Fórmulas canónicas de representación para funciones positivas reales de varias variables

Capri, Osvaldo Nicolás

1976

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENICAS EXACTAS Y NATURALES

OSVALDO NICOLAS CAPRI

FORMULAS CANONICAS DE REPRESENTACION PARA FUNCIONES POSITIVAS REALES DE VARIAS VARIABLES

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

BUENOS AIRES, DICIEMBRE DE 1976.

Quiero expresar mi más vivo agradecimiento y aprecio al Doctor ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ, Maestro de varias generaciones de matemáticos argentinos, no sólo la dirección de este trabajo, sino también, que he recibido su enseñanza y ayuda durante casi veinte años.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

I. RESULTADOS PRINCIPALES DE LA TESIS

Están constituidos por el Teorema 5.4 del Capítulo VI p.70, y el Teorema 4.2 del Capítulo IX p.110, que suministran sendas representaciones integrales, canónicas, de las funciones operatoriales positivas reales de varias variables.

I.1. Teorema 5.4. Cap. VI p.70

Este teorema se obtiene por especialización del Teorema 3.1 del Cap. VI p.58, que suministra una fórmula canónica de representación de las funciones operatoriales de parte real positiva en D^n. De este último teorema se obtiene, en el caso particular que el espacio de Hilbert H sea unidimensional, la fórmula (11) de pág. 17, que es equivalente, aunque más simple, a la obtenida por V.S. Vladimirov [28] .

El Teorema 5.4 es una amplia generalización de un famoso teorema de Cauer (c f. Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932) pp. 713-717), de básica importancia en la teoría de los circuitos eléctricos lineales, el cual afirma que toda función positiva real, escalar, unidimensional, admite la representación canónica de la fórmula (1) de pág. 45. La importancia de la fórmula de Cauer estriba en que la familia de las funciones representada por ella, coincide con la familia de las impedancias de dipolos (o sea, - 1 puertos) lineales, pasivos e invariantes, de constantes concentradas (resistencias, bobinas, condensadores, transformadores ideales y giradores). La fórmula de Cauer se obtiene de la fórmula (37) de pág. 71, poniendo en esta última H = C, n = 1.

La fórmula (37) de pág. 71 contiene también, como casos particulares, otras importantes fórmulas. Si se pone en dicha fórmula $H = R^m$, m = 1, se obtiene un teorema de Youla ([3] ,

p. 86, Theorem 3.1.6.)*, que da una representación canónica de la impedancia de todo m-puerto lineal, pasivo e invariante de constantes concentradas. Si se pone en la fórmula (37) de pág. 71, n=1, se obtiene un teorema de Zemanian ([30] , p. 182), Theorem 8-11-3), que suministra una representación canónica de la impedancia de un infinito-puerto (o puerto de Hilbert) de constantes concentradas.

Puede observarse que los importantes teoremas de Cauer, Youla y Zemanian, recién citados, se refieren todos ellos a funciones positivas reales unidimensionales; lo que mueve a preguntarse si la generalización multidimensional de estos teoremras, que hemos obtenido en el Teor. 5.4 del Cap. VI pág. 70, tiene interés para las aplicaciones. La respuesta es afirmativa. En efecto, recientemente se ha descubierto**el hecho interesante que la impedancia de m-puertos lineales mixtos***puede identificarse con una función positiva real de varias variables**. Esta aplicación inesperada de la teoría de funciones de varias variables complejas a la teoría de los circuitos lineales confiere interés al Teorema 5.4; pues el suministra una representación canónica de la impedancia de m-puertos lineales (pasivos e invariantes) mixtos ($1 \leqslant m \leqslant \infty$); y también, como acabamos de ver, (es el caso particular n=1), de la impedancia de m-puertos lineales de constantes concentradas.

I.2. El segundo resultado principal de la tesis es el Teorema 4.2

---

* Los números entre paréntesis cuadrados remiten a la bibliografía al final de este trabajo.

** cf. T.KOGA Synthesis of finite passive networks, IEE Trans. Circuit Theory, CT - 15 (1968).

*** Es decir, que contienen elementos concentrados y elementos distribuidos (trozos de línea no disipativa de transmisión).

del Cap. IX pág.110.

Para la demostración del Teorema 4.2 utilizamos teoremas de representación espectral; que valen gracias a que la función positiva real F, por hipótesis, es un operador normal para todo punto de D^n. En la demostración intervienen esencialmente tres teoremas: el Teorema 4.2 del Capítulo VII, pág. 87, que suministra una representación canónica de las funciones operatoriales $F : D^n \longrightarrow L(H)$, holomorfas y de parte real acotada en D^n; el Teorema 2.2 del Capítulo IX, pág. 87, que es una generalización, al caso de n variables, de un teorema de González Domínguez y Calderón (cf [13] , p. 3, Teorema 1); y un teorema enunciado por HALMOS [16] , que demostramos en detalle en el Apéndice D (Teorema 3.1 pág.143).

El Teorema 4.2 es una amplia generalización (a la vez operatorial y multidimensional) de un teorema de González Domínguez, que da una representación canónica, de tipo exponencial, de todas las funciones positivas reales, escalares, de una variable; cf. [13] p. 12, Teorema 8. Este teorema se obtiene poniendo en el Teorema 4.2, H = C, n = 1. Poniendo en el teorema 4.2. $H = C^m$, m = 1, se obtiene otro teorema de González Domínguez cf [13] , p. 8, Teorema 6.

El Teorema 4.2 es ciertamente menos general que el Teorema 5.4. Esto no quita para que tenga interés; entre otras cosas porque, en el importante caso particular H = C, suministra una fórmula general de representación de las funciones positivas reales escalares de varias variables.

CAPITULO I

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS FUNCIONES DE PARTE REAL POSITIVA EN EL POLIDISCO D^n

1. Introducción.

El objeto principal de este capítulo es la prueba del TEOR. 3.1. que generaliza a n variables complejas el siguiente teorema bien conocido. El mismo será utilizado en la prueba del TEOR. II.3.3.

1.1. TEOREMA

Si $f : D \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el semiplano D, entonces existen los límites, para todo $\delta > 0$,

$$W_\delta - \lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = W_\delta - \lim_{|z|\to\infty} f'(z) = W_\delta - \lim_{|z|\to\infty} \frac{u(z)}{x} = c > 0$$

donde c es una constante negativa.

1.2. Notación Utilizada.

Con D simbolizamos el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ del plano complejo $\mathbb{C}$ y con D^n el polisemiplano $D^n = \{ (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 > 0,\ldots,\operatorname{Re} z_n > 0$.

Para todo $\delta > 0$, W_δ es el siguiente sector angular:

$$W_\delta = \{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} + \delta < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2} - \delta \}.$$

Escribiremos

$$W_\delta - \lim_{|z|\to\infty} f(z) = c$$

cuando, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que, si $|z| > M$ y $z \in W_\delta$, entonces

$$|f(z) - c| < \varepsilon.$$

Es decir, que el límite de la función f, cuando z tiende al punto ∞ , conservándose en el interior del sector angular W_δ, es igual a c.

Con Δ simbolizamos el disco Δ y con Δ^n el polidisco

$$\Delta^n = \{(W_1,\dots,W_n) : |W_1| < 1,\dots,|W_n| < 1\} .$$

2. Desigualdades Básicas.

La siguiente proposición es una extensión n dimensional del lema de Schwarz.

2.1. Proposición.

Si $g : \Delta^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en el polidisco Δ^n, $g(0, \dots, 0) = 0$ y si $|g(W_1, \dots, W_n)| \leq 1$ en todo punto del polidisco, entonces

$$(1) \qquad |g(W_1, \dots, W_n)| \leq \text{Max}\,(|W_1|, \dots, |W_n|) .$$

Demostración. Véase GUNNING-ROSSI "Analytical Funcions of Several Complex Variables", Cap. I.8 pág. 8.

2.2. Proposición. (28, p. 129)

Si $g : \Delta^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polidisco Δ^n, entonces, para todo punto del polidisco

$$(2) \qquad |g(W_1,\dots,W_n)| \leq \text{Im}\, g(0,\dots,0) + \text{Re}\, g(0,\dots,0) \underset{1< j <n}{\text{Máx}} \frac{1+|W_j|}{1-|W_j|}$$

$$(3) \qquad |u(W_1,\dots,W_n)| \leq |u(0,\dots,0)| \cdot \underset{1 < j < n}{\text{Máx}} \frac{1+|W_j|}{1-|W_j|}$$

donde $u = \text{Re}\,g$

Demostración.

Comencemos por suponer que el valor $g(0,\dots,0)$ es real. Entonces, sea $f : \Delta^n \to \mathbb{C}$ la función definida en el polidisco por la expresión

$$f(W_1,\dots,W_n) = \frac{g(W_1,\dots,W_n) - g(0,\dots,0)}{g(W_1,\dots,W_n) + g(0,\dots,0)}$$

Es fácil comprobar que, la función f así definida, satisface todas las hipótesis de la proposición precedente, y por lo tanto tenemos que

$$|f(W_1,\dots,W_n)| \leqslant \underset{1< j\leqslant n}{\text{Máx}} |W_j|$$

O sea que, si $|z_i| = \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{máx}} |z_j|$,

$$\left| \frac{g(W_1, \dots, W_n) - g(0, \dots, 0)}{g(W_1, \dots, W_n) + g(0, \dots, 0)} \right| \leqslant |W_i|$$

Una simple transformación algebraica de esta desigualdad conduce a

$$|g(W_1,\dots,W_n)| < g(0,\dots,0) \frac{1+|W_i|}{1-|W_i|} = g(0,\dots,0) \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{Máx}} \frac{1+|W_j|}{1-|W_j|}$$

que es la desigualdad (2) de la tesis en el caso que $g(0,\dots,0)$ sea real. En el caso general aplicamos esta última desigualdad a la función

$$g(W_1,\dots,W_n) - i\ I\ \ g(0,\dots,0)$$

y así obtenemos

$$(4) \qquad |g(W_1,\dots,W_n) - i\ \text{Im}\ g(0,\dots,0)| \leqslant \text{Re}\ g(0,\dots,0) \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{Máx}} \frac{1+|W_j|}{1-|W_j|}$$

de la que se deriva en forma trivial la igualdad (2) de la tesis. La desigualdad (3) de la tesis, se deduce de (4) utilizando la siguiente desigualdad evidente

$$|u(W_1,\dots,W_n)| \leqslant |g(W_1,\dots,W_n) - i \operatorname{Im} g(0,\dots,0)|$$

2.3. Proposición.

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, y si $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ es un punto arbitrario de dicho polisemiplano, entonces

$$(5) \qquad |f(z_1,\dots,z_n)| \leqslant |\operatorname{Im} f(\xi_1,\dots,\xi_n)| + \operatorname{Re} f(\xi_1,\dots,\xi_n)\{\sum_{j=1}^{n} \frac{(|z_j|+|\xi_j|)^2}{\zeta_j \quad x_j}\}$$

$$(6) \qquad |u(z_1,\dots,z_n)| \leqslant u(\xi_1,\dots,\xi_n)\{\sum_{j=1}^{n} \frac{(|z_j|+|\xi_j|)^2}{\zeta_j \quad x_j}\}$$

donde $z_j = x_j + i\, y_j$, $x_j > 0$ $(j=1,\dots,n)$ y $\xi_j = \zeta_j + i\, \eta_j$ $(j=1,\dots,n)$

Demostración.

La siguiente transformación biholomorfa

$$(7) \qquad W_j = \frac{z_j - \xi_j}{z_j + \overline{\xi_j}} \quad , \quad z_j = \frac{\xi_j + \overline{\xi_j}\, W_j}{1 - W_j} \qquad (j=1,\dots,n)$$

representa multiconformemente el polisemiplano D^n del espacio de las variables $(z_1,\dots,z_n)$ en el polidisco Δ^n en el espacio de las variables $W_1,\dots,W_n$, y transforma la función $f(z_1,\dots,z_n)$ en la función

$$(8) \qquad g(W_1,\dots,W_n) = f(\frac{\xi_1 + \overline{\xi_1}\, W_1}{1 - W_1}, \dots, \frac{\xi_n + \overline{\xi_n}\, W_n}{1 - W_n}) .$$

La función g, así obtenida, es holomorfa y de parte real positiva en el polidisco Δ^n. Por consiguiente, podemos aplicar a g las desigualdades (2) y (3) de la Proposición 2.2., con lo cual obtenemos

$$(9) \qquad |g(W_1,\dots,W_n)| \leqslant |\operatorname{I_m} g(0,\dots,0)| + \operatorname{Re} g(0,\dots,0) \max_{1\leqslant j\leqslant n} (\frac{1+|W_j|}{1-|W_j|})$$

(10) $$\operatorname{Re} g(W_1,\dots,W_n) < \operatorname{Re} g(0,\dots,0) \max_{1\leq j\leq n} \left(\frac{1+|W_j|}{1-|W_j|}\right)$$

Volviendo a las primitivas variables, mediante las fórmulas (7) y (8) se obtienen

(11) $$|f(z_1,\dots,z_n)| < |\operatorname{Im} f(\xi_1,\dots,\xi_n)| + \operatorname{Re} f(\xi_1,\dots,\xi_n) \max_{1<j<n} \left(\frac{|z_j+\overline{\xi_j}|+|z_j-\xi_j|}{|z_j+\overline{\xi_j}|-|z_j-\xi_j|}\right),$$

(12) $$|u(z_1,\dots,z_n)| < u(\xi_1,\dots,\xi_n) \max_{1<j<n} \left(\frac{|z_j+\overline{\xi_j}| + |z_j-\xi_j|}{|z_j+\overline{\xi_j}| - |z_j-\xi_j|}\right)$$

A continuación simplificamos la expresión que aparece dentro de los paréntesis de las fórmulas (11) y (12). Así obtenemos que

$$\frac{|z_j+\overline{\xi_j}| + |z_j-\xi_j|}{|z_j+\overline{\xi_j}| - |z_j-\xi_j|} \leq \frac{(|z_j| + |\xi_j|)^2}{\zeta_j \quad x_j}$$

pues son verdaderas las siguientes relaciones

$$|z_j + \overline{\xi_j}|^2 - |z_j - \xi_j|^2 = 4 \zeta_j x_j$$

$$(|z_j + \overline{\xi_j}| + |z_j - \xi_j|)^2 < 4(|z_j| + |\xi_j|)^2$$

De las fórmulas (11), (12), (13), se obtienen las siguientes:

$$|f(z_1,\dots,z_n)| \leq |\operatorname{Im} f(\xi_1,\dots,\xi_n) + \operatorname{Re} f(\xi_1,\dots,\xi_n) \max_{1\leq j\leq n} \frac{(|z_j| + |\xi_j|)^2}{\zeta_j \; x_j}$$

$$u(z_1,\dots,z_n) \leq u(\xi_1,\dots,\xi_n) \max_{1\leq j\leq n} \frac{(|z_j| + |\xi_j|)^2}{\zeta_j \quad x_j}$$

Las fórmulas (5) y (6) de la tesis resultan trivialmente, de estas últimas desigualdades.

2.4. Proposición.

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, entonces para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de dicho semiplano,

$$(14) \qquad |D_1 f(z_1,\ldots,z_n)| \leq \frac{u(z_1,\ldots,z_n)}{x_1}, \ldots, |D_n f(z_1,\ldots,z_n)| \leq \frac{u(z_1,\ldots,z_n)}{x_n}$$

donde $u = \operatorname{Re} f$, y D_j es el operador de diferenciación parcial respecto de la variable z_j.

Demostración.

Supongamos, en primer lugar, que la función $f : D \to \mathbb{C}$ sea una función de una sola variable compleja z, y que z_0 sea un punto fijo del semiplano D. Definimos la función $g : D \to \mathbb{C}$ por la expresión

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) + \overline{f(z_0)}} .$$

Es fácil ver que la función así definida satisface a la relación $|g(z)| < 1$ para todo z de D.

Mediante la transformación biholomorfa

$$W = \frac{z - z_0}{z + \overline{z_0}}, \qquad z = \frac{z_0 + \overline{z_0}W}{1 - W}$$

efectuamos la representación conforme del semiplano D del plano z, sobre el disco Δ del plano W; y definimos la función $h : \Delta \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$h(W) = g\left(\frac{z_0 + \overline{z_0}\, W}{1 - W}\right) .$$

La función h así definida es, como es de fácil comprobación, holomorfa y de módulo menor o igual a uno, sobre el disco Δ ; y además se cumple que

$$h(o) = g(z_0) = 0 .$$

Por consiguiente, podemos aplicar a h el lema de Schwarz:

$$|h(W)| \leq |W|$$

Volviendo a la primitiva variable z, mediante las fórmulas (16) y (17) se obtiene

$$|g(z)| \leq \left|\frac{z - z_0}{z + \overline{z_0}}\right| ;$$

o sea, en virtud de la fórmula (15),

$$(18) \qquad \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) + \overline{f(z_0)}}\right| \leq \left|\frac{z - z_0}{z + \overline{z_0}}\right| .$$

De esta fórmula, resulta

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \leq \left|\frac{f(z) + \overline{f(z_0)}}{z + \overline{z_0}}\right|$$

Tomando límites en ambos miembros de la última desigualdad, cuando z tiende a z_0, se obtiene

$$|f'(z_0)| \leq \frac{u(z_0)}{x_0}$$

Queda así demostrado, por la arbitrariedad de z_0, el teorema en el caso n = 1.

El teorema, en el caso general, se prueba aplicando el resultado obtenido, a cada una de las funciones parciales

$$z_1 \to f(z_1,\dots,z_n), \quad \dots, \quad z_n \to f(z_1,\dots,z_n)$$

que se obtienen de la función f, fijando todas las variables excepto una de ellas.

3. Existencia de Derivadas Parciales Angulares.

El siguiente teorema extiende a n-variables el TEOR. 1.1. Para su deducción se ha imitado el procedimiento utilizado por VALIROM en su libro "Fonctions Analytiques" pag. 86/89, para demostrar el caso unidimensional de tal teorema.

3.1. TEOREMA.

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el semiplano D^n, entonces existen constantes reales y no negativas $c_1, \dots, c_n$, tales que, para todo $\delta > 0$

(19-a) $$W_\delta - \lim_{|z_1|\to\infty} \frac{f(z_1,\dots,z_n)}{z_1} = c_1, \quad \dots, \quad W_\delta - \lim_{|z_n|\to\infty} \frac{f(z_1,\dots,z_n)}{z_n} = c_n \, ,$$

(19-b) $$W_\delta - \lim_{|z_1|\to\infty} \frac{u(z_1,\dots,z_n)}{x_1} = c_1, \quad \dots, \quad W_\delta - \lim_{|z_n|\to\infty} \frac{u(z_1,\dots,z_n)}{x_n} = c_n \, ,$$

(19-c) $$W_\delta - \lim_{|z_1|\to\infty} D_1 f(z_1,\dots,z_n) = c_1, \quad \dots, \quad W_\delta - \lim_{|z_n|\to\infty} D_n f(z_1,\dots,z_n) = c_n \, .$$

Nota: En cada límite de las fórmulas (19) se han fijado todas las variables excepto una que se hace tender al infinito dentro del ángulo W_g del correspondiente plano complejo.

Demostración del Teorema 3.1.

Sean $c_1, \dots, c_n$ los números definidos por

(20) $$c_1 = \inf\left\{\frac{u(z_1,\dots,z_n)}{x_1} : (z_1,\dots,z_n) \in D^n\right\}, \dots, c_n = \inf\left\{\frac{u(z_1,\dots,z_n)}{x_n} : (z_1,\dots,z_n) \in D^n\right\} .$$

Evidentemente, los números $c_1, \dots, c_n$ son reales y no negativos.

Para cada índice k, comprendido entre 1 y n, sea g_k la función definida por

$$g_k(z_1,\dots,z_n) = f(z_1,\dots,z_n) - c_k\, z_k,$$

y sea $g_k = u_k + i\, v_k$, donde $u_k = \operatorname{Re} g_k$, $v_k = \operatorname{Im} g_k$.

De (20) y (21), resulta fácilmente que, la función g_k, para $1 < k < n$, es holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano. Asimismo, tenemos por (20) y (21), que

$$\text{(22)} \qquad \inf\left\{ \frac{u_k(z_1,\dots,z_n)}{x_1} \right\} = \inf\left(\frac{u(z_1,\dots,z_n)}{x_1}\right) - c_1 = 0 .$$

Aplicando a la función g_k, la desigualdad (5) de la Proposición 2.3., obtenemos

$$|g_k(z_1,\dots,z_n)| \leq |v_k(\xi_1,\dots,\xi_n)| + u_k(\xi_1,\dots,\xi_n) \sum_{j=1}^{n} \frac{(|z_j|+|\xi_j|)^2}{\xi_j \quad x_j}$$

donde $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es un punto arbitrario del polisemiplano. Dividiendo por z_k y reagrupando términos

$$\text{(23)} \qquad \left|\frac{g_k(z_1,\dots,z_n)}{z_k}\right| \leq \frac{v_k(\xi_1,\dots,\xi_n)}{|z_k|} + \frac{u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\xi_k} \frac{(|z_k|+|\xi_k|)^2}{|z_k| \cdot |x_k|} + \frac{u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)}{|z_k|} \sum_{j\neq k} \frac{(|z_j|+|\xi_j|)^2}{\xi_j \quad x_j}$$

Ahora bien si, para un $\delta > 0$, la variable z_k permanece dentro del ángulo W_g, por el LEMA 3.2., se cumple que

$$\text{(24)} \qquad \frac{(|z_k| + |\xi_k|)^2}{x_k \; |z_k|} \leq 4 \operatorname{cosec} \delta .$$

Por otra parte, en virtud de (21), dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos elegir el punto $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ en el polisemiplano D^n de manera que

3.2. Lema.

Si $z \in W_\delta$, y si $|z_0| \geqslant |z|$, entonces

(27) (a) $$\frac{(|z| + |z_0|)^2}{x\ |z|} \leqslant 4 \operatorname{cosec} \delta \ , \quad \text{(b)} \quad \frac{(|z| + |z_0|)^2}{x^2} < 4 \operatorname{cosec}^2 \delta$$

Demostración.

La siguiente desigualdad es geométricamente evidente:

$$\frac{x}{|z|} \geqslant \operatorname{sen} \delta$$

De aquí resultan las desigualdades (a) y (b). En efecto

$$\left(\frac{|z| + |z_0|}{x\ |z|}\right)^2 \leqslant \frac{4|z|^2}{x|z|} = \frac{4|z|}{x} \leqslant 4 \operatorname{cosec} \delta ,$$

$$\frac{(|z| + |z_0|)^2}{x^2} \leqslant \frac{4|z|^2}{x^2} \leqslant 4 \operatorname{cosec}^2 \delta .$$

La siguiente definición extiende al caso n-dimensional, el concepto de derivada angular debido a Caratheodory.

3.3. Definición.

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, las constantes $c_1, \ldots, c_n$, cuya existencia asegura el TEOR 3.1., se denominan derivadas parciales angulares (en el infinito) de la función f.

Escribiremos

$$D_1^\infty f = c_1, \ldots, D_n^\infty f = c_n$$

para simbolizar que las derivadas angulares de la función f, son iguales, respectivamente, a $c_1, \ldots, c_n$.

3.4. TEOREMA.

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, entonces la función f puede expresarse en la forma

$$f(z_1,\dots,z_n) = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n + f_1(z_1,\dots,z_n) ,$$

donde $c_1, \dots, c_n$ son constantes reales y positivas y $f_1 : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, de parte real positiva, y tal que

$$(29) \qquad D_1^\infty f = \dots = D_n^\infty = 0 .$$

Demostración.

El teorema es un caso particular de la siguiente proposición.

3.5. Proposición.

Sea $f : D^n \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, sean $c_1, \dots, c_n$ las derivadas parciales angulares de la función f y sea g_k la función definida por

$$(31) \qquad g_{k+1}(z_1,\dots,z_n) = f(z_1,\dots,z_n) - c_1 z_1 - \dots - c_k z_k,$$

siendo k un entero arbitrario comprendido entre 1 y n.

Entonces la función g_k así definida es holomorfa y de parte real positiva en D^n, y además

$$(31') \qquad D_j^\infty g_k = 0 \text{ si } j \leq k, \quad D_j^\infty g_k = c_j \text{ si } j > k .$$

Demostración.

Procederemos por inducción sobre el índice k.

La proposición es verdadera si k = 1. En efecto, de la demostración del TEOR 3.2. surge que la función

$$g_1(z_1,\dots,z_n) = f(z_1,\dots,z_n) - c_1 z_1$$

tiene parte real positiva en el polisemiplano. Además derivando (32) con respecto a las variables $z_1, \ldots, z_n$; y haciendo tender cada z_k al infinito, se obtiene

$$(32) \qquad D_1^\infty g_1 = 0 \ , \quad y \quad D_j^\infty g_k = c_j \quad \text{si } j > 1 \ .$$

Supongamos que la proposición sea cierta para un cierto índice $k < n$. Entonces de la relación obvia

$$(33) \qquad g_{k+1}(z_1,\ldots,z_n) = g_k(z_1,\ldots,z_n) - c_{k+1}\, z_{k+1}$$

de la hipótesis inductiva, y del caso $k = 1$ de la proposición a demostrar, se obtiene que $\operatorname{Re} g_{k+1} \geqslant 0$ en D^n.

Por otra parte derivando (33) con respecto a z_j y haciendo tender z_j a infinito, se obtiene, por (31),

$$\begin{array}{lll} \text{si} & j < k+1 & D_j\, g_{k+1} = D_j\, g_k = 0 \\ \text{si} & j = k+1 & D_{k+1}\, g_{k+1} = -c_{k+1} \\ \text{si} & j > k+1 & D_j\, g_{k+1} = c_j \end{array}$$

Así hemos probado que el teorema es verdadero para $k + 1$.

CAPITULO II

FUNCIONES DE PARTE REAL POSITIVA EN EL POLISEMIPLANO D^n.

1. Introducción.

El objeto principal de este capítulo es obtener una representación integral canónica de las funciones holomorfas y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, que sea análoga a la obtenida por KORANYI y PUKANSKI (21) en el caso del polidisco Δ^n; y que, por otra parte, se reduzca a la fórmula de NEVANNLINA-RIESZ (11, 5.7), en el caso unidimensional.

Si bien VLADIMIROV aborda el problema en su trabajo (28), su fórmula es excesivamente compleja. En cambio, nuestra fórmula, obtenida por distinta vía, es considerablemente más simple y, además, ofrece la ventaja de que de ella se obtiene, como caso particular, una representación integral de funciones de impedancia n-dimensionales que es la extensión natural de la fórmula clásica de CAUER.

2. Funciones de Parte Real Positiva en el Polidisco.

El contenido de este párrafo es meramente preparatorio.

2.1. TEOREMA (KORANYI y PUKANSKY (21)).

Si $g : \Delta^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polidisco $\Delta^n = \{(W_1,\dots,W_n)\in\mathbb{C} : |W_1|<1,\dots,|W_n|<1\}$, entonces la función f admite la siguiente representación

$$(1) \qquad g(W_1,\dots,W_n) = ic_0 + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\left\{\frac{2}{(1-c^{-i\theta_1}W_1)\dots(1-c^{-i\theta_n}W_n)} - 1\right\} d\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n),$$

donde c_0 es una constante real y λ es una medida de Borel sobre $T^n = (0, 2\pi)$ que satisface a la condición

$$(2) \qquad \int_{T^n} \exp\{-i(k_1\theta_1+\dots+k_n\theta_n)\}\, d\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n) = 0,$$

para toda n-upla de enteros $(k_1,\dots,k_n)$, excepto en los casos en que $k_1 \geq 0,\dots,k_n \geq 0$, y/o que $k_1 \leq 0,\dots, k_n \leq 0$.

Recíprocamente, si λ es una medida de Borel sobre T^n que satisfaga a las condiciones (2) y c_0 es una constante real, entonces la fórmula (1) define una función $g : \Delta^n \to \mathbb{C}$ que es holomorfa y de parte real positiva en dicho polidisco.

Demostración.

Véase el trabajo citado al principio.

2.2. Notas.

1) En el enunciado del teorema precedente, se considera sobre el intervalo semiabierto $T = [0, 2\pi)$ la topología determinada por la siguiente métrica:

$$d(s, t) = |e^{is} - e^{it}| \quad s.t \in T .$$

Por lo tanto T es compacto, por ser homeomorfo a la circunferencia unitaria. En efecto es fácil de ver que la aplicación $t \to \exp(it)$ es un homeomorfismo del espacio T sobre la circunferencia $\{w \in \mathbb{C} : |W| = 1\}$, y que esta última es compacta en la topología inducida por la topología del plano complejo.

Sobre el producto cartesiano $T^n = T_x \ldots x T$ se considera la topología producto. El espacio T^n es homeomorfo al toro n-dimensional que es igual a la frontera distinguida ("Shilov Boundary") del polidisco Δ^n.

2) Con el objeto de evitar repeticiones innecesarias, haremos la convención de llamar medida de Borel μ sobre un espacio topológico S, a toda medida μ , finita y positiva, definida sobre la tribu de Borel del espacio S. Quedan así fuera de consideración las medidas infinitas o las medidas signadas.

Por otra parte, como siempre en este trabajo, los espacios topológicos son metrizables, separables, y locamente compactos, toda medida de Borel sobre S es automáticamente regular (24, Th.2.18).

El siguiente lema será utilizado en la prueba del teorema principal de este capítulo.

2.3. LEMA.

Si $g : \Delta^n \to \mathbb{C}$ es la función definida en el polidisco Δ^n por la siguiente expresión

$$(3) \qquad g(W_1,\dots,W_n) = \int_{T^n} \left(\frac{2}{(1-W_1e^{-i\theta_1})\dots(1-W_ne^{-i\theta_n})} - 1 \right) d\,\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n)$$

donde λ es una medida de Borel sobre T^n, y si los límites siguientes existen

$$(4) \quad \lim_{W_1 \to +0} (1-W_1)g(W_1,0,\dots,0)=0, \; \dots, \; \lim_{W_n \to 1-0} (1-W_n)\, g(0,\dots,0,W_n) = 0$$

(donde al tender W_k a 1, dicha variable se mantiene siempre sobre el correspondiente eje real), entonces

$$(5) \qquad \lambda(T^n \setminus J^n) = 0 \qquad T = [0,\, 2\pi) \qquad J = (0,\, 2\pi)\ .$$

Demostración.

