def}}{=} (e E_+ + \frac{1}{e} E_-) Y \quad (0 < e < 1),$$

es  $J$ -bicontractivo y su transformado de Cayley

$$\Omega_e \stackrel{\text{def}}{=} i (I + Y_e)^{-1} (I - Y_e)$$

es un operador acotado.

- 3) Sea  $Y(z) \in S_J$  y pongamos

$$\Omega_e(z) \stackrel{\text{def}}{=} i (I + Y_e(z))^{-1} (I - Y_e(z)),$$

donde

$$Y_e(z) = (e E_+ + \frac{1}{e} E_-) Y(z) \quad (0 < e < 1).$$

Entonces

$$J \Omega_e(z) \in \mathcal{N}.$$

- 4) Si  $N(z) \in \mathcal{N}$ , entonces vale la fórmula

$$N(z) = \frac{1}{2} (N(0) + N^*(0)) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dA(\theta), \quad (|z| < 1),$$

donde  $A(\theta)$  es un operador hermitiano no decreciente no negativo.

- 5) Si  $Y(z) \in K_J$ , entonces  $Y(z)$  e  $Y^{-1}(z)$  no tienen singularidades en el interior del círculo unidad salvo polos. El coeficiente del término de máximo orden del desarrollo de Laurent de  $Y(z)$  en el entorno de un polo es un operador de rango finito.
- 6) Si  $X(z)$  es holomorfo en un dominio  $D$  simétrico con respecto a la circunferencia unidad y toma valores  $J$ -unitarios en un arco  $\Gamma$  de esta circunferencia, entonces  $X^{-1}(z)$  existe y es acotado para todo  $z \in D$  y además vale la fórmula

$$X^{-1}(z) = J X^* (\bar{z}^{-1}) J .$$

En particular, si  $z_0$  es un polo de orden  $k$  de  $X(z)$ , entonces  $X^{-1}(z)$  tiene un polo del mismo orden en  $\bar{z}_0^{-1}$ .

2. DESIGUALDAD FUNDAMENTAL PARA OPERADORES J-BICONTRACTIVOS EN EL INTERIOR DEL CIRCULO UNIDAD.

Sea  $N(z)$  e  $\mathcal{N}$ . Sabemos que es válida la representación

$$N(z) = \frac{1}{2} ( N(0) + N^*(0) ) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dA(\theta), \quad |z| < 1.$$

Pongamos por definición

$$M(z) = \frac{1}{2} ( N(0) + N^*(0) ) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dA(\theta), \quad |z| > 1.$$

Es inmediato que vale la fórmula

$$M(z) = N^*(1/\bar{z})$$

y que  $M(z)$  es holomorfa para  $|z| > 1$ .

A base de estas consideraciones extenderemos la definición de  $N(z)$  al exterior del círculo unidad mediante la relación

$$N(z) \stackrel{\text{def}}{=} N^*(1/\bar{z}), \quad |z| > 1.$$

Esta extensión es natural pues si  $N(z)$  es analítica y hermitiana en algún arco  $\Gamma$  de la circunferencia unidad, ella coincide con la prolongación analítica de  $N(z)$  al exterior del círculo unidad.

Resumiendo

$$N(z) = N^*(1/\bar{z}), \quad |z| \neq 1 \quad (2.1)$$

Para  $|z_j| \neq 1$  y  $|z_k| \neq 1$ , entonces

$$\frac{1}{2i} ( N(z_k) - N^*(z_j) ) = \frac{1 - z_k \bar{z}_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dA(\theta)}{(e^{i\theta} - z_k)(e^{-i\theta} - \bar{z}_j)}.$$

Si  $\Delta\theta > 0$ , entonces  $\Delta A \stackrel{\text{def}}{=} A(\theta + \Delta\theta) - A(\theta) \geq 0$ .

En este caso, dados  $x_i$  e  $H$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) tenemos que



$$\left( \Delta A(\theta) \sum_{K=1}^m \frac{x_k}{(e^{i\theta} - z_k)} , \sum_{K=1}^m \frac{x_k}{(e^{i\theta} - z_k)} \right) \geq 0 ; (*)$$

y por lo tanto

$$\left[ \begin{array}{cccc} \frac{\Delta A(\theta)}{(e^{-i\theta} - \bar{z}_1)(e^{i\theta} - z_1)} & \dots & \dots & \frac{\Delta A(\theta)}{(e^{-i\theta} - \bar{z}_m)(e^{i\theta} - z_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta A(\theta)}{(e^{-i\theta} - \bar{z}_1)(e^{i\theta} - z_m)} & \dots & \dots & \frac{\Delta A(\theta)}{(e^{-i\theta} - \bar{z}_m)(e^{i\theta} - z_m)} \end{array} \right] \geq 0 .$$

De aquí obtenemos sin dificultad, suponiendo que  $z_i \cdot \bar{z}_j \neq 1$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ )

$$\frac{1}{2i} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{N(z_1) - N^*(z_1)}{1 - z_1 \bar{z}_1} & \dots & \dots & \frac{N(z_1) - N^*(z_m)}{1 - z_1 \bar{z}_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{N(z_m) - N^*(z_1)}{1 - z_m \bar{z}_1} & \dots & \dots & \frac{N(z_m) - N^*(z_m)}{1 - z_m \bar{z}_m} \end{array} \right] \geq 0 . \quad (2.2)$$

Aplicamos este resultado al operador  $N(z) = J \Omega_e(z)$  definido en el párrafo 1, extendido al exterior del círculo unidad mediante la relación ( 2.1 ), donde  $Y(z) \in K_j$ . Es fácil verificar que

(\*) Con (a,b) designamos, como de costumbre, el producto escalar de los elementos a e H, b e H.

$$\frac{1}{2i} (J \Omega_e(z_k) - \Omega_e^*(z_j) J) =$$

$$= J (I + \gamma_e(z_k))^{-1} (J - \gamma_e(z_k) J \gamma_e^*(z_j)) (I + \gamma_e^*(z_j))^{-1} J.$$

Observemos que en correspondencia con ( 2.1 ) en este caso la extensión de  $Y(z)$  al exterior del círculo unidad está dada por

$$Y(z) = J Y^*{}^{-1}(1/\bar{z}) J . \quad (2.3)$$

Si ahora pedimos que los  $z_i$  ( $|z_i| \neq 1$ ) ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sean puntos de holomorfismo de  $Y(z)$  tiene sentido definir la matriz diagonal

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag} \{ (I + \gamma_e(z_1)), (I + \gamma_e(z_2)), \dots, (I + \gamma_e(z_m)) \} .$$

Escribiendo para este caso particular la desigualdad ( 2.2 ) y multiplicando luego esta desigualdad a la derecha por  $T_1$  y a la izquierda por  $T_1^*$  obtenemos

$$\left[ \begin{array}{cccc} \frac{J - \gamma_e(z_1) J \gamma_e^*(z_1)}{1 - z_1 \bar{z}_1} & \dots & \frac{J - \gamma_e(z_1) J \gamma_e^*(z_m)}{1 - z_1 \bar{z}_m} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{J - \gamma_e(z_m) J \gamma_e^*(z_1)}{1 - z_m \bar{z}_1} & \dots & \frac{J - \gamma_e(z_m) J \gamma_e^*(z_m)}{1 - z_m \bar{z}_m} & \end{array} \right] \geq 0 . \quad (2.4)$$

Pasando al límite para  $e \rightarrow 1$  y teniendo en cuenta que  $\lim_{e \rightarrow 1} \gamma_e(z) = Y(z)$  obtenemos el siguiente

Teorema 1. Si  $Y(z)$  e  $K_J$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_m$  son puntos cualesquiera de holomorfismo de  $Y(z)$ ,  $|z_i| \neq 1$  y  $z_i \cdot \bar{z}_j \neq 1$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) vale la siguiente desigualdad matricial:

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{J - Y(z_1) J Y^*(z_1)}{1 - z_1 \bar{z}_1} & \dots & \frac{J - Y(z_1) J Y^*(z_m)}{1 - z_1 \bar{z}_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{J - Y(z_m) J Y^*(z_1)}{1 - z_m \bar{z}_1} & \dots & \frac{J - Y(z_m) J Y^*(z_m)}{1 - z_m \bar{z}_m} \end{array} \right] \succeq 0. \quad (2.5)$$

Nota: La J-bicontractividad de  $Y(z)$  nos permite afirmar que bajo las condiciones del teorema anterior es también válida la siguiente desigualdad "dual":

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{J - Y^*(z_1) J Y(z_1)}{1 - z_1 \bar{z}_1} & \dots & \frac{J - Y^*(z_1) J Y(z_m)}{1 - z_m \bar{z}_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{J - Y^*(z_m) J Y(z_1)}{1 - z_1 \bar{z}_m} & \dots & \frac{J - Y^*(z_m) J Y(z_m)}{1 - z_m \bar{z}_m} \end{array} \right] \succeq 0. \quad (2.6)$$

Una demostración análoga a la del teorema anterior permite establecer la validez del siguiente

Teorema. Si  $Y(z)$  e  $S_J$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_m$  son puntos cualesquiera de holomorfismo de  $Y(z)$ ,  $|z_i| < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) entonces vale la desigualdad matricial (2.5).

Este teorema es una generalización del principio del máximo para operadores J-bicontractivos de Ju.P. Ginzburg (cf.[1], p. 42).



$$W(p) = J W^{*-1}(-\bar{p}) J, \quad \text{Re } p < 0.$$

Si  $W(p)$  es holomorfo y  $J$ -unitario en algún segmento  $\Gamma$  del eje imaginario, entonces  $W(p)$  ( $\text{Re } p > 0$ ) y  $W(p)$  ( $\text{Re } p < 0$ ) determinan un único operador analítico.

Escribiendo ahora la desigualdad (3.1) para  $(m+1)$  puntos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, -\bar{\lambda}$  y multiplicando luego a la derecha por la matriz diagonal

$$T_3 \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag} ( I, I, \dots, I, J W^*(\lambda) )$$

y a la izquierda por  $T_3^*$  obtenemos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{J-W(\lambda_1)JW^*(\lambda_1)}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} & \dots & \frac{J-W(\lambda_1)JW^*(\lambda_m)}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_m} & & \frac{W(\lambda) - W(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda} & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \frac{J-W(\lambda_m)JW^*(\lambda_1)}{\lambda_m + \bar{\lambda}_1} & \dots & \frac{J-W(\lambda_m)JW^*(\lambda_m)}{\lambda_m + \bar{\lambda}_m} & & \frac{W(\lambda) - W(\lambda_m)}{\lambda_m - \lambda} & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ \frac{W^*(\lambda) - W^*(\lambda_1)}{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}} & \dots & \frac{W^*(\lambda) - W^*(\lambda_m)}{\bar{\lambda}_m - \bar{\lambda}} & & \frac{J-W^*(\lambda)JW(\lambda)}{\lambda + \bar{\lambda}} & \end{array} \right] \geq 0. \quad (3.2)$$

Como consecuencia inmediata de esta desigualdad se puede establecer el siguiente.

Teorema 2. Si el operador  $J$ -biexpansivo (o sea  $-J$ -bicontractivo)  $W(p)$  e  $\hat{K}_{-J}$  tiene polos en los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_m$  ( $\bar{p}_j \neq -p_k$ ) ( $\text{Re } p_k = \sigma_k \neq 0$ ) y su desarrollo de Laurent en el

entorno de estos puntos es

$$W(p) = \frac{2 \sigma_k C_k}{(p-p_k)^{s_k}} + \frac{d_k}{(p-p_k)^{s_k-1}} + \dots \quad (\text{Re } p_k = \sigma_k), \quad (3.3)$$

entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{4 \sigma_1 \sigma_1 C_1 J C_1^*}{p_1 + \bar{p}_1} \dots \frac{4 \sigma_1 \sigma_m C_1 J C_m^*}{p_1 + \bar{p}_m} & & & \frac{2 \sigma_1 C_1}{p_1 - p} \\ \dots & & & \dots \\ \frac{4 \sigma_m \sigma_1 C_m J C_1^*}{p_m + \bar{p}_1} \dots \frac{4 \sigma_m \sigma_m C_m J C_m^*}{p_m + \bar{p}_m} & & & \frac{2 \sigma_m C_m}{p_m - p} \\ \dots & & & \dots \\ \frac{2 \sigma_1 C_1^*}{\bar{p}_1 - \bar{p}} \dots \frac{2 \sigma_m C_m^*}{\bar{p}_m - \bar{p}} & & & \frac{W^*(p) J W(p) - J}{\bar{p} + p} \end{array} \right] \geq 0. \quad (3.4)$$

Este teorema se deduce multiplicando la desigualdad (3.2) a la derecha por

$$T_4^{\text{def}} = \text{diag} \{ (\lambda_1 - p_1)^{s_1} I, (\lambda_2 - p_2)^{s_2} I, \dots, (\lambda_m - p_m)^{s_m} I, I \}$$

y a la izquierda por  $T_4^*$  y tomando luego límites para  $\lambda_k \rightarrow p_k$ .

El teorema que precede es una extensión a operadores en un espacio de Hilbert de un teorema de A.V. Efimov y V.P. Potapov (cf. [3], p. 87, Teorema 1.).

4. OPERADORES ELEMENTALES . PROPIEDADES.

Se dice que  $\Omega(p)$  es un operador elemental si  $\Omega(p)$  es J-unitario en el eje imaginario (o sea "reactivo"), J-expansivo en el semiplano de la derecha y no tiene singularidades salvo polos simples en los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

Si suponemos  $p_j \neq -\bar{p}_k$  y consideramos que el operador  $\Omega(p)$  tiene la normalización  $\Omega(\infty) = I$  (esto siempre se puede conseguir), la expresión de este operador será

$$\Omega(p) = I + \frac{2\sigma_1 A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{2\sigma_m A_m}{p - p_m} \quad (\sigma_j = \text{Re } p_j) . \quad (4.1)$$

Si  $m = 1$ , diremos que  $\Omega(p)$  es un operador elemental bimembre. Si los operadores  $A_j$  tienen rango de dimensión 1, diremos que  $\Omega(p)$  es un operador elemental primario.

Enunciaremos a continuación dos teoremas que caracterizan los operadores elementales. No daremos su demostración pues es similar a la demostración para el caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita ([3]), si se tiene en cuenta lo establecido en el párrafo 3 (en particular haciendo uso del Teorema 2).

Teorema 3 . El operador (4.1) es elemental si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

$$\left[ \begin{array}{ccc} \frac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar{p}_1 + p_1} A_1^* J A_1 & \dots & \frac{4\sigma_1\sigma_m}{\bar{p}_1 + p_m} A_1^* J A_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{4\sigma_m\sigma_1}{\bar{p}_m + p_1} A_m^* J A_1 & \dots & \frac{4\sigma_m\sigma_m}{\bar{p}_m + p_m} A_m^* J A_m \end{array} \right] \geq 0, \quad (A)$$

$$2 \sigma_j J A_j = \sum_{k=1}^m \frac{4 \sigma_k \sigma_j}{\bar{p}_k + p_j} A_k^* J A_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) . \quad (B)$$

Se puede comprobar que también vale la siguiente condición, como consecuencia de (B):

$$\frac{\Omega^*(p) J \Omega(p) - J}{p + \bar{p}} = \begin{bmatrix} \frac{4 \sigma_1 \sigma_1}{\bar{p}_1 + p_1} A_1^* J A_1 & \dots & \frac{4 \sigma_1 \sigma_m}{\bar{p}_1 + p_m} A_1^* J A_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{4 \sigma_m \sigma_1}{\bar{p}_m + p_1} A_m^* J A_1 & \dots & \frac{4 \sigma_m \sigma_m}{\bar{p}_m + p_m} A_m^* J A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ p - p_1 \\ \dots \\ I \\ p - p_m \end{bmatrix} . \quad (C)$$

Nota: en este caso también es válido un teorema "dual". Este se obtiene a partir del Teorema 3 intercambiando  $A_k$  y  $A_k^*$  y también  $p_k$  y  $\bar{p}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).



