Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Espacios de jets en característica p 0

Villamayor, Orlando Eugenio

1976

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Villamayor, Orlando Eugenio. (1976). Espacios de jets en característica p 0. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1533_Villamayor.pdf

Cita tipo Chicago:
Villamayor, Orlando Eugenio. "Espacios de jets en característica p 0". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1976.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1533_Villamayor.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

TESIS

ESPACIO DE JETS EN CARACTERISTICA $p > o$.

Presentada por: Orlando E. Villamayor

Director de tesis: Ing. Orlando E. Villamayor

1533

1533

INTRODUCCION

Dadas dos variedades diferenciables V y W de dimensión finita Boardman ha construido una nueva variedad denominada $J(V,W)$ y subconjuntos llamados genéricos de singularidades tales que dado un morfismo cualquiera $\Phi : V \to W$ de variedades diferenciables queda definido un morfismo de variedades $J(\Phi): V \to J(V,W)$ de modo que las singularidades de Φ en un punto $p \in V$ queda determinado por la contraimagen según $J(\Phi)$ de los subconjuntos genéricos de singularidad en dicho punto [1] .

Mount y Villamayor en [5] han definido las singularidades en todo punto $p \in X$ de un morfismo de pre-esquemas de k-álgebras:

$$(\Psi,\theta) : (X,\theta_X) \to (Y,\theta_Y)$$

y han logrado bajo ciertas restricciones la construcción de un pre-esquema $J(\theta_X,\theta_Y)$ y subconjuntos "genéricos de singularidad" donde nuevamente la singularidad de Ψ en un punto $p \in X$ queda determinado por la contraimagen de dichos subconjuntos por un nuevo morfismo de pre-esquemas $J(\Psi) : X \to J(\theta_X,\theta_Y)$ perfectamente determinado por $\Psi: X \to Y$.

No obstante si k es un anillo entero de característica $p > 0$ la definición de singularidad de Ψ en un punto $x \in X$ resulta un tanto insuficiente como veremos a lo largo del trabajo.

Mi objetivo es plantear una nueva definición de singularidad de Ψ en un punto de X , de los pre-esquemas $J(\theta_X,\theta_Y)$ y de los subconjuntos "genéricos de singularidad" de modo que si el anillo entero k tiene característica cero coincidan con los dados en [5] . Para estas construcciones y definiciones he hecho uso esencialmente del artículo [6] de Dieudonné.

En el capítulo I hago un breve resumen de [1] principalmente de los conceptos utilizados en la algebrización.

En el capítulo II se desarrolla el concepto de módulos diferenciales de orden superior basándonos principalmente en [3] como así también el trabajo de Fitting [4] ambos temas centrales para la definición de singularidades.

En el Capítulo III se reseña la construcción del pre-esquema $J(\theta_X, \theta_Y)$ y de "singularidades genéricas de [5].

En el capítulo IV se sugiere una nueva definición de haz de módulos diferenciales de k-álgebras regulares de característica $p > 0$ basándome en [6], algunos de los conceptos auxiliares utilizados ya fueron desarrollados por A. Torelli en [9] . Este capítulo motiva las construcciones y definiciones desarrolladas en el capítulo V, en éste la notación utilizada es la introducida por Groethendieck en [8] .

CAPITULO I

Espacio de Jets y campos vectoriales totales [1] .

Vamos a construir espacios que sirvan para clasificar las singularidades de las aplicaciones diferenciables que se puedan definir entre dos variedades diferenciables dadas.

Como este problema es esencialmente local podemos iniciar el estudio considerando $W \simeq R^w$ y $V \simeq U$ abierto en R^v para luego demostrar que las construcciones a definir se "pegan bien".

Dado U abierto en una variedad V denotaremos por F(U) al R-álgebra de aplicaciones suaves (en el sentido C^∞) de U a valores en los reales. Y si p es un punto F(p) es el R-álgebra de gérmenes de aplicaciones suaves en un entorno de p. Llamaremos m_p al ideal en F(p) de gérmenes de funciones que se anulan en p.

Supongamos $\{ x_1, \dots, x_v \}$ y $\{y_1, \dots, y_w\}$ sistemas de coordenadas en V y W respectivamente, dado $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se define una relación de equivalencia como sigue: $f \sim_n g$ si son ambos gérmenes de funciones en un mismo punto $p \in V$, $f(p) = g(p)$ y las derivadas parciales de orden menor o igual que n coinciden en p.

Llamamos $J^n(V,W)$ al conjunto de aplicaciones suaves definidas localmente de la variedad V en la variedad W ligadas por la relación $\sim_n$.

Es claro que si $m \geq n$, $\sim_m$ es una relación más fina que $\sim_n$ y resulta una proyección natural $\Pi^m_n : J^m(V,W) \to J^n(V,W)$.