De la siguiente relación, de comprobación inmediata,

$$T^n \setminus J^n \subset (\{0\} \times T^{n-1}) \cup \dots \cup (T^{n-1} \times \{0\})$$

se obtiene

$$(6) \qquad \lambda\,(T^n \setminus J^n) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(T^{k-1} \times \{0\} \times T^{n-k})$$

Por otra parte, de (3) se obtiene fácilmente que, para todo k comprendido entre 1 y n, y $0 \leq W_k < 1$

$$(1-W_k)\; g(0,\dots,W_k,\dots,0) = \int_{T^n} \frac{1-W_k}{1-e^{-i\theta_k}W_k}\,(1+e^{-i\theta_k}W_k)\,d\lambda\,(\theta_1,\dots,\theta_n)\ .$$

Tomando límites en esta fórmula y teniendo en cuenta (4), obtenemos

$$(7) \quad 0 = \lim_{W_k \to 1-0} (1-W_1)\; g(0,\dots,W_k,\dots,0) = \int_{T^n} h(\theta_k)\,d\,\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n)$$

donde la función h que aparece en el integrando está dada por

$$h(\theta_k) = 1 \text{ si } \theta_k = 0, \quad h(\theta_k) = 0 \text{ si } \theta_k \neq 0$$

El paso del límite bajo el signo de integral es legítimo por el teorema de la convergencia mayorada de LEBESGUE, por ser la medida λ finita, y que el integrando admita la mayoración

$$\left| \frac{1 - W_k}{1-e^{-i\theta_k W_k}} (1+e^{-i\theta_k W_k}) \right| \leq \frac{|1 - W_1|}{(1-|W_1|)} (1+|W_k|) \leq 2$$

De la fórmula (7) se obtiene

$$\lambda(T^{k-1} \times \{0\} \times T^{n-k}) = \int_{T^n} h(\theta_k) \, d\, \lambda(\theta_1,\ldots,\theta_n) = 0$$

Finalmente, la tesis resulta de (6) y la igualdad precedente.

3. Funciones de Parte Real Positiva en el Polisemiplano D^n.

Con el objeto de evitar repeticiones introducimos la definición siguiente.

3.1. Definición.

Llamaremos medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$ a toda medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ que satisfaga a las relaciones:

$$(8) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{k_1}(i\, t_1)} \cdots \overline{\psi_{k_n}(i\, t_n)} \, d\, \mu(t_1,\ldots,t_n) = 0$$

para toda n-upla de enteros $(k_1,\ldots,k_n)$, salvo que, sean todos negativos o que sean todos no positivos.

Las funciones que figuran en el integrando de (8) son

$$(9) \qquad \psi_{k_1}(it_1) = \left(\frac{it_1-1}{it_1+1}\right)^{k_1}, \ \ldots, \ \psi_{k_n}(it_n) = \left(\frac{it_n-1}{it_n+1}\right)^{k_n}$$

Esta denominación de medida pluriarmónica quedará justificada cuando demostremos en el TEOR. II.4.1., que expresa que para que una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ sea pluriarmónica, es necesario y suficiente que, la función $v : D^n \to \mathbb{R}$ definida por la integral

$$v(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1(1+t_1^2)}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n(1+t_n^2)}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\,d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

sea parte real de una función holomorfa en el polidisco D^n.

3.2. Notación.

Para $z \in D$ y todo t real

$$(10) \qquad k(z,t) = \frac{(z+1)(it-1)}{2(it-z)}$$

3.3. TEOREMA .

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, entonces existe una única medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$ y constantes reales, unívocamente determinadas c_0, $c_1 \geq 0, \dots, c_n \geq 0$; tales que, para todo punto del polisemiplano,

$$(11) \quad f(z_1,\dots,z_n) = ic_0+c_1z_1+\dots+c_nz_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}\{2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1\}d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

Recíprocamente, si μ es una medida pluriarmónica y c_0, $c_1 \geq 0, \dots, c_n \geq 0$ son constantes reales, entonces la integral del segundo miembro de (11) existe para todo punto $(z_1, \dots, z_n)$ del polisemiplano, y la fórmula (11) define una función $f : D^n \to \mathbb{C}$ holomorfa y de parte real positiva.

Demostración.

Por el TEOR. I.3.4. la función f admite la siguiente descomposición

$$(12) \qquad f(z_1,\dots,z_n) = c_1z_1 + \dots + c_nz_n + f_1(z_1,\dots,z_n)$$

donde los coeficientes $c_1,\dots,c_n$ son constantes reales no negativas y f_1 es una función holomorfa y de parte real positiva que tiene todas sus <u>derivadas parciales angulares nulas</u>.

El siguiente cambio de variables biholomorfo

$$(13) \qquad W_1 = \frac{z_1-1}{z_1+1}, \dots, W_n = \frac{z_n-1}{z_n+1}; \quad z_1 = \frac{1+W_1}{1-W_1}, \dots, z_n = \frac{1+W_n}{1-W_n}$$

transforma biyectivamente el poliplano D^n del espacio de las variables $z_1,\dots,z_n$ en el polidisco $\Delta^n = \{(W_1,\dots,W_n)\in C^n : |W_1|<1,\dots,|W_n|<1\}$ en el espacio de las variables $W_1,\dots,W_n$. Correlativamente sea $g_1 : \Delta^n \to \mathbb{C}$ la función definida por la siguiente expresión

$$(14) \qquad g_1(W_1,\dots,W_n) = f_1\left(\frac{1+W_1}{1-W_1}, \dots, \frac{1+W_n}{1-W_n}\right)$$

de la que resulta fácilmente, por (13), que

$$(14') \qquad f_1(z_1,\dots,z_n) = g_1\left(\frac{z_1-1}{z_1+1}, \dots, \frac{z_n-1}{z_n+1}\right)$$

Es fácil de ver que la función g_1 así definida es holomorfa y de parte real positiva en el polidisco Δ^n. Por lo tanto, en virtud del TEOR. 2.1., la función g_1 admite la siguiente representación:

$$(15) \qquad g_1(W_1,\dots,W_n) = ic_0 + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} \frac{2}{(1-e^{-i\theta_1}W_1)\dots(1-e^{-i\theta_1}W_n)} -1 \, d\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n)$$

donde c_0 es una constante real y λ es una medida de Borel sobre el espacio T^n ($T = [0, 2\pi)$, $T^n = T\times \dots \times T$) que satisface las relaciones

$$(16) \qquad \int_{T^n} \exp\{-i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)\}\, d\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n) = 0$$

para toda n-upla de enteros $(k_1,\dots,k_n)$ excepto si $k_1\geq 0,\dots,k_n\geq 0$ y si $k_1\leq 0,\dots,k_n\leq 0$.

A continuación comprobaremos que la función g_1, definida por (14), satisface las hipótesis del LEMA 2.3., o sea que se verifican las relaciones (14) para la función g_1.

En efecto por las fórmulas (14) y (13), y en virtud del TEOR I.3.1., existen los siguientes límites

$$\lim_{W_1 \to \lambda - 0} \frac{1-W_1}{1+W_1} g(W_1, 0, \ldots, 0) = \lim_{x_1 \to \infty} f_1(x_1, 1, \ldots 1), \ldots$$

$$\ldots \lim_{W_n \to 1-0} \frac{1+W_n}{1-W_n} g_1(1,1,\ldots,W_n) = \lim_{x_n \to \infty} \frac{f_1(1,1,\ldots,x_n)}{x_n}$$

De donde, en virtud del TEOR. I.3.1. y por el hecho que las derivadas parciales angulares de f_1 son nulas, se obtienen las relaciones (4).

Por consiguiente puede aplicarse el LEMA 2.3. para concluir que

$$(17) \qquad \lambda\,(T^n \setminus J^n) = 0$$

Con lo cual, las integrales (15) y (16) pueden ser consideradas extendidas al conjunto J^n, en vez del conjunto T^n. De este modo, tenemos que

$$(18) \qquad g_1(W_1,\ldots,W_n) = ic_0 + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{J^n} \left\{ \frac{2}{(1-e^{-i\theta_1}W_1)\ldots(1-e^{-i\theta_n}W_n)} - 1 \right\} d\lambda(\theta_1,\ldots,\theta_n)$$

$$(19) \qquad \int_{J^n} \exp\{-i(j_1\theta_1 + \ldots + j_n\theta_n)\}\, d\lambda(\theta_1,\ldots,\theta_n) = 0$$

para toda n-upla de enteros $(j_1,\ldots,j_n)$ salvo que $(j_1,\ldots,j_n)$ sean todos del mismo signo.

Mediante las fórmulas de transformación (13) y (14'), volvemos a las variables originales $z_1,\ldots,x_n$ en la fórmula (18), obteniendo

$$(20)\ f_1(z_1,\ldots,z_n) = ic_0 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{J^n} \frac{2(z_1+1)\ \ldots\ (z_n+1)}{((z_1+1)-(z_1-1)e^{-i\theta_1})\ldots((z_n+1)-(z_n-1)e^{-i\theta_n})} -1\}\ d\lambda(\theta_1,\ldots,\theta_n)$$

A continuación efectuaremos un cambio de medida en las integrales (25) y (19), utilizando a tal efecto un conocido teorema de teoría de la medida [14, pag. 163] o [17, pág. 180].

Sea $\pi : J^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación definida por

$$(21)\qquad \pi(\theta_1,\ldots,\theta_n) = (\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta_1,\ \ldots,\ \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta_n)$$

que transforma biyectivamente el cubo J^n en todo el espacio $\mathbb{R}^n$; y sea μ_1 la medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ (μ_1 es la imagen de la medida λ por la transformación π) definida por

$$\mu_1(B) = \lambda(\pi^{-1}(B)),$$

para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{R}^n$. Entonces, en virtud del precitado teorema, para toda función λ-integrable $k : J^n \to \mathbb{C}$, tenemos que

$$(22)\qquad \int_{J^n} k(\theta_1,\ldots,\theta_n)\,d\lambda(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\pi^{-1}(t_1,\ldots,t_n))\,d\mu_1(t_1,\ldots,t_n)$$

donde

$$t_1 = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta_1,\ \ldots,\ t_n = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\theta_n$$

Aplicando la fórmula (22) a la integral de la fórmula (20) obtenemos

$$(23)\ f_1(z_1,\ldots,z_n) = ic_0 + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \{\frac{2(z_1+it_1)(it_1-1)\ldots(z_n+it_n)(it_n-1)}{2^n(it_1-z_1)\ldots(it_n-z_n)} -1\}\,d\mu_1(t_1,\ldots,t_n)$$

En la deducción de la fórmula (23) se han empleado las siguientes relaciones, trigonométricas y algebraicas.

(24) $$e^{-i\theta} = \cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta = \frac{t^2-1}{t^2+1} - i\frac{2t}{t^2+1} = \frac{it+1}{it-1} \quad \text{donde } t = \mathrm{cotg}\,\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{cotg}^2\, 1/2\theta - 1}{\mathrm{cotg}^2\, 1/2\theta + 1} \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{2\,\mathrm{cotg}\, 1/2\,\theta}{\mathrm{cotg}^2\, 1/2\theta + 1}$$

$$\frac{z+1}{(z+1)-(z-1)e^{-i}} = \frac{(z+1)\,(it-1)}{(z+1)(it-1)-(z-1)(it+1)} = \frac{(z+1)(it-1)}{2\,(it-z)}$$

De la fórmula (23), usando la definición (10) de los núcleos $k(z,t)$, se obtiene

$$f_1(z_1,\ldots,z_n) = ic_0 + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} \{2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\}\, d\mu_1(t_1,\ldots,t_n)$$

Finálmente, definiendo la medida μ como la medida que se obtiene de μ_1 multiplicándola por el factor $\frac{1}{2^n}$ ($\mu = \frac{1}{2^n}\mu_1$) y haciendo uso de la fórmula (12), obtenemos

$$f(z_1,\ldots,z_n) = ic_0 + c_1z_1 + \ldots + c_nz_n + \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} \{2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

que es la fórmula (11) de la tesis.

Para probar que la medida es pluriarmónica, aplicamos a la integral (19) la fórmula de transformación (22). Obtenemos así, por (24),

$$\int_{J^n} \left(\frac{it_1+1}{it_1-1}\right)^{j_1} \ldots \left(\frac{it_n+1}{it_n-1}\right)^{j_n} d\mu(t_1,\ldots,t_n) = 0$$

salvo que los enteros $j_1,\ldots,j_n$ sean todos del mismo signo. Expresión que puede escribirse, por las relaciones (9), así

$$\int_{J^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)} \ldots \overline{\psi_{j_n}(it_n)}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n) = 0$$

Con lo cual queda probado que la medida satisface las relaciones de pluriarmonidad.

La unicidad de la medida en la representación (11) será probada en el COR III 3.7.

La parte recíproca de la tesis es consecuencia inmediata del teorema siguiente (TEOR. 3.5.)

3.4. COROLARIO (Fórmula de Nevannlina-Riesz) Véase (11, 5.7.) ó (3, pág. 99).

Si $f: D \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el semiplano $D = \{Re\ z > 0\}$, entonces la función f admite la representación siguiente,

$$(25) \qquad f(z) = ic_0 + c_1 z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-itz}{z-it}\, d\mu(t)$$

donde c_0 es real, c_1 real y no negativo, y μ es una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^1$.

Recíprocamente, la integral (25) representa una función f de parte real positiva y holomorfa en el semiplano D.

Demostración.

La fórmula (25) es un caso particular, cuando n=1, del TEOR. 3.3., como se ve fácilmente utilizando la relación

$$(26) \qquad 2k(z,t) - 1 = \frac{1-itz}{z-it}$$

que es de fácil comprobación.

3.5. TEOREMA.

Si μ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$ y si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es la función definida por la siguiente integral,

$$(27) \quad f(z_1,\ldots, z_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \{2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ del polisemiplano; entonces la función f así definida es holomorfa y su parte imaginaria está expresada por la siguiente integral

(28) $$u(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\; d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

donde

(29) $$p(z_1,t_1) = \frac{(1+t_1^2)x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\;,\;\ldots,\; p(z_n,t_n) = \frac{(1+t_n^2)x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad\qquad z_n = x_n + iy_n$$

Demostración:

Para probar el teorema utilizaremos los desarrollos en serie obtenidos en el Apendice A.

En primer lugar hacemos notar que las integrales (27) y (28) existen porque los respectivos integrandos son funciones continuas y acotadas de las variables $t_1,\ldots,t_n$, para cada punto $(z_1,\ldots,z_n)$ del polidisco y además la medida μ es finita.

Por la fórmula A.8

$$k(z_1,t_1) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\overline{\psi_{j1}(it_1)}\;\psi_{j1}(z_1),\ldots,k(z_n,t_n) = \sum_{j_n=0}^{\infty}\overline{\psi_{jn}(it_n)}\psi_{jn}(z_n)$$

Sustituyendo estos desarrollos en (27) obtenemos:

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n}\{\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_n=0}^{\infty} 2\overline{\psi_{j1}(it_1)}\ldots\overline{\psi_{jn}(itn)}\psi_{j1}(z_1)\ldots\psi_{jn}(z_n)-1\}d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

La serie múltiple, que aparece en el integrando, como es fácil de ver, es uniformemente convergente respecto a las variables $(t_1,\ldots,t_n)$, para cada vector fijo $(z_1,\ldots,z_n)$ del polisemiplano. Por consiguiente, y por la finitud de la medida μ, la serie es integrable término a término. De modo que, así obtenemos

(30) $$f(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{j_1=0}^{\alpha}\ldots\sum_{j_n=0}^{\infty} 2c_{j1,\ldots,jn}\psi_{j1}(z_1)\ldots\psi_{jn}(z_n)-ic_{o,\ldots,o}$$

donde los coeficientes están dados por

$$(31)\qquad c_{j_1,\ldots,j_n} = \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)}\ldots\overline{\psi_{j_n}(it_n)}\,d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

De esta última fórmula resultan que, por las fórmulas A.5 y A.7,

$$|c_{j_1},\ldots,c_{j_n}| \leqslant c_{o,\ldots,o}$$

y así

$$(32)\qquad |2c_{j_1,\ldots,c_n}\,\psi_{j_1}(z_1)\ldots\psi_{j_n}(z_n)| \leqslant \left|\frac{z_1-1}{z_1+1}\right|^{j_1}\ldots\left|\frac{z_n-1}{z_n+1}\right|^{j_n}$$

Con lo cual la serie (30) converge absoluta y uniformemente sobre todo conjunto K compacto del polisemiplano D^n. En consecuencia, en virtud de un bien conocido teorema de Weierstrass, la función f es holomorfa en el polisemiplano D^n.

Por otra parte, por (31) y A7, se prueba fácilmente las relaciones

$$(33)\qquad \overline{c}_{j_1,\ldots,j_n} = c_{-j_1,\ldots,-j_n}$$

Tomando partes reales en ambos miembros de (30) y, utilizando (33) y A.6, se obtiene

$$u(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ \sum_{j_n=0}^{\infty}\{c_{j_1,\ldots,j_n}\psi_{j_1}(z_1)\ldots\psi_{j_n}(z_n)+c_{-j_1,\ldots,-j_n}\psi_{-j_1}(z_1)\ldots\psi_{-j_n}(z_n)\}$$

De la que resulta, en virtud de las relaciones siguientes (por pluriarmonicidad de μ)

$$c_{j_1,\ldots,j_n} = 0$$

salvo que $j_1,\ldots,j_n$ sean todos del mismo signo

$$(34) \qquad u(z_1,\dots,z_n) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} c_{j_1,\dots,j_n} \psi_{j_1}(z_1)\dots\psi_{j_n}(z_n)$$

Con el objeto de probar la fórmula (28) de la tesis del teorema, consideremos la función $w(z_1,\dots,z_n)$ definida por (35)

$$(35) \qquad w(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{R^n} p(z_1,t_1)\dots p(z_n,t_n)\, d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

Sustituyendo en la fórmula las funciones $p(z_j,t_j)$ por los desarrollos (A.12)

$$p(z_1,t_1) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \overline{\psi_j(it_1)}\psi_{j_1}(z_1)\dots \quad p(z_n,t_n) = \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{j_n}(it_n)}\psi_{j_n}(z_n)$$

e integrando la serie múltiple obtenida, término a término resulta

$$(36) \qquad w(z_1,\dots,z_n) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} c_{j_1,\dots,j_n} \psi_{j_1}(z_1)\dots\psi_{jn}(z_n)$$

De (35) y (36) resulta que $u = w$. Con lo cual, y por la fórmula (35), queda probada la fórmula de la tesis.

Es de hacer notar que la integración término a término efectuada para obtener (36) se justifica del mismo modo que en el caso anterior.

CAPITULO III

REPRESENTACION INTEGRAL DE FUNCIONES PLURIARMONICAS POSITIVAS EN UN POLISEMIPLANO

1. Introducción.

Los teoremas principales de este capítulo son los 2.1. y 3.1. El primero de ellos da una fórmula de representación canónica de las funciones pluriarmónicas positivas en el polisemiplano $D^n = \{(z_1,\ldots,z_n) : \mathrm{Re}\, z_1 > 0,\ldots,\mathrm{Re}\, z_n \geq 0\}$, análoga a la representación obtenida en II.3.3. El teorema 3.1. nos dice que la medida μ de la representación (4) es el límite, en el sentido de las distribuciones, de la función pluriarmónica $u(z_1,\ldots,z_n)$ cuando las variables $(z_1,\ldots,z_n)$ tienden a la frontera distinguida del polisemiplano D^n. Como consecuencia de este teorema, se obtienen la unicidad de la representación integral (4), como así también la unicidad de la medida μ en la fórmula obtenida en el teorema 3.3. del Capítulo II.

Es interesante destacar asimismo que, como consecuencia del teorema de unicidad, se ha obtenido la siguiente caracterización de las medidas pluriarmónicas definidas en el capítulo II: una medida μ es pluriarmónica, si y sólo si la función u definida por la integral siguiente, es una función pluriarmónica en D^n.

$$u(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\,d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

A continuación definiremos las nociones fundamentales que serán utilizadas en este capítulo.

1.1. Definición. (26, Def. 2.1.1.)

Sea $u : D^n \to \mathbb{R}$ una función real continua sobre el polisemiplano D^n. Se dice que la función u es <u>n-armónica</u> si ella es armónica en cada variable separadamente; vale decir que u es n-armónica si y sólo si son armónicas las siguientes funciones parciales.

$$z_1 \to u(z_1,\ldots,z_n),\quad z_2 \to u(z_1,\ldots,z_n),\quad \ldots,\quad z_n \to u(z_1,\ldots,z_n)$$

las que se obtienen fijando (n-1) entre las n variables $z_1,\ldots,z_n$.

Evidentemente toda función n-armónica es armónica del conjunto de sus n variables, pero la recíproca, como es fácil ver, no es cierta.

1.2. Definición. (28, pág. 130.)

Sea $u : D^n \to R$ una función real continua en el polisemiplano D^n. Se dice que u es pluriarmónica, si existe una función $f: D^n \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que u es la parte real de f.

Evidentemente, toda función pluriarmónica es n-armónica, pero la recíproca no es verdadera. Para un contraejemplo véase (26, pág. 32)

1.3. Proposición.

Si μ es una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, finita y positiva, y si $u : D^n \to \mathbb{R}$ es la función definida sobre el polisemiplano D^n por

$$(1)\qquad u(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(\ _1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

entonces u es n-armónica.

Demostración.

Como en la demostración de la fórmula (34) del TEOR.II.3.5., se prueba que

$$(2)\qquad u(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{j1=-\infty}^{\infty}\sum_{j_n=-\infty}^{\infty} c_{j_1,\ldots,j_n}\, \psi_{j_1}(z_1)\ldots\psi_{j_n}(z)$$

que la serie converge uniformemente sobre todo compacto K del polisemiplano D^n, y que los coeficientes $c_{j_1,\ldots,j_n}$ están dados por

$$(3)\qquad c_{j_1},\ldots,c_{j_n} = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)}\ldots\psi_{j_n}(\overline{it_n})\,d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

La n-armonicidad de la función u resulta de (12), por cuanto cada término es n-armónico y del hecho que, en virtud del célebre toerema de Harnack, toda serie uniformemente convergente de funciones armónicas representa una función armónica.

2. Representación Canónica de Funciones Pluriarmónicas positivas en D^n.

2.1. TEOREMA.

Si $u : D^n \to \mathbb{R}$ es una función pluriarmónica positiva en el polisemiplano D^n, entonces existe una única medida pluriarmónica μ sobre $\mathbb{R}^n$, y existen n constantes reales y no negativas $c_1,\ldots,c_n$ tales que, para todo punto $(z_1,\ldots,z_n) \in D^n$,

$$(4)\quad u(z_1,\ldots,z_n)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

Recíprocamente, si μ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$ y si $c_1,\ldots,c_n$ son constantes no negativas, entonces la función $u : D^n \to \mathbb{C}$ definida por la fórmula (4) es pluriarmónica.

Demostración.

Sea u una función pluriarmónica positiva en D^n, existe por definición una función $f : D^n \to \mathbb{C}$ holomorfa en D^n cuya parte real coincide con la función u dada. Entonces, por el TEOR.II.3.3., la función f admite la siguiente representación,

$$(5)\quad f(z_1,\ldots,z_n) = ic_0+c_1z_1+\ldots+c_nz_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}\{2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\}d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

donde la medida μ es pluriarmónica y las constantes $c_1,\ldots,c_n$ son no negativas.

Por el teorema II.3.5., la parte real de f, o sea la función u, admite la representación (4).

Queda así probada la parte directa del teorema, salvo la unicidad de la medida μ y de las constantes de la representación (4), la qué será demostrada en TEOR. 3.5.

La parte recíproca se prueba así. Si μ es pluriarmónica y si $c_1,\ldots,c_n$ son no negativas, por la parte recíproca del teorema

II.3.3., la función f definida por (5) es holomorfa y de parte real positiva en D^n. Por el TEOR. II.3.5., la parte real de la función f es igual a la función u dada por la fórmula (4). Queda así probada la parte recíproca, pues siendo u parte real de una función holomorfa, es necesariamente pluriarmónica.

3. Inversión y Unicidad de la Representación Integral.

El siguiente resultado puede considerarse como un teorema de inversión en el sentido de que, conocida la función u dada por la fórmula (6), ella permite obtener la medida μ que en ella aparece. En efecto la fórmula (7) permite conocer la forma lineal,

$$\phi \to \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\mu$$

determinada sobre $C(\mathbb{R}^n)$ por la medida. Lo que equivale a conocer, en virtud del teorema de RIESZ, la medida μ.

3.1. TEOREMA.

Sea μ una medida de Borel, y sea $u : D^n \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$(6) \qquad u(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\dots p(z_n,t_n)\, d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

para todo punto del polisemiplano D^n. Entonces, para toda función $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$, (es decir para toda $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continua y acotada), se cumple que

$$(7) \qquad \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(+0,\dots,+0)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)}{(1+y_1^2)\dots(1+y_n^2)}\,\phi(y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\dots,t_n)\, d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

Conviene, previo a la demostración del teorema, formular los siguientes lemas.

3.2. LEMA.

Si $x > 0$, t es real y $p(z,t)$ es el núcleo que aparece en (6), entonces se cumple la siguiente relación.

$$(8) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\, p(x+iy,t)\, dy = \frac{(1+x)(1+t^2)}{(1+x)^2+t^2} \leq 1+x$$

Demostración.

Aplicando la siguiente fórmula [19, p.445] , válida para toda función holomorfa y acotada en el semiplano D,

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\, f(it)\, dt$$

a la función $f(z) = (z+1)^{-1}$, se obtiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\,\frac{1}{1+it}\, dt = \frac{1}{1+(x+iy)}$$

Si se toman partes reales en ambos miembros de esta última, se obtiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{x+1}{(1+x)^2+y^2}$$

Intercambiando el papel de las variables t e y resulta

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\,\frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{(1+x)}{(1+x)^2+t^2}$$

Finalmente multiplicando por $(1+t^2)$ a ambos miembros se obtiene (8)

3.3. LEMA.

Si $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$, entonces se cumple

$$(9) \qquad \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(+0,\dots,+0)} \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(x_1+it_1)\dots p(x_n+it_n)\frac{\phi\,(y_1,\dots,y_n)}{(1+y_1^2)\dots(1+y_n^2)}\,dy_1\dots dy_n =$$

$$= \phi\,(t_1,\dots,t_n)$$

para todo punto $(t_1,\dots,t_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

La prueba de (9) equivale a la de la fórmula siguiente, por multiplicación por $(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)$,

$$(10) \qquad \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(+0,\dots,+0)} \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)}\dots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\,\phi(y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n =$$

$$= \phi\,(t_1,\dots,t_n)$$

Asimismo, por propiedades bien conocidas del núcleo de Poisson la fórmula (10) es equivalente a

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(+0,\dots,+0)} \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,\,x_n)\big(\phi(t_1+x_1,\dots,t_n+y_n) -$$

$$- \phi(t_1,\dots,t_n)\big)\,dy_1,\dots,dy_n = 0$$

donde hemos puesto

$$P\,(y,x) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Dado un $\varepsilon > 0$, para todo punto $(t_1,\dots,t_n)$ de $\mathbb{R}^n$, existe un $\delta \geq 0$, tal que

$$|\phi\,(t_1+y_1,\dots,t_n+y_n \;-\; \phi(t_1,\dots,t_n)| < \varepsilon$$

para todo punto $(y_1,\dots,y_n)$ del conjunto $Q(\delta)=\{(y_1,\dots,y_n):|y_1|\leq\delta\dots,|y_n|\leq\delta\}$

La siguiente desigualdad es entonces, evidente.

$$(11)\quad \left|\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,x_n)\big(\phi(t_1+y_1,\dots,t_n+y_n)-\phi(t_1,\dots,t_n)\big)dy_1\dots dy_n\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi^n}\int_{Q(\delta)} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,x_n)dy_1\dots dy_n+\frac{2M}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q(\varepsilon)} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,x_n)dy_1\dots dy_n$$

La primera integral del segundo miembro es menor o igual que π^n, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y,x)\ dy = \pi$$

Para mayorar la segunda integral del segundo miembro haremos uso de la relación

$$\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n\ Q(\delta)} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,x_n)dy_1\dots dy_n = 1-\frac{1}{\pi^n}\int_{Q(\delta)} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,x_n)dy_1\dots dy_n$$

$$(12)\quad = 1 - \{\frac{2}{\pi}(\text{arc tg}\ \frac{\delta_1}{x_1})\dots\frac{2}{\pi}(\text{Arc tg}\ \frac{\delta}{x_n})\}$$

De (11) y (12) resulta

$$\overline{\lim_{x_1\to+0,\dots,x_n\to+0}}\left|\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} P(y_1,x_1)\dots P(y_n,x_n)\big(\phi(t_1+y_1,\dots,t_n+y_n)-\phi(t_1,\dots,t_n)\big)dy_1,\dots,y_n\right|\leq$$

$$\leq \varepsilon + \lim_{x_1\to+0,\dots,x_n\to+0}\{1-\frac{2}{\pi}(\text{Arc tg}\ \frac{\delta_1}{x_1})\dots\frac{2}{\pi}(\text{Arc tg}\ \frac{\delta}{x_n})\} = \varepsilon + 0$$

Finalmente, el teorema resulta de esta última acotación, por la arbitrariedad del $\varepsilon > 0$.

3.4. <u>Demostración del Teorema 3.1</u>.

De la fórmula (6) resulta, fácilmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)}{(1+y_1^2)\ldots(1+y_n^2)} \phi(y_1,\ldots,y_n)\, dy_1\ldots dy_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \{\int_{\mathbb{R}^n} p(x_1+iy_1,t_1)\ldots p(x_n+iy_n,t_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n)\}\frac{(y_1,\ldots,y_n)}{(1+y_1^2)\ldots(1+y_n^2)}dy_1\ldots dy_n$$

Permutando el orden de integración en la segunda integral, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)}{(1+y_1^2)\ldots(1+y_n^2)}\phi(y_1,\ldots,y_n)dy_1\ldots dy_n=\int_{\mathbb{R}^n}(t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n) \quad (12)$$

donde se ha definido

$$\chi(t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(x_1+iy_1,t_1)\ldots p(x_n+iy_n,t_n)\frac{\phi(y_1,\ldots,y_n)}{(1+y_1^2)\ldots(1+y_n^2)}dy_1\ldots dy_n$$

Aplicando a esta última fórmula el LEMA 3.2., se obtiene la mayoración

$$(13) \quad (t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{M}{\pi^n}\frac{p(x_1,t_1)\ldots p(x_n,t_n)}{(1+y_1^2)\ldots(1+y_n^2)}dy_1\ldots dy_n \leq M(1+x_1)\ldots(1+x_n)$$

donde M es el supremo de la función ϕ .