5. FACTORIZACION DE OPERADORES J-BIEXPANSIVOS.

Denotaremos con  $H^m$  el espacio de Hilbert producto

$$H^m = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_{m \text{ veces}} .$$

Como veremos más adelante el problema de la factorización de un operador J-biexpansivo está íntimamente relacionado con el siguiente

Teorema 4 .: Sea la matriz de operadores lineales acotados

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.1)$$

donde  $A: H^m \rightarrow H^m$ ,  $B: H \rightarrow H^m$ ,  $C: H \rightarrow H$ . Los operadores A y B son operadores de rango finito. En tales hipótesis se verifica que

- 1)  $A \succcurlyeq 0$  ;
- 2) existe al menos una solución de la ecuación  $A X = B$  ;
- 3) el operador  $R \stackrel{\text{def}}{=} X^* B$  es un operador hermitiano acotado que satisface a la desigualdad

$$0 \leq R \leq C .$$

Demostración.

Es evidente que si  $M \succcurlyeq 0$ , también es  $A \succcurlyeq 0$ .

Sea  $f \in H^m$ ,  $g \in H$ . Teniendo en cuenta que  $M \succcurlyeq 0$ , se comprueba fácilmente que

$$|(B^* f, g)|^2 \leq (A f, f) (C g, g) . \quad (5.2)$$

Dado  $f_1 \in R_A^\perp$ , donde con  $R_A^\perp$  indicamos el subespacio ortogonal al rango de  $A$  (o sea ortogonal a  $R_A$ ), como  $A$  es hermitiano,  $A f_1 = 0$  y por lo tanto  $B^* f_1 = 0$ . Esto quiere decir que  $f_1 \in R_B^\perp$ . Vemos entonces que  $R_A^\perp \subset R_B^\perp$  o lo que es lo mismo (teniendo en cuenta que  $A$  y  $B$  son operadores de rango finito)

$$R_B \subset R_A. \quad (5.3)$$

Tiene sentido pues definir el operador

$$X \stackrel{\text{def}}{=} A^{(-1)} B \quad (5.4)$$

donde  $A^{(-1)}$  es el inverso del operador definido por el operador hermitiano  $A$  sobre su rango ( $A^{(-1)} : R_A \rightarrow R_A$ ).

Por lo tanto el operador

$$R \stackrel{\text{def}}{=} X^* B = X^* A X \quad (5.5)$$

está bien definido y es hermitiano no negativo.

Escribamos ahora la desigualdad (5.2) para  $f = Xg$ ; obtenemos

$$\begin{aligned} | (X^* A X g, g) |^2 &= (R g, g)^2 \leq \\ &\leq (A X g, X g) (C g, g) = (R g, g) (C g, g). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$0 \leq (R g, g) \leq (C g, g).$$

Con esto queda demostrado el Teorema 4. (\*)

Tomemos ahora como matriz  $M$  la matriz de la desigualdad (3.4) con

$$C = \frac{W^* \cdot (p) J W (p) - J}{\bar{p} + p}, \quad y$$

(\*) En el caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita el teorema 4 coincide con una proposición análoga enunciada en [3], p. 88.

$$B^* = \left( \begin{array}{ccc} \frac{2 \sigma_1 C_1^*}{\bar{p}_1 - \bar{p}} & \frac{2 \sigma_2 C_2^*}{\bar{p}_2 - \bar{p}} & \frac{2 \sigma_m C_m^*}{\bar{p}_m - \bar{p}} \end{array} \right).$$

Para esta matriz la solución de la ecuación  $A X = B$  puede escribirse en la forma

$$X = \left[ \begin{array}{c} \frac{Q_{11}}{p_1 - p} + \frac{Q_{12}}{p_2 - p} + \dots + \frac{Q_{1m}}{p_m - p} \\ \dots \\ \frac{Q_{m1}}{p_1 - p} + \frac{Q_{m2}}{p_2 - p} + \dots + \frac{Q_{mm}}{p_m - p} \end{array} \right] \quad (5.6)$$

Pongamos  $Q = (Q_{ij})$  y definamos la matriz hermitiana no negativa

$$H \stackrel{\text{def}}{=} Q^* A Q = (H_{ij})$$

No es difícil comprobar la siguiente relación:

$$\sum_{l,k=1}^m H_{il} J H_{kj} = (\bar{p}_i + p_j) H_{ij}$$

Consideremos el operador

$$P_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2 \sigma_j} \sum_{k=1}^m J H_{kj} = J \sum_{k=1}^m Q_{jk}^* C_j \quad (*) \quad (5.7)$$

Mostraremos que el operador

$$\Omega(p) = I + \sum_{j=1}^m \frac{2 \sigma_j P_j}{p - p_j} \quad (5.8)$$

(\*) Esta fórmula contiene, como caso particular, cuando  $m=1$  y el espacio de Hilbert es de dimensión finita, una fórmula enunciada por Rutkas (cf. [11], pág. 1841, fórm. 5).

es elemental, para lo cual bastará mostrar que se satisfacen las condiciones del Teorema 3. En efecto, de acuerdo con (5.7) tenemos

$$\frac{4 \sigma_i \sigma_j}{\bar{p}_i + p_j} P_i^* \cdot P_j = \frac{1}{\bar{p}_i + p_j} \left( \sum_{l,k=1}^m H_{il} \cdot H_{kj} \right) = H_{ij} ;$$

o sea que se satisface la condición (A) del Teorema 3.

De la fórmula que precede obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \frac{4 \sigma_i \sigma_j}{\bar{p}_i + p_j} P_i^* \cdot P_j = \sum_{i=1}^m H_{ij} = 2 \sigma_j \cdot P_j ,$$

que es la condición (B) del Teorema 3.

La condición (C) del Teorema 3 permite obtener la relación

$$R \stackrel{\text{def}}{=} X^* \cdot A \cdot X = \frac{\Omega^*(p) \cdot \Omega(p) - J}{\bar{p} + p} .$$

De esta fórmula, apelando al Teorema 4 concluimos que

$$0 \leq \Omega^*(p) \cdot \Omega(p) - J \leq W^*(p) \cdot W(p) - J , \quad \text{Re } p > 0 . \quad (5.9)$$

Los resultados que anteceden nos servirán para demostrar el siguiente

Teorema 5 . Sea  $W(p)$  e  $\hat{K}_j$  con polos en los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_m$  ( $p_i \neq -\bar{p}_j$ ,  $\text{Re } p_k \neq 0$ ) donde su desarrollo en serie de Laurent tiene la expresión:

$$W(p) = \frac{2 \sigma_j C_j}{(p-p_j)^{s_j}} + \frac{d_j}{(p-p_j)^{s_j-1}} +$$

Si definimos el operador

$$\Omega(p) = I + \sum_{j=1}^m \frac{2 \sigma_j P_j}{p - p_j}$$

donde los  $P_j$  están definidos por (5.7), entonces

- i)  $\Omega(p)$  es un operador elemental  $J$ -biexpansivo en el semiplano de la derecha;
- ii)  $W(p) = W_2(p) \cdot \Omega(p)$  donde  $W_2(p) \in \widehat{K}_J$ ;
- iii) en el punto  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) el operador  $W_2(p)$  tiene un polo de orden  $S_j - 1$ .

Demostración.

- i) La expresión (5.7) muestra que  $P_j$  es compacto o sea que  $\Omega(p) = I - K$  donde  $K$  es un operador compacto. Teniendo en cuenta (5.9) y la propiedad 1 del parágrafo 1 vemos que  $\Omega(p)$  es  $J$ -biexpansivo en el semiplano de la derecha.
- ii) Esta propiedad es consecuencia inmediata de las desigualdades

$$W^* J W - J = \Omega^* W_2^* J W_2 \Omega - J \succcurlyeq \Omega^* J \Omega - J,$$

$$W_2 J W_2^* - J = W (\Omega^{-1} J \Omega^{-1*} - W^{-1} J W^{-1*}) W^* \succcurlyeq 0.$$

- iii) De (5.8) vemos que podemos escribir, en el entorno de  $p_j$ ,

$$\begin{aligned} W_2(p) = W(p) \Omega^{-1}(p) &= \left( \frac{2 \sigma_j C_j}{(p-p_j)^{S_j}} + \frac{d_j}{(p-p_j)^{S_j-1}} + \dots \right) \left( I - \sum_{l=1}^m \frac{2 \sigma_l}{p+\bar{p}_l} J P_l^* J \right) = \\ &= \left( \frac{2 \sigma_j C_j}{(p-p_j)^{S_j}} + \frac{d_j}{(p-p_j)^{S_j-1}} + \dots \right) \left( I - J P_j^* J - \sum_{l \neq j} \frac{2 \sigma_l}{p+\bar{p}_l} J P_l^* J + \frac{p-p_j}{p+\bar{p}_j} J P_j^* J \right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

De la validez de la ecuación  $AX - B = 0$  concluimos, si tenemos en cuenta la independencia lineal de las funciones  $1/(p-p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , que vale la fórmula

$$\sum_{l=1}^m \frac{4 \sigma_j \sigma_l}{p_j + \bar{p}_l} C_j J C_l^* Q_{lt} = \delta_{jt} 2 \sigma_j C_j ; \quad (5.11)$$

o sea

$$C_j \sum_{l=1}^m \frac{2 \sigma_l}{p_j + \bar{p}_l} J C_l^* \sum_{t=1}^m Q_{lt} = C_j \quad (5.12)$$

De (5.7) obtenemos

$$J P_j^* J = J C_j^* \sum_{t=1}^m Q_{jt}$$

De esta fórmula, conjuntamente con (5.12), concluimos que

$$C_j \sum_{l=1}^m \frac{2 \sigma_l}{p_j + \bar{p}_l} J P_l^* J = C_j , \quad (5.13)$$

o sea

$$C_j ( J P_j^* J + \sum_{l \neq j} \frac{2 \sigma_l}{p_j + \bar{p}_l} J P_l^* J ) = C_j . \quad (5.14)$$

De (5.14) y (5.10) obtenemos

$$\lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j)^{s_j - 1} W_2(p) = C_j J P_j^* J + d_j ( I - \sum_{l=1}^m 2 \sigma_l J P_l^* J ) ;$$

o sea, que  $W_2(p)$  tiene un polo de orden  $s_j - 1$  en  $p = p_j$ .  
Con esto queda demostrado el Teorema 5.

Nota: Si  $W(p) \in \hat{K}_j$  tiene un cero de orden  $s_j$  en los puntos  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),  $W^{-1}(p)$  tendrá en dichos puntos un polo de orden  $s_j$ . La biexpansividad de  $W^{-1}(p)$  permite efectuar una descomposición dada por la expresión

$$W^{-1}(p) = \Omega(p) \cdot W_2(p),$$

donde  $W_2(p)$  e  $\hat{K}_j$  tiene un polo de orden  $s_j - 1$  en los puntos  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) y  $\Omega(p)$  es un operador elemental con polos en los puntos  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Por lo tanto, vale para  $W(p)$  la siguiente fórmula de factorización

$$W(p) = W_2^{-1}(p) \Omega^{-1}(p).$$

En este caso  $W_2^{-1}(p)$  e  $\hat{K}_j$  y tiene un cero de orden  $s_j - 1$  en los puntos  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

6. FACTORIZACION A BASE DE OPERADORES ELEMENTALES PRIMARIOS.

Sea  $\Pi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) un proyector ortogonal sobre un subespacio de dimensión uno.

Multipliquemos la desigualdad (3.4) a la derecha por la matriz

$$T_5 \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag} (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m, I)$$

y a la izquierda por  $T_5^*$ . Obtenemos así, si ponemos por definición

$$\Pi_j C_j \stackrel{\text{def}}{=} u_j,$$

una desigualdad del tipo de la (3.4), donde en lugar de los  $C_j$  aparecen los  $u_j$ . A base de ella puede construirse un operador elemental  $\Omega^{(j)}(p)$  tal que vale la fórmula

$$W(p) = W_2^{(j)}(p) \Omega^{(j)}(p),$$

donde  $W_2^{(j)}(p) \in \widehat{K}_j$ . De la definición (5.7) de  $P_j$  (donde  $C_k$  se ha substituído por  $u_k$ ) se concluye que  $\Omega^{(j)}(p)$  es un operador elemental primario. Ahora la relación (5.13) se escribe

$$\Pi_j C_j \sum_{l=1}^m \frac{2\sigma_l}{p_j + \bar{p}_l} J P_l^* J = \Pi_j C_j$$

Esto muestra que si bien el orden del polo en  $p_j$  sigue siendo  $s_j$ , ahora la dimensión del rango del coeficiente  $C_j'$  de  $W_2^{(j)}(p)$  es menor en una unidad, con respecto a la dimensión del rango de  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ); en efecto, vale la fórmula

$$\lim_{p \rightarrow p_j} (p-p_j)^{s_j} W_2^{(j)}(p) = C_j' = C_j - C_j \sum_{l=1}^m \frac{2\sigma_l}{p_j + \bar{p}_l} J P_l^* J$$



7. FACTORIZACION DE OPERADORES J-BICONTRACTIVOS REALES.

Se dice que  $W(p) \in K_J$  es real o que pertenece a la clase  $K_J^R$  si

$$W(\bar{p}) = \overline{W(p)} .$$

Si  $W(p)$  tiene un polo de orden  $s$  en  $p = p_0$ , también tiene un polo de orden  $s$  en  $p = \bar{p}_0$ .

Teorema 6. Si  $W(p) \in K_J^R$  tiene un polo de orden  $s$  en  $p_0$ , vale la fórmula

$$W(p) = W_2(p) W_1(p) ,$$

donde  $W_1(p) \in K_J^R$  es un operador elemental y  $W_2(p) \in K_J^R$  tiene en  $p_0$  un polo de orden  $s - 1$ .

Demostración.

Escribiremos

$$W_1(p) = \Omega(p) = I + \frac{2\sigma_0}{p - p_0} P_1 + \frac{2\sigma_0}{p - \bar{p}_0} P_2 ,$$

donde (cf. (5.7) )

$$P_1 = -J (Q_{11}^* C + Q_{12}^* C) ,$$

$$P_2 = -J (Q_{21}^* \bar{C} + Q_{22}^* \bar{C}) .$$

En este caso  $Q_{11}^* = \bar{Q}_{22}^*$  y  $Q_{12}^* = \bar{Q}_{21}^*$ , y por lo tanto  $P_1 = \bar{P}_2$ .

Nos queda

$$\Omega(p) = I + \frac{2\sigma_0}{p - p_0} P_1 + \frac{2\sigma_0}{p - \bar{p}_0} \bar{P}_1 .$$

Esto quiere decir que  $\Omega(p) \in K_J^R$  y por lo tanto  $W_2(p) \in K_J^R$ .

