Singularidades genéricas para derivaciones contínuas

Subi, Carlos Samuel

1976

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

SINGULARIDADES GENERICAS PARA DERIVACIONES CONTINUAS

por

Carlos Samuel Subi

Director

Ing. Orlando Eugenio Villamayor

Trabajo de Tesis para optar al Título de Doctor en Ciencias Matemáticas

- 1976 -

A MARTA

PREFACIO

El objeto central del presente trabajo es la clasificación de las singularidades de morfismos de k-álgebras, $\lambda: A \to B$ donde se supone que la característica de k es cero.

Mount y Villamayor resuelven el problema introduciendo la $B \otimes A$-álgebra $J(L(B/k), B \otimes A)$ y definiendo en el esquema de tal anillo los conjuntos de singularidades genéricas, suponiendo algunas hipótesis sobre el anillo B, entre las cuales juega un papel esencial el hecho que $D(B/k)$ sea un B-módulo de tipo finito.

Mediante el uso del módulo de diferenciales M-ádico, $D_c(B/k)$ puede extenderse la noción de conjuntos de singularidades al caso en que $D(B/k)$ no sea de tipo (por ejemplo anillos locales completos). La clasificación genérica es también posible usando el espacio de jets $J(L, B \otimes A)$, análogo algebraico al espacio de jets infinito $J(V,W)$, usado por Boardman para la clasificación genérica de singularidades de aplicaciones diferenciables.

El capítulo 5 tiene por objeto mostrar que un cierto sistema de coordenadas puntual en $M \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots)$ tiene validez en un entorno abierto de dicho conjunto. Esto se lleva a cabo usando las extensiones jacobianas de ideales y mostrando su estrecha relación con el sistema de coordenadas "preparatorio" de Mount-Villamayor.

Quiero expresar mi gratitud al Profesor Ingeniero Orlando E. Villamayor, quien me dirigió en el presente trabajo y orientó en la elaboración del mismo, así como al Instituto Argentino de Matemática que me brindó el lugar y soporte financiero para realizar esta tesis.

Carlos S. Subi
Setiembre de 1976.

Capítulo 1.

La referencia general, para los conceptos y resultados de este capítulo,es el trabajo de J. M. Boardman [1].

Aquí presentamos sólo los puntos fundamentales de la teoría de Boardman a partir de los cuales puede notarse la analogía que presenta el tratamiento algebraico del problema de clasificación de singularidades.

1.1 Espacio de Jets.

Dadas dos variedades diferenciales V y W , pasamos a construir otra variedad diferencial J(V,W) mediante la cual será posible clasificar las singularidades de aplicaciones diferenciables $f : V \to W$.

Dado que el problema es esencialmente local, supondremos que $W = R^w$ y que $V \simeq v$ abierto en $\mathbb{R}^v$.

Si $v \subset V$ es un abierto, F(v) denotará la R-álgebra de funciones suaves (en el sentido C^∞) definidas en v a valores en $\mathbb{R}$.

Si $p \in v$, F(p) será la R-álgebra de gérmenes de funciones suaves definidas en algún entorno de p. F(p) resulta una álgebra local y m_p denotará su ideal maximal, es decir, el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en p.

Sean $\{x_1, \ldots, x_v\}$ y $\{y_1, \ldots, y_w\}$ sistemas de coordenadas de V y W , respectivamente.

Dado n $(0 \leq n \leq \infty)$ se define la relación de equivalencia $\underset{n}{\sim}$ entre los gérmenes de funciones suaves de V en W como sigue:

$f \underset{n}{\sim} g$ si y sólo si
(i) f y g son gérmenes definidos en el punto $p \in V$;
(ii) $f(p) = g(p)$;
(iii) los derivados parciales de orden menor o igual que n, de f y g, coinciden en p.

Llamamos $J^n(V,W)$ al conjunto de clases de equivalencias que resulta por la relación $\underset{n}{\sim}$.

Si $m \geq n$ se tiene una proyección canónica $\Pi^m_n : J^m(V,W) \to J^n(V,W)$.

Si f es representante de un elemento de $J^n(V,W)$, para todo punto p del dominio de f se tienen dos aplicaciones naturales:

$$\Pi^n_v : J^n(V,W) \to V \ , \ f \to p \ ; \quad \Pi^n_w : J^n(V,W) \to W \ , \ f \to f(p) \ .$$

Dada una aplicación $f : U \to W$, donde U es un abierto de V, se asocia la sección jet de f : $J^n f : U \to J^n(V,W)$ que aplica $p \in U$ en la clase del germen de f en p.

El elemento $J^n f(p)$ se llama el n-jet de f en p.

Resultan claras las relaciones de transitividad

$$J^n f = \Pi^m_n . J^m f \quad \text{ y } \quad \Pi^k_n = \Pi^m_n . \Pi^k_m \ , \text{ si } k \geq m \geq n \ .$$

Por un campo vectorial definido sobre el abierto $U \subset V$, entenderemos indistintamente una sección del fibrado tangente sobre U o bien una derivación (R-derivación) del álgebra F(U).

Fijado un sistema de coordenadas $\{x_1, \ldots, x_v\}$ en V, quedan determinadas derivaciones $\{d_1, \ldots, d_v\}$ tales que $d_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Dada un v-upla $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_v)$ de enteros positivos escribiremos

$$d^\sigma = d_1^{\sigma_1} . d_2^{\sigma_2} . \ \ldots \ . d_v^{\sigma_v} \ , \text{ operador sobre } F(v)$$

$$x^\sigma = x_1^{\sigma_1} . x_2^{\sigma_2} . \ \ldots \ . x_v^{\sigma_v} \ , \text{ denotando por } |\sigma| \text{ a la suma } \sum_{i=1}^{v} \sigma_i \ .$$

Damos el siguiente sistema de coordenadas en $J^n(V,W)$, n finito:

Serán las funciones coordenadas X_i , Y_j , $Z_{j,\sigma}$ para $1 \leq i \leq v$, $1 \leq j \leq w$ y $1 \leq |\sigma| \leq n$ definidas por:

$$X_i = x_i . \Pi^n_v \ , \quad i = 1, \ldots, v \ .$$

$$Y_j = Z_{j,0} = y_j . \Pi^n_w \ , \ j = 1,2,\ldots,w.$$

$$Z_{j,\sigma}(f) = (d^\sigma(y_j . f))(p) \ , \quad 1 \leq |\sigma| \leq n \ .$$

con f germen de una aplicación de V en W, definido en p.

Queda definido sobre $J^n(V,W)$ una estructura de variedad diferenciable con la cual las aplicaciones Π_n^m y $J^n f$ resultan suaves entre variedades diferenciales.

Definición 1.1.1

$$J(V,W) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ n\in N}} J^n(V,W)$$

Borel ha demostrado que $J(V,W)$ es isomorfo a $J^\infty(V,W)$. Tal límite inverso se toma a partir de las proyecciones $\Pi_n^m : J^m(V,W) \to J^n(V,W)$ $(m \geqslant n)$, considerando la topología límite inverso.

Definición 1.1.2 Dado $U \subset J(V,W)$ abierto, $\phi : U \to \mathbb{R}$ se dirá suave si $\phi = \phi \,.\, \Pi_n$ localmente, pudiendo n no estar acotado sobre U. Escribimos F(u) el anillo de funciones suaves sobre U , y F(s) el anillo de gérmenes de tales aplicaciones definidas en $s \in J(V,W)$.

Resulta entonces que $F(s) = \lim\limits_{\rightarrow} F(\Pi_n\, s)$, donde $\Pi_n : J(V,W) \to J^n(V,W)$ es la aplicación canónica del límite en $J^n(V,W)$.

Por lo tanto la composición $\phi \,.\, Jf$, $\phi \in F(U)$ y $f: U \to W$, resulta una aplicación suave.

1.2 Campos vectoriales totales.

Definimos los campos vectoriales totales D_i, $i = 1,\ldots,\nu$ sobre $J(V,W)$ por las igualdades:

$D_i X_j = \delta_{ij}$

$D_i Z_{j\sigma} = Z_{j\sigma'}$, donde $\sigma' = (\sigma_1,\ldots,\sigma_i+1 \;,\; \sigma_{i+1},\ \ldots,\sigma_\nu\ )$

Dado un abierto $U \subset J(V,W)$, llamamos campo vectorial total a una combinación lineal de la forma $\sum_{1 \leq i \leq v} \phi_i D_i$, con $\phi_i \in F(U)$.

Nótese que los operadores D_i sólo tienen sentido en $J(V,W)$, resultando de la definición la imposibilidad de considerarlos en $J^n(V,W)$ $(n < \infty)$.

Esta es una de las razones que nos conduce a considerar el espacio de jets infinito $J(V,W)$.

Habiéndose definido los campos vectoriales en término de coordenadas, se quiere caracterizarlos de modo independiente del sistema elegido y definir así un fibrado total global.

Sea $N \subset V$ abierto y $f: N \to W$ una aplicación suave. Por la definición de $Z_{j\sigma}$ resulta la identidad:

$$D_j \phi \cdot Jf = d_j(\phi \cdot Jf)$$

válida para las funciones coordenadas antes definidas y para cualquier $\phi \in F(U)$, $U = \pi_v^{-1}(N)$, por aplicación de la regla de la cadena.

Esto elimina la dependencia mencionada y permite dar la siguiente

Definición 1.2.1

Definimos localmente el fibrado tangente total $\mathbb{D}$ sobre $J(V,W)$ como el fibrado vectorial que tiene a los campos vectoriales totales $\{D_1, \ldots, D_v\}$ como base de secciones.

Los elementos de la fibra sobre $s \in J(V,W)$ se llaman vectores tangentes totales e inducen funcionales lineales $F(\mathbb{S}) \to \mathbb{R}$ que satisfacen la fórmula usual de derivaciones.

El fibrado $\mathbb{D}$ está canónicamente identificado por la fórmula:

$$D\,\phi\,.\,JF = d(\phi\,.\,JF)\ ,\ d \in T_v\ .$$

Si $D = \Pi_v^*(d)$ y $(Jf)^*$ denota la función traspuesta de Jf, se tiene que para toda sección jet Jf se verifica

$$(Jf)^*(\Pi_v^* d) = d\ .$$

Como por definición todo campo vectorial total es, localmente, de la forma $\sum \phi_i D_i$ se tiene:

$$D\,\phi\,.\,Jf = ((Jf)^* D)(\phi.Jf)\ .$$

Dado $U \subset J(V,W)$ abierto, $\phi_1, \phi_2 \in F(U)$ y $D_1, D_2 \in \mathbb{D}$ (sobre U) se define:

$$[D_1, D_2] = D_1 . D_2 - D_2 . D_1\ ,\ \text{de donde}$$

$$[\phi_1 D_1, \phi_2 D_2] = \phi_1 D_1(\phi_2).D_2 - \phi_2 D_2(\phi_1).D_1 + \phi_1\phi_2[D_1, D_2]\ .$$

Los campos vectoriales resultan cerrados bajo este producto y tienen entonces estructura de álgebra de Lie.

1.3 Rango y rango total.

Sea $N \subset V$ abierto, $p \in N$ y $A \subset F(N)$ un subconjunto cualquiera.

Si $T_{v/p}$ denota el espacio tangente a V en p, se define la aplicación : $T_{v/p} \rightarrow \mathbb{R}^A$, que a cada $d \in T_{v/p}$ le asigna $(d(\alpha))_{\alpha \in A} \in \mathbb{R}^A$. Tal aplicación es R-lineal.

Definición 1.3.1 El rango de A en p, $rK_p(A)$, es la dimensión de la imagen de la transformación lineal definida más arriba. Por co-rango de A en p, $Kr_p(A)$, entenderemos la dimensión del núcleo, resultando

$$rK_p(A) + Kr_p(A) = \nu\ .$$

Análogamente, dado $s \in V \subset J(V,W)$ y $A \subset F(U)$ queda definida la aplicación lineal

$$D/_s \to R^A .$$

<u>Definición 1.3.2</u> Rango total de A en s, $trk_s(A)$ será la dimensión de la imagen de esta última transformación lineal y corango total, $tkr_s(A)$, la dimensión de su núcleo. Aquí también vale

$$trk_s(A) + tkr_s(A) = \nu = \dim V.$$

<u>Lema 1.3.3</u> Sea $s \in U \subset J(V,W)$, $p = \Pi_v(s)$ y $f:N \to W$ aplicación suave tal que $p \in N$ y $(Jf)(p) = s$. Si $A \subset F(U)$ se tiene también que $(Jf)^*A \subset F((Jf)^{-1}(U))$. Entonces

$$trk_s(A) = rk_p((Jf)^*A)$$

y $$tkr_s(A) = kr_p((Jf)^*A) \quad .$$

<u>Demostración</u>: resulta de la fórmula $D_i \phi .Jf = di(\phi .Jf)$ #

<u>Definición 1.3.4</u> Sea $U \subset J(V,W)$ abierto. Una familia $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\} \subset F(U)$ se dirá totalmente independiente en $s \in U$ si el rango total de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ en s es k. Se dirá totalmente independiente en U si lo es en cada punto $s \in U$.

Es claro que $k \leqslant \nu = \dim V$.

<u>Lema 1.3.5</u> Sea $U \subset J(V,W)$ abierto, y $\{\phi_1, \ldots, \phi_v\}$ un conjunto totalmente independiente en U.

Entonces existen campos vectoriales $D_1, D_2, \ldots, D_v$ sobre U unívodamente determinados por las condiciones

$$D_i \phi_j = \delta_{ij}, \; 1 \leqslant i, j \leqslant \nu.$$

<u>Demostración</u>. Suponemos U suficientemente pequeño como para que el

fibrado total sobre U admita una base $\{\partial_1,\ldots,\partial_v\}$.

Por hipótesis el determinante de la matriz $(\partial_i\phi_j)$no se anula en ningún punto de U. Sea (α_{ij}) la matriz inversa.

Si definimos $D_i = \sum_j \alpha_{ij}\partial_j$, éstos resultan los únicos campos vectoriales totales verificando $D_i\phi_j = \delta_{ij}$. La unicidad asegura la existencia de campos vectoriales totales D_i , $i = 1,\ldots, u$, definidos globalmente en el abierto en cuestión y verificando las relaciones requeridas. #

<u>Lema 1.3.6</u> Sea $Q \subset J(V,W)$ una subvariedad, $p \in V$, $f : V \to W$ una aplicación suave tal que Jf es transversal a Q en p.

$f(p) = q$ y $Jf(p) = s \in Q$. Cerca de p , $Z = (Jf)^{-1}(Q)$ es una subvariedad de V .

Si $a \subset F(s)$ es el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en Q, entonces:

$$\dim \ker(f/_Z)_* = tkr_s(a + \Pi_W^* m_q),$$

donde $q = f(p)$ y $(f/_Z)_*: T_{Z/p} \to T_{W/q}$ es la diferencial de $f/_Z$; $Z \to W$.

<u>Demostración</u>: Cerca de s , Q es la imagen inversa de una subvariedad de $J^k(V,W)$ para algún k finito.

La transversalidad, junto con el teorema de la función implícita, implican que $(Jf)^*A$ genera el ideal de gérmenes en p, de funciones que se anulan en Z .

Del Lema 3.3 se sigue que:

$$tkr_s(A + \Pi_W^* mq) = kr_p((Jf)^*(A + \Pi_W^* mq)).$$

Pero $d \in (T_V)_p$ anula $(Jf)^* A$ si y sólo si es tangente a Z y anula a $(Jf)^*mq = f^*(mq)$ si y sólo si $d \in Ker(f_*)$.

El lema resulta entonces de $(T_{V/Z})_p \cap Ker(f_*)_p = Ker(f/_Z)_p$. #

1.4 Los subconjuntos de singularidades.

Definición 1.4.1 Dado $A \subset F(U)$, $U \subset J(V,W)$ abierto, se define la k-ésima extensión jacobiana total, $\Delta^k A$, como el ideal de $F(U)$ generado por A y el conjunto de menores de dimensión $n \times n$, $\det(D_i \alpha_j)$, donde D_i son campos vectoriales totales sobre U, $\alpha_j \in A$ $(1 \leq i, j \leq n)$ y $n = v - k + 1$. Por convención $\Delta^{v+1} A = F(U)$.

Como siempre $v = \dim V$ y $D \in \mathcal{D}$ = fibrado tangente total sobre $J(V,W)$.

Consecuencia inmediata de esta definición y conceptos antes introducidos es el siguiente

Lema 1.4.2 Sea $s \in U$ y $A \subset m_s$. Entonces

$$\operatorname{tkr}_s A \geq k \quad \text{si y sólo si} \quad \Delta^k A \subset m \quad . \qquad \#$$

Sea $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ una n-upla de enteros positivos; diremos que I tiene longitud n,

Nos proponemos definir un subconjuntos Σ^I del espacio de jets $J(V,W)$, para cada sucesión I.

La siguiente definición es motivada por el lema precedente y el Lema 1.3.6.

Definición 1.4.3 Sea $s \in J(V,W)$, $q = \Pi_w(s)$, m el ideal maximal de $F(q)$. Definimos $\Sigma^I \subset J(V,W)$ como:

$$s \in \Sigma^I \text{ si y sólo si } \begin{cases} \operatorname{tkr}_s mq = i_1 \\ \operatorname{tkr}_s \Delta^{i_1} mq = i_2 \\ \operatorname{tkr}_s \Delta^{i_2}\Delta^{i_1} mq = i_3 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \operatorname{tkr}_s \Delta^{i_{n-1}} \cdots \Delta^{i_2} \Delta^{i_1} mq = i_n \end{cases}$$

Nota: (i) El espacio de Jets $J(V,W)$ queda partido según los subconjuntos Σ^I, es decir: para todo $s \in J(V,W)$, existe una única sucesión $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ tal que $s \in \Sigma^I$.

(ii) Por otra parte, $\Sigma^I = \phi$ a menos que

(a) $i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \ldots \geq i_{n-1} \geq i_n \geq 0$

(b) $u \geq i_1 \geq u-w$

(c) Si $i_1 = u-w$, entonces $i_1 = i_2 = \ldots = i_n$.

(a) Resulta del hecho de tener una sucesión de ideales crecientes y por tanto la sucesión de corangos totales debe decrecer (en sentido amplio).

(b) Es claro que $w \geq i_1$. Por otra parte, mq puede ser generado por W elementos lo que muestra que $trk_s\, mq \leq w$ y por lo tanto $tkr_s\, mq \geq u-w$.

(c) Si $i_1 = u-w$, $\Delta^{u-w} mq = F(U)mq$, donde U es un abierto que contiene s, y puede verse que tiene el mismo corango total y extensiones jacobianas totales que mq, de donde la sucesión I se estabiliza.

Definición 1.4.4 Dada una aplicación (suave) $f: V \to W$, definimos $\Sigma^I(f) \subset V$ como $(Jf)^{-1}(\Sigma^I)$, para cada u-upla I donde $Jf: V \to J(V,W)$ es la sección jet. Nótese que $\Sigma^I(f)$ poseen la misma propiedad de partir V, como la tenían los conjuntos Σ^I en $J(V,W)$.

Si se toma $n = 1$, resulta que $p \in \Sigma^i(f)$ si y sólo si $\dim \ker f_* = i$, donde $f_*: T_{V/p} \to T_{W/f(p)}$ es la aplicación diferencial de $f: V \to W$ en p.

CAPITULO 2

2.1 El módulo diferencial m-ádico $D_c(B/k)$.

2.2 Invariantes de Fitting.

2.3 Definición de singularidades de un morfismo de anillos.

La rererencia para 2.1 es fundamentalmente el trabajo de Y. Nakai y S. Suzuki [9] en el que introducen los módulos diferenciales m-ádicos, así como las propiedades detalladas en el apartado.

En lo que respecta al módulo diferencial (ordinario) puede verse [8] . Asímismo en [5] se estudian dichos módulos, como caso particular de los módulos diferenciales de orden superior que factorizan derivados de orden superior.

En 2.2 se presenta la propiedad fundamental de los ideales invariantes de Fitting. Su demostración, así como otros resultados relacionados con estos invariantes, puede verse en [4] .

Finalmente, en 2.3 introducimos la noción de los conjuntos de singularidades asociados a un morfismo $\lambda : A \to B$, que está basada en la dada por Mount y Villamayor en [6].

La definición de los conjuntos de singularidades de un morfismo de k-álgebras, $\lambda : A \to B$, tiene sentido cuando el B-módulo diferencial D(B/k) es de tipo finito [6] . Extenderemos este concepto al caso en que B es local con radical m , y D(B/k) no necesariamente de tipo finito; la condición de finitud requerida se supondrá en el B-módulo diferencial m-ádico D_c (B/k), objeto un poco más particular que D(B/k).

2.1 El módulo diferencial m-ádico D (B/k).

2.1.1 Salvo mención explícita, todos los anillos se suponen commutativos con unidad.

Sea B un anillo, $m \subset B$ un ideal.

Consideraremos sobre B la topología m-ádica, que hace de B un anillo topológico, y que tiene como base de entornos del cero a los ideales m^r $(r = 1,2,...)$ B se dirá entonces un anillo m-ádico.

Si E es un B-módulo y B un anillo m-ádico, consideramos en E la topología m-ádica cuyo sistema fundamental de entornos del cero es la familia de submódulos $m^r.E$ $(r = 1,2,...)$.

El módulo E , equipado con esta topología, se dirá un B-módulo m-ádico.

E se dice separado si $\bigcap_{r \geq 1} m^r E = (0)$.

Los anillos topológicos a considerarse se supondrán espacios topológicos Hausdorff (separados) o sea $\bigcap_{r \geq 1} m^r = (0)$, a menos que se especifique lo contrario.

Notemos que, según un teorema de Krull, si B es un anillo local noetheriano m-ádico, con radical m, entonces B resulta Hausdorff.

2.1.2 Veamos cómo se obtiene el módulo de diferenciales de una A-álgebra B.

Se define $I_A(B)$ por la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to I_A(B) \to B \underset{A}{\otimes} B \overset{\mu}{\to} B \to 0 ,$$

donde $\mu(b \otimes b') = bb'$.

Por ser B commutativo, μ resulta un morfismo de A-álgebras.

Se comprueba que $I_A(B)$ es la A-subálgebra de $B \underset{A}{\otimes} B$, generada (como A-álgebra) por los elementos de la forma $b \otimes 1 - 1 \otimes b$, $b \in B$.

Sea $T_{B/A}: B \to I_A(B)$ la aplicación definida por $T_{B/A}(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b$. Se verifica que $T_{B/A}$ tiene la siguiente propiedad

$$T_{B/A}(b.b') = b.T_{B/A}(b') + b'.T_{B/A}(b) + T_{B/A}(b).T_{B/A}(b') .$$

El par constituido por la B-álgebra $I_A(B)$ y la aplicación $T_{B/A}: B \to I_A(B)$ tiene la siguiente propiedad universal:

Si R es una B-álgebra y $\tau: B \to R$ es A-lineal verificando:

$$\tau(bb') = b\tau(b') + b'\tau(b) + \tau(b)\tau(b'), \quad b,b' \in B$$

entonces existe uno y sólo un morfismo de B-álgebras (salvo B-isomorfismos) $\tau^* : I_A(B) \to R$ tal que $\tau^* . T_{B/A} = \tau$.