Por otra parte, por el LEMA 3.3., para todo $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(14) \quad \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)} \chi(t_1,\ldots,t_n;x_1,\ldots,x_n) = \phi(t_n,\ldots,t_n)$$

Tomando límites en ambos miembros de (12), pasando el límite bajo signo integral, y utilizando la fórmula (14), se obtiene la expresión (7) de la tesis del teorema. El pasaje del límite bajo signo integral está plenamente, pues la mayoración (13) y el hecho que la medida μ sea finita, permiten la aplicación del teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue.

3.5. TEOREMA.

Si μ_k (k=1,2) son dos medidas de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, $c_{1,k},\ldots,c_{n,k}$ (k=1, 2) son dos sistemas de constantes positivas y si $V_k : D^n \to \mathbb{R}$ son las funciones (k=1,2) definidas por las fórmulas

$$V_k(z_1,\ldots,z_n) = c_{1,k}x_1 + \ldots + c_{n,k}x_n +$$

(15) (k=1,2)

$$+ \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\, d\mu_k(t_1,\ldots,t_n)$$

entonces, de la igualdad, para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n

(16) $$V_1(z_1,\ldots,z_n) = V_2(z_1,\ldots,z_n)$$

se infiere que $\mu_1 = \mu_2$ y $c_{1,1} = c_{1,2},\ldots,c_{n,1} = c_{n,2}$.

Demostración.

Eligiendo, en las fórmulas (15) y (16), $z_1 = x_1$, $z_k = 0$ si $k > 1$, se obtiene

$$c_{1,1} + \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1+t_1^2}{x_1^2+t_1^2}\, d\mu_1 = c_{1,2} + \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1+t_1^2}{x_2^2+t_2^2}\, d\mu_2$$

De esta igualdad, tomando límites en ambos miembros para $x_1 \to \infty$, se obtiene que

$$c_{1,1} = c_{1,2}$$

pues el pasaje del límite bajo signo se justifica por una trivial aplicación del teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue.

Del mismo modo se prueba que

(17) $$c_{j,1} = c_{j,2}$$

para todo j comprendido entre 1 y n.

De (15), (16) y (17) se obtiene que

$$\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu_1 = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu_2$$

Aplicando el TEOR. 3.1. a ambos miembros de esta igualdad, resulta que

$$(18) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\ldots,t_n)d\mu_1 = \int \phi(t_1,\ldots,t_n)\, d\mu_2$$

para toda función $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$.

De la igualdad (18), por la parte de unicidad del teorema de F. RIESZ (24, 2.14), resulta que las medidas μ_1 y μ_2 coinciden.

3.6. COROLARIO.

La representación integral (4) del TEOR. 2.1. es única.

3.7. COROLARIO.

La representación integral (11) del TEOR. II.3.3. es única.

Demostración.

Se obtiene aplicando el COR. 3.6. a la parte real de la función f.

4. Caracterización de las Medidas Pluriarmónicas.

4.1. TEOREMA.

Para que una medida de Borel μ sobre $\mathbb{R}^n$ sea pluriarmónica, es necesario y suficiente que la función $u : D^n \to \mathbb{R}$ definida por la siguiente integral sea pluriarmónica.

$$(19) \qquad u(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

Demostración.

Si la medida μ es pluriarmónica entonces, por el TEOR. 2.1., la función u es pluriarmónica.

Si u es pluriarmónica, entonces por el TEOR. 2.1. existe una medida pluriarmónica λ sobre $\mathbb{R}^n$ y constantes $c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0$ tales que

$$(20)\ u(z_1,\ldots,z_n) = c_1x_1+\ldots+c_nx_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\, d\lambda(t_1,\ldots,t_n)$$

De las igualdades (19) y (20), y del COR. 3.6. se concluye que las medidas λ y μ coinciden. Por lo tanto μ es pluriarmónica.

CAPITULO IV

FUNCIONES DE PARTE IMAGINARIA ACOTADA

1.1. Introducción.

En este capítulo se ha obtenido, a partir de la fórmula de representación canónica de las funciones holomorfas y de parte real positiva en el polisemiplano D^n (TEOR. II.3.3.), la representación canónica de las funciones holomorfas y de parte imaginaria acotada en dicho polisemiplano.

1.1. Notación.

Sea μ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, con $L^p(\mu)$ designamos a la clase de todas las funciones medibles, tales que

$$\|f\|_p = \{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(t_1,\dots,t_n)|^p \, d\mu\}^{1/p} < +\infty \quad , \quad 1 \leq p < +\infty .$$

Con $L^\infty(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ designamos a la clase de todas las funciones medibles y esencialmente acotadas, o sea a las funciones medibles para las cuales se cumple

$$\|f\|_\infty = \text{sup. es. } |f(.)| < +\infty \quad .$$

Cuando μ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, escribiremos $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L(\mathbb{R}^n)$, en lugar de $L^p(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$.

Con $C(\mathbb{R}^n)$ simbolizamos a la clase de todas las funciones continuas y acotadas sobre $\mathbb{R}^n$.

1.2. LEMA.

Si μ, λ son dos medidas de Borel finitas y positivas, y si, para toda función $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$, se cumple la desigualdad

$$(1) \qquad | \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\dots,t_n) d\mu| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(t_1,\dots,t_n)| \, d\lambda \quad ;$$

entonces existe una función $g \in L^\infty(\mu)$ tal que

$$(2) \qquad \int_{R^n} \phi(t_1,\ldots,t_n)d\mu = \int_{R^n} \phi(t_1,\ldots,t_n)g(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n,$$

para toda función $\phi \in C(R^n)$.

Demostración:

Sea $\Phi : C(R^n) \to \mathbb{C}$ la forma lineal definida por

$$(3) \qquad \Phi(\phi) = \int_{R^n} \phi(t_1,\ldots,t_n)\, d\mu .$$

De (1) y (3) resulta:

$$(4) \qquad |\Phi(\phi)| \leqslant C \;\|\phi\|_1$$

El espacio $C(R^n)$ está incluído en $L^1(\lambda)$, y además $C(R^n)$ es denso en $L^1(\lambda)$. Por lo tanto, ([18, pág. 41]), existe una única extensión $\hat{\Phi}$ de Φ a $L^1(\lambda)$, tal que

$$(5) \qquad |\hat{\Phi}(f)| \leqslant C \;\|f\|_1 .$$

Por aplicación del teorema 6.16. (24, pág. 128) a la forma lineal y acotada $\hat{\Phi}$, existe una función $g \in L^\infty(\lambda)$ tal que

$$(6) \qquad \hat{\Phi}(f) = \int_{R^n} f(t_1,\ldots,t_n)\, g(t_1,\ldots,t_n)\, d\lambda ,$$

para toda función f de $L^1(\lambda)$.

Finalmente, restringiendo $\hat{\Phi}$ al espacio $C(R^n)$ se obtiene la relación (2) de la tesis.

2. Representación Integral de las Funciones de Parte Imaginaria Acotada.

2.1. TEOREMA.

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa y de parte imaginaria acotada en el polisemiplano D^n, entonces existe una función real

$g \in L(\mathbb{R}^n)$, esencialmente única, y una única constante real c_0, tales que se cumplan las dos siguientes relaciones:

$$(7) \quad f(z_1,\dots,z_n) = c_0 + \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\frac{g(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}dt_1\dots dt_n \ ,$$

para todo punto del polisemiplano D^n,

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)}\dots\overline{\psi_{j_n}(it_n)}\ \frac{g(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\ dt_1\dots dt_n = 0 \ ,$$

para toda n-upla $(j_1,\dots,j_n)$ de enteros tales que exista entre ellos, al menos, dos de distinto signo

Recíprocamente, si $g : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ es una función de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y si se cumplen las relaciones (8), entonces la función $f : D^n \to \mathbb{C}$ definida por la integral (7) es holomorfa y tiene parte imaginaria acotada en D^n.

Demostración.

Podemos suponer que, por el recurso de sumarle a f una constante imaginaria suficientemente grande, la función f es de parte real positiva en D^n.

Aplicando el TEOR. II.3.3. a la función $h(.)=(-i)f(.)$, se obtiene:

$$(9) \quad h(z_1,\dots,z_n) = -ic_0 + \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\dots,k(z_n,t_n)-1)\,d\mu(t_1,\dots,t_n),$$

donde c_0 es una constante real, y μ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$. Nótese que, en (9), no aparecen las constantes $c_1,\dots,c_n$ de la fórmula (11) del Cap. II, debido a que las derivadas angulares de la función f, que tiene parte imaginaria acotada, son nulas.

De (9), multiplicando por i, se obtiene

$$(10) \quad f(z_1,\dots,z_n) = ic_0 + \frac{i}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\ d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

Por otra parte, por aplicación de la fórmula (7) del TEOR. II.3.1. a la parte imaginaria v de la función f dada por (10), obtenemos la relación

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\dots,t_n)\, d\mu\right| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n$$

Donde C es el supremo del módulo de la parte imaginaria v.

Este desigualdad es la desigualdad (1) del LEMA 1.2., donde la medida λ, en este caso está definida por:

$$(11) \qquad \lambda(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_B(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n$$

Por lo tanto existe una función $g \in L^\infty(\lambda)$ tal que, para toda función ϕ de $C(\mathbb{R}^n)$, se cumple la relación

$$(12) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\dots,t_n) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\dots,t_n) \frac{g(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n$$

Cabe señalar que, por (11), la medida λ y la medida de Lebesgue son mutuamente absolutamente continuas. Por lo tanto $L^\infty(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\lambda)$.

Poniendo en (12),

$$\phi(t_1,\dots,t_n) = 2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1 ,$$

se obtiene la fórmula (7) de la tesis.

Del mismo modo, poniendo en (12)

$$\phi(t_1,\dots,t_n) = \overline{\psi_{j_1}(it_1)}\dots\overline{\psi_{jn}(it_n)}$$

se obtiene, por (8) de DEF. II.3.1., la relación (8) de la tesis.

Diferimos el análisis de la unicidad de la representación (7) hasta el COR.3.2.

La parte recíproca del teorema es consecuencia inmediata del siguiente teorema.

2.3. TEOREMA.

Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real perteneciente a $L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, tal que satisface a las relaciones (8) del teorema precedente. Entonces la función $f : D^n \to \mathbb{C}$ definida por la fórmula

$$(13) \quad f(z_1,\dots,z_n) = \frac{i}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\,\frac{g(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\,dt_1\dots dt_n,$$

es holomorfa en D^n, y su parte imaginaria está dada por la integral

$$(14) \quad v(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\,g(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n \,.$$

Además $\operatorname{Im} f(z_1,\dots,z_n)$ es una función pluriarmónica acotada en D^n.

Demostración.

Para probar la analiticidad de la función f, y que la función v dada por (14) es la parte imaginaria de la función f se procede en la misma forma que en la demostración del TEOR. II.3.5.

La acotación de la función v resulta, por (14), de la siguiente relación

$$|v(z_1,\dots,z_n)| \leq \|g\|_\alpha \cdot \left\{\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\,dt_1\dots dt_n\right\} = \|g\|_\alpha$$

pues la integral múltiple encerrada dentro de las llaves es igual a 1.

3. Teorema sobre el Comportamiento Límite de la Parte Imaginaria.

El siguiente teorema es una extensión a varias variables complejas del TEOREMA 19.2.5. de [19, pág. 445].

3.1. TEOREMA.

Si $g : \mathbb{R}^n \to C$ es una función medible y esencialmente acotada, y si $v : D^n \to C$ es la función definida por la integral

$$v(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\, g(t_1,\dots,t_n)\, dt_1\dots dt_n$$

entonces

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(+0,\dots,+0)} v(x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n) = g(y_1,\dots,y_n)$$

para todo punto $(y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, salvo eventualmente los que pertenecen a un conjunto de medida de Lebesgue nula.

Demostración.

Véase Teorema 3.2.2. de 27, pág. 69 . Si bien en el enunciado del precitado teorema se supone que $1 \leq p < +\infty$, en la página 70 los autores aclaran que, una modificación del argumento utilizado en la demostración, prueba la validez de tal enunciado para $p = +\infty$

3.2. COROLARIO.

Del teorema precedente, resulta fácilmente la unicidad de la representación canónica (7) del TEOR. 2.1.

4. Funciones Pluriarmónicas Acotadas.

4.1. TEOREMA.

Si $v : D^n \to R$ es una función pluriarmónica acotada en el polisemiplano D^n, entonces la función $v(.)$ admite la siguiente representación

$$(15)\quad v(z_1,\dots,z_n)=\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\,g(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n$$

donde la función $g : R^n \to R$, esencialmente única, satisface a las siguientes condiciones

(16-a) $\quad g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(16-b) Para toda n-upla $(j_1,\ldots,j_n)$ de enteros tales que exista entre ellos, al menos dos, de distinto signo, se cumple la relación

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{j1}(it_1)} \ldots \overline{\psi_{jn}(it_n)} \frac{g(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)} dt_1\ldots dt_n = 0$$

Recíprocamente, si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función que satisface a las condiciones (16-a) y (16-b), entonces la función $v : D^n \to \mathbb{R}$ definida por la integral (15) es pluriarmónica acotada en D^n.

Demostración

(I) Parte Directa.

Por definición de pluriarmonicidad existe una función $f:D^n \to C$ holomorfa en D^n tal que $v(.) = \text{Im } f(.)$. Por el TEOR. 2.1. la función $f(.)$ admite la representación de la fórmula (7), donde la función $g(.)$ que en ella aparece satisface a las condiciones (16-a) y (16-b). Luego, por el TEOR. 2.3., la función $v(.) = \text{Im } f(.)$ admite la representación (15).

(II) Parte Recíproca.

Si $g(.)$ satisface a las condiciones (16-a) y (16-b) entonces, por la parte recíproca del TEOR. 2.1., la función $f(.)$ definida por la fórmula (7) es holomorfa y de parte imaginaria acotada en D^n. Aplicando a (7) el TEOR. 2.3. se concluye que la función $v(.)$ dada por la fórmula (15) de la parte imaginaria de la función $f(.)$, por lo tanto la función $v(.)$ es pluriarmónica en D^n.

4.2. COROLARIO.

Si $v : D^n \to \mathbb{R}$ es una función pluriarmónica acotada en D^n, entonces existe una función real $g(.) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y se cumple la relación

$$(17) \qquad \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)} v(x_1+it_1,\ldots,x_n+it_n) = g(t_1,\ldots,t_n)$$

en casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Además, para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n, se cumple la igualdad

$$(18)\quad v(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{(x_1^2+(y_1-t_1)^2} \cdots \frac{x_n}{x_n^2+(y_x-t_n)^2}\, g(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n\ ,$$

y la función g(.) satisface la relación (16-b) del TEOR. 4.1.

<u>Demostración</u>.

Resulta fácilmente, de la aplicación combinada del TEOR. 4.1. y del TEOR. 3.1.

CAPITULO V

REPRESENTACION CANONICA DE FUNCIONES POSITIVAS REALES EN EL POLISEMIPLANO D^n.

1. Introducción.

El objeto de este capítulo es extender a n-variables complejas el TEOR. 1.2. debido a Cauer (cf. W. Cauer, "The Poisson Integral for Functions with Positive Real Part", Bull.Amer.Math.Soc., 1932, pp. 713-717).

El método que utilizaremos en la demostración del análogo n-dimensional del TEOR. 1.2., será el de especialización, al caso de funciones reales, de la representación canónica de las funciones de parte real positiva que hemos obtenido en el TEOR. II.3.3.

A fin de evitar tediosas repeticiones adoptamos la siguiente convención de lenguaje, usual en la teoría de circuitos eléctricos.

1.1. Nomenclatura.

Por función positiva real, o también función de impedancia, entendemos una función $f : D^n \to C$ holomorfa y de parte real positiva en D^n, y tal que, $f(x_1,\ldots,x_n)$ sea real, para todo punto real del polisemiplano D^n.

1.2. TEOREMA. (Cauer)

Si $f : D \to \mathbb{C}$ es una función positiva real en el semiplano D, entonces f admite la siguiente representación

$$(1) \qquad f(z) = cz + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(1+t^2)}{z^2+t^2} \, d\mu(t)$$

donde μ es una medida de Borel par sobre la recta real $\mathbb{R}^1$ y c una constante no negativa.

Recíprocamente, la función definida por la fórmula (1), para toda medida de Borel par μ y toda constante no negativa c, es positiva real.

Demostración.

Resultará del TEOR.3.2 como caso particular. Para una demostración directa véase GONZALEZ DOMINGUEZ, (11, pág. 56).

Los siguientes lemas elementales y bien conocidos serán utilizados en la demostración del TEOR. 3.2.

1.3. LEMA.

Si $f: D^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en el polisemiplano D^n y si $f(x_1,\dots,x_n) = 0$, para todo punto real $(x_1,\dots,x_n)$ del polisemiplano D^n, entonces la función f es idénticamente nula.

Demostración.

Procederemos por inducción sobre n. Para n = 1 es trivial. Supongamos que el teorema es verdadero para n-1 y sea $f : D^n \to \mathbb{C}$ una función que satisface las hipótesis del lema y, para cualquier $x_n > 0$ consideremos la función de n-1 variables $g_x : D^{n-1} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g_{x_n}(z_1,\dots,z_{n-1}) = f(z_1,\dots,z_{n-1},x_n)$$

Entonces g_{xn} es holomorfa en D^n y nula cuando las variables $z_1,\dots,z_n$ son reales. Por lo tanto, y por la hipótesis inductiva, g_{x_n} es idénticamente nula.

Hemos demostrado así que

$$f(z_1,\dots,z_{n-1}, x_n) = 0 \tag{2}$$

para complejos arbitrarios $z_1,\dots,z_{n-1}$ y x_n real tales que el punto $(z_1,\dots,z_{n-1},x)$ pertenece al polisemiplano D^n.

Sea $z_1,\dots,z_{n-1}$ un punto arbitrario de D^{n-1} y sea $h_{z_1,\dots,z_n} : D \to \mathbb{C}$ la función de la variable unidimensional z_n definida de la siguiente manera

$$h_{z_1,\dots,z_n}(z_n) = f(z_1,\dots,z_{n-1}, z_n)$$

La función h, así obtenida, es holomorfa en el semiplano D y se anula si z_n es real, por (2). Por lo tanto, y en virtud del caso unidimensional del lema, la función h es idénticamente nula y por lo tanto también f lo es.

1.4. LEMA. (Principio de Simetría de Schwarz)

Si $f : D^n \to \mathbb{C}$ es holomorfa en D^n y si $f(x_1,\dots,x_n)$ es real cuando $(x_1,\dots,x_n)$ es un vector real de D^n entonces

$$(3) \qquad f(\overline{z_1},\dots,\overline{z_n}) = \overline{f(z_1,\dots,z_n)}$$

Demostración.

Se comprueba de inmediato que la función $g : D^n \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z_1,\dots,z_n) = \overline{f(\overline{z_1},\dots,\overline{z_n})} - f(z_1,\dots,z_n)$$

satisface las hipótesis del LEMA 1.3. y por lo tanto es idénticamente nula. Ello equivale al cumplimiento de (3).

1.5. Definición.

Una medida de Borel μ sobre $\mathbb{R}^n$ se denomina radialmente par si

$$\mu(-B) = \mu(B)$$

para todo conjunto de Borel sobre $\mathbb{R}^n$.

Se prueba fácilmente que una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ es radialmente par, si y sólo si, para toda función $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$, se cumple que:

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(-t_1,\dots,-t_n)d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t_1,\dots,t_n)d\mu$$

2. Funciones n-Armónicas Simétricas.

2.1. Definición.

Diremos que una función $u : D^n \to \mathbb{R}$, n-armónica en D^n es simétrica si, cualquiera sea el punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n

$$(4') \qquad u(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) = u(z_1,\ldots,z_n)$$

2.1. LEMA.

Sea μ una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, y sea $u : D^n \to \mathbb{C}$ la función n-armónica definida por la siguiente fórmula

$$(5) \qquad u(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

entonces la función u es simétrica, si y sólo si, μ es radialmente par.

Demostración.

De (5), si μ es radialmente par, por la (4)

$$(6) \qquad u(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(\overline{z_1},-t_1)\ldots p(\overline{z_n},-t_n)\, d\mu(t_1,\ldots,t_n),$$

pero como

$$p(\bar{z},-t) = \frac{x}{x^2 + (-y+t)^2} = p(z,t)$$

de (5) y (6) se concluye (4').

Recíprocamente, supongamos que la función u dada por la fórmula (5) sea simétrica, entonces por (4) tendremos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,-t_1)\ldots p(z_n,-t_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

de donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

donde $\bar{\mu}$ es la medida definida por

$$\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$$

De (7), en virtud de la unicidad del TEOR. II.3.3. , se concluye que $\bar{\mu}=\mu$ y por lo tanto es radialmente par.

3. <u>Representación Canónica de las Funciones Positivas Reales</u>.

Como paso previo a la demostración del teorema principal TEOR. formulamos el siguiente lema.

3.1. <u>LEMA</u>.

Sea μ una medida <u>pluriarmónica</u> sobre $\mathbb{R}^n$, sea $f : D^n \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$(8) \qquad f(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}\{2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

y sea $g : D^n \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$(9) \qquad g(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{z_1(1+t_1^2)}{z_1^2+t_1^2}\cdots\frac{z_n(1+t_n^2)}{z_n^2+t_n^2}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

Entonces para que las funciones f y g sean idénticas es necesario y suficiente que la medida μ sea <u>radialmente par</u>.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que la medida μ sea radialmente par entonces, por (4), para $z_1=x_1,\ldots,z_n=x_n$ donde $x_1>0,\ldots,x_n>0$, de (8) obtenemos

$$\overline{f(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}\{2k(x_1,-t_1)\ldots k(x_n,-t_n)-1\}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

(dado que $\overline{k(x,t)} = k(x,-t)$ si x es real)

$$\overline{f(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{1}{\pi^n}\int\{2k(x_1,t_1)\ldots k(x_n,t_n)-1\}d\mu(t_1,\ldots,t_n)=f(x_1,\ldots,x_n)$$

O sea que $f(x_1,\dots,x_n)$ es real si lo son los números $x_1,\dots,x_n$.

Por otra parte por (8), y en virtud del TEOR. II.3.5., la parte real de la función f es la siguiente función

$$(10) \qquad u(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{R^n} \frac{x_1(1+t_1^2)}{x_1^2+(y_1-t_1)^2} \cdots \frac{x_n(1+t_n^2)}{x_n^2+(y_1-t_n)^2}\, d\mu(t_1,\dots,t_n)$$

Asimismo la función g, como se ve fácilmente a partir de (9), es holomorfa en D^n.

Veamos, a continuación que las funciones f y g coinciden sobre el polisemieje real. En efecto, si $x_1,\dots,x_n$ es un punto real de D^n entonces $f(x_1,\dots,x_n)$ es real y por lo tanto

$$(11) \qquad f(x_1,\dots,x_n) = u(x_1,\dots,x_n)$$

Por otra parte se comprueba directamente, haciendo $z_1=x_1,\dots,z_n=x_n$ en las fórmulas (9) y (10) que

$$g(x_1,\dots,x_n) = u(x_1,\dots,x_n)$$

De (11) y (12) resulta que la función holomorfa h = f - g se anula sobre el polisemieje real y así, por el LEMA 1.3., h es idénticamente nula.

Recíprocamente, supongamos que las funciones f y g coincidan. Entonces de la simple inspección de (9) inferimos que $f(x_1,\dots,x_n)$ es real si $x_1,\dots,x_n$ son reales. Ello implica, en virtud del LEMA 1.4. que

$$\overline{f(z_1,\dots,z_n)} = f(\overline{z_1},\dots,\overline{z_n})$$

Tomando partes reales en ambos miembros de la última igualdad resulta que la función u = Re f es <u>simétrica</u>.

Finalmente, por la aplicación del LEMA 2.1. se concluye que μ es radialmente par.

3.2. TEOREMA.

Si $f : D^n \to C$ es una función positiva real en el polisemiplano D^n entonces existe una medida pluriarmónica y radialmente par (única) y unas constantes reales y no negativas, unívocamente determinadas, $c_1,\ldots,c_n$ tales que

$$(11) \qquad f(z_1,\ldots,z_n) = c_1z_1+\ldots+c_nz_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{z_1(1+t_1^2)}{z_1^2+t_1^2} \cdots \frac{z_n(1+t_n^2)}{z_n^2+t_n^2}\, d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

Recíprocamente, si μ es una medida pluriarmónica y radialmente par sobre $\mathbb{R}^n$ y $c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0$ entonces la función f definida por (11) es positiva real.

Demostración.

Por el TEOR. II.3.3. la función f admite la siguiente representación

$$(12) \qquad f(z_1,\ldots,z_n) = c_1z_1+\ldots+c_nz_n+ \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \{2k(z_1,t_1) \ldots k(z_n,t_n)-1\}d\mu(t_1,\ldots,t_n)$$

donde μ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$.

Por el LEMA 3.1.

$$f(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) = \overline{f(z_1,\ldots,z_n)}$$

de donde resulta, fácilmente, que la función $u = \operatorname{Re} f$ es simétrica. Entonces, por el LEMA 2.1., se concluye que μ es radialmente par. Con lo cual, en virtud del LEMA 3.1., la fórmula (12) es equivalente a la (11) de la tesis.

Recíprocamente, si μ es una medida pluriarmónica radialmente par sobre $\mathbb{R}^n$ y si $c_1 \geq 0,\ldots,c_n \geq 0$, la función f definida por la fórmula (11) coincide, en virtud del LEMA 3.1., con la función f de la fórmula (12). Del TEOR. II.3.5. resulta que f es holomorfa y de parte real positiva en D^n. Por otra parte, la realidad de la función f es evidente.

CAPITULO VI

REPRESENTACION INTEGRAL DE FUNCIONES OPERATORIALES Y DE PARTE REAL POSITIVA EN EL POLISEMIPLANO D^n.

1. Introducción.

El objeto de este capítulo es extender a n-variables complejas los teoremas 1.1. y 1.2., que se enuncian a continuación.

Los resultados principales de este capítulo se han obtenido, a partir del TEOR. II.3.3.; utilizando un método similar al empleado por Zemanian (30).

1.1. TEOREMA (Zemanian (30, Th. 8.11.2)).

Sea $F : D \to L(H)$ una función definida sobre el semiplano D. Entonces F(.) es holomorfa y de parte real positiva en D, si y sólo si, para todo punto z de D, puede ser representada por:

$$(1) \qquad F(z) = Q + z A_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-itz}{z-it} \, dE(t)$$

donde Q es un operador anti-hermitiano, A_1 un operador hermitiano y positivo, y E(.) es una medida PO sobre los conjuntos de Borel de la recta $\mathbb{R}$.

1.2. TEOREMA. (Zemanian (30, Th.8.11-3))

Sea H un espacio de Hilbert con conjugación y sea $F : D \to L(H)$ una función representada por la fórmula (1). Entonces F(z) es un operador real, para todo z real, si y sólo si, los operadores Q y A_1, y la medida E(.), poseen las siguientes propiedades adicionales: Q y A_1 son reales y la medida E(.) satisface la condición siguiente

$$(2) \qquad E(-M) = \overline{E(M)}$$

para todo conjunto de Borel M de la recta.

Nota.

En el caso particular de espacios de Hilbert de dimensión finita el TEOR. 1.1. es debido a YOULA. Véase al respecto [3, Th. 3.1.6.].

El siguiente resultado, debido a PFUGER [22, pág 9], es el correspondiente al caso del disco del TEOR. 1.1.

1.3. TEOREMA.

Sea $F : \Delta \to L(H)$ una función operatorial holomorfa cuya parte real es positiva en el disco unitario Δ. Entonces existe una aplicación creciente Φ del intervalo $[0, 2\pi]$ en el subespacio real de $L(H)$, tal que

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(o) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\Phi(t)$$

(Nótese que subespacio real de L(H), en la terminología de [22], es el conjunto de todos los operadores hermitianos en L(H).)

2. Preliminares.

En este párrafo estableceremos la terminología y notación utilizadas en este capítulo.

Asimismo, demostraremos algunos lemas elementales sobre funciones operatoriales, al efecto de poder utilizarlos en la demostración de los teoremas básicos.

2.1. Notación y Convenciones.

Sea H un espacio de Hilbert complejo, con L(H) designamos al conjunto de todos los operadores lineales y acotados de H en H.

La norma de un vector ξ de H, el producto escalar de dos vectores ξ, η de H, y la norma de un operador A de L(H) serán simbolizados, respectivamente, por

$$|\xi| \quad , \quad (\xi, \eta) \quad , \quad |A| \ .$$

En todo este trabajo, hacemos la convención de lenguaje de llamar "operador A" en lugar de "el operador lineal y acotado A".

Diremos que un operador A es positivo, en símbolos $A \geq 0$, si A es hermitiano y si $(A\xi, \xi) \geq 0$ para todo vector ξ de H. Con $L_+(H)$ designamos al cono real de todos los operadores positivos de H.

Llamamos parte real de un operador A, que simbolizamos con Re A, al operador hermitiano

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*) ,$$

donde A^* es el adjunto del operador A.

Análogamente, definimos como parte imaginaria del operador A, que simbolizamos Im A, al operador hermitiano

$$\operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*) .$$

2.2. Definición.

Sea $F : \Omega \to L(H)$ una función operatorial definida en un conjunto abierto Ω del espacio complejo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ que toma valores en el espacio L(H). Entonces, la función F se llama holomorfa en Ω, si la función escalar

$$(z_1,\ldots,z_n) \to (F(z_1,\ldots,z_n)\,\xi,\eta)$$

es holomorfa en ^, para todo par de vectores ξ, η de H.

Nota. Esta definición concuerda con la Def. 3.10.1 de HILLE PHILLIPS (18, pág. 92).

2.3. LEMA.

Sea $F : \Omega \to L(H)$ una función operatorial definida en el abierto del espacio $\mathbb{C}^n$; y sea, para todo vector ξ de H, la función compleja f : $D^n \to \mathbb{C}$ definida por

(3) $$f_\xi(z_1,\ldots,z_n) = (F(z_1,\ldots,z_n)\xi ,\xi)$$

para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de Ω. Entonces:

a) F es holomorfa en Ω si y sólo si $f_\xi(.)$ es holomorfa en Ω, para todo vector ξ de H.

b) La parte real de F es positiva en Ω si y sólo si la parte real de $f_\xi(.)$ es positiva en Ω.

Demostración.

a) Resulta de la identidad de polarización (30, A.7), la siguiente

$$(F(.)\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left(f_{\xi+\eta}(.)-f_{\xi-\eta}(.)+i\, f_{\xi+i\eta}(.)-if_{\xi-i\eta}(.)\right) ,$$

de donde es inmediato el resultado.

b) Es consecuencia de la relación

$$(\mathrm{Re}\, F(.)\xi\ ,\xi) \;=\; \mathrm{Re}\, f_\xi(.) ,$$

la que es de fácil comprobación.