Sea f representante de alguna coclase en $J^n(V,W)$ queda bien definida en todo punto p del dominio de f y el punto f(p), dando lugar a aplicaciones $\Pi^n_v : J^n(V,W) \to V$ y $\Pi^n_w : J^n(V,W) \to W$.

Dado U abierto en V y $f: U \to W$ una aplicación diferenciable, queda definida una aplicación $J^n(f) : U \to J^n(V,W)$ donde $J^n(f)(p)$ es la coclase de f como germen en p. Al elemento $J^n(f)(p)$ se lo llama n-jet de f en el punto p.

De lo anterior resulta, para $k \geqslant m \geqslant n$ las relaciones $J^n(f) = \Pi^m_n \circ J^m f$ y $\Pi^k_n = \Pi^m_n \circ \Pi^k_m$.

Cuando hablamos de campos vectoriales sobre un abierto U en una variedad V nos referiremos indistintamente a una sección del fibrado tangente sobre el abierto U o a una derivación en la R-álgebra F(U) .

Si suponemos un sistema de coordenadas $\{x_1, \ldots, x_v\}$ en V quedan definidas derivadas $\{d_1, \ldots, d_v\}$ tales que $d_i(x_j) = \delta_{ij}$. Dado $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_v)$ una v-upla de enteros positivos escribimos formalmente $d^\sigma = d_1^{\sigma_1}, d_2^{\sigma_2}, \ldots, d_v^{\sigma_v}$, denotando por $|\sigma|$ a la suma $\sum_{i=1}^{v} \sigma_i$.

Vamos a dar en $J^n(V,W)$ un sistema natural de coordenadas:

$$X_i = x_i \circ \Pi^n_v \qquad i = 1, \ldots, v$$

$$Y_j = Z_{j\rho\ldots} = y_j \circ \Pi^n_w \qquad j = 1, \ldots, w$$

$$Z_{j,\sigma.}(f) = (d^\sigma(y_j \circ f))_p \qquad |\sigma| \leqslant n$$

con f un germen en p de alguna aplicación de V en W , quedando definida en $J^n(V,W)$ una estructurade variedad diferenciable con la cual las aplicaciones Π^m_n y $J^n f$ resultan aplicaciones suaves entre variedades diferenciables.

Definición 1.1:

$$J(V,W) = \varprojlim_{n \in N} J^n(V,W)$$

Borel demostró que J(V,W) es isomorfo a $J^\infty(V,W)$. El límite inverso construido a partir de las aplicaciones $\Pi^m_n : J^m(V,W) \to J^n(V,W)$ y J(V,W) con la topología límite inverso.

Definición 1.2:

Dado U abierto en J(V,W) $\Phi : U \to R$ se dirá una aplicación suave si $\Phi = \Phi \circ \Pi_n$ localmente, donde n puede no estar acotado en el abierto U.

Como antes denotaremos por F(U) al conjunto de aplicaciones suaves en U a valores reales, $F(s)$ el anillo de gérmenes de tales aplicaciones en $s \in J(V,W)$.

Así definidas las aplicaciones suaves resulta $F(s) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F(\Pi^n_v s)$ y dado N abierto en V, $f: N \to W$ suave , $\phi \in F(U)$ se tiene que $\phi \circ Jf$ también es una aplicación suave.

1.3 Campos vectoriales totales.

Vamos a definir los campos vectoriales totales como operadores que definiremos localmente y que actuarán en las funciones suaves de la variedad $J(V,W)$ a valores en R, cumpliendo la regla de la cadena.

Por fibrado tangente total entenderemos al fibrado vectorial que tenga por secciones a los campos vectoriales totales.

Suponemos como antes V y W variedades diferenciables con sistemas de coordenadas $\{x_1 , \ldots, x_v\}$ y $\{y_1 , \ldots, y_w\}$ respectivamente.

<u>Definición</u>:

Los campos vectoriales totales D_i $i = 1 , \ldots, v$ en $J(V,W)$ se definen:

$$D_i X_j = \delta_{ij}$$

$$D_i Z_{j\sigma} = Z_{j\sigma'} \quad , \text{ donde } \quad \sigma' = (\sigma_1 , \ldots, \sigma_i +1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_v) \quad .$$

Dado U abierto en $J(V,W)$ llamamos campos vectoriales totales en U a cualquier combinación lineal de operadores $\sum_{i=1}^{v} \phi_i D_i$ con $\phi_i \in F(U)$.

Si σ es una v-upla de enteros no negativos notamos que $D^\sigma Y_j = Z_{j\sigma}$. Resulta clara la imposibilidad de definir los operadores D_i en $J^n(V,W)$, esto lleva a la construcción de $J(V,W)$.