La aplicación τ es lo que en [5] se llama una A-serie de Taylor R-valuada. Los detalles y demostraciones referentes a series de Taylor pueden encontrarse en la referencia mencionada.

Definición 2.1.2.1 $D(B/A) = I_A(B)/I_A(B)^2$, $d_B : B \to D(B/A)$ la aplicación $\Pi \circ T_{B/A}$ donde $\Pi : I_A(B) \to I_A(B)/I_A(B)^2$ es la proyección canónica. D(B/A) es llamado el módulo de A-diferenciales de B y d_B la A-derivación canónica, ya que verifica $d_B(b.b') = b\, d_B(b') + b'\, d_B(b)$

y $d_B(a) = 0$, $a \in A$.

<u>Proposición 2.1.2.2</u> El B-módulo D(B/A) está caracterizado por las siguientes propiedades:

(1) Existe una A-derivación $d_B : B \to D(B/A)$;

(2) D(B/A) está generado, como B-módulo, por $d_B(b)$, $b \in B$;

(3) Si $\delta : B \to M$ es una A-derivación de B en el B-módulo M, existe una única aplicación B-lineal $\delta^* : D(B/A) \to M$ haciendo commutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d_B"'] & M \\ D(B/A) \arrow[ur, dashed, "\delta^*"'] & \end{tikzcd}$$

Supongamos que $\lambda : B' \to B$ sea un morfismo de A-álgebras.

Entonces $d_B . \lambda : B' \to D(B/A)$ es una A-derivación en el B-módulo D(B/A) (D(B/A) se considera B'-módulo a través de λ) .

Luego existe única una aplicación de B'-módulos : $D(B'/A) \to D(B/A)$. De modo que si llamamos $d\lambda : B \otimes_{B'} D(B'/A) \to D(B/A)$, se tiene que tal morfismo de B-módulos resulta único haciendo el siguiente diagrama commutativo:

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda \otimes d_{B'}"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\ B \otimes_{B'} D(B'/A) \arrow[r, "d\lambda"'] & D(B/A) \end{tikzcd}$$

Más aún: puede verse que coker($d\lambda$) tiene la propiedad universal que caracteriza a D(B/B'), usando como derivación canónica a $\Pi . d_B$, donde $\Pi : D(B/A) \to \mathrm{coker}(d\lambda)$.

De modo que todo morfismo de A-álgebras $\lambda : B' \to B$, da origen a una sucesión exacta de B-módulos:

$$B \underset{B'}{\otimes} D(B/A) \xrightarrow[d\lambda]{} D(B/A) \xrightarrow[\Pi]{} D(B/B') \to 0$$

Si S es una parte multiplicativa de B y λ: $B \to BS^{-1}$ es la aplicación canónica, $d\lambda$ resulta un isomorfismo; ie. vale la fórmula:

$$BS^{-1} \underset{B}{\otimes} D(B/A) \simeq D(BS^{-1}/A).$$

En particular si $p \subset B$ es un ideal primo

$$B_p \underset{B}{\otimes} D(B/A) \simeq D(B_p/A) .$$

2.1.3 Supongamos ahora que la A-álgebra B, es un anillo m-ádico.

Siguiendo [9] introducimos la siguiente

Definición 2.1.3.1 $D_c(B/A) = D(B/A)/\bigcap_{r \geq 1} m^r D(B/A)$, B-módulo m-ádico que llamaremos el módulo m-ádico de A-diferenciales de B; $\hat{d}_B$: $B \to D_c(B/A)$ a la composición: $\theta \, . \, d_B$, donde $\theta : D(B/A) \to D_c(B/A)$ es la proyección canónica. Notemos que, por definición, $D_c(B/A)$ es un B-módulo separado.

Proposición 2.1.3.2 $D_c(B/A)$ está caracterizado por la siguiente propiedad universal:

(1) Existe una A-derivación $\hat{d}_B$: $B \to D_c(B/A)$, que llamaremos A-derivación m-ádica canónica de B ;

(2) $D_c(B/A)$ es un B-módulo m-ádico separado;

(3) $D_c(B/A)$ está generado, como B-módulo, por $\hat{d}_B(b)$, $b \in B$;

(4) Si E es un B-módulo m-ádico separado y $\delta : B \to E$ una A-derivación de B en E, existe una única aplicación B-lineal δ^* : $D_c(B/A) \to E$ haciendo commutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\hat{d}_B"'] & E \\ D_c(B/A) \arrow[ur, dashed, "\delta^*"'] & \end{tikzcd}$$

En particular el módulo de A-diferenciales (0)-ádicos es D(B/A).

De modo que: si D(B/A) es un B-módulo m-ádico separado $D_c(B/A) \simeq D(B/A)$.

Por lo tanto si B es un anillo de Zariski y D(B/A) es finitamente generado como B-módulo, $D(B/A) \simeq D_c(B/A)$.

<u>Nota</u>. por anillo de Zariski entendemos un anillo B m-ádico noetheriano, tal que todo submódulo F de B-módulo finitamente generado E, es cerrado para la m-topología de E .

Sea $\lambda : B' \to B$ morfismo de A-álgebras.

Supongamos que B es un anillo m-ádico

B' es un anillo η-ádico

y que $\lambda(\eta) \subset m$, i.e. λ es una aplicación continua de dichos espacios topológicos.

Esta última condición asegura que si E es un B-módulo m-ádico separado, E resulta un B'-módulo η-ádico separado.

Consideremos la A-derivación $\hat{d}_B \cdot \lambda : B' \to D_c(B/A)$. Por la propiedad universal de $D_c(B'/A)$, existe una única aplicación B'-lineal $D_c(B'/A) \to D_c(B/A)$; llamando $\hat{d}\lambda : B \otimes_{B} D_c(B'/A) \to D_c(B/A)$ se obtiene un diagrama commutativo similar al construido con los módulos diferenciales ordinarios:

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda \otimes \hat{d}_{B'}"'] & B \arrow[d, "\hat{d}_B"] \\ B \otimes_{B'} D_c(B'/A) \arrow[r, "\hat{d}\lambda"'] & D_c(B/A) \end{tikzcd}$$

Nótese que en general el B-módulo $B \otimes_{B'} D_c(B'/A)$ no es separado en la topología m-ádica, aunque $D_c(B'/A)$ lo sea.

Por ser $D_c(B/A)$ separado $\hat{d}\lambda$ puede factorizarse a través de $B \otimes_{B'} D_c(B'/A)/\bigcap_{r \geq 1} m^r[B \otimes_{B'} D_c(B'/A)]$, y llamando $D_{B,B'}$ al conucleo de $\hat{d}\lambda$ se obtiene la siguiente sucesión exacta de B-módulos:

$$B \otimes_{B'} D_c(B'/A)/\bigcap_{r \geq 1} m^r(B \otimes_{B'} D_c(B'/A)) \xrightarrow{\hat{d}\lambda} D_c(B/A) \to D_{B,B'} \to 0$$

En [9] se demuestra que $D_{B,B'}/\bigcap_{r \geq 1} m^r D_{B,B'} \simeq D_c(B/B')$; si, en particular, $D_c(B/A)$ es de tipo finito y B es Zariski, $D_{B,B'} \simeq D_c(B/B')$.

No vale en general una fórmula de localización para el módulo $D_c(B/A)$, análoga a la obtenida para el caso de módulos diferenciales ordinarios. El siguiente resultado será útil más adelante:

<u>Teorema 2.1.3.3</u> Sea B una A-álgebra y supongamos que (B,m) es un anillo Zariski. Sea $I \subset B$ un ideal. Entonces si $D_c(B/A)$ es un B-módulo de tipo finito la siguiente sucesión es exacta:

$$I/I^2 \to (B/I) \otimes_B D_c(B/A) \xrightarrow[\hat{d}\lambda]{} D_c[(B/A)/A] \to 0 \quad ,$$

donde $i(\bar{b}) = 1 \otimes \hat{d}_B(b)$ y $\hat{d}\lambda$ es la deducida de $\lambda : B \to B/I$.

La demostración puede verse en [9] .

<u>2.1.4</u> En este apartado supondremos que los anillos son noetherianos.

Si B es un anillo m-ádico, $\hat{B}$ denotará su completación con respecto a la topología m-ádica y $\hat{m}$ la clausura de m en $\hat{B}$ que resulta ser $m.\hat{B}$.

Es bien conocido que en tales condiciones $\hat{B}$ resulta un anillo

$\hat{m}$-ádico (noetheriano) y separado [10] .

En [9] se demuestran los siguientes resultados:

2.1.4.1 $D_c(\hat{B}/B) = 0$.

2.1.4.2 Supongamos que B es una A-álgebra, vía $\lambda : A \to B$.

Supongamos que A es un anillo η- ádico, B un anillo m-ádico y $\lambda(\eta) \subset m$.

Podemos entonces considerar a $\hat{B}$ como una $\hat{A}$-álgebra vía $\hat{\lambda}:\hat{A} \to \hat{B}$, morfismo deducido de λ pasando a los completados.

Entonces, si $D_c(B/A)$ es de tipo finito y (B,m) es Zariski se tiene que:

$$\hat{B} \otimes_B D_c(B/A) \simeq D_c(\hat{B}/A) \cong D_c(\hat{B}/\hat{A}) \quad .$$

En particular: si A y B son anillos locales, A dominado por B , y $D_c(B/A)$ es de tipo finito, $D_c(\hat{B}/A) \simeq \hat{B} \otimes_B D_c(B/A)$.

2.1.4.3 Supongamos (B,m) y (A,η) anillos locales tales que

(i) B es completo en la topología m-ádica,

(ii) (B,m) domina (A,η) ; i.e. $A \subseteq B$ y $m \cap A = \eta$

(iii) B/m es una extensión finitamente generada (como álgebra) de A/η .

Entonces $D_c(B/A)$ es un B-módulo de tipo finito.

De 2.1.4.3 resulta que si $B = k[[x_1, \ldots, x_n]]$, $m = (x_1, \ldots, x_n) =$ Rad(B) (k cuerpo).

$D_c(B/k)$ es un B-módulo finitamente generado.

Nótese que D(B/k) no es un B-módulo finitamente generado.

Este resultado servirá para generalizar la definición de singularidad de un morfismo de k-álgebras locales $\lambda : A \to B$, suponiendo B completa.

2.1.5 Finalmente los módulos diferenciales pueden usarse para caracterizar anillos locales regulares , según se demuestra en [9].

Teorema 2.1.5.1 Sea R un anillo local completo regular de rango n y sea m su radical. Sea k un cuerpo contenido en R tal que R/m es una extensión finitamente generada separable de dimensión r sobre k.

Entonces $D_c(R/k)$ es un módulo libre de rango $n+r$. Más aún: si $(x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema regular de parámetros de R y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son elementos de R tales que sus clases residuales mod. m son una base de trascendencia separable de R/m sobre k, entonces $\hat{d}_R x_1, \ldots, \hat{d}_R x_n, \hat{d}_R \alpha_1 \ldots \hat{d}_R \alpha_r$ es una base de $D_c(R/k)$.

Teorema 2.5.1 Sea R un anillo local completo con radical m.

Sea $k \subset R$ un cuerpo tal que R/m es una extensión separable y finitamente generada de k.

Supongamos que carac(R) = 0 .

Bajo estas hipótesis, si $D_c(R/k)$ es un módulo libre de rango finito, R es un anillo local regular.

Nota: (i) el teorema 2.1.5.2 vale en característica distinta de cero, suponiendo R un dominio entero, k perfecto y R/m algebraico sobre k.

(ii) Si R es local no completo, pueden usarse los teoremas teniendo en cuenta que R regular $\Leftrightarrow \hat{R}$ regular.

2.1 Invariantes de Fitting.

Sea B un anillo, M un B-módulo de tipo finito.

Sea $0 \to K \to F \to M \to 0$ una sucesión exacta de B-módulos con F libre de rango finito y base $f_1, \ldots, f_n$.

Si K, el módulo de relaciones, está generado por $\sum_j a_{ij} f_j$, entonces el r-ésimo invariante de Fitting de M es el ideal de B generado por los subdeterminantes de dimensión $(n-r) \times (n-r)$ de la matriz (a_{ij}).

Tales ideales no dependen de la sucesión exacta considerada ni de la base elegida, sino sólo del B-módulo M. [2]

El r-ésimo invariante de Fitting de M será denotado por $F_r(M)$, pudiendo ser r cualquier entero no negativo. Es claro que $F_r(M) \subseteq F_{r+1}(M)$.

Estos invariantes tienen la siguiente propiedad fundamental, que usaremos más adelante:

Proposición 2.1. [4]

Sea $h : B \to C$ un morfismo de anillos. Entonces vale la fórmula:

$$F_r(C \otimes_B M) = h(F_r(M)).\, C\ .$$

Si, en particular, h es sobreyectiva: $F_r(C \otimes_B M) = h(F_r(M))$.

2.3 Definición de singularidades de un morfismo de anillos.

2.3.1 En lo que resta del capítulo se supone que

k es un cuerpo de característica cero;

B una k-álgebra local noetheriana con radical m tal que $B/m \simeq$

$k \subset B$;

A es una k-álgebra (no necesariamente local);

$\lambda : A \to B$, un morfismo de k-álgebras, local si A es local.

Finalmente, supongamos que $D_c(B/k)$ es un B-módulo m-ádico de tipo finito y $\hat{d}_B : B \to D_c(B/k)$ la k-derivación canónica.

La composición $\hat{d}_B . \lambda : A \to D_c(B/k)$ es una k-derivación de A .

Por lo tanto existe una única aplicación A-lineal: $D(A/k) \to D_c(B/k)$ que puede extenderse (unívocamente) a una aplicación B-lineal $d\lambda$: $B \otimes_A D(A/k) \to D_c(B/k)$.

Por ser $D_c(B/k)$ de tipo finito, así resulta el módulo coker $(d\lambda)$.

Dado que B es Zariski, $\mathrm{coker}(d\lambda) \simeq D_c(B/A)$; en particular $D_c(B/A)$ es de tipo finito.

Se obtiene entonces la siguiente sucesión exacta:

<u>2.3.1.1</u> $$B \otimes_A D(A/k) \xrightarrow[d\lambda]{} D_c(B/k) \to D_c(B/A) \to 0 \; .$$

<u>2.3.2</u> Siguiendo a [6] introducimos la siguiente

<u>Definición 2.3.2.1</u> Sea $\Delta : B \to M$ una k-derivación de B en el B-módulo de tipo finito M. Supongamos que j es un entero no negativo. Entonces ponemos:

(i) $z_j(M) = F_{j-1}(M)$

(ii) $M(j) = \dfrac{B}{z_j(M)} \otimes_B \dfrac{M}{[\Delta z_j(M)]}$, donde $[\Delta z_j(M)]$ denota el B-submódulo generado por Δb, $b \in z_j(M)$.

Si $i_1, i_2, \ldots, i_r$ es una sucesión de enteros no negativos, definimos una sucesión de módulos e ideales como sigue:

(iii) $z(i_1) = z_{i_1}(M)$

(iv) $M(i_1) = \dfrac{B}{z_{i_1}'(M)} \otimes_B \dfrac{M}{[\Delta z_{i_1}(M)]}$;

(v) Si $M(i_1, i_2, \ldots, i_{r-1})$ y $z(i_1, i_2, \ldots, i_{r-1})$ han sido definidos, entonces $z(i_1, \ldots, i_r) = (z(i_1, \ldots, i_{r-1}) , z_{i_r}(M(i_1, \ldots, i_{r-1})))$ y

$$M(i_1, \ldots, i_r) = \frac{B}{z(i_1, \ldots, i_r)} \otimes_B \frac{M(i_1, \ldots, i_{r-1})}{[\Delta z(i_1, \ldots, i_r)]}$$

Definición 2.3.2.2 Dado $\lambda: A \to B$ como 2.3.1, consideramos la k-derivación m-ádica canónica $\hat{d}_{B/A}: B \to D_c(B/A)$.

Tomando $M = D_c(B/A)$ y $\Delta = \hat{d}_{B/A}$ se tienen, para toda sucesión $i_1, \ldots, i_r$ de enteros no negativos, los módulos $D_c(B/A)(i_1, \ldots, i_r)$ y los ideales $z(i_1, \ldots, i_r)$.

Definimos un subesquema de Spec(B), que denotaremos por $\sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots, i_r)$, como sigue:

(i) El soporte de $\sum(\lambda; i_1, i_2 \ldots, i_r)$, i.e. el espacio topológico subyacente, consiste de todos los $p \in \operatorname{Spec}(B)$ tales que

(1) $p \supset z(i_1, i_2, \ldots, i_r)$

(2) $p \not\supset z(i_1, \ldots, i_j + 1)$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

(ii) La estructura de haz $\sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots, i_r)$ es la de haz de anillos inducida sobre sl subconjunto definido en (i) por el anillo $B/z(i_1, \ldots, i_r)$.

CAPITULO 3

3.1. Algebras de Lie. Envolventes

3.2. Teoremas de extensión de derivaciones

La referencia del presente capítulo es el trabajo de K. Mount y O.E. Villamayor, [6]. Todas las definiciones y resultados que figuran en 3.1 y 3.2 han sido introducidos en tal referencia.

3.1. ALGEBRAS DE LIE. ENVOLVENTES

Sea k un anillo; A una k-álgebra. Se ha definido en el Cap. 2 el A-módulo de k-diferenciales $D(A/k)$ y, en el caso de ser A un anillo m-ádico, el A-módulo de k-diferenciales m-ádico $D_c(A/k)$.

Proposición 3.1.1. Sea (A,m) un anillo m-ádico separado. Entonces

$$\mathrm{Hom}_A(D(A/k),\ A) = \mathrm{Hom}_A(D_c(A/k),\ A)$$

Demostración: Por definición existe un morfismo suryectivo de A-módulos

$$\pi:\ D(A/k) \to D_c(A/k)$$

Se tiene entonces un morfismo inyectivo:

$$\pi^*:\ \mathrm{Hom}_A(D_c(A/k),A) \to \mathrm{Hom}_A(D(A/k),A)$$

Afirmamos que π^* es suryectiva.
En efecto, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(D(A/k),A)$. Por ser (A,m) separado, $\bigcap_{i\geq 1} m^i = 0$
Luego si $x \in \bigcap_{i\geq 1} m^i D(A/k)$, $\varphi(x) \in \bigcap_{i\geq 1} m^i$ de donde $\varphi(x) = 0$
De modo que todo morfismo A-lineal $\varphi:D(A/k) \to A$, se factoriza a través de $D_c(A/k)$, ie existe único $\varphi':D_c(A/k) \to A$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(A/k) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & A \\
D_c(A/k) \arrow[ur, dashed, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego $\pi^*(\varphi') = \varphi'.\pi = \varphi$, de donde la proposición #

$L(A/k)$ de notará al A-módulo, dual de $D(A/k)$ ó bien de $D_c(A/k)$.

$L(A/k)$ tiene además estructura de k-álgebra de Lie poniendo:

$$[d_1,d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1, \quad d_i \in L(A/k), \quad i = 1;2\dots$$

Sea A una k-álgebra

<u>Definición 3.1.2</u>: Dado L, un A-módulo a izquierda que sea una k-álgebra de Lie, diremos que L es una A-k-álgebra de Lie si existe una aplicación $\gamma: L \to L(A/k)$ tal que

(i) γ es morfismo de A-módulos (a izquierda)
(ii) γ es morfismo de k-álgebras de Lie
(iii) Si $a,b \in A$ y $x,y \in L$ se verifica

$$[ax, by] = a(\gamma(x)(b))\, y - b(\gamma(y)(a))\, x + ab[x,y]$$

γ se dirá el A-k-morfismo estructural de L.
Cuando no haya peligro de confusión denotaremos $\gamma(x)(a)$ por xa.
Es claro que $L(A/k)$ es un A-k-álgebra de Lie, con morfismo estructural id.

<u>Definición 3.1.3</u>: Sean A, B y k anillos, donde B es una A-álgebra y A es una k-álgebra. Sea L una A-k-algebra de Lie con morfismo estructural $\gamma: L \to L(A/k)$.
Diremos que B es una L-álgebra si existe una aplicación $\theta: L \to L(B/k)$ de k-álgebras de Lie y de A-lineal tal que para todo $d \in L$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma(d)} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\theta(d)} & B \end{array}$$

sea conmutativo.

(Las flechas verticales son las que dan a B estructura de A-álgebra)
A θ la llamaremos la aplicación L-estructural de B.

<u>Definición 3.1.4</u>: Sean A, k anillos y A una k-álgebra.

Sea (L,γ) una A-k-álgebra de Lie y B una k-álgebra (no unitaria) que es un A-módulo a izquierda.

~~Probemos~~ Diremos que B es una <u>A-k-álgebra envolvente para L</u> si

(i) Existe una aplicación A-lineal $\rho_B : L \to B$ tal que si $a \in A$, $x \in B$

$$\rho_B(d).(a.x) = \gamma(d)(a).x + a\rho_B(d).x$$

(ii) Si $d,d' \in L$, $\rho_B[d,d'] = \rho_B(d).\rho_B(d') - \rho_B(d').\rho_B(d)$

<u>Nota</u>: Si por $[\rho_B(d), \rho_B(d')]$ denotamos $\rho_B(d).\rho_B(d') - \rho_B(d').\rho_B(d)$ resulta:

$$[a\rho_B(d), b\rho_B(d')] = \rho_B[ad,bd'], \quad a,b \in A \text{ y } d,d' \in L$$

<u>Definición 3.1.5</u>: Sea (L,γ) una A-k-álgebra de Lie. Una álgebra envolvente E de L se dirá álgebra envolvente universal de L si dada otra envolvente (B,ρ_B) de L existe una única aplicación $\psi : E \to B$ tal que:

(i) ψ es morfismo de k-álgebras

(ii) ψ es morfismo de A-módulos a izquierda

(iii) $\psi \circ \rho_E = \rho_B$

Resulta claro que si existe una envolvente universal de L, es única salvo isomorfismos.

<u>Teorema 3.1.6</u>: Sea A una k-álgebra y L una A-k-álgebra de Lie. Existe una álgebra envolvente universal de L, que denotaremos $E(L)$. Más aún: $E(L) = T(L)/I$, donde $T(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \otimes_k^j L$ es el álgebra tensorial de L e I es el ideal bilátero de $T(L)$ generado por elementos de la forma $d \otimes d' - d' \otimes d - [d,d']$ con $d,d' \in L$ y elementos $d(a\theta) - \gamma(d)(a).\theta - a\,d\theta$ con $a \in A$, $d \in L$ y $\theta \in T$.

<u>Demostración</u>: Sea B una envolvente de L y $\rho_B : L \to B$ la aplicación asociada. Si $d_1, \ldots, d_r \in L$ entonces $\psi'(d_1 \times \ldots \times d_r) = \rho_B(d_1) \ldots \rho_B(d_r) \in B$ es k-lineal de donde

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\rho_B"] \arrow[d, dashed] & B \\ T(L) \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativa

Como ψ' se anula en I, se factoriza a través de E(L). #

E(L(A/k)) será denotado por E(A/k).