Medidas Operatoriales Positivas o Medidas PO.

Para la teoría de las medidas PO nos remitimos a la exposición de BERBERIAN (4). Aquí sólo presentaremos un breve resumen.

2.4. Definición. ((4, Th. 1)).

Se llama medida operatorial positiva (abreviadamente, medida PO) a toda aplicación $E : \mathcal{B} \to L_+(H)$, donde $\mathcal{B}$ es una tribu de partes de T; tal que, para todo vector ξ de H, la función

(4) $$\mu_\xi(.) \;=\; (E(.)\xi\ ,\xi)$$

sea una medida finita y positiva sobre $\mathcal{B}$.

2.5. Definición.

Sea T un espacio topológico localmente compacto, metrizable y separable. Se llama medida PO de Borel sobre T, a toda medida PO E(.) definida sobre la tribu de Borel $\mathcal{B}$ de T.

Recordamos que la tribu de Borel de T es la tribu engendrada por la familia de todos los conjuntos abiertos de T.

Nota. Las restricciones impuestas al espacio topológico T se han hecho, al sólo efecto de simplificar la exposición, y en razón que este trabajo no requiere mayor generalidad.

2.6. Definición.

Diremos que E(.) es una medida PO pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$, si E(.) es una medida PO de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, tal que la medida escalar $\mu_\xi(.)$ definida por (4), sea pluriarmónica.

El siguiente teorema, básico para la demostración TEOR. 3.1., es una versión modificada de un teorema de BERBERIAN (4, Th. 2). Hacemos notar que hemos eliminado una de las hipótesis del resultado original, por ser ella consecuencia de las restantes.

2.7. TEOREMA.

Sea $\mathcal{B}$ una tribu de partes de un conjunto T, y sea $\mu_\xi(.)$, para todo vector ξ de H, una medida finita y positiva sobre $\mathcal{B}$. Entonces, para que exista una medida PO sobre $\mathcal{B}$ tal que

$$\mu_\xi(.) = (E(.)\xi, \xi) ,$$

es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones:

$$\text{(5-a)} \qquad \mu_{\xi+\eta}(.) + \mu_{\xi-\eta}(.) = 2\mu_\xi(.) + 2\mu_\eta(.)$$

$$\text{(5-b)} \qquad \mu_{c\xi}(.) = |c|^2 \mu_\xi(.)$$

para todo par de vectores ξ, η de H, y todo número complejo c; y que exista una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\text{(5-c)} \qquad |\mu_\xi(.)| \leqslant \alpha|\xi|^2 .$$

Demostración.

Véase Ap. B, TEOR. 1.4.

Notas.

1. Obsérvese que la constante que aparece en (5-c) es independiente del argumento, en contra a lo supuesto en (4).

2. Se prueba fácilmente que la medida PO del teorema anterior es única.

Integral de una función Escalar Respecto de una Medida Operatorial.

En este capítulo hemos de utilizar con frecuencia integrales del siguiente tipo

$$\int_T f(t)\, dE(t),$$

donde f es una función compleja definida sobre T, y E(.) es una medida PO sobre una tribu de partes de T.

2.8. TEOREMA. ((4, Th. 9))

Sea E(.) una medida OP sobre una tribu $\mathcal{B}$ de partes de T, y sea $\mu_\xi(.)$ la medida positiva definida por (4). Entonces, si $f : T \to \mathbb{C}$ es una función $\mathcal{B}$-medible y acotada sobre T, existe un único operador A en L(H), tal que

$$(A\xi,\ \xi) \; = \; \int_T f(t)\, d\mu_\xi(t) \; , \tag{6}$$

para todo vector ξ de H.

2.9. Definición.

El operador A del teorema precedente se denomina la integral de f, respecto a la medida PO E(.), y se lo nota

$$A \; = \; \int_T f(t)\, dE(t) \; , \tag{7}$$

o también

$$A = \int_T f\, d E .$$

2.10. Proposición.

Para que una medida PO de Borel sobre $\mathbb{R}^n$ sea pluriarmónica es necesario y suficiente que el operador

$$(8) \qquad I_{j_1,\ldots,j_n} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_j(it_1)} \ldots \overline{\psi_{jn}(it_n)}\, dE(t_1,\ldots,t_n)$$

se anule, para toda n-upla de enteros $(j_1,\ldots,j_n)$, salvo que $j_1 \geq 0, \ldots, j_n \geq 0$ o que $j_1 \leq 0, \ldots, j_n \leq 0$.

Demostración.

Es una comprobación inmediata.

Representación Canónica de Funciones Operatoriales de Parte Real Positiva.

3.1. TEOREMA.

Si $F : D^n \to L(H)$ es una función operatorial holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, entonces existe una única medida PO pluriarmónica $E(.)$ sobre $\mathbb{R}^n$; y existen n+1 operadores hermitianos $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tales que,

$$A_1 \geq 0, \ldots, A_n \geq 0$$

y que, para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ del polisemiplano D^n, se cumple que

$$(9) \quad F(z_1,\ldots,z_n) = (A_0+z_1A_1+\ldots+z_nA_n+ \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)dE(t_1,\ldots,t_n)$$

Los operadores $A_0, A_1,\ldots,A_n$ están unívocamente determinados por (9).

Recíprocamente, si $E(.)$ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$, y si A_0, $A_1 \geq 0, \ldots, A_n \geq 0$ son (n+1) operadores hermitianos; entonces la función F definida por (9) es holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n,

Demostración.

. A fin de aligerar la notación designaremos con $\hat{z}$ al vector $(z_1,\dots,z_n)$ de D^n.

Sea $f_\xi : D^n \to \mathbb{C}$, para cada vector ξ de H, la función definida por

$$(10) \qquad f_\xi(\hat{z}) = (F(\hat{z})\xi, \xi) .$$

Por el LEMA 2.3., $f_\xi(.)$ es holomorfa y de parte real positiva en D^n. En consecuencia, podemos aplicar el TEOR. II.3.3. a la función $f_\xi(.)$. Entonces existe una medida pluriarmónica escalar $\mu_\xi(.)$ sobre R^n, y constantes reales $a_0(\xi)$, $a_1(\xi)\geq 0,\dots,a_n(\xi)\geq 0$ tales que

$$(11) \quad f_\xi(\hat{z}) = i\, a_0(\xi)+\sum_{j=1}^{n} a_j(\xi)z_j+ \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n}(2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\,d\mu_\xi(t_1,\dots,t_n).$$

Es fácil ver que, para cada vector $z = (z_1,\dots,z_n) \in D^n$, la aplicación $\xi \to f_\xi(z_1,\dots,z_n)$ es una forma cuadrática sobre el espacio de Hilbert H. Por consiguiente, y por AP.B.(2-a) y (2-b), se tienen las fórmulas

$$(12\text{-a}) \qquad f_{\xi+\eta}(\hat{z}) + f_{\xi-\eta}(\hat{z}) = 2f_\xi(\hat{z}) + 2f_\eta(\hat{z})$$

$$(12\text{-b}) \qquad f_{c\xi}(\hat{z}) = |c|^2 f_\xi(\hat{z})$$

para todo par de vectores ξ, η de H, y para todo número complejo c.

Aplicando sucesivamente la fórmula (11) a las funciones $f_{\xi+\eta}$, $f_{\xi-\eta}$, f_ξ y f_η; y sumando las dos primeras fórmulas entre sí, y también las dos últimas, obtenemos las expresiones:

$$(13\text{-a}) \quad f_{\xi+\eta}(\hat{z})+f_{\xi-\eta}(\hat{z}) = i\, a_0(\xi+\eta)+i\, a_0(\xi-\eta)+\sum_{j=1}^{n}(a_j(\xi+\eta)+a_j(\xi-\eta))z_j +$$

$$+ \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} (2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\, d(\mu_{\xi+\eta}+\mu_{\xi-\eta})(t_1,\dots,t_n)$$

$$(13\text{-b}) \quad 2f_\xi(\hat{z})+2f_\eta(\hat{z}) = 2i\ a_0(\xi)+2i\ a_0(\eta)+\sum_{j=1}^{n}(2a_j(\xi)+2a_j(\eta))\ z_j +$$

$$+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\ d(2\mu_\xi+2\mu_\eta)(t_1,\ldots,t_n)\ .$$

Las funciones que aparecen en los primeros miembros de las fórmulas (13) son iguales, por las fórmulas (12). Por consiguiente, y en virtud de la unicidad de la representación del TEOR. II.3.3. resultan las relaciones

$$(14\text{-a}) \quad a_j(\xi+\eta) + a_j(\xi-\eta) = 2a_j(\xi) + 2a_j(\eta) \qquad (j=0,1,\ldots,n)$$

$$(15\text{-a}) \quad \mu_{\xi+\eta}(.) + \mu_{\xi-\eta}(.) = 2\mu_\xi(.) + 2\mu_\eta(.)\ .$$

Análogamente, se obtienen las relaciones:

$$(14\text{-b}) \quad a_j(c\xi) = |c|^2\ a_j(\xi)$$

$$(15\text{-b}) \quad \mu_{c\xi}(.) = |c|^2\ \mu_\xi(.)\ .$$

Por otra parte, se obtiene de la fórmula (11), en virtud del TEOR. II.3.5., la relación

$$\operatorname{Re} f_\xi(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\xi)x_j + \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n)$$

Poniendo $z_1=\ldots=z_n=1$, en esta última resulta:

$$(16) \quad \operatorname{Re} f_\xi(1,\ldots,1) = a_1(\xi) + \ldots + a_n(\xi) + \frac{1}{\pi^n}\mu_\xi(\mathbb{R}^n)$$

Asimismo, de (10) se obtiene

$$(17) \quad |\operatorname{Re} f_\xi(1,\ldots,1)| \leqslant |f_\xi(1,\ldots,1)| \leqslant |F(1,\ldots,1)|\,|\xi|^2\ .$$

De (16) y (17) resultan las desigualdades

$$(18) \quad |\mu_\xi(\mathbb{R}^n)| \leqslant \alpha|\xi|^2$$

$$(19) \qquad 0 \leq a_1(\xi) \leq \alpha|\alpha|^2, \ldots, 0 \leq a_n(\xi) \leq \alpha|\xi|^2$$

donde $\alpha = \pi^n \,|F(1,\ldots,1)| < +\infty$.

Las fórmulas (15) y (18) aseguran el cumplimiento de las hipótesis del TEOR. 2.7. Por consiguiente, existe una única medida PO de Borel $E(.)$ sobre $\mathbb{R}^n$, tal que

$$(20) \qquad \mu_\xi(M) = (E(M)\xi, \xi),$$

para todo vector ξ, y todo conjunto de Borel M.

Por otra parte las fórmulas (14) y (19) permiten aplicar el TEOR. AP. B. 1.3.

Por lo tanto, existen n operadores hermitianos y <u>positivos</u> $A_1,\ldots,A_n$ tales que, para todo vector ξ de H, se cumplen las relaciones:

$$(21) \qquad a_1(\xi) = (A\xi, \xi), \ldots, a_n(\xi) = (A_n\xi, \xi).$$

También, puede probarse sin dificultad que existe un operador hermitiano A_o, tal que

$$(22) \qquad a_o(\xi) = (A_o\xi, \xi).$$

De las fórmulas (10), (11), (21) y (22), se obtiene la siguiente igualdad

$$(23) \qquad (F(z_1,\ldots,z_n)\xi,\xi) = i(A_o\xi,\xi) + \sum_{j=1}^{n}(A_j\xi,\xi)z_j + \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\,d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n)$$

Por aplicación a la fórmula (23) de la DEF. 2.9. y del corolario del teorema 12.7 de [25, pág. 296], resulta:

$$F(z_1,\ldots,z_n) = i\,A_o+z_1A_1+\ldots+z_nA_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\,dE(t_1,\ldots,t_n)$$

que es la fórmula de la tesis.

La unicidad de la representación (9), será probada como corolario del teorema de inversión (Véase COR. 4.5.).

La parte recíproca del teorema resulta del siguiente teorema.

3.2. TEOREMA.

Si $E(.)$ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$, y si la función $F : D^n \to L(H)$ está definida por la siguiente integral

(24) $$F(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\,dE(t_1,\ldots,t_n) \;;$$

entonces, $F(.)$ es holomorfa, y su parte real es la función operatorial positiva $U : D^n \to L_+(H)$, dada por la siguiente expresión:

(25) $$U(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\; dE(t_1,\ldots,t_n)\;.$$

Demostración.

En primer lugar observamos, que las integrales que aparecen en las fórmulas existen para cualquier punto $(z_1,\ldots,z_n)$ del polisemiplano D^n. Esto resulta fácilmente del TEOR. 2.8.

Por DEF. 2.9., de las fórmulas (24) y (25), se obtienen las siguientes

(26) $$f_\xi(z_1,\ldots,z_n) = (F(z_1,\ldots,z_n)\xi,\xi) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\; d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n)$$

(27) $$u_\xi(z_1,\ldots,z_n) = (U(z_1,\ldots,z_n)\xi,\xi) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)\; d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n)$$

donde $\mu_\xi(.)$ es la medida definida por (4). Dicha medida, por DEF. 2.5., es pluriarmónica, para todo vector ξ de H.

Por aplicación del TEOR. II.3.5. a las integrales (26) y (27), se concluye que la función $f_\xi(.)$ es holomorfa en D^n, y que su parte real es la función $u_\xi(.)$. Por lo tanto, en virtud del LEMA 2.3. y de la fórmula (3), se infiere que la función operatorial F(.) es holomorfa y de parte real positiva en D^n, y que Re F(.) = U(.).

4. Fórmula de Inversión y Teorema de Unicidad.

El objeto de esta sección es extender a funciones operatoriales los TEOR. III.3.1. y TEOR. III.3.5., de los cuales se deducirá la unicidad de la representación de la sección precedente.

Antes de abordar el teorema principal de esta sección, estableceremos las siguientes definiciones y lemas elementales.

4.1. Convergencia débil de Operadores. (9, 4.44)

Se dice que una sucesión generalizada $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en L(H) converge débilmente a un operador A de L(H), simbólicamente:

$$w - \lim_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = A ,$$

si se cumple

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma\xi,\eta) = (A\xi,\eta) \tag{28}$$

para todo par de vectores ξ y η de H.

4.2. LEMA.

Para que una sucesión generalizada $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ converja débilmente al operador A de L(H), es suficiente que, para todo vector ξ de H, se cumpla la relación

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma\xi,\xi) = (A\xi,\xi) . \tag{28'}$$

Demostración.

Basta aplicar la identidad de polarización (30, A.7) a (28') para obtener (28).

4.3. LEMA.

Si $E(.)$ y $\hat{E}(.)$ son dos medidas PO de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, tales que

$$(29) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\, E = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\, \hat{E}$$

para toda función $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$, entonces $E(.) = \hat{E}(.)$.

Demostración.

Sean $\mu_\xi(.)$ y $\hat{\mu}_\xi(.)$ las medidas escalares

$$\mu_\xi(.) = (E(.)\xi,\xi) \quad y \quad \hat{\mu}_\xi(.) = (\hat{E}(.)\xi,\xi)$$

respectivamente. Tales medidas son automáticamente regulares pues, por ser $\mathbb{R}^n$ localmente compacto, metrizable y separable, puede aplicarse a tal efecto el teorema 2.18 de [24].

Para todo vector ξ, por la Def. 2.9., de la fórmula (29) obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\, \mu_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\, \hat{\mu}_\xi$$

para toda función $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por el teorema de F. RIESZ [24, 2.14], resulta que $\mu_\xi(.) = \hat{\mu}_\xi(.)$. O sea que se cumple:

$$(E(M)\xi,\xi) = (\hat{E}(M)\xi,\xi)$$

para cualquier conjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$ y todo vector ξ de H. Por consiguiente $E(.) = \hat{E}(.)$.

4.4. TEOREMA.

Sea $F : D^n \to L(H)$ la función definida por la fórmula (9) del TEOR. 3.1., donde $E(.)$ es una medida pluriarmónica sobre $\mathbb{R}^n$

y sea $U(.) = \operatorname{Re} F(.)$. Entonces se cumplen las relaciones

$$(30\text{-a}) \quad \underset{x_1\to\infty}{\text{w-lim}} \frac{1}{x_1} U(x_1,1,\ldots,1) = A_1,\ldots,\underset{x_n\to\infty}{\text{w-lim}} \frac{1}{x_n} U(1,1,\ldots,x_n) = A_n$$

$$(30\text{-b}) \quad \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)} \int_{R^n} \frac{(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)} U(x_1+it_1,\ldots,x_n+it_n)dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \int_{R^n} (t_1,\ldots,t_n)\, dE(t_1,\ldots,t_n)\ ;$$

para toda función $\phi \in C(R^n)$.

<u>Demostración</u>.

Por el TEOR. 3.2., la función $U(.)$ está representada por la fórmula

$$U(z_1,\ldots,z_n) = x_1A_1+\ldots+x_nA_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} p(z_1,t_1)\ldots p(z_n,t_n)dE(t_1,\ldots,t_n$$

De la que resulta, para todo $\xi \in H$, la fórmula

$$(31) \quad \mu_\xi(z_1,\ldots,z_n) = (A_1\xi,\xi)x_1 + \ldots + (A_n\xi,\xi)x_n +$$

$$+ \frac{1}{\pi^n} \int_{R^n} p(z_1,t_1)\ \ldots\ p(z_n,t_n)\ d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n)\ .$$

Aplicando a esta última expresión, el TEOR. III.3.1., se obtiene que, para toda función $\phi \in C(R^n)$, se cumple:

$$\lim \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} \frac{\phi(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)} u_\xi(x_1+it_1,\ldots,x_n+it_n)dt_1\ldots dt_n = \int_{R^n}\phi(t_1,\ldots,t_n)d\mu_\xi$$

Entonces, por el LEMA 4.2., resulta la fórmula (30-b) de la tesis.

Eligiendo en (31) $z_1 = x_1$, $z_2 = 1$, ..., $z_n = 1$, dividiendo la fórmula obtenida por x_1, y tomando el límite, se obtiene

$$\lim_{x_1\to\infty} \frac{u_\xi(x_1,1,\ldots,1)}{x_1} = (A_1\xi,\xi)+\lim_{x_1\to 0}\int \frac{1+t_1^2}{(x_1^2+t_1^2)} d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n) = (A_1\xi,\xi)$$

Dividiendo por x_1 y tomando límites en ambos miembros de la fórmula precedente, se obtiene:

$$\lim_{x_1\to+\infty} \frac{u_\xi(x_1,1,\ldots,1)}{x_1} = (A_1\xi,\xi) + \lim_{x_1\to\infty}\int_{R^n} \frac{1+t_1^2}{x_1^2+t_1^2} d\mu_\xi(t_1,\ldots,t_n) = A_1\xi,\xi) + 0$$

El paso del límite bajo signo de integral se justifica porque la desigualdad

$$\frac{1 + t_1^2}{x_1^2 + t_1^2} \leqslant 1 \qquad \text{si } x_1 \geqslant 1$$

permite aplicar al efecto el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue.

De tal modo, tenemos que

$$\lim_{x_1\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1} U(x_1,1,\ldots,1)\xi,\xi\right) = (A_1\xi,\xi)$$

de donde, por el Lema 4.3. resulta

$$w - \lim_{x_1\to+\infty} \frac{1}{x_1} U(x_1,1,\ldots,1) = A_1$$

Del mismo modo se prueban los restantes límites.

4.5. <u>COROLARIO</u>.

Del teorema precedente se obtiene fácilmente la unicidad de la representación (9) de toda función operatorial de parte real positiva. Con ello quedará completada la demostración del TEOR. 3.1.

La unicidad de los coeficientes $A_1,\ldots,A_n$ en la fórmula (9)

$$(9)\quad F(z_1,\ldots,z_n) = i\,A_0 + z_1A_1 + \ldots + z_nA_n +$$

$$+ \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} (2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\, dE(t_1,\ldots,t_n) ,$$

resulta de la fórmula (30-a). Para probar la unicidad de la medida $E(.)$ supongamos que existan dos medidas PO pluriarmónicas $E(.)$ y $\hat{E}(.)$ tales que satisfagan la ecuación (9) para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ del polisemiplano D^n. Entonces, por (30-b) del teorema precedente, se tiene que, para toda $\phi \in C(R^n)$, la siguiente igualdad

$$\int_{R^n} \phi \, d\, E \; = \; \int_{R^n} \phi \, d\, \hat{E}$$

Finalmente, por el LEMA 4.3., se concluye que $E(.)$ y $\hat{E}(.)$ coinciden.

5. Funciones Operatoriales Positivas Reales O Impedancias Operatoriales.

En esta sección se extenderá a funciones operatoriales la representación canónica de las funciones escalares positivas reales que fue obtenida en el TEOR. V.3.2.

En toda esta sección supondremos que H es un espacio de Hilbert munido de una conjugación $\xi \to \bar{\xi}$. Para la definición de este concepto y propiedades elmentales, véase AP.B. 3.

La existencia de una conjugación $\xi \to \bar{\xi}$ permite definir los conceptos de vector real y de operador real. Se dice que un vector ξ es real si $\bar{\xi} = \xi$, y que un operador A es real si $A\xi$ es un vector real para todo vector ξ real.

5.1. Definición.

Una función operatorial $F : D^n \to L(H)$, definida en el polisemiplano D^n, se llama positiva real o impedancia operatorial, si posee las propiedades:

(a) $F(.)$ es holomorfa en D^n.

(32) (b) Para todo punto $(z_1,...,z_n) \in D^n$, el operador $\operatorname{Re} F(z_1,...,z_n)$ es positivo.

(c) Para todo punto real $(x_1,...,x_n) \in D^n$, el operador $F(x_1,...,x_n)$ es real.

Los siguientes lemas serán utilizados en la demostración del teorema principal de esta sección.

5.2. LEMA. (Principio de Simetría de Schwarz).

Si la función operatorial $F : D^n \to L(H)$ satisface las condiciones (a) y (c) de la definición precedente, entonces se cumple la igualdad

$$F(\overline{z_1},...,\overline{z_n}) = \overline{F(z_1,...,z_n)} . \tag{33}$$

cualesquiera sea el punto $(z_1,...,z_n)$ de D^n.

Demostración.

Para cada par ξ, η de vectores reales de H, sea $f_{\xi,\eta} : D^n \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$(34) \qquad f_{\xi,\eta}(z_1,\ldots,z_n) = (F(z_1,\ldots,z_n)\xi,\eta) \ .$$

Es fácil comprobar, que la función $f_{\xi,\eta}(.)$ es holomorfa y real en D^n. Entonces, por el LEMA V.1.4., se cumple la relación

$$f_{\xi,\eta}(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) = \overline{f_{\xi,\eta}(z_1,\ldots,z_n)} \ .$$

De donde, por (34), se obtiene:

$$(F(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n})\xi,\eta) = \overline{(F(z_1,\ldots,z_n)\xi,\eta)} \ .$$

Finalmente, AP.B.3.9., de esta igualdad se obtiene la igualdad (33) de la tesis.

5.3. LEMA.

Sea $F : D^n \to L(H)$ la función definida por la fórmula (9) del TEOR. 3.1., donde los operadores A_j, y la medida $E(.)$ satisfacen a las condiciones enunciadas en dicho teorema. Entonces, para que la función $F(.)$ sea positiva real en D^n, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

(35-a) La medida $E(.)$ es conjupar, es decir que, para todo conjunto de Borel M, se cumple la relación

$$E(-M) = \overline{E(M)} \ .$$

(35-b) $\qquad \overline{A_0} = -A_0, \qquad \overline{A_1} = A_1, \qquad \ldots, \qquad \overline{A_n} = A_n$

Demostración.

Tomando conjugados en ambos miembros de la fórmula (9), en virtud de AP.B.3.12., y luego sustituyendo cada variable z_j por $\overline{z_j}$, se obtiene

$$\overline{F(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n})} = -iA_0+z_1A_1+\ldots+z_nA_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{R^n}\left(2\overline{k(\overline{z_1},t_1)}\ldots\overline{k(\overline{z_n},t_n)}-1\right)\, d\bar{E}(t_1,\ldots,t_n) .$$

De esta fórmula, por la relación

$$\overline{k(\bar{z},t)} = k(z,-t)$$

que es fácil obtener de la definición del núcleo $k(z,t)$, resulta:

$$\overline{F(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n})} = -iA_0+z1A_1+\ldots+z_nA_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{R^n}\left(2k(z_1,-t_1)\ldots k(z_n,-t_n)-1\right)d\bar{E}(t_1,\ldots,t_n).$$

Efectuando el cambio de las variables $t_1,\ldots,t_n$ por las variables $-t_1,\ldots,-t_n$, se obtiene de la última fórmula

$$F(z_1,\ldots,z_n) = -iA_0+z_1A_1+\ldots+z_nA_n+\frac{1}{\pi^n}\int_{R^n}\left(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\right)\, d\hat{E}(t_1,\ldots,t_n)$$

(36)

donde E(.) es la medida definida por la relación

$$\hat{E}(M) = \bar{E}(-M) .$$

Si la función F(.) es real, por el LEMA 5.2., coinciden los primeros miembros de las fórmulas (9) y (36). Entonces, por el COR. 4.5., se infiere que $\hat{E}(.) = E(M)$ que equivale a la condición (35-a), y que se cumplen las relaciones (35-b).

Recíprocamente, si se cumplen las condiciones (35) entonces de la confrontación de las fórmulas (9) y (36) surge que la función F(.) satisface a la condición (33). De donde, si $(x_1,\ldots,x_n)$ es un punto real de D^n, resulta que

$$\overline{F(x_1,\ldots,x_n)} = F(x_1,\ldots,x_n)$$

O sea que, la función F(.) es real.

5.4. <u>TEOREMA</u>.

Si $F : D^n \to L(H)$ es una función operatorial <u>positiva real</u>, entonces existen: a) una única medida PO pluriarmónica y conjupar $E(.)$ sobre R^n, b) un único operator antihermitiano real Q, y c) n operadores hermitianos, reales y positivos, unívocamente determinados; tales que, para todo $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n,

$$F(z_1,\ldots,z_n) = Q+\sum_{j=1}^{n} z_jA_j+ \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\, dE(t_1,\ldots,t_n) \, . \tag{37}$$

Recíprocamente, si los elementos Q, A_j, $E(.)$ que aparecen en la fórmula (37), satisfacen a las propiedades enunciadas a) b) y c); entonces la función $F : D^n \to L(H)$ definida por (38) es una función positiva real en D^n.

Demostración.

El teorema, salvo la afirmación sobre Q, es consecuencia inmediata del TEOR. 3.1. y del LEMA 5.4.

Si en la fórmula (9) ponemos $Q = i\, A_0$, entonces Q es antihermitiano y real. En efecto, de la hermiticidad de A obtenemos

$$Q^* = (-i)\, A_0 = -Q \, ,$$

y, por (35-b), resulta

$$\bar{Q} = (-i)\, \overline{A_0} = i\, A_0 = Q \, .$$

Como caso particular, para $n = 1$, del TEOR. 5.4., obtenemos el TEOR. 1.2. que reformulamos en el siguiente corolario.

5.5. COROLARIO.

Sea $F : D \to L(H)$ una función definida sobre el semiplano D. Entonces $F(.)$ es positiva real si y sólo si, puede ser representada por la fórmula

$$F(z) = Q + zA + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - itz}{z - it}\, dE(t) \tag{38}$$

donde Q es un operador antihermitiano real, A un operador real y positivo, y E(.) es una medida PO de Borel sobre R^1.

Demostración.

Sólo hay que probar que, la fórmula (38) coincide con la fórmula

$$F(z) = Q+zA+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(2k(z,t)-1)\,dE(t) \tag{39}$$

que se obtiene, como caso particular, de (37).

Por la definición del núcleo k(z,t) se obtiene

$$2k(z,t)-1 = \frac{(z+1)(it-1) - (it-z)}{it - z} = \frac{1 - itz}{z - it}$$

CAPITULO VII

FUNCIONES OPERATORIALES DE PARTE IMAGINARIA ACOTADA EN EL POLISEMIPLANO D^n.

Introducción.

El objeto principal de este capítulo es extender a funciones operatoriales los teoremas de representación canónica de funciones de parte imaginaria acotada en el polisemiplano D^n, obtenidos en el Cap. IV.

Los teoremas de este capítulo tendrán aplicación a la demostración de los resultados principales del Cap. IX, dedicado a la representación exponencial de las funciones operatoriales de parte imaginaria positiva.

En todo este capítulo, como así también en los siguientes, será supuesto, sin mención expresa, que el espacio de Hilbert complejo H es separable.

1. Integración de Funciones Operatoriales.

En esta sección serán resumidas, con el objeto de fijar la terminología y la notación, las nociones básicas de la teoría de la integración de funciones operatoriales respecto a una medida escalar. Para una exposición más detallada véase el Apéndice C.

1.1. Definición.

Supongamos que $(T, \mathcal{B}, \mu)$ sea un espacio de medida completa y sigma finita. En nuestro caso será $T = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ es la tribu de los conjuntos medibles Lebesgue y μ es la medida de Lebesgue.

Una función operatorial $F : T \to L(H)$ se llama débilmente medible, si la función escalar $(F(.)\xi, \eta)$, para todo par de vectores ξ, η de H, es medible.

1.2. LEMA.

Si $F : T \to L(H)$ es débilmente medible, entonces la función $|F(.)|$ es medible.

Demostración.

Véase TEOR. AP. C. 2.2.

1.3. Definición.

Se llama norma esencial de una función operatorial $F:T\to L(J)$, al supremo esencial de la función escalar $|F(.)|$, y se la nota $||F||_\infty$.

La función $F : T \to L(H)$ se denomina esencialmente acotada, si su norma esencial es finita.

1.4. TEOREMA.

Si $f : T \to \mathbb{C}$ es una función escalar integrable, y si $G : T \to L(H)$ es una función débilmente medible y esencialmente acotada, entonces la función operatorial $f(.)G(.)$ es débilmente medible, y existe un único operador A en L(H) tal que,

$$(1) \qquad (A\xi,\eta) = \int_T f(t)(G(t)\xi,\eta)\, d\mu(t)$$

para todo par de vectores ξ, η de H.

Demostración.

Véase TEOR. AP.C. 3.1. y Prop. AP.C. 2.8.

1.5. Definición.

Si $f : T \to \mathbb{C}$ y $G : T \to L(H)$ son las funciones del TEOR. 1.4., entonces el operador A, cuya existencia asegura dicho teorema, se denomina la integral débil (o P-integral) de la función $f(.)G(.)$ respecto a la medida , y se la nota

$$A = \int_T f(t)\, G(t)\, d\mu(t) .$$

La siguiente notación es útil para abreviar la escritura.