Nota: Es posible extender los Teoremas 2, 3 y 5 al caso en que  $p_k = -\bar{p}_j$ . En este caso valen las relaciones  $C_k J C_j^* = 0$ ,  $2 \sigma_k C_k J d_j^* = 2 \sigma_j d_k J C_j^*$ . La generalización del Teorema 2 se obtiene reemplazando en la desigualdad (3.4) el operador  $4 \sigma_k \sigma_j C_k J C_j^* (p_k + \bar{p}_j)^{-1}$  y su operador adjunto por el operador  $2 \sigma_k C_k J d_j^*$  y su adjunto. De manera análoga se obtienen, mutatis mutandis, generalizaciones de los Teoremas 3 y 5.

P A R T E    I I  
=====

FACTORIZACION DE OPERADORES CARACTERISTICOS

DE PUERTOS DE HILBERT

### 1. Definiciones y teorema básico.

Sea  $l^2$  el espacio de Hilbert de las sucesiones de cuadrado sumable. Definamos el espacio de Hilbert  $H \stackrel{\text{def}}{=} l^2 \times l^2$ , donde  $\times$  denota el producto cartesiano.

Un operador  $M$  definido en  $H$  puede representarse mediante la matriz

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

donde los  $M_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) son operadores en  $l^2$ . (cf. [10]).

Llamaremos  $I$  el operador identidad en  $l^2$  e  $I_H$  el operador identidad en  $H$ .

En la primera parte de este trabajo hemos definido la clase de operadores  $\hat{K}_J$  (ver parágrafo 3), donde  $J$  es un operador hermitiano tal que  $J^2 = I$ . En la teoría de puertos de Hilbert tienen interés los operadores que consideramos a continuación.

Un operador de scattering  $S(p)$  ( $S(p): l^2 \rightarrow l^2$ ) es un operador de la clase  $\hat{K}_I$ .

Un operador de transferencia  $T(p)$  ( $T(p): H \rightarrow H$ ) es un operador de la clase  $\hat{K}_{J_1}$ , donde

$$J_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Un operador de cadena  $A(p)$  ( $A(p): H \rightarrow H$ ) es un operador de la clase  $\hat{K}_{J_2}$ , donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Diremos que un operador es real si  $\overline{M(\bar{p})} = M(p)$ .

Dado un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  denotaremos con  $(f, g)$  el producto escalar de dos vectores  $f$  y  $g$  pertenecientes al espacio  $\mathcal{H}$ .

Es conveniente definir también otro producto escalar  $[x, y]$  por la fórmula

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} (Jx, y).$$

Diremos que  $a \in \mathcal{H}$  es isótropo si  $[a, x] = 0$ , para todo  $x \in \mathcal{H}$ .

Si el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  no contiene vectores isótropos salvo  $a = 0$ , diremos que  $\mathcal{H}$  es no degenerado.

Demostraremos a continuación un teorema básico, que generaliza un teorema de Potapov (cf. [4], p. 160).

Teorema 1. Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable, no degenerado respecto de la métrica indefinida inducida por el operador  $J$ . Sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  un conjunto linealmente independiente de vectores de  $\mathcal{H}$  y sea  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\}$  otro conjunto linealmente independiente. Una condición necesaria y suficiente para que exista un operador  $U$   $J$ -unitario (definido en todo  $\mathcal{H}$ ) que satisfaga a las relaciones

$$x'_i = U x_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ,$$

es que se cumplan las condiciones

$$[x_i, x_j] = [x'_i, x'_j] \quad , \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, m.$$

#### Demostración del Teorema 1.

La necesidad de la condición es inmediata. Para mostrar la suficiencia definamos el espacio de Hilbert  $h$ , de dimensión finita, generado por los vectores  $\{x_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{x'_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{Jx_i\}_{i=1}^m$ , y  $\{Jx'_i\}_{i=1}^m$ . Llamemos  $J_1$  y  $J_2$  a los operadores que son restricciones del operador  $J$  a los subespacios  $h$  y  $h^\perp$  respectivamente (con  $h^\perp$  denotamos el subespacio ortogonal a  $h$ ). Valen pues las relaciones  $J_k = J_k^*$ ,  $J_k^2 = I$  ( $k = 1, 2$ ).

El teorema de Potapov recién citado afirma que existe un operador  $J_1$ -unitario  $U_1 : h \rightarrow h$  que satisface a las relaciones

$$x'_i = U_1 x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad .$$

Basta entonces definir un operador  $J_2$ -unitario  $U_2 : h^\perp \rightarrow h^\perp$

(por ejemplo,  $U_2 = J_2$ ).

El operador J-unitario  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  que satisface a las condiciones de la tesis se define, dado  $y \in \mathcal{H}$ , mediante la relación

$$U y = U_1 y_1 + U_2 y_2$$

donde  $y = y_1 + y_2$ ,  $y_1 \in h$  e  $y_2 \in h^\perp$ .

Nota. Zemanian (cf. [14]) ha introducido el concepto de n-puertos de Hilbert, que está íntimamente relacionado con los conceptos de matriz de cadena y matriz de transferencia que nosotros definimos en la p. 27.

2. Factorización bimembre del operador de transferencia.

Si  $p_0$  ( $\sigma_0 = \text{Re} \cdot p_0 > 0$ ) es un cero de orden  $s_0$  del operador de transferencia  $T(p)$ , es posible efectuar una factorización de este operador de la forma

$$T(p) = T_1(p) \cdot \left( I_H - \frac{2\sigma_0}{p+\bar{p}_0} P_1 \right).$$

El operador  $T_1(p)$  es un operador de transferencia, el operador  $J_1 P_1$  es hermitiano no negativo,  $P_1^2 = P_1$  y el rango de  $P_1$  es de dimensión finita (cf. Parte 1, § 5).

Sea  $\{x_k\}_{k=1}^m$ ; una base ortonormal del rango de  $P_1$ , con  $[x, y] = (J_1 x, y)$ . Valen pues las relaciones

$$[x_k, x_k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, 2, \dots, p_0, \\ -1 & \text{si } k = p_0+1, p_0+2, \dots, p_0+q_0, \\ 0 & \text{si } k = p_0+q_0+1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.1)$$

Definamos los vectores

$$E_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 1, \dots, p_0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ e_k \end{pmatrix} & \text{si } k = p_0+1, \dots, q_0, \\ \begin{pmatrix} e_k \\ e_k \end{pmatrix} & \text{si } k = p_0+q_0+1, \dots, m. \end{cases}$$

El teorema del párrafo 1 afirma que existe un operador  $U_1$ ,  $J_1$ -unitario, tal que

$$E_k = U_1 x_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Definamos el operador

$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} U_1 P_1 U_1^{-1} .$$

Por lo tanto

$$D_1 E_k = E_k , \quad k = 1, 2, \dots, m . \quad (3.2)$$

De la hipótesis  $J_1 P_1 \geq 0$  se concluye que  $J_1 D_1 \geq 0$ . Teniendo en cuenta (3.1) y (3.2) concluimos que  $q_0 = 0$ . Como  $J_1 D_1$  es hermitiano, para  $z \in R_{J_1 D_1}^\perp$  es  $J_1 D_1 z = 0$ , y por lo tanto resulta  $p_0 = m$  y  $D_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e_k \end{pmatrix} = 0$  para todo  $k$ .

Dado  $x \in \mathcal{H}$ , puede escribirse

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \begin{pmatrix} 0 \\ e_j \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$D x = \sum_{i=1}^m \gamma_i \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3.3)$$

El operador  $D$  se puede representar mediante la matriz

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} ,$$

donde los  $D_{ij}$  aplican  $l^2$  en  $l^2$ .

Teniendo en cuenta (3.3) concluimos que

$$D_{12} = D_{21} = D_{22} = 0 ,$$

y además que

$$D_{11} = \text{diag} \left( \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \dots \right)$$



Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2. Si  $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$  es un cero de orden  $s_0$  del operador  $T(p)$  en el semiplano de la derecha, vale la factorización

$$T(p) = T_1(p) \cdot \left( I_H - \frac{2\sigma_0}{p+\bar{p}_0} P_1 \right) = T_1(p) \cdot U_1^{-1} \cdot T_0(p) \cdot U_1,$$

donde  $T_1(p)$  es un operador de transferencia que tiene un cero de orden  $s_0-1$  en  $p_0$ ,  $U_1$  es un operador  $J_1$ -unitario constante y  $T_0(p)$  está definido por la matriz de operadores

$$T_0(p) = \begin{pmatrix} T_{11}(p) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde

$$T_{11}(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{p-p_0}{p+\bar{p}_0}, \dots, \frac{p-p_0}{p+\bar{p}_0}}_{m \text{ veces}}, 1, 1, \dots \right)$$

El número  $m$  es la dimensión del rango del operador  $P_1$ .

Siguiendo la misma línea de razonamiento es posible demostrar el teorema que a continuación enunciamos.

Teorema 3. Si  $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$  es un polo de orden  $s_0$  del operador  $T(p)$  en el semiplano de la derecha, vale la factorización

$$T(p) = T_1(p) \cdot \left( I_H + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} P_1 \right) = T_1(p) \cdot U_1^{-1} T_0(p) \cdot U_1,$$

donde  $T_1(p)$  es un operador de transferencia que tiene un polo de orden  $s_0-1$  en  $p_0$ ,  $U_1$  es un operador  $J_1$ -unitario constante y  $T_0(p)$  está definido por la matriz de operadores

$$T_0(p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{22}(p) \end{pmatrix}$$

donde

$$T_{22}(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{p+\overline{p_0}}{p-p_0}, \dots, \frac{p+\overline{p_0}}{p-p_0}}_{m \text{ veces}}, 1, 1, \dots \right) .$$

El número  $m$  es la dimensión del rango del operador  $P_1$ .

La demostración de este teorema es inmediata teniendo en cuenta que en este caso  $J_1 \cdot P_1 \leq 0$ .

### 3. Factorización bimembre del operador de scattering.

Un razonamiento análogo al del párrafo anterior permite demostrar el teorema que enunciamos a continuación.

Teorema 4. Sea  $\Omega_0(p)$  el factor elemental correspondiente a un cero del operador  $S(p)$  en el punto  $p_0$ . Entonces vale la representación

$$\Omega_0(p) = U^{-1} \cdot S_0(p) \cdot U ,$$

donde  $U$  es un operador unitario constante y  $S_0(p)$  está definido por la fórmula

$$S_0(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{p-p_0}{p+\overline{p_0}}, \dots, \frac{p-p_0}{p+\overline{p_0}}}_{m \text{ veces}}, 1, 1, \dots \right) .$$

El número  $m$  es la dimensión del rango del operador  $P$ .

4. Factorización bimembre del operador de cadena.

Notemos que existe la relación

$$J_2 = u^* J_1 u ,$$

donde el operador unitario  $u$  está definido por la fórmula

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Sea  $T$  un operador de transferencia.

Si definimos

$$A \stackrel{\text{def}}{=} u^* T u ,$$

entonces  $A$  es un operador de cadena (cf[6], Teor. 21).

La observación precedente conjuntamente con los Teoremas 2 y 3 permiten obtener sin dificultad los teoremas que a continuación enunciamos.

Teorema 5. Si  $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$  es un cero de orden  $s_0$  del operador  $A(p)$  en el semiplano de la derecha, vale la factorización

$$A(p) = A_1(p) \cdot \left( I_H - \frac{2\sigma_0}{p+p_0} P_2 \right) = A_1(p) \cdot V^{-1} \cdot A_0(p) \cdot V$$

donde  $A_1(p)$  es un operador de cadena que tiene un cero de orden  $s_0 - 1$  en  $p_0$ ,  $V$  es un operador  $J_2$ -unitario constante y  $A_0(p)$  está de finido por la matriz de operadores

$$A_0(p) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{pmatrix}$$

donde

$$A_{11}(p) = A_{22}(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{p-i\omega_0}{p+p_0}, \dots, \frac{p-i\omega_0}{p+p_0}}_{m \text{ veces}}, 1, 1, \dots \right),$$

$$A_{12}(p) = A_{21}(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{\sigma_0}{p+p_0}, \dots, \frac{\sigma_0}{p+p_0}}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \dots \right)$$

El número  $m$  es la dimensión del rango del operador  $P_2$ .

Teorema 6. Si  $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$  es un polo de orden  $s_0$  del operador  $A(p)$  en el semiplano de la derecha, vale la factorización

$$A(p) = A_1(p) \cdot \left( I_H + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} P_2 \right) = A_1(p) \cdot V^{-1} A_0(p) \cdot V,$$

donde  $A_1(p)$  es un operador de cadena que tiene un polo de orden  $s_0 - 1$  en  $p_0$ ,  $V$  es un operador  $J_2$ -unitario constante y  $A_0(p)$  está definido por la matriz de operadores

$$A_0(p) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{11}(p) = A_{22}(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{p-i\omega_0}{p-p_0}, \dots, \frac{p-i\omega_0}{p-p_0}}_{m \text{ veces}}, 1, 1, \dots \right),$$

$$A_{12}(p) = A_{21}(p) = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{\sigma_0}{p-p_0}, \dots, \frac{\sigma_0}{p-p_0}}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \dots \right)$$

El número  $m$  es la dimensión del rango del operador  $P_2$ .

5. Factorización bimembre de un operador real de scattering.

Un operador de scattering  $S(p)$  es por definición real si

$$S(p) = \overline{S(\bar{p})}$$

Si  $S(p)$  tiene un cero de orden  $s_0$  en el punto  $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$ , el desarrollo en serie de Laurent en el entorno de  $p_0$  del operador  $S^{-1}(p)$  es

$$S^{-1}(p) = \frac{2\sigma_0 c}{(p-p_0)^{s_0}} + \frac{d}{(p-p_0)^{s_0-1}} + \dots$$

En este caso, vale la factorización

$$S(p) = S_1(p) \cdot \Omega(p), \quad (5.1)$$

donde

$$\Omega(p) = I - \frac{2\sigma_0}{p+\bar{p}_0} P, \quad (5.2)$$

$$P = u (u^* u)^{[-1]} u^*, \quad (5.3)$$

$$u = C \Pi.$$

El operador  $A^{[-1]}$  es el inverso del operador definido por el operador hermitiano  $A$  sobre su rango. El operador  $\Pi$  es un proyector ortogonal de rango de dimensión uno y  $P \geq 0$  (cf. Parte I, § 6).

De (5.1) concluimos que

$$S_1^{-1}(p) = \Omega(p) S^{-1}(p).$$

Como  $S^{-1}(p)$  es un operador real, tiene también un polo de orden  $s_0$  en el punto  $\bar{p}_0 = \sigma_0 - i\omega_0$ . En el entorno de  $\bar{p}_0$  el desarrollo en serie de Laurent de  $S^{-1}(p)$  es

$$s^{-1}(p) = \overline{s^{-1}(\bar{p})} = \frac{2\sigma_0 \bar{c}}{(p-\bar{p}_0)^{\infty}} + \frac{\bar{d}}{(p-\bar{p}_0)^{\infty-1}} + \dots \quad (5.4)$$

Teniendo en cuenta (5.3) en el entorno de  $\bar{p}_0$  el desarrollo de  $S_1^{-1}(p)$  es

$$S_1^{-1}(p) = \frac{2\sigma_0 \tilde{c}}{(p-\bar{p}_0)^{\infty}} + \dots = \left(I - \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} p\right) \cdot \frac{2\sigma_0 \bar{c}}{(p-\bar{p}_0)^{\infty}} +$$

donde  $\tilde{c}$  denota el coeficiente de orden máximo de ese desarrollo. Resulta pues

$$\tilde{c} = \left(I - \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} p_0\right) \bar{c}$$

Definamos ahora

$$\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{c} \cdot \Pi = \left(I - \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} p\right) \bar{u}, \quad (5.5)$$

$$\tilde{p} \stackrel{\text{def}}{=} u (u^* u)^{[-1]} \tilde{u}^*, \quad (5.6)$$

$$\tilde{\Omega}(p) \stackrel{\text{def}}{=} I - \frac{2\sigma_0}{p+p_0} \tilde{p}$$

Con estas definiciones vale la factorización

$$S_1(p) = S_2(p) \cdot \tilde{\Omega}(p)$$

y por lo tanto

$$S(p) = S_2(p) \cdot \tilde{\Omega}(p) \cdot \Omega(p).$$

Nos interesa obtener una factorización tal que  $S_2(p)$  sea un operador real de scattering. Sin restricción de la generalidad, podemos elegir

$$\Pi = \text{diag} (1, 0, 0, \dots)$$

y suponer que  $u \stackrel{\text{def}}{=} C \Pi \neq 0$ .