Llamaremos $\Gamma(n,m)$ al conjunto de aplicaciones estrictamente crecientes del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ en $\{1,\ldots,m\}$, n,m enteros no negativos.

Si $\alpha \in F(n,m)$ llamaremos $c\alpha$ a la aplicación de $F(m-n,m)$ que tiene como imagen al complemento de la imagen de α en el conjunto $\{1\ldots m\}$

Si α es suryectiva, $c\alpha$ se define como la función vacía.

<u>Lemas 3.1.7</u>: Sean A,k anillos, A una k-álgebra.

(L,θ) una A-k-álgebra de Lie y (B,ρ_B) una envolvente para L.

Entonces, si $x \in B$, $d_i \in L$ y $a \in A$:

$$\rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1)(a.x) = \sum_{n=0}^{r} \{ \sum_{\alpha\in F(u,r)} [[\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)})]a] \; . \; [(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))\, x] \}$$

donde la expresión $\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)})$ denota la composición de los k-endomorfirmos de A dados por $\theta(d_{\alpha(v)})$ escrito de derecha a izquierda. Es decir $\prod_{j=1}^{r} d_i = d_r \ldots d_1$ y pondremos $\prod_{i\in \text{vacío}} d_i$ = identidad

Demostración: Por inducción en r. Para r = 1

$$\rho_B(d_1).(a.x) = \sum_{n=0}^{1} \sum_{\alpha\in F(n,1)} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{1-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] =$$

$$= a.\rho_B(\prod_{w=1}^{1} d_{c\alpha(w)})x + \sum_{\alpha\in F(1,1)} [(\prod_{v=1}^{1} \theta(d_{\alpha(v)}))a].$$

$$.[(\prod_{w=1}^{0} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] = a\,\rho_B(d_1)x + (\theta(d_1)a) = x$$

Etapa inductiva: (r-1) implica r.

$$[\rho_B(d_r)(\rho_B(d_{r-1})\dots\rho_B(d_1))](ax) =$$

$$= \rho_B(d_r)\{\sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\alpha\in F(u,r-1)} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r-n-1} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x]$$

$$= \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\alpha\in F(n,r-1)} [\theta(d_r).(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[\prod_{w=1}^{r-n-1} \rho_B(d_{c\alpha(w)})x] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\alpha\in F(n,r-1)} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[\rho_B(d_r)(\prod_{w=1}^{r-n-1} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] =$$

$$= \sum_{n=1}^{r} \sum_{\substack{\alpha\ \Gamma(n,r) \\ \alpha(u)=r}} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x \quad +$$

$$+ \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\substack{\alpha\in \Gamma(n,r) \\ \alpha(n)\neq r}} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] \quad =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\in F(0,r) \\ \alpha(0)\neq r}} [(\prod_{v=1}^{0} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] \quad +$$

$$+ \sum_{n=1}^{r-1} \sum_{\alpha\in F(n,r)} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] \quad +$$

$$+ \sum_{n=r} \sum_{\substack{\alpha\in F(r,r) \\ \alpha(r)=r}} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] \quad =$$

$$= \sum_{n=0}^{r} \sum_{\alpha\in F(n,r)} [(\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))a].[(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x].$$

Esto completa la prueba del lema#

<u>Teorema 3.1.8</u>: Sean i una A-k-álgebra de Lie, $\varphi: L \to L(A/k)$ el morfismo estructural.

B una L-álgebra con morfismo $\theta: L \to L(B/k)$.

Entonces $B \otimes_A E(L)$ es una álgebra envolvente para $B \otimes_A L$.

Más aún $B \otimes_A E(L) = E(B \otimes_A L)$

Demostración:

Consideremos el B-módulo $B \underset{A}{\otimes} \sum_{j=1}^{\infty} \otimes_k^j L = B \underset{A}{\otimes} T(L)$

A fin de dar a $B \underset{A}{\otimes} T(L)$ una estructura de k-álgebra, será suficiente definir una aplicación k-bilineal "." de $(B \underset{A}{\otimes} T) \times (B \underset{A}{\otimes} T)$ en $B \underset{A}{\otimes} T$ tal que para los k-generadores de la forma $x = b \underset{A}{\otimes} d_1 \ldots d_r$, $y = \beta \underset{A}{\otimes} \delta_1 \ldots \delta_s$ y $z = \xi \underset{A}{\otimes} \theta_1 \ldots \theta_t$ valga la relación $x.(y.z) = (x.y).z$.

Definimos una aplicación k-bilineal de $(B \underset{A}{\otimes} \otimes_k^r L) \times (B \underset{A}{\otimes} \otimes_k^s L)$ en $\sum_{t=1}^{r+s} B \underset{A}{\otimes} \otimes^t L$ como sigue:

$$(b \underset{A}{\otimes} d_r \ldots d_1)(\beta \underset{A}{\otimes} \delta_s \ldots \delta_1) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(j,r)} b\left(\prod_{v=1}^{j} \theta(d_{\alpha(v)})\right)\beta \underset{A}{\otimes} \left(\prod_{w=1}^{r-j} d_{c\alpha(w)}\right)\delta_s \ldots \delta_1$$

que puede extenderse a una aplicación k-bilineal de $[B \underset{A}{\otimes} T(L)] \times [B \underset{A}{\otimes} T(L)]$ en $[B \underset{A}{\otimes} T(L)]$.

En cuanto a la asociatividad requerida, supongamos que $b \otimes \delta_s \ldots \delta_1$ y $c \otimes \theta_t \ldots \theta_1$ son elementos de $B \underset{A}{\otimes} T$. Si $d_1 \ldots d_r \in L$, entonces:

$$(1 \otimes d_1)[(b \underset{A}{\otimes} \delta_s \ldots \delta_1)(c \underset{A}{\otimes} \theta_t \ldots \theta_1)] =$$

$$= (1 \otimes d_1) \sum_{n=0}^{s} \sum_{\alpha \in F(n,s)} b.\left(\prod_{v=1}^{n} \theta(\delta_{\alpha(v)})\right)c \underset{A}{\otimes} \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c\alpha(w)}\right).\theta_t \ldots \theta_1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{s} \sum_{\alpha \in F(n,s)} \theta(d_1)\left(b.\left(\prod_{v=1}^{n} \theta(\delta_{\alpha(v)})\right)c\right) \underset{A}{\otimes} \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c\alpha(w)}\right)\theta_t \ldots \theta_1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{s} \sum_{\alpha \in F(n,s)} b\left(\prod_{v=1}^{n} \theta(\delta_{\alpha(v)})\right)c \underset{A}{\otimes} d_1 \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c\alpha(w)}\right)\theta_t \ldots \theta_1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{s} \sum_{\alpha\in F(n,s)} (\theta(d_1)b).(\prod_{v=1}^{n} \theta(\delta_{\alpha(v)}))c \underset{A}{\otimes} (\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c\alpha(w)})\theta_t\dots\theta_1 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{s} \sum_{\alpha\in F(n,s)} b(\theta(d_1) \prod_{v=1}^{n} \theta(\delta_{\alpha(v)}))c \underset{A}{\otimes} (\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c\alpha(w)}).\theta_t\dots\theta_1 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{s} \sum_{\alpha\in F(n,s)} b(\prod_{v=1}^{n} \theta(\delta_{\alpha(v)}))c \underset{A}{\otimes} d_1(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c\alpha(w)})\theta_t\dots\theta_1 .$$

Por otra parte:

$$[1 \otimes d_1)(b \underset{A}{\otimes} \delta_s\dots\delta_1)].(c \otimes \theta_t\dots\theta_1) =$$

$$= (d_1 b \underset{A}{\otimes} \delta_s\dots\delta_1 + b \otimes d_1 \delta_s\dots\delta_1)(c \underset{A}{\otimes} \theta_t\dots\theta_1) =$$

$$= (d_1 b \underset{A}{\otimes} \delta_s\dots\delta_1)(c \underset{A}{\otimes} \theta_t\dots\theta_1) + (b \otimes \delta_{s+1}\dots\delta_1)(c \otimes \theta_t\dots\theta_1)$$

donde $\delta_{s+1} = d_1$

Por tanto:

$$[(1 \otimes d_1)(b \underset{A}{\otimes} \delta_s\dots\delta_1)](c \otimes \theta_t\dots\theta_1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \sum_{\alpha\in F(j,s)} (d_1 b)(\prod_{n=1}^{j} \theta(\delta_{\alpha(n)}))c \underset{A}{\otimes} (\prod_{w=1}^{s-j} \delta_{c\alpha(w)})\theta_t\dots\theta_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{s+1}\sum_{\alpha\in\Gamma(j,s+1)} b(\prod_{w=1}^{j}\theta(\delta_{\alpha(w)}))c\odot(\prod_{v=1}^{s+1-j}\delta_{c\alpha(v)})\theta_t\ldots\theta_1 =$$

$$=\sum_{j=0}^{s}\sum_{\alpha\in\Gamma(j,s)}(\theta(d_1)b)(\prod_{n=1}^{j}\theta(\delta_{\alpha(n)}))c\underset{A}{\odot}(\prod_{w=1}^{s-j}\delta_{c\alpha(w)})\theta_t\ldots\theta_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{s+1}\sum_{\substack{\alpha\in\Gamma(j,s+1)\\ \alpha(j)=s+1}} b(\theta(d_1)\prod_{w=1}^{j-1}\theta(\delta_{\alpha(w)}))c\underset{A}{\odot}(\prod_{w=1}^{s-(j-1)}\delta_{c\alpha(w)})\theta_t\ldots\theta_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{s}\sum_{\alpha\in\Gamma(j,s+1),\alpha(j)\leq s} b(\prod_{n=1}^{j}\theta(\delta_{\alpha(n)}))c\underset{A}{\odot} d_1(\prod_{w=1}^{s-j}\delta_{c\alpha(w)})\theta_t\ldots\theta_1 =$$

$$=\sum_{j=0}^{s}\sum_{\alpha\in\Gamma(j,s)}(\theta(d_1)b)(\prod_{v=1}^{j}\theta(\delta_{\alpha(v)}))c\underset{A}{\odot}(\prod_{w=1}^{s-j}\theta(\delta_{c\alpha(w)}))\theta_t\ldots\theta_1 +$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\sum_{\alpha\in\Gamma(j,s)} b(\theta(d_1)\prod_{n=1}^{j}\theta(\delta_{\alpha(n)}))c\underset{A}{\odot}(\prod_{w=1}^{s-j}\delta_{c\alpha(w)})\theta_t\ldots\theta_1 +$$

$$+\sum_{j=0}^{s}\sum_{\alpha\in\Gamma(j,s)} b(\prod_{n=1}^{j}\theta(\delta_{\alpha(n)}))c\underset{A}{\odot} d_1(\prod_{w=1}^{s-j}\delta_{c\alpha(w)})\theta_t\ldots\theta_1.$$

Más generalmente si $\psi = \theta_1 +\ldots+\theta_n$ y $\varphi = \varphi_1 +\ldots+ \varphi_v$, con cada θ_j y φ_i de la forma $\gamma\odot\theta_1\ldots\theta_w$:

$$(1 \otimes d_1)(\varphi.\psi) = (1 \otimes d_1)(\sum_{i,j} \varphi_i \theta_j)$$

$$= (\sum_{i,j} (1 \otimes d_1)\varphi_i)\theta_j = ((1 \otimes d_1)\varphi)\psi.$$

Ahora, si $d_r,\ldots,d_1 \in L$, usando inducción:

$$(1 \otimes d_r\ldots d_1)(\psi.\varphi) = ((1 \otimes d_r)\ldots(1 \otimes d_1))(\psi.\varphi)$$

$$= ((1 \otimes d_r)(1 \otimes d_{r-1})\ldots(1 \otimes d_1))(\psi.\varphi)$$

$$= (1 \otimes d_r)[(1 \otimes d_{r-1})\ldots(1 \otimes d_1)(\psi.\varphi)]$$

$$= (1 \otimes d_r)[((1 \otimes d_{r-1})\ldots(1 \otimes d_1)\psi).\varphi]$$

$$= [(1 \otimes d_r)((1 \otimes d_{r-1})\ldots(1 \otimes d_1)\psi)].\varphi$$

$$= ((1 \otimes d_r)\ldots(1 \otimes d_1)\psi).\varphi$$

De este modo tenemos una estructura de k-álgebra asociativa sobre $B \otimes_A T(L)$. Notemos que se ha visto que

$$(b \otimes d_r\ldots d_1)(\beta \otimes \delta_1\ldots\delta_s) = \sum_j b'_j \otimes \theta_j\, \delta_1\ldots\delta_s,$$ donde $\theta_j \in T(L)$ y $b'_j \in B$.

Supongamos ahora que $R = b \otimes d_r\ldots d_1$, $S = \beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1$ y $d,d' \in L$.
Entonces:

$$R(d.d'-d'.d-[d,d'])\,S = (b \otimes d_r\ldots d_1).(dd'S-d'dS-[d,d']S)$$

$$= (b \otimes d_r\ldots d_1)(dd'(\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1)-d'd(\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1)-[d,d'](\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1))$$

$$= (b \odot d_r \ldots d_1).[\, d(\theta(d')\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 + \beta \odot d'\, \delta_s \ldots \delta_1) -$$

$$- d'(\theta(d)\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 + \beta \odot d\, \delta_s \ldots \delta_1) -$$

$$- \theta(d)\theta(d')\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(d')\theta(d)\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 -$$

$$- \beta \odot [d,d']\delta_s \ldots \delta_1]$$

$$= (b \odot d_r \ldots d_1)[\, \theta(d)\theta(d')\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(d')\beta \odot d\, \delta_s \ldots \delta_1$$

$$+ \theta(d)\beta \odot d'\, \delta_s \ldots \delta_1 + \beta \odot dd'\, \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(d')\theta(d)\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 - \theta(d)\beta \odot d'\, \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(d')\beta \odot d\delta_s \ldots \delta_1 - \beta \odot d'd\, \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(d)\theta(d')\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(d')\theta(d)\beta \odot \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \beta \odot [d,d']\delta_s \ldots \delta_1]$$

$$= (b \odot d_r \ldots d_1)(\beta \underset{\Lambda}{\odot} (dd' - d'd - [d,d'])\delta_s \ldots \delta_1)$$

$$= \sum_n \beta'_n \underset{\Lambda}{\odot} \theta_n (dd' - d'd - [d,d'])\delta_s \ldots \delta_1$$

Más aún, si $\psi \in T(L)$ y $a \in \Lambda$, entonces

$$\rho = R(d(a\psi)-(\varphi(d)a)\psi-ad\psi)S$$

$$= R(d(a\psi)-(\varphi(d)a)\psi-ad\psi)(\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1)$$

$$= R(d(a\psi)(\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1)-((\varphi(d)a)\psi)(\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1)-(ad\psi)(\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1))$$

Supongamos que $\psi = d_r \underset{k}{\odot} \ldots \underset{k}{\odot} d_1$. Así:

$$a\psi = ad_r \underset{k}{\odot} d_{r-1} \underset{k}{\odot} \ldots \underset{k}{\odot} d_1$$

y

$$d(a\psi) = d \odot ad_r \odot \ldots \odot d_1$$

Póngase $\xi = d_{r-1} \odot \ldots \odot d_1$; entonces

$$\rho = R((d \underset{k}{\odot} ad_r)\xi(\beta \underset{A}{\odot} \delta_s \underset{k}{\odot} \ldots \underset{k}{\odot}\delta_1) -$$

$$- (\varphi(d)a)(d_r\xi)(\beta \underset{A}{\odot} \delta_s \underset{k}{\odot}\ldots\underset{k}{\odot} \delta_1)-ad \odot (d_r\xi)(\beta \underset{A}{\odot} \delta_s \underset{k}{\odot}\ldots\underset{k}{\odot} \delta_1))$$

Por expresiones $\xi.(\beta \underset{A}{\odot} \delta_s \underset{k}{\odot}\ldots\underset{k}{\odot} \delta_1)$ son combinaciones lineales de expresiones de la misma forma que $\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1$

Por lo tanto ρ es combinación lineal de expresiones de la forma

$$\rho' = R((d \underset{k}{\odot} ad_r)(\beta \underset{A}{\odot} \delta_s\ldots\delta_1)-(\varphi(d)a)d_r(\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1) -$$

$$- (ad \odot d_r)(\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1))$$

$$= R(\theta(d)\theta(ad_r)\beta \odot \delta_s\ldots\delta_1+\theta(ad_r)\beta \odot d\delta_s\ldots\delta_1+\theta(d)\beta \odot (ad_r)\delta_s\ldots\delta_1 +$$

$$+\ \beta \otimes d(ad_r)\delta_s\ldots\delta_1 - (\varphi(d)a)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 -$$

$$- (\varphi(d)a)\beta \otimes d_r\,\delta_s\ldots\delta_1$$

$$- \theta(ad)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 - \theta(d_r)\beta \otimes (ad)\delta_s\ldots\delta_1$$

$$- \theta(ad)\beta \otimes d_r\,\delta_s\ldots\delta_1 - \beta \otimes (ad)d_r\,\delta_s\ldots\delta_1)$$

$$= R(a\theta(d)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 + (\varphi(d)a)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1$$

$$+ a\theta(d)\beta \otimes d_r\,\delta_s\ldots\delta_1 + \beta \otimes d(ad_r)\delta_s\ldots\delta_1$$

$$- (\varphi(d)a)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 - (\varphi(d)a)\beta \otimes d_r\,\delta_s\ldots\delta_1$$

$$- a(\theta(d)\theta(d_r)\beta) \otimes \delta_s\ldots\delta_1 - a\theta(d)\beta \otimes d_r\,\delta_s\ldots\delta_1 -$$

$$- a\beta \otimes d\,d_r\,\delta_s\ldots\delta_1)$$

$$= R(\beta \otimes d(ad_r)\delta_s\ldots\delta_1 - (\varphi(d)a)\beta \otimes d_r\,\delta_s\ldots\delta_1 - a\beta \otimes d\,d_r\,\delta_s\ldots\delta_1)$$

$$= R[\beta \otimes (d(ad_r)\delta_s\ldots\delta_1 - (\varphi(d)a)d_r\,\delta_s\ldots\delta_1 - (ad)\,d_r\,\delta_s\ldots\delta_1)]$$

Por lo tanto en cada caso un elemento de la forma R y S está en $B \otimes I$, si $\gamma \in I$, donde I es el ideal bilátero de T(L) generado por las relaciones $dd'-d'd-[d,d']$ y $d(a\rho)-(\varphi(d)a)\rho-ad\rho$.
Se sigue que $B \otimes I$ es un ideal en $B \otimes_A T(L)$ con muestra multiplicación.
Luego $B \otimes_A E(L)$ hereda la estructura de k-álgebra de $B \otimes_A T(L)$.

Para completar la demostración debemos mostrar que $B \underset{A}{\otimes} E(L)$ es una envolvente universal de $B \underset{A}{\otimes} L$.

Primeramente, $B \otimes E(L)$ es una álgebra envolvente para $B \otimes L$. La aplicación estructural para $B \otimes L$ está dada por $\varphi(b \underset{A}{\otimes}^{A} d)(\beta) = b(\theta(d)\beta)$.

Si $\rho: B \underset{A}{\otimes} T(L) \to B \underset{A}{\otimes} E(L) = E$ es la proyección al cociente, entonces para $\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1$ en $B \otimes E(L)$, $b \in B$ y $c \otimes d \in B \otimes L$ se sigue que:

$$\rho_{\underset{A}{B\otimes E(L)}}(c\otimes d)(b.\beta\otimes\delta_s\ldots\delta_1) = c((\theta(d)b)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 + b\theta(d)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 + b\beta \otimes d\,\delta_s\ldots\delta_1$$

$$= (\varphi(c \otimes d)b)\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1 + b\rho_{B \underset{A}{\otimes} E(L)}(c \otimes d)(\beta \otimes \delta_s\ldots\delta_1)$$

Más aún:

$$\rho[b \otimes d,\ b' \otimes d'] = \rho(b(\theta(d)b') \otimes d' - b'(\theta(d')b) \otimes d + bb' \otimes [d,d'])$$

$$= \rho(b(\theta(d)b') \otimes d') - \rho(b'(\theta(d')b) \otimes d) + \rho(bb' \otimes [d,d'])$$

$$= \rho(b(\theta(d)b') \otimes d') - \rho(b'(\theta(d')b) \otimes d + \rho(bb' \otimes (dd'-d'd'))$$

ya que $dd'-d'd = [d,d']$ en $E(L)$.

Se observa que ésta última expresión es:

$$\rho(b \otimes d)\rho(b' \otimes d') - \rho(b' \otimes d')\rho(b \otimes d).$$

Finalmente, supongamos que v una álgebra envolvente para $B \underset{A}{\otimes} L$. Si usamos la aplicación $\lambda: d \to \rho_v(1 \otimes d)$, $d \in L$, v resulta una álgebra envolvente para L.

Existe, entonces, una única aplicación $h:E(L) \to v$ de Λ-k-álgebras tal que $h.\rho_{E(L)} = \rho_v$

Podemos extender h, unívocamente, a un morfismo de B-módulos $h':B \underset{A}{\otimes} E(L) \to v$, poniendo $h'(b \underset{\Lambda}{\otimes} \delta) = b.h(\delta)$

Si $d \in L$ y $b \in B$, entonces:

$$h'(\rho_{B \otimes E(L)}(b \otimes d)) = h'(b \otimes \rho_E(d)) = bh(\rho_E(d)) = \rho_v(b \otimes d).$$

A fin de completar la demostración, será suficiente mostrar que h' es un morfismo de B-k-álgebras. Sólo falta ver que es de k-álgebras: como h' es k-lineal bastará ver que

$$h'((b \otimes d_r \ldots d_1)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)) = h'(b \otimes d_r \ldots d_1).h'(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)$$

Pero:

$$h'((b \otimes \rho_E(d_r) \ldots \rho_E(d_1))(\beta \otimes \rho_E(\delta_s) \ldots \rho_E(\delta_1))) =$$

$$= h'[\sum_{n=0}^{r} b. \sum_{\alpha \in F(n,r)} (\prod_{r=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))\beta \otimes (\prod_{w=1}^{r-n} \rho_E(d_{c\alpha(w)}))\rho_E(\delta_s) \ldots \rho_E(\delta_1)]$$

$$= \sum_{n=0}^{r} b \sum_{\alpha \in F(n,r)} (\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))\beta\ h(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_E(d_{c\alpha(w)}))\rho_E(\delta_s) \ldots \rho_E(\delta_1)$$

$$= \sum_{n=0}^{r} b \sum_{\alpha \in F(n,r)} (\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))\beta.(\prod_{w-1}^{r-n} \rho_v(1 \otimes d_{c\alpha(w)}))\rho_v(1 \otimes \delta_s) \ldots \rho_v(1 \otimes \delta_1)$$

$$= b(\rho_v(1 \otimes d_r) \ldots \rho_v(1 \otimes d_1))(\beta\ \rho_v(1 \otimes \delta_s) \ldots \rho_v(1 \otimes \delta_1))$$ por el Lema 1.7.