1.6. Notación.

Si $G : R^n \to L(H)$ es una función débilmente medible y esencialmente acotada (respecto a la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$), entonces definimos

$$(2) \quad I_{j_1,\dots,j_n}(G) = \int_{R^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)}\dots\overline{\psi_{j_n}(it_n)}\, \frac{G(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n$$

para toda n-upla $(j_1,\ldots,j_n)$ de enteros.

Nótese, que la integral que aparece en (2), existe por TEOR. 1.4.

2. Representación Integral de Funciones Operatoriales Pluriarmónicas Acotadas.

El siguiente teorema será utilizado en la demostración del TEOR. 3.1.

2.1. TEOREMA.

Si $V : D^n \to L(H)$ es una función operatorial, definida sobre el polisemiplano D^n, que satisfaga a las siguientes condiciones:

(3)
- (I) para todo punto $\hat{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in D^n$, el operador $V(\hat{z})$ es hermitiano.
- (II) $\sup\{|V(\hat{z})| : \hat{z} \in D^n\} = M < +\infty$.
- (III) para todo vector ξ de H, la función $(V(.)\xi,\xi)$ es pluriarmónica en D^n.

Entonces, la función $V(.)$ admite la siguiente representación

$$(4)\quad V(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\,G(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n,$$

donde la función $G : D^n \to L(H)$, esencialmente única, posee las siguientes propiedades:

(5)
- (a) La función $G(.)$ es débilmente medible en $\mathbb{R}^n$.
- (b) Para casi todo punto $\hat{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, el operador $G(t_1,\ldots,t_n)$ es hermitiano.
- (c) Para casi todo punto $\hat{t} \in \mathbb{R}^n$, $|G(\hat{t})| < M < +\infty$.
- (d) Para toda n-upla de enteros $(j_1,\ldots,j_n)$, salvo las que no presentan ninguna variación de signo, se cumplen las relaciones

$$I_{j_1,\ldots,jn}(G) = 0 .$$

Recíprocamente, si $G : \mathbb{R}^n \to L(H)$ satisface a las condiciones (a), (b), (c) y (d) de (5), entonces la integral (4) define una función $V : D^n \to L(H)$ que posee las propiedades (I), (II) y (III) de la fórmula (3).

Demostración.

(I) Parte Directa.

Consideremos una base ortonormal (θ_k) del espacio de Hilbert H y sea, para todo par de números naturales j, k, la función definida sobre D^n por

$$(6) \qquad v_{jk}(.) = (V(.)\theta_k, \theta_j)$$

La matriz $(v_{jk}(\hat{z}))$, para todo $\hat{z} \in D^n$, es la matriz del operador $V(\hat{z})$ en la base dada. Entonces por (3-(II)) y en virtud del TEOR. AP.B. 2.4., se cumple la desigualdad

$$(7) \quad \left| \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} v_{jk}(\hat{z})\, c_j\, \bar{d}_k \right| \leq M \left(\sum_{j=1}^{p} |c_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{q} |d_k|^2 \right)^{1/2} ,$$

para todo punto $z \in D^n$ y todo par de sucesiones finitas $c_1,\dots,c_p$ y $d_1,\dots,d_q$ de números complejos.

Por otra parte, de la fórmula (6), es fácil ver que $v_{jk}(.)$ es una combinación lineal de pluriarmónicas acotadas en D^n. Por consiguiente, y en virtud del COR. IV.4.2., existe el límite

$$(8) \quad \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} v_{jk}(x_1+it_1,\dots,x_n+it_n) = g_{jk}(t_1,\dots,t_n) ,$$

para todos los puntos $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n \setminus N_{jk}$, donde N_{jk} es un conjunto de medida de Lebesgue nula..

Sea N la unión de todos los conjuntos N_{jk} cuando los subíndices j,k toman todos los valores posibles. Entonces, N también es de medida nula, pues es la unión numerable de conjuntos de medida nula.

Tomando límites, en ambos miembros de las desigualdades

(7), en virtud de (8), obtenemos las siguientes desigualdades:

$$(9)\quad \left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} g_{jk}(\hat{t})\, c_j\, \bar{d}_k\right| \leqslant M\Big(\sum_{j=1}^{p} |c_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{q} |d_k|^2\Big)^{1/2}$$

que son válidas para todo $t = (t_1,\ldots,t_n) \in R^n \setminus N$, y todo par de sucesiones finitas $c_1,\ldots,c_p$ y $d_1,\ldots,d_q$ de números complejos.

Entonces, por la parte directa del TEOR.AP.B. 2.4., existe, para todo punto $\hat{t} \in R^n \setminus N$, un operador $G(t) \in L(H)$, tal que

$$(10)\qquad (G(\hat{t})\theta_k, \theta_j) = g_{kj}(\hat{t}) \qquad k=1,2,\ldots \quad j=1,2,\ldots$$

Conviene extender la definición de la función $\hat{t} \to G(\hat{t})$ a todo el espacio R^n, atribuyéndole el valor 0, en todos los puntos del conjunto excepcional N.

A continuación demostraremos que, para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, se cumple

$$(11)\qquad \underset{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)}{w-\lim} V(x_{1+it_1},\ldots,x_{n+it_n}) = G(t_1,\ldots,t_n)$$

(La w que precede a "lim" significa que la convergencia es en el sentido de la topología de la convergencia débil del espacio L(H).

A tal efecto, basta aplicar el TEOR. AP.B. 4.4., en razón de que, por (6), (8) y (11) se cumple la relación

$$(12)\qquad \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)} (V(x_{1+it_1},\ldots,x_{n+it_n})\theta_k,\theta_j) = (G(t_1,\ldots,t_n)\theta_k,\theta_j \quad ;$$

que asegura, conjuntamente con (3-II) el cumplimiento de las hipótesis del precitado teorema.

De la fórmula (11), se deduce fácilmente que la función G(.) satisface a las condiciones (5-a), (5-b) y (5-c).

Para terminar la prueba de esta parte directa, definamos, para todo vector $\xi \in H$, las funciones $v_\xi : D^n \to R$ y $g_\xi : R^n \to R$, por las fórmulas

(13) $v_\xi(.) = (V(.)\xi,\xi)$, $g_\xi(.) = (G(.)\xi,\xi)$

respectivamente.

La función $v_\xi(.)$ es armónica, real y acotada por (3), y para casi todo punto $(t_1,...,t_n)$, por (11), se cumple:

(14) $$\lim_{(x_1,...,x_n)\to(+0,...,+0)} v_\xi(x_1+it_1,...,x_n+it_n) = g\ (t_1,...,t_n)$$

De lo que resultan, en virtud del COR.IV. 4.2., las relaciones

(15) $$v_\xi(z_1,...,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\, g_\xi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n$$

y

(16) $$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)}\ \cdots\ \overline{\psi_{j_n}(it_n)}\ \frac{g\ (t_1,...,t_n)}{(1+t_1^2)...(1+t_n^2)}\, dt_1...dt_n = 0$$

para toda n-upla $(j_1,...,j_n)$ de enteros salvo que $j > 0,...,j_n > 0$ o que $j_1 < 0,...,j_n < 0$.

Finalmente, de (15) y (16), por DEF. 1.5., se obtiene la fórmula (4) y la condición (5-d) de la tesis del teorema.

(II) <u>Parte Recíproca</u>.

Supongamos que $G : \mathbb{R}^n \to L(H)$ es una función dada que satisface a las condiciones (5) del enunciado del teorema; y que $V : D^n \to L(H)$ es la función definida por la integral (4). Nótese que esta última existe en virtud del TEOR. 1.4.

Si $v_\xi(.)$ y $g_\xi(.)$ son las funciones definidas, a partir de las funciones dadas V(.) y G(.), por las fórmulas (13), entonces se cumplen las relaciones (15) y (16) en razón de la fórmula (4) y la hipótesis (5-d).

Las fórmulas (15) y (16), por la parte recíproca del TEOR. IV.4.1. aseguran que la función $v_\xi(.)$ es <u>pluriarmónica</u> para todo vector ξ de H, y por consiguiente la función V(.) satisface a la condición (3-III). Por otra parte, de la fórmula (15), pcr (5-c), es fácil ver que

$$-M|\xi| \leq v_\xi(\hat{z}) \leq M|\xi|$$

para todo punto $\hat{z}$ de D^n y todo vector ξ de H. De donde resulta fácilmente que la función V(.) satisface las condiciones 3-II y 3-I del enunciado.

Queda así demostrado el teorema.

2.2. TEOREMA.

Si $G : R^n \to L(H)$ es una función que satisface a las condiciones (5-a), (5-b) y (5-c), y si $V : D^n \to L(H)$ es la función definida por la fórmula (4); entonces, para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, se cumple la relación

$$(17) \qquad \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)} V(x_1+it_1,\ldots,x_n+it_n) = G(t_1,\ldots,t_n) .$$

(La letra w que precede a "lim", significa que la convergencia es relativa a la topología de la convergencia débil del espacio L(H).)

Demostración.

Sea (θ_k) una base ortonormal del espacio de Hilbert H (Dicha base es numerable por la separabilidad de H).

Para probar el teorema, es suficiente demostrar que, en virtud de TEOR. AP.B. 4.4., se verifican las siguientes condiciones:

$$\text{(a)} \quad |V(z_1,\ldots,z_n)| \leq M < +\infty$$

$$(18) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)} (V(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)\theta_k,\theta_j) = (G(t_1,\ldots,t_n)\theta_k,\theta_j),$$

para todo par de índices k, j, y todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, excepto los que pertenecen a un conjunto despreciable N.

La desigualdad (18-a) resulta de (5-c) y de la mayoración

$$|V(z_1,\dots,z_n)| \leqslant \frac{M}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1+(y_1-t_1)^2} \cdots \frac{x_n}{x_n^2+(x_n-t_n)^2}\, dt_1,\dots,dt_n = M$$

que se obtiene fácilmente de la fórmula (4).

Para probar (18-b), consideremos la siguiente expresión

$$(V(z_1,\dots,z_n)\theta_k,\theta_j)=\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2} \cdots \frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}(G(t_1,\dots,t_n)\theta_k,\theta_j)dt_1\dots dt_n$$
(19)

que se obtiene, por definición de integral operatorial, de la fórmula (4).

Entonces, por aplicación del TEOR. IV. 3.1. a la fórmula (19), se obtiene que

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to +0,\dots,+0} (V(x_1+it_1,\dots,x_n+it_n)\theta_k,\theta_j) = (G(t_1,\dots,t_n)\theta_k,\theta_j)$$

para todo punto $(t_1,\dots,t_n)$ de $\mathbb{R}^n$, salvo los que pertenecen a un conjunto despreciable $N_{j,k}$.

Si con N simbolizamos a la unión de los $N_{j,k}$, entonces el conjunto N es despreciable.

Por lo tanto, se cumple la relación (18-b); y en consecuencia, queda probado el teorema.

2.3. COROLARIO.

Sean las funciones G(.) y V(.) como en el enunciado del TEOR. 2.2. Entonces, para que se cumpla que

(20) $$V(z_1,\dots,z_n) \leftrightarrow V(z_1',\dots,z_n')$$

para todo par de puntos $(z_1,\dots,z_n)$ y $(z_1',\dots,z_n')$ en el polisemiplano D^n, es necesario y suficiente que se cumpla

(21) $$G(t_1',\dots,t_n') \leftrightarrow G(t_1,\dots,t_n)$$

para casi todo par de puntos $(t_1,\dots,t_n)$ y $(t_1',\dots,t_n')$ de $\mathbb{R}^n$. (La notación $A \leftrightarrow B$ significa A conmuta con B).

Demostración.

(I) Supongamos que se cumpla (41) y sea $G_k : D^n \to L(H)$ la función definida por:

$$G_k(t_1,\dots,t_n) = V(\tfrac{1}{k}+it_1,\dots,\tfrac{1}{k}+it_n) \quad ,$$

donde k es un entero positivo arbitrario.

Entonces, tenemos que, para todo par de puntos $(t_1,\dots,t_n)$ y $(t_1',\dots,t_n')$ de $\mathbb{R}^n$ y todo par de índices k, j, se cumple:

$$(22) \quad G_k(t_1,\dots,t_n).G_j(t_1',\dots,t_n') = G_j(t_1',\dots,t_n').G_k(t_1,\dots,t_n)$$

Por otra parte, por el teorema precedente, se tiene que

$$(23) \qquad w - \lim_{k\to+\infty} G_k(t_1,\dots,t_n) = G(t_1,\dots,t_n)$$

salvo los puntos de un conjunto despreciable N.

Tomando límites en ambos miembros de la fórmula (22), obtenemos por (23) y [9, 4.45], la relación

$$(24) \quad G(t_1,\dots,t_n)\, G_j(t_1',\dots,t_n') = G_j(t_1',\dots,t_n')\, G(t_1,\dots,t_n)$$

Del mismo modo que, a partir de (22), obtuvimos (24), se prueba que, a partir de (24), vale la relación (21) de la tesis.

(II) La parte recíproca del teorema se obtiene, de forma inmediata, del TEOR. AP.C. 4.4.

3. Representación de Funciones Operatoriales de Parte Imaginaria Positiva.

El TEOR. 3.1. y el LEMA 3.2. siguientes serán utilizados en la prueba del TEOR. 3.3. que es el principal de este capítulo.

3.1. TEOREMA.

Si $F : D^n \to L(H)$ es la función definida en el polisemiplano D^n por la fórmula

$$(25)\quad F(z_1,\dots,z_n) = A+ \frac{i}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\frac{G(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n ,$$

donde A es un operador hermitiano y $G : \mathbb{R}^n \to L(H)$ satisface a las condiciones (5)(a), (b), (c) y (d) del enunciado del TEOR. 2.1.; entonces $F(.)$ es holomorfa en D^n, y su parte imaginaria $V(.)$ posee las propiedades (3)(I)(II) y (III) de dicho enunciado y admite la representación.

$$(26)\quad V(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\, G(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n.$$

Demostración.

En primer lugar, observemos que la integral de la fórmula (25) existe por el TEOR. 1.4.

Sean, para todo vector ξ de H, las funciones $f_\xi(.)$ y $v_\xi(.)$ definidas sobre D^n por las fórmulas

$$(27)\qquad f_\xi(.) = (F(.)\xi,\xi) \quad , \quad v_\xi(.) = (V(.)\xi,\xi) .$$

Entonces, de las fórmulas (25) y (27), se obtiene la siguiente

$$(28)\quad f\,(z_1,\dots,z_n) = a_\xi+\frac{1}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} (2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\,\frac{g\,(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n$$

donde $a_\xi = (A\xi,\xi)$, y la función $g_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está definida por la expresión

$$(29)\qquad g_\xi(.) = (G(.)\xi,\xi)$$

De esta última fórmula y de las condiciones (5) resulta que $g_\xi(.)$ es una función real de la clase $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisface a la relación

$$\int_{R^n} \overline{\psi_{j_1}(it_1)} \dots \overline{\psi_{j_n}(it_n)} \frac{g_\xi(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)} dt_1\dots dt_n = 0 ,$$

para toda n-upla $(j_1,\dots,j_n)$ de enteros especificados.

Por lo tanto, la función $g_\xi(.)$ satisface a las hipótesis del TEOR. IV.2.3. En consecuencia la función $f_\xi(.)$, por (28), es holomorfa en D^n, y su parte imaginaria $v_\xi(.)$ admite la siguiente representación

$$v_\xi(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2} \cdots \frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2} g_\xi(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n .$$

Esto significa que la función F(.) es holomorfa en D^n y que se cumple la relación (26) de la tesis.

Finalmente, de la parte recíproca del TEOR. 2.1. y de la fórmula (26), se concluye que la función V(.) satisface a las condiciones (3)(I), (II) y (III).

3.2. LEMA.

Si las funciones operatoriales $F : D^n \to L(H)$ y $\hat{F} : D^n \to L(H)$ son holomorfas en el polisemiplano D^n, y si Im F(.) = Im $\hat{F}(.)$, entonces

$$F(.) = \hat{F}(.) + A , \tag{30}$$

donde A es un operador hermitiano constante.

Demostración.

Sea $R : D^n \to L(H)$ la función $R(.) = F(.) - \hat{F}(.)$. Entonces, R(.) es holomorfa en D^n y su parte imaginaria es idénticamente nula. Por lo tanto, para todo vector ξ, la función escalar $(R(.)\xi,\xi)$ toma sólo valores reales sobre D^n. Ello implica que tal función es constante, y por consiguiente

$$(R(z_1,\dots,z_n)\xi,\xi) = (A\xi,\xi)$$

donde A = R(1,...,1).

De esta última relación resulta fácilmente que la función R(.) es constantemente igual al operador hermitiano A. Ello implica, por definición de R(.), el cumplimiento de (30).

3.3. TEOREMA.

Si $F : D^n \to L(H)$ es una función holomorfa y de parte imaginaria acotada en el polisemiplano D^n, entonces F(.) admite la siguiente representación.

$$(31)\quad F(z_1,\ldots,z_n) = A + \frac{i}{\pi^n}\int_{R^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1)\,\frac{G(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)}\,dt_1\ldots dt_n$$

donde A es un operador hermitiano (único), y $G : R^n \to L(H)$ es una función operatorial, esencialmente única, que satisface las siguientes condiciones:

(a) La función G(.) es débilmente medible en R^n.

(b) Para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n) \in R^n$ el operador $G(t_1,\ldots,t_n)$ es hermitiano.

(c) La función G(.) es esencialmente acotada en R^n.

(d) Para toda n-upla $(j_1,\ldots,j_n)$ de enteros, en la que exista al menos una variación de signo, se cumple la relación

$$I_{j_1,\ldots,j_n}(G) = 0 .$$

Recíprocamente, si A es un operador hermitiano y $G : D^n \to L(H)$ satisface las condiciones (a), (b), (c) y (d) precedentes, entonces la función F(.) definida por (31) es holomorfa y de parte imaginaria acotada en D^n.

Demostración.

(I) Parte Directa.

Sea V(.) = Im F(.), entonces es fácil ver que V(.) satisface las condiciones (I), (II) y (III) del TEOR. 2.1. Por lo tanto, la función V(.) admite la representación (4) y la función G(.) que aparece en el integrando de (4) satisface las condiciones (a), (b), (c) y (d) del enunciado del presente teorema.

Sea $\hat{F} : D^n \to L(H)$ la función definida por la fórmula

$$(32) \quad \hat{F}(z_1,\ldots,z_n) = \frac{i}{\pi^n} \int_{R^n} 2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1 \, \frac{G(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)} \, dt_1\ldots dt_n \, .$$

Entonces, por el TEOR. 3.1., la función F(.) es holomorfa en D^n, y

$$\operatorname{Im} \hat{F}(z_1,\ldots,z_n) = V(z_1,\ldots,z_n) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{R^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2} \cdots \frac{x_n}{x_n+(y_n-t_n)^2} \, G(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n$$

De esta fórmula y (4), se obtiene que

$$\operatorname{Im} \hat{F}(.) = \operatorname{Im} F(.)$$

Aplicando a esta relación el LEMA 3.2. se deduce que existe un operador hermitiano A, tal que, para todo $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n, se cumple:

$$(33) \qquad F(z_1,\ldots,z_n) = A + \hat{F}(z_1,\ldots,z_n)$$

De (32) y (33) se obtiene la fórmula (31) de la tesis, y queda así demostrada la parte directa del teorema.

(II) Parte Recíproca.

Es consecuencia inmediata del TEOR. 3.1.

Por otra parte, señalamos que la unicidad de la representación (31) resulta fácilmente del TEOR. 2.2.

4. Funciones Operatoriales de Tipo Especial.

En esta sección haremos la suposición que el espacio de Hilbert H está dotado de una conjugación $\xi \to \bar{\xi}$.

El siguiente lema será utilizado en la prueba del TEOR. 4.2.

4.1. LEMA.

Si una función $F : D^n \to L(H)$ es holomorfa en D^n, y si, para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es hermitiano, entonces se cumple la relación

$$F(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) = F^*(z_1,\ldots,z_n) \tag{34}$$

para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n.

Demostración.

Es fácil ver que la función $f_\xi(.) = (F(.)\xi,\xi)$, para todo vector $\xi \in H$, satisface las hipótesis del LEMA V.1.4. Por lo tanto, para todo $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n vale la relación

$$f_\xi(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n}) = \overline{f_\xi(z_1,\ldots,z_n)}$$

o sea que

$$(F(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n})\xi,\xi) = \overline{(F(z_1,\ldots,z_n)\xi,\xi)}$$

De esta última relación, se obtiene la fórmula (34) de la tesis.

4.2. TEOREMA.

Si $F : D^n \to L(H)$ es una función que posee las siguientes propiedades:

(I) $F(.)$ es holomorfa en D^n.

(II) $V(.) = \mathrm{Im}\, F(.)$ está acotada en D^n.

(III) Para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es hermitiano.

(IV) Para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es real.

Entonces la función $F(.)$ admite la representación

$$(35)\quad F(z_1,\ldots,z_n) = A+ \frac{i}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} w(z_1,t_1)\ldots w(z_n,t_n)\; G(t_1,\ldots,t_n)\; dt_1\ldots dt_n\;,$$

donde A es un operador hermitiano y real, y la función $G:D^n \to L(H)$ satisface a las siguientes condiciones:

(a) La función G(.) es débilmente medible en R^n.

(b) Para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n) \in R^n$, el operador $G(t_1,\ldots,t_n)$ es hermitiano.

(c) La función G(.) es esencialmente acotada.

(d) Para toda n-upla $(j_1,\ldots,j_n)$ de enteros en la que exista al menos una variación de signo, se cumple la relación

$$I_{j_1,\ldots,j_n}(G) = 0$$

(e) Para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, el operador $G(t_1,\ldots,t_n)$ es real.

(f) Para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, se cumple la relación

$$G(-t_1,\ldots,-t_n) = -G(t_1,\ldots,t_n)\;.$$

Demostración.

(I) Parte directa.

Por el TEOR. 3.3., la función F(.) admite la representación:

$$(36)\quad F(z_1,\ldots,z_n) = A+ \frac{i}{\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n)-1\right) \frac{G(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)}\, dt_1\ldots dt_n$$

donde el operador A es hermitiano y la función $G : \mathbb{R}^n \to L(H)$ satisface a las condiciones (a), (b), (c), y (d) del enunciado.

Por el TEOR. 3.1., la parte imaginaria V(.) de la función F(.) está dada por la fórmula (26). Aplicando a esta última el TEOR. 2.2., se obtiene la relación

$$(37)\quad \underset{(x_1,\ldots,x_n)\to(+0,\ldots,+0)}{w-\lim} V(x_1+it_1,\ldots,x_n+it_n) = G(t_1,\ldots,t_n)$$

para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Por otra parte, de las hipótesis (III) y (IV), se obtienen, en virtud del LEMA 4.1. y LEMA VI.5.2., las relaciones

$$F(\overline{z_1},\dots,\overline{z_n}) = F^*(z_1,\dots,z_n) = \overline{F(z_1,\dots,z_n)} \; .$$

De estas últimas, tomando partes imaginarias, se obtienen:

$$V(x_1-it_1,\dots,x_n-it_n) = -V(x_1+it_1,\dots,x_n+it_n) \tag{38-a}$$

$$V(x_1+it_1,\dots,x_n+it_n) = \overline{V(x_1+it_1,\dots,x_n+it_n)} \tag{38-b}$$

Tomando límites en ambos miembros de (38-a) y (38-b), se obtienen, por (37), respectivamente, las relaciones (f) y (e) del enunciado.

Por la propiedad (f) de la función G(.), se ve fácilmente que:

$$\int_{R^n} \frac{G(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+t_n^2)}\, dt_1\dots dt_n \tag{39}$$

Poniendo $z_1=\dots=z_n$ en la fórmula (36) y usando (39) se obtiene:

$$F(1,\dots,1) = A$$

De donde por las hipótesis (III) y (IV) se deduce que A es hermitiano y real.

Finalmente de (39) y de la relación

$$w(z_j,t_j) = \frac{k(z_j,t_j)}{1+t_j^2} \qquad \text{(Véase AP.A. fórmula 15)}$$

se obtiene la equivalencia de las fórmulas (36) y (35).

(II) Parte Recíproca.

Si $F : D^n \to L(H)$ es la función definida por (35), donde A y G(.) satisfacen a las condiciones del enunciado; entonces, por lo dicho en el último párrafo de la parte directa, la función F(.)

está dada también por la fórmula (36).

Entonces, por la parte recíproca del TEOR. 3.3., obtenemos que F(.) posee las propiedades (I) y (II) del enunciado. Para probar las restantes, supongamos que $(x_1,\ldots,x_n)$ es un punto real de D_n. Entonces, de (35) se obtiene:

$$(40) \qquad F(x_1,\ldots,x_n) = A + \frac{i}{\pi^n}\int_{R^n} w(x_1,t_1)\ldots w(x_n,t_n)G(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n$$

Tomando conjugados en ambos miembros de (40), y usando TEOR. AP.C. 3.5. y las hipótesis sobre A y G(.), se obtiene la relación

$$(41) \qquad \overline{F(x_1,\ldots,x_n)} = A - \frac{i}{\pi^n}\int_{R^n} \overline{w(x_1,t_1)}\ldots\overline{w(x_n,t_n)}G(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n \, .$$

Asimismo, tomando adjuntos en ambos miembros de (40) y usando TEOR. AP.C. 3.4., se obtiene la relación

$$(42) \qquad F^*(x_1,\ldots,x_n) = A - \frac{i}{\pi^n}\int_{R^n} \overline{w(x_1,t_1)}\ldots\overline{w(x_n,t_n)}\, G(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n$$

De las fórmulas (41) y (42) resulta:

$$(43) \qquad F^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{F(x_1,\ldots,x_n)}$$

Efectuando el cambio de las variables $(t_1,\ldots,t_n)$ por las variables $(-t_1,\ldots,-t_n)$ en la integral (42), y usando la condición (f) y la fórmula (16) del Apéndice C, se obtiene la relación

$$(44) \qquad F^*(x_1,\ldots,x_n) = F(x_1,\ldots,x_n)$$

Finalmente, de (43) y (44), resulta que F(.) satisface a las condiciones (III) y (IV) del enunciado.

Capitulo VIII

Representación exponencial de Impedancias Escalares.

1. Introducción.

El principal resultado de este capítulo es el teorema de representación exponencial de impedancias multidimensionales (Teor. 3.2) que generaliza a n variables, el siguiente teorema devido al Prof. Dr. Alberto González Domínguez (13, Teorema 8)

Asimismo, se ha obtenido el Teor. 2.1., que provee de representación exponencial a toda función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n. El mimso contiene, como caso particular, al teorema citado en el párrafo precedente.

1.1. Teorema. (González Domínguez (13, Teorema 8))

Si $f = D \rightarrow C$ es una función positiva real (una impedancia), entonces f admite la siguiente representación

$$(1) \qquad f(z) = \exp\left(c + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z^2 - 1}{z^2 + t^2} \; \frac{t}{1 + t^2} \; g(t)\, dt \right)$$

donde c es una constante real, y donde $g:(o, +\alpha) \rightarrow R$ es una función real que posee las siguientes propiedades:

(a) La función g(.) es medible.

(b) Para casi todo punto $t \in (0, +\alpha)$, se verifica la
de desigualdad:

$$-\frac{\pi}{2} \leq g(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

Recíprocamente, la fórmula (1), define una función positiva real en n.

2. Representación Exponencial de Funciones de Parte Real Positiva.

2.1. Teorema.

Si $f : D^n \rightarrow C$ es una función holomorfa y de parte real positiva en el polisemiplano D^n, entonces la función f admite la siguiente representación.

$$(2)\quad f(z_1,\dots,z_n)=\exp\left\{ c+\frac{i}{\pi}\int_{R^n}(2k(z_1,t_1)\dots k(z_n,t_n)-1)\ \frac{g(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\ (1+t_n^2)}\,dt_1\dots dt_n\right\}$$

donde c es una constante real y $g: R^n \to R$ es una función que satisface a las siguientes condiciones:

(3-a) $g(.)$ es medible en R^n.

(3-b) Para casi todo punto $(t_1,\dots t_n)$ de R^n,

$$-\frac{\pi}{2} \leq g(t_1,\dots,t_n \leq \frac{\pi}{2}$$

(3-c) Para toda n-upla de enteros $(j_1,\dots,j_n)$ entre los cuales existan, al menos, dos de distinto signo, se cumple:

$$\int_{R^n} \psi_{j_1}(it_1)\dots \psi_{j_n}(it_n)\cdot \frac{g(t_1,\dots,t_n)}{(1+t_1^2)\dots(1+tn^2)}\ dt_1\dots dt_n = 0$$

Recíprocamente, si c es una constante real y si la función $g: R^n \to R$ satisface a las condiciones (3-a),(3-b) y (3-c), entonces la función $f : D^n \to C$ definida por (2) es holomorfa y de parte real positiva en D^n.

Demostración.

La función f(.), por tener parte real positiva en D^n, no se anula en ningún punto, salvo el caso trivial. Entonces, la función $h: D^n \longrightarrow C$ definida por

$$94)\qquad h(z_1,\dots,z_n) = \mathrm{Log}\ f(z_1,\dots,z_n) + i\ \mathrm{Arg}\ f(z_1,\dots z_n),$$

donde se ha elegido la rama del logaritmo tal que

$$(4') \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg} f(z_1,\ldots,z_n) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

es holomorfa y de parte imaginaria acotada en D^n. Por lo tanto, en virtud del Teor IV. 2.1, la función h(.) admite la representación

$$(5) \quad h(z_1,\ldots,z_n) = c + \frac{i}{\pi}\int_{R^n}(2k(z_1,t_1)\ldots k(z_n,t_n) - 1)\ \frac{g(t_1,\ldots,t_n)}{(1+t_1^2)\ldots(1+t_n^2)}\ dt_1..dt$$

donde c es una constante real, y la función g(.) satisface las condiciones (3-a) y (3-c) del enunciado. La condición (3-c) resulta, fácilmente, aplicando el Teor. IV. 3.1. a la parte imaginaria de la función h(.) y usando (4').

Finalmente de (3) y (5) resulta la fórmula (2) de la tesis.

Parte recíproca.

Sea f(.) la función definida por (2), donde c es un número real y la función g(.) satisface las condiciones (3-a), (3-b) y (3-c).

De (2) se obtiene que

$$(6) \qquad f(z_1,\ldots,z_n) = \exp\ (h(z_1,\ldots,z_n))$$

donde h(.) es la función definitiva por (5). Entonces, por la parte recíproca del Teor. IV. 2.1., la función h(.) es holomorfa en D^n y

$$(7) \quad \operatorname{Im} h(z_1,\ldots z_n) = \frac{1}{\pi^n}\int_{R^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\, g(t_1,\ldots t_n)dt_1\ldots dt$$

donde resulta fácilmente, por (3-b).

$$(8) \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Im} h(z_1,\ldots,z_n) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

De (6) y (8) se deduce que la función f(.) es holomorfa y de parte real positiva en D^n.