Si escribimos  $C = (C_{jk})$ ,  $1 \leq j, k < \infty$ ,

resulta

$$u = (u_{jk}) = (C_{j1} \cdot \delta_{1k}),$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker; y en consecuencia

$$P = (P_{jk}) = \left( \frac{u \cdot u^*}{\alpha} \right)_{jk},$$

donde

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} |u_{j1}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |C_{j1}|^2.$$

Teniendo en cuenta (5.5) resulta

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= (\tilde{u}_{jk}) = \bar{c}_{j1} \delta_{1k} - \frac{\sigma_0}{p_0} \sum_{n=1}^{\infty} P_{jn} \cdot \bar{u}_{nk} = \\ &= \bar{c}_{j1} \delta_{1k} - \frac{\sigma_0}{p_0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} P_{jn} \cdot \bar{c}_{n1} \right) \delta_{1k} = \\ &= (\bar{c}_{j1} - \bar{\eta} c_{j1}) \cdot \delta_{1k} = (\tilde{u}_{j1} \cdot \delta_{1k}), \end{aligned}$$

donde

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^2,$$

$$\bar{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_0 \beta}{p_0 \alpha}$$

De las fórmulas que preceden obtenemos, teniendo en cuenta (5.6)

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{u} \tilde{u}^*}{\tilde{\alpha}},$$

donde

$$\tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{u}_{j1}|^2$$

Consideremos los vectores columna

$$v = (v_j) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{c_{j1}}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad y$$

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}} (\tilde{v} - \tilde{\eta} v);$$

entonces los proyectores P y  $\tilde{P}$  pueden escribirse de la siguiente manera:

$$P = v v^*$$

$$\tilde{P} = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} (\tilde{v} - \tilde{\eta} v) (\tilde{v}^* - \tilde{\eta} v^*) = \tilde{v} \tilde{v}^* .$$

Observemos que  $v^* v = \tilde{v}^* \tilde{v} = 1$ . En consecuencia

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(p) \cdot \Omega(p) &= \left( I - \frac{2\sigma_0}{p+p_0} \tilde{P} \right) \left( I - \frac{2\sigma_0}{p+\overline{p_0}} P \right) = \\ &= \left( I - \frac{2\sigma_0}{p+p_0} \tilde{v} \tilde{v}^* \right) \left( I - \frac{2\sigma_0}{p+\overline{p_0}} v v^* \right). \quad (5.7) \end{aligned}$$

La definición de P no se modifica si reemplazamos u por  $u e^{i\phi}$ , donde  $\phi$  es una constante real. Eligiendo  $\phi$  de forma tal que  $\eta$  sea un número real, se comprueba (calculando la expresión (5.7))



que  $\tilde{\Omega}(p) \cdot \Omega(p)$  es un operador real. Efectuando  $m$  extracciones sucesivas de la forma  $\tilde{\Omega}_k(p) \cdot \Omega_k(p)$ , donde  $m$  es la dimensión del rango del operador  $C$ , es posible disminuir en una unidad el orden del polo en los puntos  $p_0$  y  $\bar{p}_0$ .

Si el cero de  $S(p)$  es real ( $p_0 = \bar{p}_0$ ), la fórmula (5.4) muestra que  $C = \bar{C}$ . Por lo tanto es posible definir un operador  $P$  real. En tal caso el operador  $\Omega(p)$  definido en (5.2) es real y en la descomposición

$$S(p) = S_1(p) \cdot \Omega_0(p)$$

el operador  $S_1(p)$  es un operador real de scattering.

Hemos pues probado el siguiente teorema.

Teorema 7. Si  $S(p)$  es un operador real de scattering con un cero de orden  $s_0$  en el punto  $p_0$  ( $\text{Im } p_0 \neq 0, \text{Re } p_0 > 0$ ) vale la factorización

$$S(p) = S_2(p) \cdot \prod_{k=1}^m \tilde{\Omega}_k(p) \cdot \Omega_k(p),$$

donde  $S_2(p)$  es un operador real de scattering con un cero de orden  $s_0 - 1$  en el punto  $p_0$ . Los operadores  $\Omega_k(p)$  y  $\tilde{\Omega}_k(p)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) son operadores elementales primarios bimembres. El número  $m$  es la dimensión del rango del coeficiente de orden máximo del desarrollo de Laurent de  $S(p)$  en el entorno de  $p_0$ . Si  $\text{Im } p_0 = 0$ , la descomposición es

$$S(p) = S_1(p) \cdot \Omega(p),$$

donde  $S_1(p)$  es un operador real de scattering con un cero de orden  $s_0 - 1$  en el punto  $p_0$ .

En el caso particular de dimensión finita ( $l^2 = \mathbb{C}^n$ ), el teorema que precede coincide con un teorema de Belevitch (cf. [7], p. 331).

6. Factorización bimembre de un operador real de transferencia.

Utilizando los métodos del párrafo anterior es posible obtener resultados similares para el operador de transferencia.

Teorema 8. Si  $T(p)$  es un operador real de transferencia con un cero (polo) de orden  $s_0$  en el punto  $p_0$ , ( $\text{Im } p_0 \neq 0$ ,  $\text{Re } p_0 = 0$ ) vale la factorización

$$T(p) = T_2(p) \cdot \prod_{k=1}^m \tilde{\Omega}_k(p) \cdot \Omega_k(p) ,$$

donde  $T_2(p)$  es un operador real de transferencia con un cero (polo) de orden  $s_0 - 1$  en el punto  $p_0$ . Los operadores  $\Omega_k(p)$  y  $\tilde{\Omega}_k(p)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) son operadores elementales primarios bimembres. El número  $m$  es la dimensión del rango del coeficiente de orden máximo del desarrollo de Laurent de  $S(p)$  en el entorno de  $p_0$ . Cuando  $\text{Im } p_0 = 0$ , la descomposición es

$$T(p) = T_1(p) \cdot \Omega(p) ,$$

donde  $T_1(p)$  es un operador real de transferencia con un cero (polo) de orden  $s_0 - 1$  en el punto  $p_0$ .

7. Factorización bimembre de un operador real de cadena.

Todo operador de cadena  $A(p)$  puede expresarse en la forma

$$A(p) = u^* T(p) u ,$$

donde  $T(p)$  es un operador de transferencia y  $u$  un operador real unitario constante (cf. párrafo 4.). Esto permite establecer el teorema de factorización correspondiente para el operador real de cadena, cuyo enunciado es análogo, mutatis mutandis, al del Teorema 8.

8. Operadores J-unitarios en un intervalo del eje imaginario.  
Su factorización.

A partir de un teorema de Ju. P. Ginzburg (cf. [1], p. 52) es posible, mediante una transformación ~~unimodal~~ del círculo unidad en el semiplano de la derecha, obtener el siguiente resultado, que consignamos porque tiene aplicaciones en la teoría de la síntesis de circuitos.

Teorema 9. Sea  $W(p) \in \hat{K}_J$  un operador holomorfo y J-unitario en un intervalo  $\Gamma$  del eje imaginario, salvo en el punto  $i\omega_0$  de este intervalo donde este operador tiene un polo de orden  $s_0$ ; y sea

$$W(p) = (p - i\omega_0)^{-s_0} C + (p - i\omega_0)^{-s_0 + 1} d + \dots$$

el desarrollo de Laurent en el entorno de  $p_0$ . Vale entonces la fórmula

$$W(p) = W_1(p) \left( I + \frac{1}{p - i\omega_0} G \right),$$

donde  $W_1(p) \in \hat{K}_J$  tiene en  $i\omega_0$  un polo de orden  $s_0 - 1$  y  $G$  es un operador compacto, J-hermitiano, positivo, nilpotente, dado por la expresión

$$G = \overline{J C^* (d J C^*)^{-1} C}$$

El símbolo  $\bar{C}$  denota aquí la clausura del operador  $C$ . Bajo estas condiciones  $W^{-1}(p)$  también tiene un polo de orden  $s_0$  en  $i\omega_0$  y  $W_1^{-1}(p)$  tiene en ese punto un polo de orden  $s_0 - 1$ .

9. Operadores de circuitos racionales.

Diremos que el operador  $W(p) \in \hat{K}_J$  es racional si  $W(p)$  y  $W^{-1}(p)$  tienen un número finito de polos en el plano complejo completo. En este caso es interesante notar que si el operador  $W(p)$  es  $J$ -unitario en los puntos de holomorfismo del eje imaginario, vale la siguiente fórmula de factorización

$$W(p) = U \cdot W_n(p) \cdot W_{n-1}(p) \cdot \dots \cdot W_1(p). \quad (9.1)$$

Los operadores  $W_i \in \hat{K}_J$  son operadores elementales y  $U$  es un operador  $J$ -unitario constante. Este resultado ha sido obtenido por Ju. P. Ginzburg (cf. [1], p. 53); lo consignamos aquí porque tiene interés para la teoría de puertos de Hilbert. La expresión (9.1) muestra que todo puerto de Hilbert racional puede descomponerse en un número finito de puertos elementales, donde cada  $W_i(p)$  corresponde a un cero o polo simple del operador  $W(p)$ .

10. Factorización trimembre de un operador real de scattering.

Si el operador real de scattering  $S(p)$  tiene un cero en  $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$  vale la descomposición

$$S(p) = S_1(p) \cdot \Omega(p), \quad (10.1)$$

donde

$$\Omega(p) = I - \frac{2\sigma_0}{p+\bar{p}_0} P - \frac{2\sigma_0}{p+p_0} \bar{P}$$

y  $P$  es un operador elemental primario (ver parte I, § 7).

Si  $\omega_0 = 0$ , es  $p_0 = \bar{p}_0$  y por lo tanto  $\Omega(p)$  coincide con el operador bimembre real calculado en el parágrafo 5.

Sea  $\omega_0 \neq 0$ . Para obtener el operador  $P$  es necesario obtener la expresión explícita del operador

$$X = \begin{pmatrix} X^I \\ X^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q_{11}}{p_0-p} + \frac{Q_{12}}{\bar{p}_0-p} \\ \frac{Q_{21}}{p_0-p} + \frac{Q_{22}}{\bar{p}_0-p} \end{pmatrix}, \quad (10.2)$$

que es solución de la ecuación

$$\begin{pmatrix} u u^* & \frac{\sigma_0}{p_0} u \bar{u}^* \\ \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} \bar{u} u^* & \bar{u} \bar{u}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^I \\ X^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{p_0-p} \\ \frac{\bar{u}}{\bar{p}_0-p} \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

El operador  $u$  se define por la fórmula  $u = \overline{\Pi} \cdot C \neq 0$ , donde  $\overline{\Pi}$  es un proyector ortogonal de rango de dimensión 1 y  $2\sigma_0 C$  es el coeficiente del término de máximo orden del desarrollo de  $S^{-1}(p)$  en el entorno de  $p_0$ .

El operador  $P$  está dado por la fórmula

$$P = - (Q_{11}^* + Q_{12}^*) u = - u^* (Q_{11} + Q_{12}) .$$

No restringe generalidad suponer que

$$\overline{\Pi} = \text{diag} ( 1, 0, 0, \dots )$$

En este caso la matriz  $u$  está dada por la fórmula

$$u = (u_{ij}) = (\delta_{i1} \ C_{1j}) , \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (10.4)$$

Tenemos evidentemente

$$(u \ u^*)_{ij} = (\bar{u} \ \bar{u}^*)_{ij} = \alpha \ \delta_{1i} \ \delta_{1j} ,$$

$$(u \ \bar{u}^*)_{ij} = \beta \ \delta_{1i} \ \delta_{1j} ,$$

donde

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{n1}|^2 \quad y$$

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^2 .$$

De (10.3) y (10.4) se concluye que las componentes del operador  $X$  tienen la forma

$$\begin{aligned} (X^I)_{ij} &= \gamma_j^I \cdot \delta_{1i} , \\ (X^{II})_{ij} &= \gamma_j^{II} \cdot \delta_{1i} \end{aligned} \quad (10.5)$$

De (10.3) se concluye que las incógnitas  $\gamma_j^I, \gamma_j^{II}$  satisfacen al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha \gamma_j^I + \frac{\sigma_0}{p_0} \gamma_j^{II} &= \frac{C_{1j}}{p_0 - p} , \\ \frac{\sigma_0 \beta}{\overline{p_0}} \gamma_j^I + \alpha \gamma_j^{II} &= \frac{\overline{C_{ij}}}{\overline{p_0} - p} , \end{aligned}$$

La solución de este sistema viene dada por las fórmulas

$$\begin{aligned} \gamma_j^I &= \frac{1}{\Delta} \left( \alpha \frac{C_{ij}}{p_0 - p} - \frac{\sigma_0 \beta}{p_0} \frac{\overline{C_{ij}}}{\overline{p_0} - p} \right) \\ \gamma_j^{II} &= \frac{1}{\Delta} \left( \alpha \frac{\overline{C_{ij}}}{\overline{p_0} - p} - \frac{\sigma_0 \beta}{\overline{p_0}} \frac{C_{ij}}{p_0 - p} \right) \end{aligned}$$

donde hemos puesto

$$\Delta = \alpha^2 - \frac{\sigma_0^2}{|p_0|^2} |\beta|^2$$

Observemos que es  $\Delta > 0$ , pues  $\omega_0 \neq 0$  y  $\alpha \geq |\beta|$ .

De (10.2) y (10.5) se obtiene

$$(Q_{11})_{ij} = \frac{\alpha}{\Delta} c_{1j} \delta_{1i} ,$$

$$(Q_{12})_{ij} = - \frac{\sigma_0 \beta}{p_0 \Delta} c_{1j} \cdot \delta_{1i}$$

Por consiguiente el operador P tiene la expresión

$$P = \frac{v [\beta \alpha^{-1} \sigma_0 p_0 \bar{v}^* - |p_0|^2 v^*]}{|p_0|^2 - \sigma_0^2 |\beta|^2 \cdot \alpha^{-2}} ,$$

donde v denota el vector columna definido por la fórmula

$$v = (v_j) = \left( \frac{\bar{c}_{1j}}{\sqrt{\alpha}} \right) .$$

Basándose en los cálculos anteriores es posible obtener, mutatis mutandis, fórmulas similares para el operador de transferencia y para el operador de cadena.

Nota. En el párrafo 5 hemos separado  $\Omega(p)$  a la derecha por medio del operador  $u = C \cdot \Pi$ . Para obtener una separación de  $\Omega(p)$  a la izquierda, como en el párrafo 10, debe adoptarse la nueva definición  $u = \Pi \cdot C$ .

