Espacios de Lipschitz

Caputti, Telma

1976

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

"ESPACIOS DE LIPSCHITZ"

Trabajo de Tesis de TELMA CAPUTTI

para optar al GRADO de DOCTOR en CIENCIAS MATEMATICAS

AÑO 1976

Agradecimiento

Agradezco al Profesor CARLOS SEGOVIA FERNANDEZ la sugerencia del tema de Tesis Doctoral.

Mi sincero agradecimiento al Señor Profesor Doctor ALBERTO PEDRO CALDERON por su enseñanza y dedicación.

Agradezco a la Srta. Marîa Angélica TANCREDI
su esmerado trabajo.

Indice

Propósito

El propósito de este trabajo es caracterizar las clases Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ con α real, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ de funciones $F(x,t)$ definidas en $E_{n+1,+}$, indefinidamente diferenciables, soluciones de la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ para las cuales la norma mixta

$$\| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq} \qquad \text{es finita}$$

El operador diferencial A se define por

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t} (P^{\#} t^{P^{\#}} \partial . t^{P^{\#}} \partial)$$

donde $P^{\#}$ es la matriz adjunta de $P \in R^{n\times n}$ que satisface: $(Px.x) \geq (x.x)$, k es el mínimo entero positivo mayor que α y L es tal que:

$$L^2 = \frac{1}{4\pi} (P^{\#} + P), \; L = L^{\#}$$

Sumario

Capítulo I

Preliminares

Se fundamenta la teoría a desarrollar basándose en un resultado comunicado por el Dr. Alberto Pedro Calderón mediante la discusión de integrales análogas a las de Gauss-Weierstrass y soluciones F(x,t) de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t}(Lt^{P^{\#}} \partial . Lt^{P^{\#}} \partial).$$

Capítulo II

Espacios de Lipschitz, $\alpha > 0$

Se caracterizan las clases Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ con $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ de smooth functions. Se observa que en el rango $0 < \alpha < 1$ las propiedades de lisura definiendo estos espacios coinciden con otras nociones de lisura, permitiendo así la unificación en el tratamiento de varias de esas clases.

Capítulo III

Potenciales de Bessel

Se caracteriza el potencial de Bessel, equivalente al de Calderón-Aronszajn y, se prueba que con α, $\alpha + \delta$ positivos es J^{δ} un isomorfismo sobre clases Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ y $\Lambda(\alpha+\delta,p,q,E_n)$.

Capítulo IV

Espacios de Lipschitz, α real

Se caracterizan las clases $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ para todo α real, a fin de completar el Teorema 3. del Capítulo II cuando se lo extiende a distribuciones $F(x,t)$ que satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t}\left(Lt^{P^{\#}}\partial . Lt^{P^{\#}}\partial\right).$$

Además se describen relaciones de inclusión entre estos espacios, una serie de normas equivalentes y, se extiende el caso de J^{δ} isomorfismo con $\alpha,\alpha+\delta$ reales.

Apéndice I

Se incluye el Teorema del Valor Medio

Lista de Referencias

Notación y Convenciones

E_1 números reales

$E_n = x = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in E_1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$

$E_{n+1} = \{(x, t) : x \in E_n,\ t \in E_1\}$

$E_{n+1,+} = \{(x, t) \in E_{n+1} : t > 0\}$

Se identifica E_n como el subconjunto de E_{n+1}, con $t = 0$. Todas las funciones consideradas son supuestas a valores reales.

Si $f(x)$ es medible sobre E_n se define:

$$\| f(x) \|_p = \left(\int_{E_n} |f(x)|^p \, dx \right) \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\| f(x) \|_\infty = \sup_{x \in E_n} \operatorname{ess} |f(x)|$$

y se define $L_p(E_n) = L_p$ como el espacio de funciones para las cuales $\| f(x)\|_p$ es finita y la norma de este espacio con $\| f(x)\|_p$.

Si $f(x,t)$ es medible en x y en t, $(x,t) \in E_{n+1,+}$ se define:

$$\| f(x,t)\|_{pq} = \left(\int_0^\infty \| f(x,t)\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \qquad 1 \leq q < \infty$$

$$\| f(x,t)\|_{p\infty} = \sup_{t>0} \text{ess} \| f(x,t)\|_p$$

y se define:

$L_{pq}((E_n,dx) \times (0 < t < \infty, \frac{dt}{t}))$ como el espacio de funciones para las cuales $\| f(x,t)\|_{pq}$ es finita y su norma con $\| f(x,t)\|_{pq}$

Análogamente se define:

$$L_{pq}((E_n,dx) \times (0 < t \leq 1, \frac{dt}{t})) \text{ con norma } \| f(x,t)\|^{\#}_{pq}$$

(Normas de este tipo son discutidas por Benedek y Panzone (2). Ver esta referencia para más detalles).

$C^\infty(E_n) = C^\infty$ el conjunto de funciones indefinidamente diferenciables sobre E_n, cuyas derivadas son acotadas.

$D(E_n) = D$ el subconjunto de C^∞ a soporte compacto.

$C(E_n) = C$ el subconjunto de funciones continuas.

$C_0(E_n) = C_0$ el subconjunto de C tal que se anulan en infinito.

Sea $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ un multi-índice de enteros no negativos. Entonces se define:

$$D^s = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} . \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{s_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{s_n}$$

donde todas las derivadas están tomadas en el sentido habitual.

$|s| = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ el orden diferenciación de D^s

Para un multi-índice s, es $x^s = x_1^{s_1} . x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$

$$S(E_n) = \{f \in C^\infty ;\ A_{st} = \sup_{x \in E_n} |x^s\ D^t\ f(x)| < \infty\}$$

donde $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ y $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ recorren todas las n-uplas de enteros no negativos.

$(.)$ el producto interno usual en el espacio euclídeo

Si $x \in E_n$ se define:

$$|x|^2 = (x.x) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2$$

Sea $\eta = x^1 \otimes \ldots \otimes x^k$ el tensor con componentes $\eta_a = \eta_{a_1 \ldots a_k} =$

$$= \prod_{1 \leq i \leq k} x^i_{a_i} \text{ donde } a = (a_1, a_2, \ldots, a_k),\ 1 \leq a_i \leq n$$

Para matrices $A_i \in R^{nxn}$, $1 \leq i \leq k$ se tiene:

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_k\ (x^1 \otimes \ldots \otimes x^k) = A_1 x^1 \otimes \ldots \otimes A_k x^k = \overset{k}{\otimes} Ax$$

$A^\#$ denota la adjunta de A R^{nxn}

$\| A \|$ denota la norma de A como sigue: $\| A \|^2 = \sup_{x \neq 0} \dfrac{|Ax|^2}{|x|^2}$

$\gamma = Tr(A) = Traza(A)$ y $d\ t(A) =$ determinante de A

Sea $\partial = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right) \dfrac{\partial}{\partial t}$ y $\overset{k}{\otimes} A\ \partial$ con el siguiente significado:

$(\overset{k}{\otimes} A\ \partial) f(x) = (\overset{k}{\otimes} A\ \partial f)(x) = \overset{k}{\otimes} A\ \partial f(x)$ donde ∂f es el gradiente de f siendo fácilmente verificable que:

$$(\overset{k}{\otimes} A_1\ \partial) f(A_2 x) = (\overset{k}{\otimes} A_1\ A_2^\#\ \partial f)(A_2 x)$$

Para el subconjunto A de E_n se denota su medida de Lebesgue con $|A|$. w_n denota la medida de Lebesgue de la bola unitaria $B(0,1) = \{x \in E_n : |x| \leq 1\}$

Para funciones $f(x)$ definidas en E_n, la transformada de Fourier de $f(x)$ se denota por:

$$\hat{f}(x) = \int_{E_n} e^{-i2\pi(x.y)} f(y)\, dy$$

$\hat{f}(x,t)$ denota la transformada de Fourier de $f(y,t)$ como función de y con t fijo.

Cuando el dominio de integración no se explicite, se supone la integración sobre todo E_n ó $E_{n+1,+}$

Las constantes que aparecen en las desigualdades se denotan por c (sean absolutas ó dependan sólo de la dimensión) y por C las que dependan de los parámetros empleados.

Capítulo I

Preliminares

1. Sea $\{T_t\}$ $t > 0$ grupo uniparamétrico de transformaciones lineales en R_n tal que:

   $T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1 t_2}$ siendo T_1 la identidad

   $T_t = e^{P \ln t} = t^P$, $t > 0$, $P \in R^{n\times n}$

   a) $x \in R^n$, $0 < t \leq 1$, vale: $|t^P x| \leq t|x|$ ó equivalentemente

   b) $x \in R^n$, $P \in R^{n\times n}$, satisface: $(Px.x) \geq (x.x)$

   c) $x \in R^n - \{0\}$ fijo, se denota con $\rho(x)$ el único valor de t que satisface: $|t^{-P} x| = |x'| = 1$ con $\rho(0) = 0$

2. Se define una métrica ρ' en E_n mediante $\rho'(x,y) = \rho(x-y)$ con las siguientes propiedades:

   a) $\rho(t^P x) = t\,\rho(x)$

   b) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

   c) $\rho(x) = 1$ si y sólo si $|x| = 1$

   d) $|x| \leq \rho(x)$ si $\rho(x) \leq 1$ sii $|x| \leq 1$

   $|x| \geq \rho(x)$ si $\rho(x) \geq 1$ sii $|x| \geq 1$

   e) $\rho(x) \leq |x| \leq \rho(x)^{\|P\|}$ si $|x| \geq 1$

   Para las demostraciones de 2.a), b), c) ver referencia (6)

   Para las demostraciones de 2.d) y e) ver referencia (4)

3. El elemento de volumen en coordenadas polares:

   $dx = t^{\gamma-1} \operatorname{sen}^{n-2} \phi_1 \operatorname{sen}^{n-3} \phi_2 \ldots \operatorname{sen} \phi_{n-2} (Px'.x')\, dt\, dx'$

   $dx = t^{\gamma-1} (Px'x')\, dt\, dx'$

   donde:

   γ = Traza de la matriz $P \in R^{n\times n}$

   $x = t^P x'$ talqque $|x'| = 1$

   $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_j \leq \frac{\pi}{2}$ con $j = 1,2,\ldots,n-2$

$0 \leq \phi_{n-1} \leq 2\pi$

y

$x_1' = \cos \phi_1$

$x_2' = \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2$

$x_3' = \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_2$

....

$x_{n-1}' = \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \ldots \operatorname{sen} \phi_{n-2} \operatorname{sen} \phi_{n-1}$

$x_n' = \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \ldots \operatorname{sen} \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1}$

La medida de la bola $B(0,r) = \{x \in E_n : \rho(x) \leq r\}$ está dada por: $|B(0,r)| = r^\gamma |B(0,1)|$ pues

$$\int_{\rho(x)\leq r} dx = r^\gamma \int_{\rho(y)\leq 1} dy \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} x = r^P y,\ \rho(x) = r\,\rho(y) \\ dx = r^\gamma\, dy \end{array}$$

Para estas demostraciones ver referencia (6)

Finalmente, se observa que $(Px.x) = (x.P^{\#}x) \geq (x.x)$ de modo que puede asociarse $\rho^{\#}(x)$ a la matriz $P^{\#}$ con propiedades análogas a las de $\rho(x)$.

4. De ahora en más, se consideran funciones $F(x,t)$ definidas en $E_{n+1,+}$ indefinidamente diferenciables, las cuales satisfacen la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ siguiente:

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}\,(P^{\#} t^{P^{\#}} \partial . t^{P^{\#}} \partial) = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t}\,(Lt^{P^{\#}} \partial . Lt^{P^{\#}} \partial)$$

donde:

$$\frac{1}{2\pi}\,(P^{\#}x.x) = \frac{1}{4\pi}\,((P^{\#} + P)x.x) = (Lx.Lx)$$

y

$$L^2 = \frac{1}{4\pi}\,(P + P^{\#}),\ L = L^{\#}$$

5. Se introduce el núcleo $\phi(x,t)$

Sea $\phi(x) = \exp(-\pi|x|^2)$

$$\phi(x,t) = t^{-\gamma}\phi(t^{-P}x) = t^{-\gamma}\, e^{-\pi|t^{-P}x|^2}$$

Propiedades de $\phi(x,t)$

a) $\phi(x,t) > 0$

b) $\int_{E_n} \phi(x,t)\,dx = 1$ para cada t positivo

c) $\int_{\rho(x)\geq u} \phi(x,t)dx$ tiende a cero cuando t tiende a cero para cada u positivo

d) Condición de homogeneidad generalizada

$\phi(x,t)$ es P-homogénea de grado m = - Traza (P) respecto de la variable t y homogénea de grado cero respecto de la variable x si con $t' = at$ y $x' = a^P x$ vale:

$\phi(x',t') = a^{-\gamma}\phi(x,t)$

pues:

$$\phi((at)^{-P}a^P x) = \phi(e^{-P\ln at}.e^{P\ln a}x) = \phi(e^{-P\ln t}x) = \phi(t^{-P}x)$$

e) Si P es la matriz identidad, salvo constante reproduce el núcleo modificado de Gauss-Weierstrass, es decir:

$$W(x,t^2) = W'(x,t) = (4\pi)^{-n/2}\, t^{-n} \exp(-\pi\frac{|x|^2}{4t^2})$$

f) Se indica con $\phi_t(x,t)$ la derivada parcial de $\phi(x,t)$ respecto de la variable t

$\phi_t(x,t) = \frac{1}{t}\,\phi(x,t)(-\gamma + 2\pi(Pt^{-P}x.t^{-P}x))$ pues es fácilmente verificable:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\,t^{-P}x^{\;2}) = -\frac{2}{t}\,(Pt^{-P}x.t^{-P}x) \text{ y } \frac{\partial}{\partial t}(t^{-P}) = -Pt^{-P-I} = \frac{1}{t}\,Pt^{-P}$$

g) $\hat{\phi}(x,t) = \phi(t^{P^{\#}} x)$

h) $\tilde{\phi}_t(x,t) = -\frac{2\pi}{t}(P^{\#} t^{P^{\#}} x . t^{P^{\#}} x)\ \hat{\phi}(x,t)$

6. Sean algunos resultados conocidos

a) El operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo (p,p) para $1 < p \leq \infty$ y de tipo débil (1,1)

No es difícil ver que valen las mismas propiedades para el operador maximal definido por:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\rho(y)\leq r} |f(x-y)|\,dy$$

ó

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\rho(y')\leq 1} r^{\gamma} |f(x-r^{P}y')|\,dy'$$

b) Sea $f(x)$ en $L_p(E_n)$ $(1 < p < \infty)$ y $F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$ Entonces existe una constante C independiente de $f(x)$ tal que:

i) $\sup_{t>0} |F(x,t)| \leq C\ Mf(x)$

ii) $\sup_{t>0} t|F_t(x,t)| \leq C\ Mf(x)$

c) Sea $\Phi(x)$ una función definida en E_n tal que:

i) $$\int_{E_n} \Phi(x)\,dx = t^{-\gamma} \int_{E_n} \Phi(t^{-P}y)\,dy = \int_{E_n} t^{-\gamma}\Phi(t^{-P}y)\,dy =$$

$$= \int_{E_n} \Phi(y,t)\,dy = 1$$

ii) $$\left|\int_{E_n} \Phi(x)\,dx\right| \leq \int_{E_n} |\Phi(x)|\,dx < \infty$$

iii) Sea $H(x)$ mayorante radial no creciente con integral finita tal que:

$|\varphi(x)| \leq H(\rho(x))$ con $H(\rho(x)) = \sup|\varphi(x)|$ donde el supremo está tomado sobre: $\rho(x) \leq \rho(y)$

$$\int_{E_n} H(\rho(x))dx = \int_0^{\infty} H(t) t^{\gamma -1} dt \int_{|x'|=1} K(\varphi)(Px'.x')dx' < \infty$$

donde:

$K(\varphi) = \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1 \operatorname{sen}^{n-3}\varphi_2 \ldots \operatorname{sen}\varphi_{n-2}$

d) Sea $f(x)$ en $L_p(E_n)(1 < p < \infty)$ y $F(x,t) = f(x) * \varphi(x,t)$
Entonces:
$F(x,t)$ converge a $f(x)$ cuando t tiende a cero p.p en x y en norma $\| \ldots \|_p$.

e) Obviamente es válida la siguiente acotación en norma $\| \ldots \|_p$

i) $\|\Phi(x,t)\|_p \leq c\, t^{-\gamma/p'}$ con c independiente de p $(1 \leq p \leq \infty)$

ii) $\|\varphi(x,t)\|_{\infty} \leq c\, t^{-\gamma}$

f) Sea $f(x)$ en $L_p(E_n)(1 \leq p \leq \infty)$ y sea $F(x,t) = f(x) * \varphi(x,t)$
Entonces para cada t positivo vale:

$\| F(x,t)\|_{\infty} \leq c\, t^{-\gamma/p} \| f(x)\|_p$, es decir,

$F(x,t)$ es acotada en cada semiespacio propio de $E_{n+1,+}$
Este resultado es consecuencia inmediata de e).

g) Sea $f(t)$ una función no negativa definida en $0 < t < \infty$, $a \neq 0$ $p \geq 1$ y $F(s)$ definida por:

1) $F(s) = \int_0^s f(t)\, dt \qquad a < 0$

ii) $F(s) = \int_s^\infty f(t)\,dt \qquad a > 0$

Entonces:

$$\left(\int_0^\infty (s^a F(s))^p \frac{ds}{s}\right)^{1/p} \leq |a|^{-1}\left(\int_0^\infty (s^{a+1} f(s))^p \frac{ds}{s}\right)^{1/p}$$

Para la demostración de este resultado ver referencia (15)

7. La teoría a desarrollar, de ahora en más, se fundamenta en el siguiente resultado comunicado por el Señor Profesor Dr. Alberto Pedro Calderón.

7.1. <u>Teorema del Valor Medio</u>

· Sea $F(x,t)$ definida en $E_{n+1,+}$, solución de la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ (4)

Sea k entero positivo,

Entonces:

$$|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}}\, \partial F(x,t)|^2 \leq C\, t^{-\gamma} \int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \int_{B(x,t)} |\overset{r}{\otimes}\, Ls^{P^{\#}}\, \partial F(y,s)|^2\, dy$$

para todo entero r, tal que: $0 \leq r \leq k$

En consecuencia:

$$|\overset{k}{\otimes}\, Lt^{P^{\#}}\, \partial F(x,t)| \leq C \sup |\overset{r}{\otimes}\, Ls^{P^{\#}}\, \partial F(y,s)|$$

donde el supremo está tomado sobre $t/2 \leq s \leq t$ y $\rho(x-y) \leq t$

Para la demostración de este resultado ver Apéndice I.

7.2. Observando la demostración de este hecho, se deduce mediante la aplicación de la desigualdad de Hölder con $r \geq 1$, la validez de la siguiente relación:

$$|\overset{k}{\otimes}L_t P^{\#} \partial F(x,t)|^r \leq C\, t^{-\gamma} \int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \int_{B(x,t)} |\overset{h}{\otimes}L_s P^{\#} \partial F(y,s)|^r dy$$

para todo entero h tal que $0 \leq h \leq k$

Para la demostración de este resultado ver Apéndice I.

7.3. Para todo α real y todo entero h, $0 \leq h \leq k$ vale la siguiente desigualdad

$$\| t^{\alpha} |\overset{k}{\otimes}L_t P^{\#} \partial F(x,t)| \|_{pq} \leq C \| t^{\alpha} |\overset{h}{\otimes}L_t P^{\#} \partial F(x,t)| \|_{pq}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la desigualdad obtenida en 7.2., resulta:

$$\| \overset{k}{\otimes}L_t P^{\#} \partial F(x,t) \|_p^r \leq C\, t^{-\gamma} \int_{t/2}^{t} \int_{B(0,t)} \| \overset{h}{\otimes}L_s P^{\#} \partial F(x-y,s) \|_p^r dy \frac{ds}{s}$$

$$\leq C \int_{t/2}^{t} \| \overset{h}{\otimes}L_s P^{\#} \partial F(x,s) \|_p^r \frac{ds}{s}$$

tomando norma p/r con $p \geq r \geq 1$

A partir de esta desigu aldad, se considera:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha q} \| \overset{k}{\otimes}L_t P^{\#} \partial F(x,t) \|_p^q \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq C \int_0^{\infty} t^{\alpha q} \left(\int_{t/2}^{t} \| \overset{h}{\otimes}L_s P^{\#} \partial F(x,s) \|_p^r \frac{ds}{s} \right)^{q/r} \frac{dt}{t}$$

$$\leq C \int_0^{\infty} t^{\alpha q} \frac{dt}{t} \int_{t/2}^{t} \| \overset{h}{\otimes}L_s P^{\#} \partial F(x,s) \|_p^q \frac{ds}{s} . \left(\int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \right)^{1/(q/r)'}$$

$$\leq C \int_0^{\infty}\left(\int_s^{2s} t^{\alpha q-1}\,dt\right)\| \overset{h}{\otimes} Ls^{P^{\#}}\partial F(x,s)\|_p^q \frac{ds}{s}$$

$$\leq C \int_0^{\infty} s^{\alpha q}\| \overset{h}{\otimes} Ls^{P^{\#}}\partial F(x,s)\|_p^q \frac{ds}{s}$$

Mediante la aplicación de la desigualdad de Holder con q/r ($q \geq r \geq 1$) y cambiando el orden de integración se logró la relación propuesta. Por lo tanto queda demostrado 7.3.