3. Representación Exponencial de Funciones Positivas Reales.

Recordemos que en el Cap. V hemos llamado función positiva real, a toda función $f\colon D^n \to C$ holomorfa y de parte real positiva en D^n, y tal que $f(x_1,\ldots x_n)$ es real si $(x_1,\ldots x_n)$ es un punto real de D^n.

Lema 3.1.

Sea $f\colon D^n \to C$ una función holomorfa y de parte real positiva en D^n, y sea (2) su representación canónica. Entonces, la función f(.) es real, si y sólo si, la función g(.), que aparece en la integral de (2), satisface a la siguiente condición,

Para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n.

$$(9) \qquad g(-t_1,\ldots,-t_n) = g(t_1,\ldots,t_n)$$

Demostración.

Si f(.) es real, por (4), la función h(.) también es real. Entonces, por el Lema V. 1.4., tenemos que

$$h(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n) = h(z_1,\ldots z_n)$$

Tomando partes imaginarias, en ambos miembros, de esta última relación, se obtiene:

$$v(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n) = - v(\bar{z}_1,\ldots,z_n)$$

de donde, aplicando el Teor. IV. 3.1. a la función v(.) = Im h(.) se obtiene la condición (3-d).

Recíprocamente, si la función g(.) satisface la condición (3-d) es fácil ver que la expresión (2), adquiere esta nueva forma

(10) $$f(z_1,\dots,z_n) =$$

$$= \exp \{ c + \frac{2i}{\pi^n} \int_{R^n} w(z_1,t_1)\dots w(z_n,t_n)\ g\ (t_1,\dots,t_n)\ dt_1\dots dt_n \} \quad ,$$

donde

(11) $$w(z_1,t_1) = \frac{k(z_1,t_1)}{1+t_1^2} \quad ,\dots,\quad w(z_n,t_n) = \frac{k(z_n,t_n)}{1+t_n^2}$$

Tomando conjugados en ambos miembros de (10), y teniendo en cuenta las propiedades de la función $w(.)$, se obtiene:

(12) $$f(z_1,\dots,z_n) =$$

$$= \exp \{ c - \frac{2i}{\pi} \int_{R^n} w(\bar{z}_1,- t_1)\dots w(\bar{z}_n, - t_n)\ g\ (t_1,\dots,t_n)\ dt_1\dots dt_n \}$$

Efectuando en la última integral el cambio de las variables $t_1,\dots,t_n$ por $(-t_1),\dots,(-t_n)$, y usando la condición de (9), se obtiene la siguiente relación

(13) $$f(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n) = f(z_1,\dots,z_n)$$

mediante la cual, es inmediato, la función $f(.)$ es real.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del lema que acabamos de demostrar.

3.2. <u>Teorema</u>.

Si $f: D^n \to C$ es una función positiva real, entonces la función $f(.)$ admite la representación (10); donde c es una constante real y $g: R^n \to R$ es una función que satisface a las condiciones (3-a), (3-b), (3-c) y (9).

Recíprocamente, si c es una constante real, y si $g: R^n \to R$ satisface las condiciones (3-a), (3-b), (3-c) y (10), entonces la función $f: D^n \to C$ definida por la fórmula (9) es positiva real en D^n.

Demostración.

Surge inmediatamente del Lema 3.1.

4. Caso unidimensional.

En esta sección obtendremos el Teor. 1.1. como caso particular del Teor. 3.2.

Demostración del Teor. 1.1.

Sea $f: D \to C$ una función positiva real sobre el semiplano (unidimensional) D. Entonces por el Teor. 3.2. la función $f(.)$ admite la representación

$$(14) \qquad f(z) = \exp \{ c + \frac{2j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(z,t)\, g(t)\, dt \}$$

donde $g: R^n \to R$ es una función con las siguientes propiedades:

(a) $g(.)$ es medible.

(b) Para casi todo $t \in R$, $-\frac{\pi}{2} \leq g(t) \leq \frac{\pi}{2}$

(c) Para casi todo $t \in R$. $g(-t) = -g(t)$

Por la condición (c), la integral del segundo miembro de (13) puede transformarse de la siguiente manera

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} w(z,t)\, g(t)\, dt = \int_0^{\infty} (w(z,t) - w(z,-t))\, g(t)\, dt$$

Por otra parte, por la definición de $w(z,t)$,

$$w(z,t) - w(z,-t) = \frac{it\,(1 - z^2)}{(z^2 + t^2)\,(1 + t^2)} \tag{16}$$

De (14), (15) y (16) se obtiene la fórmula (1) del enunciado del Teor. 1.1.

Para la prueba de la parte recíproca del teorema, véase [13, pág. 11].

CAPITULO IX

REPRESENTACION EXPONENCIAL DE FUNCIONES OPERATORIALES POSITIVAS REALES, SIMETRICAS Y REGULARES.

1. Introducción

El principal resultado de este capítulo es el Teor.4.2 que generaliza el siguiente teorema.

1.1. Teorema(Gonzalez Dominguez (13, Teorema 6)).

Si F(z) es una función matricial positiva real, regular, normal y simétrica, entonces la función F(z) admite la representación

$$(1) \qquad F(z) = \operatorname{Exp} \left\{ A + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2-1}{z^2+1} \, \frac{t}{1+t^2} \, G(t)\, dt \right\}$$

donde A es una matriz real y hermitiana, y G(.) es una función matricial definida sobre $(0, +\infty)$ que satisface a las siguientes condiciones:

(a) G(.) es medible
(b) para casi todo $t > 0$ $|G(t)| \leq \frac{\pi}{2}$
(c) para casi todo $t > 0$ G(t) es una matriz real y hermitiana
(d) para casi todo $t > 0$ $A \leftrightarrow G(t)$.
(e) para casi todo par de puntos $t_1, t_2 > 0$, $G(t_1) \leftrightarrow G(t_2)$.

Recíprocamente, la fórmula (1) representa a una función matricial, positiva real, normal, simétrica y regular en el semiplano D, si A y G(.) satisfacen las propiedades especificadas más arriba.

1.2. Convención

En todo este capítulo, supondremos que H es un espacio de Hilbert complejo dotado de una conjugación $\xi \to \bar{\xi}$ y, además, es separable.

1.3. Definición

Un operador A de L(H) se llama simétrico, si $\overline{A} = A^*$

2. Funciones Operatoriales Normales

2.1. Definición

Sea $F: \Omega \to L(H)$ una función operatorial definida en un dominio Ω del espacio complejo n- dimensional. Entonces:

(a) La función F(.) se llama normal si, para todo punto $\hat{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in \Omega$, el operador $F(\hat{z})$ es normal.

(b) La función F(.) se llama conmotativa si, para todo par de puntos

$\hat{z}, \hat{z}'$, de Ω, $F(\hat{z}) \leftrightarrow F(\hat{z}')$.

El siguiente teorema es una extensión a n dimensiones de un importante teorema debido a González Domínguez (13, Teorema 1) .

2.2. Teorema

Si $F: \Omega \to L(H)$ es una función holomorfa normal sobre un dominio Ω (abierto y conexo) del espacio C^n, entonces F(.) es conmutativa.

Demostración

Fijemos un punto arbitrario $\hat{z}'$ del dominio Ω, y consideremos la función $G: \Omega \to L(H)$ definida por la relación.

(1) $G(\hat{z}) = F(\hat{z}')\, F(\hat{z}) - F(\hat{z})\, F(\hat{z}')$.

Evidentemente, para probar que G (.) es idénticamente nula, es suficiente ver que G(.) se anula en algún entorno del punto $\hat{z}'$

Sea, a tal efecto, un $\delta > 0$ tal que la bola

(2) $$B_\delta(\hat{z}') = \{\hat{z} \in \mathbb{C}^n : ||\hat{z} - \hat{z}'|| < \delta$$

está contenida en el dominio Ω ; y sea $\hat{z}$ un punto arbitrario de $B_\delta(\hat{z}')$. Además definimos el número $\rho > 0$, por la fórmula

(3) $$\rho = \delta(||\hat{z} - \hat{z}'||)^{-1} ,$$

y sea $K: \Delta_\rho \to L(H)$ la función operatorial definida sobre el disco $\Delta_\rho = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$por la relación

(4) $$K(w) = K(w\hat{z} + (1 - w)\ \hat{z}').$$

La función K(.) esta bien definida, pues si w , entonces

$$\|w\hat{z} + (1 - w)\ \hat{z}' - \hat{z}\| = |w|\ ||\hat{z}' - \hat{z}|| < \rho\ \|\hat{z} - \hat{z}'\| < \delta$$ (por (3)).

De este modo K(.) es holomorfa y normal sobre el disco unidimensional Δ_ρ , y, en virtud del teorema 1 de (13) , K(.) es conmutativa.

Por otra parte, el punto $w = 1$ es interior al disco Δ_ρ , pues $\rho > 1$ por (3). Por lo tanto, y por (4), se obtiene

$$F(\hat{z}) = K(o) \leftrightarrow K(1) = F(\hat{z}')$$

De donde, y por (1), resulta que G(.) se anula en la bola $B_\delta(\hat{z}')$. Por lo tanto G(.) es idénticamente nula. En consecuencia, por la arbitrariedad del punto $\hat{z}$, la función F(.) es conmutativa.

El siguiente teorema será utilizado en la prueba del teorema 3.2.

2.3. <u>Teorema</u>

Sea $F: \Delta^n \to L(H)$ una función holomorfa <u>normal</u> en el polidisco Δ^n , tal que, para todo punto real $(x_1,...,x_n)$ perteneciente a dicho polidisco, el operador $F(x_1,...,x_n)$ es <u>hermitiano real</u>; y sea

$$(5) \quad F(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} Ak_1,\ldots,k_n \, z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$$

el desarrollo de Taylor de la función F(.)

Entonces, los coeficientes $Ak_1,\ldots,k_n$ de (5) son operadores hermitiano reales que conmutan mutuamente.

Demostración

Sea F_ξ (.), para todo ξ de H, la función definida por la relación

$$(6) \quad f_\xi \quad (.) = (F(.)\,\xi \;,\; \xi\,)$$

Entonces, por el lema 2.4., es fácil ver que f_ξ (.) satisface a las siguientes relaciones, para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ del polidisco

$$(7\text{-a}) \quad f_\xi \quad (x_1,\ldots,x_n) \text{ es real.}$$

$$(7\text{-b}) \quad f_\xi \quad (x_1,\ldots,x_n) = f_\xi \quad (x_1,\ldots,x_n)$$

Por otra parte del desarrollo (5), se obtiene:

$$(8) \quad f_\xi \quad (x_1,\ldots,x_n) = \sum \ldots \sum \quad Ak_1,\ldots,k_n \xi \;,\; \xi \;)\; x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$$

cualesquiera sean el vector y el punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ del polidisco.

De (6) (7-a), (7-b) y (8), por el principio de identidad de las series de potencias, resultan las relaciones

$$(9) \quad (Ak_1,\ldots k_n \,\xi \;,\; \xi\;) = (Ak_1,\ldots,k_n \,\bar{\xi} \;,\; \bar{\xi}\;) =$$

$$= \overline{(Ak_1,\ldots,k_n \,\xi \;,\; \xi\;)}$$

De donde, por el lema 2.4., se deduce que el operador $Ak_1,\ldots,k_n$ es hermitiano real.

Para probar la comutatividad de los coeficientes de (5) haremos uso de la fórmula bien conocida.

$$(10)\quad A_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{1}{k! \ldots k!} D_1^{k_1} \ldots D_n^{k_n} F(o)$$

y de la relación

$$(11)\qquad F(\hat{z})\ F(\hat{z}') = F(\hat{z}')\ F(\hat{z})$$

que se cumple, para todo par de puntos $\hat{z}$, $\hat{z}'$ del polidisco Δ^n, por el Teor. 2.2.

Derivando parcialmente la relación (11) respecto al vector $\hat{z} = (z_1,\ldots,z_n)$, se obtiene:

$$(12)\quad (D_1^{k_1}\ldots D_n^{k_n}\ F(\hat{z}))\quad F(\hat{z}') = F(\hat{z}')\ D_1^{k_1}\ldots D_n^{k_n}\ F(\hat{z})$$

Derivando parcialmente (12), con respecto al vector $\hat{z}' = (z_1',\ldots,z_n')$ y eligiendo luego $\hat{z} = \hat{z}' - 0$, se obtiene:

$$(D_1^{k_1} \ldots D_n^{k_n} F(0)) \quad (D^{j1}\ldots D^{jn}\ F(0)) =$$

$$= (D^{j1}\ldots D^{jn}\ F(0)) \quad (D^{k1}\ldots D^{kn}\ F(0))$$

De esta última expresión y la fórmula (10) resulta

$$A_{k1,\ldots,k_n} \quad \leftrightarrow \quad A_{j1,\ldots,j_n}$$

2.4. <u>Lema</u>

Para que un operador A de L(H) sea <u>hermitiano real</u>, es necesario y suficiente que, para todo vector ξ de H, se cumpla las igualdades

$$(13)\qquad (A\ \xi,\ \xi) = (A\ \bar{\xi},\ \bar{\xi}) = \overline{(A\ \bar{\xi},\ \bar{\xi})}.$$

Demostración

Por la fórmula AP.B (4-f), para todo vector ξ de H, vale que

$$(14) \qquad \overline{(A\,\xi\,,\,\xi\,)} = (\bar{A}\,\bar{\xi}\,,\,\bar{\xi}\,)$$

De donde resulta que, si A es hermitiano y real

$$(A\,\xi\,,\,\xi\,) = \overline{(A\,\xi\,,\,\xi\,)} = (A\,\bar{\xi}\,,\,\bar{\xi})$$

Recíprocamente, si se cumplen las relaciones (13), A es hermitiano pues $(A\,\xi\,,\,\xi\,)$ es real; y, además, por (13) y (14) se obtiene

$$(A\,\bar{\xi}\,,\,\bar{\xi}\,) = (\bar{A}\,\bar{\xi}\,,\,\bar{\xi}\,)$$

Finalmente, de esta última igualdad, por 25,12.27 , se deduce que $\bar{A}$ = A. O sea, que A es real.

2.5. Teorema

Si F: $\Omega \to L(H)$ es una función holomorfa y normal en un dominio del espacio complejo C^n, si V(.) = ReF(.), y si V(.) = Im F(.); entonces, para todo par de puntos $\hat{z}$, $\hat{z}'$ de Ω se cumplen las siguientes relaciones:

$$(15) \qquad \begin{array}{llcl} (a) & F(\hat{z}) & \leftrightarrow & F(\hat{z}') \\ (b) & V(\hat{z}) & \leftrightarrow & V(\hat{z}') \\ (c) & U(\hat{z}) & \leftrightarrow & U(\hat{z}') \\ (d) & U(\hat{z}) & \leftrightarrow & V(\hat{z}') \end{array}$$

Demostración

La relación (a) ya fué probada en Teor. 2.2.

Aplicando a (15-2), el teorema de FUGLEDE, obtenemos:

$$(16) \qquad F^{*}(\hat{z}) \leftrightarrow F(\hat{z}')$$

De las fórmulas (15-a) y (16), resulta:

(17) $V(\hat{z}) \leftrightarrow F(\hat{z}')$

Aplicando nuevamente el teorema de FUGLEDE a (17), se obtiene:

(18) $V(\hat{z}) \leftrightarrow F^*(\hat{z}')$

De (17) y (18), resulta la fórmula (15-b).
Las restantes relaciones se prueban de forma análoga.

3. Representación Espectral de ciertas Funciones Operatoriales Normales.

El resultado principal de esta sección, el Teor. 3.1., será utilizado en la demostración del teorema de representación exponencial.

La siguiente definición es necesaria para el enunciado del Teor. 3.2.

3.1. Definición (HALMOS 15, pág. 61)

Se llama medida espectral regular compacta sobre un espacio topológico localmente compacto T, a toda medida PO E: $\rightarrow L(H)$, definida sobre la tribu de Borel de T, que satisface a las siguientes condiciones:

(a) $E(T) = I$ (I es el operador identidad)
(b) El operador E(M), para todo $M \in \mathcal{B}$, es un proyector en H.
(c) El soporte de E(.) es compacto.
(d) Para todo conjunto $M \in \mathcal{B}$, se cumple la relación.

$$E(M) = \{\sup E(K) : K \subset M, K \text{ compacto}\}$$

Diremos que una medida espectral regular compacta E(.) es real, si el proyecto $C(M)$, para todo M, es un operador real.

3.2. Teorema

Si $F: D^n \to L(H)$ es una función operatorial definida sobre el polisemiplano D^n, que satisface a las siguientes condiciones:

(i) $F(.)$ es holomorfa normal en D^n.

(ii) Para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es real.

(iii) Para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es hermitiano.

Entonces la función $F(.)$ admite la representación

$$(1) \qquad F(z_1,\ldots,z_n) = \int_K f(z_1,\ldots,z_n;\, t)\, dE(t),$$

donde $E(.)$ es una medida espectral regular compacta y real sobre R^1, K es el soporte de $E(.)$, y $f: D^n x K \to C$ es una función que posee las siguientes propiedades:

(a) $F: D^n x K \to C$ es continua:

(b) para todo $t \in K$, la aplicación parcial $(z_1,\ldots,z_n) \to f(z_1,\ldots,z_n;\, t)$ es holomorfa con D^n.

(c) Para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el número $f(x_1,\ldots,x_n;\, t)$ es real, cualquiera sea $t \in K$.

Recíprocamente, si $E(.)$ es una medida espectral regular compacta y real sobre R^1, y si $f: D^n \to C$ satisface las condiciones (a), (b), (c) precedentes; entonces la función $F: D^n \to L(H)$ definida por (1) posee las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) del primer párrafo del enunciado.

Demostración

(I) Parte directa

Sea $G : \Delta^n \to L(H)$ la función operatorial definida sobre el polidisco Δ^n mediante la fórmula.

$$(2) \qquad G(w_1,\ldots,w_n) = F\left(\frac{1+w_1}{1-w_1},\ldots,\frac{1+w_n}{1-w_n}\right).$$

Es fácil ver que la función G(.) satisface a las hipótesis del Teor. 2.3. Por lo tanto, G(.) admite el siguiente desarrollo en serie de Taylor.

$$(3) \qquad G(w_1,\ldots,w_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} A_{k_1,\ldots,k_n}\, w_1^{k_1}\cdots w_n^{k_n},$$

donde los coeficientes $A_{k_1,\ldots k_n}$ son operadores hermitianos reales que conmutan mutuamente.

En consecuencia, podemos aplicar el Teor. AP.B.5.2 a la sucesión n-múltiple $A_{k_1,\ldots,k_n}$. Por lo tanto existen: (1) una medida espectral real regular compacta sobre R^1, (2) una sucesión n-múltiple $(f_{k_1,\ldots,k_n})$, formada de funciones reales de C(k); tales que se cumple

$$(4) \qquad A_{k_1,\ldots,k_n} = \int_K f_{k_1,\ldots,k_n}(t)\, dE(t),$$

para todo multi-índice $k_1,\ldots,k_n$. (k es el soporte compacto de E(.)).

Además, por el teorema 2 de [15, pág. 62], de la relación (4), se obtiene que:

$$(5) \qquad |A_{k_1,\ldots,k_n}| = \max_{t \in k} |f_{k_1,\ldots,k_n}(t)|$$

Por otra parte, aplicando el análogo multidimensional del teorema 3.11.4 de (18, pág. 96), al desarrollo (3), obtenemos:

(6) $\sum \quad \sum \quad | A k_1,\ldots,k_n || w_1^{k_1} | \ldots |w_n^{k_n}| < +\infty$

para todo punto $(w_1,\ldots,w_n)$ del polidisco.

Asimismo, reemplazando en (3), las expresiones (4), y desintegrando la serie, término a término, se obtiene:

(7) $$G(w_1,\ldots,w_n) = \int_k g(w_1,\ldots,w_n;t)\, dE(t),$$

donde la función $g : D^n xk \to C$, que aparece en el integrando, está definida por la serie múltiple.

(8) $$g(w_1,\ldots,w_n;t) = \sum \ldots \sum \quad fk_1,\ldots,k_n(t)\, w_1^{k_1} \ldots w_n^{k_n}.$$

Esta serie, en razón de las fórmulas (5) y (6), converge uniformemente, respecto a la variable t, para cada punto $(w_1,\ldots,w_n)$ del polidisco, en virtud del teorema 11 de (4, pág. 29) , queda justificada la desintegración, término a término, que hemos efectuado para obtener la fórmula (7).

Del desarrollo (8), y de las propiedades de las funciones $fk_1,\ldots,k_n(.)$, es inmediato que $g(w_1,\ldots,w_n)$ es real si el punto $(w_1,\ldots,w_n)$ es real. También de (8), resulta que, cualquiera sea t de k, la función $(w_1,\ldots,w_n) \to g(w_1,\ldots,w_n;t)$ es holomorfa en el polidisco.

En razón de que la serie (8) converge uniformemente con relación a las variables $(w_1,\ldots,w_n;t)$ sobre el conjunto $\Delta_\rho^n \times K$, para todo $0 < \rho < 1$, la función $g : D^n xk \to C$ es continua.

A continuación, definimos la función $f : D^n xk \to C$, mediante la expresión.

(9) $$f(z_1,\ldots,z_n;t) = g\left(\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1},\ldots,\frac{z_n - 1}{z_n + 1} ; t\right)$$

Por lo que hemos demostrado sobre la función g(.), es fácil comprobar que la función $f: D^n x k \to C$ satisface a todas las condiciones (a), (b) y (c) del enunciado.

Finalmente, mediante el cambio de variables

$$z_j = \frac{w_j - 1}{w_j + 1} \qquad (j = 1, \ldots n)$$

obtenemos fácilmente de (7), por (3) y (9), la fórmula (1) de la tesis.

(II) Parte recíproca

Para probar la analiticidad de la función F(.) definida por (1) es suficiente ver que, para todo vector ξ de H, la función

$$(10) \qquad f_\xi \quad (z_1, \ldots, z_n) = \int_K \quad f(z_1, \ldots, z_n; t) \; d\, \mu_\xi \quad (t)$$

donde μ_ξ (.) = (E(.) ξ , ξ), es holomorfa en D^n.

Por el teorema de HARTOGS, basta probar la analiticidad de f_ξ (.) en el caso unidimensional. A tal efecto, es suficiente aplicar el teorema de MORERA a la función definida por (10).

La normalidad de la función F(.) se obtiene, aplicando a (1) el teorema 14 de (4,pág. 33) .

La propiedad (iii) del enunciado, se obtiene aplicando a la fórmula (1), el teorema 10 de (4, pág. 27) y el COR.AP. 13.1.3.

3.3. Escollo

Sea $F : D^n \to L(H)$ la función definida por la fórmula (1) del Teor. 3.2., donde la medida espectral E(.), el conjunto K y la función f(.) satisfacen a las condiciones enunciadas en dicho teorema. Entonces, la función F(.) es de parte real positiva en el polisemiplano D^n, si y sólo si,

$$\text{Re}\, f(z_1, \ldots, z_n; t) \quad t \geqslant 0 ,$$

para todo punto $(z_1,\ldots,z_n;t)$ de $D^n x k$.

Demostración

Aplicando el teorema 10 de [4, pág. 27] a la fórmula (1), se obtiene:

$$(12) \qquad F^{*}(z_1,\ldots,z_n) = \int_k \overline{f(z_1,\ldots,z_n;t)}\, dE(t)$$

Efectuando la semisuma de las fórmulas (1) y (12), se obtiene la relación

$$(13) \qquad \operatorname{Re} F(z_1,\ldots,z_n) = \int_k \operatorname{Re} f(z_1,\ldots,z_n;t)\, dE(t)$$

Finálmente, mediante la aplicación del siguiente Lema 3.4. a la fórmula (13), se obtiene la prueba del escolio.

3.4. Lema

Sean E(.) una medida espectral compacta sobre R^1, K su soporte, f(.) una función compleja en C(K), y A el operador.

$$(14) \qquad A = \int_k f(t)\, dE(t).$$

Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

(a) A es hermitiano, si y sólo si, f(t) es real, cualquiera sea t de k.

(b) A es positivo si, y sólo si, f(t) es no negativo para todo t de k.

(c) A posee inverso acotado si y sólo si, la función f(.) no se anula sobre k.

Demostración

Sea B el operador

$$(15) \qquad B = \int_{-\infty}^{\infty} t\,dE(t).$$

Entonces, el soporte K de la medida E(.) coincide con el espectro $\sigma(B)$ del operador B. (15, pág. 62) .

Por otra parte, por (14) y (15), resulta que $A = f(B)$. De esta última igualdad, por el "Spectral Mapping Theorem", resulta la relación

(16) $\sigma(A) = f(K)$.

Siendo A un operador normal, por (14), A es hermitiano si su espectro está contenido en R^1. Por lo tanto, usando (16), se prueba la propiedad (a) de la tesis. La propiedad (b) se prueba de la misma manera.

Para probar (c) hay que recordar que, un operador es inversible en L(H), si y sólo si, el punto 0 no pertenece a su espectro.

4. Representación Exponencial de Funciones Operatoriales Positivas Reales, Simétricas y Regulares.

El siguiente lema será utilizado en la prueba del Teor. 4.2.

4.1. Lema

Sea Q un operador normal tal que $|\mathrm{Re}\ Q| \leqslant \frac{\pi}{2}$, y sea

(1) $N = \mathrm{Exp}\ Q$.

Entonces N es normal, es inversible en L(H) y tiene parte real positiva.

Además, N es hermitiano real, si Q es hermitiano real.

Demostración

Se comprueba fácilmente que N es normal y que Exp(-Q) es el inverso de N.

Para probar que la parte real de A es positiva, supongamos que $Q = Q_1 + iQ_2$ sea la descomposición cartesiana de Q, donde Q_1 y Q_2 conmutan por ser Q normal. Por lo tanto, el operador

N es el producto conmutativo de los operadores N_1 = Exp Q_1 y N_2 = = Exp (iQ_2). Es fácil ver que Q_1 es hermitiano y positivo, y que se cumple la relación

(2) $\quad \mathrm{Re}\, N_2 = \cos (iQ_2), \qquad (\; |Q_2| \leq \frac{\pi}{2} \;)$

Por el "Spectral Mapping Theorem", el espectro del operador hermitiano Re N_2 está contenido en la semi-recta real positiva del plano complejo. Por lo tanto, el operador Re N_2 es positivo.

De la relación evidente

$$\mathrm{Re}\, N = N_1\, (\mathrm{Re}\, N_2) \; ,$$

se concluye, en virtud de un conocido teorema de análisis funcional que Re N es positivo.

La restante afirmación de la tesis no ofrece dificultades.

4.2. <u>Teorema</u>

Sea $F : D^n \to L(H)$ una función operatorial <u>positiva real</u> que cumple, además, las siguientes condiciones:

(α) $F(.)$ es normal en D^n

(β) para todo punto $(z_1,\ldots,z_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es inversible en L(H).

(γ) para todo punto real $(x_1,\ldots,x_n)$ de D^n, el operador $F(x_1,\ldots,x_n)$ es hermitiano.

Con tales condiciones, la función F(.) admite la siguiente representación:

(4') $\quad F(z_1,\ldots,z_n) = \mathrm{Exp} \;\; \{ \; J(z_1,\ldots,z_n) \; \}$

$$(4'')\quad J(z_1,\ldots,z_n) = A + \frac{i}{\pi^n}\int_{R^n} w(z_1,t_1)\ldots w(z_n,t_n)\, G\,(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1\ldots dt_n$$

donde A es un operador hermitiano real, y $G : R^n \to L(H)$ es una función operatorial que satisface a las siguientes condiciones:

(a) la función G(.) es débilmente medible en R^n.

(b) para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, el operador $G(t_1,\ldots,t_n)$ es hermitiano.

(c) para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, $|G(t_1,\ldots,t_n)| \leq \frac{\pi}{2}$

(d) para toda n-upla $(j_1,\ldots,j_n)$ de enteros entre los cuales existan, al menos, dos de distinto signo, se cumple la relación

$$I_{j_1,\ldots,j_n}(G) = 0$$

(e) para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, el operador $G(t_1,\ldots t_n)$ es <u>real</u>.

(f) para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, se cumple la relación

$$G\,(-t_1,\ldots,-t_n) = -\,G\,(t_1,\ldots,t_n)$$

(g) para casi todo punto $(t_1,\ldots,t_n)$ de R^n, $A \leftrightarrow G(t_1,\ldots,t_n)$

(h) para casi todo par de puntos $(t_1,\ldots,t_n)$ y $(t_1',\ldots,t_n')$ de R^n,

$$G\,(t_1,\ldots,t_n) \leftrightarrow G(t_1',\ldots t_n').$$

Recíprocamente, si A es un operador hermitiano real, y si la función operatorial $G : R^n \to L(H)$ satisface las condiciones (a) hasta (h); entonces la función $F : D^n \to L(H)$ definida por (4') (4'') es <u>positiva real</u> y satisface a las condiciones (α), (β) y (γ).

<u>Demostración</u>

(I) Parte Directa

Por la DEF. VI.5.1. y por las condiciones (α) y (γ) del enunciado la función F(.) cumple las hipótesis del Teor. 3.2. Por lo tanto, F(.) admite la representación

(5) $$F(z_1,\dots,z_n) = \int_{R^n} f(z_1,\dots,z_n;t)\, dE(t),$$

donde E(.) una medida regular compacta real sobre R^1, y la función $f : D^n x K \to C$ satisface a las condiciones (a), (b) y (c) del teor. 3.2. Asimismo, por el Lema 3.4. y por el Esc. 3.3. , la función parcial $(z_1,\dots,z_n) \to f(z_1,\dots,z_n;t)$ es positiva real no se anula en ningún punto de D^n. Por lo tanto, la función $g : D^n x K \to C$, definida por la expresión.

(6) $$g\,(z_1,\dots,z_n;t) = \mathrm{Log}\; f(z_1,\dots,z_n;t),$$

donde se a elegido la rama del logaritmo tal que

(7) $$|\,\mathrm{Im}\; g(z_1,\dots,z_n;t)\,| \leq \frac{\pi}{2}$$

es una función holomorfa real, respecto a las variables $z_1,\dots,z_n$, para todo $t \in K$.

Sea $J : D^n \to L(H)$, la función definida por

(8) $$J(z_1,\dots z_n) = \int_K g(z_1,\dots,z_n;t)\, dE(t)$$

De (8), y por las propiedades enunciadas de la función g(.), se deduce que, por la parte recíproca del Teor. 3.2. y por el Lema 3.4., la función J(.) satisface a las condiciones (I), (II), (III) y (IV) del Teor. VI.4.2. En consecuencia, J(.) admite la representación.