Luego

$$h'((b \otimes d_r \ldots d_1)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)) = h'(b \otimes d_r \ldots d_1 . h'(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)$$

#

3.2. TEOREMAS DE EXTENSION DE DERIVACIONES

Lema 3.2.1: Sean k,A anillos y supongamos que B es una A-álgebra. Sean: F un A-módulo libre e $i:F \to B$ una aplicación A-lineal, $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ una base de F y $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ un conjunto de elementos de B.

Entonces para toda k-derivación $\delta:A \to B$ existe una única k-derivación $\partial:S_A[F] \to B$ tal que $\partial(a) = \delta(a)$ si $a \in A$, y $\partial(f_\alpha) = b\alpha$, $\alpha \in I$.

Demostración: Dado que F es un A-módulo libre, $S_A[F] = A[f_\alpha]_{\alpha\in I}$, anillo de polinomios en las indeterminadas f_α a coeficientes en A.
Entonces resulta que $D(S_A[F]/A)$ es un $S_A[F]$-módulo libre con base $\{df_\alpha:\alpha \in I\}$ y por lo tanto se tiene la siguiente descomposición de $D(S_A[F]/k)$:

$$D(S_A[F]/k) = [S_A[F] \underset{A}{\otimes} D'(A/k)] \oplus D(S_A[F]/A)$$

Por otra parte, $i:F \to B$ se extiende de modo único a $i':S_A[F] \to B$, definiendo en B una estructura de $S_A[F]$-módulo.
Puede definirse entonces una aplicación $S_A[F]$-lineal de $D(S_A[F]/k)$ en B, que induce a la derivación buscada.
#

Lema 3.2.2: Sean A, k anillos tal que A es una k-álgebra y supongamos que B es una A-álgebra.
Supongamos que: (i) M es un A-módulo y existe $d:A \to B$, k-derivaciones
(ii) $i:M \to B$ aplicación A-lineal
(iii) $\delta:M \to B$ aplicación k-lineal tal que

$$\delta(a.m) = a\delta(m)+(da)i(m), \text{ si } a \in A,\ m \in M.$$

Entonces existe una única k-derivación $\partial : S_A[M] \to B$ tal que $\partial(m) = \delta(m)$, si $m \in M$, y $\partial(a) = da$ si $a \in A$.

Demostración: Sea F un A-módulo libre y $0 \to K \to F \xrightarrow{h} M \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos.
Tal sucesión induce de modo natural a

$$0 \to \langle K\rangle \to S_A[F] \xrightarrow{H} S_A[M] \to 0$$

con H morfismo de A-álgebras y $\langle K\rangle = \ker H$, ideal de $S_A[F]$ generado por La aplicación $i \circ h : F \to B$ induce sobre B una estructura de $S_A[F]$-álgebra. Si $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una base de F, por el lema anterior, existe una única k-derivación $\Delta : S_A[F] \to B$ tal que $\Delta(a) = da$ y $\Delta(f_\alpha) = \delta h(f_\alpha)$
Para completar la demostración, bastará que Δ se factorice a través de H. Si $x \in K$, $P \in S_A[F]$:

$$\Delta(P.x) = \Delta(P).i \circ h(x) + (i \circ H)(P).(\delta \circ h)(x) = 0$$

#

3.2.3: Supongamos que L es una A-k-álgebra de Lie.
B una L-álgebra, con morfismo estructural

$$\theta : L \to L(B/k)$$

Si $\rho_E : L(B/k) \to E(B/k) = E(L(B/k))$ es el morfismo canónico de $L(B/k)$ en su envolvente universal, $\rho_E \circ \theta : L \to E(B/k)$ es A-lineal.
Si $a \in A$ y $x \in E(B/k)$, para $d \in L$ se tiene que:

$$\rho_E \circ \theta(d)(ax) = (\theta(d)(a.1_B)).x + (a.1_B)\, \rho_E(\theta(d)).x =$$

$$= (da.1_B)\, x + (a.1_B)\, \rho_E(\theta(d))x.$$

Además si $d, d' \in L$:

$$\rho_E . \theta [d, d'] = \rho_E [\theta(d), \theta(d')] = \rho_E(\theta(d))\, \rho_E(\theta(d')) - \rho_E(\theta(d'))\, \rho_E(\theta(d))$$

Por tanto $E(B/k)$ es una álgebra envolvente para L. Se sigue que existe un único morfismo A-lineal y de k-álgebras de $E(L)$ en $E(B/k)$, denotado $\epsilon(\theta)$.

En particular, si $d_1, \ldots, d_r \in L$ y $b \in B$:

$$\epsilon(\theta)(\rho_E(d_1) \ldots \rho_E(d_r) b) = \theta(d_1) \ldots \theta(d_r)(b)$$

CAPITULO 4

4.1. Espacio de Jet

4.2. Propiedad universal. Sección jet j_λ

4.3. Singularidades genéricas

La referencia para 4.1 y 4.2 la constituye [6]
En 4.3 se demuestra que el espacio de Jet introducido en [6] sirve para clasificar genéricamente las singularidades de morfismos algebraicos (bajo las hipótesis allí detalladas) definidas en 2.3.

4.1. ESPACIO DE JET

Sean A, B, k anillos, A y B k-álgebras.

Sea L una B-k-álgebra de Lie (Definición 3.1.2.)

E(L) denote el álgebra envolvente universal de L (Definición 3.1.5.)

Definimos en $A \underset{k}{\otimes} E(L) \underset{k}{\otimes} A$ una estructura de $B \underset{k}{\otimes} A$-módulo como sigue:

$$(b \otimes a)(a' \otimes \theta \otimes a'') = aa' \otimes b\theta \otimes a''$$

Definición 4.1.1:

El espacio de jet asociado a B, A será la $B \underset{k}{\otimes} A$-álgebra

$$J(L(B/k),\ B \underset{k}{\otimes} A) = S_{B \underset{k}{\otimes} A}[A \underset{k}{\otimes} E(L) \underset{k}{\otimes} A]/I \ ,$$

donde I es el ideal de $S_{B \otimes A}[A \otimes E(L) \otimes A]$ generado por los elementos:

a) $1 \otimes e \otimes 1$, si $e \in E(B/k)$

b) $1 \otimes \rho_E(d_r)\ldots\rho_E(d_1) \otimes b_1\ b_2 -$

$$- \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \underset{k}{\otimes} \prod_{v=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(v)}) \underset{k}{\otimes} b_1)(1 \underset{k}{\otimes} \prod_{n=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(n)}) \underset{k}{\otimes} b_2) -$$

$$- b_1 \underset{k}{\otimes} \prod_{j=1}^{r} \rho_E(d_j) \underset{k}{\otimes} b_2 - b_2 \underset{k}{\otimes} \prod_{j=1}^{r} \rho_E(d_j) \otimes b_1.$$

Daremos a $J(L(B/k),\ B \underset{k}{\otimes} A)$ estructura de L(B/k)-álgebra a través de un morfismo estructural $\gamma: L(B/k) \to L(J(L(B/k),\ B \otimes A)/k$ que pasamos a construir.

4.1.2. Construcción de γ:

a) Definición de $\gamma(d)$, $d \in L(B/k)$

b) γ resulta B-lineal y de k-álgebras de Lie

a) Sea $d \in L(B/k)$. Definimos

i) $d^*: A \times E(B/k) \times A \to J(L(B/k), A \otimes B)$

$$d^*(a',x,a'') = (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a')(1 \otimes x \otimes a'') + (a' \otimes \rho_E(d).x \otimes a'')$$

d^* es 3-lineal; en efecto:

$$\begin{aligned} d^*(a_1+a_2,x,a'') &= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes (a_1+a_2))(1 \otimes x \otimes a'') + \\ &+ ((a_1+a_2) \otimes \rho_E(d).x \otimes a'') \\ &= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_1)(1 \otimes x \otimes a'') + \\ &+ (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_2)(1 \otimes x \otimes a'') + \\ &+ (a_1 \otimes \rho_E(d) x \otimes a'') + (a_2 \otimes \rho_E(d).x \otimes a'') = \\ &= d^*(a_1,x,a'') + d^*(a_2,x,a'') \end{aligned}$$

De modo similar se comprueba que es k-lineal en las variables x y a". Se tiene entonces unívocamente determinada una aplicación k-lineal:

$$d^*: A \underset{k}{\otimes} E(B/k) \underset{k}{\otimes} A \to J(L(B/k), B \otimes A).$$

ii) Sea $\delta: B \times A \to J(L(B/k), B \otimes A)$ definida por:

$$\delta(b,a) = d(b) \otimes a + 1 \otimes b\, \rho_E(d) \otimes a$$

Se comprueba facilmente que δ es k-lineal de donde se obtiene una aplicación (denotada de igual modo):

$$\delta : B \underset{k}{\otimes} A \to J(L(B/k),\ B \otimes A)$$

Veamos que δ es una k-derivación. Basta verificar

$$\delta((b \otimes a).(b' \otimes a')) = \delta(b \otimes a).b' \otimes a' + (b \otimes a).\delta(b' \otimes a')$$

$$\begin{aligned}
\delta((b \otimes a).(b' \otimes a')) &= \delta(bb' \otimes aa') = \\
&= d(bb') \otimes aa' + 1 \otimes bb'\ \rho_E(d) \otimes aa' = \\
&= bd(b') \otimes aa' + b'd(b) \otimes aa' + \\
&+ (bb' \otimes 1)(a' \otimes \rho_E(d) \otimes a + a \otimes \rho_E(d) \otimes a') \\
&= (b \otimes a)(d(b') \otimes a' + 1 \otimes b'\ \rho_E(d) \otimes a') + \\
&+ (b' \otimes a')(d(b) \otimes a + 1 \otimes b\ \rho_E(d) \otimes a) = \\
&= (b \otimes a).\delta(b' \otimes a') + (b' \otimes a').\delta(b \otimes a)
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

iii) Si $\alpha \in B \otimes A$ y $x \in A \otimes E(B/k) \quad B$, afirmamos que

$$d^*(\alpha.x) = \delta(\alpha).i(x) + \alpha.d^*(x).$$

Basta verificarlo para $\alpha = b \otimes a$ y $x = a_1 \otimes \theta \otimes a_2$:

$$d^*((b \otimes a).(a_1 \otimes \theta \otimes a_2)) = d^*(aa_1 \otimes b\theta \otimes a_2) =$$

$$= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes aa_1)(1 \otimes b\theta \otimes a_2) + (aa_1 \otimes \rho_E(d)(b.\theta) \otimes a_2) =$$

$$= (a \otimes \rho_E(d) \otimes a_1)(1 \otimes b\theta \otimes a_2) + (a_1 \otimes \rho_E(d) \otimes a)(1 \otimes b\theta \otimes a_2) +$$

$$+ (aa_1 \otimes b\rho_E(d)\theta \otimes a_2) + (aa_1 \otimes d(b).\theta \otimes a_2) =$$

$$= (a_1 \otimes \theta \otimes a_2)[(1 \otimes b\rho_E(d) \otimes a) + (d(b) \otimes a)] +$$

$$+ (b \otimes a)[(1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_1)(1 \otimes \theta \otimes a_2) + (a_1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_2)] =$$

$$= (a_1 \otimes \theta \otimes a_2)\delta(b \otimes a) + (b \otimes a)\, d^*(a_1 \otimes \theta \otimes a_2)$$

de donde lo afirmado.

Por el Lema 3.2.2.) existe una única k-derivación

$$d' : S_{B \otimes A}[A \otimes E(B/k) \otimes A] \to J(L(B/k), B \underset{k}{\otimes} A)$$

que coincide con d^* en $A \otimes E(B/k) \otimes A$ y con δ en $B \otimes A$

Veamos ahora que tal derivación se anula en el ideal I de la Definición 4.1.1.

En lo que respecta a elementos de la forma (a), es obvio que d' se anula en ellos.

Sean entonces $d_1,\ldots,d_r \in L(B/k)$ y $a_1, a_2 \in A$;

$$d'(1 \otimes \rho_E(d_r)\ldots\rho_E(d_1) \otimes a_1\, a_2) -$$

$$- d'\Big(\sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{n=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2)\Big) =$$

$$= 1 \otimes \rho_E(d)\rho_E(d_r)\dots\rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2) -$$

$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha\in F(j,r)} (1 \otimes \rho_E(d) \prod_{n=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2) -$$

$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha\ F(j,r)} (1 \otimes \prod_{n=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1)(1 \otimes \rho_E(d) \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2).$$

Si denotamos $d = d_{r+1}$, la última expresión adopta la forma:

$$1 \otimes \rho_E(d_{r+1})\dots\rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2 -$$

$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\substack{\alpha\in F(j,r+1)\\ \alpha(j)=r+1}} (1 \otimes \prod_{n=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2)$$

$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\substack{\alpha\in F(j,r+1)\\ \alpha(j)\ r}} (1 \otimes \prod_{n=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes b_2) =$$

$$= (1 \otimes \rho_E(d_{r+1})\dots\rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2) -$$

$$- \sum_{j=0}^{r+1} \sum_{\alpha\in F(j,r+1)} (1 \otimes \prod_{n=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2) = 0.$$

Se ha construído así una aplicación

$$\gamma : d \to d', \text{ de } L(B/k) \text{ en } L(J(L(B/k),\ B \otimes A)/k)$$

b) γ es B-lineal y de k-álgebras de Lie

i) B-linealidad: $\gamma(b.d) = b\gamma(d)$

Para ver esto, basta mostrar que

$$\gamma(bd)(b' \otimes a') = b\gamma(d)(b' \otimes a')$$

y

$$\gamma(bd)(a' \otimes \theta \otimes a'') = b\gamma(d)(a' \otimes \theta \otimes a'')$$

$$\gamma(bd)(b' \otimes a') = b(db') \otimes a' + 1 \otimes \rho_E(b'bd) \otimes a'$$

$$= (b \otimes 1)[(db' \otimes a') + (1 \otimes \rho_E(b'd) \otimes a')]$$

$$\gamma(bd)(a' \otimes \theta \otimes a'') = (1 \otimes \rho_E(bd) \otimes a')(1 \otimes \theta \otimes a'') + a' \otimes \rho_E(bd) \otimes a''$$

$$= (b \otimes 1)[(1 \otimes \rho_E(d) \otimes a')(1 \otimes \theta \otimes a'') +$$

$$+ (a' \otimes \rho_E(d) \otimes a'')]$$

Se puede, de modo análogo, verificar que $\gamma(d_1+d_2) = \gamma(d_1)+\gamma(d_2)$.

ii) γ es de k-álgebras de Lie:

Supongase $d;d' \in L(B/k)$, $a \in A$, $b \in A$; entonces:

$$[\gamma(d),\gamma(d')](b \otimes a) = \gamma(d)\gamma(d')(b \otimes a)-\gamma(d')\gamma(d)(b \otimes a)$$

$$= \gamma(d)[(d'b \otimes a)+(1 \otimes b\rho_E(d') \otimes a)] - \gamma(d')[(db \otimes a)+(1 \otimes b\rho_E(d) \otimes a)] =$$

$$= dd'b \odot a + 1 \odot (d'b)\rho_E(d) \odot a + 1 \odot \rho_E(d)(b\rho_E(d')) \odot a$$

$$- d'db \odot a - 1 \odot (db)\rho_E(d) \odot a - 1 \odot \rho_E(d')(b\rho_E(d)) \odot a$$

$$= dd'b \odot a + 1 \odot (d'b)\rho_E(d) \odot a + 1 \odot (db)\rho_E(d') \odot a +$$

$$+ 1 \odot b\rho_E(d)\rho_E(d') \odot a$$

$$- d'db \odot a - 1 \odot (db)\rho_E(d') \odot a - 1 \odot (d'b)\rho_E(d) \odot a -$$

$$- 1 \odot b\rho_E(d')\rho_E(d) \odot a$$

$$= dd'b \odot a + 1 \odot b\rho_E(d)\ {}_E(d') \odot a - d'db \odot b - 1 \odot b\rho_E(d')\rho_E(d) \odot a$$

$$= dd'b \odot a - d'db \odot a + 1 \odot b\rho_E[d,d'] \odot a$$

$$= (\gamma[d,d'])(b \odot a)$$

Más aún, si $a,a' \in A$, $x \in E(L)$ entonces:

$$[\gamma(d),\gamma(d')](a \odot x \odot a') = (\gamma(d)\gamma(d') - \gamma(d')\gamma(d))(a \odot x \odot a')$$

$$= (1 \odot \rho_E(d)\rho_E(d') \odot a)(1 \odot x \odot a') +$$

$$+ (1 \odot \rho_E(d) \odot a)(1 \odot \rho_E(d)x \odot a') + (1 \odot \rho_E(d) \odot a)(1 \odot \rho_E(d')x \odot a') +$$

$$+ (a \odot \rho_E(d)\rho_E(d') \odot a') - (1 \odot \rho_E(d')\rho_E(d) \odot a)(1 \odot x \odot a') -$$

$$- (1 \odot \rho_E(d) \odot a)(1 \odot \rho_E(d')x \odot a')$$

$$- (1 \odot \rho_E(d') \odot a)(1 \odot \rho_E(d)x \odot a') - (a \odot \rho_E(d')\rho_E(d)x \odot a')$$

$= (1 \otimes \rho_L[d,d'] \otimes a)(1 \otimes x \otimes a') + (a \otimes \rho_L[d,d'] \otimes a')$

$= \gamma[d,d'](a \otimes x \otimes a')$

Finalmente, como $\gamma(d)(b \otimes 1) = db \otimes 1$, se completa la prueba sobre la estructura de $L(B/k)$-álgebra definida por γ, en $J(L(B/k), B \otimes A)$.

Proposición 4.1.3: En $J(L(B/k), B \otimes A)$ vale la siguiente relación:

$$\gamma(d_r)\ldots\gamma(d_1)(1 \otimes a) = 1 \otimes \rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1) \otimes a.,$$

$$d_1,\ldots,d_r \in L(B/k),\ a \in A.$$

Demostración: Basta recordar que, por definición de γ se tiene:

i) $\gamma(d)(1 \otimes a) = 1 \otimes d \otimes a$

ii) $\gamma(d)(1 \otimes \alpha \otimes a) = 1 \otimes \rho_B(d).\alpha \otimes a$

y aplicar inducción en r.

//

Nota 4.1.4:

Luego, de la proposición precedente y la definición de $J(L(B/k), B \otimes A)$ todo elemento del jet puede expresarse como (la clase de) suma de productos de elementos de la forma $\gamma(d_r)\ldots\gamma(d_1)(1 \otimes a)$, $d_i \in L(B/k)$, $a \in A$, a coeficientes en $B \otimes A$.

4.2. PROPIEDAD UNIVERSAL. SECCION JET DE $\lambda: A \to B$

Teorema 4.2.1: La $B \underset{k}{\otimes} A$-álgebra $J(L(B/k), B \otimes A)$ está univocamente determinada, a menos de isomorfismos de $B \otimes A$-álgebras, por las siguientes propiedades universales:

i) $J(L(B/k), B \otimes A)$ es una $B \otimes A$-álgebra y una $L(B/k)$-álgebra por medio de $\gamma : L(B/k) \to L(J(L(B/k), B \otimes A)/k)$, que hace de $E(J(L(B/k), B \otimes A)/k$ una álgebra envolvente para $L(B/k)$ por $\epsilon(\gamma)$

ii) Si T es una $B \otimes A$-álgebra vía $\lambda : B \otimes A \to T$ y T es una $L(B/k)$-álgebra vía $\theta : L(B/k) \to L(T/k)$, entonces existe un único morfismo de $B \otimes A$-álgebra $j_{\theta,\lambda} : J(L(B/k), B \otimes A) \to T$ tal que para $\alpha \in E(B/k)$, $a \in A$, $b \in B$ se tiene:

$$j_{\theta,\lambda}(\epsilon(\gamma)(\alpha)(b \otimes a)) = (\epsilon(\theta)(\alpha))\, \lambda(b \otimes a).$$

<u>Demostración</u>: denotamos por J a $J(L(B/k), B \otimes A)$.

i) Ya se ha vista que J admite estructura de $L(B/k)$-álgebra por medio de γ, definida en 1.2.
Si $E(J/k)$ es la envolvente universal de $L(J/k)$ y $\rho_J : L(J/k) \to E(J/k)$ el morfismo canónico, la composición $\rho_J . \gamma : L(B/k) \to E(J/k)$ hace de $E(J/k)$ una álgebra envolvente para $L(B/k)$ (2.3. CAP. III).
$\epsilon(\gamma)$ denota la única flecha de B-módulos y k-álgebras haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} L(B/k) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\rho_B"] & L(J/k) \arrow[d, "\rho_J"] \\ E(B/k) \arrow[r, "\epsilon(\gamma)"'] & E(J/k) \end{tikzcd}$$

con lo que queda demostrado i).

ii) Supongamos que T es una $B \otimes A$-álgebra por medio de $\lambda : B \otimes A \to T$ y que T es una $L(B/k)$-álgebra por medio de $\theta : L(B/k) \to L(T/k)$

Denotaremos por $\epsilon(\theta)$ al único morfismo de B-módulos y de k-álgebras tal que $\rho_T . \theta = \epsilon(\theta) . \rho_B$

Sea $\mu : A \times E(B/k) \times A \to T$ la aplicación

$$\mu(a,\alpha\ ,\ a') = \lambda(1 \otimes a)\ ((\epsilon(\theta)\alpha)a')$$

Se comprueba facilmente que μ es k-trilineal y por tanto existe una única aplicación (denotada también por μ):

$$\mu : A \underset{k}{\otimes} E(B/k) \underset{k}{\otimes} A \to T$$

Además μ resulta un morfismo de $B \otimes A$-módulos:

$$\mu[(b \otimes a)(a' \otimes \alpha \otimes a'')] = \mu(aa' \otimes b\alpha \otimes a'') =$$

$$= \lambda(1 \otimes aa').((\epsilon(\gamma)(b\alpha))a'') = \lambda(1 \otimes a).\lambda(1 \otimes a').$$

$$.\ \lambda(b \otimes 1)((\epsilon(\gamma)(\alpha))a'') = \lambda(b \otimes a).\mu(a' \otimes \alpha \otimes a'')$$

Existe por tanto una única extensión de μ a una aplicación de $B \otimes A$-álgebras de $S_{B \otimes A}[A \otimes E(B/k) \otimes A]$ en T, denotada una vez más por μ.

Esta construcción de μ muestra que, si $\alpha \in L(B/k)$ entonces:

$$\mu(db \otimes a + 1 \otimes bd \otimes a) = \lambda(db \otimes a) + b\theta(d)a$$

$$= \theta(d)\ \lambda(b \otimes a).$$

Sean ahora $d_1,\ldots,d_r \in L(B/k)$ y $a_1, a_2 \in A$.