Hemos definido campos vectoriales totales en forma local (a partir de sistemas de coordenadas en V y W), como pretendemos definir un fibrado total globalmente, vamos a dar una caracterización de los campos totales que nos permita independizarnos del sistema de coordenadas.

Sea N abierto en V y $f:N \to W$ una aplicación suave, por la definición de $Z_{j\sigma}$ resulta la identidad:

1.4 $$D_i\phi \circ Jf = d_i(\phi \circ Jf)$$

válida para las funciones coordenadas definidas anteriormente y por lo tanto para todo $\phi \in F(U)$ por la regla de la cadena.

Más aún para cualquier campo vectorial d en N queda bien definido un campo vectorial total D en $\Pi^{-1}(N)$ con la condición:

$$D\phi \circ Jf = d(\phi \circ Jf)$$

para toda aplicación suave $f:N \to W$ y $\phi \in F(\Pi^{-1}(N))$.

Con esto eliminamos la dependencia de los campos vectoriales totales con el sistema de coordenadas particular elegido en V y en W.

Definición 1.5

Definimos localmente el fibrado tangente total D sobre J(V,W) como el fibrado vectorial que tiene a los campos vectoriales totales $\{D_1, \ldots, D_v\}$ como base de secciones. Los elementos de una fibra sobre s J(V,W) se llaman vectores tangentes totales, estos inducen operadores lineales de F(s) en R que satisfacen la fórmula usual de derivación.

El fibrado D esta canónicamente identificado por la fórmula:

$$D\phi \circ Jf = d(\phi \circ Jf) \qquad d \in T_v \quad .$$

Denotemos $D = \Pi_v^*(d)$ y $(Jf)^*$ la función transpuesta de Jf, se tiene que para toda sección Jet Jf se verifica:

$$(Jf)^*(\Pi_v^* d) = d \quad .$$

Como por definición todo campo vectorial total es localmente de la forma $\sum_{i=1}^{v} \phi_i D_i$, con $\{D_i\}$ definidos en 1.3, se tiene:

$$D\phi \circ Jf = ((Jf)^* D)(\phi \circ Jf) \quad .$$

Dado U abierto en J(V,W), $\phi_1, \phi_2 \in F(U)$ y D_1, D_2 campos vectoriales totales en U se define:

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \qquad \text{de donde}$$

$$[\phi_1 D_1, \phi_2 D_2] = \phi_1 D_1(\phi_2) D_2 - \phi_2 D_2(\phi_1) D_3 + \phi_3 \phi_2 [D_1, D_2] .$$

Los campos vectoriales totales resultan cerrados por este producto que es un producto de Lie.

1.6 Rango y Rango total.

Sea V una variedad suave de dimensión n , $N \subset V$ y $A \subset F(N)$ un subconjunto, dado $p \in N$ se define una transformación R-lineal $T_{V/p} \to R^A$ donde cada vector d de la fibra $T_{V/p}$ (espacio tangente a V en el punto p) define una aplicación de A en R que asigna a cada $a \in A$ el valor $d(a) \in R$.

Definición: El rango de A en el punto $p \in N$: $rg_p(A)$, es la dimensión de la imagen de la transformación R-lineal definida más arriba. Y por corango de A en el punto p $kr_p(A)$ entenderemos a la dimensión del núcleo de la misma resultando:

$$r\,k_p(A) + k\,r_p(A) = n .$$

Análogamente dado $s \in U \subset J(V,W)$ y $A \subset F(U)$ queda definida una transformación R-lineal

$$D_{/s} \to R^A .$$

Definición: Rango total A en s : $trk_s(A)$, será la dimensión de la imagen de la transformación lineal anterior y corango total: $tkr_s(A)$ será la dimensión del núcleo de la misma.

También aquí resulta

$$T\,r\,k_s(A) + T\,k\,r_s(A) = n = \dim V .$$

Lema 1.7 : Sea $s \in U \subset J(V,W)$, $A \subset F(U)$, $p = \pi_V(s)$ y $f:N \to W$ una aplicación suave tal que en el punto p se tiene $Jf(p) = s$, resultando $(Jf)^*(A) \subset F((Jf)^{-1}(U))$. Entonces :

$$T\,r\,k_s(A) = r\,k_p((Jf)^*(A)) \text{ y } T\,k\,r_s(A) = k\,r_p((Jf)^*(A)) .$$

Demostración: Resulta de 1.4.

Definición 1.8. Sea $U \subset J(V,W)$ un abierto. Diremos que una familia $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subset F(U)$ es totalmente independiente en un punto

$s \in U$ si el rango total de $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ en s es k.

Diremos que la familia es totalmente independiente en U si lo es en todo punto $s \in U$. Claramente debe ser $k \leq n = \dim V$.

Lema 1.8.