(9) $$J(z_1,\dots,z_n) = A + \frac{i}{\pi^n}\int_{R^n} w(z_1,\dots t_1)\dots w(z_n,t_n)\, G(t_1,\dots,t_n)\, dt_1\dots dt_n$$

donde A es un operador hermitiano real, y la función $G : R^n \to L(H)$ satisface a las condiciones (2) hasta (f) del enunciado del presente teorema.

Por otra parte, de (5), (6), y (8), por propiedades bien conocidas de la integral respecto a una medida espectral, resulta la relación

(10) $$F(z_1,\ldots,z_n) = \operatorname{Exp}\{ J(z_1,\ldots,z_n)\}$$

De (9) y (10) se obtienen las fórmulas (4') y (4'') de la tesis.

Sólo resta probar, que la función G(.) satisface a las condiciones (g) y (h).

Tomando partes reales, en ambos miembros de (9), por la prueba del Teor. VII.4.2. y por Teor. VII.3.1., se obtiene de la fórmula la siguiente representación de la función Im J(.).

(11) $$\operatorname{Im} J(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{n}\int_{R^n} \frac{x_1}{x_1^2+(y_1-t_1)^2}\cdots\frac{x_n}{x_n^2+(y_n-t_n)^2}\, G(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n$$

Ahora bien, como se ve aplicando a (9) el Teor. 3.2., la función J(.) es normal. Por lo tanto, por TEOR. 2.5, la función Im J(.) es conmutativa. Finalmente, aplicando a (11) de Cor.2.3, se obtiene que la función G(.) cumple la condición (h) del enunciado.

La prueba de la validez de la condición (g) no ofrece dificultades.

(II) Parte recíproca

Sea $F : D^n \to L(H)$ la función

(12) $$F(z_1,\ldots,z_n) = \operatorname{Exp} J(z_1,\ldots,z_n)$$

donde J(.) es la función dada por (9).

De la parte recíproca del Teor. 4.2, por las condiciones impuestas a la función G(.), la función J(.) es hiomorfa en D^n, $J(x_1,\ldots,x_n)$ es un operador real y hermitiano si $x_1,\ldots,x_n$ son reales, y $|\operatorname{Im} J(z_1,\ldots,z_n)| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Además J(.) es normal, como se prueba fácilmente, a partir de (9), por el Teor. A.P.C.4.3.

Finalmente, aplicando a (12) el Lema 4.1., se concluye que la función F(.) es una función positiva real y que satisface a las condiciones (α) (β) y (γ) del enunciado.

APENDICE A

DESARROLLOS EN SERIE

En este apéndice serán demostradas algunas fórmulas que serán utilizadas en la exposición principal.

1. Desarrollo del Núcleo de Cauchy.

La serie geométrica

$$(1)\qquad \frac{1}{w-\zeta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{w^m} \qquad |\zeta| < |w|$$

es absolutamente convergente si $|\zeta| < |w|$.

Eligiendo en (1), $w=(it-1)(z+1)$ y $\zeta = (it+1)(z-1)$, donde t es un número arbitrario y z es uno tal que Re z > 0, la serie (1) es absolutamente convergente. En efecto, es fácil comprobar que $|\zeta| < |w|$. Sustituyendo en (1), el valor

$$w - \zeta = (it-1)(z+1) - (it-1) = 2(it-z)$$

se obtiene el siguiente desarrollo válido para todo z tal que Re z > 0 y todo t real

$$(2)\qquad \frac{1}{2(it-z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it+1)^m}{(it-1)^{m+1}} \frac{(z-1)^m}{(z+1)^{m+1}}$$

2. Desarrollo del Núcleo k(z,t).

Recordemos que por definición, el núcleo k(z,t) es igual

$$(3)\qquad k(z,t) = \frac{(z+1)(it-1)}{2(it-z)}$$

De (2) y (3) se obtiene el desarrollo

$$(4)\qquad k(z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{it+1}{it-1}\right)^m \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^m$$

que converge en el semiplano $D = \{z:\mathrm{Re}\ z > 0\}$ para todo t real.

3. Sistema de Funciones Psi.

Para todo complejo z del semiplano D y todo t real, definimos

$$(5) \qquad \psi_m(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^m \quad \text{si } m > 0, \text{ y} \qquad \psi_m(z) = \left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}\right)^m \quad \text{si } m < 0$$

Es fácil comprobar entonces, que las siguientes fórmulas son ciertas

$$(6) \qquad \psi_{-m}(z) = \overline{\psi_m(z)}$$

$$(7) \qquad \psi_m(it) = \left(\frac{it-1}{it+1}\right)^m, \quad |\psi_m(it)| < 1 \quad \text{para todo entero } m \text{ y todo } t \text{ real.}$$

De (4), (5) y (6) resulta, fácilmente, la importante fórmula:

$$(8) \qquad k(z,t) = \sum_{m=0}^{\alpha} \overline{\psi_m(it)}\, \psi_m(z)$$

4. Núcleo p(z,t).

Por definición para todo z e D y todo t real

$$(9) \qquad p(z,t) = \frac{x(1+t^2)}{x^2+(y-t)^2} \qquad z = x+iy$$

Con el objeto de desarrollar en serie la función p(z,t), utilizamos la siguiente igual que es de fácil comprobación a partir de (3).

$$(10) \qquad k(z,t) = \frac{1}{2}\left\{(1-it) - \frac{1+t^2}{it+z}\right\}$$

Tomando partes reales en ambos miembros de (10) se obtiene

$$(11) \qquad p(z,t) = -1 + 2 \operatorname{Re} k(z,t)$$

Finalmente, de las fórmulas (11), (8) y (6) resulta

$$(12) \qquad p(z,t) = \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} \overline{\psi_m(it)}\, \psi_m(z)$$

5. Relaciones Integrales.

Si k es un entero distinto de cero, entonces

$$(13) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_k(it)} \frac{1}{1+t^2} dt = 0$$

donde ψ_k es la función dada por (7).

Demostración.

Se obtiene aplicando el método de los residuos a la siguiente integral

$$\text{Si } k > 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(it) \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-i)^{k-1}}{(t+i)^{k+1}} dt = 2\pi i \; R(i)$$

$$R(i) = \frac{1}{k!} \lim_{z \to i} \frac{d^k}{dz^k} (z-1)^{k-1} = 0$$

Asimismo, se obtiene, por el método de los residuos

$$(14) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} k(z,t) \frac{dt}{1+t^2} = 1$$

6. Núcleo w(z,t).

Por definición

$$(15) \qquad w(z,t) = \frac{k(z,t)}{1+t^2}$$

Por la relación (13), se obtiene:

$$(16) \qquad w(z,t) = \frac{(z+1)}{2(z-it)(1-it)}$$

De la fórmula (14) resulta:

$$(17) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} w(z,t) \, dt = 1$$

APENDICE B

En este apéndice, cuyo único objeto es facilitar la lectura del texto principal, se resumen algunos temas bien conocidos de la teoría de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert complejo.

1. Formas Cuadráticas y Medidas PO.

1.1. Definición.

Sea H un espacio de Hilbert complejo, y sea $\phi : H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilinear sobre H, se llama forma cuadrática asociada a (.) a la función $q : E \to C$ definida por la relación

(1) $$q(\xi) = \phi(\xi, \xi) .$$

Es fácil comprobar que la forma cuadrática q(.) asociada a ϕ(.) verifica las relaciones

(2-a) $$q(\xi + \eta) + q(\xi - \eta) = 2q(\xi) + 2q(\eta) \qquad (\xi, \eta \in H)$$

(2-b) $$q(c\xi) = |c|^2 q(\xi) . \qquad (c \in \mathbb{C}, \xi \in H)$$

El siguiente teorema debido a KUREPA (Glasnik Mat-Fiz. Astronom. Serie II. Drusvo Mat.Fiz. Hrvatske 20, (1965) 79.92) será utilizado en la prueba del TEOR. 1.3.

1.2. TEOREMA.

Si H es un espacio vectorial complejo, y si $q : E \quad \mathbb{C}$ satisface a las relaciones (2-a) y (2-b), entonces existe una única forma sesquilineal ϕ (.) sobre H que satisface a (1).

1.3. TEOREMA.

Si H es un espacio de Hilbert complejo y si $q : H \to R_+$ satisface a las relaciones (2-a) y (2-b) y a las siguientes:

(2-c) $$|q(\xi)| \leq \alpha |\xi|^2$$

(2-d) $q(\xi) \geqslant 0$

para todo par de vectores ξ, η de H, y para tod número complejo c; y donde α es una constante real no negativa. Entonces, existe un único operador A e $L_+(H)$ ($L_+(H)$ es conjunto de todos los operadores positivos de L(H)), tal que

(3) $q(\xi) = (A\xi,\xi)$,

para todo vector ξ de H.

Demostración.

Por el TEOR. 1.2., existe una única forma sesquilineal $\phi(.)$ sobre H, tal que, para todo vector ξ de H,

(4) $q(\xi) = \phi(\xi,\xi)$

De la identidad polarización (30, A.7), y de la condición (3-c), se obtiene que

(5) $|\phi(\xi,\eta)| \leqslant \frac{1}{4}\alpha\left(|\xi+i\eta|^2+|\xi-i\eta|^2+|\xi+\eta|^2+|\xi-\eta|^2\right) = \alpha\left(|\xi|^2 + |\eta|^2\right)$.

Por lo tanto, la forma sesquilineal $\phi(.)$ es acotada sobre H, y entonces, en virtud del teorema 12.8 de (25, pág. 296), existe un único operador A e L(H) tal que,

(6) $\phi(\xi,\eta) = (A\xi,\eta)$

para todo par de vectores ξ, η de H.

La fórmula (3) de la tesis resulta de (4) y (6). La positividad del operador A se deduce de (6) y (4).

Finalmente, la unicidad de A resulta del corolario 12.7 de (25, pág. 296).

El siguiente TEOR. 1.3., es una variante de (4, Th. 2).

1.4. TEOREMA.

Sea $\mathcal{B}$ una tribu de partes de un conjunto T, y sea, para todo vector ξ de H, $\mu_\xi(.)$ una medida finita y positiva sobre . Entonces, para que exista una medida PO sobre $\mathcal{B}$ tal que

$$(7) \qquad (\forall \in H) \qquad \mu_\xi(.) = (E(.)\xi,\xi)$$

es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$(8\text{-a}) \qquad \mu_{\xi+\eta}(.) + \mu_{\xi-\eta}(.) = 2\mu_\xi(.) + 2\mu_\eta(.)$$

$$(8\text{-b}) \qquad \mu_{c\xi}(.) = |c|^2 \mu_\xi(.)$$

para todo par de vectores ξ, η de H, y todo número complejo c; y que exista una constante $\alpha \geqslant 0$ tal que

$$(8\text{-c}) \qquad |\mu_\xi(.)| \leqslant \alpha|\xi|^2$$

Demostración.

La prueba de la necesidad de las condiciones (8) es inmediata.

Para probar la suficiencia de (8), fijamos un conjunto $M \in \mathcal{B}$, y consideramos la función $\xi \to q_M(\xi) = \mu_\xi(M)$. Entonces, como es fácil comprobar por (8), la función satisface la condición (2) del TEOR. 1.3. Entonces, existe para todo $M \in \mathcal{B}$, un operador positivo E(M), tal que

$$\mu_\xi(M) = q_M(\xi) = (E(M)\xi,\xi).$$

De esta relación se infiere que la función operatorial E(.) satisface a la igualdad (7), cualquiera sea el vector ξ de H. Ello implica que, en razón de la definición VI.2.4., E(.) es una medida PO sobre $\mathcal{B}$.

Nota. La medida PO E(.) es única, como se ve fácilmente por (7).

2. Matriz de un Operador en un Espacio de Hilbert separable.

Supongamos que H sea un espacio de Hilbert separable, y que (Θ_k) sea una base ortonormal de H.

2.1. Definición.

Sea A un operador perteneciente a L(H), se denomina matriz del operador A, respecto a (Θ_k), a la matriz cuyos elementos son

$$a_{j,k} = (A\,\Theta_k, \Theta_j) \qquad j,k = 1,2,\ldots\ .$$

2.2. Proposición.

Si $(a_{j,k})$ es la matriz del operador A de L(H), entonces la matriz del operador adjunto A* de A es la matriz $(\bar{a}_{k,j})$.

Demostración.

$$a_{j,k} = (A\,\Theta_k, \Theta_j) = (\overline{A^*\,\Theta_k, \Theta_k}) = \bar{a}_{k,j}\ .$$

2.3. Proposición.

Si dos operadores A y B pertenecientes a L(H), tienen una misma matriz respecto de una base ortonormal (Θ_k), entonces ambos operadores coinciden.

Demostración.

Véase STONE "Linear Transformations in Hilbert Space" A.M.S. 1932.

2.4. TEOREMA. (1, II.26 pág. 56)

Para que una matriz $(a_{j,k})$ sea la matriz de un operador lineal y acotado en H es necesario y suficiente que exista una constante M, tal que, para todo par de sucesiones finitas de números complejos, $c_1,\ldots,c_p$ y $d_1,\ldots,d_q$, se cumpla la desigualdad

$$\left|\sum_{j=1}^{p}\ \sum_{k=1}^{q} a_{j,k}\, c_j\, \bar{d}_k\right| \leq M\Big(\sum_{j=1}^{p}|c_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{q}|d_k|^2\Big)^{1/2}\ .$$

3. Espacios de Hilbert con Conjugación.

La siguiente definición ha sido tomada del libro de STONE "Linear Transformations in Hilbert Space" A.M.S. Chap. IX. 2. pág.357.

3.1. Definición.

Sea H un espacio de Hilbert complejo, se llama conjugación en H a toda aplicación $\xi \to \bar{\xi}$ de H en H tal que

(1) a) $\overline{(\xi+\eta)} = \bar{\xi}+\bar{\eta}$ b) $\overline{(c\xi)} = \bar{c}\ \bar{\xi}$ c) $(\bar{\xi})^{-} = \xi$ d) $\overline{(\xi,\eta)} = (\bar{\xi},\bar{\eta})$.

Ejemplos:

1. Si $H = \mathbb{C}^n$ con producto escalar de dos vectores $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_n)$ dado por $(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \bar{\eta}_i$, entonces la aplicación $\xi \to \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_n)$ es una conjugación.

2. Si $H = L^2(T,\mathcal{B}, \mu)$ con producto escalar $(f,g)= \int_T f(t)\overline{g(t)}dt$, entonces la aplicación $f \to \bar{f}$, donde $\bar{f}(.) = \overline{f(.)}$, es una conjugación.

3.2. Definición.

Sea H un espacio de Hilbert dotado de conjugación $\xi \to \bar{\xi}$. Un vector $\xi \in H$ se llama real si $\xi = \bar{\xi}$.

3.3. Proposición.

Todo vector ξ de H puede expresarse unívocamente de la siguiente manera.

(2) $$\xi = \xi_1 + i\,\xi_2$$

donde ξ_1 y ξ_2 son dos vectores reales.

Demostración.

Basta elegir $\xi_1 = \frac{1}{2}(\xi+\bar{\xi})$ y $\xi_2 = -\frac{1}{2}i(\xi-\bar{\xi})$.

3.4. <u>Proposición</u>.

Sean A y B dos operadores en H. Entonces A = B si, y sólo si la igualdad

$$A\xi = B\xi$$

se cumple para todo vector real.

<u>Demostración</u>.

Si $\xi = \xi_1 + i\,\xi_2$, donde ξ_1 y ξ_2 son reales es la descomposición de la Prop. 3.3., entonces

$$A\xi = A\xi_1 + i\,A\xi_2 = B\xi_1 + i\,B\xi_2 = B\xi$$

cualquiera sea el vector ξ de H.

3.5. <u>Definición</u>.

Sea A un operador perteneciente a L(H).

a) Se llama conjugado del operador A, que se anota $\bar{A}$, al operador $\bar{A}$ definido por

$$(3) \qquad A\xi = (A\bar{\xi})^{-} .$$

b) El operador A se llama real si $A = \bar{A}$.

Las siguientes proposiciones son de comprobación inmediata.

3.6. <u>Proposición</u>.

Sean A y B dos operadores de L(H), ξ y η dos vectores de H, y c un complejo. Entonces se cumplen las siguientes relaciones

$$(4) \quad \begin{array}{llllll} a) & \overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B} & b) & \overline{(AB)} = \bar{A}.\bar{B} & c) & \bar{A}\bar{\xi} = \bar{A}.\bar{\xi} \\ d) & \overline{(c.A)} = \bar{c}.\bar{A} & e) & (\bar{A})^{-} = A & f) & (A\xi,\eta) = \overline{(\bar{A}\bar{\xi},\bar{\eta})} . \end{array}$$

3.7. <u>Proposición</u>.

Si $A \in L(H)$ entonces

$$|\bar{A}| = |A| . \tag{5}$$

<u>Demostración</u>.

Es trivial.

3.8. <u>Proposición</u>.

Para todo operador A existen dos operadores A_1 y A_2 <u>reales</u> y tales que

$$A = A_1 + i\, A_2 . \tag{6}$$

Además la descomposición (6) es única.

<u>Demostración</u>.

Basta elegir $A_1 = \frac{1}{2}(A+\bar{A})$ y $A_2 = -\frac{1}{2}\, i\, (A-\bar{A})$.

La unicidad se prueba tomando conjugados en ambos miembros de (6) y procediendo como en la prueba de 3.3.

3.9. <u>Proposición</u>.

Sean A y B dos operadores. Entonces para que A = B, es necesario y suficiente, que para todo par de vectores <u>reales</u> ξ, η de H se verifique

$$(A\xi,\eta) = (B\xi,\eta) \tag{7}$$

<u>Demostración</u>.

Sea $D = A - B$, y sean ξ, η dos vectores arbitrarios de H. Entonces por (2), $\xi = \xi_1 + i\, \xi_2$ y $\eta = \eta_1 + i\, \eta_2$, donde ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 son vectores reales.

Así tenemos que

$$(D\xi,\eta) = (D\xi_1 + D\xi_2,\ \eta_1 + i\eta_2)$$

$$(D\xi,\eta) = (D\xi_1,\eta_1) + i(D\xi_2,\eta_1) - i(D\xi_1,\eta_2) + (D\xi_2,\eta_2) = 0$$

Por lo tanto $D = 0$.

En la siguiente proposición con A^* se designa al operador adjunto del operador A.

3.10. <u>Proposición</u>.

a) Para todo operador A se cumple

$$(A^*)^- = (\bar{A})^* \tag{8}$$

b) Si A es <u>real</u>, A^* es también real.

c) Si A es hermitiano, también lo es $\bar{A}$.

<u>Demostración</u>.

a) por (4f) y la definición de operador adjunto, tenemos que

$$(\bar{A}\xi,\eta) = \overline{(A\bar{\xi},\bar{\eta})} = (\bar{\eta},A\bar{\xi}) = (A^*\bar{\eta},\xi) = \overline{(\xi,A^*\bar{\eta})} = (\xi,(A^*)^-\eta)$$

La prueba de b) y c) es trivial.

<u>Conjugación y Medidas PO</u>.

3.11. <u>Definición</u>.

Sea $E(.)$ una medida PO sobre una tribu $\mathcal{B}$ de partes de T. Se llama <u>medida conjugada de la medida PO $E(.)$</u>, y se la nota $\bar{E}(.)$, a la medida PO definida por

$$\bar{E}(M) = E(M) , \tag{9}$$

para todo conjunto M de .

Se comprueba fácilmente que la medida operatorial definida por (9) es efectivamente una medida PO. (Usese al efecto Prop. 3.10.)

Como es obvio, llamaremos real a toda medida PO $E(.)$, tal que $\bar{E}(.) = E(.)$.

3.12. TEOREMA.

Sea $E(.)$ una medida PO sobre una tribu $\mathcal{B}$ de partes de T, y sea $f : T \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{B}$-medible y acotada sobre T.

Entonces se cumple la siguiente relación

$$(10) \qquad \overline{\int_T f(t)\, dE(t)} = \int_T \overline{f(t)}\, d\bar{E}(t)$$

Demostración.

Sean A y B los operadores siguientes,

$$(11) \qquad A = \int_T f(t)\, dE(t) \qquad\qquad B = \int_T \overline{f(t)}\, d\bar{E}(t)$$

y sean μ_ξ, λ_ξ las medidas positivas (finitas) dadas por:

$$(12) \qquad \mu_\xi(.) = (E(.)\xi,\xi) \ , \qquad \lambda_\xi(.) = (\bar{E}(.)\xi,\xi) \ .$$

De esta última relación, surge por (4-f), la siguiente

$$(13) \qquad \lambda_\xi(.) = \overline{(E(.)\bar{\xi},\bar{\xi})} = \mu_{\bar{\xi}}(.)$$

Por definición de integral, por (11), (13) y (4-f) se obtiene

$$(14) \qquad (A\bar{\xi},\bar{\xi}) = \overline{\overline{(A\bar{\xi},\bar{\xi})}} = \overline{\int_T f(t)\, d\mu_\xi(t)} = \int_T \overline{f(t)}\, d\mu_{\bar{\xi}}(t) \ .$$

Por definición de integral, por (11) y (13) resulta:

$$(15) \qquad (B\xi,\xi) = \int_T \overline{f(t)}\, d\lambda_\xi(t) = \int_T \overline{f(t)}\, d\mu_{\bar{\xi}}(t)$$

Finalmente, por (14) y (15), obtenemos que, para todo vector ξ perteneciente a H, se cumple:

$$(\bar{A}\xi, \xi) \;=\; (B\xi, \xi)$$

lo que implica que $\bar{A} = B$, que es la igualdad de la tesis, por (11).

3.13. COROLARIO.

Si $E(.)$ es una medida PO real, y si la función $f : T \to \mathbb{R}$ es real, acotada y $\mathcal{B}$-medible, entonces la integral

$$\int_T f(t)\, d\, E$$

es real.

Aplicación a las medidas espectrales.

Una medida espectral es, por definición, una medida PO $E : \mathcal{B} \to L(H)$, donde $\mathcal{B}$ es una tribu de partes de un conjunto T, que satisface las relaciones:

$$\text{a)}\quad E^2(.) \;=\; E(.) \qquad\qquad \text{b)}\quad E(T) \;=\; I$$

La medida conjugada $\bar{E}(.)$ de una medida espectral, es espectral. En efecto

$$(\bar{E}(.))^2 = \bar{E}(.)\;\bar{E}(.) = \overline{E(.)\;E(.)} = \bar{E}(.)$$

Que la relación b) se cumple es trivial.

Si A es un operador hermitiano entonces, por el Teorema Espectral (15, pág. 69) existe una única medida espectral $E(.)$ sobre la tribu de Borel de la recta R^1, tal que

$$A \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} t\; d\; E(t).$$

3.14. TEOREMA.

Si A es un operador hermitiano real y si $E(.)$ es la medida espectral asociada a A por el teorema espectral, entonces la medida $E(.)$ es real.

Demostración.

Por el teorema espectral

(16) $$A = \int_{-\infty}^{\infty} t \, d \, E \, (t)$$

Aplicando a esta última fórmula el TEOR.3.1, resulta

(17) $$A = \bar{A} = \int_{-\infty}^{\infty} t \, d \, \bar{E} \, (t)$$

De (16) y (17), en virtud de la unicidad del teorema espectral, se concluye que $\bar{E}(.) = E(.)$.

4. Convergencia Débil de Vectores y Operadores.

En toda esta sección supondremos que H es un espacio de Hilbert separable, y que (Θ_k) es una base ortonormal de H.

4.1. Definición.

Se dice que una sucesión generalizada $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en H, converge débilmente al vector ξ de H, y se nota

$$w - \lim_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma = \xi ,$$

si se cumple la relación

(1) $$\lim_{\gamma\in\Gamma} (\xi_\gamma, \eta) = (\xi, \eta) ,$$

para todo vector η de H.

4.2. Proposición.

Sea ξ un vector de H y sea $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ una sucesión generalizada en H tal que

(2) $$M = \sup_{\gamma\in\Gamma} |\xi_\gamma| \leqslant +\infty .$$

Entonces para que $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ converja débilmente a ξ, es necesario y suficiente que, para todo entero positivo k, se verifique que

(3) $$\lim_{\gamma\in\Gamma} (\xi_\gamma,\Theta_k) = (\xi,\Theta_k)$$

Demostración.

Sean $\xi^*_\gamma(.)$ y $\xi^*(.)$ las formas lineales definidas sobre H por las relaciones

(4) $$\xi^*_\gamma(.) = (. \,,\xi_\gamma) \quad y \quad \xi^*(.) = (. \,,\xi) .$$

Entonces, por (3), se tiene que

(5) $$\lim_{\gamma\in\Gamma} \xi^*_\gamma(\eta) = \xi^*(\eta) ,$$

para todo vector η que sea combinación lineal finita de los vectores de la base (Θ_k). Asimismo, es fácil ver que, por (2)

(6) $$\sup_{\gamma\in\Gamma}|\xi^*_\gamma| = \sup_{\gamma\in\Gamma} |\xi_\gamma|< + \alpha.$$

De (4) y (5) se infiere que la sucesión generalizada (ξ^*_γ) en el espacio H*, el dual de H, satisface a las hipótesis de (9, 1.21) Por lo tanto, resulta que

$$w - \lim_{\gamma\in\Gamma} \xi^*_\gamma = \xi^*_\gamma$$

Finalmente de (4) se obtiene que $(\xi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ converge débilmente a ξ.

4.3. Definición.

Se dice que una sucesión generalizada $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de operadores de L(H) converge débilmente a un operador A de L(H), y se nota

$$w - \lim_{\gamma\in\Gamma} A = A ,$$

si para todo par de vectores ξ, η de H, se cumple la relación

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \xi,\eta) = (A\xi,\eta) .$$

4.4. TEOREMA.

Sean H un espacio de Hilbert separable, (Θ_k) una base ortonormal de H, $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ una sucesión generalizada en L(H), y A un operador de L(H). Entonces, para que la sucesión $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ converja débilmente a A es suficiente que se cumplan las condiciones:

(7-a) $$\sup_{\gamma\in\Gamma} |A_\gamma| = M < +\alpha$$

(7-b) $$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \Theta_j, \Theta_k) = (A \Theta_j, \Theta_k)$$

para todo par de enteros positivos k, j.

Demostración.

Para todo entero positivo k, la sucesión generalizada vectorial $(A_\gamma.\Theta_k)_{\gamma\in\Gamma}$ converge débilmente al vector A Θ_k. En efecto, por las fórmulas (7-a) y (7-b), se obtienen las relaciones

(8-a) $$\sup_{\gamma\in\Gamma} |A_\gamma \Theta_k| < M$$

(8-b) $$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \Theta_k, \Theta_j) = (A \Theta_k, \Theta_j) .$$

Entonces, por la Prop. 4.2., se infiere que $(A_\gamma\Theta_k)_{\gamma\in\Gamma}$ converge débilmente al vector $A\Theta_k$. Por lo tanto, para todo k e N y todo vector η e H, se cumple que

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \Theta_k, \eta) = (A \Theta_k, \eta) ;$$

de lo que resulta:

(9) $$\lim (\Theta_k, A^*_\gamma\eta) = (\Theta_k, A^*\eta)$$

De (9), por una nueva aplicación de la Prop. 4.2., en virtud de $|A^*_\gamma . \eta| \leqslant M|\eta|$, se infiere que

$$\lim_{\gamma \in \Gamma} (\xi, A^*_\gamma \eta) = (\xi, A^* \eta)$$

Finalmente, de esta última relación, se obtiene fácilmente la tesis del teorema.

APENDICE C

INTEGRACION VECTORIAL Y OPERATORIAL EN ESPACIOS DE HILBERT

En este apêndice se expondrán las nociones básicas, bien conocidas, de integración de funciones que toman valores en un espacio de Hilbert separable H o en el espacio L(H).

Notación Básica.

En todo este apéndice, H designa un espacio de Hilbert complejo y separable, y L(H) el espacio de todos los endomorfismos continuos de H en H.

Los conceptos de mesurabilidad e integrabilidad serán siempre referidos a un espacio de medida $(T,\mathcal{B},\mu)$, donde T es un conjunto, $\mathcal{B}$ es una tribu de partes de T, y μ una medida sigma-finita y completa sobre $\mathcal{B}$.

1 - Integración Vectorial.

1.1. Teorema.

Sea $f: T \to H$ una función definida en T y con valores en H; y sea (θ_k) una base ortonormal del espacio de Hilbert H. Entonces son equivalentes las propiedades:
(a) Para todo $k \in N$, la función escalar $(f(.), \theta_k)$ es medible.
(b) La función f(.) es débilmente medible. [18, Def. 3.5.4.]
(c) La función f(.) es fuertemente medible. [18, Def. 3.5.4]

Demostración.

Sea ξ un vector de H, entonces por la igualdad de PARSEVAL, se tiene:

$$(1) \qquad (f(.), \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(.), \theta_k)\theta_k$$

De donde, es inmediato que (a) implica (b). La implicación (b) $\to$ (c) es un resultado clásico debido a PETTIS [18, Th.3.5.3.] . La implicación (c) $\to$ (a) es trivial.

1.2. Definición.

Se dice que una función vectorial $f:T \to H$ es medible si satisface a alguna de las condiciones equivalentes (a), (b) o (c) del TEOR. 1.1.

1.3. Teorema.

Si la función vectorial $f:T \to H$ es medible, entonces es medible la función escalar $|f(.)|$.

Demostración.

Por la separabilidad del espacio H, existe una sucesión (ξ_k) densa en la bola unitaria de H. Por lo tanto,

(2) $$|f(.)| = \sup_{k \in N} |(f(.), \xi_k)| \; .$$

De donde resulta, que $|f(.)|$ es una función medible.

Para la definición y propiedades de la integral de BOCHNER o integral (B), véase [18, págs. 78-88].

1.4. Teorema. ([18, Th.3.7.4])

Para que una función $f:T \to H$, sea B- integrable, es necesario y suficiente que, f(.) sea medible y que la función escalar $|f(.)|$ sea integrable en el sentido usual. En caso afirmativo vale la desigualdad.

(3) $$\left|\int_T f(t) d\mu(t)\right| \leq \int_T |f(t)| d\mu(t)$$

2 - Funciones Operatoriales Débilmente Medibles.

2.1. Definición.

Sea $F: T \to L(H)$ una función operatorial. Se dice que la función F(.) es débilmente medible, si, para todo par de vectores ξ, η de H, la función escalar $(F(.)\xi, \eta)$ es medible.