7.4. Lema

Sea $F(x,t)$ solución de la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ (4)

Sean $\alpha > 0$, $1 \leq p,q \leq \infty$

Entonces:

i) $$\| t^{\alpha+1} F_t(x,t)\|_{pq} \leq C\| t^{\alpha}F(x,t)\|_{pq}$$

ii) Haciendo una hipótesis suplementaria,

$F(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, vale la recíproca de i):

$$\| t^{\alpha}F(x,t)\|_{pq} \leq C \| t^{\alpha+1} F_t(x,t)\|_{pq}$$

Demostración:

i) Por ser $F(x,t)$ solución de $AF(x,t) = 0$, resulta:

$$|tF_t(x,t)|^2 \leq |\overset{2}{\otimes} Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)|^2 \quad \text{y}$$

$$\| tF_t(x,t)\|_p \leq \| |\overset{2}{\otimes} Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)|\|_p$$

Aplicando 7.3 se obtiene la desigualdad propuesta

ii) Se supone $q = \infty$ y $\| t^{\alpha+1}F_t(x,t)\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{\alpha+1} \| F_t(x,t)\|_p$ finita, de modo que:

$$\| F_t(x,t)\|_p \le D\, t^{-(1+\alpha)}$$

y bajo la hipótesis suplementaria se escribe:

$$F(x,t) = -\int_t^\infty F_s(x,s)\, ds$$

$$\| F(x,t)\|_p \le \int_t^\infty \| F_s(x,s)\|_p\, ds \le D \int_t^\infty s^{-(1+\alpha)}\, ds = D\, t^{-\alpha}$$

quedando así demostrado.

Se supone $q \neq \infty$,

$$\| t^\alpha F(x,t\|_{pq} \le \left(\int_0^\infty t^{\alpha q} \left(\int_t^\infty \| F_s(x,s)\|_p\, ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$\le C \left(\int_0^\infty s^{(\alpha+1)q} \| F_s(x,s)\|_q^p \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$$

$$\le C \| t^{\alpha+1} F_t(x,t)\|_{pq}$$ mediante la aplica_

ción de 6.g)

Por lo tanto queda demostrado ii).

7.5. Sean $1 \le p,q \le \infty$,

$F(x,t)$ solución de la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ (4)

Entonces:

i) Si $F(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, vale:

$$\| t^\alpha | Lt^{P^\#} \partial F(x,t)|\|_{pq} \le C \| t^\alpha |\overset{2}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial F(x,t)|\|_{pq}, \quad \alpha > 0$$

ii) Vale:

$$\| t^\alpha |\overset{2}{\otimes} t^{P^\#} \partial F(x,t)|\|_{pq} \le C \| t^\alpha |\overset{4}{\otimes} t^{P^\#} \partial F(x,t)|\|_{pq}, \quad \alpha > -2$$

iii) Vale:

$$\| t^{\alpha} |\overset{k}{\otimes} t^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq} \leq C \| t^{\alpha} | \overset{k+2}{\otimes} t^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq}, \quad \alpha > -k$$

iv) Si $F_t(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, vale:

$$\| t^{1-\alpha} F_t(x,t) \|_{pq} \leq C \| t^{2-\alpha} F_{tt}(x,t) \|_{pq} \quad 0 < \alpha < 1$$

Demostración:

i) De acuerdo con 7.3. y las hipótesis sobre $F(x,t)$, se escribe:

$$\| Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) \|_p \leq C \int_{t/2}^{t} F(x,s) \|_p \frac{ds}{s} \leq$$

$$\leq C \left(\int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \left(\int_s^{\infty} \| vF_v(x,v) \|_p \frac{dv}{v} \right) \right) \leq$$

$$\leq C \left(\int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \left(\int_s^{\infty} \| |\overset{2}{\otimes} Lv^{P^{\#}} \partial F(x,v) | \|_p \frac{dv}{v} \right) \right)$$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha q} \| Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) \|_p^q \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq C \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha q} \left(\int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \left(\int_s^{\infty} \| |\overset{2}{\otimes} Lv^{P^{\#}} \partial F(x,v) | \|_p \frac{dv}{v} \right)^q \right) \frac{dt}{t} \right)$$

$$\leq C \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha q} \left(\int_{t/2}^{t} s^{-\beta q} \frac{ds}{s} \left(\int_s^{\infty} v^{\beta q} \| |\overset{2}{\otimes} Lv^{P^{\#}} \partial F(x,v) | \|_p^q \frac{dv}{v} \right) \right) \frac{dt}{t} \right)$$

$$\leq C \left(\int_0^\infty t^{\alpha q}\left(\int_{t/2}^{t} s^{-\beta q}\,\frac{ds}{s}\left(\int_{t/2}^{\infty} v^{\beta q}\| \, |\overset{2}{\otimes}\, Lv^{P^\#}\partial F(x,v)\|_p^q\,\frac{dv}{v}\right)\frac{dt}{t}\right)\right)$$

$$\leq C \left(\int_0^\infty t^{\alpha q-\beta q}\left(\int_{t/2}^{\infty} v^{\beta q}\| \, |\overset{2}{\otimes}\, Lv^{P^\#}\partial F(x,v)\|_p^q\,\frac{dv}{v}\right)\frac{dt}{t}\right)$$

$$\leq C \left(\int_0^\infty v^{\beta q}\| \, |\overset{2}{\otimes}\, Lv^{P^\#}\partial F(x,v)\|_p^q\,\frac{dv}{v}\left(\int^{2v} t^{\,q(\alpha-\beta)-1}\,dt\right)\right)$$

$$\leq C \left(\int_0^\infty v^{\alpha q}\| \, |\overset{2}{\otimes}\, Lv^{P^\#}\partial F(x,v)\|_p^q\,\frac{dv}{v}\right)$$

invirtiendo el orden de integración consecutivamente. Por lo tanto queda concluída la demostración de i).

ii) Para esta demostración se tendrán en cuenta:

a) $|\overset{k}{\otimes}\, Lt^{P^\#}\partial F(x,t)|^2 \leq \|\overset{k}{\otimes}\, L\|^2 \,.\, |\overset{k}{\otimes}\, t^{P^\#}\partial F(x,t)|^2$

b) $|\overset{k}{\otimes}\, t^{P^\#}\partial F(x,t)|^2 =$

$$= \sum_{i_1\dots i_k}\Big(\sum_{j_1\dots j_k} a_{i_1 j_1}\dots a_{i_k j_k}\,\partial_{j_1\dots j_k}F(x,t)\Big)^2$$

c) Sean $A_n = (a^h_{ij})$ $(1 \leq h \leq k)$.

Si $A = A_1 \otimes \dots \otimes A_k$ entonces: $\|A\| \leq \prod_{1\leq h\leq k} \|A_h\|$

Para la demostración de esta propiedad ver Apéndice I.

Sea la demostración de ii)

Según b) es $|\overset{2}{\otimes}\, t^{P^{\#}}\, \partial F(x,t)|^2 = \sum_{i,h}(\sum_{j,k} a_{ij}\, a_{hk}\, \partial_{jk}F(x,t))^2$

Sea $u_{jk}(x,t) = \partial_{jk}F(x,t) = -\int_t^\infty \frac{\partial}{\partial s} u_{jk}(x,s)\, ds$

$$= -\int_t^\infty (Ls^{P^{\#}}\partial\, .Ls^{P^{\#}}\partial)u_{jk}\ (x,s)\frac{ds}{s}$$

$$= -\int_t^\infty \sum_{n,n'} \sum_{m,1} a_{nm}\, a_{n'1}\, \partial_{m1jk}\, u(x,s)\, \frac{ds}{s}$$

Entonces:

$$|\overset{2}{\otimes}\, Lt^{P^{\#}}\, \partial F(x,t)| \leq \|\overset{2}{\otimes}\, L\,\| . |\overset{2}{\otimes}\, t^{P^{\#}}\, \partial F(x,t)| =$$

$$\leq C\int_t^\infty |\sum_{i,j,h,k} a_{ij}(t)a_{hk}(t)(\sum_{n,n'}(\sum_{m,1} a_{nm}a_{n'1}\,\partial_{m1jk}u(x,s)))|\frac{ds}{s}$$

Al tomar la norma p de esta expresión, a_{nm} y $a_{n'1}$ no dependen de la matriz L en virtud de a). Por lo tanto,

$$\int_0^\infty t^{\alpha q}(\int_t^\infty \| A(t) \otimes A(t) \otimes A(s) \otimes A(s)\,\partial_{m1jk}u(x,s)\|_p \frac{ds}{s}^q)\, \frac{dt}{t}$$

por Minkowsky integral, y

[1] $$\int_0^\infty t^{\alpha q-\beta q}(\int_t^\infty s^{\beta q}\| A(t) \otimes A(t) \otimes A(s) \otimes A(s)\partial_{m1jk}u(x,s)\|_p^q \frac{ds}{s}\, \frac{dt}{t}$$

por la desigualdad de Hölder, donde $t^{-\beta q} = (\int_t^\infty s^{-\beta q'-1}ds)^{q/q'}$

β no nulo pero suficientemente pequeño.

Invirtiendo el orden de integración en [1] resulta:

$$[1] = \int_0^\infty s^{\beta q}\left(\int_0^s t^{(\alpha-\beta)q} \| A(t) \otimes A(t) \otimes A(s) \otimes A(s)\, \partial_{m1jk} u(x,s)\|_p^q \frac{dt}{t}\right)\frac{ds}{s}$$

$$= \left(\int_0^\infty s^{\alpha q} \| A(s) \otimes A(s) \otimes A(s) \otimes A(s) \partial_{m1jk} u(x,s)\|_p^q \frac{ds}{s}\right)$$

$$\cdot \int_0^1 w^{(\alpha-\beta)q} \| A(w) \otimes A(w) \otimes I \otimes I\|^q \frac{dw}{w} = (A).(B)$$

Luego [1] = (A).(B) La integral en w es finita pues:

$A(w) = w^{P^{\#}}$ y $\| w^{P}\| \leq w$ si $0 < w \leq 1$

$\leq w^{\| P\|}$ si $w > 1$

El factor (B) contribuye con constante si $(\alpha-\beta) + 2 > 0$ ó sea $\alpha > -2$. Además, en [1] se considera: $t = ws$ con $dt = s dw$, $\frac{dt}{t} = \frac{dw}{w}$, y:

$$A(t) \otimes A(t) \otimes A(s) \otimes A(s) = A(sw) \otimes A(sw) \otimes A(s) \otimes A(s) =$$

$$= ((A(w) \otimes A(w) \otimes I \otimes I).(A(s) \otimes A(s) \otimes A(s) \otimes A(s))$$

Con esto queda concluída la demostración de ii).

iii) Para demostrar la desigualdad propuesta, el procedimiento es análogo al seguido en ii). Basta considerar la expresión:

$$\overset{k}{\otimes}\, t^{p^{\#}} \; \partial F(x,t) =$$

$$= \sum_{i_1 \ldots i_k} \Big(\sum_{j_1 \ldots j_k} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_k j_k} \; \partial_{j_1 \ldots j_k} F(x,t)\Big) \; e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$$

y un factor (B) análogo al de ii) que contribuye con constante si $(\alpha-\beta) + k > 0$ ó sea si $\alpha > -k$

iv) La demostración es consecuencia inmediata del Lema 7.4. ii) cambiando $F(x,t)$ por $F_t(x,t)$

Capítulo II

Espacios de Lipschitz, $\alpha > 0$

1. Definición

La clase Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n) = \Lambda(\alpha,p,q)$, $1 \leq p,q \leq \infty$, $\alpha > 0$ es el conjunto de funciones $f(x)$ de $L_p(E_n)$ para las cuales la norma:

$$\| f(x)\|_{\alpha,p,q} = \| f(x)\|_p + \| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{p^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq}$$

es finita, donde k es el mínimo entero mayor α y $F(x,t) = f(x) * \varphi(x,t)$

Para la definición de norma $\| \ldots \|_{pq}$ ver Notación y Convenciones.

2. Teorema

Sea $f(x)$ en $L_p(E_n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ y $F(x,t) = f(x) * \varphi(x,t)$
Entonces para cada par de enteros k,1 mayores que $\alpha > 0$ las siguientes normas mixtas son equivalentes:

$$\| f(x)\|_p + \| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{p^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq} \quad \text{y}$$

$$\| f(x)\|_p + \| t^{-\alpha} | \overset{1}{\otimes} Lt^{p^{\#}} \mathcal{F}(x,t) | \|_{pq}$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata de 7.3 y 7.5. iii) (I).

3. Teorema

Sean $\alpha > 0$, $1 < p,q \leq \infty$, $f(x)$ en $L_p(E_n)$ y $F(x,t) = f(x) * \varphi(x,t)$

Se definen las siguientes normas mixtas

a) $A = \left(\int_{E_n} \rho(h)^{-\alpha q} \| f(x+h) - f(x)\|_p^q \, \rho(h)^{-\gamma} dh\right)^{1/q}$

b) $C = \| t^{-\alpha} \varsigma_t(x)\|_{pq}$ donde $\varsigma_t(x) = w_n^{-1} \int_{|h'|=1} \|(f(x+t^P h') - f(x))\| dh'$

c) $D = \| t^{1-\alpha} I_t(x,t)\|_{pq}$

d) $F = \left(\int_0^\infty t^{-\alpha q} w_1(p,t)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$ si $1 \leq q < \infty$

$F = \sup_{t>0} t^{-\alpha} w_1(p,t)$ si $q = \infty$

donde $w_1(p,t) = \sup \| f(x+h) - f(x)\|_p$ tomando el supremo sobre $0 < \rho(h) \leq t$

Entonces:

$A \geq C \geq D \geq F \geq A$ salvo factores positivos, si $0 < \alpha < 1$

Demostración:

Una observación previa: la norma mixta A tiene una expresión equivalente, a saber:
Sea $h = t^P h'$ tal que $|h'| = 1$ con $dh = t^{\gamma - 1}(Ph'.h')dtdh'$
y $\rho(h) = t\rho(h') = t$
Entonces:

$$\int_{E_n} \|(f(x+h)-f(x))\| dh = \int_0^\infty \int_{|h'|=1} t^{\gamma} \|(f(x+t^P h') - f(x))\| (Ph'.h') \frac{dt}{t} dh'$$

y así es:

$$A = \left(\int_0^\infty \int_{|h'|=1} t^{-\alpha q} \| f(x+t^P h') - f(x)\|_p^q (Ph'.h') dh' \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \quad \text{si } q \neq \infty$$

i) Ver $C \leq A$

De acuerdo con b) se escribe:

$$\| \phi_t(x)\|_p^q \leq w_n^{-q} \left(\int_{|h'|=1} \| f(x+t^P h') - f(x)\|_p^q |h'|^2 dh'\right)^{1/q} . w_n^{q/q}$$

Entonces:

$$\| t^{-\alpha} \phi_t(x)\|_{pq} = \left(\int^\infty t^{-\alpha q} \|\phi_t(x)\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq w_n^{-1/q} \left(\int_0^\infty \int_{|h'|=1} \| f(x+t^P h') - f(x)\|_p^q (Ph'.h') dh' \, t^{-1-\alpha q} dt\right)^{1/q}$$

$$\leq w_n^{-1/q} \left(\int_{E_n} \rho(h)^{-\alpha q} \| f(x+h) - f(x)\|_p^q \rho(h)^{-\gamma} dh\right)^{1/q}$$

$$\leq w_n^{-1/q} . A < A \quad \text{si} \quad 1 \leq q < \infty$$

Por lo tanto queda demostrado i) pues el caso $q = \infty$ es obvio.

ii) Ver $C \geq D$

Sea $F_t(x,t) = f(x) * \phi_t(x,t) = \int_{E_n} \phi_t(z,t) f(x-z)dz =$

$$= \int_{E_n} (f(x-z)(t^{-\gamma-1} e^{-\pi|t^{-P}z|^2}(-\gamma+2\pi(Pt^{-P}z.t^{-P}z))dz$$

$$= \int_0^\infty \int_{|z'|=1} (f(x-u^P z')-f(x))t^{-1}(\tfrac{u}{t})^\gamma e^{-\pi|(\frac{u}{t})^P z'|^2}.$$

$$.(-\gamma+2\pi(P(\tfrac{u}{t})^P z'.(\tfrac{u}{t})^P z'))(Pz'.z')\frac{du}{u}\,dz'$$

mediante $z = u^P z'$ tal que $|z'| = 1$ y $dz = u^{\gamma-1}(Pz'.z')du\,dz'$

Luego, $|t\,F_t(x,t)| \leq I_1 + I_2$ donde:

$$I_1 = \gamma \int_0^\infty \int_{|z'|=1} |f(x-(st)^P z')-f(x)|\, s^{\gamma-1} e^{-\pi|s^P z'|^2} ds\,dz'$$

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty \int_{|z'|=1} |f(x-(st)^P z')-f(x)|\; s^{\gamma-1} e^{-\pi|s^P z'|^2}.$$

$$.\;|(Ps^P z'.s^P z')|\;ds\,dz'$$

Sean n_1, n_2 dos números para los cuales:

$$s^{n_2} \leq |s^P z'| \leq s^{n_1} \quad \text{si} \quad 0 < s \leq 1$$

$$s^{n_1} \leq |s^P z'| \leq s^{n_2} \quad \text{si} \quad 1 \leq s < \infty \qquad 1 \leq n_1 \leq n_2$$

Luego,

$$I_1 \leq \gamma \int_0^1 \int_{|z'|=1} |f(x-(st)^P z') - f(x)|dz'\, s^{\gamma-1} e^{-\pi s^{2n_2}} ds +$$

$$+ \gamma \int_1^\infty \int_{|z'|=1} |f(x-(st)^P z') - f(x)|dz'\; s^{\gamma-1} e^{-\pi s^{2n_1}} ds$$

$$I_2 \leq 2\pi \int_0^1 \int_{|z'|=1} |f(x-(st)^P z') - f(x)| dz' s^{\gamma-1+2n_1} e^{-\pi s^{2n_2}} ds +$$

$$+ 2\pi \int_1^\infty \int_{|z'|=1} |f(x-(st)^P z') - f(x)| dz' s^{\gamma-1+2n_2} e^{-\pi s^{2n_1}} ds$$

Por lo tanto si $q = \infty$, al tomar la norma p resulta:

$$\| I_1 \|_p \leq C\gamma \int_0^\infty \| \Phi_{st}(x) \|_p \, s^{\gamma-1} e^{-\pi s^{2n_1}} ds$$

$$\| I_2 \|_p \leq 2\pi \int_0^1 \| \Phi_{st}(x) \|_p \, s^{\gamma-1+2n_1} e^{-\pi s^{2n_2}} ds +$$

$$+ 2\pi \int_1^\infty \| \Phi_{st}(x) \|_p \, s^{\gamma-1+2n_2} e^{-\pi s^{2n_1}} ds$$

Por lo tanto,

$$\| F_t(x,t) \|_p \leq C \, t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty s^{\alpha+\gamma-1} e^{-\pi s^{2n_1}} ds + \int_0^1 s^{\alpha+\gamma-1+2n_1} e^{-\pi s^{2n_2}} ds + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty s^{\alpha+\gamma-1+2n_2} e^{-\pi s^{2n_1}} ds \right)$$

Por lo tanto queda demostrado que $C \geq D$ si $q = \infty$.
Sea ahora, $1 \leq q < \infty$,
De acuerdo con lo visto, vale:

$$\| tF_t(x,t) \|_p \leq C \int \| \Phi_{st}(x) \|_p \, s^{\gamma-1} e^{-\pi s^{2n_1}} ds +$$

$$+ 2\pi \int \| \Phi_{st}(x) \|_p \, s^{\gamma-1+2n_1} e^{-\pi s^{2n_2}} ds +$$

$$+ 2\pi \int^\infty \| \Phi_{st}(x) \|_p \, s^{\gamma-1+2n_2} e^{-\pi s^{2n_1}} ds = I_3 + I_4 + I_5$$

Luego,

$$\|t^{1-\alpha}\Psi_t(x,t)\|_{pq} \leq C\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{-\alpha}\|\Phi_{st}(x)\|_p s^{\gamma-1}\, e^{-\pi s^{2n_1}}\, ds\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} +$$

$$+\ 2\pi\left(\int_0^\infty\left(\int_0^1 t^{-\alpha}\|\Phi_{st}(x)\|_p\, s^{\gamma-1+2n_1}\, e^{-\pi s^{2n_2}}\, ds\ +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_1^\infty t^{-\alpha}\|\Phi_{st}(x)\|_p\, s^{\gamma-1+2n_2}\, e^{-\pi s^{2n_1}} ds\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

El procedimiento a seguir es el mismo en las integrales, sea entonces la primera, ó sea I_3:

$$I_3 = C\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty(\|\Phi_{st}(x)\|_p\,(ts)^{-\alpha})s^{\alpha+\gamma-1}\, e^{-\pi s^{2n_1}}\, ds\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= C\left(\int_0^\infty r^{-\alpha q}\,\|\Phi_r(x)\|_p^q\,\frac{dr}{r}.\int_0^\infty s^{\alpha+\gamma-1}\, e^{-\pi s^{2n_1}}\, ds\right)^{1/q} =$$

$$= C\,\|\Phi_r(x)r^{-\alpha}\|_{pq} \quad \text{con } r = st,\ \frac{dt}{t} = \frac{dr}{r}.$$

Por lo tanto queda demostrado ii).

i) Ver $I \geq F$

Vale p.p. en x y en h lo siguiente:

$$f(x+h) - f(x) = F(x+h,0) - F(x,0) =$$

$$= (F(x+h,0) - F(x+h,t)) + (F(x+h,t) - F(x,t)) +$$

$$+ (F(x,t) - F(x,0)) = (1) + (2) + (3)$$

En los términos (1) y (3) se procede exactamente igual, sea por ejemplo el término (1):

Vale:

$$\|F(x+h,t) - F(x+h,0)\|_p \leq \int_0^t \|F_s(x+h,s)\|_p ds = \int_0^t \|F_s(x,s)\|_p ds$$

por lo tanto,

$$\sup_{0<\rho(h)\leq t} \|F(x+h,t) - F(x+h,0)\|_p \leq \int_0^t \|F_s(x,s)\|_p ds$$

Así,

$$\left(\int_0^\infty t^{-\alpha q}\left(\sup_{0<\rho(h)\leq t} \|F(x+h,t) - F(x+h,0)\|_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} =$$

$$\leq \left(\int_0^\infty t^{-\alpha q}\left(\int_0^t \|F_s(x,s)\|_p ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_0^\infty t^{-\alpha q+q-1}\int_0^t \|F_s(x+h,s)\|_p^q\, ds\, \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$ por Holder, y

$$\leq \left(\int_0^\infty s^{(1-\alpha)q}\|F_s(x,s)\|_p^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$$ cambiando el orden de integración con $0 < s < \infty$, $s < t < \infty$

Podría haberse concluído lo mismo mediante la aplicación de 6.g)(I').