En el caso general de un operador  $S(p) \in \hat{K}_J$ , definimos  $u = \Pi' \cdot C$ , donde  $\Pi' = \text{diag}(\Pi, 0)$  ( $\Pi' \in l^2 \times l^2$ ,  $\Pi \in l^2$ ). Para los ceros del operador  $S(p)$  vale una representación similar a la (10.1) donde ahora  $P = (|p_0|^2 - \sigma_0^2 |\beta|^2 \alpha^{-2})^{-1} v [\beta \alpha^{-1} \sigma_0 p_0 \bar{v}^* - |p_0|^2 v^*] J$ . Los números  $\alpha$  y  $\beta$  son los elementos no nulos de las matrices  $uJu^*$  y  $u\bar{J}\bar{u}^*$  respectivamente y el vector  $v \in l^2 \times l^2$  es el vector columna formado a partir de la primera columna de la matriz del operador  $C$ , dividido por  $\sqrt{\alpha}$ . Para los polos del operador  $S(p)$  vale la representación  $S(p) = S_1(p) \cdot \Omega(p)$ , donde  $\Omega(p) = I + 2 \sigma_0 (p-p_0)^{-1} J P J + 2 \sigma_0 (p-\bar{p}_0)^{-1} J \bar{P} J$ .



P A R T E    I I I  
=====

SINTESIS DE 2n-PUERTOS REACTIVOS DE MATRIZ

DE TRANSFERENCIA PREFIJADA

1. Matrices reales de transferencia. Matrices elementales simples.

Se llama matriz real de transferencia  $T(p)$  toda matriz de orden  $2n \times 2n$  que satisface a las condiciones siguientes:

i)  $T^*(p) J T(p) - J \geq 0$ ,  $\text{Re } p > 0$ ,

donde  $J = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$  e  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ ;

ii)  $T(\bar{p}) = \overline{T(p)}$ .

Llamaremos matriz simple elemental  $R(p)$  toda matriz  $T(p)$  que tenga el mínimo número de polos simples. A continuación consignamos los cinco tipos posibles de matrices simples elementales, y las relaciones que satisfacen estas matrices por ser elementales (cf. [3], Teorema 2, p. 89).

Caso A.

$$R(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0 a}{p - p_0} + \frac{2\sigma_0 \bar{a}}{p - \bar{p}_0}, \quad p_0 = \sigma_0 + i\omega_0, \quad \sigma_0 > 0, \quad \omega_0 > 0;$$

$$\begin{pmatrix} a^* J a & \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} a^* J \bar{a} \\ \frac{\sigma_0}{p_0} \bar{a}^* J a & \bar{a}^* J \bar{a} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (1.1)$$

$$a J = a^* J a + \frac{\sigma_0}{p_0} \bar{a}^* J a \quad (1.2)$$

Caso B.

$$R(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0 a}{p - \sigma_0}, \quad \sigma_0 > 0, \quad a = \bar{a};$$

$$a^* J a \geq 0 ,$$

$$J a = a^* J a .$$

Caso C.

$$R(p) = I_{2n} + \frac{a}{p - i\omega_0} + \frac{\bar{a}}{p + i\omega_0} , \quad \omega_0 > 0 ;$$

$$\begin{pmatrix} a^* J b & \frac{a^* J \bar{a}}{-2i\omega_0} \\ \frac{\bar{a}^* J a}{2i\omega_0} & \bar{a}^* J \bar{b} \end{pmatrix} \geq 0 ,$$

$$a^* J a = 0 , \quad a^* J b = b^* J a ,$$

$$\text{donde } b = I + \frac{\bar{a}}{2i\omega_0}$$

Caso D.

$$R(p) = I_{2n} + \frac{a}{p} , \quad \bar{a} = a ;$$

$$J a \geq 0 ,$$

$$a^* J a = 0 , \quad a^* J = J a .$$

Caso E.

$$R(p) = I_{2n} + p a , \quad a = \bar{a} ;$$

$$J a \geq 0 , \quad a^* J a = 0 , \quad a^* J = J a .$$

## 2. Matrices primarias simples.

Se llama matriz primaria simple toda matriz simple que simultáneamente es una matriz primaria (cf. definición § 4, parte I).

Consideremos las matrices primarias simples del caso A. Si  $a$  es una matriz de rango de dimensión 1, vale la relación  $a = f g^*$ , donde  $f$  y  $g$  son vectores columna de  $\mathbb{C}^{2n}$ . De acuerdo con esto, tendremos que

$$R(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} f g^* + \frac{2\bar{\sigma}_0}{p-\bar{p}_0} \bar{f} \bar{g}^* .$$

Sea ahora

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} ,$$

donde  $f_i$  y  $g_i$  ( $i=1,2$ ) son vectores columna de  $\mathbb{C}^n$ .

Definamos los números

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^* J f = f_2^* f_2 - f_1^* f_1 , \quad (2.1)$$

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} f^* J \bar{f} = \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} (f_2^* \bar{f}_2 - f_1^* \bar{f}_1) , \quad (2.2)$$

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^2 - |\beta|^2 .$$

Teniendo en cuenta estas definiciones, (1.1) y (1.2) se desprende que valen las relaciones

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} > 0 , \quad \text{o sea} \quad \Delta > 0 \quad (2.3)$$

y

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{\Delta} (\alpha f_1 - \bar{\beta} \bar{f}_1) , \\ g_2 &= \frac{1}{\Delta} (\alpha f_2 - \bar{\beta} \bar{f}_2) . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Las relaciones (2.3) y (2.4) son condiciones necesarias y suficientes para que  $R(p)$  sea una matriz real primaria de transferencia (cf. [3], Teorema 3, p. 91).

En lo que sigue escribiremos

$$R(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) & R_{12}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) \end{pmatrix},$$

donde las  $R_{ij}(p)$  ( $i, j = 1, 2$ ) son matrices de  $n \times n$ .

Procediendo de la misma manera con los casos restantes se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1, A. Sean  $f$ ,  $\alpha = f_2^* f_2 - f_1^* f_1$  y  $\beta = \frac{\sigma_0}{\bar{p}_0} (f_2^* \bar{f}_2 - f_1^* \bar{f}_1)$  tales que vale la relación

$$\Delta = \alpha^2 - |\beta|^2 > 0. \quad (2.5)$$

En tal caso, el vector  $g$  dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{\Delta} (\alpha f_1 - \bar{\beta} \bar{f}_1), \\ g_2 &= \frac{1}{\Delta} (\alpha f_2 - \bar{\beta} \bar{f}_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

y el vector  $f$  determinan una matriz primaria  $R(p)$  del tipo A donde

$$\begin{aligned} R_{11}(p) &= I_n + 2\sigma_0 \left( \frac{f_1 g_1^*}{p-p_0} + \frac{\bar{f}_1 \bar{g}_1^*}{p-\bar{p}_0} \right), \\ R_{12}(p) &= 2\sigma_0 \left( \frac{f_1 g_2^*}{p-p_0} + \frac{\bar{f}_1 \bar{g}_2^*}{p-\bar{p}_0} \right), \\ R_{21}(p) &= 2\sigma_0 \left( \frac{f_2 g_1^*}{p-p_0} + \frac{\bar{f}_2 \bar{g}_1^*}{p-\bar{p}_0} \right), \\ R_{22}(p) &= I_n + 2\sigma_0 \left( \frac{f_2 g_2^*}{p-p_0} + \frac{\bar{f}_2 \bar{g}_2^*}{p-\bar{p}_0} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Recíprocamente, si la matriz  $R(p)$  con bloques (2.7) es primaria, entonces las componentes de los vectores  $f$  y  $g$  están vinculadas por las relaciones (2.6) donde  $\alpha$  y  $\beta$  están dados por (2.1) y (2.2) y satisfacen a la relación (2.5).

Teorema 1, B. Sea  $f$  real tal que

$$\alpha = f_2^* f_2 - f_1^* f_1 > 0. \quad (2.8)$$

En tal caso, el vector  $g$  dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} g_1 &= -f_1 / \alpha, \\ g_2 &= f_2 / \alpha, \end{aligned} \quad (2.9)$$

y el vector  $f$  determinan una matriz primaria  $R(p)$  del tipo B donde

$$\begin{aligned} R_{11}(p) &= I_n + \frac{2\sigma_0}{p - \sigma_0} f_1 g_1^*, \\ R_{12}(p) &= \frac{2\sigma_0}{p - \sigma_0} f_1 g_2^*, \\ R_{21}(p) &= \frac{2\sigma_0}{p - \sigma_0} f_2 g_1^*, \\ R_{22}(p) &= I_n + \frac{2\sigma_0}{p - \sigma_0} f_2 g_2^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

Recíprocamente, si la matriz  $R(p)$  con bloques (2.10) es primaria, entonces los vectores  $f$  y  $g$  pueden elegirse reales y con componentes vinculadas por (2.9), donde  $\alpha$  satisface a la relación (2.8).

Teorema 1, C. Sea  $f$  tal que  $\bar{f}_2 = e^{i\phi} f_1$  y sea

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} (f_2^* f_1 - f_1^* f_2) (2 i \omega_0)^{-1} . \quad (2.11)$$

Para todo  $\theta > 0$  tal que

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \theta^2 - |\delta|^2 > 0 , \quad (2.12)$$

el vector  $g$  dado por las fórmulas

$$\begin{aligned} g_1 &= - \frac{(\theta f_1 + \delta f_2)}{\Delta} , \\ g_2 &= \frac{\delta f_1 + \theta f_2}{\Delta} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

y el vector  $f$  determinan una matriz primaria  $R(p)$  del tipo C, donde

$$\begin{aligned} R_{11}(p) &= I_n + \frac{f_1 g_1^*}{p - i\omega_0} + \frac{\bar{f}_1 \bar{g}_1^*}{p + i\omega_0} , \\ R_{12}(p) &= \frac{f_1 g_2^*}{p - i\omega_0} + \frac{\bar{f}_1 \bar{g}_2^*}{p + i\omega_0} , \\ R_{21}(p) &= \frac{f_2 g_1^*}{p - i\omega_0} + \frac{\bar{f}_2 \bar{g}_1^*}{p + i\omega_0} , \\ R_{22}(p) &= I_n + \frac{f_2 g_2^*}{p - i\omega_0} + \frac{\bar{f}_2 \bar{g}_2^*}{p + i\omega_0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Recíprocamente, si la matriz  $R(p)$  con bloques (2.14) es primaria, entonces los vectores  $f$  y  $g$  están vinculados por la relación (2.13), donde  $\bar{f}_2 = e^{i\phi} f_1$ , y  $\theta > 0$  satisface a la desigualdad (2.12), con  $\delta$  dado por (2.11).

y el vector  $f$  determinan una matriz primaria  $R(p)$  del tipo D, donde

$$\begin{aligned}R_{11}(p) &= I_n + p^{-1} f_1 g_1^* , \\R_{12}(p) &= p^{-1} f_1 g_2^* , \\R_{21}(p) &= p^{-1} f_2 g_1^* , \\R_{22}(p) &= I_n + p^{-1} f_2 g_2^* .\end{aligned}\tag{2.16}$$

Recíprocamente, si la matriz  $R(p)$  con bloques (2.16) es primaria, el vector  $f$  es real y el vector  $g$  satisface a las relaciones (2.15), donde  $\theta > 0$ .

Teorema 1, E. Sea  $f$  real. Dado  $\theta > 0$ , el vector  $g$  dado por las relaciones

$$\begin{aligned}g_1 &= -\theta f_1 , \\g_2 &= \theta f_2 ,\end{aligned}\tag{2.17}$$

y el vector  $f$  determinan una matriz primaria  $R(p)$  del tipo E, donde

$$\begin{aligned}R_{11}(p) &= I_n + p f_1 g_1^* , \\R_{12}(p) &= p f_1 g_2^* , \\R_{21}(p) &= p f_2 g_1^* , \\R_{22}(p) &= I_n + p f_2 g_2^* .\end{aligned}\tag{2.18}$$

Recíprocamente, si la matriz  $R(p)$  con bloques dados por (2.18) es primaria, el vector  $f$  es real y el vector  $g$  satisface a las relaciones (2.17), donde  $\theta > 0$ .



### 3. Caracterización de las matrices reales de transferencia.

La matriz de transferencia de un transformador ideal se representa bajo la forma

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t'+t^{-1} & t'-t^{-1} \\ t'-t^{-1} & t'+t^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $t$  es una matriz arbitraria real no singular de  $n \times n$  y  $t'$  denota la matriz traspuesta de  $t$ .

Si definimos la familia de matrices

$$R_{\mathcal{Z}}(p) = \mathcal{Z}^{-1} R(p) \mathcal{Z}, \quad (3.2)$$

donde  $\mathcal{Z}$  está dada por (3.1), podemos comprobar que si  $R(p)$  es una matriz de transferencia primaria reactiva,  $R_{\mathcal{Z}}(p)$  también lo es.

Para concretar, consideremos la matriz correspondiente al caso A. Dada

$$R(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} f g^* + \frac{2\sigma_0}{p-\bar{p}_0} \bar{f} \bar{g}^*,$$

vale, de acuerdo con (3.2), la fórmula

$$R_{\mathcal{Z}}(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} \mathcal{Z}^{-1} f g^* \mathcal{Z} + \frac{2\sigma_0}{p-\bar{p}_0} \mathcal{Z}^{-1} \bar{f} \bar{g}^* \mathcal{Z}. \quad (3.3)$$

Ahora bien,

$$\mathcal{Z} = u T u^*,$$

donde

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}, \quad y$$

$$T = \begin{pmatrix} t' & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

De acuerdo con esto

$$R_{\mathcal{Z}}(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} u T^{-1} u^* f g^* u T u^* + \frac{2\sigma_0}{p-\bar{p}_0} u T^{-1} u^* \bar{f} \bar{g}^* u T u^* .$$

Definamos ahora los vectores

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} u^* f ,$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} u^* g ,$$

$$\psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} t'^{-1} F_1 ,$$

$$\psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} t F_2 ,$$

$$\chi_1 \stackrel{\text{def}}{=} t G_1 ,$$

$$\chi_2 \stackrel{\text{def}}{=} t'^{-1} G_2 .$$

Con estas definiciones obtenemos las relaciones

$$T^{-1} u^* f g^* u T = \begin{pmatrix} t'^{-1} & F_1 \\ t & F_2 \end{pmatrix} (G_1^* t' \quad G_2^* t^{-1}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (\chi_1^* \quad \chi_2^*) .$$

De esta manera la fórmula (3.3) puede escribirse así:

$$R_{\zeta}(p) = I_{2n} + \frac{2\sigma_0}{p-p_0} u \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (\psi_1^* \ \psi_2^*) u^* + \frac{2\sigma_0}{p-\bar{p}_0} u \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} (\bar{\psi}_1^* \ \bar{\psi}_2^*) u^* .$$

No es difícil comprobar que valen las relaciones:

$$\psi_1 = t G_1 = -\frac{1}{\Delta} (\alpha t F_2 - \bar{\beta} t \bar{F}_2) = -\frac{1}{\Delta} (\alpha \varphi_2 - \bar{\beta} \bar{\varphi}_2) ,$$

$$\psi_2 = t'^{-1} G_2 = -\frac{1}{\Delta} (\alpha t'^{-1} F_1 - \bar{\beta} t'^{-1} \bar{F}_1) = -\frac{1}{\Delta} (\alpha \varphi_1 - \bar{\beta} \bar{\varphi}_1) .$$

Para los casos restantes se procede de manera similar. Dada una familia de matrices por medio de la fórmula (3.2), conviene sintetizar aquella matriz de la familia para la cual los vectores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  tengan el mínimo número posible de coordenadas no nulas. Toda otra matriz de la misma familia se realiza conectando a la matriz sintetizada los correspondientes transformadores  $\zeta$  y  $\zeta^{-1}$ . A continuación incluimos una lista de las expresiones posibles más simples para la matriz  $R(p)$ . Estas expresiones satisfacen a las condiciones del Teorema 1 y se han obtenido a partir de resultados consignados en [3], p. 105-106.