2.2. Teorema.

Si la función $F:T\to L(H)$ es débilmente medible, entonces la función escalar $|F(.)|$ es medible.

Demostración.

Por la separabilidad del espacio de Hilbert H, existe una sucesión (ξ_k) densa en la bola unitaria de H. Entonces, de la igualdad

$$|F(.)| = \sup_{m,n} |(F(t)\,\xi_m , \xi_n)|$$

resulta la tesis.

Las dos siguientes proposiciones son de comprobación inmediata.

2.3. Proposición.

Si F_1: $T\to L(H)$ y F_2: $T\to L(H)$ son dos funciones débilmente medibles, entonces la función $c_1F_1(.) + c_2F_2(.)$, donde c_1 y c_2 son números complejos, es débilmente medible.

2.4. Proposición.

Si f: $T\to C$ es una función escalar medible y si G: $T\to L(H)$ es una función operatorial débilmente medible, entonces la función operatorial f(.)G(.) es débilmente medible.

2.5. Proposición.

Sea (θ_k) una base ortonormal del espacio Hibelrt H. Entonces, para que una función operatorial F: $T\to L(H)$ sea débilmente medible es suficiente que, para todo par de índices j, k, la función escalar $(F(.)\,\theta_k , \theta_j)$ sea medible.

Demostración.

Sean ξ y η dos vectores arbitrarios del espacio H. Por la fórmula de PARSEVAL vale la relación

$$(1) \qquad (F(t)\xi , \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} (F(t)\xi , \theta_j)\overline{(\eta , \theta_j)}$$

También, por PARSEVAL, se cumple:

$$(2) \quad (F(t)\xi , \theta_j) = \overline{(F^*(t)\theta_j , \xi)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(F^*(t)\theta_j , \theta_k)}(\xi , \theta_k)$$

De (1) y (2), resulta la relación

$$(F(t)\xi , \eta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (F(t)\theta_k , \theta_j)(\xi , \theta_k)\overline{(\eta , \theta_j)}$$

De esta última expresión, resulta, que la función escalar $(F(.)\xi , \eta)$ es medible, cualesquiera sean los vectores ξ , η. Por lo tanto F(.) es débilmente medible.

2.6. Lema.

Si la función $F: T \to L(H)$ es débilmente medible, entonces la función $F^*(.)$ es también débilmente medible.

Demostración.

Basta considerar la relación evidente

$$(F^*(.)\xi , \eta) = \overline{(F(.).\eta , \xi)}.$$

2.7. Definición.

Se dice que una función operatorial $F:T \to L(H)$ es NI, si satisface a las condiciones:

(a) La función F(.) es débilmente medible.

(b) La función escalar $|F(.)|$ es integrable respecto a la medida μ .

2.8. Proposición.

Si $f: T \to C$ es una función escalar integrable, y si $G: T \to L(H)$ es una función operatorial débilmente medible y esen cialmente acotada, entonces la función f(.) G(.) es una función NI.

Demostración.

Por la Prop 2.4. la función f(.) G(.) satisface a la condición (a) de la Def. 2.7. Asimismo, por la desigualdad

$$\int_T |f(t)|\,|G(t)| \, d\mu\,(t) \leq M \int_T |f(t)| \, d\mu\,(t) \qquad ,$$

donde $M = \|G\|_\infty$, se cumple la condición (b) de dicha definición.

3. Integración de Funciones Operatoriales NI.

3.1. Teorema.

Sea $F\colon T \to L(H)$ una función operatorial NI, entonces existe un único operador $A \in L(H)$; tal que, para todo par de vectores ξ , η de H, se cumple la siguiente igualdad

$$(1) \qquad (A\,\xi\,,\,\eta\,) = \int_T (F(t)\,\xi\,,\eta\,)\,d\mu(t).$$

Demostración.

La siguiente desigualdad, que es de comprobación inmediata,

$$(2) \quad \int_T |(F(t)\,\xi\,,\,\eta\,)| \, d\mu\,(t) \leq \int_T |F(t)| \, d\mu\,(t)\,.\,|\xi|\,|\eta|.$$

asegura la existencia y finitud del segundo miembro de (1).

Sea $\varphi\colon H \times H \to C$ la forma sesquilineal definida por

$$(3) \qquad \varphi(\,\xi\,,\eta\,) = \int_T (F(t)\,\xi\,,\,\eta\,)\,d\mu\,(t)$$

Por (2) existe una constante α finita, tal que, para , en H,

$$|\varphi(\,\xi\,,\,\eta\,)| \leq \alpha\,|\xi|\,|\eta|$$

De modo que, la forma sesquilineal $\varphi(.,.)$ es continua sobre H.

Por consiguiente, por el teorema 12.8 de [25, pag.296], existe un operador $A \longrightarrow L(H)$, tal que

$$(4) \qquad \varphi(\xi, \eta) = (A\xi, \eta),$$

para todo par de vectores ξ, η de H.

De (3) y (4) se concluye la igualdad (1) de la tesis.

La unicidad del operador A es trivial.

3.2. <u>Definición</u>.

Dada una función operatorial $F: T \longrightarrow L(H)$ NI, se llama integral débil o P-integral de F(.), respecto a la medida escalar μ, que se escribe

$$\int_T F(t)\, d\mu(t),$$

al operador A cuya existencia asegura el Teor. 3.1.

<u>Nota</u>: La integral definida por 3.2, es más restringida que lo necesario. No obstante, hemos adoptado tal definición, adecuada a nuestros propósitos, para lograr simplicidad en la exposición.

3.3. <u>Proposición</u>.

Si $F: T \longrightarrow L(H)$ es una función operatorial NI, entonces

$$(5) \qquad \left|\int_T F(t)\, d\mu(t)\right| \leq \int_T |F(t)|\, d\mu(t)$$

<u>Demostración</u>.

Sea $A \in L(H)$, la integral de la función F(.). Por, (1) tenemos, que, para todo par de vectores ξ, η de H,

$$|(A\xi, \eta)| \leq \int_T |(F(t)| . |\xi| |\eta| \quad d\mu(t) \leq (\int_T |F(t)| \quad dt) |\xi| |\eta|$$

De donde resulta fácilmente, la desigualdad (5).

3.4. <u>Teorema</u>.

Si $F: T \rightarrow L(H)$ es una función NI, entonces la función $F^*(.)$ es también NI, y

$$(6) \qquad \left[\int_T F(t)\, d\mu\, (t)\right]^* = \int_T F^*(t)\, d\mu\, (t)$$

<u>Demostración</u>.

Sea A el operador

$$(7) \qquad A = \int_T F(t)\, d\mu\, (t)$$

Por definición de integral, para todo par de vectores ξ, η de H, se tiene la siguiente igualdad.

$$(A \overset{\eta}{\cancel{\xi}}, \xi) = \int_T (F(t)\eta, \xi)\, d\mu\, (t) = \int_T \overline{(F^*(t)\xi, \eta)}\, d\mu\, (t)$$

Tomando conjugación, en ambos miembros de esta igualdad, se obtiene

$$(A^*\xi, \eta) = \overline{(A\eta, \xi)} = \int_T (F^*(t)\xi, \eta)\, d\mu\, (t)$$

de donde, por definición de integral, resulta la siguiente igualdad

$$A^* = \int_T F^*(t)\, d\mu\, (t)$$

que es la fórmula (6) de la tesis.

3.5. <u>Teorema</u>.

Sea H un espacio de Hibert con una conjugación $\xi \rightarrow \overline{\xi}$ (Veáse AP.B). Si, $F: T \longrightarrow L(H)$ es una función NI; y si A es el operador

$$(8) \qquad \overline{A} = \int_T \overline{F(t)}\, d\mu\, (t)$$

entences la función F(.) es también NI, y se cumple la igualdad siguiente

$$(9) \qquad \overline{A} = \int \overline{F(t)}\, d\,\mu\,(t)$$

Demostración.

Para todo par de vectores ξ , η de H, se tiene, por AP.B.3 (4 - f).

$$(\overline{F(.)}\,\xi\,,\eta\,) = \overline{(F(.)\,\overline{\xi}\,,\overline{\eta}\,)}$$

De donde, resulta que F(.) es débilmente medible. Como, además se cumple que $|\overline{F(.)}| = |F(.)|$, entonces la función F(.) es una función NI.

Por definición de integral, para todo par de vectores ξ , η de H, se cumple, por (8), la siguiente igualdad

$$(A\,\overline{\xi}\,,\overline{\eta}\,) = \int_T (F(t)\,\overline{\xi}\,,\overline{\eta}\,)\,d\,\mu\,(t)$$

De donde, tomando conjugados en ambos miembros, se obtiene

$$(\overline{A}\,\xi\,,\eta\,) = \int_T (\overline{F(t)}\,\xi\,,\eta\,)\,d \quad)t)$$

Fórmula que equivale, por definición de integral, a la fórmula (9) de la tesis.

4. Propiedades de Conmutatividad.

4.1. Proposición.

Si F: $T \longrightarrow L(H)$ es una función operatorial NI y si B es un operador perteneciente a L(H), entonces ambas funciones operatoriales BF(.) y F(.)B son NI y se cumplen las siguientes igualdades.

$$(1)\ (a) \int_T BF(t)\,d\,\mu(t) = B\,(\int_T F(t)\,d\,\mu\,(t),\ b) \int_T F(t)B d\,\mu\,(t) = (\int_T F(t)\,d\mu\,(t)$$

Demostración.

La primera parte es trivial.

Probaremos sólo la igualdad (a) pues la otra se prueba con la misma manera.

Sea A el operador

$$A = \int_T F(t)\, d\mu(t)$$

Para todo par de vectores , de H, por definición de integral, tenemos que

$$(BA\xi, \eta) = (A\xi, B^*\eta) = \int_T (F(t)\xi, B^*\eta)\, d\mu(t) = \int_T (BF(t)\xi, \eta) d\mu($$

Esta igualdad equivale a; por definición de integral,

$$BA = \int_T BF(t)\, d\mu(t)$$

4.2. Corolario.

Si F:T L(H) es una función operatorial NI, si A es el operador

$$A = \int_T F(t)\, d\mu(t)$$

y si $B \in L(H)$, es tal que $BF(t) = F(t)B$ para casi todo punto t de T; entonces

$$BA = AB$$

Demostración.

Por la proposición anterior

$$BA = \int_T BF(t)\, d\mu(t) = \int_T F(t)\, B d\mu(t) = AB$$

4.3. Teorema.

Si $F: T \rightarrow L(H)$ es una función NI, tal que

(i) Para casi todo t de T, F(t) es un operador normal.
(ii) Para casi todo par t_1, t_2 de puntos de T, $F(t_1)$ conmuta con $F(t_2)$ entonces, el operador

(2) $$A = \int_T F(t)\, d\mu(t)$$

es un operador normal.

Demostración.

Sea N el conjunto despreciable en cuyo complemento se satisfacen las hipótesis (i) y (ii).

Si $s \in T \setminus N$, entonces la relación

$$F(s)\ F(t) = F(t)\ F(s)$$

se cumple para casi todo punto t de T. Por lo tanto, en virtud del corolario anterior, tenemos que; para todo $s \in T \setminus N$,

$$F(s)A = AF(s)$$

De esta igualdad, por ser el operador F(s) normal, en virtud del teorema de FUGLEDE [9, pág.114]. se infiere que

(3) $$F^*(s)A = AF^*(s)$$

Por otra parte, por el Teor. 3.4, $F^*(.)$ es una función NI y se cumple

(4) $$A^* = \int_T F^*(s)\, d\mu(s)$$

Finalmente, integrando la igualdad (3), medinate Cor. 4.2, obtenemos

$$A^*A = \int_T F^*(s)\, A d\mu(s) = \int_T AF^*(s)\, d\mu(s) = AA^*$$

4.4. Teorema.

Si $F: T \rightarrow L(H)$ y $G: T \rightarrow L(H)$ son dos funciones operato riales de clase NI y si, para casi todo par de puntos t,s de T,

$$F(t) \longleftrightarrow G(s)$$

entonces

$$\int_T F(t)\, d\, \mu(t) \longleftrightarrow \int_T G(s)\, d\, \mu\ (s)$$

Notación: $A \longleftrightarrow B$ significa A conmuta con B.

Demostración.

Sea $s \in T \setminus N$, donde N es el conjunto excepcional despreciable, entonces

$$G(s) \longleftrightarrow F(t)$$

para casi todo t de T. Entonces por el Cor.4.2.

$$G(s) \longleftrightarrow \int_T F(t)\, d\, \mu\ (t)$$

Volviendo a aplicar el mismo corolario a esta última relación, obtenemos

$$\int_T G(s)\, d\, \mu(s) \longleftrightarrow \int_T F(t)\, d\, \mu\ (t)$$

APENDICE D

SOBRE UN TEOREMA DE JOHN VON NEUMANN

1. Introducción.

El objeto de este apéndice, es demostrar el siguiente Teor. 1.1, que mejora un resultado de Von Neumann (Toer. 1.2). El mismo será utilizado en la demostración del teorema de representación exponencial de impedancias en el Cap. IX.

Aunque Halmos (1) afirma que su resultado, el Teor. 1.3., puede extenderse, sin dificultad, a un conjunto numerable de operadores hermitianos que conmutan entre sí; nos ha parecido útil incluir una prueba del Teor. 11.

1.1. Teorema.

Sea H un espacio de Hilbert, real o complejo, L(H) el espcio vectorial de todos los operadores lineales y acotados sobre H, y (A_n) una sucesión en L(H), formada por operadores hermitianos mutuamente conmutativos. Entonces existen: (1) un operador hermitiano $B \rightarrow L(H)$, (2) una sucesión (g_n) de funciones reales continuas $g_n : \sigma(B) \rightarrow R$.($\sigma(B)$ es el espectro compacto de B); tales que

$$(1) \qquad A_n = g_n (B).$$

1.2. Teorema. (Von Neumann (4))*

Si (A_n) es una sucesión en L(H), formada por operadores hermitianos mutuamente conmotativos. Entonces existen: (1) un operador hermitiano $B \in L(H)$, (2) una sucesión (f_n) de funciones reales f_n: $R \rightarrow R$, B - medibles y acotadas; tales que

$$(2) \qquad A_n = f_n (B) .$$

* Los números entre paréntesis se refieren a la bibliografia especial de este Apéndice.

3.1. Teorema. (Halmos (1))

Si A_1 y A_2 son operadores hermitianos de L(H) que conmutan, entonces existen: (1) un operador hermitiano $B \in L(H)$, (2) dos funciones reales continuas $g_i : \sigma(B) \rightarrow R$ $(i = 1,2)$; tales que:

(2) $A_1 = g_1(B)$, $A_2 = g_2(B)$

2. Algunos Lemas Topológicos.

Los siguientes lemas serán utilizados en la demostración del Teor. 1.1.

2.1. Lema (Hahn-Mazurkiewicz)

Si K es un espacio compacto, conexo, localmente conexo y metrizable, entonces existe una aplicación continua sobreyectiva $w : I \rightarrow K$, del intervalo compacto $I = [0,1]$ sobre K.

Demostración.

(Véase (2, Th.3.30, pág.129), o también (7, 31.5).

2.2. Lema. (Existencia de Sección Boreliana).

Si I y K son dos espacios compactos metrizables, y si $w : I \rightarrow K$ es una aplicación continua y sobreyectiva, entonces existe una función B-medible $q: K \rightarrow I$ tal que

(3) $w \circ q = 1_K$

donde 1_K es la aplicación idéntica en K.

Demostración.

Véase (3, 43, IX), (1, pág.130) ó (5, th.4.2. pág.23).

2.3. Lema.

Si (f_n) es una sucesión de funciones $f_n: R \rightarrow R$, B-medibles y acotadas; entonces existen: (1) una función medible $h:R \rightarrow I$

($I =$ 0,1), (2) una sucesión (g_n) de funciones reales continuas g_n : I R; tales que, para todo n natural,

(4) $f_n = g_n o h$.

Demostración.

Para cada $n \in N$, sea I_n un intervalo compacto que contenga al rango de la función f_n.

Sea $\bar{f} : R \longrightarrow K = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, la aplicación definida por

(5) $\bar{f}(x) = (f_1(x), \ldots, (f_n(x), \ldots)$

Sobre el espacio $K = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$ se considera la topología producto. Entonces, es fácil de ver que K es metrizable, compacto, conexo y localmente conexo.

Es fácil que, con tal topología, la función $f: R \longrightarrow K$ es B-medible.

Por otra parte, la enésima proyección $p_n : K \longrightarrow I_n$ es continua, y cumple la relación, para todo índice n,

(6) $f_n = p_n o f$

Por el lema 2.1, existe una función continua suprayectiva $w : I \longrightarrow K$, donde I es un intervalo compacto $[0,1]$. Por otra parte, el lema 2.2. asegura la existencia de una aplicación B-medible $q : K \longrightarrow I$, tal que

(7) $w o q = i_K$

De (5), y del hecho que i_K es identidad de K, resulta:

(8) $\bar{f} = i_K o \bar{f} = w o (q o \bar{f})$

De (6) y (8) se obtiene:

(9) $$f_n = (p_n o w) \; o \; (q o \bar{f})$$

Sea, para todo n, la función $g_n : I \longrightarrow I_n$ definida por

(10) $$g_n = p_n o w,$$

entonces g_n es continua, por ser la compuesta de dos funciones continas w y p_n.

Sea además, $h = q o \bar{f}$, entonces h es B-medible por ser la compuesta de dos funciones B-medibles.

De (9), y de la definición de las funciones h y g_n resulta:

$$f_n = g_n o h$$

que es la relación (4) de la tesis.

3. <u>Demostración del Teor. 1.1.</u>

Esta demostración se basa en el Teor. 1.2, y en el lema 2.3.

Por el Teor. 1.2, existe: (1) un operador hermitiano B_1, (2) una sucesión (f_n), de funciones $f_n : R \longrightarrow R$, B-medibles y acotadas; tales que

(11) $$A_n = f_n(B_1)$$

para todo entero positivo n.

Por el lema 2.3, para todo n,

(12) $$f_n = g_n o h$$

donde la función $h: R \longrightarrow I$ es B-medible y la función $g_n : I \longrightarrow R$ es continua.

De (11) y (12), envirtud del lema 3.1,resulta la relación

(13) $A_n = f_n(B_1) = g_n(h(B_1))$

Sea $B = h(B_1)$, o sea B es el operador definido por la integral

$$B = h(B_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dE_1(t),$$

donde $E_1(.)$ es la medida espectral del operador B_1. El operador B, así definido es un operador hermitiano y acotado.

De (13) resulta la relación, válida para todo n entero positivo,

$$A_n = g_n(B).$$

Así queda probado el teorema.

<u>Lema</u> 3.1.

Si $h, g : R \longrightarrow R$ son dos funciones medibles y acotadas, y si A es un operador hermitiano y acotado, entonces se cumple la relación

(14) $(hog)(A) = h(g(A))$

<u>Demostración</u>.

Sea $E(.)$ la medida espectral asociada al operador A y sea $E'(.)$ la medida PO definida por la fórmula

(15) $E'(M) = E(h^{-1}(M))$

Es fácil comprobar que $E'(.)$ es también una medida espectral.

Por el teorema 13.28 de [25, pág. 347] , en virtud de (13), se tiene, para toda función g: R R medible y acotada,

$$(16) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dE'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(h(t))\, dE(t) = (gof)\ (A)$$

Si en esta última fórmula ponemos, g(t) = t, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t dE'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dE(t) = h\ (A)$$

De donde resulta que E'().) es la descomposición de la unidad del operador h(A). Por lo tanto

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ dE'(t) = g(h(A))$$

De (16) y (17), se obtiene la tesis

4. Extensión del Teor. 1.1. a Operadores Normales.

Los siguientes lemas serán utilizados en la prueba del Teor. 4.3.

4.1. Lema.

Si A es un operador normal, entonces existe una única descomposición de la forma.

$$A = A' + iA''$$

donde A y A' son dos operadores hermitianos que conmutan entre sí.

Demostración.

Trivial.

4.2. Lema.

Si A_n y A_m son dos operadores normales que conmutan,y si

$$A_n = A'_n + iA''_n\ ,\ A_m = A'_m + iA''_m$$

son sus respectivas composiciones del tipo del lema 4.1., entonces

$$(18)\quad A'_n A'_m = A'_m A'_n ,\ A'_n A''_m = A''_m A'_n ,\ A''_m A''_n = A''_n A''_m$$

Demostración.

Por el teorema de FOGLEDE, tenemos que

$$(19)\qquad A^*_n A_m = A_m A^*_n ,\quad A^*_m A_n = A_n A^*_m ,$$

y por otra aplicación del teorema de FOGLEDE resulta:

$$(20)\qquad A^*_m A^*_n = A^*_n A^*_m$$

De las siguientes relaciones,

$$A'_n A'_m = \frac{1}{4} (A_n + A^*_n)(A_m + A^*_m) = \frac{1}{4} (A_n A_m + A^*_n A_m + A_n A^*_m + A^*_n A^*_m)$$

$$A'_m A'_n = \frac{1}{4} (A_m + A^*_m)(A_n + A^*_n) = \frac{1}{4} (A_m A_n + A^*_m A_n + A_m A^*_n + A^*_m A^*_n)$$

y de (19) y (20) se obtiene la primera de las fórmulas (18).

Para probar las restantes se procede en la misma forma.

4.3. Teorema.

Si (A_n) es una sucesión en $L(H)$, formada por operadores normales que conmutan entre sí; entonces existen: (1) un operador hermitiano y acotado B, (2) una sucesión (f_n), de funciones complejas $f_n \in C(K)$ (donde K es el espectro de B), tales que

$$(21)\qquad A_n = g_n(B)$$

Demostración.

Sea para todo n, la descomposición cartesiana siguiente

$$A_n = A'_n + A''_n$$

Entonces, consideremos la sucesión de operadores hermitianos:

$$A'_1, A''_1, A'_2, A''_2, \dots . A'_n, A''_n, \dots$$

Por el lema 4.2. la sucesión esta compuesta por operadores mutuamente conmutativos. Por lo tanto, en virtud del Teor. 1.1., existe un operador hermitiano B, y dos sucesiones de funciones reales (g'_n) y (g''_n) en $C(K)$; y tales que

$$A'_n = g'_n(B) , A''_n = g''_n(B)$$

De donde resulta la expresión

$$A = g'_n(B) + i\, g''_n(B) = g_n(B) ,$$

donde se ha definido $g_n = g'_n + i\, g''_n$

4.4. Teorema.

Si (A_n) es una sucesión en $L(H)$, formada por operadores normales y que conmutan entre sí, entonces existen: (1) una medida espectral regular compacta $E(.)$ sobre R^1, (2) una sucesión (f_n) en $C(K)$, $(K = \text{sop } E(.))$ tales que

$$(22) \qquad A_n = \int_K f_n(t)\, dE(t).$$

Demostración.

Resulta del teorema anterior, por lo siguiente. La relación (21), por definición de función de un operador, significa que

$$(23) \qquad A_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dE(t)$$

donde E(.) es la descomposición de la unidad del operador B. Ahora bien, como el soporte de E(.) es el compacto K, entonces

$$(24) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dE(t) = \int_K f_n(t)\, dE(t)$$

Por lo tanto, de (23) y (24) resulta la igualdad (22) de la tesis.

5. Operadores Reales Hermitianos.

En toda esta sección supondremos que H es un espacio de Hilbert complejo dotado de una conjugación, y que H_o es el subespacio real formado por todos los vectores reales de H.

El siguiente lema será utilizado en la prueba del Teor. 5.2.

5.1. Lema.

Si A. pertenece a $L(H_o)$, entonces existe un único operador A en L(H), tal que la restricción del operador A al subespacio real H_o coincida con A. Además, el operador A es real, y si A' es hermitiano también lo es el operador A.

Demostración.

Si A: H $\longrightarrow$ H es el operador definido por la relación

$$A\xi = A'\left(\frac{\xi + \bar{\xi}}{2}\right) + i\, A'\left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{2i}\right),$$

se comprueba que, sin dificultad, A es lineal y acotado, y que A es una extensión de A'. Las restantes aserciones del enunciado no ofrecen dificultad.

5.2. Teorema.

Si (A_n) es una sucesión en L(H), formada por operadores reales y hermitianos que conmutan mutuamente, entonces existen

(1) una medida espectral <u>real</u> regular compacta sobre R^1, (2) una sucesión (f_n) de funciones <u>reales</u> en C(K) (K = Sop E(.)); tales que

$$(25) \qquad A_n = \int_K f_n(t)\, dE(t)$$

<u>Demostración</u>.

Sea, para cada n, A'_n la restricción del operador A_n al subespacio real. Entonces, la sucesión (A'_n) en $L(H_o)$ satisface las hipótesis del Teor. 1.1. Por lo tanto existe un operador B' hermitiano perteneciente a $L(H_o)$, y una sucesión de funciones (f_n) reales en C(K), tales que

$$(26) \qquad A'_n = f_n(B'_n)$$

Si E'(.) es la medida espectral (regular compacta sobre R^1) del operador B', entonces de (26) resulta

$$(27) \qquad A'_n = \int_K f_n(t)\, dE'(t).$$

Por el lema 5.1., para todo conjunto de Borel M de R^1, existe un operador hermitiano y real E (M) en L(H) que extiende el operador E'(M) a todo H. Es fácil comprobar que E(.) es una medida espectral regular compacta (real).

Si B_n es el operador definido por, para todo entero positivo n,

$$(28) \qquad B_n = \int_K f_n(t)\, dE(t)$$

el teorema quedará probado si se demuestra que A_n es igual a B_n, cualquiera sea el natural n. Evidentemente B_n es hermitiano, y de (27) y (28) resulta que la restricción B'_n del operador B_n al subespacio real H_o coincide con A'_n. Entonces, por el Lema 5.1. los operadores A_n y B_n coinciden, para todo n.

Referencias del Apéndice D

(1) P.R.HALMOS, Continuos Functions of Hermitians Operators. Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972) 130-132.

(2) J.G.HOCKING - G.S. YOUNG. Topology. Addison-Wesley Co. Reading. 1961.

(3) K.KURATOWSKI. Topology. Vol. II, Academic Press. New York. 1968.

(4) NEUMANN VON J. Zur Algebra der Funktional operationen und Theorie der Normalen Operatorem. Math. Ann. 102 (1929) 370-427.

(5) K.R.PARTHASARATHY. Probability Measores on Metric Spaces. Academic Press. 1967.

(6) F. RIESZ - B.SZ.NAGY. Leçons d'Analysc Fonctionelle. Troisieme Edotion. Gauthier Villars. Paris 1955.

(7) S. WILLARD. General Topology Addison Wesley Co. Reading. 1970.

REFERENCIAS

[1] M.I.ACHIESER, I.M. GLASSMAN. Theorie der Linearen Operatoren in Hilbert Raum. Akademie Verlag. Berlin 1958.

[2] N. ARONSZAJN, W. DONOGHUE. On exponential representation of analitic functions in upper half plane with positive imaginary part. J. Analyse Math. 5, 321-385 (1956).

[3] E.J. BELTRAMI, M.R.WOHLERS. Distribution and Boundary Valves of Analytic Functions in Upper Half Plane. Academic Press. New York 1966.

[4] S.K. BERBERIAN. Notes in Spectral Theory. Van Nostrand Princeton. 1966.

[5] S.K. BERBERIAN. Introduction to Functional Analysis. Springer Verlag. New York 1974.

[6] N. BOURBAKI. Integration. Chap.VI. Integration Vectorielle. Paris 1959.

[7] M.S. BRODSKII, Triangular and Jordan Representation of Linear Operators. Amer. Math. Soc. Providence 1971.

[8] W.F. DONOGHUE. Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation. Srpinger. Berlin 1974.

[9] R.G. DOUGLAS. Banach Algebras Techniques in Operator Theory. Academic Press. New York 1972.

[10] N. DUNFORD and J.SCHWARTZ. Linear Operators. Parts and II. Wiley and Sons. New York 1958 y 1963.

[11] A. GONZALEZ DOMINGUEZ. Propiedades en el Contorno de Funciones Analíticas. Cursos y Seminarios de Math. Vol. 4. Univ. de Bs.Aires.

[12] A. GONZALEZ DOMINGUEZ. On the Factorization of Scattering Matrices, Chain Matrices and Transfer Matrices. Annali di Matemática (IV). Vol. 103 (1975) 161-186.

[13] A. GONZALEZ DOMINGUEZ. Sobre una Representación Canónica, de Tipo Exponencial, de Ciertas Matrices de Impedancia. Trabajos de Matemática. Vol.8. (1976). I.A.M. Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas.

[14] R.P.HALMOS. Measure Theory. Van Nostrand. Princeton 1950.

[15] R.P. HALMOS. Introduction tu Hilbert Space Theory. Chelsea. New York 1957.

[16] R.P.HALMOS. Continuos Functions of Hermitians Operators. Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972) 130-132.

[17] E. HEWITT, K. STROMBERG. Real and Abstract Analysis. Springer. Berlin 1969.

[18] E. HILLE, R. PHILLIPS. Functional Analysis and Semigroups. Amer. Math. Soc. Providence 1957.

[19] E. HILLE. Analytic Function Theory. Vol. II. Ginn and Co. Boston. 1962.

[20] J. HORVARTH. Topological Vector Spaces and Distributions. Addison and Wesley. Reading 1966.

[21] A. KORANYI, L. PUKANSKI. Holomorphic Functions with Positive Real Part in Polycylinders. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.108 (1963) 449-456.

[22] A.P.FUGER. Verallgemeinerte Poisson-Stieltjes'sche Integraldarstellung und Kontraktive, Operatorem. Ann. Acad. Sci. Fenn. 336/13 (1963).

[23] F.RIESZ, B.SZNAGY. Leçons d'Analyse Fonctionelle. Gauthier Villars. Paris 1955.

[24] W. RUDIN. Real and Complex Analysis. Mc. Graw Hill. New York 1966.

[25] W. RUDIN. Functional Analysis. Mc Graw Hill. New York 1973.

[26] W. RUDIN, Function Theory in Polydiscs. Benjamin Inc. New York 1969.

[27] E.M. STEIN and G. WEISS. Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces. Princeton University Press. Princeton 1971.

[28] V.S. VLADIMIROV. Holomorphic Functions with Nonnegative Imaginary Partina Tubular Domain Over a Cone. Math. USSR Sbornik. Vol.8 (1969) pp 125-146.

[29] V.S. VLADIMIROV. Les Fonctions de Plusieurs Variables Complexes. Dunod. Paris 1967.

[30] A.H. ZEMANIAN. Realizability Theory for Continuos Linear Systems. Academic Press. New York 1973.

[31] A. ZYGMUND. Trigonometric Series. Second. Ed. Cambridge Univ. Press. 1969.