Sea el término (2):

$$F(x+h,t) - F(x,t) = \int_0^1 \frac{d}{du} F(x+u^P h,t)du$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F(x+u^P h,t).(e_i, P\frac{u^P}{u} h)du$$

$$= \int_0^1 ((\partial F(x+u^P h,t).(P\frac{u^P}{u} h))du$$

$$= \int_0^1 ((t^{-P} L^{-1} L t^P \partial F(x+u^P h,t).(P\frac{u^P}{u} h))du$$

Entonces:

$$\|F(x+h,t)-F(x+h,t)\|_p \leq (\int \|Lt^{P^{\#}}\partial F(x+u^P h,t)\|_p du).\sup_{0\leq u\leq 1}|L^{-1}t^{-P}P\underline{u}^P h|$$

$$\leq (\int \|Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)du).\sup_{0\leq u\leq 1}|L^{-1}t^{-P}P\underline{u}^P h|$$

$$\leq \|Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)\|_p.\sup_{0\leq u\leq 1}|L^{-1}t^{-P}P\underline{u}^P h|$$

$$\leq \|Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)\|_p \quad \text{puesto que:}$$

$$|L^{-1}t^{-P}P\underline{u}^P h| = |L^{-1}P\underline{u}^P t^{-P}h| \leq C|\underline{u}^P t^{-P}h| \leq C|t^{-P}h| \leq C$$

en virtud de 1.a) (I) y por ser $|t^{-P}h| \leq 1$ cuando $\rho(h) \leq t$

Por lo tanto,

$$\sup_{0<\rho(h)\leq t}\|F(x+h,t)-F(x,t)\|_p \leq \|Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)\|_p$$

y

$$(\int_0^\infty t^{-\alpha q}(\sup_{0<\rho(h)\leq t}\|F(x+h,t)-F(x,t)\|_p)^q \frac{dt}{t})^{1/q}$$

$$\leq C\ (\int_0^\infty t^{-\alpha q}\|Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)\|_p^q \frac{dt}{t})^{1/q}$$

$$\leq C\|t^{-\alpha}|Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)|\|_{pq} \leq C\|t^{1-\alpha}F_t(x,t)\|_{pq} \qquad (*)$$

La desigualdad (*) se justificará luego.

Por lo tanto, queda demostrado iii) si $1 \leq q < \infty$. El caso $q = \infty$ es inmediato.

iv) ∇ er $F \geq A$

Obviamente vale la desigualdad, basta tener en cuenta las definiciones de ambas normas mixtas.

Con esto queda completa la demostración del Teorema 3.

La relación existente entre las normas mixtas $\| \ldots \|_{pq}$ definidas en el Teorema 3. y la norma mixta $\| \ldots \|_{pq}$ que caracteriza las clases Lipschitz, según su definición (1), es la siguiente:

i) La norma $D = \| t^{1-\alpha} F_t(x,t) \|_{pq}$ si $1 \leq q < \infty$

está mayorada por:

$$\| t^{-\alpha} | \overset{2}{\otimes} Lt^{F} \partial F(x,t) | \|_{pq} \qquad \text{si} \qquad 1 \leq q < \infty$$

claramente, pues $F(X,t)$ es solución de la ecuación diferencial $\Delta F(x,t) = 0(4)$.

Por lo tanto, se obtiene la desigualdad deseada, es decir:

$$\| t^{1-\alpha} F_t(x,t) \|_{pq} \leq C \| t^{-\alpha} | \overset{2}{\otimes} Lt^{F} \partial F(x,t) | \|_{pq} \quad \text{si} \quad 1 \leq q < \infty$$

$$\alpha < 2$$

ii) Resta probar que:

$$\| t^{-\alpha} | \overset{2}{\otimes} Lt^{F} \partial F(x,t) | \|_{pq} \leq C \| t^{-\alpha} (t F_t(x,t)) \|_{pq} \quad \text{si} \quad 1 \leq q < \infty$$

y en particular que:

$\| t^{-\alpha} | Lt^{F} \partial F(x,t) | \|_{pq} \leq C \| t^{-\alpha} (t F_t(x,t)) \|_{pq}$ puesto que con ésta queda justificada la desigualdad (*) del Teorema 3., parte iii).

Sean:

$$F(x,t) = f(x) * \phi(x,t) \quad \text{y} \quad F_t(x,t) = f(x) * \phi_t(x,t)$$

$$\hat{F}(x,t) = \hat{f}(x) \, . \, \hat{\phi}(x,t) \quad \text{y} \quad \hat{F}_t(x,t) = \hat{f}(x) \, . \, \hat{\phi}_t(x,t)$$

donde:

$$\hat{F}(x,t) = \hat{f}(x)\ .\ e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2}$$

y

$$\frac{t}{2}\hat{F}_t(x,t) = -\pi(Pt^{P^{\#}}x.t^{P^{\#}}x)e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2}\ .\ \hat{f}(x)$$

Para lograr la desigualdad propuesta entre normas mixtas $\|\ldots\|_{pq}$ es necesario ver que:

$(\otimes^2 Lt^{P^{\#}}\partial)F(x,t) = \phi(x,t) * {}^{t}F_t(x,\frac{t}{2})$ donde $\phi(x,t)$ debe ser un multiplicador en $L_p(E_n)$ $(1 < p < \infty)$ con norma invariante bajo transformaciones $x \to t^{P^{\#}}x$, con transformada de Fourier dada por:

$$\phi(x,t) = \frac{(\otimes^2 Lt^{P^{\#}}x)}{(P^{\#}(t/2)^{P^{\#}}x.(t/2)^{P^{\#}}x)}\ e^{-\pi(|t^{P^{\#}}x|^2 - |(t/2)^{P^{\#}}x|^2)} \qquad (*)$$

Es decir, en términos de transformadas de Fourier, es:

$$(\otimes^2 Lt^{P^{\#}}x)\hat{F}(x,t) = \frac{(\otimes^2 Lt^{P^{\#}}x)}{(P^{\#}(t/2)^{P^{\#}}x.(t/2)^{P^{\#}}x)}e^{-\pi(|t^{P^{\#}}x|^2 - |(t/2)^{P^{\#}}x|^2}$$

$$.\ t/2\hat{F}_t(x,t/2)$$

En la expresión de (*) el primer factor es positivamente homogéneo de grado cero en x, pues es cociente de polinomios homogéneo de grado dos en x, e indefinidamente derivable en el complemento del origen, luego es un multiplicador en $L_p(E_n)$. El segundo factor es exp(- forma cuadrática definida positiva) con antitransformada de Fourier integrable. Así, la expresión (*) es un multiplicador en $L_p(E_n)$.

Si σ indica la transformación $x \to t^{P^{\#}} x$ y $\tilde{\sigma}$ indica la transformación inducida en el espacio funcional, dada por $\tilde{\sigma}(f)(x) = f(t^{P^{\#}} x)$, y si $\tilde{\sigma}^{-1} T_m \tilde{\sigma} = T_{m'}$, es sabido que si m es un multiplicador en $L_p(E_n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ también lo es m' teniendo la misma norma que m, pues $\tilde{\sigma} t^{\gamma/p}$ de una isometría en $L_p(E_n)$. Aquí, T_m la transformación lineal con dominio en $L_2(E_n) \cap L_p(E_n)$ definida por la siguiente relación entre transformadas de Fourier: $(T_m f)^{\wedge}(x) = m(x).\hat{f}(x)$. Con esto se justifica la invariancia de la norma del multiplicador $\phi(x,t)$ definido antes. Así, es:

$$(\overset{2}{\circledast}\, Lt^{P^{\#}} \partial)F(x,t) = \phi(x,t) * t/2F_t(x,t/2)$$

y

$$\| |\overset{2}{\circledast}\, Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_p \leq C \| t/2F_t(x,t/2) \|_p$$

$$\| t^{-\alpha} |\overset{2}{\circledast}\, Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq} \leq C.2^{-\alpha} \| z^{-\alpha} |zF_t(x,z)| \|_{pq}, \quad z = t/2$$

Con esto queda probada la desigualdad propuesta y concluída la demostración de 3.1.

Capítulo III

Potenciales de Bessel

1. Lema útil

Sea $F(x,t)$ definida en $E_{n+1,+}$, indefinidamente diferenciable, tal que:

i) $F(x,t)$ es solución de la ecuación diferencial $AF(x,t)=0$ (4)(I)

ii) $F(x,t)$ acotada en cada semiespacio propio de $E_{n+1,+}$

iii) $\| F(x,t)\|_p \leq K$ si $t \geq t_0$

iv) $\| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq} \leq K$

donde:

$\alpha > 0$, k entero mayor que α, $t_0 > 0$, K constante positiva

Entonces:

$$F(x,t) = f(x) * \phi(x,t) \text{ con } f(x) \text{ en } \Lambda(\alpha,p,q,E_n)(1 \leq p,q \leq \infty$$

Demostración:

Bajo las hipótesis enunciadas sobre $F(x,t)$ es fácilmente verificable que $F_t(x,t)$ existe según $L_p(E_n)$

De acuerdo con 7.5.ii)(I) vale:

$$\| t^{1-\alpha} F_t(x,t)\|_{pq} \leq \| t^{-\alpha} |\overset{2}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq}$$

$$\leq \| t^{-\alpha} |\overset{4}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < 2-\beta$$

e iterando el proceso se obtiene:

$$\| t^{1-\alpha} F_t(x,t)\|_{pq} \leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq} \quad \text{si} \quad \alpha < k-\beta$$

por lo tanto:

$$\| t^{1-\alpha} F_t(x,t) \|_{pq} \leq \| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq} \leq K \quad \text{si} \quad \alpha < k, 2 < k$$

Sea,

$$\| F(x,t) - F(x,s) \|_p \leq \int_t^s v^{1-\alpha} v^{\alpha} \| F_v(x,v) \|_p \frac{dv}{v}$$

$$\leq \left(\int_t^s v^{(1-\alpha)} \| F_v(x,v) \|_p^q \frac{dv}{v} \right)^{1/p} .$$

$$. \left(\int_t^s v^{\alpha q' - 1} \, dv \right)^{1/q'}$$

$$\| F(x,t) - F(x,s) \|_p \leq K((s^{\alpha q'} - t^{\alpha q'})/\alpha q')^{1/q'}$$

El segundo factor tiende a cero cuando $t \leq s$ tienden a cero, así $\| F(x,t) - F(x,s) \|_p \to 0$ si $t \leq s$ tienden a cero, luego hay convergencia en $L_p(E_n)$

Por otra parte,

$$\| F(x,t) \|_p \leq \| F(x,t_0) \|_p + \int_t^{t_0} \| F_v(x,v) \|_p \, dv$$

$$\leq K + K \int_t^{t_0} v^{\alpha-1} \, dv \leq K \text{ si } t \leq t_0$$

Así se afirma que existe $f(x)$ en $L_p(E_n)$.

Para completar la demostración del Lema, resta ver que efectivamente es $F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$

Sean:

$k(x)$ en $S(E_n)$ tal que sop $\hat{k}(x)$ es compacto y

$v(x,t) = F(x,t) * k(x)$

Es necesario ver que $v(x,t)$ así definida satisface la ecuación diferencial $Av(x,t) = 0(4)(I)$.

Sea $v_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_n} F(y,t)k(x-y)dy$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (v(x,t+h) - v(x,t)) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{E_n} \frac{1}{h}(F(y,t+h) - F(y,t))k(x-y)dy$$

Sea $\left|\int_{E_n} \frac{1}{h} (F(y,t+h) - F(y,t))k(x-y)dy\right|$

$$\leq \int_{E_n} |F_t(y,t+\theta_y h)| |k(x-y))| dy \leq C \quad |h| \leq \frac{t}{2}$$

pues por hipótesis ii) y el teorema del valor medio es F_t uniformemente acotada en cada semiespacio propio de $E_{n+1,+}$

Por lo tanto, en virtud del teorema de convergencia mayorada de Lebesgue queda justificado el paso al límite bajo el signo de integral y así $v(x,t)$ satisface la ecuación diferencial $Av(x,t) = 0$.

Por otra parte,

$$\| v(x,t)\|_p \leq \| F(x,t)\|_p \| k(x)\|_1 \leq K\| k(x)\|_1 \leq C'$$

Sea

$$v(x,t) = F(x,t) * k(x) \underset{t\to 0}{\rightarrow} f(x) * k(x) \quad \text{p.p. en } x$$

$$\hat{v}(x,t) = \hat{F}(x,t)\ .\ \hat{k}(x) \underset{t\to 0}{\to} \hat{f}(x)\ .\ \hat{k}(x)$$

Sea ver que:

$$(\hat{v}(x,t)e^{\pi|t^{P^{\#}}x|^2}) \text{ no depende de } t$$

Como $v(x,t)$ satisface la ecuación diferencial $Av(x,t) = 0$ (4)(I) se escribe:

$$(v_t)^{\wedge}(x,t) = -\frac{2\pi}{t}(P^{\#}t^{P^{\#}}x.t^{P^{\#}}x)\hat{v}(x,t)$$

$$(v_t)^{\wedge}(x,t)e^{\pi|t^{P^{\#}}x|^2} + \frac{2\pi}{t}(P^{\#}t^{P^{\#}}x.t^{P^{\#}}x)\hat{v}(x,t)e^{\pi|t^{P^{\#}}x|^2} = 0$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v}(x,t)e^{\pi|t^{P^{\#}}x|^2}) = 0, \text{ por lo tanto no depende de } t$$

Dado que $\hat{v}(x,t)$ es derivable respecto de t sólo en sentido débil, es necesario justificar derivaciones. Para esto ver Apéndice I.

Luego, se escribe:

$$\hat{v}(x,t)e^{\pi|t^{P^{\#}}x|^2} = \hat{F}(x,t).\hat{k}(x)e^{\pi|t^{P^{\#}}x|^2}$$

$$= \hat{f}(x).\hat{k}(x)$$

y para cada compacto,

$$\hat{F}(x,t).\hat{k}(x) = e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2}.\hat{f}(x).\hat{k}(x)$$

y así:

$$\hat{F}(x,t) = e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2}.\hat{f}(x)$$

Por lo tanto, es $F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$

2. Potenciales de Bessel

El propósito es definir el potencial de Bessel de orden $\delta > 0$ de funciones $f(x)$ en $L_p(E_n)(1 \leq p < \infty)$
Sea $\rho(x)$ definida según 2(I) tal que:

i) $\rho(x) \in C_0^\infty(E_n - (0))$, $\rho(0) = 0$, $\rho(t^P x) = t\,\rho(x)$

ii) $\rho(x)^{s_1} \leq |x| \leq \rho(x)^{s_2}$ si $|x| \geq \rho(x)$

$\rho(x)^{s_2} \leq |x| \leq \rho(x)^{s_1}$ si $|x| \leq \rho(x)$, $1 \leq s_1 \leq s_2$

iii) $1 \leq s_1 \leq s_2$, σ un multi-índice

$|(\frac{\partial}{\partial x})^\sigma \rho(x)| \leq C_\sigma\ \rho(x)^{1-|\sigma|s_1}$ si $\rho(x) \geq 1$ sii $|x| \geq 1$

$|(\frac{\partial}{\partial x})^\sigma \rho(x)| \leq C_\sigma\ \rho(x)^{1-|\sigma|s_2}$ si $\rho(x) \leq 1$ sii $|x| \leq 1$

iv) Sea $k_\delta(x) = \rho^{\#}(x)^{-\delta}$, $\delta = \gamma\beta$, $0 < \beta < 1$

$\hat{k}_\delta(t^P x) = t^{-\gamma(1-\beta)}\hat{k}_\delta(x)$

$\hat{k}_\delta(x) = \rho(x)^{-\gamma(1-\beta)}\hat{k}_\delta(x')$

donde:

$x = t^{-P}x' : |x'| = 1,\ 1/t = \rho(x)$

v) $\hat{k}_\delta(x) = (\rho^{\#-\delta})^\wedge\ (x)$ es una función $g(x)$ tal que:

a) $g(x)$ es continua en $|x| > 0$

b) $g(t^P x) = t^{-\gamma(1-\beta)}\ g(x)$ $\quad 0 < \delta < \gamma;\ \delta = \gamma\beta;$

$0 < \beta < 1$

Demostración:

Sean $h_1(x)$ y $h_2(x)$ funciones positivas tales que:

$h_1(x) \in C_0^\infty(E_n)$, $h_1(x) = 1$ en un entorno del origen

$h_2(x) = 1 - h_1(x)$

Entonces se escribe:

$$\rho^{\#}(x)^{-\delta} = \rho^{\#}(x)^{-\delta}\, h_1(x) + \rho^{\#}(x)^{-\delta}\, h_2(x)$$

La primera de las funciones en el miembro derecho es integrable y su transformada de Fourier es continua. La segunda no es integrable, pero,

$$|D^s(\rho^{\#}(x)^{-\delta} h_2(x))| \leq C\, \rho^{\#}(x)^{-\delta-|s|n_1}, \quad n_1 \geq 1$$

y como,

$D^s(\rho^{\#})^{-\delta}h_2$ se anula en un entorno del origen, esta función es integrable si $\delta + |s|n_1 > \delta$, es decir, $x^s((\rho^{\#})^{-\delta}h_2)^\wedge$ es continua y acotada si $\delta + |s|n_1 > \gamma$. Por lo tanto,

$((\rho^{\#})^{-\delta}h_2)^\wedge$ es continua en $|x| > 0$. Esto demuestra que $((\rho^{\#})^{-\delta})^\wedge(x)$ coincide con una función $g(x)$ continua en $|x| > 0$. Entonces, $((\rho^{\#})^{-\delta})^\wedge - g$ es una distribución con soporte en el origen. Es fácil ver que $g(x)$ es homogénea de grado $-\gamma(1-\beta)$ con respecto a t^P, valiendo otro tanto para la distribución $((\rho^{\#})^{-\delta})^\wedge$.

Por lo tanto,

$((\rho^{\#})^{-\delta})^{\wedge}$ - g es una distribución homogénea de grado $-\gamma(1-\beta)$ con respecto de t^{P} con soporte en $x = 0$ siendo su transformada de Fourier un polinomio de grado $-\delta$ con respecto de $t^{P^{\#}}$, lo cual sólo es posible si es idénticamente nulo. Por lo tanto,

$$((\rho^{\#})^{-\delta})^{\wedge} = g$$

Con esto queda concluída la demostracion de 2.v).

2.1. Sean $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ funciones definidas por:

$$\Phi_1(x) \in C_0^{\infty}(E_n)$$

$$\Phi_2(x) = 0 \quad \text{en un entorno del origen}$$

$$= 1 \quad \text{si } |x| > N$$

Entonces se define:

$$\hat{G}_\delta(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)\, \rho^{\#}(x)^{-\delta}$$

2.2. Se pretende que $\hat{G}_\delta(x)$ así definida sea la transformada de Fourier de una función $G_\delta(x)$ en $L_1(E_n)$ $(\delta > 0)$ tal que:

i) $\int_{E_n} |G_\delta(x)|\,dx \leq C_\delta$

ii) $G_{\delta_1}(x) * G_{\delta_2}(x) = G_\delta(x)$ cuando $\delta = \delta_1 + \delta_2$

iii) $|G_\delta(x)| \leq C\, \rho(x)^{-\gamma(1-\beta)}$ para todo x

Demostración:

De acuerdo con la definición $\hat{G}_\delta(x)$ dada en 2.1, se escribe:

$$G_\delta(x) = \check{\Phi}_1(x) + (\Phi_2(\rho^{\#})^{-\delta})^{\vee}(x)$$

Puesto que $\check{\Phi}_1(x) \in S(E_n)$ y $|(\Phi_2(\rho^{\#})^{-\delta})^{\vee}(x)| \leq c_r |x|^{-r}$

si $rn_1 + \delta > \gamma$ (según dem. de 2.v)) resulta que $G_\delta(x)$ decrece rápidamente y es integrable en $|x| > 1$.