Sea U abierto en $J(V,W)$, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ totalmente independientes en U. Entonces existen campos vectoriales totales $D_1, D_2, \ldots, D_n$, unívocamente determinados tales que:

$$D_i \phi_j = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq n \quad .$$

Demostración: Podemos suponer U suficientemente chico tal que el fibrado tangente total restringido a V, D/U, admita una base $\{\partial_i, \ldots, \partial_n\}$. La matriz $|\partial_i \phi_j|$ no se anula en ningún punto por hipótesis. Sea entonces (α_{ij}) su matriz inversa.

Definiendo $D_i = \sum_j \alpha_{ij} \partial_j$ estos resultan los únicos campos vectoriales que verifican las condiciones pedidas. La unicidad asegura la existencia de campos vectoriales D_i, $i = 1, \ldots, n$ definidos globalmente en U y que verifican las condiciones pedidas.

Lema 1.9. Sea $Q \subset J(V,W)$ una subvariedad, $p \in V$, $f: V \to W$ una aplicación tal que Jf es transversal a Q en p. $f(p) = q$ y $Jf(p) = s$, $s \in Q$ [2]. Cerca de p, $Z = (Jf)^{-1}(Q)$ es una subvariedad de V.

Si $\mathcal{E} \subset F(s)$ es el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en Q y $f/Z : Z \to W$ es la restricción de $f: V \to W$ a Z. Denotando por (f/Z) a la función diferencial asociada a f/Z se tiene:

$$\dim N u \, (f/Z)^*_p = t\,k\,r_s (\mathcal{E} + \pi^*_w m_q)$$

donde m denota el ideal en $F(q)$ de gérmenes que se anulan en q.

Demostración: Cerca de s, Q es la imagen inversa de una subvariedad de $J^k(V,W)$ para algún k finito. La transversalidad junto con el teorema de la función implícita aseguran que $(Jf)^*(\mathcal{E})$ genera el ideal de gérmenes en p de funciones que se anulan en Z. Por lema 1.7 se tiene:

$$T\,k\,r_s (\mathcal{E} + \pi^*_w m_q) = k\,r_p (Jf^*(\mathcal{E} + \pi^*_w m_q)) \quad .$$

Pero un vector $d \in (T_v)$ anula $(Jf)^*\mathcal{E}$ si y sólo si es tangente a Z y anula a $(Jf)^*m_q = f^*(m_q)$ si y sólo si $d \in N \cup f_*$ el lema resulta de $(T_{V/Z})_p \cap N \cup (f_*)_p = N \cup (f/Z)_p$.

SUBCONJUNTOS DE SINGULARIDADES.

El lema 1.9 será el resultado clave para construir en el espacio de Jets objetos universales que permitan definir la singularidad de cualquier aplicación de variedades diferenciables $f: V \to W$ en cualquier punto $p \in V$.

Definición 1.10 : Dado $A \subset F(U)$, U abierto en $J(V,W)$, por su k-ésima extensión jacobiana entenderemos al ideal en $F(U)$ generado por A y el conjunto de todos los determinantes de las matrices $\ell \times \ell$ de la forma $|D_i \alpha_j| \alpha_j \in A$, $1 \leq i, j \leq \ell$ donde $\ell = n - k + 1$. La denotaremos por $\Delta^k(A)$, por convención $\Delta^{n+1} A = F(U)$.

De ahora en adelante n designa la dimensión de V y D los campos vectoriales totales en el fibrado tangente total D.

Lema 1.11 . Sea $s \in U$ abierto en $J(V,W)$. $T\,k\,r_s A \geq k$ si y sólo si $\Delta^k A \subset m_s$.

1.12

Sea $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ una p-upla de enteros no negativos, diremos que I tiene longitud p. Vamos a construir un subconjunto $\Sigma^I \subset J(V,W)$:

$$s \in \Sigma^I \text{ si y sólo si } \begin{cases} T\,k\,r_s\, m_q = i_1 \\ T\,k\,r_s\, \Delta^{i_1} m_q = i_2 \\ T\,k\,r_s\, \Delta^{i_2} \Delta^{i_1} m_q = i_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ T\,k\,r_s\, \Delta^{i_{p-1}} \Delta^{i_{p-2}} \cdots \Delta^{i_1} m_q = i_p \end{cases}$$

donde $q = \pi_W(s)$

Nota: Para todo punto $s \in J(V,W)$ y todo entero positivo p, existe una única p-upla $I = (i_1, \ldots, i_p)$ tal que $s \in \Sigma^I$ y más aún $i_1 \geq i_2 \geq \ldots. \geq i_p$.

La primer observación es obvia, la segunda responde al hecho que los corrangos totales de ideales crecientes son decrecientes.