#### Caso A 1.

$$f_1^* = (z_1, 0, \dots, 0) , \quad f_2^* = (z_2, 0, \dots, 0) , \quad |z_1| \neq |z_2| .$$

$$R_{11}(p) = \left\{ 1 - \frac{2\sigma_0}{\Delta} \left( \frac{\alpha |z_1|^2 - \bar{\beta} \bar{z}_1^2}{p - p_0} + \frac{\alpha |z_1|^2 - \beta z_1^2}{p - \bar{p}_0} \right) \right\} I \oplus I_{n-1} ,$$

$$R_{12}(p) = -\frac{2\sigma_0}{\Delta} \left( \frac{\bar{\beta} \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \alpha \bar{z}_1 z_2}{p - p_0} + \frac{\beta z_1 z_2 - \alpha z_1 \bar{z}_2}{p - \bar{p}_0} \right) I \oplus 0_{n-1} ,$$

$$R_{21}(p) = -\frac{2\sigma_0}{\Delta} \left( \frac{\alpha \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{\beta} \bar{z}_1 z_2}{p - p_0} + \frac{\alpha \bar{z}_1 z_2 - \beta z_1 z_2}{p - \bar{p}_0} \right) I \oplus 0_{n-1} ,$$

$$R_{22}(p) = \left\{ 1 - \frac{2\sigma_0}{\Delta} \left( \frac{\bar{\beta} \bar{z}_2^2 - \alpha |z_2|^2}{p - p_0} + \frac{\beta z_2^2 - \alpha |z_2|^2}{p - \bar{p}_0} \right) \right\} I \oplus I_{n-1} .$$

El símbolo  $\oplus$  denota la suma directa de matrices y  $0_k$  es la matriz nula de orden  $k \times k$ .

Caso A 2.

$$f_1^* = (z_1, x_1, 0, \dots, 0), f_2^* = (z_2, x_2, 0, \dots, 0), x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2,$$

$$x_1^2 + z_1^2 \neq x_2^2 + z_2^2.$$

$$R_{11}(p) = \left\{ I_2 - \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \bar{\beta} \bar{z}_1 & (\alpha - \bar{\beta}) x_1 \end{pmatrix} - \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \bar{z}_1 - \beta z_1 & (\alpha - \beta) x_1 \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-2},$$

$$R_{12}(p) = - \left\{ \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \bar{z}_2 - \alpha z_2 & (\bar{\beta} - \alpha) x_2 \end{pmatrix} + \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta z_2 - \alpha \bar{z}_2 & (\beta - \alpha) x_2 \end{pmatrix} \right\} \oplus 0_{n-1},$$

$$R_{21}(p) = - \left\{ \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \bar{\beta} \bar{z}_1 & (\alpha - \bar{\beta}) x_1 \end{pmatrix} + \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \bar{z}_1 - \beta z_1 & (\alpha - \beta) x_1 \end{pmatrix} \right\} \oplus 0_{n-2},$$

$$R_{22}(p) = \left\{ I_2 - \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \bar{z}_2 - \alpha z_2 & (\bar{\beta} - \alpha) x_2 \end{pmatrix} - \frac{2\sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta z_2 - \alpha \bar{z}_2 & (\beta - \alpha) x_2 \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-2}.$$

Casos A 3 y A 4. Para obtener  $R(p)$  en estos casos basta tomar, en las expresiones de  $R_{ij}(p)$  del caso A 2,  $x_2 = \bar{x}_1$ .

Caso A 5.

$$f_1^* = (z_1, x_1, x_2, 0, \dots, 0), \quad f_2^* = (z_2, -x_1, x_2, 0, \dots, 0), \quad x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad |z_1| \neq |z_2|.$$

$$R_{11}(p) = \left\{ I_3 - \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \bar{\beta} \bar{z}_1 & (\alpha - \bar{\beta})x_1 & (\alpha - \bar{\beta})x_2 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \bar{z}_1 - \beta z_1 & (\alpha - \beta)x_1 & (\alpha - \beta)x_2 \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-3},$$

$$R_{12}(p) = - \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \bar{z}_2 - \alpha z_2 & (\alpha - \bar{\beta})x_1 & (\bar{\beta} - \alpha)x_2 \end{pmatrix} + \\ + \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta z_2 - \alpha \bar{z}_2 & (\alpha - \beta)x_1 & (\beta - \alpha)x_2 \end{pmatrix} \oplus 0_{n-3},$$

$$R_{21}(p) = - \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \bar{\beta} \bar{z}_1 & (\alpha - \bar{\beta})x_1 & (\alpha - \bar{\beta})x_2 \end{pmatrix} + \\ + \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \bar{z}_1 - \beta z_1 & (\alpha - \beta)x_1 & (\alpha - \beta)x_2 \end{pmatrix} \oplus 0_{n-3},$$

$$R_{22}(p) = \left\{ I_3 - \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-p_0)} \begin{pmatrix} \bar{z}_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \bar{z}_2 - \alpha z_2 & (\alpha - \bar{\beta})x_1 & (\bar{\beta} - \alpha)x_2 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - \frac{2 \sigma_0}{\Delta(p-\bar{p}_0)} \begin{pmatrix} z_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta z_2 - \alpha \bar{z}_2 & (\alpha - \beta)x_1 & (\beta - \alpha)x_2 \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-3}.$$

Caso B.

$$f_1^* = (x_1, 0, \dots, 0), \quad f_2^* = (x_2, 0, \dots, 0), \quad x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad x_1 \neq x_2.$$

$$R_{11}(p) = \left\{ 1 - \frac{2\sigma_0}{p-\sigma_0} \frac{x_1^2}{\alpha} \right\} I \oplus I_{n-1},$$

$$R_{12}(p) = \frac{2\sigma_0}{p-\sigma_0} \frac{x_1 x_2}{\alpha} I \oplus 0_{n-1},$$

$$R_{21}(p) = - \frac{2\sigma_0}{p-\sigma_0} \frac{x_1 x_2}{\alpha} I \oplus 0_{n-1},$$

$$R_{22}(p) = \left\{ 1 + \frac{2\sigma_0}{p-\sigma_0} \frac{x_2^2}{\alpha} \right\} I \oplus I_{n-1}.$$

Caso C 1.

$$f_1^* = (z_1, 0, \dots, 0), \quad f_2^* = (z_2, 0, \dots, 0), \quad |z_1| = |z_2|.$$

$$R_{11}(p) = \left\{ 1 - \frac{\theta |z_1|^2 + \delta \bar{z}_1 z_2}{\Delta (p - i\omega_0)} - \frac{\theta |z_1|^2 + \delta z_1 \bar{z}_2}{\Delta (p + i\omega_0)} \right\} I \oplus I_{n-1},$$

$$R_{12}(p) = \left\{ \frac{\delta |z_1|^2 + \theta \bar{z}_1 z_2}{\Delta (p - i\omega_0)} + \frac{\delta |z_1|^2 + \theta z_1 \bar{z}_2}{\Delta (p + i\omega_0)} \right\} I \oplus 0_{n-1},$$

$$R_{21}(p) = - \left\{ \frac{\theta z_1 \bar{z}_2 + \delta |z_2|^2}{\Delta (p - i\omega_0)} + \frac{\theta \bar{z}_1 z_2 + \delta |z_2|^2}{\Delta (p + i\omega_0)} \right\} I \oplus 0_{n-1},$$

$$R_{22}(p) = \left\{ 1 + \frac{\delta z_1 \bar{z}_2 + \theta |z_2|^2}{\Delta (p - i\omega_0)} + \frac{\delta \bar{z}_1 z_2 + \theta |z_2|^2}{\Delta (p + i\omega_0)} \right\} I \oplus I_{n-1}.$$

Casos C 2 y C 3. La expresión de  $R(p)$  en estos casos se obtiene eligiendo, en el caso C 1,  $z_2 = \bar{z}_1$ .

Caso C 4.

$$f_1^* = (z_1, z_2, 0, \dots, 0), \quad f_2^* = (-z_1, z_2, 0, \dots, 0).$$

$$R_{11}(p) = \left\{ I_2 + \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) z_1}{\Delta(p - i\omega_0)} & \frac{-(\delta + \theta) z_2}{\Delta(p - i\omega_0)} \\ \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{-(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{-(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-2},$$

$$R_{12}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) z_1}{\Delta(p - i\omega_0)} & \frac{(\delta + \theta) z_2}{\Delta(p - i\omega_0)} \\ \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} \right\} \oplus 0_{n-2},$$

$$R_{21}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} -\bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) z_1}{\Delta(p - i\omega_0)} & \frac{-(\delta + \theta) z_2}{\Delta(p - i\omega_0)} \\ \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{-(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{-(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} \right\} \oplus 0_{n-2},$$

$$R_{22}(p) = \left\{ I_2 + \begin{pmatrix} -\bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) z_1}{\Delta(p - i\omega_0)} & \frac{(\delta + \theta) z_2}{\Delta(p - i\omega_0)} \\ \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\delta - \theta) \bar{z}_1}{\Delta(p + i\omega_0)} & \frac{(\delta + \theta) \bar{z}_2}{\Delta(p + i\omega_0)} \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-2}.$$

Caso D 1.

$$f_1^* = (x_1, x_2, 0, \dots, 0), \quad f_2^* = (x_1, x_2, 0, \dots, 0), \quad x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2.$$

$$R_{11}(p) = \left\{ I_2 - \frac{\theta}{p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-2},$$

$$R_{12}(p) = \frac{\theta}{p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \end{pmatrix} \oplus 0_{n-2},$$

$$R_{21}(p) = -\frac{\theta}{p} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \oplus 0_{n-2},$$

$$R_{22}(p) = \left\{ I_2 - \frac{\theta}{p} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \end{pmatrix} \right\} \oplus I_{n-2}.$$

Casos D 2 y D 3. La matriz  $R(p)$  en estos casos se obtiene eligiendo alternativamente  $x_2 = 0$  ó  $x_1 = 0$ .

Casos E 1, E 2 y E 3. La matriz  $R(p)$  se obtiene a partir de los casos D 1, D 2 y D 3 reemplazando  $1/p$  por  $p$ .



4. Realización física de las matrices reales de transferencia de 2n-puertos reactivos.

Las expresiones obtenidas en el párrafo anterior para las matrices  $R(p)$  permiten concluir que éstas pueden representarse de la manera siguiente:

$$R(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) & R_{12}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) \end{pmatrix},$$

donde

$$R_{ij}(p) = R_{ij}^{(k)}(p) \oplus I_{n-k} \quad (i, j = 1, 2),$$

y  $k$  toma los valores 1, 2 ó 3.

Esto permite reducir el problema de la síntesis de matrices reales reactivas de transferencia al problema de hallar los circuitos eléctricos que corresponden a las matrices

$$R^{(k)}(p) = \begin{pmatrix} R_{11}^{(k)}(p) & R_{12}^{(k)}(p) \\ R_{21}^{(k)}(p) & R_{22}^{(k)}(p) \end{pmatrix}$$

Estos circuitos serán 4-polos, 8-polos ó 12-polos según  $k$  valga 1, 2 ó 3.

A continuación damos los valores de los elementos de los circuitos, para cuyo cálculo nos ha sido de esencial ayuda la obra de Belevitch (cf.[7], Capítulo 10).

Definamos

$$\nu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sigma_0}{\alpha} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2).$$

Caso A 1.

Los valores de los elementos del circuito de la figura 5 son:

$$n = (\omega_0 - \nu_0) / (\omega_0 + \nu_0),$$

$$L = \alpha (\omega_0 - \nu_0) / 2 |z_2 - z_1|^2 \sigma_0 \omega_0 ,$$

$$C = n / (\sigma_0^2 + \omega_0^2) L ,$$

$$G = 2 \sigma_0 L .$$

Caso A 2.

Elijamos  $\phi$  de modo que  $e^{-i\phi} \beta$  sea un número real. En tal caso  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \beta e^{-i\phi} / \alpha$  es real. Dado que  $|\beta| < \alpha$ , es  $|\eta| < 1$ . Los valores de los elementos del circuito de la figura 1 son:

$$L_1 = \alpha (1 - \eta \cos \phi) / 2 \sigma_0 (\text{Im}(z_2 - z_1))^2 ,$$

$$L_2 = \alpha^2 (1 - \eta^2) / 4 L_1 \sigma_0^2 (x_2 - x_1) (\text{Im}(z_2 - z_1))^2 ,$$

$$n_1 = [\eta \sin \phi \text{Im}(z_2 - z_1) + (1 - \eta \cos \phi) \text{Re}(z_2 - z_1)] L_1^{-1} (x_2 - x_1)^{-1} (\text{Im}(z_2 - z_1))^{-2} ,$$

$$G_1 = \text{Im}(z_1 + z_2) / \text{Im}(z_2 - z_1) ,$$

$$G_2 = (x_1 + x_2) \text{Im}(z_2 - z_1) / 2 ,$$

$$n_3 = -(\nu_0 - \omega_0) / (x_2 - x_1) \text{Im}(z_1 + z_2) ,$$

$$n_2 = 2 \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) / (x_2 - x_1) \text{Im}(z_1 + z_2) .$$

Caso A 3.

Nuevamente sea  $e^{-i\phi} \beta$  real y  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \beta e^{-i\phi} / \alpha$ . Además, es  $|\eta| < 1$ . Los valores de los elementos del circuito de la figura 2 son:

$$L_1 = \alpha (1 - \eta \cos \phi) / 2 \sigma_0 (\text{Im}(z_2 - z_1))^2 ,$$

$$L_2 = \alpha^2 (1 - \eta^2) L_1^{-1} [4 \sigma_0 x_1 \operatorname{Im}(z_2 - z_1)]^{-2},$$

$$G = x_1 \operatorname{Im}(z_2 - z_1) [2 \sqrt{2} (\sin \phi \operatorname{Im}(z_1 + z_2) - (1 + \cos \phi) \operatorname{Re}(z_1 + z_2))]^{-1},$$

$$n_1 = - [\eta \sin \phi \operatorname{Im}(z_2 - z_1) + (1 - \eta \cos \phi) \operatorname{Re}(z_2 - z_1)] [2 x_1 L_1 (\operatorname{Im}(z_2 - z_1))^2]^{-1},$$

$$n_2 = \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) / x_1 \operatorname{Im}(z_1 + z_2),$$

$$n_3 = (\omega_0 - \nu_0) [(1 + \cos \phi) \operatorname{Re}(z_1 + z_2) - \sin \phi \operatorname{Im}(z_1 + z_2)] / 4 \sqrt{2},$$

$$n_4 = x_1 \operatorname{Im}(z_1 + z_2) [(1 + \cos \phi) \operatorname{Re}(z_1 + z_2) - \sin \phi \operatorname{Im}(z_1 + z_2)] / 2 \sqrt{2}.$$

Caso A 4.