Por otra parte,

$$G_\delta(x) = \check{\phi}_1(x) + ((\phi_2 - 1)(\rho^{\#})^{-\delta})^{\vee}(x) + ((\rho^{\#})^{-\delta})^{\vee}(x)$$

$$= \quad (1) \quad + \quad (2) \quad + \quad (3)$$

Puesto que $\phi_1(x)$ y $(\phi_2(x) - 1)\rho^{\#}(x)^{-\delta}$ son integrables, resultan (1) y (2) funciones continuas acotadas, y como (3) coincide con una función continua en $|x| > 0$ y homogénea de grado $-\gamma(1-\beta)$ con respecto de t^P, resulta que:

$$|G_\delta(x)| \leq C\ \rho(x)^{-\gamma(1-\beta)} \quad \text{en } |x| \leq 1$$

Pero según se vió, $G_\delta(x)$ es rápidamente decreciente en $|x| > 1$, por lo tanto, resulta $G_\delta(x)$ en $L_1(E_n)$ y, $|G_\delta(x)| \leq C\ \rho(x)^{-\gamma(1-\beta)}$

3. Sea $f(x)$ en $L_p(E_n)$ $(1 \leq p < \infty)$

Se define el potencial de Bessel de orden $\delta > 0$ de $f(x)$ mediante la convolución $J^\delta f(x) = G_\delta(x) * f(x)$ p.p. en x con

$$\| J^\delta f(x)\|_p \leq \| f(x)\|_p$$

Esta definición se extiende en el Capítulo IV.

Sea $f(x)$ en $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ entonces:

$\| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes}\ Lt^{P^{\#}}\ \partial F(x,t)| \|_{pq}$ es finita, donde:

$\alpha > 0$, k es el menor entero mayor que α, $1 \leq p,q \leq \infty$

Entonces, decir que $J^\delta f(x)$ pertenece a $\Lambda(\alpha+\delta,p,q,E_n)$ significa:

$\| t^{-(\alpha+\delta)} | \overset{h}{\otimes}\ Lt^{P^{\#}}\ \partial J^\delta F(x,t)| \|_{pq}$ finita, donde:

$\delta > 0$, $\alpha + \delta > 0$, h el menor entero mayor que $\alpha + \delta$, $1 \leq p,q \leq \infty$

y $J^\delta F(x,t) = G_\delta(x) * F(x,t) = G_\delta(x) * f(x) * \phi(x,t)$

3.1. Teorema

J^{δ} es un isomorfismo sobre las clases Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ y $\Lambda(\alpha+\delta,p,q,E_n)$

Demostración:

Sean las siguientes consideraciones previas:

$$J^{\delta}F(x,t) = G(x,t)$$

$$\hat{G}(x,t) = (J^{\delta}f(x) * \phi(x,t))^{\wedge} = \hat{G}_{\delta}(x).\hat{f}(x).e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2} =$$

$$= (\hat{G}_{\delta}(x) \;.\; e^{-\pi|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}|^2}).(\hat{f}(x) \;.\; e^{-\pi|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}|^2}) =$$

$$= (\hat{H}_1(x,t) \;.\; \hat{H}_2(x,t))$$

donde:

$$H_1(x,t) = G_{\delta}(x) * \phi'(x,t)$$

$$H_2(x,t) = f(x) * \phi'(x,t) \text{ y } \phi'(x,t) = (\sqrt{2})^n\, t^{-\gamma} e^{-\pi|\sqrt{2}t^{-P}x|^2}$$

Las siguientes afirmaciones se demuestran a continuación del presente teorema:

i) Sea $f(x) \in \Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ entonces:

$$\text{Si } \| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq} \text{ es finita, entonces:}$$

$$\| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial H_2(x,t) | \|_{pq} \text{ también es finita}$$

ii) Vale la siguiente desigualdad:

$$\| Lt^{P^{\#}} \partial(G_{\delta}(x) * \phi'(x,t)\|_1 \leq C \min(t^{\delta},1) \quad \text{si} \quad \delta > 0$$

$$\leq C \max(t^{\delta},1) \quad \text{si} \quad \delta < 0$$

iii) Vale la siguiente desigualdad:

$$\| G_{-\delta}(x,t)\|_1 \leq C(1+t^{-\delta}) \qquad \text{si} \qquad \delta > 0$$

Sea la demostración del Teorema 3.1.

Se evalúa $\| t^{-(\alpha+\delta)} | \overset{h}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial(H_1(x,t) * H_2(x,t) | \|_{pq}$

donde:

$$\overset{h}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial(H_1(x,t) * H_2(x,t)) =$$

$$= \sum_{\substack{i_k \\ 1 \leq k \leq h}} \sum_{j_k} a_{i_k j_k} \partial_{j_k} (H_1(x,t) * H_2(x,t)) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$$

Luego,

$$\| | \overset{h}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial(H_1(x,t) * H_2(x,t)) | \|_p \leq$$

$$\leq \| | \overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial H_2(x,t) | \|_p \cdot \| Lt^{P^\#} \partial H_1(x,t) \|_1$$

$$\leq \| | \overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial H_2(x,t) | \|_p \cdot \text{mín}(t^\delta, 1) \text{ en virtud de}$$

ii)

Luego,

$$\| t^{-(\alpha+\delta)} | \overset{h}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial(H_1(x,t) * H_2(x,t)) | \|_{pq}^q \leq$$

$$\leq \int_0^1 + \int_1^\infty t^{-(\alpha+\delta)q} \| | \overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial H_2(x,t) | \|_p^q \text{mín}(t^\delta, 1)^q \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^1 t^{-\alpha q} \| \overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial H_2(x,t) | \|_p^q \frac{dt}{t} +$$

$$+ \int_1^\infty t^{-(\alpha+\delta)q} \| | \overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^\#} \partial H_2(x,t) | \|_p^q \frac{dt}{t}$$

$$= I_1 + I_2$$

pues si $0 < t < 1$ es $\min(t^{\delta},1) = t^{\delta}$

y si $1 \leq t < \infty$ es $\min(t^{\delta},1) = 1$

En cuanto a I_1 se escribe:

$$I_1 = \int_0^1 t^{-\alpha q} \| |\overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial H_2(x,t) \| |_p^q \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^{\infty} t^{-\alpha q} \left(C \int_{t/2}^{t} \| | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial H_2(x,s) \| |_p \frac{ds}{s}\right)^q \frac{dt}{t}$$

$$\leq C \| s^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Ls^{P^{\#}} \partial H_2(x,s) \| |_{pq}^q < \infty \text{ en virtud de i),}$$

mientras que para I_2 se escribe:

$$I_2 = \int_1^{\infty} t^{-(\alpha+\delta)q} \| |\overset{h-1}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial H_2(x,t) | \|_p^q \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_1^{\infty} t^{-(\alpha+\delta)q} \left(C \int_{t/2}^{t} \| F(x,s) \|_p^q \frac{ds}{s}\right) \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_1^{\infty} t^{-(\alpha+\delta)q} \, C.\ln 2. \| f(x) \|_p^q \frac{dt}{t}$$

$$= C \| f(x) \|_p^q \left(\int_1^{\infty} t^{-(\alpha+\delta)q-1} dt\right)$$ siendo esta último término finito

Por lo tanto,

$$\| t^{-(\alpha+\delta)} |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial(H_1(x,t) * H_2(x,t) | \|_{pq}$$

$$\leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial H_2(x,t) | \|_{pq}$$

Ahora bien, sea $f(x)$ en $\Lambda(\alpha+\delta,p,q,E_n)$, entonces se pretende que: $J^{-\delta}F(x,t) = K(x,t)$ sea tal que: $K(x,t) = g(x) * \phi(x,t)$ con $g(x)$ en $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ mediante la aplicación del Lema 1 del presente capítulo.

Se define $J^{-\delta}f(x) = \lim_{t\to 0} J^{-\delta}F(x,t) = \lim_{t\to 0} J^{-\delta}f(x) * \phi(x,t)$ p.p en x cuando existe.

Se escribe:

$$J^{-\delta}F(x,t) = K(x,t) = J^{-\delta}f(x) * \phi(x,t) =$$

$$G_{-\delta}(x) * f(x) * \phi(x,t) = G_{-\delta}(x,t) * f(x)$$

Si $f(x)$ está en $L_p(E_n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ entonces:

$J^{-\delta}F(x,t) = K(x,t)$ está uniformemente en $L_p(E_n)$ en cada semiespacio propio de $E_{n+1,+}$, pues:

$$\| J^{-\delta}F(x,t)\|_p \leq \| G_{-\delta}(x,t)\|_1 . \| f(x)\|_p \leq C(1+t^{-\delta})\| f(x)\|_p$$

$$\leq C\| f(x)\|_{\alpha+\delta,p,q} \quad \text{si } t \geq 1, \text{ en virtud de iii)}$$

Formalmente se define:

$$\hat{G}_{-\delta}(x,t) = \hat{G}_{-\delta}(x).e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2} \quad \text{y}$$

$$\hat{G}_{-\delta}(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)\,\rho^{\#}(x)^{\delta}$$

siendo

$$\hat{G}_{-\delta}(t^{P^{\#}}x) = t^{\delta}\,\hat{G}_{-\delta}(x) \text{ si } |x| > N, \text{ entonces:}$$

$$\hat{G}_{-\delta}(x,t) = t^{-\delta}\rho^{\#}(t^{P^{\#}}x)^{\delta}.e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2} \quad \text{si } |x| > N,\ t \geq 1$$

Sea,

$$\| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial J^{-\delta}F(x,t)| \|_p \leq C(1+t^{-\delta})\| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_p$$

en virtud de iii).

Entonces:

$$\| t^{-\alpha} \overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial J^{-\delta} F(x,t)|\|_{pq} \leq C\| t^{-\alpha} |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_{pq} +$$

$$+ \| t^{-(\alpha+\delta)} |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_{pq}$$

$$= I_1 + I_2$$

Obviamente, es $I_2 \leq C\| f(x)\|_{\alpha+\delta,p,q}$. En cuanto a I_1 se escribe:

$$I_1 = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty t^{-\alpha q} \| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 t^{-\alpha q} \| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} +$$

$$+ \int_1^\infty t^{-\alpha q-1} dt \left(C \int_{t/2}^t \| F(x,s)\|_p^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 t^{-\alpha q} \| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} +$$

$$+ \| f(x)\|_p \left(\int_1^\infty t^{-\alpha q-1} dt\right)^{1/q}$$

El segundo sumando es finito. En cuanto al primero, sea:

$$\left(\int_0^1 t^{-\alpha q} \| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_0^1 t^{-(\alpha+\delta)q+\delta q} \| |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_p^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$\leq \| t^{-(\alpha+\delta)} |\overset{h}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)\|_{pq} \leq \| f(x)\|_{\alpha+\delta,p,q}$$

Por lo tanto, se tiene:

a) $\| J^{-\delta} F(x,t) \|_p \leq \| f(x) \|_{\alpha+\delta,p,q}$

b) $\| t^{-\alpha} | \overset{h}{\circledast} Lt^{p^{\#}} \partial J^{-\delta} F(x,t) | \|_{pq} \leq \| f(x) \|_{\alpha+\delta,p,q}$

Entonces, puede aplicarse el Lema 1 del presente capítulo para afirmar que $J^{-\delta} F(x,t) = K(x,t)$ es tal que $K(x,t) = g(x) * \phi(x,t)$ con $g(x)$ en $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ y $t_0 = 1$, h el menor entero mayor que $\alpha+\delta$, $K = \| f(x) \|_{\alpha+\delta,p,q}$

Además,

$J^{-\delta} F(x,t)$ converge a $g(x)$ p.p. en x cuando $t \to 0$ y en L^p, de modo que:

$$g(x) = J^{-\delta} f(x) \quad \text{y} \quad \| J^{-\delta} f(x) \|_{\alpha,p,q} \leq \| f(x) \|_{\alpha+\delta,p,q}$$

Resta probar que:

$$J^{-\delta}(J^{\delta} f)(x,t) = J^{-\delta}(J^{\delta} F(x,t)) = F(x,t) \quad \text{y}$$

$$J^{-\delta}(J^{\delta} f)(x) = f(x) \text{ p.p. en } x$$

Esencialmente es el mismo procedimiento en ambos casos. Es necesario ver que $J^{-\delta}(J^{\delta} f)$ y f tienen la misma integral de Gauss-Weierstrass modificada (Esto vale obviamente teniendo en cuenta la definición de $\hat{G}_\delta(x)$ dada en 2.1) y chequeando las transformadas de Fourier).
Si $f(x)$ y $g(x)$ están en $L_p(E_n)$ entonces:

$$\| f(x) - g(x) \|_p = \sup_{t \to 0} \| F(x,t) - K(x,t) \|_p$$

y vale p.p. en x:

$$\lim_{t \to 0} K(x,t) = g(x) \text{ y así: } \lim_{t \to 0} J^{-\delta}(J^{\delta} f)(x,t) = f(x) \text{ p.p.}$$

en x

Por lo tanto queda concluída la demostración del Teorema 3.1.

3.2. Complemento del Teorema 3.1.

Se afirma:

i) Sea $f(x) \in \Lambda(\alpha,p,q,E_n)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p,q \leq \infty$

Si $\| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{pq}$ es finita, entonces:

$\| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial H_2(x,t) | \|_{pq}$ también es finita

ii) Vale la siguiente desigualdad:

$$\| Lt^{P^{\#}} \partial (G_\delta(x) * \phi'(x,t)) \|_1 \leq C.\min(t^\delta,1) \text{ si } \delta > 0, \ \delta < \gamma$$

$$\leq C.\max(t^\delta,1) \text{ si } \delta < 0$$

iii) Vale la siguiente desigualdad:

$$\| G_{-\delta}(x,t) \|_1 \leq C(1 + t^{-\delta}) \qquad \text{si} \quad \delta > 0$$

Demostración:

i) Sean $F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$ y $H_2(x,t) = f(x) * \phi'(x,t)$

$$\hat{F}(x,t) = \hat{f}(x).e^{-\pi|t^{P^{\#}}x|^2} \text{ y } \hat{H}_2(x,t) = \hat{f}(x).e^{-\pi|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}|^2}$$

De acuerdo con esto,

$$\hat{F}(x,t) = \hat{H}_2(x,t).e^{-\pi|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}|^2}$$

$$F(x,t) = H_2(x,t) * \phi'(x,t) \quad \text{donde} \quad \phi'(x,t) \in L_1(E_n)$$

Idéntica relación existe entre tensores de orden k, pues:

$$(\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial)^{\wedge}F(x,t) = c(\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}x)\hat{F}(x,t) =$$

$$= c(\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}x)\hat{H}_2(x,t)e^{-\pi\left|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|^2}$$

$$(\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial)F(x,t) = (\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial)(H_2(x,t) * \phi'(x,t))$$

Así, se tiene:

$$\| |\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)| \|_p \leq C\| |\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial H_2(x,t)| \|_p$$

Luego,

$$\| t^{-\alpha}|\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)| \|_{pq} \leq C\| t^{-\alpha}|\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial H_2(x,t)| \|_{pq}$$

Para probar la afirmación propuesta, es necesario lograr la desigualdad contraria entre ambas normas mixtas $\|\ldots\|_{pq}$. A tal efecto, es necesario ver que:

$$(\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}\partial)H_2(x,t) = \Phi(x,t) * (\overset{k}{\rho}\, L(t/a)^{P^{\#}}\partial)F(x,t/a)$$

donde:

$\Phi(x,t)$ debe ser un multiplicador en $L_p(E_n)$ $(1 < p < \infty)$, con norma invariante por transformaciones $x \to t^{P^{\#}}x$ (esto último con idêntica justificación a la dada en 3.1. ii) (II)), con transformada de Fourier dada por:

$$\hat{\Phi}(x,t) = \frac{\overset{k}{\rho}(Lt^{P^{\#}}x)}{(\overset{k}{\rho}L(t/a)^{P^{\#}}x, \overset{k}{\rho}L(t/a)^{P^{\#}}x)}(\overset{k}{\rho}(L(t/a)^{P^{\#}}x)) \,.\, e^{-\pi\left[\left|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|^2 - |(t/a)^{P^{\#}}x|^2\right]} \quad (*)$$

es decir, en términos de transformadas de Fourier, es:

$$(\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}x)\hat{H}_2(x,t) = (\overset{k}{\rho}\, Lt^{P^{\#}}x)e^{-\pi\left|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|^2} \,.\, \hat{f}(x) =$$

$$= \frac{\overset{k}{\alpha}(Lt^{P^{\#}}x)}{(\overset{k}{\alpha}L(t/a)^{P^{\#}}x, \overset{k}{\alpha}L(t/a)^{P^{\#}}x)} (\overset{k}{\alpha}(L(t/a)^{P^{\#}}x), \overset{k}{\alpha}L(t/a)^{P^{\#}}x) \; .$$

$$. \; e^{-\pi\left[\left|t^{P^{\#}}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|^2 - \left|(t/a)^{P^{\#}}x\right|^2\right]} \; . \; e^{-\pi\left|(t/a)^{P^{\#}}x\right|^2} \; . \; \hat{f}(x)$$

En la expresión (*) el primer factor es homogêneo de grado $-k$ en x pues es cociente de polinomios homogêneos en x de grados k y $2k$ respectivamente, mientras que cada componente del segundo factor es homogênea de grado k en x. Así, el producto es homogêneo de grado cero en x, e indefinidamente derivable en el complemento del origen, luego es un multiplicador en $L_p(E_n)$. El tercer factor es exp(- forma cuadrática positiva) si a es suficientemente grande con antitransformada de Fourier integrable. Así, la expresión (*) es un multiplicador en $L_p(E_n)$.
Luego,

$$(\overset{k}{\alpha}\, Lt^{P^{\#}}\partial)H_2(x,t) = \phi(x,t) * (\overset{k}{\alpha}\, L(t/a)^{P^{\#}}\partial)F(x,t/a)$$

y

$$\left\| \left| \overset{k}{\alpha}\, Lt^{P^{\#}}\partial H_2(x,t) \right| \right\|_p \leq C \left\| \left| \overset{k}{\alpha}\, Lt/a)^{P^{\#}}\partial F(x,t) \right| \right\|_p$$

$$\left\| t^{-\alpha} \left| \overset{k}{\alpha}\, Lt^{P^{\#}}\partial H_2(x,t) \right| \right\|_{pq} \leq C . a^{-\alpha} \left\| z^{-\alpha} \left| \overset{k}{\alpha}\, Lz^{P^{\#}}\partial F(x,z) \right| \right\|_{pq}, \quad z = t/a$$

Con esto queda probada la desigualdad propuesta y concluída la demostración de i).

ii) Vale la siguiente desigualdad:

$$\| Lt^{P^{\#}} \partial(G_{\delta}(x) * \phi(x,t))\|_{1} \leq C.\text{mín}(t^{\delta},1) \quad \text{si} \quad 0 < \delta < \gamma$$

$$\leq C.\text{máx}(t^{\delta},1) \quad \text{si} \quad \delta < 0$$

donde:

$$\phi(x,t) = t^{-\gamma}\phi(t^{-P}x) : \phi(x) = e^{-\pi|x|^{2}}$$

y

$$((Lt^{P^{\#}}\partial)(G_{\delta}(x) * \phi(x,t)))^{\wedge} = c(Lt^{P^{\#}}x)\hat{G}_{\delta}(x)\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)$$

$$= c\,\rho^{\#}(x)^{-\delta}(Lt^{P^{\#}}x)\,\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)$$

$$= ct^{\delta}\,\rho^{\#}(t^{P^{\#}}x)^{-\delta}(Lt^{P^{\#}}x)\,\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)$$

si $|x| > N$ según la definición de $\hat{G}_{\delta}(x)$ dada en 2.1. Para lograr la desigualdad propuesta se considera una función $\phi(x)$ tal que su transformada de Fourier $\hat{\phi}(x)$ satisface las siguientes condiciones:

1. $\hat{\phi}(x)$ es de clase $C_0^{\infty}(E_n)$
2. positiva y nula en un entorno del origen
3. depende de $\rho^{\#}(x)$

Cabe observar que si $\phi(x)$ satisface las condiciones enunciadas, verifica la siguiente condición:

$$C = \int_0^{\infty} \hat{\phi}^2(t^{P^{\#}}x)\frac{dt}{t} \quad \text{si } x \neq 0$$

pues:

$$\int_0^{\infty} \hat{\Phi}^2(t^{P^{\#}}x)\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \eta^2(\rho^{\#}(t^{P^{\#}}x))\frac{dt}{t} \qquad \hat{\Phi}^2(x) = \eta^2(\rho^{\#}(x))$$

$$= \int_0^{\infty} \eta^2(t\ \rho^{\#}(x))\frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^{\infty} \eta^2(s)\frac{ds}{s} \qquad s = t\ \rho^{\#}(x)$$

$= C$ que se supondrá con valor 1

Sea, entonces:

$$1 = \int_0^{\infty} \hat{\Phi}^2(s^{P^{\#}}x)\frac{ds}{s}$$

$$\hat{\phi}(x) = \int_0^{\infty} \hat{\phi}(x)\,\hat{\Phi}^2(s^{P^{\#}}x)\frac{ds}{s}$$

$$\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x) = \int_0^{\infty} \hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}^2(s^{P^{\#}}x)\frac{ds}{s}$$

$$(Lt^{P^{\#}}x)\,\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x) = \int_0^{\infty} (Lt^{P^{\#}}x)\,\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}^2(s^{P^{\#}}x)\frac{ds}{s}$$

$$\hat{\xi}(t^{P^{\#}}x) = \int_0^{\infty} \hat{\xi}(t^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}(s^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}(s^{P^{\#}}x)\frac{ds}{s}$$

$$\hat{\xi}(t^{P^{\#}}x)\hat{G}_{\delta}(x) = \int_0^{\infty} \hat{\xi}(t^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}(s^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}(s^{P^{\#}}x)\hat{G}_{\delta}(x)\frac{ds}{s}$$

$$= \int_0^{\infty} \hat{\eta}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)\frac{ds}{s} \qquad (*)$$

donde:

$$\hat{\xi}(t^{P^{\#}}x) = (Lt^{P^{\#}}x)\hat{\varphi}(t^{P^{\#}}x)$$

$$\hat{\eta}_{t,s}(x) = \hat{\xi}(t^{P^{\#}}x)\,\hat{\Phi}(s^{P^{\#}}x)$$

$$\hat{G}(x,s) = \hat{\Phi}(s^{P^{\#}}x)\hat{G}_{\delta}(x)$$

Antitransformando Fourier la expresión $(*)$ (la justificación se dará luego)se tiene; formalmente:

$$t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * G_{\delta}(x) = \int_0^{\infty} (\eta_{t,s}(x) * G(x,s))\frac{ds}{s}$$

donde:

$$G(x,s) = s^{-\gamma}\,\Phi(s^{-P}x) * G_{\delta}(x)$$

Así, es (como se verá luego)

$$\| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * G_{\delta}(x)\|_1 \leq \int_0^{\infty} \|\eta_{t,s}(x)\|_1 . \| G(x,s)\|_1 \frac{ds}{s}$$

donde:

$$\| n_{t,s}(x) \|_1 = z(\tfrac{s}{t}) \leq \begin{cases} C.(\frac{s}{t})^{k_1} & \text{si} \quad s \leq t,\ k_1 > 0 \\ C.(\frac{s}{t})^{k_2} & \text{si} \quad s \geq t,\ k_2 < 0 \end{cases}$$

y

$$\| G(x,s) \|_1 \leq C.\min(s^\delta,1) \quad \text{si} \quad \delta > 0$$

como se verá luego.