Definición 1.13: Dado $f : V \to W$ definimos sus subconjuntos de singularidad $\Sigma^I(f) \subset V$ para I una p-upla de enteros no negativos como $(Jf)^{-1}(\Sigma^I)$, donde $Jf : V \to J(V,W)$ es la sección jet.

CAPITULO II

Módulos diferenciales [3] .

En lo que sigue del trabajo entenderemos por anillo, salvo aclaración, a un anillo conmutativo con unidad. Análogamente cuando hagamos referencia a una k-álgebra.

2.1

Siendo A una k-álgebra, definimos $\bar{\phi} : A \times A \to A$, $\bar{\phi}(a,b) = a.b$, aplicación que resulta k-bilineal, de donde existe $\phi : A \otimes A \to A$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\bar{\phi}"] \arrow[d, "p"'] & A \\ A \otimes_k A \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, siendo p la proyección al cociente.

Si denotamos por I(A/k) al núcleo de ϕ se tiene la sucesión exacta

$$0 \to I(A/k) \to A \otimes_k A \to A \to 0 \qquad .$$

Dando a $A \otimes_k A$ estructura de A-módulo a izquierda en forma natural, el ideal I(A/k) es generado por la familia $\{a \otimes 1 - 1 \otimes a$ con $a \in A \}$. En efecto, supongamos $x \in I(A/k)$

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \qquad y \ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$$

$$x = x - 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i - a_i . b_i \otimes 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) \qquad \text{c.q.d.}$$

siguiendo a [3] definimos ahora la aplicación $T_k : A \to I(A/k)$ $T_k(a)=$

$= 1 \otimes_k a - a \otimes_k 1$, con las siguientes propiedades de verificación inmediata

i) $T_k(1) = 0$

ii) T_k es k-lineal

iii) $T_k(a.b) = a\, T_k(b) + b\, T_k(a) + T_k(a)\, T_k(b)$

la aplicación T_k se llama k-serie de Taylor universal de A . En general dada una A-álgebra B y una aplicación k-lineal $L : A \to B$ tal que:

i) $L(1) = 0$

ii) $L(a,b) = aL(b) + bL(a) + L(a).\, L(b)$

se dice que L es una k-serie de Taylor.

Nota: En 2.1 hemos demostrado que I(A/k) está generado como A-módulo a izquierda por la imagen de T .

<u>Propiedad 2.1</u>. Dados A,B k-álgebras y $L : A \to B$ una serie de Taylor existe un único morfismo de A-álgebras $F : I(A/k) \to B$ tal que $F \circ T_k = L$([3]).

<u>Lema 2.2</u> : Si M es un A-módulo, A una k-álgebra y $\phi : A \to M$ k-lineal es tal que $\phi(1) = 0$ entonces existe un único A-morfismo $\theta : I(A/k) \to M$ tal que $\theta \circ T_k = \phi$.

Demostración : Veamos primero que $A \otimes A \simeq A(1 \otimes 1) \oplus_A I(A/k)$ suma directa de A-módulos a izquierda.

La aplicación $T_k : A \to I(A/k)$ la extendemos a una aplicación A-lineal $1_A \otimes_k T_k : A \otimes A \to I(A/k)$ $(1_A \otimes T_k)(a \otimes b) = a.T_k(b)$. Afirmamos que $1_A \otimes T_k$ es una proyección de A-módulos, en efecto I(A/k) está generado como A-módulo por elementos de la forma $1 \otimes b - b \otimes 1$, $b \in A$ y $(1_A \otimes T_k)(1 \otimes b - b \otimes 1) = 1.T_k(b) - b.T_k(1) = T_k(b)$.

Por otro lado cualquiera sea $y \in A \otimes_k A$ se tiene $y = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = \Sigma\, a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) + \Sigma\, a_i b_i \otimes 1 = \Sigma\, a_i T_k(b_i) + (\Sigma\, a_i b_i)(1 \otimes 1)$ de donde resulta lo pedido.

Dado $\phi : A \to M$ k-lineal, la extendemos a $1_A \otimes \phi : A \otimes_k A \to M$ donde $(1_A \otimes \phi)(a \otimes b) = a\, \phi(b)$.

La condición $\phi(1) = 0$ asegura que $(1 \otimes \phi)(1 \otimes 1) = 0$, luego $1 \otimes \phi$ es A-lineal y factoriza por I(A/k) c.q.d.

Sea R un anillo, si $\{a_i; \ldots, \hat{a}_n\}$ es una familia de elementos e R vamos a denotar $a_1 \ldots \hat{a}_{i_1} \ldots \hat{a}_{i_r} \ldots a_n$ al producto $\prod_{k \neq i_1,\ldots,i_r} a_k$.