El Lema 3.1.7. muestra que:

$$\theta(d_r)\ldots\theta(d_1)(a_1\ a_2) = \sum_{n=0}^{r}\ \sum_{\alpha\in F(n,r)} (\prod_{v=1}^{n} \theta(d_{\alpha(v)}))b_1.(\prod_{w=1}^{r-n} \theta(d_{c\alpha(w)}))b_2$$

y como además $(1 \otimes x \otimes 1) = 0$, μ se factoriza unívocamente a través de J por medio de una aplicación j.

Si $b \in B$, $a \in A$ y $d_r \ldots d_1 \in L$, entonces:

$$j((\epsilon(\gamma)\rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1))(b \otimes a)) =$$

$$= j(\sum_{n=0}^{r} \sum_{\alpha\in F(n,r)} ((\prod_{v=1}^{n} d_{\alpha(v)})b)(1 \otimes \prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}) \otimes a))$$

$$= \sum_{n=0}^{r} \sum_{\alpha\in F(v,r)} ((\prod_{v=1}^{n} d_{\alpha(v)})b)(\epsilon(\theta) \prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))a$$

$$= \theta(d_r)\ldots\theta(d_1)\lambda(b \otimes a) = \epsilon(\theta)(\rho_T(d_r)\ldots\rho_T(d_1))\lambda(b \otimes a)$$

Dado que $\epsilon(\theta)$ y j son B-lineales, esto muestra que para cada $\alpha \in E(L)$ se tiene:

$$j((\epsilon(\gamma)\alpha)(b \otimes a)) = (\epsilon(\theta)\alpha)\lambda(b \otimes a).$$

Queda completada la prueba de (ii)

#

4.2.2. SECCION JET

Si $\lambda: A \to B$ es un morfismo de k-álgebras, B tiene estructura de $B \otimes A$-álgebra por medio de $1 \otimes \lambda: B \otimes A \to B$, $(1 \otimes \lambda)(b \otimes a) = b.\lambda(a)$. y es $L(B/k)$-álgebra por medio de la identidad, $id: L(B/k) \to L(B/k)$. Denotamos por $j_\lambda: J \to B$ a la única aplicación de $B \otimes A$-álgebras dada por el teorema precedente y será llamada la sección jet de λ.

4.2.3. Si $d_1,\ldots,d_r \in L(B/k)$, $a \in A$ se verifica que

$$j_\lambda(1 \otimes \rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1) \otimes a) = d_r\ldots d_1(\lambda a)$$

En efecto, por Proposición 1.3:

$$1 \otimes \rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1) \otimes a = \gamma(d_r)\ldots\gamma(d_1)(1 \otimes a)$$
$$= \epsilon(\gamma)(d_r\ldots d_1)(1 \otimes a)$$

Luego por la propiedad de j :

$$j_\lambda(1 \otimes \rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1) \otimes a) = j_\lambda(\epsilon(\gamma)(d_r\ldots d_1)(1 \otimes a)) =$$
$$= d_r\ldots d_1(\lambda(1 \otimes a))$$
$$= d_r\ldots d_1(\lambda a).$$

#

4.3. SINGULARIDADES GENERICAS

4.3.1. L denotará el B-módulo L(B/k) y $J = J(L, B \otimes_k A)$.
Sea $\gamma: L \to L(J/k)$ el morfismo estructural que hace de J una L-álgebra. Recordemos que γ es un morfismo de B-módulos y de k-álgebras de Lie. Extendemos γ a una flecha J-lineal:

$$1 \otimes \gamma: J \otimes_B L \to L\,(J/k)$$

Aplicando el functor $\mathrm{Hom}_J(.,\, J)$ y denotando por M^* al dual de un módulo M, se tiene:

$$(1 \otimes \gamma)^t: D(J/k)^{**} \to \mathrm{Hom}_J(J \otimes_B L, J)$$

Sobre el anillo B haremos las siguientes hipótesis:

a) B es local regular m-ádico con radical m.

b) $B/m = k \subset B$, cuerpo de característica cero.

c) $D_c(B/k)$ es de tipo finito.

Se sigue, por teorema 1.5.1. CAP II, que $D_c(B/k)$ es libre de rango finito. Como $\hat{B}$ = completación m-ádica de B, es fielmente plano como B módulo y vale la fórmula $D_c(\hat{B}/k) = \hat{B} \otimes_B D_c(B/k)$ (2.1.4.2), se sigue que $D_c(B/k)$ es libre de rango finito.

Según la proposición 3.1.1., $D_c(B/k)^* = L(B/k)$ de donde $L(B/k)$ es libre de rango finito.

Se tiene entonces que:

$$\mathrm{Hom}_J(J \otimes_B L, J) = \mathrm{Hom}_B(L, J) = J \otimes_B D_c(B/k)^{**}$$

Como todo módulo libre de rango finito es reflexivo se obtiene el isomorfismo

$$\alpha : \mathrm{Hom}_J(J \otimes_B L, J) = J \otimes_B D_c(B/k)$$

Sea $\Gamma : D(J/k) \to D(J/k)^{**}$ el morfismo natural del módulo en su doble dual. Se tiene la siguiente sucesión de J-módulos:

$$D(J/k) \xrightarrow[\Gamma]{} D(J/k)^{**} \xrightarrow[(1 \otimes \gamma)^t]{} \mathrm{Hom}_J(J \otimes L, J) \xrightarrow[\alpha]{\sim} J \otimes_B D_c(B/k)$$

Denotamos $\theta = \alpha . (1 \otimes \gamma)^t . \Gamma : D(J/k) \to J \otimes_B D_c(B/k)$

Sea $\lambda : A \to B$ un morfismo de k-álgebras

Se vió en 2.2 que λ induce una sección jet $j_\lambda : J \to B$.

Se tiene, por tanto, el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
J \arrow[d, "d_J"'] & B \arrow[d, "1 \otimes d_B"] \\
D(J/k) \arrow[r, "\theta"'] & J \underset{B}{\otimes} D_c(B/k)
\end{tikzcd}
$$

Dado que j_λ hace de B un J-módulo, apliquemos a la flecha horizontal el funtor $B\underset{J}{\otimes}:1 \underset{J}{\otimes} \theta : B \underset{J}{\otimes} D(J/k) \to B \underset{J}{\otimes} J \underset{B}{\otimes} D_c(B/k) = D_c(B/k)$

Proposición 4.3.2: Sea $\hat{d}x_1, \ldots, \hat{d}x_n$ una base de $D_c(B/k)$ y $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ la base dual. Si $j \in J$ se tiene que:

$$(1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J\, y) = \sum_{i=1}^{n} j_\lambda(\epsilon(\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_i})y)\hat{d}x_i$$

Demostración:

Sea $y \in J$. Entonces $\Gamma(d_J(y)) = d_J(y)^{**}$, forma de $D(J/k)^{**}$ que actúa en k-derivaciones de J, por especialización en y.
En particular, si $d \in L(B/k)$:

$$d_J(y)^{**}(\gamma(d)) = (d)(y)$$

Luego

$$[(1 \otimes \gamma)^t . \Gamma . d_J(y)](1 \otimes d) = [(1 \otimes \gamma)^t . d_J(y)^{**}](1 \otimes d) = \gamma(d)(y).$$

Por otra parte, si $x \in B$ se tiene que

$$\hat{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial x_i} \hat{d}x_i$$

Por tanto:

$$\alpha.(1 \odot \gamma)^t.\Gamma.d_J(y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(1 \odot \hat{d}x_i), \qquad \text{donde}$$

$$\chi_i = \gamma[\frac{\partial}{\partial x_i}] (\theta\, d_J(y)) \in J.$$

Finalmente en $D_c(B/k) = B \underset{J}{\odot} J \underset{B}{\odot} D_c(B/k)$ será:

$$j_\lambda(\chi_i) = j_\lambda(\gamma(\frac{\partial}{\partial x_i})\, \theta\, d_J(y))$$

<u>ie</u>

$$(1 \odot \theta)(1 \odot d_J\, y) = \sum_{i=1}^{n} j_\lambda(\epsilon(\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_i})y)\hat{d}x_i \, ,$$

como se quería demostrar #

<u>Proposición 4.3.3:</u> j_λ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, dashed, "j_\lambda"] \arrow[d, "1 \odot d_J"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\
B \underset{J}{\odot} D(J/k) \arrow[r, dashed, "1 \odot \theta"'] & D_c(B/k)
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u> Por la proposición 4.3.2 se tiene que:

$$(1 \odot \theta)(1 \odot d_J\, y) = \sum_{i=1}^{n} j_\lambda\, (\epsilon(\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_j})y)dx_i$$

Teniendo en cuenta la Nota 1.4, que j_λ es un morfismo de $B \otimes A$-álgebra y que $1 \otimes d_J$ es una k-derivación, basta ver la conmutatividad para elementos $y \in J$ de las dos siguientes formas:

i) $y = b \otimes a$

ii) $y = \gamma(d_r)\ldots\gamma(d_1)(1 \otimes a)$, con $d_1,\ldots,d_r \in L$, $a \in A$.

En el caso $y = b \otimes a$ se tiene que:

$$j_\lambda(\epsilon(\gamma)\frac{\partial}{\partial x_i}(b \otimes a)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(b.\lambda a) = \frac{\partial b}{\partial x_i}\lambda a + b.\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda a.$$

Luego

$$(1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J\ y) = \lambda a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x_i}\hat{d}x_i + b.\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\lambda a)}{\partial x_i}\hat{d}x_i$$

$$= \lambda(a).\hat{d}b + b.\hat{d}(\lambda a).$$

Por otra parte: $j_\lambda(b \otimes a) = b.\lambda a$ y se tiene que

$d.j_\lambda(b \otimes a) = \lambda a\ db + b.d(\lambda a)$ de donde la validez en este caso.

Si $y = \gamma(d_r)\ldots\gamma(d_1)(1 \otimes a) = \epsilon(\gamma)(d_r\ldots d_1)(1 \otimes a)$ se tiene que:

$$j_\lambda[\epsilon(\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_i})\ldots\epsilon(\gamma)(d_r\ldots d_1)(1 \otimes a)] =$$

$$= j_\lambda[\epsilon(\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_i})\ d_r\ldots d_1)(1 \otimes a)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}.d_r\ldots d_1(\lambda a)$$

De modo que:

$$(1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J\, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} d_r \dots d_1\right)(\lambda a)\, dx_i = \hat{d}(d_r \dots d_1(\lambda a)) =$$

$$= \hat{d}\, j_\lambda(\epsilon(\gamma)(d_r \dots d_1)\, 1 \otimes a) = \hat{d}.j_\lambda(v)$$

de donde la proposición
#

<u>Corolario 4.3.4</u>: $1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$

<u>Demostración</u>: resulta de la unicidad de la flecha $d(j_\lambda)$ haciendo conmutar el diagrama de la proposición 4.3.3.
#

<u>4.3.5</u>: Sea $i: A \to J$ la inclusión natural, i induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1 \otimes d_A"'] & J \arrow[d, "d_J"] \\
J \underset{A}{\otimes} D(A/k) \arrow[r, "d(i)"'] & D(J/k)
\end{tikzcd}$$

como parte del siguiente:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1 \otimes d_A"'] & J \arrow[d, "d_J"] & & B \arrow[d, "1 \otimes \hat{d}"] & & \\
J \underset{A}{\otimes} D(A/k) \arrow[r, dashed, "d(i)"] & D(J/k) \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & J \underset{B}{\otimes} D_c(B/k) \arrow[r, dashed, "\pi"'] & D \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $D =$ coker $(\theta.d(i))$. Sea $\Lambda: J \to D$ la k-derivación

$$\Lambda = \pi.\theta.d_J$$

Dado una sucesión $\{i_1,\dots,i_r\}$ de enteros no negativos, definimos los J-módulos $D(i_1,i_2,\dots,i_\ell)$ y los ideales $Z(i_1,i_2,\dots,i_\ell)$ $(\ell = 1,2,\dots r)$ a partir de $\Lambda: J \to D$, según la definición 2.3.2.1.

<u>Teorema 4.3.6</u>: Sean A, B k-álgebras.
Supongamos que B verifique las condiciones detalladas en 4.3.1. y que $\lambda: A \to B$ es un morfismo de k-álgebras, $j_\lambda: J \to B$ la sección jet de λ. Entonces

$$j_\lambda(Z(i_1,\dots,i_r)) = z(i_1,i_2,\dots,i_r)$$

(Los ideales $z(i_1,\dots,i_r)$ fueron definidos en Definición 2.3.2.2.)

<u>Demostración</u>: Por inducción en r;

<u>CASO r = 1:</u>

Consideremos el diagrama antes obtenido:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1\otimes d_A"'] & J \arrow[d, "d_J"] & & B \arrow[d, "1\otimes \hat{d}_c"] & & \\
J \otimes_A D(A/k) \arrow[r, "d(i)"] & D(J/k) \arrow[rr, "\theta"] & & J \otimes_B D_c(B/k) \arrow[r, "\pi"'] & D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tensorizando la fila de J-módulos por $B \underset{J}{\otimes}$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[d] & J \arrow[r, "d_\lambda j_\lambda"] \arrow[d, "d"] & B \arrow[d, "\hat{d}"] & & \\
B \otimes_A D(A/k) \arrow[r, "d(i)"'] & B \otimes_J D(J/k) \arrow[r, "1\otimes\theta"'] & D_c(B/k) \arrow[r] & B \otimes_J D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Según el corolario 4.3.4:

$$1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$$

Como además $j_\lambda . i = \lambda$, y $d(j_\lambda).d(i) = d(j_\lambda . i)$, se obtiene que:

$$B \underset{A}{\otimes} D(A/k) \xrightarrow[d(\lambda)]{} D_c(B/k) \longrightarrow B \underset{J}{\otimes} D \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta de B-módulos ya que $B \underset{J}{\otimes} \cdot$ es exacto a derecha.

<u>ie</u>: cober $(d\lambda) \simeq B \underset{J}{\otimes} D$

Pero se vió (2.1.3) que coker $(d\lambda) \simeq D_c(B/A)$ ya que $D_c(B/k)$ es finitamente generado, de donde:

$$D_c(B/A) \simeq B \underset{J}{\otimes} D$$

De aquí, usando que j_λ es sobreyectiva y la propiedad de los invariantes de Fi Hing (2.2.1) se deduce que:

$$z(i_1) = j_\lambda [Z(i_1)]$$

<u>Etapa inductiva</u>: $r \Rightarrow r+1$

Denotemos $Z(i_1 ... i_r)$ por Z y $z(i_1 ... i_r)$ por z. Se tiene que:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & J \arrow[d, "d_J"] & B \arrow[d, "1 \otimes \hat{d}"] & \\
J \underset{A}{\otimes} DA/k) \arrow[r, "d(i)"] & D(/k)/[d_J(Z)] \arrow[r, "\theta"'] & J \otimes D_c(B/k)/[\theta(d_J(Z))] \arrow[r, "\pi"] & D/[\pi.\theta(d_J(Z))]
\end{tikzcd}$$

donde $D_{/[\pi.\theta.d_J(Z)]} = D'_{/[\Delta(Z)]}$ y recordemos que $[\,.\,]$ denota "Submódulo generado por".

Por ser $B \underset{J}{\otimes}$ un funtor exacto a derecha resulta que:

$$B \underset{J}{\otimes} D_{/[\Delta(Z)]} \simeq \frac{B \underset{J}{\otimes} D}{[\pi.(1 \otimes \theta).d_J(Z)]}$$

Pero: i) $B \underset{J}{\otimes} D = D_C(B/A)$, como se vió en el caro $r = 1$.

ii) $1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$ y por lo tanto:

$$\pi.(1 \otimes \theta).d_J(Z) = \pi.d(j_\lambda).d_J(Z)$$

$$= \pi.1 \otimes \hat{d}_B.j_\lambda(Z)$$

$$= \Delta'(z), \text{ por hipótesis inductiva.}$$

(Recordar: $\Delta': B \to D_C(B/A)$, k der. canónica)

Luego:

$$B \underset{J}{\otimes} D_{/[\Delta(Z)]} \simeq D_C(B/A)_{/[\Delta'(z)]}$$

de donde:

$$j_\lambda(F_{i(r+1)-1}(D_{/[\Delta Z]})) = F_{i(r+1)-1}(D_C(B/A)_{/[\Delta'(z)]})$$

con lo que se asegura la tesis inductiva:

$$j\,(Z(i_1 \ldots i_{r+1})) = z(i_1 \ldots i_{r+1})$$

#

<u>SINGURALIDADES GENERICAS:</u>

<u>4.3.7</u>: Definimos $S(i_1, i_2, \ldots, i_r) \subset \mathrm{Esq}(J)$ el subesquema siguiente:

i) el soporte de $S(i_1,i_2 \ldots i_r)$ consiste de los primos $p \in \mathrm{Spec}(J)$ tales que:

1) $p \supset Z(i_1,i_2 \ldots i_r)$

2) $p \not\supset Z(i_1 \ldots i_j+1)$, $i \leq j \leq r$.

O sea que se obtiene un subconjunto localmente CERRADO de $\mathrm{Spec}(J)$

ii) La estructura de haz de anillos sobre $S(i_1,i_2 \ldots i_r)$ es la de haz inducida por el anillo $J/Z(i_1,\ldots,i_r)$.

Si dado $\lambda : A \to B$, morfismo de k-álgebras, con B local regular y $D_c(B/k)$ de tipo finito, denotamos por $\tilde{j}_\lambda : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(J)$ la aplicación deducida de la sección jet $j_\lambda : J \to B$, el teorema de 4.3.6 asegura que

$$\tilde{j}_\lambda^{-1}(\mathrm{Sop}(S(i_1,\ldots,i_r)) = \mathrm{Sop} \textstyle\sum (\lambda;\ i_1,i_2,\ldots,i_r)$$

en la completa analogía con el resultado de Boardman para el caso de variedades diferenciables.

CAPITULO 5

5.1. El operador δ. Sistémas de coordenadas

5.2. La cadena $\{\delta^{i-1}J\}$ y los subconjuntos $\sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots)$

5.3. Un lema de globalización

5.4. Preparación global

5.5. Nueva demostración del teorema de caracterización de anillos locales regulares

El operador δ es introducido por J.N.MATHER en [3]. En este trabajo figura el lema 5.1.10.
Las definiciones de 5.4 son debidas a Mount y Villamayor, así como el lema fundamental de preparación ("puntual") 5.4.7.
La demostración de éste último puede verse en [7].
El resultado central del Capítulo es el teorema 5.4.13 en donde se demuestra la validez "global" del sistema de coordenadas "puntuales" verificando las condiciones del lema 5.4.7.

5.1. EL OPERADOR δ. SISTEMAS DE COORDENADAS

Sea k un cuerpo de característica cero, algebraicamente cerrado y $A = k[x_1,\ldots,x_n]$ el anillo del polinomios en n indeterminadas a coeficientes en k.

Por m denotaremos un ideal maximal de A; por A_m la localización en el primo m y por $\hat{A}_m$ el completado (separado) de A_m en la topología m-ádida.

Nótese que de la hipótesis sobre k, resulta que $A/_m \simeq k$. Además se tiene un isomorfismo natural de k-espacios vectoriales

$m/_{m^2} \simeq m.A_m/_{(m.A_m)^2}$ y $\dim_k(m/_{m^2}) = n$.

Sea $I \subset A$ un ideal. A lo largo de este apartado supondremos m un maximal fijo de A. Por una translación en A, puede suponerse $m = (x_1,\ldots,x_n)$. Supongamos que $I \subset m$; $\bar{I}$ denotará el k-subespacio vectorial de $m/_{m^2}$, imagen de I por la aplicación canónica $m \to m/_{m^2}$, $x \mapsto \bar{x}$.

Es claro que $\bar{I} \simeq \dfrac{I+m^2}{m^2}$, como k espacios vectoriales.

Definición 5.1.1: Sea $I \subset m$, ideal

$$\mathrm{Rang}_m(I) = \dim_k \bar{I}$$

Cuando no haya peligro de confusión escribiremos Rang(I) en vez de $\mathrm{Rang}_m(I)$.

Nótese que como la imagen de I en $m/_{m^2} \simeq {}^{mA_m}/_{(mA_m)^2} \simeq {}^{\hat{m}}/_{\hat{m}^2}$ es la misma, se tiene que $\mathrm{Rang}_m(I) = \mathrm{Rang}_{mA_m}(I.A_m) = \mathrm{Rang}_{\hat{m}}(I.\hat{A}_m)$, donde $\hat{m}$ denota el Radical de $\hat{A}_m$, que resulta ser $m.\hat{A}_m$.

Definición 5.1.2: Diremos que $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ es un sistema de coordenadas de m en A (respectiv. en A_m, en $\hat{A}_m$) si $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\} \subset m$ (respect $\subset m.A_m, \subset \hat{m}$) y $(z_1,z_2,\ldots,z_n) = m.A_m$ (respectiv. $= m.A_m$, $= \hat{m}$), donde $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ denota el ideal generado por los z_i en el anillo en cuestión.

En vista del lema de Nakayama, la condición $(z_1,\ldots,z_n) = m\, A_m$ (respectiv. $= \hat{m}$) es equivalente a que $\{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n\}$ sea base de $m/_{m^2}$, o bien sean k-linealmente independientes.

Si $L(A/k) = D(A/k)^*$ es el A-módulo de derivaciones de A, el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$ constituye una base de tal módulo.

Además tal conjunto resulta base de los módulos $L(A_m/k) = D(A_m/k)^*$ y $L(\hat{A}_m/k) = D_c(\hat{A}_m/k)^*$. Obviamente esta no es la única base, pero sí la más natural después de fijar el ideal máximal $m = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Por matriz jacobiana de $I \subset m$ entenderemos la matriz (de n-columnas) que tiene por filas $\{\frac{\partial}{\partial x_1} f,\ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f\}$ con $f \in I$.

Definición 5.1.3: Dado $I \subset m$, definimos siguiendo a MATHER [3]:

$\delta_m I = I + I'$, donde I' es el ideal de A generado por los determinantes de menores de dimensión $(\mathrm{Rang}_m I + 1)$ de la matriz jacobiana de I.

Si se sobreentiende el ideal maximal m, escribiremos δ por δ_m.

De la definición se desprende que $\delta_m I \subset m$, ya que $\delta_m I \equiv 0 \pmod m$.

Por otra parte se tiene que $\delta_m(I).A_m = \delta_{mA_m}(I.A_m)$

y $\delta_m(I).\hat{A}_m = \delta_{\hat{m}}(I.\hat{A}_m)$,

ya que todos los ideales admiten iguales generadores.

Proposicion 5.1.4: Si $I = (f_1,f_2,\ldots,f_s)$, $\delta(I) = I + I''$ donde I'' es el ideal generado por los determinantes de menores de dimensión $(\mathrm{Rang}\ I + 1)$ de la matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ $i = 1,2,\ldots,s$; $j = 1,2,\ldots,n$

Demostración:

Es claro qeu $I + I'' \subset \delta(I)$

Si $g \in I$, $g = \sum_{i=1}^{s} a_i f_i \quad (a_i \in A)$, $\quad \frac{\partial}{\partial x_j} g = \sum_{i=1}^{s} a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + n_j, \quad n_j \in I$

Luego las entradas de la matriz jacobiana de I tienen la forma
$\sum_{j=1}^{s} a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + n_j$, $n_j \in I$ y por lo tanto sus menores de orden Rang $I + 1$ estarán en $I + I''$. Así $\delta(I) \subset I + I''$.