Considerando $0 < \delta < \gamma$, se tiene:

$$\| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * G_\delta(x) \|_1 \leq C \int_0^\infty \min(s^\delta,1).\min\{(s/t)^{k_1},(s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s}$$

$$\leq C \int_0^1 s^\delta.\min\{(x/t)^{k_1},(s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C \int_1^\infty \min\,(s/t)^{k_1},(s/t)^{k_2}\,\frac{ds}{s} = (1)+(2)$$

pues si $0 < s \leq 1$ es $\min(s^\delta,1) = s^\delta$

y si $1 \leq s < \infty$ es $\min(s^\delta,1) = 1$

Ahora bien,

$$(1) = \int_0^1 s^\delta.\min\{(s/t)^{k_1},(s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s}$$

$$= \int_0^{1/t} t^\delta.h^\delta.\min(h^{k_1},h^{k_2})\frac{dh}{h}$$

$$= t^\delta \left(\int_0^{1/t} h^{\delta+k_1-1}\,dh\right) = t^{-k_1} \quad \text{si } t > 1,\ -k_1 < \delta$$

$$< t^\delta$$

mientras que:

$$(1) = \int_0^t + \int_t^1 s^\delta .\min\{(s/t)^{k_1},(s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s}$$

$$= t^\delta\left(\int_0^1 h^{\delta+k_1-1}dh + \int_1^{1/t} h^{\delta+k_2-1}dh\right) = t^\delta + t^{-k_2} < 2t^\delta$$

si $t < 1$, $\delta < -k_2$

En cuanto a (2),

$$(2) = \int_1^\infty \min\{(s/t)^{k_1}, (s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s}$$

$$= \int_{1/t}^\infty \min(h^{k_1}, h^{k_2})\frac{dh}{h} = t^{k_2} \text{ si } t < 1$$

Luego, teniendo en cuenta estas acotaciones se obtiene la desigualdad deseada.

Para completar la presente demostración resta probar:

1. $\| n_{t,s}(x)\|_1 = z(s/t) \leq \begin{cases} C.(s/t)^{k_1} & \text{si } s \leq t,\ k_1 > 0 \\ C.(s/t)^{k_2} & \text{si } s \geq t, k_2 < 0 \end{cases}$

2. $\| G(x,s)\|_1 \leq C.\min(s^\delta,1)$ si $0 < \delta < \gamma$

y finalmente justificar la antitransformación de Fourier de la expresión (*) anterior.

1. En general, es:

$$\hat{\eta}_{t,s}(x) = \hat{\xi}(t^{P^\#} x)\,\hat{\psi}(s^{P^\#} x) = (\overset{k}{\otimes}\, Lt^{P^\#} x)\,\hat{\phi}(t^{P^\#} x)\,\hat{\psi}(s^{P^\#} x)$$

y puede expresarse segûn:

$$\hat{\eta}_{t/s,1}(x) = (\overset{k}{\otimes}\, L(t/s)^{P^\#} x)\,\hat{\phi}((t/s)^{P^\#} x)\,\hat{\psi}(x)$$

o bien:

$$\hat{\eta}_{u,1}(x) = (\overset{k}{\otimes}\, Lu^{P^\#} x)\,\hat{\phi}(u^{P^\#} x)\,\hat{\psi}(x) \qquad \text{si } u = t/s$$

$$= \hat{\psi}(x)\,p(u^{P^\#} x)\,\hat{\phi}(u^{P^\#} x)$$

siendo $p(u^{P^\#} x)$ un polinomio homogêneo de grado k dado por:

$$p(u^{P^\#} x) = \sum_{|\sigma|=k} a_\sigma (u^{P^\#} x)^\sigma = \sum_{|\sigma|=k} x^\sigma\, b_\sigma(u)$$

donde $b_\sigma(u)$ es un polinomio de grado k en los elementos de $u^{P^\#}$.

Asî, es:

$$\hat{\eta}_{u,1}(x) = \hat{\psi}(x)\,p(u^{P^\#} x)\,\hat{\phi}(u^{P^\#} x)$$

$$= \sum_{|\sigma|=k} x^\sigma\, \hat{\psi}(x)\,\hat{\phi}(u^{P^\#} x)\,b_\sigma(u)$$

Antitransformando Fourier y tomando norma en $L_1(E_n)$ resulta:

$$\|\eta_{u,1}(x)\|_1 \leq \sum_{|\sigma|=k} \|\frac{1}{2\pi i}(\frac{\partial}{\partial x})^{\sigma} \alpha(x)\|_1 \|u^{-\gamma}\phi(u^{-P}x)\|_1 \cdot |b_\sigma(u)|$$

$$\leq C \sum_{|\sigma|=k} |b_\sigma(u)| \leq C\, u^{|\sigma| n_1} \quad \text{si} \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$n_1 \geq 1$$

pues como es sabido: $|u^{P^{\#}}| \leq u^{n_1}$ si $0 \leq u \leq 1$, $n_1 \geq 1$
Por lo tanto, es:

$$\|\eta_{u,1}(x)\|_1 \leq C.u^{k_1} \quad \text{si} \quad 0 \leq u \leq 1, \; k_1 = |\sigma| n_1$$

Para completar la estimación propuesta resta considerar el caso $u \geq 1$
La norma en $L_1(E_n)$ es la función $\eta_{1,\frac{1}{u}}(x)$ se estimará mediante la siguiente y conocida relación:

$$\|\eta_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1 \leq C(\|\hat{\eta}_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1 + \sum_{|\sigma|=n+1} \|(\frac{\partial}{\partial x})^{\sigma}\hat{\eta}_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1)$$

Por analogía con lo anterior, se escribe:

$$\hat{\eta}_{1,\frac{1}{u}}(x) = (\circledast\, Lx)^k\hat{\phi}(x)\,\hat{\alpha}(u^{-P^{\#}}x) \qquad \text{si} \qquad u = t/s$$

$$= p(x)\hat{\phi}(x)\,\hat{\alpha}(u^{-P^{\#}}x)$$

siendo $p(x)$ un polinomio homogéneo de grado k.

Fácilmente resulta:

$$\|\hat{\eta}_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1 \leq \sup(p(x)\hat{\phi}(x).\|\hat{\phi}(u^{-P^{\#}}x)\|_1$$
$$= \sup(p(x)e^{-\pi|x|^2}).\|\hat{\phi}(u^{-P^{\#}}x)\|_1$$

donde el supremo está tomando sobre el soporte de $\hat{\phi}(u^{-P^{\#}}x)$, el cual está contenido en el contenido en el conjunto: $\{x:\rho^{\#}(x) \geq Cu\}$.

$$\|\hat{\eta}_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1 \leq C.u^{\gamma}.\sup(p(x).e^{-\pi|x|^2})$$

$$\leq C.u^{\gamma}.e^{-\frac{\pi}{2}|x|^2}$$

$$\leq C.u^{\gamma}.e^{-\frac{\pi}{2}u^{2s_1}} \qquad \text{si } |x| \geq \rho^{\#}(x) \geq Cu,\ s_1 \geq 1$$

$$\leq C.e^{-\frac{\pi}{4}u^{2s_1}} \qquad (*)$$

En cuanto a la norma en $L_1(E_n)$ de $(\frac{\partial}{\partial x})^{\sigma}\hat{\eta}_{1,\frac{1}{u}}(x)$ se observa que:

$(\frac{\partial}{\partial x})^{\sigma}(\overset{k}{\otimes} Lx)\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(u^{-P^{\#}}x)$ es una suma de términos de la forma siguiente:

$p(x)\hat{\phi}(x)$.(productos de elementos de $u^{-P^{\#}}$).(derivadas de $\hat{\phi}$ calculadas en $u^{-P^{\#}}x$)

Luego, la norma en $L_1(E_n)$ de esta expresión está acotada por:

$\sup(p(x)\hat{\phi}(x))$.(cota de los productos de elementos de $u^{-P^{\#}}$).(cota de las derivadas de $\hat{\phi}$). medida del soporte de $\hat{\phi}$; donde el supremo está tomado como antes sobre el soporte de $\hat{\phi}(u^{-P^{\#}}x)$. La cota de la citada expresión es análoga a la dada en $(*)$.

Por lo tanto,

$$\| n_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1 \leq C(\| \hat{n}_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1 + \sum_{|\sigma|=n+1} \| (\frac{\partial}{\partial x})^{\sigma}\hat{n}_{1,\frac{1}{u}}(x)\|_1$$

$$\leq C.e^{-\frac{\pi}{4}u^{2s_1}} \qquad \text{si } |x| \geq \rho^{\#}(x) \geq Cu, \quad s_1 \geq 1$$

expresión está que decrece en infinito más rápido que la inversa de cualquier potencia de u. Con esto queda probada la acotación propuesta en 1.

2. De acuerdo con su definición, es:

$$\hat{G}(x,s) = \hat{\varphi}(s^{P^{\#}}x)\rho^{\#}(x)^{-\delta}$$

$$= s^{\delta}\,\hat{\varphi}(s^{P^{\#}}x)\rho^{\#}(s^{P^{\#}}x)^{-\delta}$$

donde:

$\hat{\varphi}$ es de clase C_0^{∞} por hipótesis, y

$(\rho^{\#})^{-\delta}$ es de clase C^{∞} en el complemento del origen

Así, $\hat{G}(x,s)$ es integrable y tiene antitransformada de Fourier integrable, siendo:

$$\| G(x,s)\|_1 \leq C.s^{\delta}$$

En cambio, si s es suficientemente grande, se trunca la función como sigue:

$$\hat{G}(x,s) = \hat{\varphi}(s^{P^{\#}}x)\hat{G}_{\delta}(x)h(x)$$

donde:

$$h(x) \in C^{\infty}(E_n)$$

y $\quad h(x) = 1 \quad$ sobre el soporte de $\hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x)$

$\qquad\quad = 0 \quad$ fuera

Ahora bien, $\hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x)$ tiene antitransformada de Fourier integrable pues por hipótesis es de clase C_0^{∞}, mientras que $\hat{G}_{\delta}(x)h(x)$ es de clase C^{∞} y también tiene antitransformada de Fourier integrable. Así, resulta:

$$\| G(x,s) \|_1 \leq C$$

Por lo tanto, resumiendo se tiene:

$$\| G(x,s) \|_1 \leq C.\min(s^{\delta},1) \qquad \text{si} \quad 0 < \delta < \gamma$$

quedando probada la desigualdad propuesta en 2.

Finalmente resta justificar la antitransformación de Fourier de la expresión:

$$\hat{\xi}(t^{P^{\#}} x)\hat{G}_{\delta}(x) = \int_0^{\infty} \hat{\eta}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)\frac{ds}{s} \qquad (*)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \hat{\eta}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)\frac{ds}{s} \quad \text{puntualmente}$$

De acuerdo con su definición, es:

$$\hat{\eta}_{t,s}(x) = \hat{\xi}(t^{P^{\#}} x)\,\hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x)$$

$$\hat{\eta}_{t,s}(x) = 0 \text{ fuera de un compacto si } \epsilon \leq s \leq 1/\epsilon$$

La antitransformada de Fourier de:

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \hat{\eta}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)\frac{ds}{s}$$

está dada por:

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \eta_{t,s}(x) * G(x,s)\frac{ds}{s}$$

pues:

si $z(x) \in S(E_n)$ entonces:

$$\int_{E_n} \hat{\xi}(t^{P^{\#}}x)\hat{G}_{\delta}(x)z(x)dx = \int_0^{\infty}(\int_{E_n} \hat{\eta}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)z(x)dx)\frac{ds}{s}$$

por cuanto la integral de la derecha es absolutamente convergente.

Por lo tanto,

$$\int_{E_n} (t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x)*G_{\delta}(x))z(x)dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon}(\int_{E_n} \hat{\eta}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)z(x)dx)\frac{ds}{s}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon}(\int_{E_n} (\eta_{t,s}(x) * G(x,s))\hat{z}(x)dx)\frac{ds}{s}$$

y

$$|\int_{E_n} (t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * G_{\delta}(x))z(x)dx|$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \left(\int_{E_n} |(\eta_{t,s}(x) * G(x,s))\hat{z}(x)|\,dx \right) \frac{ds}{s}$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \|\eta_{t,s}(x) * G(x,s)\|_1 . \sup_z |\hat{z}(x)| \frac{ds}{s}$$

$$\leq \sup_z |\hat{z}(x)| . \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \|\eta_{t,s}(x)\|_1 . \|G(x,s)\|_1 \frac{ds}{s}$$

Por lo tanto,

$$\|t^{-\gamma}\xi\,(t^{-P}x) * G_\delta(x)\|_1 \leq \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \|\eta_{t,s}(x)\|_1 . \|G(x,s)\|_1 \frac{ds}{s}$$

$$\leq \int_0^\infty \|\eta_{t,s}(x)\|_1 . \|G(x,s)\|_1 \frac{ds}{s}$$

$$\leq C.\min(t^\delta,1) \quad \text{si} \quad 0 < \delta < \gamma$$

$$\leq C.\max(t^\delta,1) \quad \text{si} \quad \delta < 0$$

según se vió antes.

iii) Es consecuencia inmediata de ii).

Con esto queda concluída la demostración de 3.2.

apítulo IV

spacios de Lipschitz, α real

l espacio $S(E_n)$ está definido en Notación y Convenciones (I)
l espacio S' es el de las funcionales lineales continuas obre $S(E_n)$
a acción de f en S' sobre Φ en S está dada por (f,Φ)
l espacio S' con la topología débil es el llamado espacio e distribuciones temperadas.
i $f \in S'$, su transformada de Fourier $\hat{f} \in S'$ y $(\hat{f},\Phi) = (f,\hat{\Phi})$
l espacio O es el de las funciones $C^\infty(E_n)$ cuyas derivadas on de crecimiento lento. (Si f(x) es una función de crecimiento lento es $(1+|x|^2)^{k/2}$ f(x) acotada para algún entero k).
i $\hat{g} \in O$, $f \in S'$ vale: $(f * g)^\wedge(x) = \hat{f}(x).\hat{g}(x)$
ara estas afirmaciones ver referencia (7)

. Se extiende la definición de $J^\delta f(x)$ (3.III) a todo δ real y f(x) distribución temperada, mediante:
$(J^\delta f)^\wedge(x) = \hat{G}_\delta(x).\hat{f}(x)$ lo cual tiene sentido cuando $\hat{G}_\delta(x) \in O$
Si $G_\delta(x)$ es una distribución temperada tal que $\hat{G}_\delta(x)$ se define según (2.1.b)(III), entonces:
$J^\delta f(x) = f(x) * G_\delta(x)$ con $\delta > 0$ y f(x) en $L_p(E_n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ corresponde a la definición dada en (3.III).
Además, si $f(x) \in L_p(E_n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ la familia aproximante:
$J^\delta f(x) * \phi(x,t) = J^\delta F(x,t)$ está bien definida, está en $L_p(E_n)$ para cada $t > 0$ y converge como distribución temperada a $J^\delta f(x)$.

. El espacio $L_{p,\beta}(E_n)$ viene dado por:
$L_{p,\beta}(E_n) = \{f \in S' : f = J^\beta \Phi,\ \Phi \in L_p(E_n)\}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ β real normado por:

$\| f\|_{p,\beta} = \| \Phi\|_p$

i) Sean $\beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$,
si $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ entonces: $f(x) \in L_p(E_n)$

ii) si $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ entonces $F(x,t) = f(x) * \phi(x,t) \in$
$\in L_{p,\beta}(E_n)$
En efecto,
si $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ entonces: $f(x) = J^{\beta}\Phi(x)$ tal que
$\Phi(x) \in L_p(E_n)$
y

$$\| f(x)\|_p \leq \| G_{\beta}(x)\|_1 \cdot \| \Phi(x)\|_p = \| \Phi(x)\|_p = \| f(x)\|_{p,\beta}$$

y

$$F(x,t) = J^{\beta}\,\Phi(x) * \phi(x,t) = J^{\beta}\,\Phi(x,t)$$

$$\| F(x,t)\|_{p,\beta} = \| \Phi(x,t)\|_p \leq \| \Phi(x)\|_p = \| f(x)\|_{p,\beta}$$

Para estas consideraciones ver referencias (3), (10).

3. Se define un nuevo espacio
Sean $\alpha \leq 0$, $1 \leq p,q \leq \infty$

$$F(x,t) = f(x) * \phi(x,t) \quad \text{con} \quad f(x) \in S'(E_n)$$

<u>Defínción:</u>

La clase Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ $\alpha \leq 0$ es el conjunto de distribuciones temperadas $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ para las cuales la norma mixta $\| \ldots \|^{\#}_{pq}$ es finita

$$\| f(x)\|_{\alpha,p,q} = \| f(x)\|_{p,\beta} + \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}}\, \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq} \quad (1)$$

donde:

---

(1) Esta definición no depende de β

$1 \leq p,q \leq \infty$, $\beta < \alpha$, k el menor entero positivo mayor que α.
Se recuerda la definición de $\|\ldots\|^{\#}_{pq}$

$$\|g(x,t)\|^{\#}_{p,q} = \left(\int_0^1 \|g(x,t)\|^q_p \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \quad \text{si } 1 \leq q < \infty$$

$$= \sup_{0<t\leq 1} \|g(x,t)\|_p \quad \text{si } q = \infty$$

3.1. Teorema

Sean $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ y h un entero tal que $h \geq k$

Entonces:

La norma mixta dada por:

$$\|f(x)\|_{\alpha,p,q} = \|f(x)\|_{p,\beta} + \|t^{-\alpha}|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq}$$

es equivalente a la dada en la definición.

Demostración:

Se incluye al final del presente capítulo.

3.2. Sea para todo α real el conjunto de distribuciones temperadas f(x) en $L_{p,\beta}(E_n)$ para las cuales la norma mixta $\|\ldots\|^{\#}_{pq}$ dada por:

$$\|t^{-\alpha}|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq} \quad \text{es finita}$$

donde:

$$F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$$

k es el menor entero positivo mayor que α, $\beta < \alpha$,
$1 \leq p,q \leq \infty$

i) Sea $\alpha > 0$, entonces:

a) $\| f(x)\|_{p,\beta} + \| t^{-\alpha}|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq}$

b) $\| f(x)\|_{p} + \| t^{-\alpha}|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_{pq}$

son equivalentes.

Demostración:

Se supone $\beta > 0$ y la norma a) finita,

Entonces:

si $f(x)\in L_{p,\beta}(E_n)$ entonces $f(x) \in L_{p,0}(E_n)$ y

$\| f(x)\|_{p} \leq \| f(x)\|_{p,\beta}$

Además,

$$\| t^{-\alpha}|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_{pq} = \| t^{-\alpha}|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq} +$$

$$+ \left(\int_{1}^{\infty} \| t^{-\alpha} \; | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{q}_{p} \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_2 \leq \left(\int_{1}^{\infty} t^{-\alpha q}\left(\int_{t/2}^{t} \| F(x,s)\|^{q}_{p} \frac{ds}{s}\right)\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$\leq \| f(x)\|_{p}(\ln 2)\left(\int_{1}^{\infty} t^{-\alpha q-1} dt\right)^{1/q} \leq C\| f(x)\|_{p,\beta}$$

Por lo tanto:

$$\| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_{pq} \leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq}$$

$$+ \| f(x)\|_{p,\beta}$$

Por lo tanto, queda probado que b) es menor que a) si $\beta > 0$.

Se supone $\beta < 0$ y la norma a) finita

Sea $F(x,t) = \phi(x,t) * G_{-\beta}(x)$ y

$$\| F(x,t)\|_p \leq \| G_{-\beta}(x,t)\|_1 \cdot \| \phi(x)\|_p \leq C(1+t^{-\beta})\| \phi(x)\|_p$$

$$\leq C \cdot \| f(x)\|_{p,\beta} \quad \text{si } t \geq 1$$

Además,

$$\| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|_{pq} \leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq} +$$

$$+ C \cdot \| f(x)\|_{p,\beta}$$

Por lo tanto, en virtud del Lema 1. (III) se afirma que:

$F(x,t) = g(x) * \phi(x,t)$ con $g(x) \in L_p(E_n)$ $(1 \leq p < \infty)$

tal que:

$$\| g(x)\|_p \leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq} + \| f(x)\|_{p,\beta}$$

Ahora bien, si $g(x)$ coincide con la distribución temperada $f(x)$ queda demostrado, pero como $F(x,t) = f(x) *$ $* \phi(x,t)$ y $F(x,t) = g(x) * \phi(x,t)$, esto implica que coinciden como distribuciones y así f(x) es una función de $L_p(E_n)$ con norma acotada.