Definición 2.3: Sean R y k anillos, R una k-álgebra y M un R-ódulo. Una n-derivación o derivación de orden n, k-lineal de R en es una aplicación k-lineal de R en M que verifica:

) Para toda familia $\{\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n)\}$ en R se tiene

$$L_n(\alpha(0),\alpha(1),\ldots,\alpha(n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(\sum_{j_1<<j_i} \alpha(j_1)\ldots\alpha(j_i) L_n (\alpha(0).\alpha(j_1) \ldots \widehat{\alpha(j_i)} \ldots \alpha(j_n))$$

i) $L_n(1) = 0$.

Dada la aplicación $T_k : R \longrightarrow I(R/k)$ definida en 2.1 denotaremos or $D^n(R/k)$ al R-módulo $I(R/k)/I(R/k)^{n+1}$ y por T_k^n o simplemente T^n la aplicación $p \circ T_k$ donde p es la proyección al cociente de I(R n $D^n(R/k)$.

Teorema 2.4: Sean R, k-anillos, M un R-módulo, R una k-álgebra L una derivación k-lineal de orden n de R en M.

La aplicación K-lineal $T^n : R \to D^n(R/k)$ (ver def. 2.3) es una d ivación k-lineal de orden n y existe un único morfismo R-lineal h e $D^n(R/k)$ en M tal que $h \circ T^n = L$.

Recíprocamente si h es un R-morfismo de $D^n(R/k)$ en M resulta $\circ T^n : R \to M$ una derivación k-lineal de orden n.

Demostración: Notemos que en I(R/k) es válida para cualquier f ilia de elementos $x_0, \ldots, x_n$ de R la fórmula:

$$T_k(x_0) \ldots T_g(x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j_1<<j_i} x_{j_1} \ldots x_{j_i} T_k(x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x$$

Demostramos por inducción en n. Si n = 1

$$T_k(x_0 x_1) - x_0 T_k(x_1) - x_1 T_k(x_0) = T_k(x_1) . T_k(x_0) .$$

Si suponemos válida la fórmula para n :

$$_g(x_0) \ldots T_g(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j_1<<j_i} x_{j_1} \ldots x_{j_i} T_k(x_0 \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_n) T_k(x_{n+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum x_i \ldots x_i [T_k(x_0 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_i \ldots x_n x_{n+1}) -$$

$$- (x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_n)\, T_k(x_{n+1}) - x_{n+1} T_k(x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_n)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \; x_{j_1} \ldots x_{j_i} T_k(x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_{n+1}) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j_1 < < j_i} x_0 \ldots x_n \; T_k(x_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \; x_{j_1} \ldots x_{j_i} \; T_k(x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_{n+1})$$

porque

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j_1 < < j_i} 1 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0$$

Como $T_k(x_0) \ldots T_k(x_n)$ es nulo en $D^n(R/k)$ se tiene

$$T_k^n (x_0 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1 < < j_i} T_k^n(x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_n)\; x_{j_1} \ldots x_{j_i}$$

Supongamos ahora L una derivación k-lineal de orden n de R en M. Por Lema 2.2 existe un único morfismo de R-módulos $h^*: I(R/k) \to M$ tal que $h^* \circ T_k = L$. Para completar la demostración basta notar que h^* se anula en $I(R/k)^{n+1}$:

$$h^*(T_k(x_0) \ldots T_k(x_n)) = h^*\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j_1 < < j_i} x_{j_1} \ldots x_{j_i} T_k(x_0 \ldots \hat{x}_{j_1} \ldots \hat{x}_{j_i} \ldots x_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j_1 << j_i} x_{j_1} \ldots x_{j_i} \; L(x_0 \ldots x_{j_1} \ldots x_{j_i} \ldots x_n) = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

<u>Corolario 2.4</u>. El par $(T_k^n, D^n(R/k))$ está bien definido por las propiedades del teorema 2.4 a menos de isomorfismos de R-módulos.

<u>Nota 2.5</u>.

Sean ahora A y B k-álgebras, $\lambda : A \to B$ un morfismo de k-álgebras hace de B una A-álgebra de modo que $D^n(B/k)$ resulta un A-módulo. Consideremos la composición $T_k^n \circ \lambda : A \to D^n(B/k)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & B \\ & & \downarrow{T^n} \\ & & D^n(B/k) \end{array}$$

Ella es claramente una derivada k-lineal de orden n y por teorema 2.4 existe un único morfismo de A-módulos, sea $d(\lambda)$, tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "T_k^n"'] & B \arrow[d, "T_k^n"] \\ D^n(A/k) \arrow[r, dashed, "d(\lambda)"] & D^n(B/k) \end{tikzcd}$$

conmuta. Al morfismo $d(\lambda)$ lo extenderemos a un morfismo de B-módulos en forma natural y lo seguiremos llamando $d(\lambda)$: $B \otimes_A D^n(A/k) \to D^n(B/k)$.