#

Más adelante se verá que $\delta(I)$ resulta ser un ideal invariante de Fitting de un cierto A-módulo. De modo que, a posteriori, $\delta(I)$ es independiente de la base de derivaciones elegida. (Esto último puede verse por un sencillo cálculo).

$\delta^{k}I$ denotará $\delta(\delta^{k-1}I)$ y $\delta^{0}I = I$

Vemos que la aplicación reiterada del operador δ conduce a una cadena de ideales en A: $I = \delta^{0}I \subseteq \delta^{1}I \subseteq \ldots \subseteq \delta^{k}I \subseteq m$. Sea s_i = Rang $\delta^{i-1}(I)$.

<u>Definición 5.1.5:</u>

Diremos que el conjunto ordenado $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de elementos de m es un buen sistema de coordenadas de m para la cadena $\{\delta^{i-1}(I)$, $i = 1,2,\ldots,k\}$ en A, si $\{y_1,\ldots,y_n\}$ es un sistema de coordenadas de m en A y se verifica $\{y_1, y_2, \ldots, y_{s_i}\} \subset \delta^{i-1}(I)$, $i = 1,2,\ldots,k$.
Análoga definición para el caso A_m y $\hat{A}_m$. No es cierto, en general, que si $a \subset B \subset m$ (ideales) entonces $\delta(a) \subset \delta(B)$, como puede verse tomando $a = (x_1 . x_2)$, $B = (x_1)$, $m = (x_1, x_2, x_3) \subset k[x_1, x_2, x_3]$ ya que

Rang $a = 0 \Rightarrow \delta(a) = (x_1, x_2, x_1 . x_2)$

Rang $B = 1 \Rightarrow \delta(B) = B = (x_1)$.

Sin embargo se tiene la siguiente

Proposición 5.1.6: $a \subset B \subset m$, ideales y $\mathrm{Rang}(a) = \mathrm{Rang}(B)$

Entonces $\delta(a) \subset \delta(B)$

Demostración: Si $a = (a_1,\ldots,a_t)$, podemos suponer que $B = (a_1,\ldots,a_t, b_1,\ldots,b_s)$ ya que $a \subset B$.

Si $\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial a_i}{\partial x_n}\right)$ es una fila de la matriz jacobiana de a, tal fila figura también en la matriz jacobiana del ideal B.

Como Rang a = Rang B, deben considerarse determinantes de menores de igual dimensión, de donde si $\delta(a) = a + a'$ y $\delta(B) = B + B'$ se tiene que $a' \subset B'$ y por lo tanto $\delta(a) \subset \delta(B)$.

(Nótese que se ha hecho uso de 5.1.4., sin mención explícita)

Proposición 5.1.7: Sea $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ un sistema de coordenadas de m (ya sea en A, A_m ó $\hat{A}_m$). Sea $(t_1,t_2,\ldots,t_k)$ una sucesión no decreciente de enteros positivos y sea $J(t_1,t_2,\ldots,t_k) = (z_1,\ldots,z_{t_1}) + (z_1,\ldots,z_{t_2})^2 + \ldots + (z_1,\ldots,z_{t_k})^k + m^{k+1}$

Entonces:

$$\delta^{\nu}[J(t_1,t_2,\ldots,t_k)] = J(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ldots,t_k) = (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+1}}) + (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+2}})^2+\ldots+(z_1,\ldots,z_{t_k})^{k-\nu}+m^{k+1-\nu}; \quad \nu = 0,1,\ldots,k-1$$

Demostración: por inducción en k.

CASO $k = 1$: entonces $\nu = 0$ y el resultado es trivialmente cierto.

Supongamos válida la tesis para valores $<k$.

ie: $\delta^{\nu}(J(t_1,t_2,\ldots,t_i)) = J(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ldots,t_i)$, $\forall\ \nu = 0,1,\ldots,i-1$ con $i < k$.

La tesis de la etapa inductiva es

$$\delta^{\nu} J(t_1,t_2,\ldots,t_k) = J(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ldots,t_k), \qquad 0 \le \nu < k$$

Si $\nu = 0$, se verifica la igualdad.
Supongamos que se verifique para $i = 0,1,\ldots,\nu-1$

<u>ie</u>

$$\delta^{\nu-1} J(t_1,\ldots,t_k) = J(t\;,t_{\;+1},\ldots,t_k) =$$

$$= (z_1,\ldots,z_{t_\nu}) + (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+1}})^2 + \ldots$$

$$\ldots + (z_1,\ldots,z_{t_k})^{k-\nu+1} + m^{k-\nu+2}$$

Es claro que Rang $\delta^{\nu-1} J(t_1,\ldots,t_k) = t_\nu$.

Dado que $(z_1,\ldots,z_{t_\nu}) \subset \delta^{\nu-1} J(J = J(t_1,\ldots,t_k))$, la matriz jacobiana de $\delta^{\nu-1}J$ presenta un bloque del tipo:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial z_{t_\nu}} & \\
\hline
z_1 & 1 & & & \\
z_2 & & id_{t_\nu} & & \text{CEROS} \\
\vdots & & & & \\
z_{t_\nu} & & & 1 &
\end{array}$$

Luego si $F \in \delta^{\nu-1}J \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z_j} F \in \delta^{\nu}J$, si $j > t_\nu$.

De modo que $\delta^{\nu}J = \delta^{\nu-1}J + (\frac{\partial}{\partial z_j} F;\ F \in \delta^{\nu-1}J,\ j > t_\nu)$.

Notemos que además F puede considerarse monomio, ya que $\delta^{\nu-1}J$ está generado por monomios.

Luego si M es un monomio de $\delta^{\nu}J$, M es un monomio de $\delta^{\nu-1}J$ o bien $M = \frac{\partial}{\partial z_j} M_1$, $M_1 \in \delta^{\nu-1}J$, $j > t_\nu$.

Si M es un monomio $\in \delta^{\nu-1}J$, de la forma $M = z_{j_1} z_{j_2} \ldots z_{j_\ell}$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_\ell \leq t_{\nu+\ell-1}$ (o sea $M \in (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell-1}})^\ell$) entonces $M \in (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell-1}})^{\ell-1}$ y por tanto $M \in J(t_{\nu+1},\ldots,t_k)$.

Si M es de la forma $\frac{\partial}{\partial z_j} M_1$, supongamos $M_1 \in (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell-1}})^\ell$.

Entonces, como $j > t_\nu$, $\frac{\partial}{\partial z_j} M_1 \in (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell-1}})^{\ell-1}$.

Además es claro que si $M \in m^{k-\nu+2}$, M y $\frac{\partial M}{\partial z_j} \in m^{k-\nu+1}$

Luego $\delta^{\nu}J(t_1,\ldots,t_k) \subset J(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ldots,t_k)$.

En cuanto a la otra inclusión, si $M \in J(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ldots,t_k)$ es un monomio de$(z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell}})^\ell$ se tiene que

o bien $M \in (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell}})^{\ell+1}$

o bien existe $M_1 \in (z_1,\ldots,z_{t_{\nu+\ell}})^{\ell+1}$ tal que $\frac{\partial M_1}{\partial z_j} = M$, para algún $j > t_\nu$.

Luego $J(t_{+1},\ldots,t_k) \subset \delta^{\nu}J(t_1,\ldots,t_k)$, lo que completa la demostración

#

<u>Corolario 5.1.8</u>: Bajo las mismas hipótesis que en Proposición 5.1.7

$$\text{Rang}[\delta^{\nu}J(t_1,t_2,\ldots,t_k)] = t_{\nu+1} \quad , \quad \nu = 0,1,\ldots(k-1)$$

#

<u>Proposición 5.1.9</u>: Supongamos $I = (f_1 \dots f_s) \subset m$

Sea $\{y_1 \dots y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de 'm para la cadena $\{\delta_m^{i-1} I,\ i = 1 \dots k\}$ en A. Sea $s_i = \mathrm{Rang}_m(\delta_m^{i-1} I)$, $i = 1 \dots k$.

Entonces:

$$\delta_m^i I = \delta_m^{i-1} I + \left(\frac{\partial^i}{\partial y_{j_i} \cdots \partial y_{j_1}} (f_h);\ h = 1 \dots s,\ \underset{\nu = 1 \dots i}{j_\nu > s_\nu}\right)$$

<u>Dem</u>: por inducción en i. Notaremos $\delta = \delta_m$, $\mathrm{Rang} = \mathrm{Rang}_m$.

Si $i = 1$ la tesis expresa que $\delta I = I + \left(\frac{\partial}{\partial y_j} (t_h),\ h = 1 \dots s,\ j > s_1\right)$

Siendo $s_1 = \mathrm{Rang}\ I$.

Por hipótesis $\{y_1 \dots y_{s_1}\} \subset I$. Luego la matriz javobiana de I presenta un bloque del tipo:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_{s_1}} & \cdots \frac{\partial}{\partial y_n} \\
\hline
\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{s_1} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & \\ & \mathrm{id}_{s_1} & \\ & & 1 \end{matrix} & \text{CEROS} \\
\hline
\end{array}$$

Por lo tanto, si $f_h \in I \Rightarrow \frac{\partial f_h}{\partial y_j} \in \delta I$ $j > s_1$

Además todo menor de dimensión $(s_1 + 1)$ presenta alguna columna correspondiente a $\frac{\partial}{\partial y_j}$, para algún $j > s_1$. Luego vale la tesis en el caso $i = 1$.

Supongamos que $\delta^{i-1} I = \delta^{i-2} I + \left(\frac{\partial^{i-1}}{\partial y_{j_{i-1}} \cdots \partial y_{j_1}} (t_h);\ h = 1 \dots s,\ j_\nu > s_\nu\right.$ $\left.\nu = 1 \dots (i-1)\right)$, y demostremos

$$\delta^i I = \delta^{i-1} I + \left(\frac{\partial^i}{\partial y_i \cdots \partial y_{j_1}} (t_h);\ h = 1 \dots s;\ j_\nu > s_\nu,\ \nu = 1 \dots i\right)$$

Nuevamente por valor $\{y_1 \dots y_{s_i}\} \subset \delta^{i-1} I$, la matriz jacobiana de $\delta^{i-1} I$ presenta un bloque de la forma

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_{s_i}} & \frac{\partial}{\partial y_n} \\
y_1 & 1 & & \\
\vdots & id_{s_i} & & \text{CEROS} \\
y_{s_i} & & 1 &
\end{array}$$

Luego, si $F \in \delta^{i-1}I \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_j} \quad \delta^i I$, $j > s_i$

Por hipótesis inductiva, $\frac{\partial^{i-1}}{\partial y_{j_{i-1}} \cdots \partial y_{j_1}} (f_h) \in \delta^{i-1}I$, $h = 1 \ldots s$

$j_\nu > s_\nu$, $\nu = 1 \ldots (i-1)$

Luego $\frac{\partial^i}{\partial y_{j_i} \cdots \partial y_{j_1}} (f_h) \in \delta^i I$, $h = 1 \ldots s$ $j_\nu > s_\nu$, $\nu = 1 \ldots i$

Un argumento similar al hecho en el caso $i = 1$, muestra que cualquier determinante de un menor de dimensión (s_i+1) estará en el ideal

$\delta^{i-1}I + (\frac{\partial^i}{\partial y_{j_i} \cdots \partial y_{j_1}} (f_H)$, $h = 1 \ldots s$ $j_\nu > s_\nu$, $\nu = 1 \ldots i)$ de donde la proposición. #

Lema 5.1.10:

Sea I ideal en A, m ideal maximal, $I \subset m$.

Sea $s_i = \text{Rang}(\delta^{i-1}I)$, $i = 1,2,\ldots k$ donde $\delta = \delta_m$ y $\text{Rang} = \text{Rang}_m$.

Sea $\{y_1,\ldots,y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A, para la cadena $(\delta^{i-1}I)$. Entonces:

a) $I \subset (y_1,\ldots,y_{s_1}) + (y_1,\ldots,y_{s_2})^2 + \ldots + (y_1,\ldots,y_{s_k})^k + m^{k+1}$

b) Si $\{z_1,\ldots,z_n\}$ es otro sistema de coordenadas de m en A y vale una inclusión del tipo $I \subset (z_1,\ldots,z_{t_1}) + (z_1,\ldots,z_{t_2})^2 + \ldots$ $\ldots + (z_1,\ldots,z_{t_k})^k + m^{k+1}$ entonces $(s_1,s_2,\ldots,s_k) \leq (t_1,t_2,\ldots,t_k)$ en el roden lexicográfico.

Notemos que el lema es igualmente válido en A_m y $\hat{A}_m$.

<u>Demostración</u>: por inducción en el índice K.

<u>k = 1</u>

Supondremos s_1 = Rang(δ°I) = Rang I y $\{y_1,\ldots,y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A, con $\{y_1,\ldots,y_{s_1}\} \subset I$.
Además $\{\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{s_1}\}$ es base de $\bar{I}$.

Sea $f \in I$; $\bar{f} = \sum_{i=1}^{s_1} k_i\, \bar{y}_i$, $k_i \in k = A/m$

Entonces $f - \sum_{i=1}^{s_1} k_i\, y_i \in I \cap m^2$. Luego $f = \sum_{i=1}^{s_1} k_i\, y_i + \mu_2$, $\mu_2 \in m^2$

<u>ie</u>: $I \subset (y_1,\ldots,y_{s_1}) + m^2$, que es la tesis a) para k = 1

Supongamos ahora que valga

$I \subset (z_1,\ldots,z_{t_1}) + m^2$, donde $\{z_1,\ldots,z_n\}$ es un sistema de coordenadas de m en A.

Entonces: Rang$I \leq$ Rang$[(z_1,\ldots,z_{t_1}) + m^2]$ = Rang$(z_1,\ldots,z_{t_1}) = t_1$

<u>ie</u> $s_1 \leq t_1$, de donde b)$_1$

<u>ETAPA INDUCTIVA</u>: Supongamos a) y b) válidas para i = 1,...,k-1 y probemos las proposiciones en el caso i = k.
Por hipótesis inductiva $I \subset (y_1,\ldots,y_{s_1}) + (y_1,\ldots,y_{s_2})^2 + \ldots$
$\ldots + (y_1,\ldots,y_{s_{k-1}})^{k-1} + m^k$
Sea $f \in I$. Es claro que existe $g \in (y_1,\ldots,y_{s_1}) + (y_1,\ldots,y_{s_2})^2 + \ldots$
$\ldots + (y_1,\ldots,y_{s_{k-1}})^{k-1}$ de modo tal que $f-g \in m^k$. Escribamos
$f-g = F_k + \mu_{k+1}$, con F_k componente de grado k y $\mu_{k+1} \in m^{k+1}$. Basta ver entonces que $F_k \in (y_1,\ldots,y_{s_k})^k$

Supongamos lo contrario, ie $F_k \notin (y_1,\dots,y_{s_k})^k$.

Entonces entre los monomios de F_k debe existir alguno (con coeficiente $\lambda \neq 0$) de la forma $\lambda . y_{j_1}, y_{j_2} \cdots y_{j_k}$, $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$ y $j_i > s_i$, $i = 1,2,\dots,k$

Consideremos el operador $D = \dfrac{\partial^{k-1}}{\partial y_{j_1}, \partial y_{j_2} \cdots \partial y_{j_{k-1}}}$. Por proposición 5.1.9,

$Df \in \delta^{k-1} I$ ya que $j_1 > s_i$, $i = 1,2,\dots,k-1$

Luego la matriz jacobiana de $\delta^{k-1}I$ tendrá un bloque del siguiente tipo:

$$
\begin{array}{c|ccc|c|}
 & \frac{\partial}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial y_{s_k}} & \frac{\partial}{\partial y_{j_k}} \\
\hline
y_1 & 1 & & & \vdots \\
\vdots & & id_{s_k} & & \text{CEROS} \\
\vdots & & & & \vdots \\
y_{s_k} & & & 1 & \vdots \\
\hline
Df & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & (.)
\end{array}
$$

donde $(.) = \lambda + \mu$, $\lambda \neq 0$ y $\mu \in m$
Nótese que el bloque identidad aparece pues por hipótesis $\{y_1,\dots,y_n\}$ es un buen sistema de coordenadas de m para la cadena $\{\delta^{i-1}I,\ i = 1,\dots,k\}$, o sea que en particular $\{y_1,\dots,y_{s_k}\} \subset \delta^{k-1}I$.

Pero entonces el Rango de esta matriz (mod. m) resultaría estrictamente mayor que s_k, contra la hipótesis $\mathrm{Rang}(\delta^{k-1}I) = s_k$.

Luego $F_k \in (y_1 \dots y_{s_k})^k$ y por tanto $f = g + F_k + \mu_{k+1}$, de donde la Tesis a).

Supongamos ahora que $\{z_1 \dots z_n\}$ es otro sistema de coordenadas de m en A y que se verifica:

$$I \subset (z_1 \dots z_{t_1}) + (z_1 \dots z_{t_2})^2 + \dots + (z_1 \dots z_{t_k})^k + m^{k+1}$$

Por hipótesis inductiva $(s_1 \dots s_{k-1}) \leq (t_1 \dots t_{k-1})$.(*)

Supongamos $(s_1 \ldots s_k) > (t_1 \ldots t_k)$

Entonces existe un índide $\nu / s_j = t_j$, $j = 1 \ldots \nu-1$ y $s_\nu > t_\nu$.

Es claro que, valiendo (*), debe ser necesariamente $\nu = k$. O sea que se presenta la situación: $s_i = t_i$, $i = 1,2,\ldots,k-1$ y $s_k > t_k$. Aplicando las proposiciones 5.1.6, 5.1.7 y el corolario 5.1.8: $\delta^{k-1}I \subset (z_1 \ldots z_{t_k}) + m^2$ de donde $\text{Rang}(\delta^{k-1}I) = s_k \leq \text{Rang}[(z_1 \ldots z_{t_k}) + m^2] = t_k$ resultando una contradicción.

Luego $(s_1 \ldots s_k) \leq (t_1 \ldots t_k)$, lo que completa la demostración del lema #

<u>Corolario 5.1.11</u>: Bajo las mismas hipótesis del lema 5.1.10 supongamos además que la cadena $\{\delta^{i-1}I\}$ se estaciona en el paso k-ésimo, <u>ie</u> $\delta^\nu I = \delta^{k-1}I$, $\nu \geqslant k$.

Entonces

$$I \subset (y_1 \ldots y_{s_1}) + \ldots + (y_1 \ldots y_{s_k})^k$$

<u>Dem</u>: es claro que $\delta^\nu I = \delta^{k-1}I \Rightarrow s_\nu = s_k$, $\nu \geq k$ (*)

Por otra parte, si J_ν denota el ideal $(y_1 \ldots y_{s_1}) + \ldots + (y_1 \ldots y_{s_\nu})^\nu$ se tiene que $J_\nu \subset J_{\nu+1}$ y además $I \subset \bigcup_{\nu \geq 1} J_\nu$. Por ser A noetheriano, deducimos $I \subset J_\nu$ para algún índice ν suficientemente grande.

Podemos suponer $\nu \geq k$; en vista de (*) se tiene que

$$J_\nu = (y_1 \ldots y_{s_1}) + \ldots + (y_1 \ldots y_{s_k})^k + (y_1 \ldots y_{s_k})^{k+1} + \ldots + $$
$$+ (y_1 \ldots y_{s_k})^\nu = J_k,$$ de donde el corolario #

<u>5.2. La cadena $\{\delta^{i-1}I\}$ y los subconjuntos $\sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots)$</u>

Como en el parágrafo anterior $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

Sea $I \subset A$, ideal. Supongamos $I = (f_1 \ldots f_h)$

Sea $\lambda : A \to A/_I$ el morfismo canónico.

Consideremos la sucesión de $A/_I$-módulos inducida por λ:

$$I/_{I^2} \xrightarrow{\alpha} A/_I \otimes_A D(A/k) \xrightarrow{d\lambda} D([A/I]/_k) \to 0 \qquad [\,+\,]$$

Por teorema 2.1.3.3. la sucesión $[\,+\,]$ resulta exacta en el caso en que A sea local. De modo que tal sucesión es exacta para toda localización en m maximal de A, $m \supset I$ (ie en todo mxl, de A/I)

Luego resulta EXACTA globalmente, ie. como sucesión de A/I-módulos.

Recordemos que: $\alpha(\bar{f}) = 1 \otimes d_A f$, $\bar{f} \in I/_{I^2}$ y $f \in I$ tq $f \to \bar{f}$ y donde $d_A : A \to D(A/k)$ es la k-derivac. canónica.

Asimismo: $d\lambda(1 \otimes df) = d(\lambda f)$, donde $d : A/I \to D([A/I]/k)$ es la k-derivación canónica.

Es bien conocido que $D(A/k)$ resulta un A-módulo libre de rango n y admite a $\{d_A x_1 \ldots d_A x_n\}$ por base. (ver [5] ó [8])

Además, $Im(\alpha)$ es el A/I-submódulo de $A/I \otimes_A D(A/k)$, generado por $1 \otimes d_A f_i$, $i = 1 \ldots h$. En efecto:

Si $\bar{g} \in I/_{I^2}$, y $g = \sum_{i=1}^{h} a_i f_i \in I$ es tal que $g \to \bar{g}$ $(a_i \in A)$, se tiene

$$\alpha(\bar{g}) = 1 \otimes d_A(\sum a_i f_i) = \sum 1 \otimes d_A(a_i f_i) =$$

$$= \sum 1 \otimes f_i d_A a_i + \sum 1 \otimes a_i d_A f_i$$

$$= \sum \lambda(a_i) \cdot (1 \otimes d_A f_i), \text{ ya que}$$

$1 \otimes f_i d_A a_i = 0$ en $A/I \otimes_A D(A/k)$.