Por lo tanto queda demostrado que b) es menor que a) si $\beta < 0$.

Para completar la demostración resta ver que es válida la desigualdad contraria, es decir: a) $\leq$ b)

Se supone $\beta < 0$ y la norma b) finita

Si $f(x) \in L_p(E_n)$ entonces: $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ y

$\| f(x)\|_{p,\beta} \leq \| f(x)\|_p$

y trivialmente vale:

$$\| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|^{\#}_{pq} \leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq}$$

quedando así demostrado que: a) $\leq$ b) si $\beta < 0$

Se supone $\beta > 0$ y la norma b) finita

Ya vale:

$$\| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|^{\#}_{pq} \leq \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq}$$

de modo que sólo resta ver que $f(x) \in L_{p,\beta}(E_n)$ y que $\| f(x)\|_{p,\beta}$ está convenientemente acotada

Sea $f(x) \in \Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ y $0 < \beta < \alpha$ ($(\alpha-\beta) > 0$) y

$$J^{-\beta} : \Lambda(\alpha,p,q,E_n) \to \Lambda(\alpha-\beta,p,q,E_n) \text{ entonces:}$$

$$\| f(x)\|_{p,\beta} = \| J^{-\beta} f(x)\|_p \leq \| J^{-\beta} f(x)\|_{\alpha-\beta,p,q} \leq$$

$$\leq \| f(x)\|_{\alpha,p,q}$$

Por lo tanto queda demostrado que a) $\leq$ b) si $\beta > 0$, Con esto se concluye la demostración del teorema.

Este teorema establece la relación existente entre las clases Lipschitz definidas en 1 (II) y las clases Lipschitz definidas en 3. (IV) pues:

i) Si $\alpha \leq 0$ es la definición dada

ii) Si $\alpha > 0$ coincide con la definición 1 (II)

iii) Y los restantes casos están considerados en la demostración del Teorema 3.2.

3.3. <u>Teorema</u>

Sean α,δ reales, $1 \leq p,q \leq \infty$

Entonces:

J^{δ} es un isomorfismo sobre las clases Lipschitz $\Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ y $\Lambda(\alpha+\delta,p,q,E_n)$

<u>Demostración</u>:

Esta demostración extiende la dada en el Teorema 3.1 (III)

Sea $f(x) \in \Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ entonces debe ser $J^{\delta}f(x) \in$ $\in \Lambda(\alpha+\delta,p,q,E_n)$ lo cual equivale a decir:

$$J^{\delta} f(x) \in L_{p,\beta+\delta} (E_n) \quad \text{pues} \quad J^{\delta}:L_{p,\beta} \to L_{p,\beta+\delta} \text{ y}$$

$$\| J^{\delta} f(x)\|_{p,\beta+\delta} = \| f(x)\|_{p,\beta}$$

y que para k entero positivo mayor que $\alpha + \delta$ vale:

$$\| t^{-(\alpha+\delta)} |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial J^{\delta} \; F(x,t) | \|^{\#}_{pq} \leq$$

$$\| t^{-\alpha} |\overset{s}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|^{\#}_{pq}$$

donde:
s es el menor entero positivo mayor que α, y

$$J^{\delta} F(x,t) = G_{\delta}(x) * F(x,t) = G_{\delta}(x) * f(x) * \phi(x,t)$$

La desigualdad entre normas propuesta sigue en el Teorema (III). Para completar la demostración resta ver que la aplicación es uno a uno, lo cual sigue como en el Teorema 3.1(III) y así si $f(x) \in \Lambda(\alpha,p,q,E_n)$ entonces $J^{-\delta}(J^{\delta} f)(x) = f(x)$ como distribución.
Por lo tanto queda concluída la demostración.

3.4. Propiedad de convexidad

Sean $\alpha = (1-h)\,\alpha_0 + h\,\alpha_1$, $0 \leq h \leq 1$

$$\frac{1}{p} = (1-h)/p_0 + h/p_1 \qquad 1 \leq p,q \leq \infty$$

$$\frac{1}{q} = (1-h)/q_0 + h/q_1$$

y $f(x) \in \Lambda(\alpha_i,p_i,q_i,E_n)$, $i = 0,1$

Entonces:

$$f(x) \in \Lambda(\alpha,p,q,E_n) \quad y \quad \| f(x)\|_{\alpha,p,q} \leq C(\| f(x)\|_{\alpha_0,p_0,q_0})^{1-h} .$$

$$. (\| f(x)\|_{\alpha_1,p_1,q_1})^{h}$$

En particular:

a) $\| f(x)\|_{p,\beta} \leq \| f(x)\|^{1-h}_{p_0,\beta} . \| f(x)\|^{h}_{p_1,\beta}$ con $\beta < \beta_0,\alpha_1$

b) $\| t^{-\alpha} |\overset{k}{\otimes} Lt^{p^{\#}} \partial F(x,t)| \|^{\#}_{pq} \leq$

$$\leq (\| t^{-\alpha_0} |\overset{k}{\otimes} Lt^{p^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{p_0,q_0})^{1-h} .$$

$$. (\| t^{-\alpha_1} |\overset{k}{\otimes} Lt^{p^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{p_1,q_1})^{h}$$

donde $F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$ y k es el menor entero mayor que α_0,α_1.

<u>Demostración</u>:

Es claro que:

$f(x) \in L_{p_i,\beta}(E_n)$ $i = 0,1$ y $\| f(x)\|_{p_i,\beta} = \| \Phi(x)\|_{p_i}$,

entonces:

$\| \Phi(x)\|_{p} = (\int_{E_n} |\Phi(x)|^{(1-h)p} \, |\Phi(x)|^{hp} \, dx)^{1/q}$ aplicando Hölder con $r = p_0 \cdot \frac{1}{p(1-h)}$ y $r' = p_1 \cdot \frac{1}{p.h}$ resulta:

$$\| \varphi(x)\|_p \leq \left(\int_{E_n} |\varphi(x)|^{p_0}\, dx\right)^{\frac{p(1-h)}{p_0 \cdot p}} \cdot \left(\int_{E_n} |\varphi(x)|^{p_1}\, dx\right)^{\frac{h}{p_1}}$$

$$\leq \| \varphi(x)\|_{p_0}^{1-h} \cdot \|\varphi(x)\|_{p_1}^{h}$$

$$= \| f(x)\|_{p_0,3}^{1-h} \cdot \| f(x)\|_{p_1,3}^{h}$$

Por lo tanto queda demostrada la parte a).

Sea ahora b)

Por teorema 3.3. se afirma:

$A_i(h) = t^{-\alpha_i} \| |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{p_i}$ está en $L_{q_i}(0 < t \leq 1, \frac{dt}{t})$

Entonces:

$$A(h) = t^{-\alpha} \| |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_p = t^{-\alpha_0(1-h)} \cdot t^{-\alpha_1 h} .$$

$$. \| |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_p$$

$$\leq (t^{-\alpha_0} \| |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{p_0})^{1-h} . (t^{-\alpha_1} \| |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{p_1})^{h}$$

$$\leq A_0(h)^{1-h} \cdot A_1(h)^{h}$$

Por lo tanto,

$$\left(\int_0^1 (A(h))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 (A_0(h))^{q_0} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{(1-h)}{q_0}} .$$

$$. \left(\int_0^1 (A_1(h))^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{h/q_1} \text{ , luego:}$$

$$\| t^{-\alpha} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|^{\#}_{pq} \leq$$

$$\leq (\| t^{-\alpha_0} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{p_0,q_0})^{1-h} .$$

$$. (\| t^{-\alpha_1} | \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|_{p_1,q_1})^{h}$$

quedando así completa la demostración de la parte b)
El resto de la demostración es consecuencia de estas acotaciones y del Teorema 3.3.

3.5. Teorema

Sean $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$

$$F(x,t) = f(x) * \phi(x,t)$$

Entonces:

i) La inclusión $\Lambda(\alpha_1,p,q_1,E_n) \subset \Lambda(\alpha_2,p,q_2,E_n)$ es continua si $\alpha_2 < \alpha_1$ y $q_1 \geq q_2$

ii) La inclusión $\Lambda(\alpha_1, p_1, q, E_n) \subset \Lambda(\alpha_2, p_2, q, E_n)$ es continua si $p_1 \leq p_2$ y $\alpha_1 - \gamma/p_1 = \alpha_2 - \gamma/p_2$

<u>Demostración:</u>

1) Sean $q_1 = q_2$, $1 \leq p \leq \infty$

$$t^{1-\alpha_2} \| F_t(x,t)\|_p = t^{(\alpha_1-\alpha_2)} . t^{1-\alpha_1} \| F_t(x,t)\|_p$$

Entonces:

$$I_1 = \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha_2)q_1} \| F_t(x,t)\|_p^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_1} \leq$$

$$\leq \int_0^1 t^{(1-\alpha_1)q_1} \| F_t(x,t)\|_p^{q_1} \frac{dt}{t}\Big)^{1/q_1} \leq \| f(x)\|_{\alpha_1, p, q_1}$$

$$I_2 = \left(\int_1^\infty t^{(1-\alpha_2)q_1} \| F_t(x,t)\|_p^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_1} \leq$$

$$\leq \| f(x)\|_p \left(\int_1^\infty t^{(1-\alpha_2)q_1 - q_1 - 1} dt\right)^{1/q_1} = C \| f(x)\|_p$$

$$\leq \| f(x)\|_{\alpha_1, p, q_1}$$

Esta última acotación es en virtud del Lema 7.4 i)(I)

Sea $q_1 > q_2$, entonces: $1/h = 1/q_2 - 1/q_1$ $(h = \frac{q_1 \cdot q_2}{q_1 - q_2})$

Sea:

$$\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha_2)q_2} \| F_t(x,t)\|_p^{q_2} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_2} =$$

$$= \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha_1)q_2} \| F_t(x,t)\|_p^{q_2} \, t^{(\alpha_1-\alpha_2)q_2-1} \, dt\right)^{1/q_2}$$

$$\leq \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha_1)q_1} \| F_t(x,t)\|_p^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_1} .$$

$$. \left(\int_0^1 t^{(\alpha_1-\alpha_2)q_2 \cdot s'} \frac{dt}{t}\right)^{1/h} \leq C \| t^{1-\alpha_1} F_t(x,t)\|_{pq_1} \leq$$

$$\leq \| f(x)\|_{\alpha_1, p, q_1}$$

mediante la desigualdad de Hölder con:

$$s = q_1/q_2, \; s' = \frac{q_1}{q_1 - q_2} = h/q_2, \; 1/s' \; . \; 1/q_2 = 1/h$$

En cuanto a la integral I_2

$I_2 = \left(\int_1^{\infty} t^{(1-\alpha_2)q_2} \| F_t(x,t)\|_p^{q_2} \frac{dt}{t}\right)^{1/q_2}$ el procedimiento es análogo al seguido en la primera parte de la demostración.

Por lo tanto queda concluída la parte i) de la demostración.

ii) Se supone

$$\| t^{1-\alpha_1} F_t(x,t)\|_{p_1 q} + \| f(x)\|_{p_1} \quad \text{finita}$$

Como $f(x) \in L_{p_1}(E_n)$ y $p_1 \leq p_2$, resulta:

$$\| F(x,t)\|_{p_2} \leq \| f(x)\|_{p_1} . \| \phi(x,t)\|_s = \| f(x)\|_{p_1} .$$

$$. \, t^{\gamma(1/p_2 - 1/p_1)}$$

$$\| F(x,t)\|_{p_2} \leq \| f(x)\|_{p_1} \quad \text{si} \quad t \geq 1, \; 1/s = 1/p_2 - 1/p_1 + 1$$

Es fácilmente verificable que:

$$\grave{F}_t(x,t) = 2e^{-\pi \left| t^{P^\#} \frac{x}{\sqrt{2}} \right|^2} . \hat{F}_t'(x,t), \quad \text{de modo que:}$$

$$\| F_t(x,t)\|_{p_2} \leq \| F_t'(x,t)\|_{p_1} . \| \phi'(x,t)\|_s \leq$$

$$\leq \| F_t'(x,t)\|_{p_1} . \, t^{-\gamma/s'}, \; -1/s' = 1/p_2 - 1/p_1$$

Por lo tanto,

$$\| t^{1-\alpha_2} F_t(x,t)\|_{p_2 q} = \| t^{1-\alpha_2+\gamma/p_2-\gamma/p_1} F_t'(x,t)\|_{p_1 q}$$

$$\leq \| t^{1-\alpha_1} F_t'(x,t)\|_{p_1 q}$$

Por lo tanto, si

$\| t^{1-\alpha_1} F_t(x,t)\|_{p_1 q}$ es finita entonces

$\| t^{1-\alpha_1} F_t'(x,t)\|_{p_1 q}$ también es finita.

Esta afirmación sigue como en Teorema 3.1 (III)

Luego en virtud del Lema 1. (III) se afirma que:

$f(x) \in \Lambda(\alpha_2, p_1, q)$ tal que $\| f(x)\|_{\alpha_2, p_2, q} \leq$

$\leq C\| f(x)\|_{\alpha_1, p_1, q}$

Con esto queda completa la demostración de ii)

3.6. Demostración del Teorema 3.1 del presente capítulo

Sea $\zeta(x)$ una función tal que su transformada de Fourier satisface las siguientes condiciones:

1. $\hat{\zeta}(x)$ es de clase $C_0^\infty(E_n)$
2. positiva y nula en un entorno del origen
3. depende de $\rho^{\#}(x)$
4. $1 = \int_0^1 \hat{\zeta}(s^{P^{\#}} x)\frac{ds}{s} + \hat{\eta}(x)$

donde:

$$\hat{\eta}(x) = \int_1^{\infty} \hat{\varphi}^2(s^{P^\#}x)\frac{ds}{s}$$ es una función de clase $C_0^\infty(E_n)$

Sea, entonces:

$$1 = \int_0^1 \hat{\varphi}^2(s^{P^\#}x)\frac{ds}{s} + \hat{\eta}(x)$$

$$\hat{\phi}(t^{P^\#}x) = \int_0^1 \hat{\phi}(t^{P^\#}x)\,\hat{\varphi}^2(s^{P^\#}x)\frac{ds}{s} + \hat{\eta}(x)\hat{\phi}(t^{P^\#}x)$$

$$(\overset{k}{\circledast}\, Lt^{P^\#}x)\hat{\phi}(t^{P^\#}x) = \int_0^1 (\overset{k}{\circledast}\, Lt^{P^\#}x)\hat{\phi}(t^{P^\#}x)\,\hat{\varphi}^2(s^{P^\#}x)\frac{ds}{s} +$$

$$+ \hat{\eta}(x)(\overset{k}{\circledast}\, Lt^{P^\#}x)\hat{\phi}(t^{P^\#}x)$$

$$\hat{\xi}(t^{P^\#}x) = \int_0^1 \hat{\xi}(t^{P^\#}x)\,\hat{\varphi}(s^{P^\#}x)\hat{\Phi}(s^{P^\#}x)\frac{ds}{s} +$$

$$+ \hat{\xi}(t^{P^\#}x)\hat{\eta}(x)$$

$$\hat{\xi}(t^{P^\#}x)\hat{f}(x) = \int_0^1 \hat{\xi}(t^{P^\#}x)\,\hat{\varphi}(s^{P^\#}x)\,\hat{\Phi}(s^{P^\#}x)\hat{f}(x)\frac{ds}{s} +$$

$$+ \hat{\xi}(t^{P^\#}x)\hat{\eta}(x)\hat{f}(x)$$

$$= \int_0^1 \hat{h}_{t,s}(x).\hat{G}(x,s)\frac{ds}{s} +$$

$$+ \hat{\xi}(t^{P^\#}x)\hat{\eta}(x)\hat{f}(x) \qquad (*)$$

donde:

$$\hat{\xi}(t^{P^{\#}}x) = (\alpha^{k}\, L t^{P^{\#}}x)\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)$$

$$\hat{n}_{t,s}(x) = \hat{\xi}(t^{P^{\#}}x)\,\hat{\phi}(s^{P^{\#}}x)$$

$$\hat{G}(X,s) = \hat{\phi}(s^{P^{\#}}x)\hat{f}(x),\quad f(x) \in L_p(E_n)$$

Antitransformando Fourier la expresión (*) se tiene; formalmente:

$$t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x) = \int_0^1 (n_{t,s}(x) * G(x,s))\frac{ds}{s} +$$

$$+ (t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x)) * f(x)$$

donde:

$$G(x,s) = s^{-\gamma}\phi(s^{-P}x) * f(x)$$

Así, es(como se verá luego):

$$\| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x)\|_p \leq \int_0^1 \| n_{t,s}(x)\|_1 . \| G(x,s)\|_p \frac{ds}{s} +$$

$$+ \| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x)\|_1 . \| f(x)\|_p$$

$$\leq \int_0^1 C. \| G(x,s)\|_p .$$

$$. \min\{(s/t)^{k_1}, (s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s}$$

$$+ \| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x)\|_1 . \|f(x)\|_p = (1) + (2)$$

pues:

$$\|\tilde{\eta}_{t,s}(x)\|_1 = z(s/t) \leq \begin{cases} C.(s/t)^{k_1} & \text{si} \quad s \leq t,\ k_1 > 0 \\ C.(s/t)^{k_2} & \text{si} \quad s \geq t,\ k_2 < 0 \end{cases}$$

de acuerdo con lo visto en 3.2. ii) ,Capítulo III.

El término (1) resulta:

$$(1) \leq \int_0^t + \int_t^1 C.\|G(x,s)\|_p . \min\{(s/t)^{k_1},\ (s/t)^{k_2}\}\frac{ds}{s}$$

$$\leq C \int_0^t \|G(x,s)\|_p . (s/t)^{k_1}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C \int_t^1 \|G(x,s)\|_p . (t/s)^{k_2}\ \frac{ds}{s}$$

mientras que el término (2) resulta:

$$(2) = \|t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x)\|_1 . \|f(x)\|_p \leq C.t^{k_1} . \|f(x)\|_p$$

$$\text{si} \quad 0 < t \leq 1 \qquad k_1 > 0$$

mediante un razonamiento análogo al seguido en 3.2. ii), Capítulo III.
Por lo tnato, resulta:

$$t^{-\alpha}\| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x)\|_p \le C \int s^{-\alpha}\| G(x,s)\|_p (s/t)^{\alpha+k_1}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C\int_t^1 s^{-\alpha}\| G(x,s)\|_p (s/t)^{\alpha-k_2}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C.t^{k_1}.\| f(x)\|_p$$

Siendo el propósito lograr la siguiente desigualdad entre normas mixtas $\|\ldots\|^{\#}_{pq}$:

$$\| t^{-\alpha}|t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x)|\|^{\#}_{pq} \le \| s^{-\alpha}G(x,s)\|^{\#}_{pq} \qquad 1 \le q \le \infty$$

o equivalentemente:

$$\| t^{-\alpha}|\otimes^k Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq} \le \| s^{-\alpha}G(x,s)\|^{\#}_{pq} \qquad 1 \le q \le \infty$$

se reescribe la desigualdad:

$$t^{-\alpha}\| t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x)\|_p \le C.t^{-\alpha}\int_0^t \| G(x,s)\|_p (s/t)^{k_1}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C.t^{-\alpha}\int_t^1 \| G(x,s)\|_p (t/s)^{k_2}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C.t^{-\alpha+k_1}\| f(x)\|_p$$

como sigue:

$$t^{-\alpha}a(t) \le C.t^{-\alpha}\int_0^t b(s)(s/t)^{k_1}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C.t^{-\alpha}\int_t^{\infty} b(s)(t/s)^{k_2}\frac{ds}{s} + C.t^{-\alpha+k_1}\|f(x)\|_p$$

si $b(s) = 0$ cdq. $s \ge 1$

$$\le C.e^{-v\alpha}\left(\int_{-\infty}^{v} b(e^u)e^{k_1(u-v)}du +\right.$$

$$\left.+ \int_v^{\infty} b(e^u)e^{-k_2(u-v)}du\right) + C.e^{-v\alpha+vk_1}.\|f(x)\|_p$$

si $s = e^u$, $t = e^v$

Así, si $q = 1$, resulta:

$$\int_0^1 t^{-\alpha}a(t)\frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{0} e^{-v\alpha}a(e^v)dv$$

$$\le C\int_{-\infty}^{0} e^{-v\alpha}\left(\int_{-\infty}^{v} b(e^u)e^{k_1(u-v)}du\right)dv +$$

$$+ C\int_{-\infty}^{0} e^{-v\alpha}\left(\int_{v}^{\infty} b(e^u)e^{-k_2(u-v)}du\right)dv +$$

$$+ C\|f(x)\|_p.\int_{-\infty}^{0} e^{-v(\alpha-k_1)}dv = (1)+(2)+(3)$$

El sumando (3) contribuye con constante pues la integral que aparece en él es finita ($\alpha < k_1$). En cuanto a los sumandos (1) y (2) invirtiendo el orden de integración, resulta:

$$(1) = \int_{-\infty}^{0} b(e^u)e^{k_1 u}\left(\int_u^0 e^{-v(\alpha+k_1)}dv\right)du = \int_{-\infty}^{0} b(e^u)e^{-u\alpha}du$$

y

$$(2) = \int_{-\infty}^{0} b(e^u)e^{-k_2 u}\left(\int_{-\infty}^{u} e^{-v(\alpha-k_2)}dv\right)du = \int_{-\infty}^{0} b(e^u)e^{-u\alpha}du$$