<u>Corolario 2.5.</u>

Dado en las condiciones anteriores el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "T_k^n"'] & B \arrow[d, "T_k^n"] & & \\ D^n(A/k) \arrow[r, "d(\lambda)"] & D^n(B/k) \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con el cuadrado conmutativo y con la fila inferior exacta, se tiene: $(p \circ T_k^n, C) \cong (T_A^n, D^n(B/A))$ en el sentido del corolario 2.4.

Demostración: Sea $\Delta : B \to M$ una derivación A-lineal de orden n en un B-módulo M.

Como λ es de k-álgebras, Δ resulta ser k-lineal por ser A-lineal, luego existe un único morfismo de B-módulos γ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "T_k^n"'] & M \\ D^n(B/k) \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Como por hipótesis $\Delta(\gamma(c)) = 0$ para todo $a \in A$, se tiene $\gamma(d(\lambda)\, T_k^n(a)) = \gamma(T_k^n(\lambda(a))) = \Delta(\lambda(a)) = 0$ para $a \in A$, luego $\mathrm{Img}\, d(\lambda) \subset \mathrm{Nu}\, \gamma$ y factoriza por C .

La unicidad resulta por ser p sobreyectiva, en efecto sea γ y γ' morfismos de B módulos de C en M tales que $\gamma \circ p \circ T_k^n = \gamma' \circ p \circ T_k^n = A$ como aplicaciones de B en M, por la propiedad universal de D (B/k) resulta $\gamma \circ p = \gamma' \circ p$ de donde $\gamma = \gamma'$ por la sobreyectividad de p. c.q.d.

Sean R y k anillos, R una k-álgebra por $\lambda : k \dashrightarrow R$, $I \subset R$ un ideal. Si definimos $\lambda' : k \dashrightarrow R/I$ como $\theta \circ \lambda$ donde θ es la proyección al cociente, ésta resulta un morfismo de k-álgebras.

<u>Corolario 2.6.</u>

$$D^n((R/I)/k) \simeq R/I \otimes_R D^n(R/k)/T^n(I) .$$

$T^n(I)$ denota el sub-R-módulo de $D^n(R/k)$ generado por los elementos de la forma $T^n(a)$ con $a \in I$.

<u>Demostración</u>: Usando el corolario 2.4 basta probar que el miembro de la derecha tiene la misma propiedad universal que el de la izquierda.

Supongamos M y R/I-módulo (y por lo tanto un R-módulo en forma natural) y $\Delta : R/I \to M$ una derivación de orden n k-lineal. Como $\Delta \circ p$ también es una derivación de orden n k-lineal resulta una flecha de R-módulos $\bar{\phi}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[d, "T^n"'] & R/I \arrow[r, dashed, "\Delta"] & M \\
D^n(R/k) \arrow[urr, dashed, "\bar{\phi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego $\bar{\phi}\, T^n(a) = \Delta\theta(a) = 0$ si $a \in I$, y $\bar{\phi}$ factoriza naturalmente por $D^n(R/k)/T^n(I)$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[d, "T^n"'] & R/I \arrow[r, dashed, "\Delta"] & M \\
D^n(R/k) \arrow[urr, dashed, "\bar{\phi}"'] \arrow[d, "p"'] & & \\
D^n(R/k)/T^n(I) \arrow[uurr, "\bar{\phi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

y que extendemos a una flecha $\phi : R/I \otimes_R D^n(R/k)/T(I) \to M$ que verifica lo pedido.

Notamos que la aplicación composición

$$R \xrightarrow{T^n} D^n(R/k) \xrightarrow{p} D^n(R/k)/T^n(I) \to R/I \otimes_R D^n(R/k)/T^n(I)$$

es una derivación de orden n k-lineal que factoriza por R/I como una derivación del mismo tipo que llamaremos $F^n : R/I \to R/I \otimes D^n(R/k) / T^n(I)$.

Por propiedad universal del par $(T^n, D^n(R/I/k))$ existe γ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & R/I \arrow[dl, "T^n"'] \arrow[dr, "F^n"] & \\ D^n((R/I)/k) \arrow[rr, "\gamma"] & & R/I \otimes_R D^n(R/k)/T^n(I) \end{tikzcd}$$

γ es sobreyectiva, esto resulta por ser $R/I \otimes_R D^n(R/k)/T^n(I)$ generado como R/I-módulo por la imagen de F^n(por nota 2.1 y por construcción de F^n) y por la conmutatividad del diagrama anterior.