La matriz de relaciones de $D([A/I]/k)$ resulta ser entonces: $\lambda\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$

ya que:

$$1 \otimes d\, f_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) (1 \otimes dx_j) \;, \qquad i = 1 \ldots h.$$

O sea: resulta ser la matriz jacobiana de I, modI.
Sea m un ideal maximal de A, $m \supset I$.
Localizando [+] en m, se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$I/_{I^2} \to A_m/I \underset{A_m}{\otimes} D(A_m/k) \xrightarrow{d\lambda} D(\, A_m/I\, /k) \to 0 \qquad [\,\bullet\,]$$

donde, por abuso de notación se escribe I en vez de $I.A_m$.
Dado que k es el cuerpo residual de A_m y A_m/I, al tensorizar [•] por $k \underset{A_m/I}{\otimes} \cdot$, se obtiene la siguiente sucesión exacta de k-espacios vectoriales:

$$k \underset{A_m/I}{\otimes} I/_{I^2} \xrightarrow{1 \otimes \alpha} k \underset{A_m/I}{\otimes} [A_m/I \underset{A_m}{\otimes} D(A_m/k)] \to k \underset{A_m/I}{\otimes} D([\, A_m/I]\, /k) \to 0$$

Recordemos que $k \underset{A_m}{\otimes} D(A_m/k) = \frac{m}{m^2}$, según se demuestra en [5]

De modo que la sucesión tensorizada resulta:

$$k \underset{A_m/I}{\otimes} I/_{I^2} \underset{1 \otimes \alpha}{\to} m/_{m^2} \to k \underset{A_m/I}{\otimes} D(\,[A_m/I]\,/k) \to 0$$

Nótese que $I_m(1 \otimes \alpha)$ es $\bar{I}$ = imagen de I por el morfismo canónico
$m \to m/_{m^2}$.
Esto muestra que $\bar{I}$ y $k \underset{A_m/I}{\otimes} D([\, A_m/I]\, /k)$ tienen dimensiones complementarios, ie:

$$\mathrm{Rang}_m I + \mathrm{Rang}_m (D(\, A/I)/k)) = n \qquad (*)$$

Por lo visto en 2.3 si $F_j \subset A/I$ son los ideales invariantes de Fitting del A/I-módulo $D(|A/I|/k)$ y

$$i_1 = \max\{j : F_j \subset m/I\} + 1, \text{ entonces}$$

$$i_1 = \mathrm{Rang}_m\,(D([A/I]/k)) = \text{Rango del } A_m\text{-módulo}$$
$$A_m \otimes D([A/I]/k)$$

De modo que de (*) resulta:

$$s_1 + i_1 = n \qquad (**)$$

<u>Proposición 5.2.1</u>:

$$\lambda^{-1}\,(F_{i_1-1}) = \delta_m I$$

<u>Dem</u>: está claro que $I \subset \lambda^{-1}(F_{i_1-1})$

Basta ver entonces que coinciden los demás generadores de los ideales

$$\delta_m I = I + I' \text{ y } \lambda^{-1}(F_{i_1-2})$$

Por definición, F_{i_1-1} está generado por los determinantes de menores de orden $(n - i_1 + 1)$ de la matriz $\lambda(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ $\begin{matrix} i = 1\ldots h \\ j = 1\ldots n \end{matrix}$, ya que hemos visto que ésta era la matriz de relaicones del A/I-módulo $D(|A/I|/k)$

Ahora bien: i) Levantar (por λ) generadores de F_{i_1-1}

y ii) Considerar los determinantes de menores de orden (s_1+1) de la matriz jacobiana de I (tomando como base de deriv. a la dual de $\{d_A x_i\}$)

SON LA MISMA COSA, en vista de (**) y el hecho de ser λ morfismo de anillos.

De aquí la proposición #

Este resultado muestra que $\delta_m I$ no depende del sistema de coordenadas usado en el cálculo de la matriz jacobiana de I, ya que resulta ser, esencialmente un ideal invariante de Fitting.

Aplicando lo hecho a la situación $A \overset{\lambda}{\to} A/\delta_m I$, se obtiene:

1) $\mathrm{Rang}_m(\delta_m I) + \mathrm{Rang}_m\, D(|A/\delta_m I|/k) = n = s_2 + i_2$

2) $\delta_m^2 I = \lambda^{-1}(F_{i_2-1})$, donde F_{i_2-1} es el (i_2-1)-invariante de Fitting del $A/\delta_m I$-módulo $D(|A/\delta_m I|/k)$

Iterando el procedimiento se obtienen las fórmulas dadas en la siguiente:

<u>Proposición 5.2.2</u>: Sea $I \subset m$, y supongamos $m \in \sum(\lambda; i_1, i_2 \ldots i \ldots)$ (ver definición 2.3.2.2)

Entonces:

1) $\mathrm{Rang}_m(\delta_m^{\nu-1} I) + \mathrm{Rang}_m(D(|A/\delta^{\nu-1} I|/k)) = s_\nu + i_\nu = n$

2) $\delta_m^\nu I = \lambda^{-1}(F_{i_\nu-1})$, donde $F_{i_\nu-1}$ el $(i_\nu-1)$-invariante de Fitting del $A/_{\delta_m^{\nu-1} I}$-módulo $D(|A/_{\delta_m^{\nu-1} I}|/k)$ y $\lambda: A \to A/_{\delta_m^{\nu-1} I}$ es el morfismo canónico.
#

Nótese que en vista de la proposición 5.2.2. y la definición de los conjunto $\sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots)$, si m y $m' \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \ldots)$ entonces

$\delta_m I = \delta_{m'} I$ y más generalmente $\delta_m^k(I) = \delta_{m'}^k(I)$.

Se tiene entonces el siguiente

<u>Lema 5.2.3</u>:

Sea $I \subset m$, $m \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \ldots)$. Entonces la cadena jacobiana $\{\delta_m^{i-1} I;\ i = 1, 2, \ldots, k\}$ está en todo maximal $m' \in \sum(\lambda; i_1, i_2 \ldots \ldots i_\nu, \ldots)$.
#

5.3: Un lema de Globalización

Lema 5.3.1: Sea $I \subset m$ y supongamos que $m \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \ldots)$
Sea $\{v_1, \ldots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A para la cadena $\{\delta^{i-1} I,\ i = 1, \ldots, k\}$ (Suponemos que tal cadena se estaciona en $\delta^{k-1} I$).
Entonces:
Existe un abierto V de $\sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \ldots)$ conteniendo m tal que $\{v_1, \ldots, y_{s_k}\}$ es parte de un buen sistema de coordenadas de m' en A, para todo $m' \in V$.

Demostración: por Lema 5.2.3 $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset m'$, $\forall\ m' \in \sum(\lambda; i_1, i_2 \ldots i_\nu, \ldots)$
Es claro que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{s_k}\}$ será parte de un sistema de coordenadas de m' si y sólo si el conjunto $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{s_k}\}$ es linealmente independiente en m'/m'^2

Si $P' = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') \in k^n$ es el punto que representa al maximal m', se tiene que las coordenadas de $\bar{v}_i$ en m/m' serán

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}(P'), \ldots, \frac{\partial v_i}{\partial x_n}(P')\right) ,$$

según la base $x_i' = (x_i - \alpha_i')$.
Luego la independencia equivale a la no anulación del determinante de algún menor de orden S_k de tal matriz, condición que determina un abierto. Finalmente, por el lema 5.2.3, $\delta_m I = \delta_{m'} I$ y por tanto: si $\{v_1, \ldots, v_{s_k}\}$ es parte de un sistema de coordenadas de m en A, será parte de un buen sistema de coordenadas de m' en A, para la cadena $\{\delta^{i-1} I\}$. #

5.4. PREPARACION GLOBAL

En este apartado supondremos que $P_k(n) = k[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$, con k de característica cero algebraicamente cerrado, $r_k(n) = \text{Radical } (P_k(n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $I \subset r_k(n)$, ideal generado por $f_1, f_2, \ldots, f_h$.

Introduzcamos algunas definiciones y proposiciones siguiendo [7].
Denotaremos $P_k(n/m)$ el anillo $P_k(n)/r_k(n)^{m+1}$ y por $r_k(n/m)$ el radical de $P_k(n/m)$.
El morfismo canónico $P_k(n/m) \to P_k(n/m')$, para $m' < m$, será denotado por $\rho(m',m)$ y el correspondiente a $P_k(n) \to P_k(n/m)$ por $\rho(m)$.

Definición 5.4.1:

Si $z_1,z_2,\ldots,z_n \in P_k(n/m)$ son tales que $P_k(n/m) = k[z_1,\ldots,z_n]$ (la k-subálgebra generada por los z_i) entonces el conjunto ordenado $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ será llamado un sistema de coordenadas para $P_k(n/m)$.
Si $z_1,\ldots,z_r$ son elementos de $P_k(n/m)$ tales que $\{z_1,\ldots,z_r,z_{r+1},\ldots,z_n\}$ es un sistema de coordenadas para $P_k(n/m)$, entonces $\{z_1,\ldots,z_r\}$ será llamado un sistema de coordenadas parcial para $P_k(n/m)$

Definición 5.4.2:

Supongamos que $I \subset r_k(n/m)$ es un ideal de $P_k(n/m)$
Definiremos por inducción el concepto de φ^*-λ par $(z_1\ldots z_{\lambda(m)};\ \lambda(1)\ldots\lambda(m))$
Para I, donde $z_1,\ldots,z_{\lambda(m)}$ es un sistema de coordenadas parcial para $P_k(n/m)$ y $0 \leq \lambda(1) \leq \ldots \leq \lambda(m)$ es una sucesión de enteros.
La sucesión $\lambda(1),\ldots,\lambda(m)$ será llamada la λ-sucesión de I.
La definición será por inducción en m.

CASO $m = 1$ Si $I = (0)$, entonces un par $(\phi;0)$, donde es el sistema de coordenadas parcial vacío y 0 es la sucesión $\lambda(1) = 0$, es el único φ^*- λ par para I.
Si $I \neq (0)$, entonces un par $(z_1,\ldots,z_j;\ j)$, donde $z_1\ldots z_j$ es una k-base para I y $j = \lambda(1)$ es la λ-sucesión, es un posible φ^*-λ par para I.

Caso $m > 1$: Supongamos que el concepto de φ^*-λ par haya sido definido para todo ideal $I \subset r_k(n/m-1)$. Si $I = (0)$, entonces el único φ^*-λ par es $(\phi;(0\ldots0))$ donde ϕ es el sistema de coordenadas parcial vacío y $\lambda(1) = 0 = \ldots = 0 = \lambda(m)$.

Si $I \neq (0)$, entonces un par $(z_1,\ldots,z_{\lambda(m)}; \lambda(1),\ldots,\lambda(m))(n \geq \lambda(m))$ se dice un φ^*-λ par para I si:

i) el par $(\rho(m-1,m)z_1,\ldots,\rho(m-1,m)\ z_{\lambda(m-1)}; \lambda(1),\ldots,\lambda(m-1))$ es un φ^*-λ par para $\rho(m-1,m)I$.

ii) $I \subset (z_1,\ldots,z_{\lambda(1)}) + (z_1,\ldots,z_{\lambda(2)})^2 + \ldots + (z_1,\ldots,z_{\lambda(m)})^m$

iii) $\lambda(m)$ es el menor entero entre los pares $(z_1,\ldots,z_{\lambda(m)}; \lambda(1),\ldots,\lambda(m))$ satisfaciendo las condiciones i) y ii)

Teorema 5.43:

Si $I \subset r_k(n/m)$ es un ideal de $P_k(n/m)$, existe un φ^*-λ par para I. Más aún:

Si $(z_1,\ldots,z_{\lambda(m)}; \lambda(1),\ldots,\lambda(m))$ y $(w_1,\ldots,w_{\sigma(m)}; \sigma(1),\ldots,\sigma(m))$ son dos φ^*-λ pares para I, entonces $\lambda(i) = \sigma(i)$, para cada $1 \leq i \leq m$.

Demostración: [7]

En vista del teorema 5.4.3: se introduce la siguiente definición:

Definición 5.4.4:

Si I $r_k(n/m)$ es un ideal de $P_k(n/m)$, y si $(x_1,\ldots,x_{\lambda(m)};\lambda(1),\ldots,\lambda(m))$ es un φ^*-λ par para I, entonces $x_1,\ldots,x_{\lambda(m)}$ será llamado un φ^*-sistema de coordenadas para I y los enteros $(n-\lambda(1),\ldots,n-\lambda(m)) =$ $= (\varphi(1),\ldots,\varphi(m))$ será la sucesión de φ-invariantes de I.

Denotaremos por $\theta(1)$ el primer entero tal que $\lambda(\theta(1)) \neq 0$, y por $\theta(j)$ el primer entero tal que $\lambda(\theta(j)) > \lambda(\theta(j-1))$.

Nota: Si σ es un k-automorfismo de $P_k(n/m)$, entonces es claro que $\sigma(I)$ e I tienen la misma χ-sucesión. Más aún, si $x_1,\ldots,x_{\lambda\theta(t)}$ es un

φ^*-sistema de coordenadas para I, entonces $\sigma x_1,\dots,\sigma x_{\lambda\theta(t)}$ es un φ^*-sistema para σI.

Definición 5.4.5:

Supongamos ahora que $I \subset r_k(n)$ es un ideal de $P_k(n) = k[[x_1,\dots,x_n]]$. Diremos que I tiene φ-sucesión $(\varphi(1),\dots,\varphi(m),\dots)$ si para cada $m \geq 1$, la sucesión $(\varphi(1),\dots,\varphi(m))$ es la φ-sucesión para $\rho(m)I \subset P_k(n/m)$.
Análogamente para la λ-sucesión de I:
Diremos que $I \subset P_k(n)$ tiene λ-sucesión $\lambda(1),\dots,\lambda(m),\dots$ si $\rho(m)I$ tiene λ-sucesión $(\lambda(1),\dots,\lambda(m))$, para cada $m \geq 1$.
Es claro que cada ideal contenido en el radical de $P_k(n)$ tiene determinada, unívocamente una sucesión.
Notemos también que la φ-sucesión de $I \subset r_k(n)$, es decreciente.
Dado que $\varphi(i)$ están acotados inferiormente por cero, la φ-sucesión de I debe ser constante para valores suficientemente grandes de i.
Queda entonces claro que, para valores grandes de m, la sucesión de saltos (valores de θ) para $\rho(m)I$ son todos iguales.

Definición 5.4.6: Supongamos $I \subset r_k(n)$, ideal de $P_k(n)$.
Si para $m \geq M$ $\varphi(m) = \varphi(m+1) = \dots$, llamaremos sucesión de saltos de I, a la sucesión de saltos de $\rho(M)I$ en $P_k(n/M)$
Un sistema de coordenadas parcial $z_1,\dots,z_{\lambda(M)}$ de $P_k(n)$ será llamado un φ^*-sistema (de coordenadas) para I si $\rho(m)z_1,\dots,\rho(m)z_{\lambda(m)}$ es un φ^*-sistema (de coordenadas) para $\rho(m)I$, para cada $m \geq M$.
En [7] se demuestra el siguiente lema:

Lema 5.4.7: Supongamos que $I \subset r_k(n)^2$ es un ideal en $P_k(n)$ con λ-sucesión $\lambda(1),\dots,\lambda(m)\dots$ y números de salto $\theta(1),\dots,\theta(t)$. Entonces:
Existe un φ^*-sistema $x_1\dots x_{\mu(t)}$, (donde $\mu = \lambda \circ \theta$) para I que es parte de un sistema de coordenadas $x_1\dots x_n$ de $P_k(n)$ tal que las siguientes condiciones son satisfechas para todo $1 \leq c \leq t$.
$(D_c\text{-}1)$: existen generadores $f_1,\dots,f_s$ de I tales que

$f_i = \sum_{d\geq 2} F_{id}$, donde F_{id} es un polinomio homogéneo de grado d en $x_1,\ldots,x_n$.

(D_c-2): para cada número de salto $\theta(b)$, escribamos $F_{i\theta(b)} = F^*_{i\theta(b)} + F^{**}_{i\theta(b)}$ donde $F^*_{i\theta(b)} \in (x_1,\ldots,x_{\mu(b)})^{\theta(b)}$ y $F^*_{i\theta(b)}$ no contiene monomios del ideal $(x_1,\ldots,x_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \ldots + (x_1,\ldots,x_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$

Si $b \leq c$, existe un conjunto de índices de filas

$S_b = \{(\,_{\theta(b)}(j), \alpha_{(b)}(j)),\ j = \mu(b-1)+1,\ldots,\mu(b);\ 1 \leq \alpha_{(b)}(j) \leq S\}$

tal que la submatriz de la matriz del polarización de las formas $F^*_{i\theta(b)},\ldots,F^*_{s\theta(b)}$ con columnas indicadas por $x_{\mu(b-1)+1},\ldots,x_{\mu(b)}$ y con filas indicadas por el conjunto S_b, es inversible.

(D_c-3): Si M es un monomio de grado $\theta(d)$ para $1 \leq d \leq t$ y M aparece (con coeficiente no nulo) en $F_{i\theta(d)}$ y M es divisible por $m_{\theta(b)}(j)$, para algún $b \leq c$, entonces $M \in (x_1,\ldots,x_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \ldots + (x_1\ldots x_{\mu(d-1)})^{\theta(d-1)}$

En vista de este resultado deramos la siguiente:

<u>Definición 5.4.8:</u>

Supongamos que I $\quad r_k(n)^2$ es un ideal de $P_k(n)$.

Si I tiene λ-sucesión $\lambda(1),\ldots,\lambda(m)\ldots$ y números de salto $\theta(1),\ldots,\theta(t)$, entonces un φ^*-sistema para I y un conjunto de generadores $f_1,\ldots,f_s$ de I que satisfagan (D_c-1), (D_c-2) y (D_c-3), para todo $1 \leq c \leq t$, será llamado un φ^*-sistema preparado para I y un conjunto de generadores preparados de I con respecto a ése sistema

Los elementos de S_i $(i = 1,\ldots,t)$ serán llamados <u>filas distinguidas</u> para los generadores preparados y los conjuntos $S_1,\ldots,S_t$ serán llamados conjuntos de índices distinguidos para el φ^*-sistema preparado y los generadores preparados $f_1,\ldots,f_s$.

La idea de la demostración del Lema de preparación es la siguiente: Se parte de un sistema de coordenadas $\{y_1,\ldots,y_n\}$ de $P_k(n)$ y un sistema $f_1,\ldots,f_s$ de generadores de I, escritos en término de las variables y_i.

A partir de la matriz de polarización de las formas de grado mínimo de cada f_j, se obtiene el primer conjunto de índices distinguidos.

Se pasa entonces a "la limpieza" de múltiplos de los monomios distinguidos $m_{\theta(1)}(j)$ en cada componente $f^*_{\alpha_1(j)\theta(d)}$, para $d = 2,\ldots,t$, $j = 1,\ldots,\mu(1)$, realizada por medio de automorfismos σ de $P_k(n)$, que resultan la identidad sobre las variables y_j, $j > \mu(1)$, obteniéndose que en $\sigma(I)$ valen las condiciones D_1-1, D_2-2, D_1-3, respecto del sistema $\{y_1,\ldots,y_n\}$

Se itera este proceso y, en un número finito de pasos, se obtiene en definitiva un automorfismo σ de $P_k(n)$ (de una forma particular) tal que quedan satisfechas las condiciones D_c-1, D_c-2 y D_c-3 $1 \leq c \leq t$, para el ideal $\sigma(I)$, los generadores $\sigma(f_1),\ldots,\sigma(f_s)$ y el sistema de coordenadas $\{y_1,\ldots,y_n\}$. El φ^*-sistema buscado resulta ser entonces, $\sigma^{-1}(y_1,\ldots,\sigma^{-1}(y_{\mu(t)})$.

<u>Proposición 5.4.9</u> Sea $I \subset \Gamma_k(n)$ ideal de $P_k(n)$ con λ- sucesión $\lambda(1),\ldots,\lambda(m)$ ... y números de salto $\theta(1)$ ... $\theta(t)$.

Entonces: rang $\delta^{l-1} I = \lambda(l)$.

<u>Demostración</u>: Sea $\{z_1,\ldots, z_{\mu(t)}\}$ un ϕ*-sistema para I. Por definición se tiene que $I \subset (z_1,\ldots, z_{\lambda(1)}) + (z_1 \ldots z_{\lambda(2)})^2 + \ldots + (z_1,\ldots, z_{\lambda(m)})^m + \ldots$

Aclaremos que si $\lambda(l) = 0$, $\{z_1,\ldots, z_{\lambda(1)}\} = \phi$, sistema parcial vacío.

Sea $J = (z_1,\ldots, z_{\lambda(1)}) + (z_1,\ldots, z_{\lambda(2)})^2 + \ldots + (z_1 \ldots z_{\lambda(m)})^m + \ldots$

Por corolario 5.1.8 se tiene que rang $\delta^{l-1} J = \lambda(1)$.

Luego basta ver que rang $\delta^{l-1} I$ = rang $\delta^{l-1} J$, $l = 1,2,\ldots$

Consideremos las siguientes proposiciones:

$$(*)\begin{cases} 1_l & : \delta^{l-1} I \subset \delta^{l-1} J \\ 2_l & : \text{rang } \delta^{l-1} I = \text{rang } \delta^{l-1} J . \end{cases}$$

Como $\delta^0 a = a$, para todo ideal a , 1_1 es válida.

Recordemos que rang $I = \dim_k \bar{I}$, donde $\bar{I} = \operatorname{Im}(I \to m/m^2)$.

Por defininición 5.4.2, caso $m = 1$, $\lambda(1) = \dim_k \rho(1)I$ donde $\phi(1) : P_k(n) \to P_k(n)/\Gamma_k(n)^2$.

Luego $\bar{I} = \rho(1)I$ y por tanto 2_1 es válida.

Supongamos (*) válido para $i = 1, 2, \ldots e$.

Notemos que $(1_l) + (2_l) \Rightarrow (1_{l+1})$ en virtud de la Proposición5.1.6.

Por lo tanto: s_{l+1}= rang $\delta^l I \leq$ rang $\delta^l J$. = $\lambda(l + 1)$.

Por Lema 5.1.10 existe un sistema de coordenadas $\{y_1,\ldots, y_{s_{l+1}} \ldots y_n\}$ (cualquier buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $I \subseteq \ldots \subseteq \delta^e I$) tal que :

$$I \subset (y_1,\dots y_{s_1})+(y_1,\dots,y_{s_2})^2+\dots+(y_1,\dots y_{s_l})^l+(y_1,\dots y_{l+1})^{l+1}+r_k(n)^{l+2}$$

Dado que suponemos $s_i = \lambda(i)$, $i = 1,\dots l$ no puede ocurrir que $s_{l+1} < \lambda(l+1)$, pues se contradiría el hecho de ser $\{\lambda(m)\}$ la λ-sucesión de I. Luego $s_{l+1} = \lambda(l+1)$, que completa la demostración de la proposición . #

<u>Corolario 5.4.10</u>: Bajo las mismas hipótesis de la proposición 5.4.9, sea l un entero $\theta(a) \leq l < \theta(a+1)$. (Ponemos $\theta(0) = 1$, $\mu(0) = 0$, $\theta(t') = \infty$, si $t' > t$).

Entonces:

$$\text{rang } \delta^{l-1} I = \mu(a). \text{ En particular: rang } \delta^{\theta(a)-1} I = \mu(a).$$

<u>Demostración</u>: basta recordar que $\mu = \lambda.\theta$ y la definición de la función de salto θ . #

Como consecuencia de la proposición 5.4.9 vemos que si $\{y_1,\dots,y_n\}$ es un buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $\{\delta^{i-1}I : i \geq 1\}$ entonces $\{y_1,\dots,y_{\mu(t)}\}$ es un ϕ^*-sistema para I.

Por otra parte si I tiene números de salto $\theta(1)\dots\ \theta(t)$, la cadena $\{\theta^{i-1} I : i \geq 1\}$ se estaciona en el ideal $\delta^{\theta(t)-1} I$.

El siguiente lema expresa la relación que existe entre un posible buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $\{\delta^{i-1}I, i \geq 1\}$ y un posible ϕ^*-sistema que prepara I y generadores $f_1,\dots,f_s$ de I.