Por lo tanto, si $q = 1$, resulta:

$$\int_0^1 t^{-\alpha}a(t)\frac{dt}{t} \leq C \int_0^1 s^{-\alpha}b(s)\frac{ds}{s}$$

es decir, si $q = 1$, resulta válida la desigualdad propuesta entre normas mixtas $\|\ldots\|^{\#}_{pq}$. Probando su validez en el caso $q = \infty$, queda demostrado pues por interpolación resulta para valores de q tales que $1 < q < \infty$

De acuerdo con lo anunciado es necesario lograr la siguiente desigualdad:

$$\sup_{0<t\leq 1} t^{-\alpha}a(t) \leq C. \sup_{0<s\leq 1} s^{-\alpha}b(s)$$

Para esto teniendo en cuenta la anterior notación, es:

$$a(t) \leq C\int_0^t b(s)(s/t)^{k_1}\frac{ds}{s} + C\int_t^1 b(s)(t/s)^{k_2}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C \quad t^{k_1} . \| f(x)\|_p$$

$$\leq C\int_0^t s^{-\alpha} b(s) s^{\alpha}(s/t)^{k_1}\frac{ds}{s} + C\int_t^1 s^{-\alpha} b(s) s^{\alpha}(t/s)^{k_2}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C \quad t^{k_1} \| f(x)\|_p$$

$$\leq C\ t^{-k_1}\int_0^t (s^{-\alpha} b(s)) s^{\alpha+k_1}\frac{ds}{s} + C\ t^{k_2}\int_t^1 (s^{-\alpha} b(s)) s^{\alpha-k_2}\frac{ds}{s} +$$

$$+ C \quad t^{k_1} \| f(x)\|_p$$

$$t^{-\alpha} a(t) \leq C\{\sup_{0<s\leq t} s^{-\alpha} b(s)\} t^{-\alpha-k_1}\int_0^t s^{\alpha+k_1-1} ds +$$

$$+ C\{\sup_{t\leq s\leq 1} s^{-\alpha} b(s)\} t^{-\alpha+k_2}\int_t^1 s^{\alpha-k_2-1} ds +$$

$$+ C\ t^{-\alpha+k_1} \| f(x)\|_p$$

Por lo tanto, tomando el supremo sobre $0 < t \leq 1$ se obtiene la desigualdad deseada. Con esto queda probada la validez de la siguiente desigualdad:

$$\| t^{-\alpha} |\overset{k}{x}\ Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \|_{pq} \leq C \| s^{-\alpha} G(x,s)\|_{pq} \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

Resta probar la desigualdad contraria entre normas mixtas $\| \dots \|^{\#}_{pq}$. De acuerdo con lo anterior, es:

$$(\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} x)\hat{F}(x,t) = \hat{\xi}(t^{P^{\#}} x)\hat{f}(x) = (\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} x)\hat{\phi}(t^{P^{\#}} x)\hat{f}(x)$$

$$\hat{G}(x,t) = \hat{\varsigma}(t^{P^{\#}} x)\hat{f}(x)$$

con:

$$\hat{\varsigma}(x) = (\overset{k}{\otimes} Lx)\hat{\phi}(x).\hat{h}(x)$$

donde:

$$\hat{h}(x) = \frac{(\overset{k}{\otimes} Lx)\hat{\phi}(x)\hat{\varsigma}(x)}{((\overset{k}{\otimes} Lx)\hat{\phi}(x).(\overset{k}{\otimes} Lx)\hat{\phi}(x))} \text{ es de clase } C_0^{\infty}(E_n).$$

Así, claramente, resulta:

$$\hat{G}(x,t) = (\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} x)\hat{F}(x,t).\hat{h}(t^{P^{\#}} x)$$

es decir:

$$G(x,t) = (\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial)F(x,t) * (t^{-\gamma} h(t^{-P} x))$$

Luego,

$$\| G(x,t) \|_p \leq C. \| \, |\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \, \|_p \quad \text{pues}$$

$t^{-\gamma} h(t^{-P} x) \in L_1(E_n)$

y

$$\| t^{-\alpha} G(x,t) \|^{\#}_{pq} \leq C . \| t^{-\alpha} | \overset{k}{*} L t^{P^{\#}} \partial F(x,t) | \|^{\#}_{pq}$$

Por lo tanto queda probada la desigualdad restante.

Finalmente para completar la presente demostración resta justificar:

$$\| t^{-\gamma} \xi (t^{-P} x) * f(x) \|_p \leq \int_0^1 \| \tilde{n}_{t,s}(x) \|_1 . \| G(x,s) \|_p \frac{ds}{s} +$$

$$+ \| t^{-\gamma} \xi (t^{-P} x) * \eta(x) \|_1 . \| f(x) \|_p$$

a partir de:

$$\hat{\xi} (t^{P^{\#}} x) \hat{f}(x) = \hat{f}(x) . \int_0^1 \hat{\tilde{n}}_{t,s}(x) \hat{\zeta}(s^{P^{\#}} x) \frac{ds}{s} + \hat{\xi} (t^{P^{\#}} x) \hat{\eta}(x) \hat{f}(x) \quad (*)$$

en el siguiente sentido:

$$(\hat{\xi} (t^{P^{\#}} x) \hat{f}(x), z(x)) = (\hat{f}(x) . \int_0^1 \hat{\tilde{n}}_{t,s}(x) \hat{\zeta}(s^{P^{\#}} x) \frac{ds}{s}, z(x)) +$$

$$+ (\hat{f}(x) . \hat{\xi} (t^{P^{\#}} x) \hat{\eta}(x), z(x)) = (1) + (2),$$

Sea el término (1) de la expresión anterior:

$$(1) = (\hat{f}(x) . \int_0^1 \hat{\tilde{n}}_{t,s}(x) \hat{\zeta}(s^{P^{\#}} x) \frac{ds}{s}, z(x)) \qquad z(x) \in S(E_n)$$

$$= (\hat{f}(x) . (\int_0^1 \hat{\tilde{n}}_{t,s}(x) \hat{\zeta}(s^{P^{\#}} x) \frac{ds}{s} z(x))$$

$$= (\hat{f}(x), \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \hat{\tilde{n}}_{t,s}(x) \hat{\zeta}(s^{P^{\#}} x) z(x) \frac{ds}{s})$$

pero:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\epsilon}^{1} \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x) \frac{ds}{s} z(x) \right) = \left(\int_{0}^{1} \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x) \frac{ds}{s} \right) z(x)$$

en $S(E_n)$ (i)

como se verá luego. Por lo tanto, el término (1) coincide con:

$$(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\hat{f}(x), \int_{\epsilon}^{1} \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x) z(x) \frac{ds}{s} \right),$$ pero es válida

la siguiente igualdad:

$$\left(\hat{f}(x), \int_{\epsilon}^{1} \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x) z(x) \frac{ds}{s} \right) =$$

$$= \int_{\epsilon}^{1} \left(\hat{f}(x), \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x) z(x) \right) \frac{ds}{s} \qquad \text{(ii)}$$

Según se verá luego. Por lo tanto, el término (1) se escribe finalmente

$$(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \left(\hat{f}(x), \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x) z(x) \right) \frac{ds}{s}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \left(\hat{f}(x) \hat{n}_{t,s}(x)\, \hat{\varphi}(s^{P^{\#}} x), z(x) \right) \frac{ds}{s}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \left(f(x) * \check{n}_{t,s}(x) * (s^{-\gamma} \varphi(s^{-P} x)), \hat{z}(x) \right) \frac{ds}{s}$$

Por lo tanto,

$$(t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x),\hat{z}(x)) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} (f(x) * \tilde{n}_{t,s}(x) * \phi_s(s),\ \hat{z}(x))\frac{ds}{s} +$$

$$+ ((t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x)) * \eta(x) * f(x),\hat{z}(x))$$

Luego,

$$|((t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x)),\hat{z}(x))| \leq$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} |(f(x) * \tilde{n}_{t,s}(x) * \phi_s(x),\hat{z}(x))|\frac{ds}{s}$$

$$+ |(t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x) * f(x),\hat{z}(x))|$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} \|\tilde{n}_{t,s}(x) * G(x,s)\|_p.\|\hat{z}(x)\|_{p'}\frac{ds}{s}$$

$$+ \|(t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x) * f(x)\|_p.\|\hat{z}(x)\|_{p'}$$

Por lo tanto,

$$\|t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * f(x)\|_p \leq$$

$$\leq (\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\|\tilde{n}_{t,s}(x)\|_1.\|G(x,s)\|_p\ \frac{ds}{s}\|\hat{z}(x)\|_{p'}$$

$$+ \|\hat{z}(x)\|_{p'}.\|t^{-\gamma}\xi(t^{-P}x) * \eta(x)\|_1.\|f(x)\|_p$$

$$\leq \|z(x)\|_{p'}.\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} C.\min\{(\tfrac{s}{t})^{k_1},(\tfrac{s}{t})^{k_2}\}.$$

$$.\ \|G(x,s)\|_p\ \frac{ds}{s}$$

$$+ C.t^{k_1}.\|f(x)\|_p$$ según se vió antes

$$\leq C \int_0^1 \min\ \{(\tfrac{s}{t})^{k_1},\ (\tfrac{s}{t})^{k_2}\}.\|G(x,s)\|_p \frac{ds}{s}$$

$$+\ C.t^{k_1}.\|f(x)\|_p$$

Así, resulta:

$$\|t^{-\gamma}\xi\ (t^{-P}x) * f(x)\|_p \leq C\int_0^t \|G(x,s)\|_p (\tfrac{s}{t})^{k_1} \frac{ds}{s} +$$

$$+\ C\int_t^1 \|G(x,s)\|\ (\tfrac{s}{t})^{-k_2} \frac{ds}{s} +$$

$$+\ C.t^{k_1}.\|f(x)\|_p \text{ según se vió antes}$$

La siguiente igualdad:

$$(\hat{f}(x),\int_\epsilon^1 \hat{n}_{t,s}(x)\ \hat{\zeta}(s^{P^\#}x)z(x)\frac{ds}{s}) =$$

$$= \int_\epsilon^1 (\hat{f}(x),\hat{n}_{t,s}(x)\ \hat{\zeta}(s^{P^\#}x)z(x))\frac{ds}{s}$$

se justifica mediante:

$$(\hat{f}(x),\ \int_\epsilon^1 \hat{n}_{t,s}(x)\ \hat{\zeta}(s^{P^\#}x)z(x)\frac{ds}{s}) =$$

$$= (\hat{f}(x),\ \int_\epsilon^1 \hat{\xi}\ (t^{P^\#}x)\ \hat{\zeta}(s^{P^\#}x)\ \hat{\zeta}(s^{P^\#}x)z(x)\frac{ds}{s}) =$$

$$= (\hat{f}(x),\int_\epsilon^1 \hat{\xi}\ (t^{P^\#}x)\ \hat{\zeta}^2(s^{P^\#}x)z(x)\frac{ds}{s}) =$$

$$=(\hat{f}(x),\ \int_{\epsilon}^{1} \hat{\xi}\,(t^{P^{\#}}x)\hat{n}(s\,\rho^{\#}(x))z(x)\frac{ds}{s}) = \qquad \hat{?}(x)=n(\rho^{\#}(x))$$

$$= (\hat{f}(x),\ \lim_{m\to\infty} \sigma_m\ \hat{\xi}\,(t^{P^{\#}}x)z(x)) =$$

σ_m indica la suma parcial de Riemann correspondiente a la función $n(s\rho^{\#}(x))$ sobre la partición del intervalo $(\epsilon,1)$. El límite de $\sigma_m\ \hat{\xi}\,(t^{P^{\#}}x)z(x)$ con $m\to\infty$ existe en el espacio $S(E_n)$ pues es fácilmente verificable que tanto σ_m como cada una de sus derivadas convergen acotadamente a un límite.

$$= \lim_{m\to\infty} (\hat{f}(x),\ \sigma_m\ \hat{\xi}\,(t^{P^{\#}}x)z(x)) = \quad \text{por continuidad del producto escalar}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} (\hat{f}(x), n(\xi_i\ \rho^{\#}(x))\hat{\xi}\,(t^{P^{\#}}x)z(x))\Delta s_i' =$$

$$= \int (\hat{f}(x), n(s\ \rho^{\#}(x))\hat{\xi}\,(t^{P^{\#}}x)z(x))\frac{ds}{s}$$

La existencia del límite indicado en i) se justifica mediante un razonamiento análogo al seguido en ii).

3.7. La definición dada en 3. del presente capítulo se aseguró independiente del parámetro β. Para mostrar tal independencia, es necesario ver que las siguientes normas mixtas resultan equivalentes:

a) $\|f(x)\|_{p,\beta_1} + \|t^{-\alpha}|\overset{k}{\nabla}\ Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq}$

b) $\|f(x)\|_{p,\beta_2} + \|t^{-\alpha}|\overset{k}{\nabla}\ Lt^{P^{\#}}\partial F(x,t)|\|^{\#}_{pq}$

donde

$$f(x) \in S'(E_n),\ F(x,t) = f(x) * \phi(x,t),\ \beta_1 < \beta_2 < \alpha ,$$

y k es el menor entero positivo mayor que α.

Demostración:

Suponiendo que la norma mixta dada en b) sea finita resulta inmediatamente la desigualdad a) $\leq$ b) puesto que si $\beta_1 < \beta_2$ es:

$$\| f(x) \|_{p,\beta_1} \leq \| f(x) \|_{p,\beta_2}$$

Para logarar la desigualdad contraria entre ambas normas mixtas, es necesario mostrar que si $\beta_1 < \beta_2$, y $f(x) \in L_{p,\beta_1}(E_n)$ entonces:

$f(x) \in L_{p,\beta_2}(E_n)$ y se verifica:

$$\| f(x) \|_{p,\beta_2} \leq C(\| f(x) \|_{p,\beta_1} + \| t^{-\alpha} |\overset{k}{\alpha} \; Lt^{p^{\#}} \partial F(x,t) | \|^{\#}_{pq}$$

Para esto, sea:

Es sabido que: $\| f(x) \|_{p,\beta_2} = \| J^{-\beta_2} f(x) \|_p$, expresando $J^{-\beta_2} f(x)$ en términos de transformadas de Fourier como sigue:

$$(J^{-\beta_2} f)^{\wedge}(x) = \hat{G}_{-\beta_2}(x).\hat{f}(x) =$$

$$= h_1(x)\hat{G}_{-\beta_2}(x).\hat{f}(x) + h_2(x)\rho^{\#}(x)^{\beta_2}.\hat{f}(x)$$

donde: $h_1(x)$ y $h_2(x)$ son funciones positivas tales que:

$h_1(x) \in C_0^\infty(E_n)$ y $h_1(x) = 1$ en un entorno del origen y
$h_2(x) = 1 - h_1(x)$

y $\hat{G}_{-\beta_2}(x) = \rho^{\#}(x)^{\beta_2}$ si $|x| > N$ según la definición dada en 2.1. del Capítulo III.
Se reescribe la expresión de $(J^{-\beta_2}f)^{\wedge}(x)$ anterior como sigue:

$$(J^{-\beta_2}f)^{\wedge}(x) = h_1(x)\,\frac{\hat{G}_{-\beta_2}(x)}{\hat{G}_{-\beta_1}(x)}\,.\hat{G}_{-\beta_1}(x).\hat{f}(x)+h_2(x)\rho^{\#}(x)^{\beta_2}.\hat{f}(x)$$

donde la expresión:

$$h_1(x)\,\frac{\hat{G}_{-\beta_2}(x)}{\hat{G}_{-\beta_1}(x)} \quad \text{es un multiplicador en } L_p(E_n)$$

Respecto del segundo sumando en la expresión de $(J^{-\beta_2}f)^{\wedge}(x)$, teniendo en cuenta la función $\zeta(x)$ introducida en 3.2.ii) del Capîtulo III, se escribe:

$$h_2(x)\rho^{\#}(x)^{\beta_2}.\hat{f}(x) = h_2(x)\left(\int_0^\infty \hat{\zeta}^2(s^{P^{\#}}x)\frac{ds}{s}\right)\rho^{\#}(x)^{\beta_2}.\hat{f}(x)$$

$$= h_2(x)\left(\int_0^\infty n(\rho^{\#}(s^{P^{\#}}x))\rho^{\#}(x)^{\beta_2}\frac{ds}{s}\right)\hat{f}(x)$$

según 3.2.ii) (III)

$$= h_2(x)\left(\int_0^\infty n(s\rho^{\#}(x))\rho^{\#}(x)^{\beta_2}\frac{ds}{s}\right)\hat{f}(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_0^\infty n(s\ \rho^{\#}(x))s^{-\alpha}ds = \int_0^\infty n(t)t^{-\alpha}\rho^{\#}(x)^{\alpha-1}\ dt \quad \text{si } t = s\ \rho^{\#}(x)$$

$$\int_0^\infty n(s\ \rho^{\#}(x))s^{-\beta_2}\frac{ds}{s} = \rho^{\#}(x)^{\beta_2}\int_0^\infty n(t)t^{-\alpha}dt \quad \text{si} \quad = 1 + \beta_2$$

la expresión: $h_2(x)(\int_0^\infty n(s\ \rho^{\#}(x))\rho^{\#}(x)^{\beta_2}\ \frac{ds}{s})\hat{f}(x)$ se reescribe como sigue:

$$h_2(x)(\int_0^\infty n(s\ \rho^{\#}(x))\rho^{\#}(x)^{\beta_2}\ \frac{ds}{s})\hat{f}(x) =$$

$$= h_2(x)(\int_0^\infty n(s\ \rho^{\#}(x))s^{-\beta_2}\ \frac{ds}{s})\hat{f}(x) =$$

$$= h_2(x)(\int_0^\infty \hat{\zeta}^2(s^{P^{\#}}x)s^{-\beta_2}\ \frac{ds}{s})\hat{f}(x) =$$

$$= h_2(x)(\int_0^1 \hat{\zeta}^2(s^{P^{\#}}x)s^{-\beta_2}\ \frac{ds}{s})\hat{f}(x) = \hat{k}(x) \qquad \text{si} \quad \rho^{\#}(x) \geq N$$

Por lo tanto, la expresión de $(J^{-\beta_2}f)^\wedge(f)$ se reduce a:

$$(J^{-\beta_2}f)^\wedge(x) = h_1(x)\,\frac{\hat{G}_{-\beta_2}(x)}{\hat{G}_{-\beta_1}(x)}\cdot\hat{G}_{-\beta_1}(x)\hat{f}(x) +$$

$$+\ h_2(x)(\int_0^1 \hat{\zeta}^2(s^{P^{\#}}x)s^{-\beta_2}\ \frac{ds}{s})\hat{f}(x)$$

es decir:

$$(J^{-\beta_2}f)^{\wedge}(x) = h_1(x)\,\frac{\hat{G}_{-\beta_2}(x)}{\hat{G}_{-\beta_1}(x)}.\hat{G}_{-\beta_1}(x)\hat{f}(x) + \hat{k}(x)$$

y puesto que el propósito era evaluar la norma en $L_p(E_n)$ de $J^{-\beta_2}f(x)$ se tiene:

$$\|J^{-\beta_2}f(x)\|_p \leq C.\|J^{-\beta_1}f(x)\|_p + \|k(x)\|_p = C.\|f(x)\|_{p,\beta_1} +$$

$$+ \|k(x)\|_p \quad \text{donde:}$$

$$\|k(x)\|_p \leq \int_0^1 \|(s^{-\gamma}\,\zeta(s^{-P}x)) * f(x) * (s^{-\gamma}\,\zeta(s^{-P}x))\|_p\; s^{-\beta_2}\frac{ds}{s}$$

Esta última desigualdad entre normas p se justifica mediante un razonamiento análogo al seguido en 3.6. del presente capítulo, de modo que:

$$\|k(x)\|_p \leq \int_0^1 \|G(x,s)\|_p\; s^{-(1+\alpha)(1/q+1/q')}ds \qquad \alpha > \beta_2$$

$$\leq \left(\int_0^1 (s^{-\alpha}\|G(x,s)\|_p)^q\,\frac{ds}{s}\right)^{1/q}.\left(\int_0^1 s^{-\alpha q'-1}ds\right)^{1/q'}$$

por Hölder. La segunda integral que aparece en esta última expresión es finita pues $\alpha \leq 0$.
Por lo tanto,

$\|k(x)\|_p \leq C.\|s^{-\alpha}\,G(x,s)\|^{\#}_{pq}$ y, así, resulta:

$$\| J^{-\beta_2} f(x) \|_p \leq C.\| f(x) \|_{p,\beta_1} + C.\| s^{-\alpha} G(x,s) \|^{\#}_{pq}$$

que no es más que lo propuesto al comienzo de la demostración.

Apéndice I

Se discute el Teorema del Valor Medio para funciones $F(x,t)$ definidas en $E_{n+1,+}$, indefinidamente diferenciables, soluciones de la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ (4)(I).

Este resultado me fue comunicado por el Señor Profesor Dr. Alberto Pedro Calderón.