Elijamos  $\psi$  de modo que  $e^{-2i\psi} \beta$  sea real y definamos  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \beta e^{-2i\psi} / \alpha$ . Es, pues,  $|\eta| < 1$ . En tal caso, los valores de los elementos del circuito de la figura 3 son:

$$L_1 = \alpha (1 + \eta) / 4 \sigma_0,$$

$$L_2 = \alpha (1 + \eta) [\cos \psi \operatorname{Re}(z_1 + z_2) - \sin \psi \operatorname{Im}(z_1 + z_2)]^2 / \sqrt{2} 4 \sigma_0,$$

$$G_1 = [\cos \psi \operatorname{Re}(z_1 + z_2) - \sin \psi \operatorname{Im}(z_1 + z_2)] / \sqrt{2},$$

$$G_2 = x_1 \operatorname{Im}(z_1 + z_2),$$

$$n_1 = \cos \psi \operatorname{Im}(z_1 + z_2) + \sin \psi \operatorname{Re}(z_1 + z_2) / 2,$$

$$n_2 = 0,$$

$$n_3 = (\omega_0 - \nu_0) / 2,$$

$$n_4 = \sqrt{2} x_1 \cos \psi / G_1,$$

$$n_5 = [\cos \psi \operatorname{Re} (z_2 - z_1) - \sin \psi \operatorname{Im} (z_2 - z_1)] / \sqrt{2} ,$$

$$n_6 = \operatorname{Im} (\bar{z}_1 z_2) .$$

Caso A 5.

Sea  $e^{-i\phi} \beta$  real y  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \beta e^{i\phi} / \alpha$  . Es  $|\eta| < 1$ . Los valores de los elementos del circuito de la figura 4 son:

$$L_1 = \alpha (1 - \eta \cos \phi) x_1^2 / \sigma_0 ,$$

$$L_2 = \alpha^2 (1 - \eta^2) x_1^2 (\operatorname{Im} (z_2 - z_1))^2 / L_1 (4 \sigma_0)^2 ,$$

$$n_1 = -x_1 [\eta \sin \phi \operatorname{Im} (z_2 - z_1) + (1 - \eta \cos \phi) \operatorname{Re} (z_2 - z_1)] / 2L_1 ,$$

$$G_1 = -x_1 / x_2 ,$$

$$G_2 = 1 ,$$

$$n_3 = (\nu_0 - \omega_0) x_2 \operatorname{Im} (z_2 - z_1) / 2 ,$$

$$n_2 = \operatorname{Im} (z_1 \bar{z}_2) / x_1 \operatorname{Im} (z_1 + z_2) ,$$

$$n_4 = n_8 = x_2 \operatorname{Im} (z_1 + z_2) ,$$

$$n_5 = -n_6 = x_1 \operatorname{Im} (z_2 - z_1) ,$$

$$n_7 = 0 .$$

Caso B.

Los valores de los elementos del circuito de la figura 6 son:

$$L = (x_1 + x_2) / \sigma_0 (x_2 - x_1) ,$$

$$G = \sigma_0 L .$$

Caso C 1.

Los valores de los elementos del circuito de la figura 7 son:

$$L = (\theta + \delta) / |z_2 - z_1|^2 ,$$

$$C = |z_2 - z_1|^2 / (\theta - \delta) \omega_0^2 ,$$

$$n = 1 + 2 \delta / (\theta - \delta) .$$

Caso C 2.

Los valores de los elementos del circuito de la figura 8 son:

$$L = \theta / 4 |z_1|^2 ,$$

$$C = 1 / \omega_0^2 L .$$

Caso C 3.

Los valores de los elementos del circuito de la figura 9 son:

$$L = 4 |z_1|^2 / \theta \omega_0^2 ,$$

$$C = 1 / \omega_0^2 L .$$

Caso C 4.

Los valores de los elementos del circuito de la figura 10 son:

$$L = \theta / 4 |z_1|^2 ,$$

$$C = 1 / \omega_0^2 L ,$$

$$n = \omega_0 \theta / 2 \operatorname{Im} (z_1 \bar{z}_2) .$$

Caso D 1.

Los valores de los elementos del circuito de la figura. 11 son:

$$L = \theta / 2x_1^2 ,$$

$$G = x_2 / x_1$$

Caso D 2.

En la figura 12 es  $L = \theta / 2x_1^2$  .

Caso D 3.

En la figura 13 es  $C = \theta / 2x_1^2$  .

Caso E 1.

El circuito correspondiente a este caso se obtiene a partir del circuito del caso D 1 reemplazando la bobina L por un condensador de valor  $C = 2x_1^2 / \theta$  .

Casos E 2 y E 3.

Los circuitos se obtienen reemplazando en los casos D<sub>2</sub> y D<sub>3</sub> la bobina por un condensador  $C = 2x_1^2 / \theta$  y el condensador por una bobina  $L = 2x_1^2 / \theta$  .

Una vez calculados los circuitos correspondientes a las matrices de transferencia reales simples, la síntesis de toda matriz de transferencia real reactiva y racional es inmediata. En efecto, sea  $T(p)$  una matriz de transferencia real, reactiva y racional. De acuerdo con el teorema 9 de la parte II, vale la factorización

$$T(p) = U \cdot \prod_{j=1}^n T_j(p) ,$$

donde las  $T_j(p)$  son matrices de transferencia reales simples y U es una matriz de transferencia real constante. Mediante los circuitos diseñados anteriormente es posible sintetizar cada uno de los factores

$T_j(p)$  ( $j= 1, 2, \dots, m$ ). La matriz de transferencia constante  $U$  se sintetiza por medio de transformadores y giradores, a partir de la matriz de cadena  $u$  o  $U u^*$  asociada a ella (cf. Parte II, § 4). La síntesis de la matriz  $T(p)$  se lleva a cabo conectando en tándem los circuitos correspondientes a la matriz  $U$  y a las matrices  $T_j(p)$ .