<u>Lema 5.4.11</u> Sea $I = (f_1,\dots,f_s) \subset r_k(n)$ ideal de $P_k(n)$ con λ-sucesión $\{\lambda(i), i \geq 1\}$ y números de salto $\theta(1),\dots,\theta(t)$.

Sea $\{y_1,\dots,y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $\{\delta^{i-1}I, i \geq 1\}$.

Entonces existen $\mu(t)$ polinomios $P_1 \dots P_{\mu(t)}$ (a coeficientes en k) dependiendo de $\mu(t)$ variables y un ϕ^*-sistema $\{x_1, \dots, x_{\mu(t)}\}$ que prepara I y los generadores $f_1 \dots f_s$, tal que

$$(*) \qquad y_j = P_j(x_1 \dots x_{\mu(t)}) \ , \ j = 1, \dots, \mu(t).$$

<u>Corolario 5.4.12</u>

$$\{x_1 \dots x_{\mu(t)}\} \subset \delta^{\theta(t)-1} I \ .$$

<u>Demostración del corolario 5.4.12</u> Basta observar que

(i) $\{y_1 \dots y_{\mu(t)}\} \subset \delta^{\theta(t)-1} I$

(ii) La matriz jacobiana del sistema (*) es inversible en $P_k(n)$ y por tanto es posible obtener, a partir de (*), las x_j como series en $y_1 \dots y_{\mu(t)}$

(iii) Todo ideal de $P_k(n)$ es cerrado por límites, ya que $P_k(n)$ es un anillo de Zariski. #

<u>Demostración del lema 5.4.11</u> Por ser $\{y_1 \dots y_{\mu(t)}\}$ un ϕ^*-sistema para I se tiene que:

$$I \subset (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(t)})^{\theta(t)} .$$

Luego si $f_i = \sum_{d \geq 1} f_{id}$ $i = 1 \dots s$, con f_{id} componente de grado d de f_i , se deduce que para $1 \leq i \leq s$:

$$\begin{array}{lll}
f_{i\theta(1)}, \dots, f_{i\,\theta(2)-1} & \in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} & \\
f_{i\theta(2)}, \dots, f_{i\theta(3)-1} & \in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + (y_1 \dots y_{\mu(2)})^{\theta(2)} & \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \\
f_{i\theta(t-1)}, \dots, f_{i\,\theta(t)-1} & \in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(t)-1})^{\theta(t-1)} & \\
\qquad f_{id} & \in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(t)})^{\theta(t)}, & d \geq \theta(t).
\end{array}$$

por razones de grado y el hecho que I esté contenido en un ideal (no sólo homogéneo) generado por monomios.
sino

Pondremos $f_{ia} = f^*_{ia} + f^{**}_{ia}$ donde

(i) si $\theta(b) < a < \theta(b+1)$ (ie: a no es un número de salto) entonces

$$f^*_{ia} = 0 \text{ y } f^{**}_{ia} = f_{ia}$$

(ii) si $a = \theta(b)$, entonces $f^{**}_{ia} \in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$ y $f^*_{ia} \in (y_1 \dots y_{\mu(b)})^{\theta(b)}$ donde f^*_{ia} consiste de la combinación lineal de todos los monomios que figuran en f_{ia} y que no están en $(y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$.

De modo que en particular:

En $f^*_{\theta(b)}$ figuran sólo las variables $y_1 \dots y_{\mu(b)}$.

De la demostración del lema de preparación, aplicado a esta situación, puede concluirse que los monomios que intervienen en el conjunto de índices S_b son monomios (de grado $\theta(b) - 1$) en $y_1 \dots y_{\mu(b)}$, $1 \leqslant b \leqslant t$.

Si en $f^*_{\alpha_b(j)\,\theta(b)}$ aparecía un monomio M múltiplo de $m_{\theta(c)}(j)$ (suponiendo $(m_{\theta(c)}(j), \alpha_c(j)) \in S_c$ y $c < b$ de la forma $M = m_{\theta(c)}(j) \cdot Q$, Q resulta monomio en las variables $y_{\mu(b-1)+1}, \dots, y_{\mu(b)}$ ya que M era monomio de $f^*_{\alpha_c(j)\,\theta(c)}$ y si en Q apareciese una variable de índice $\leqslant \mu(b-1)$ entonces $M \in (y_1 \dots y_{\mu(c)})^{\theta(c)}$, cosa absurda por definición de $f^*_{\alpha_b(j)\,\theta(b)}$.

La limpieza de tal monomio se realiza considerando un automorfismo σ de $P_k(n)$ de la forma

$$\begin{cases} \sigma(y_i) = y_i + \alpha_i Q, \ \mu(c-1) < i \leqslant \mu(c), \ \alpha_i \in k, \text{ convenientemente elegido.} \\ \sigma(y_i) = y_i, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Luego de un número finito de pasos se obtiene un automorfismo de σ de $P_k(n)$, composición de todos los usados en el proceso de eliminación de múltiplos de los distinguidos, de modo tal que:

σI queda preparado, así como los generadores $\sigma(f_i)$, $i = 1,\ldots s$, respecto del sistema $y_1 \ldots y_{\mu(t)}$ y se verifica:

$$\begin{cases} \sigma(y_j) = y_j + \Pi_j(y_{\mu(b\ 1)\ 1}, \ldots, y_{\mu(t)}) & , \text{ si } \mu(b) < j \leqslant \\ & \leqslant \mu(b+1) \text{ para } b = 0, \\ & 1, \ldots + -1 \\ & \Pi_j \text{ polinomios.} \\ \sigma(y_j) = y_j \ , \ j > \mu(t) & \end{cases}$$

En la demostración del lema 5.4.7 puede verse que entonces, poniendo $x_j = \sigma^{-1}\ y_j$, $j = 1 \ldots \mu(t)$ I queda preparado, así como $f_1 \ldots f_s$, respecto del ϕ^*-sistema $\{x_1 \ldots x_{\mu(t)}\}$. O sea

$$y_j = P(x_1, \ldots, x_{\mu(t)}) \; .$$

como se quería demostrar. #

Estamos en condiciones de pasar al resultado central de esta sección.

<u>Teorema 5.4.13</u> Sea I un ideal de A, generado por $f_1 \ldots f_s$.

Supongamos un maximal de A, $m \in \sum(\lambda; i_1, i_2 \ldots)$.

Entonces existe un entorno abierto v de m en $\sum(\lambda; i_1, i_2 \ldots)$ y un ϕ^*-sistema $\{x_1 \ldots x_{\mu(t)}\}$ para $I.\hat{A}_m$ que prepara $I\hat{A}_m$ y los generadores $f_1 \ldots f_s$, tal que $\{x_1 \ldots x_{\mu(t)}\}$ es un ϕ^*-sistema para $I\hat{A}_{m'}$, que prepara $I\hat{A}_{m'}$ y los generadores $f_1 \ldots f_s$, para todo $m' \in V$.

<u>Demostración</u>

Sea $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A para la cadena $\{\delta_m^{i-1}\ I\}$.

Por el Lema 5.3.1, existe un abierto v (entorno de m) donde $\{y_1, \ldots, y_{\mu(t)}\}$ es parte de un buen sistema de coordenadas de m' en A, $m' \in v$.

Por el Lema 5.2.3, $\{y_1, \ldots, y_{\mu(t)}\} \subset m'$, $m' \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \ldots)$.

Por el Lema 5.4.11, existe un ϕ^*-sistema $\{x_1,\ldots,x_{\mu(t)}\}$ en $\hat{A}_m$ que prepara I y los generadores $f_1,\ldots f_s$, y $\mu(t)$ polinomios P_j tales que:

$$(*) \quad y_j = P_j(x_1,\ldots, x_{\mu(t)}),\ j = 1,\ldots, \mu(t) .$$

Sea $j(X_1,\ldots,X_{\mu(t)})$ = jacobiano del sistema (*); $j(X_1,\ldots,X_{\mu(t)}) \in A$.

Sea $m' \in \sum(\lambda;i_1,i_2,\ldots)$ tal que $j(X_1,\ldots,X_{\mu(t)}) \notin m'$.

Dado que la preparación de I en m' (i.e. en $I\hat{A}_{m'}$) puede llevarse a cabo de modo similar al hecho en Lema 5.4.11 para m, partiendo en ambos casos del sistema parcial $\{y_1,\ldots,y_{\mu(t)}\}$, veamos que el proceso de limpieza en m' es idéntico al de m.

Para esto basta observar los siguientes hechos:

(i) $f^*_{i\,\theta(b)}$ tiene la misma escritura, $m' \in \sum(\lambda;i_1,i_2,\ldots)$, pues depende solamente de las variables $y_1,\ldots, y_{\mu(t)}$ (que como se vio, figuran en el buen sistema elegido en m').

(ii) Si bien respecto de $\{y_1,\ldots y_{\mu(t)}, y'_{\mu(t)+1},\ldots y'_n\}$, sistema de coordenadas de $\hat{A}_m$, variarán los demás componentes, seguirán siendo válidas las mismas relaciones que valían en $\hat{A}_m$, ya que en el sistema adoptado figuran las variables $y_1,\ldots,y_{\mu(t)}$. Más explícitamente:

si $f_i = \sum G_{ia}$, G_{ia} polinomios homogéneos de grado d en $\{y_1,\ldots, y_{\mu(t)}, y'_{\mu(t)+1},\ldots,y'_n\}$

se tiene que: a) $G^*_{i\,\theta(b)} = F^*_{i\,\theta(b)}$, $b=1,2,\ldots t$;

b) $G^{**}_{i\,\theta(b)} \in (y_1,\ldots,y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \ldots + (y_1,\ldots,y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$

c) $G_{ia} \in (y_1,\ldots,y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \ldots + (y_1,\ldots,y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$

si $\theta(b) < a < \theta(b+1)$.

Luego: las matrices de polarización

filas distinguidas

y automorfismos del proceso en m',

pueden ser elegidos de modo idéntico al hecho en m.

En particular se obtiene un sistema $\{x_1',\ldots,x_{\mu(t)}'\}$, preparatorio de $I.\hat{A}_{m'}$ y de los generadores $f_1,\ldots,f_s$, y los <u>mismos</u> polinomios P_j tales que:

$$y_j = P_j(x_1',\ldots,x_{\mu(t)}'),\ j=1,\ldots,\mu(t).$$

Luego $x_i = x_i'$, $i=1,2,\ldots,\mu(t)$, y esto es válido en todo maximal m' de V tal que $j(X_1,\ldots,X_{\mu(t)}) \notin m'$, condición que determina el abierto buscado. #

5.5: Como aplicación del operador δ pasamos a dar una nueva demostración del siguiente resultado de NAKAI [8] que caracteriza ciertos anillos locales regulares.

Sea R un anillo local, moetheriano con $\dim_{krull} R = d$

Sea $m = Rad(R)$ y supongamos que $R/m \cong k \subset R$ con $carac(k) = 0$

Teorema 5.5.1: Asumamos que el módulo diferencial $D(R/k)$ es de tipo finito como R-módulo. Entonces

$D(R/k)$ es libre de Rango d si y sólo si R es regular.

La demostración resultará de las siguientes proposiciones

5.5.2: Si $\hat{R}$ denota la completación m-ádica de R se tiene que R regular de dimensión d si y sólo si $\hat{R}$ regular de dimensión d.

Dem: es bien conocida. Ver por ejemplo Introduction to Conmutative Algebra, Prop. 11.24 Atiyah-Mc.Donald.

#

5.5.3: Si $D_c(R/k)$ denota el R-módulo diferencial m-ádico

$D(R/k)/\bigcap_{r=1}^{\infty} m^r D(R/k)$ vale que:

i) $D(R/k) = D_c(R/k)$, si $D(R/k)$ es de tipo finito

ii) $D_c(\hat{R}/k) = \hat{R} \otimes_R D_c(R/k)$

Dem: i) es clara pues R es un anillo de Zariski

ii) Ver [9]

#

5.5.4.: Siempre bajo la hipótesis $D(R/k)$ de tipo finito:

$$D(R/k) \text{ libre de Rango } d \Leftrightarrow D_c(\hat{R}/k) \text{ libre de Rango } d$$
como R-módulo como $\hat{R}$-módulo

Dem: ($\Rightarrow$) es clara de 5.5.3 ii)
Recíprocamente: recordemos que $\hat{R}$ es un R-módulo fielmente playo.
Sea $d' = \text{Rango}(D(R/k)) = \dim_K(k \otimes_R D(R/k))$
Por el lema de Nakayama, toda familia minimal de generadores de $D(R/k)$ tiene exactamente d'elementos.
Como $D_c(\hat{R}/k) = \hat{R} \otimes_R D(R/k)$ se sigue que

$$k \otimes_{\hat{R}} D_c(R/k) = k \otimes_{\hat{R}} (\hat{R} \otimes_R D(R/k)) = (k \otimes_{\hat{R}} \hat{R}) \otimes_R D(R/k) = k \otimes_R D(R/k)$$

de donde $\text{Rang}_{\hat{P}}\, D_c(\hat{P}/k) = \text{Rang}_R\, D(R/k)$.
Luego $d = d'$. ie ambos módulos tienen igual rango.
Existe por lo tanto una sucesión exacta:

$$(*) \quad 0 \to K \to R^d \to D(R/k) \to 0, \quad \text{con } R^d = \text{R-módulo libre de Rango } d.$$

Tensorizando (*) por $\hat{R} \otimes_R$ y usando que $\hat{R}$ es playo se obtiene la sucesión exacta de R-módulos:

$$0 \to \hat{R} \otimes_R K \to \hat{R}^d \to \hat{R} \otimes_R D(R/k) \to 0$$

ie

$$0 \to \hat{R} \otimes K \to \hat{R}^d \xrightarrow[\alpha]{} D_c(\hat{R}/k) \to 0$$

Por ser $D_c(\hat{R}/k)$ libre de Rango d se sigue que $\hat{R} \otimes_R K = 0$
Luego $K = 0$ por ser $\hat{P}$ fielmente playo, de donde la Tesis

#

5.5.5: Por un teorema debido a Cohen, $\hat{R}$ es imagen de un anillo local regular de la forma $k[[x_1,\ldots,x_n]]$

ie se tiene una sucesión exacta

$$0 \to I \to k[[x_1,\ldots,x_n]] \to \hat{R} \to 0$$

Afirmamos la siguiente equivalencia:

$$R \text{ regular y } \dim R = s \Leftrightarrow I = \delta I \text{ y } \mathrm{Rang}(I) = n-s$$

Dem: ($\Rightarrow$) Por el teorema 26, Pag. 303 [10] existe una familia de parámetros regulares $y_1,\ldots,y_n$ de $k[[x_1,\ldots,x_n]]$ tal que $I = (y_1,\ldots,y_{n-s})$

Es claro que de aquí $\mathrm{Rang}I = n-s$

Por otra parte resulta $I = \delta I$ ya que I admite $n-s$ generadores

($\Leftarrow$) Supongamos $I = \delta I$ con $\mathrm{Rang}(I) = n-s$

Según el corolario 5.1.11, $I = (y_1,\ldots,y_{n-s})$ con $y_1,\ldots,y_{n-s}$ una familia parcial de parámetros regulares. Invocando el Teorema 26. Pag. 303 [10] resulta $\hat{R}$ regular.

#

Nota: aquí juega un papel esencial el hecho que la característica de k sea nula, ya que por el corolario 5.1.11, puede verse que

$$\left.\begin{array}{r} I = \delta I \\ \mathrm{Rango}\ I = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I = 0 \qquad (*)$$

(*) Deja de valer si $\mathrm{carac}(k) = p > 0$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$I = (x_1^p,\ldots,x_n^p) \subset k[[x_1,\ldots,x_n]] \quad (\mathrm{carac}(k) = p > 0)$$

Ent. $\quad I = \delta I$, $I \subset (x_1,\ldots,x_n)^2$ y sin embargo $I \neq 0$

5.5.6: Supongamos que M sea un R-módulo de tipo finito, (R local) Entonces

$$\begin{array}{l} M \text{ es libre} \\ \text{de Rango } d \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} F_j(M) = 0\,, & 0 \le j \le d-1 \\ F_j(M) = R, & j \ge d \end{cases}$$

Este teorema se debe a K. Mount [4].

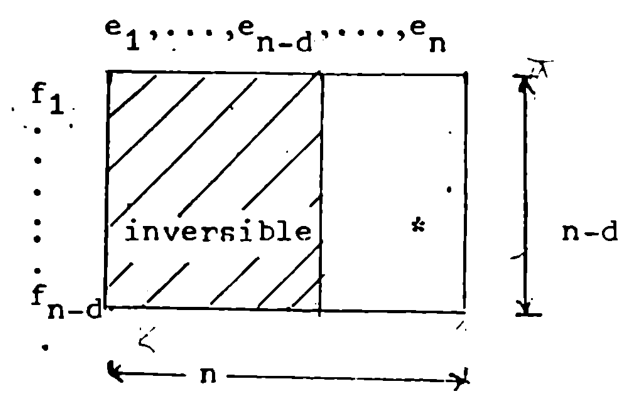
Dem: ($\Rightarrow$) Sigue de la definición de invariantes de Fitting ya que basta tener la sucesión exacta $0 \to R^d \to M \to 0$

Por lo convenido se tiene además que $F_j(M) = R$, $j \ge d$

($\Leftarrow$) Sea $0 \to K \xrightarrow[\alpha]{} R^n \to M \to 0$ exacta

Si (a_{ij}) es la matriz de coeficientes de elementos de K escritos en base $e_1,\ldots,e_n$ de R^n, la hipótesis $F_j(M) = 0$, $j = 0,1,\ldots,d-1$ $F_j(M) = R$, $j \ge d$ expresa que existe un menor de órden (n-d) de determinante inversible y que todo otro menor de dimensión $\ge$ n-d+1 posee determinante nulo. Nótese que de aquí, Rang(K) = n-d.

Reordenando filas y columnas podemos suponer que $f_1,\ldots,f_{n-d} \in K$ son tales que si $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j$, el $\det(a_{ij})$, $1 \le i,j \le n-d$, es una unidad en R. O sea que la matriz de relaciones presenta el siguiente aspecto:



Dado que mod m(ie en $k \otimes_R K$) $\{f_1,\ldots,f_{n-d}\}$ es una base de K/mK, tal conjunto es un sistema minimal de generadores de K.

Sea $(b_{ij}) \in R^{(n-d)\times(n-d)}$ la matriz inversa de la (a_{ij}), $1 \leq i,j \leq n-d$ (Rayada en la figura)

Si ponemos $f'_i = \sum_{j=1}^{n-d} b_{ij}\, f_j$, $\{f'_1,\ldots,f'_{n-d}\}$ es otro sistema minimal de generadores y la matriz de relaciones adopta la forma:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & e_1,\ldots\ldots,\ e_{n-d},\ldots & \ldots,e_n \\
\hline
f'_1 & 1 & \\
\vdots & \quad\ddots\quad id_{n-d} & * \\
f'_{n-d} & \qquad\qquad\ddots\ 1 & \\
\hline
\end{array}$$

Definimos la aplicación R-lineal: $\beta : R^n \to K$, $\beta(e_i) = f'_i$, $i = 1,\ldots,n-d$

$\beta(e_i) = 0$, $i \geq n-d+1$

Puede verificarse que $\beta \circ \alpha = id_k$ de donde la sucesión

$0 \to k \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightarrow}} R^n \to M \to 0$ se parte. M resulta sumando directo de R^n, luego proyectivo.

Al ser R local M es libre.

Finalmente $\mathrm{Rang}(M) = n-(n-d) = d$.

#

5.5.7: Recordemos que por prop. 5.2.1 se tiene que si

$$0 \to I \to k[[x_1,\ldots,x_n]] \xrightarrow{\lambda} R \to 0 \text{ es exacta}$$

entonces, si $\mathrm{Rang}(D_c(\hat{R}/k)) = d$ vale la siguiente fórmula

$$\lambda^{-1}(F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k))) = \delta I$$

De 5.5.2 se tiene además que

$$\operatorname{rang}(D_c(\hat{R}/k)) = d \Rightarrow \operatorname{Rang}(I) = n-d$$

5.5.8: Estamos en condiciones de demostrar el teorema 5.1.1

($\Rightarrow$) Supongamos $D(R/k)$ en R-módulo libre de Rango d.

Por 5.5.4, $D_c(\hat{R}/k)$ es un $\hat{R}$-módulo libre de Rango d.

Por 5.5.6, $F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k)) = 0$, $F_d(D_c(\hat{R}/k)) = R$

Por 5.5.7, $\lambda^{-1}(F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k))) = \delta I$, pero como $F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k)) = 0$ se tiene que $\lambda^{-1}(0) = I$ ie $I = \delta I$ donde además Rang I $= n-d$

Por 5.5.5, $\hat{R}$ es regular de dimensión d

Por 5.5.2, R es regular de dimensión d

($\Leftarrow$) Supongamos R regular de dimensión d.

Por 5.5.2, $\hat{R}$ es regular y $\dim \hat{R} = d$

Por 5.5.5, $I = \delta I$ y $\operatorname{Rang} I = n-d$, de donde $\operatorname{Rang}(D_c(\hat{R}/k) = d$

Como λ es survectiva:

$$\lambda(\delta I) = F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k))$$

Pero $I = \delta I$ implica $F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k)) = 0$

Ahora: $\operatorname{Rang} D_c(\hat{R}/k) = d$ implica $F_d(D_c(\hat{R}/k)) = R$

Luego por 5.5.6, $D_c(\hat{R}/k)$ es libre de Rango d y finalmente $D(R/k)$ resulta libre de Rango d, por 5.5.4 #

Carlos L. Sulsi

BIBLIOGRAFIA

[1] J.M.BOARDMAN, Singularities of differentible maps. Publ. Math. I.H.E.S. 33 (1967), 21-57

[2] FITTING, Die Determinantenideale eines Moduls, Jahresbericht der Deutchen Math. Vereiningun, X, VI (1936)

[3] J.N.MATHER, On thom-Boardman SIngularities Dinamical Sistems, ed. M.M.Peixofo, Academic Press, New York 1973, pp 233-247

[4] K,MOUNT, Some remorks on Fitting's invariants, Pacific Journal of Math. 13 (1963), 1353-1357

[5] K.MOUNT y O.E.VILLAMAYOR, Taylor Seires and higher derivations Publivcación del Depto. de Matemática Facultad de Ciencias Exactas U.B.A. Argentina

[6] K.MOUNT y O.E.VILLAMAYOR, An algebraic construction of the gener singularities of Boardman-Thom. Publ. Math I.H.E.S. 43 (1974), 205-244

[7] K.MOUNT y O.E.VILLAMAYOR, Special Frames for Thom-Boardman singularities. No publicado.

[8] Y.NAKAI, On the theory of differentials in conmutative rings. J. Math. Soc. of Japan, 13 (1961), 63-84

[9] Y.NAKAI-S.SUZUKI, On m-adic. differentials J.Sci. Hiroshima Univ. Ser. A Vol. 24, N° 3 (1960)

[10] O.ZARISKI y P.SAMUEL, COnmutative Algebra, Vol II.