Notación

1. El operador diferencial A está dado por:

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}\left(P^{\#} t^{P^{\#}} \partial . t^{P^{\#}} \partial\right) = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t}\left(L t^{P^{\#}} \partial . L t^{P^{\#}} \partial\right)$$

donde:

$$\frac{1}{2\pi}\left(P^{\#} x.x\right) = \frac{1}{4\pi}\left((P^{\#}+P)x.x\right) = (Lx.Lx) \geq \frac{1}{2\pi}(x.x)$$

y

$$L^2 = \frac{1}{4\pi}(P^{\#} + P), \quad L = L^{\#}, \quad \|L\|^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{|Lx|^2}{|x|^2} \geq \frac{1}{2\pi}$$

2. El núcleo $\phi(x,t)$ es:

$$\phi(x) = \exp(-\pi|x|^2)$$

$$\phi(x,t) = t^{-\gamma}\, \phi(t^{-P} x)$$

y

a) $\hat{\phi}(x,t) = \phi(t^{P^{\#}} x)$

b) $\hat{\phi}_t(x,t) = -\frac{2\pi}{t}\left(P^{\#} t^{P^{\#}} x . t^{P^{\#}} x\right) \hat{\phi}(x,t)$

c) $\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)/\hat{\phi}(s^{P^{\#}}x) = \hat{\phi}(A_{s/t}\, t^{P^{\#}}x)$, $0 < s \leq t$

donde:

$A_u^2 = I - u^P u^{P^{\#}}$, $0 < u \leq 1$

d) La antitransformada de Fourier de c) es:

$(\hat{\phi}(t^{P^{\#}}x)/\hat{\phi}(s^{P^{\#}}x))^{\vee}(y) = \det(A_{s/t}^{-1}t^{-P})\phi(A_{s/t}^{-1}t^{-P}y)$

3. <u>Lema</u>

Sea $B_s = I - s^P s^{P^{\#}}$, $0 < s \leq 1$

i) B_s satisface $(B_s x.x) \geq 0$

ii) B_s es autoadjunta

iii) La raíz cuadrada positiva A_s es autoadjunta con las siguientes propiedades:

iv) $(4\|P\|(1-s))^{-1/2} \leq \|A_s^{-1}\| \leq (1-s)^{-1/2}$, $1/2 < s$

v) $|\det A_s^{-1}| \leq (1-s)^{-n/2}$

<u>Demostración</u>

Es claro que $(A_1 x.A_1 x) = (B_1 x.x) = 0$

Sea $y = A_s x$, entonces:

$(y.y) = (A_s x.A_s x)-(A_1 x.A_1 x) = (1-s)\frac{2}{s'}(P^{\#}s'^{P^{\#}}x.s'^{P^{\#}}x)$

donde $\frac{1}{2} < s \leq s' \leq 1$ por el teorema del valor medio.

En consecuencia:

$$|y|^2 \leq (1-s)4\|P\| . |x|^2 = (1-s)4\|P\| . |A_s^{-1}y|^2$$

y

$$\|A^{-1}\| \geq (4\|P\|(1-s))^{-1/2}$$

Además,

$$(y.y) = (A_s^2 x.x) = (x.x)-(sP^{\#}x.sP^{\#}x) \geq (x.x)-s^2(x.x) =$$

$$= (1-s^2)(A_s^{-1}y.A_s^{-1}y) \quad \text{de ahí que:}$$

$$\|A_s^{-1}\| \leq (1-s)^{-1/2}$$

Con esto queda demostrado iv)
En cuanto a v) es consecuencia del hecho de ser el determinante de una matriz $A \in R^{nxn}$ simétrica, acotado por la n-ésima potencia de su norma (como operador).

4. Lema

Sean $A_h = (a_{ij}^h)(1 \leq h \leq k)$ matrices nxn, entonces:

Si $A = A_1 \otimes \ldots \otimes A_k$, vale: $\|A\| \leq \prod_{1 \leq h \leq k} \|A_h\|$

Demostración:

Sean w_α, w'_α con $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ $1 \leq \alpha_i \leq n$ las componentes de los tensores w y w' respectivamente; $(w,w') = \sum_\alpha w_\alpha \overline{w'_\alpha}$ el producto hermitiano usual.

Sea $A(h) = I \otimes \ldots \otimes A_h \otimes \ldots \otimes I$, entonces:

si $A = A_1 \otimes \ldots \otimes A_k$ puede escribirse:

$A = A(1) \circ \ldots \circ A(k)$

Entonces, hay que probar que:

$$\| A \| \leq \prod_{1 \leq h \leq k} \| A(h) \| \leq \prod_{1 \leq h \leq k} \| A_h \|$$

Sea d^h_{ij} el delta de Kronecker para los sub-índices i,j; y

$$A(h)w = \sum_{\alpha_h} d^1_{b_1\alpha_1} \ldots a^h_{b_h\alpha_h} \ldots d^k_{b_k\alpha_k} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} =$$

$$= \sum_{\alpha_h} a^h_{b_h\alpha_h} w_{b_1 \ldots \alpha_h \ldots b_k}$$

$$|A(h)w.w')| = \Big| \sum_{\substack{b_i \\ i \neq h}} \sum_{\alpha_h, b_h} a^h_{\alpha_h b_h} w_{b_1 \ldots \alpha_h \ldots b_k} \overline{w}'_{b_1 \ldots b_k} \Big|$$

$$\leq \sum_{\substack{b_i \\ i \neq h}} \| A_h \| \Big(\sum_{\alpha_h} |w_{b_1 \ldots h \ldots b_k}|^2\Big)^{1/2} .$$

$$.\Big(\sum_{b_h} |\overline{w}'_{b_1 \ldots b_k}|^2\Big)^{1/2}$$

$\leq \| A_h \| . |w| . |w'|$ y así:

$$\| \Lambda(h) \| \leq \| \Lambda_h \|$$

Por lo tanto queda demostrado.

5. Teorema del Valor Medio

Sea $F(x,t)$ definida en $E_{n+1,+}$, indefinidamente diferenciable, solución de la ecuación diferencial $AF(x,t) = 0$ (4)
Sea k entero positivo,
Entonces:

$$\left| \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) \right|^2 \leq C\, t^{-\gamma} \int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s} \int_{B(x,t)} \left| \overset{r}{\otimes} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s) \right|^2 dy$$

para todo entero r, tal que: $0 \leq r \leq k$
En consecuencia:

$$\left| \overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t) \right| \leq C \sup \left| \overset{r}{\otimes} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s) \right|$$

donde el supremo está tomado sobre $t/2 \leq s \leq t$, $\rho(x-y) \leq$

Consideración previa:

Sea la siguiente ecuación diferencial, para x fijo,

i) $g(x,t) = n'(t) - 1/\phi(t^{P^{\#}} x) \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(t^{P^{\#}} x) n(t)$

cuya solución viene dada por:

ii) $n(t) = \hat{\phi}(t^{P^{\#}} x)\left(n(0) + \int_0^t g(x,s)/\hat{\phi}(s^{P^{\#}} x)\, ds\right)$

Así, si $AF(x,t) = G(x,t)$ y $f(x) = \lim\limits_{t \to 0} F(x,t)$ existe, en virtud de 2.d) y ii) se deduce:

$$\text{iii) } F(\mathbf{x},t) = f(x) * \phi(\mathbf{x},t) + \int_0^t \det(A^{-1}_{s/t} t^{-P})(G(\ .,s) * \\ * \phi(A^{-1}_{s/t}\ t^{-P}\mathbf{x}))ds$$

La expresión iii) se usará en la demostración del Teorema del Valor Medio para soluciones $F(\mathbf{x},t)$ de $AF(x,t) = 0$.

5.1. Demostración del Teorema del Valor Medio

Sea $k(x)$ una función positiva de $C_0^\infty(E_n)$ tal que:

$\mathrm{sop}k(x) = B(0,1)$

$k(x) = 1$ si $x \in B(0,1/2)$

y sea $n(x)$ una función positiva de $C_0^\infty(E_n)$ tal que:

$\mathrm{sop}n(x)$ está contenido en $[0,1/2)$

$n(x) = 1$ sobre $[0,1/4]$

y sea:

$\phi(y,s) = k(y)n(1-s)$

Para $(x,t) \in E_{n+1,+}$ fijo se considera:

$H(y,s) = F(y,s)\phi(t^{-P}(x-y),s/t)$

Así resulta:

$H(x,t) = F(x,t)$

$H(y,s) = 0 \quad$ si $\quad 0 \leq s \leq t/2,\ y \in B^c(x,t)$

Por lo tanto, en virtud de (iii) se escribe:

a) $$F(x,t) = H(x,t) = \int_{t/2}^{t} \det(A_{s/t}^{-1}\ t^{-P}) \int_{B(x,t)} AH(y,s)\ .$$

$$.\ \phi(A_{s/t}^{-1} t^{-P}(x-y))dy\ ds$$

b) $$AH(y,s) = F(y,s)A\phi(t^{-P}(x-y),s/t) - 2(Ls^{P^{\#}}\partial\phi . Ls^{P^{\#}}\partial F)$$

c) $$A\phi(t^{-P}(x-y),s/t) = \phi_1(t^{-P}(x-y),s/t)\frac{1}{t} + \phi_2(t^{-P}(x-y),s/t)\frac{1}{s}$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son funciones $C_0^{\infty}(E_{n+1,+})$ tales que:

sop ϕ_1 está contenido en $B(0,1) \times (1/4, 1/2)$ y

sop ϕ_2 está contenido en $(B(0,1) \cap B^c(0,1/2)) \times (0,1/2)$

La expresión de a) se reduce a:

d) $$F(x,t) = \int_{t/2}^{t} \det(A_{s/t}^{-1}\ t^{-P}) \int_{B(x,t)} F(y,s)(\phi_1(t^{-P}(x-y),s/t)\frac{1}{t} +$$

$$+ \phi_2(t^{-P}(x-y),s/t)\frac{1}{s})\ \phi(A_{s/t}^{-1}\ t^{-P}(x-y))dyds$$

$$= \int_{t/2}^{t} \det(A_{s/t}^{-1}\ t^{-P})\int_{B(x,t)} F(y,s)(\phi_1(t^{-P}(x-y),s/t)\frac{s}{t} +$$

$$+ \phi_2(t^{-P}(x-y),s/t))\phi(A_{s/t}^{-1}\ t^{-P}(x-y))dyds/s$$

finalmente,

e) $F(x,t) = \int_{t/2}^{t} t^{-\gamma} \int_{B(x,t)} Q(t^{-P}(x-y),s/t)F(y,s)dy\frac{ds}{s}$

donde $Q(t^{-P}(x-y),s/t) = \det(u^{-P})(\phi_1(z,u)u + \phi_2(z,u))\phi(u^{-P}z)$

con $s/t = u$, $t^{-P}(x-y) = z$

Es decir $Q(t^{-P}(x-y),s/t) = Q(z,u)$ tal que $\operatorname{sop}Q(z,u)$ está contenido en $B(0,1) \times (1/2,1)$

pues:

si $z = t^{-P}(x-y)$ es $y = x-t^{P}z$, $dy = t^{\gamma}\, dz$, y

$$B(x,t) = \{y:\rho(x-y) \leq t\} = \{z:\rho(t^{P}z) = t\rho(z) = t\} = B(0,1)$$

y $\frac{s}{t} = u$, $\frac{ds}{s} = \frac{du}{u}$, $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$

f) Teniendo en cuenta que la matriz L es inversible, se escribe:

$$\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial = \overset{k}{\otimes} L(\tfrac{t}{s})^{P^{\#}} L^{-1}(Ls^{P^{\#}} \partial)$$

y

$$|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(y,s)| \leq \| \overset{k}{\otimes} L(\tfrac{t}{s})^{P^{\#}} L^{-1}\| \cdot |\overset{k}{\otimes} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s)|$$

Sea:

$$|W| = |\overset{k-r}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial Q(t^{-P}(x-y), \tfrac{s}{t})|$$

Como las derivadas respecto de la variable x de las funciones ϕ_1 y ϕ_2 se anulan fuera de la bola $B(0,1)$, la expresión de $|W|$ puede mayorarse por:

$$|W| \leq C|A_{s/t}^{-1} t^{-P}(x-y)|^m \phi(A_{s/t}^{-1} t^{-P}(x-y))\chi_{B(x,t)}(y)$$

Estas observaciones y d) permiten escribir:

g) $|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \leq$

$$\leq C \int_{t/2}^{t} \det(A_{s/t}^{-1} t^{-P}) \int_{B(x,t)} |\overset{r}{\otimes} Ls^{P^{\#}} F(y,s)| \, |W| \, dy \, \frac{ds}{s}$$

Aplicando Schwarz respecto de dy $\frac{ds}{s}$, resulta:

$|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \leq$

$$\leq C\left(\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} |\overset{r}{\otimes} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s)|^2 \, dy \, \frac{ds}{s}\right)^{1/2} .$$

$$. \left(\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} \det(A_{s/t}^{-1} t^{-P})^2 \, |W|^2 \, dy \, \frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

Por lo tanto,

$$|\overset{k}{\otimes} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \leq C \; I.J$$

donde:

$$J^2 \leq C \; t^{-2\gamma} \int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} \det(A_{s/t}^{-1})^2 (|A_{s/t}^{-1} t^{-P}(x-y)|^{2m} .$$

$$. \phi(A_{s/t}^{-1} t^{-P}(x-y))\chi_{B(x,t)}(y))^2 \, dy \, \frac{ds}{s}$$

$$\leq C\ t^{-2\gamma} \int_{1/2}^{1}\int_{B(0,1)} \det(u^{-P})^2 |u^{-P}z|^{2m} (\phi(u^{-P}z)\chi_{B(0,1)}(z))^2 t^{\gamma} dz \frac{du}{u}$$

En virtud del Lema 3.v) se escribe:

$$J^2 \leq C\ t^{-\gamma} \int_{1/2}^{1} \int_{B(0,1)} (1-u)^{-n}\ |u^{-P}z|^{2m}\ e^{-\pi|\sqrt{2}\ u^{-P}z|^2}\ dz\ \frac{du}{u}$$

Finalmente resulta $J^2 \leq C\ t^{-\gamma}$ pues las integrales son finitas de ahí que:

$$|\overset{k}{\otimes}\ Lt^{P^{\#}}\ \partial F(x,t)|^2 \leq C\ t^{-\gamma}.I^2 =$$

$$\leq C\ t^{-\gamma}\ (\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} |\overset{r}{\otimes}\ Ls^{P^{\#}}\ \partial F(y,s)|^2\ dy\ \frac{ds}{s})$$

Por lo tanto queda concluída la demostración del Teorema del Valor Medio.

Consecuencias del Teorema del Valor Medio

5.2. Es válida la siguiente desigualdad:

$$|\overset{k}{\otimes}\ Lt^{P^{\#}}\ \partial F(x,t)|^r \leq Ct^{-\gamma}\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} |\overset{h}{\otimes}\ Ls^{P^{\#}}\ \partial F(y,s)|^r\ dy\ \frac{ds}{s}$$

para todo entero h tal que $0 \leq h \leq k$ y $r \geq 1$.

Demostración:

El Teorema del Valor Medio asegura que es válida la siguiente desigualdad:

$$|\overset{k}{\circledast} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \leq C \int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} \det(A^{-1}_{s/t}\ t^{-P})$$

$$|\overset{h}{\circledast} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s)|\,|W| dy \frac{ds}{s}$$

donde: $|W| \leq C|u^{-P}z|^{m}\ \zeta(u^{-P}z)\ \chi_{B(0,1)}(z)$

$$\leq C|u^{-P}z|^{m}\ e^{-\pi|u^{-P}z|^{2}}\ \chi_{B(0,1)}(z), \quad u = \frac{s}{t}$$

Puesto que $\det(u^{-P})|W|$ es acotado en $\rho(z)$ 1, $1/2 \leq u \leq 1$ considerando el supremo esta expresión contribuye con una constante; luego;

$$|\overset{k}{\circledast} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \leq C(\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} t^{-\gamma} |\overset{h}{\circledast} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s)| dy \frac{ds}{s})$$

Aplicando Holder con $1/r + 1/r' = 1$ $(r \geq 1)$ resulta:

$$|\overset{k}{\circledast} Lt^{P^{\#}} \partial F(x,t)| \leq C(\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} |\overset{h}{\circledast} Ls^{P^{\#}} \partial F(y,s)|^{r} dy \frac{ds}{s})^{1/r}.$$

$$.(\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} t^{-\gamma r'} dy \frac{ds}{s})^{1/r'}$$

$$\leq C.I.J$$

donde:

$$J = (\int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} t^{-\gamma r'} dy \frac{ds}{s})^{1/r'}$$

$$= C\left(\int_{t/2}^{1} \int_{B(0.1)} t^{-\gamma r'+\gamma}\, dz\, \frac{du}{u}\right)^{1/r'}$$

$$= C.\ t^{-\gamma/r}$$

Luego,

$$|\theta^k\, Lt^{P^\#}\, \partial F(x,t)| \leq C.I.J$$

$$\leq C.t^{-\gamma/r}\left(\int_{t/2}^{t} \int_{B(x.t)} |\theta^h Ls^{P^\#}\, \partial F(y,s)|^r dy \frac{ds}{s}\right)^{1/r}$$

y así,

$$|\theta^k\, Lt^{P^\#}\, \partial F(x,t)|^r \leq C.t^{-\gamma} \int_{t/2}^{t} \int_{B(x,t)} |\theta^h\, Ls^{P^\#}\, \partial F(y,s)|^r\, dy\, \frac{ds}{s}$$

con lo cual queda demostrada la desigualdad propuesta.

6. Complemento del Lema útil del Capítulo III

Se define,

$S_I = \{\phi \in S$ tales que el sop(ϕ) está contenido en la banda B_I paralela a $E_n\}$

donde:

$B_I = \{(x,t) \in E_{n+1,+}$ tales que $t \in I$(intervalo real)$\}$

Se considera sobre S_I la siguiente noción de convergencia:

$\phi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ en S_I cuando el sop(ϕ_j) está contenido en B_I para todo j y $(1+|x|^2)^k D^\sigma \phi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (1+|x|^2)^k D\phi$ uniformemente en E_n para cada multi-índice σ, k entero

Definiendo la transformada parcial de Fourier F_I y su conjugada $\overline{F}_I$ como sigue:

$$F_I(\varphi)(x,t) = \int e^{2\pi i(x.y)}\,\varphi(y,t)dy$$

$$\varphi \text{ en } S_I$$

$$\overline{F}_I(\varphi)(x,t) = \int e^{-2\pi i(x.y)}\,\varphi(y,t)dy$$

resulta F_I y $\overline{F}_I$ isomorfismos recîprocos uno del otro de S_I en sí mismo.

Sea $S'_I = \{T: S_I \to C$ tal que T es lineal y $(T.\varphi_j) \underset{j}{\to} 0$ si $\varphi_j \underset{j}{\to} 0$ en $S_I\}$

Definiendo $F_I(T)$, $T \in S'_I$ como sigue:

$$(F_I(T), \varphi) = (T, F_I(\varphi))$$

y análogamente $\overline{F}_I$, resulta ${}_I$ y $\overline{F}_I$ isomorfismos recîprocos uno del otro de S'_I en sí mismo.

$(v_t)^\wedge\ (x,t)$ coincide con $(\hat{v})_t$ en el siguiente sentido:

$((v_t)^\wedge, z) = ((\hat{v})_t, z)$ para $z \in S$

$((v_t)^\wedge\ z) = ((v_t), \hat{z}) = -(v,(\hat{z})_t) = -(v,(z_t)^\wedge) =$

$= -(\hat{v},z_t) = ((\hat{v})_t, z)$

En general, si $T \in D'$ y $a(t) \in C^\infty$, se define:

$(a(t)T,h) = (T,a(t)h)$

En cuanto a la derivada del producto multiplicativo, es:

$((a(t)T', h) = -(a(t)T,h') = -(T,a(t)h') = -(T,a(t)h')+$

$+ (T,a'(t)h) - (T,a'(t)h) =$

$$= -(T,a(t)h' + a'(t)h)) + (T,a'(t)h)$$

$$= -(T,(a(t)h)') + (T,a'(t)h)$$

$$= (T',a(t)h) + (Ta'(t),h)$$

$$= (T'a(t),h) + (Ta'(t),h)$$

Por lo tanto,

$$((a(t)T',h) = ((T'a(t) + Ta'(t)),h)$$

corresponde la siguiente notación:

$T = v(x,t)$, $a(t) = e^{\pi|t^{p^{\#}}x|^2}$

Telma Caputti

Lista de Referencias

1. N.Aronszajn and K.T.Smith, Theory of Bessel Potencials. Part I, Annals de Institute Fourier (11,1961) 385-475

2. A.Benedek and R.Panzone, The spaces L_p with mixed norms. Duke Math. Journal (28,1961) 301-324

3. A.P.Calderón, Lebesgue spaces of Differentiable functions and distributions. Symposium on Pure Mathematics (5,1961) 33-49

4. A.P.Calderón and A. Torchinsky, Spaces of distributions with maximal functions in L_p. Manuscrito en preparación

5. A.P.Calderón and A.Zygmund, On the existence of certain singular integrals. Acta Mathematica (88,1952) 85-139

6. M. de Guzmán, Singular integrals with generalized homogeneity Review Academy Sciences (Spain) (44,1970) 77-137

7. L.Schwartz, Théorie des distributions. París 1966

8. E.M.Stein, The characterization of functions arising as potencials Bulletin American Mathematical Society (67,1961) 102-104

9. , Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University. Academis Press 1970

10. E.M.Stein and G.Weiss, On the theory of harmonic functions of several varaibles, I. The theory of H_p spaces. Acta Mathematica 103 (1960) 25-62

11. M.H.Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions of Euclidean n-spaces, I. Journal of Mathematics and Mechanics, (13,1964) 407-479

12. E.C.Tichmarsh, Theory of Fourier integrals, Oxford 1937

13. A.Torchinsky, On a Mean Value Inequality. Bulletin of the American Mathematical Society (81,1975) 950-953

14. A.Zygmund, Trigonometric Series, Vol. I-II, 2d. edition. Cambridge University Press. Cambridge 1969

15. G.H.Hardy, J.E.Littlewood and Polya. Inequalities. Cambridge 1959