Umet

has'eleman

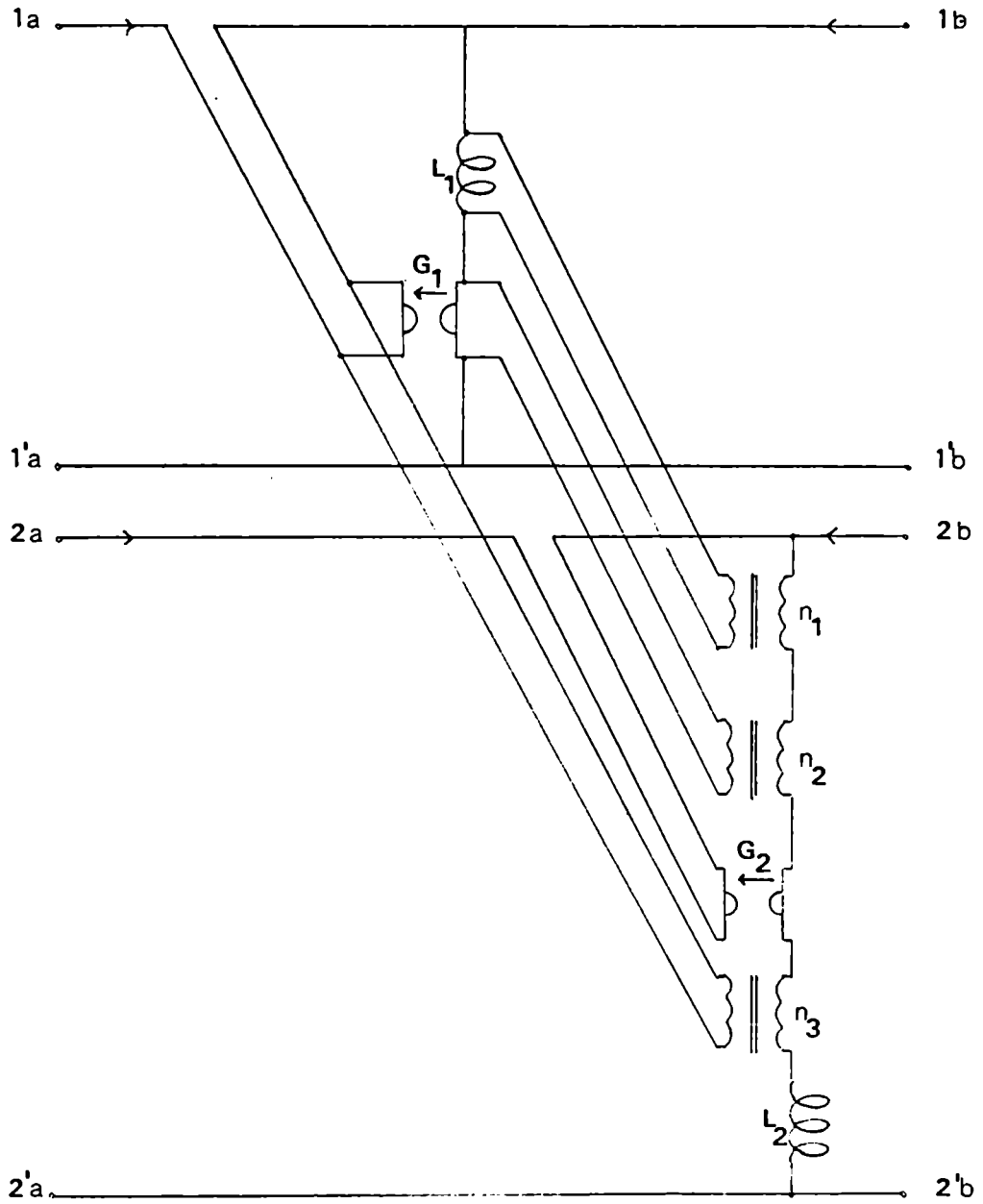


fig.1



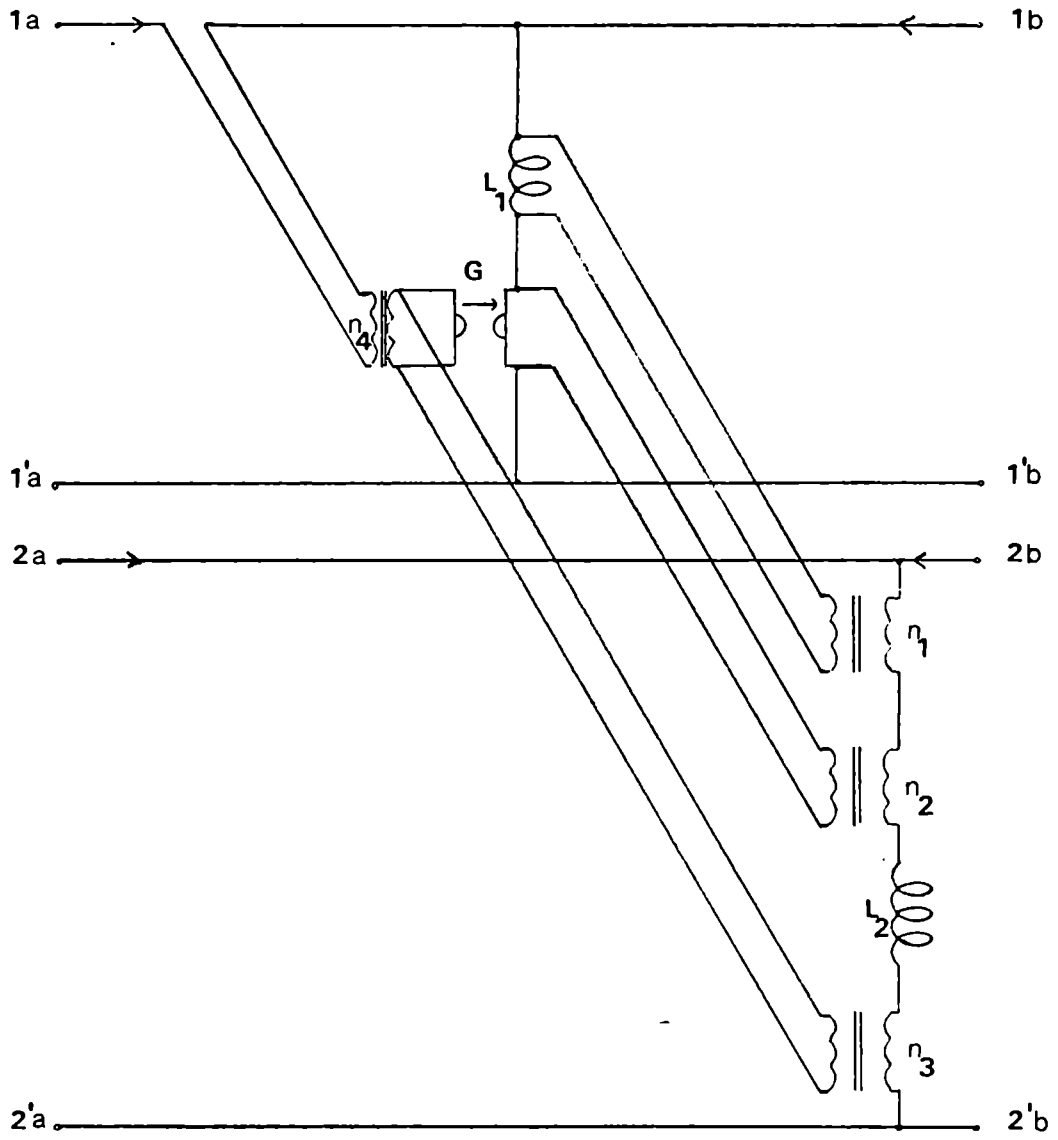


fig.2

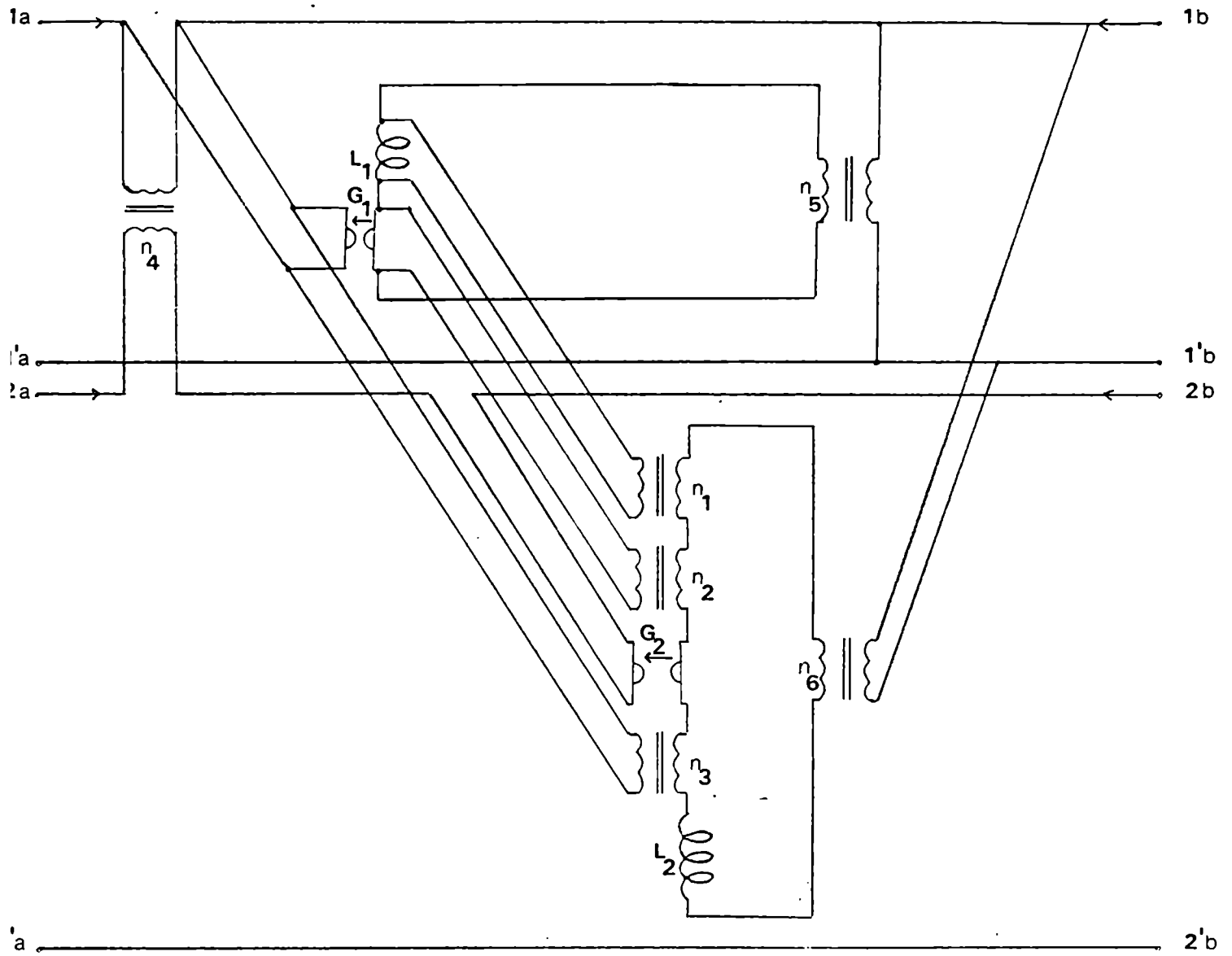


fig.3

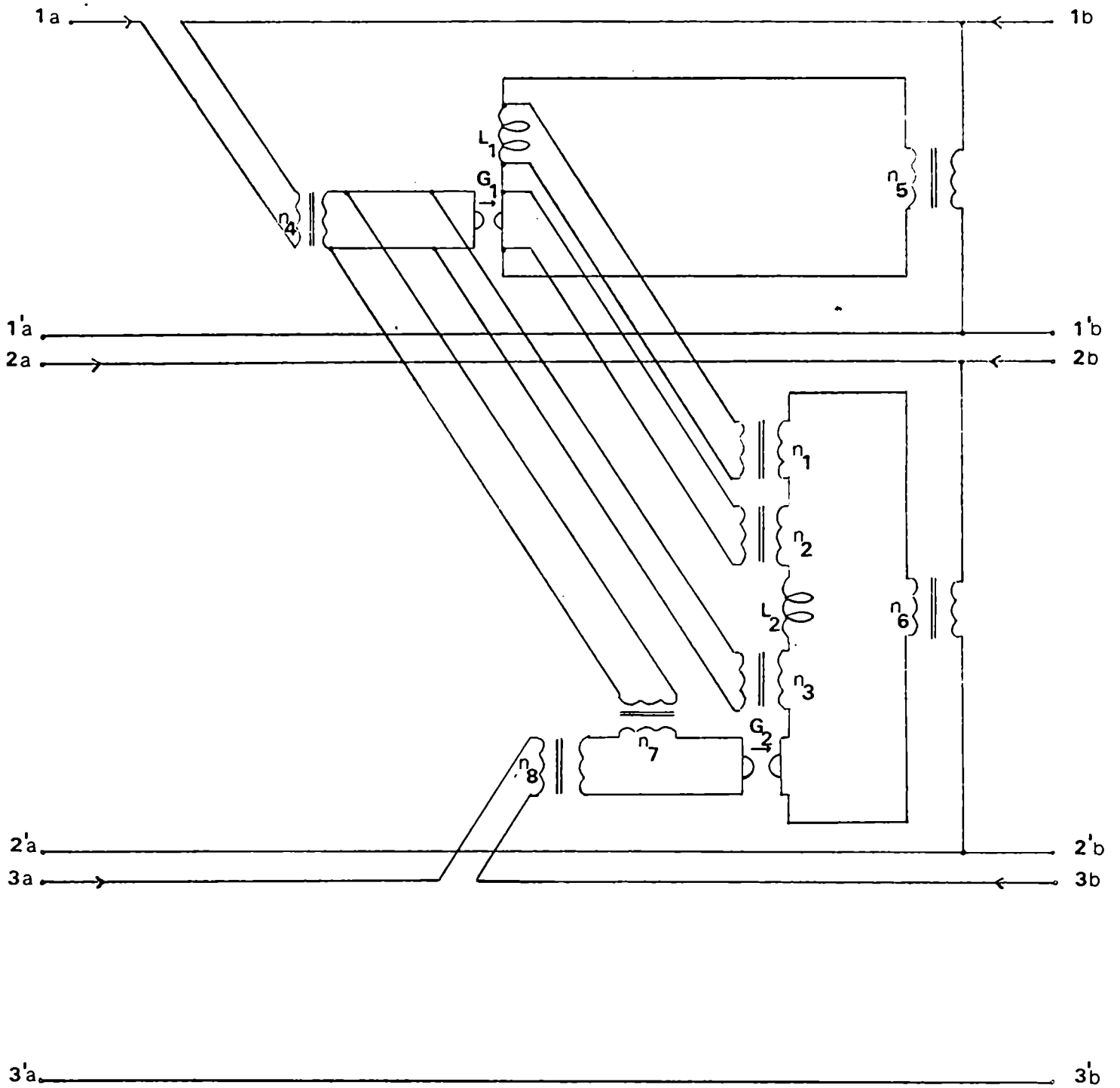


fig. 4

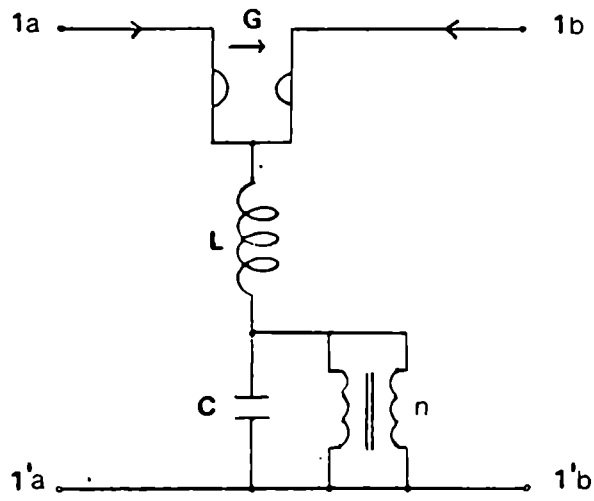


fig. 5

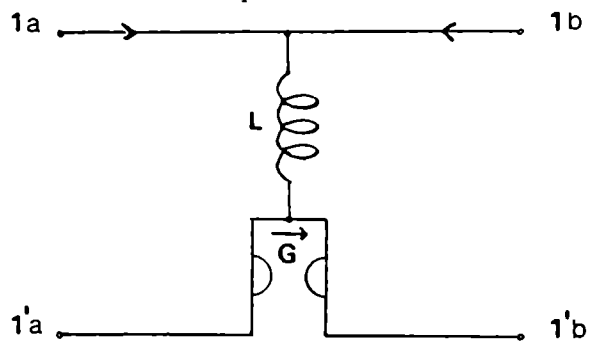


fig. 6

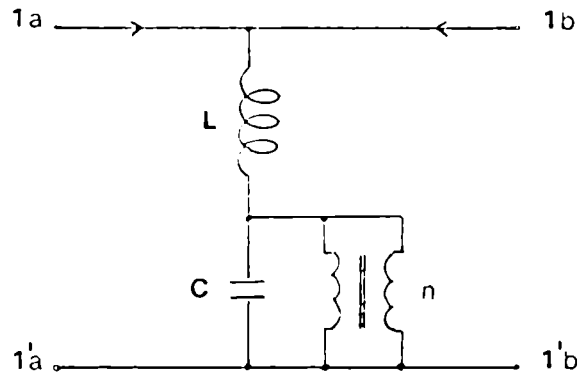


fig.7

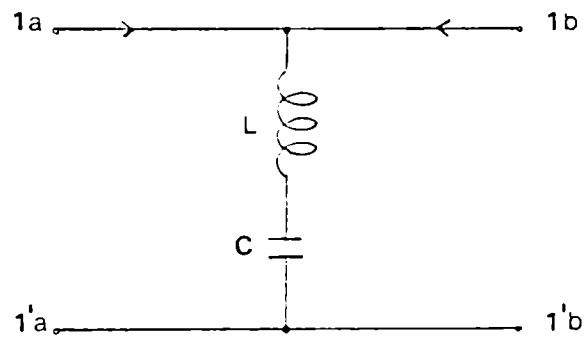


fig.8

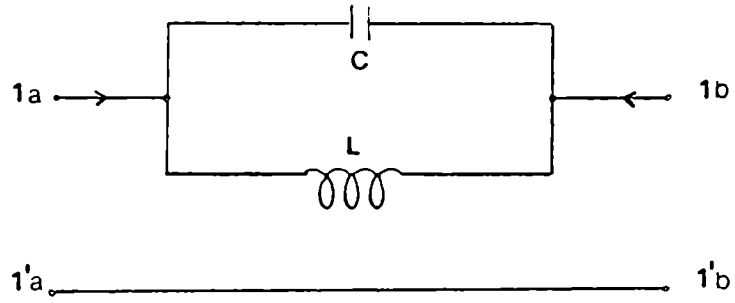


fig. 9

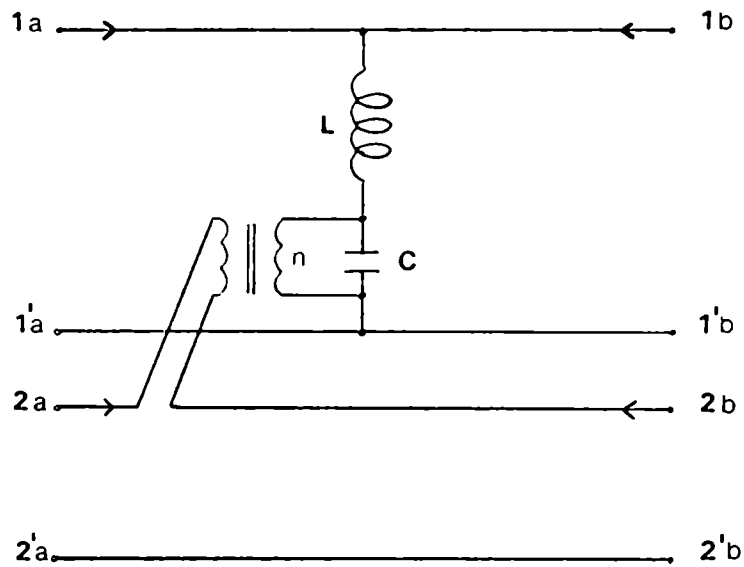


fig. 10

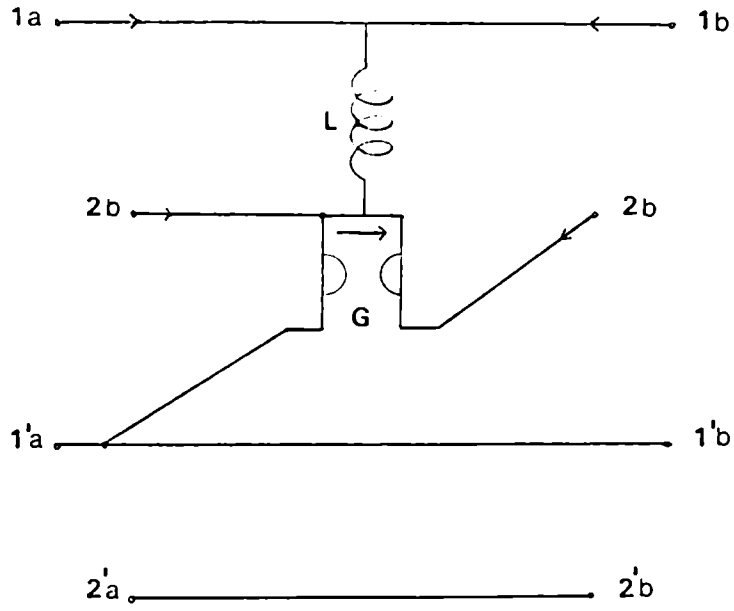


fig.11

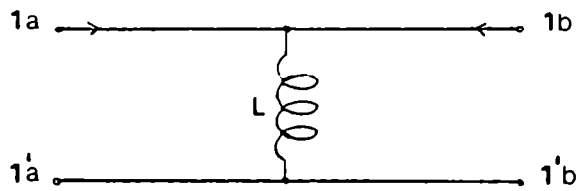


fig.12

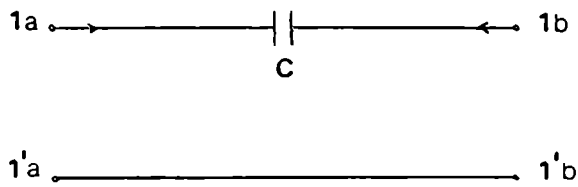


fig.13

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ju. P. Ginzburg, El principio del máximo para funciones operatoriales J-noexpansivas y algunas de sus consecuencias, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika* (1963), N°1 (32), 42-53 (en ruso).
- [2] Ju. P. Ginzburg, Sobre representaciones multiplicativas de funciones operatoriales J-noexpansivas, *Mat. Issled* 2 (1967), n°2, 52-83 (en ruso). Existe traducción inglesa: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 96 (1970), 189-221.
- [3] A.V. Efimov y V.P. Potapov, Funciones matriciales J-expansivas y su papel en la teoría de circuitos eléctricos, *Uspeši Mat. Nauk* 28 (1973), n°1, 65-130 (en ruso).
- [4] V.P. Potapov, La estructura multiplicativa de funciones matriciales J-contractivas, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* 4 (1955), 125-136 (en ruso). Existe traducción inglesa: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 15 (1960), 131-243.
- [5] A. González Domínguez, Propiedades en el contorno de funciones analíticas. *Cursos y Seminarios de Matemática*, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires, 1959.
- [6] A. González Domínguez, On the factorization of scattering matrices, chain matrices and transfer matrices, *Publicaciones del Instituto Argentino de Matemática, Serie I*, N°1 (1974).



- [7] V. Belevitch, Classical Network Theory, Holden Day, 1968.
  
- [8] D.C. Youla, Cascade synthesis of passive n-ports, Technical Documentary Report RADC-TDR-64-332. Rome Air Development Center, 1964.
  
- [9] M.S. Livshitz; Operadores, oscilaciones y ondas, Nauka, Moscú, 1966 (en ruso).
  
- [10] P.R. Halmos, Normal dilations and extension of operators, Summa Brasil. Math., 2 (1950), 125-134.
  
- [11] A.G. Rutkas, Sobre síntesis en cascada de multipolos reactivos, Radiotekhnika i Elektronika, VI, N°11, (1961), 1839-1845 (en ruso).
  
- [12] A. González Domínguez, A factorization theorem for scattering matrices, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications, Stockholm, (1966), 186-187.
  
- [13] M.S. Livshitz y M.Sh. Flekser, Realization of a reactive fourpole as a chain of simple fourpoles, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135 (1960), 542-544 (en ruso).

- [14] A.H. Zemanian, Realizability theory for continuous linear systems, Academic Press, New York, 1972.
  
- [15] R.W. Newcomb, Operator theory of networks: A short exposition, E.E. Dept., U. of Maryland.
  
- [16] R.W. Newcomb, Linear Multiport Synthesis, McGraw-Hill, New York, 1966.