Más arriba vimos que dada una derivación $\Delta : R/I \to M$ k-lineal de orden n, existía un morfismo de R/I-módulos que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} R/I \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "F^n"] & M \\ R/I \otimes_R D^n(R/k)/T^n(I) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Supongamos ϕ' verificando las mismas condiciones que ϕ y analicemos el diagrama de cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd} & R/I \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dl, "T^n"'] \arrow[d, "F^n"] & M \\ D^n(R/I/k) \arrow[r, "\gamma"] & R/I \otimes_R D^n(R/k)/T^n(I) \arrow[ur, shift left, "\phi"] \arrow[ur, shift right, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de $(T^n, D^n(R/I/k))$ debe ser: $\phi \circ \gamma = \phi' \circ \gamma$ de donde $\phi = \phi'$ por ser γ sobreyectiva c.q.d.

Proposición 2.7

Sea A una k-álgebra, $S \subset A$ una parte multiplicativa tal que $0 \notin S$, la inclusión $i: A \to A_s$ hace de A_s una k-álgebra y $A_s \otimes_A D^n(A/k)$ resulta isomorfo a $D^n(A_s/k)$.

Demostración: la inclusión $i: A \to A_s$ induce (Nota 2.5) el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T^n_A"'] & A_s \arrow[d, "T^n_{A_s}"] \\
A_s \otimes D^n(A/k) \arrow[r, "d(i)"] & D^n(A_s/k)
\end{tikzcd}$$

se tiene para todo $\frac{a}{s} \in A$:

$$d(i) \circ T^n_A(s^{n-1}a) = T^n_{A_s}(s^n \frac{a}{s}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\Big[\binom{n}{i} s^i T^n_{A_s}(s^{n-i} \frac{a}{s}) +$$

$$+ \binom{n}{i-1} s^{i-1}\frac{a}{s} \; T_{A_s}(s^{n-i+1}) \Big] \quad =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \Big[\binom{n}{i} s^i d(i) T_A(s^{n-i-1}.a) + \binom{n}{i-1} s^{i-2} a \, d(i) \, T_A(s^{n-i+1})\Big] +$$

$$+ (-1)^{n+1} \Big[s^n T_{A_s}(\frac{a}{s}) + n \, s^{n-2} a \, d(i) \circ T_A(s) \Big]$$

Despejando de las ecuaciones anteriores el elemento $T^n_{A_s}(\frac{a}{s})$ resultan las siguientes conclusiones:

i) $T^n_{A_s}(\frac{a}{s})$ pertenece a la imagen de $d(i)$ con lo cual $\operatorname{Img} T^n_A \subset \operatorname{Img} d(i)$ de donde resulta $d(i)$ sobreyectiva por Nota 2.1.

ii) La aplicación $T_A: A \to A_s \otimes_A D^n(A/k)$ se puede extender a una aplicación que llamaremos $D : A_s \to A_s \otimes_A D^n(A/k)$ tal que $d(i) \circ D = T^n_{A_s}$ de donde resulta D una k-derivación de orden n en el A_s- módulo $A_s \otimes_A D^n(A/k)$. Luego existe $\gamma : D^n(A_s/k) \to A_s \otimes_A D^n(A/k)$ tal que $\gamma \circ T^n_{A_s} = D$ por la propiedad universal del par $(T^n_{A_s}; D^n(A_s/k))$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T^n_A"'] & A_s \arrow[d, "T^n_{A_s}"] \arrow[dl, "D"'] \\
A_s \otimes D^n(A/k) \arrow[r, "d(i)"] & D^n(A_s/k) \arrow[l, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Vamos a demostrar que $\gamma \circ d(i)$ = identidad en $A_s \otimes_A D^n(A/k)$, como ambos son morfismos de A -módulos basta demostrar que ambos coinciden en una familia de generadores de $A_s \otimes_A D^n(A/k)$ como A_s -módulo, sea por ejemplo la familia $\{1 \otimes T^n_A(a)/a \in A\}$

$$1 \otimes T^n_A(a) = D(i(a)) = (\gamma \circ T^n_{A_s})(i(a)) = (\gamma \circ d(i))(1 \otimes T^n_A(a)) .$$

Ahora $\gamma \circ D(i) = id$ asegura que $d(i)$ es inyectiva c.q.d.

2.8

Diremos que una k-álgebra S es una extensión separable de k cuando $I(S/k) = I(S/k)^2$ ($D^1(S/k) = 0$) o, lo que es equivalente, existe n natural tal que $I(S/k) = I(S/k)^n$ ($D^{n-1}(S/k) = 0$) .

Proposición 2.8. Sean S, A k-álgebras, S una k-álgebra separable y $\lambda : S \to A$ morfismo de k-álgebras entonces $D^n(A/S) \simeq D^n(A/k)$ donde la estructura de A como S-álgebra está dada por λ .

Demostración:

Por 2.5 resulta el diagrama conmutativo con fila inferior exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{\lambda} & A & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ A \otimes D^n(S/k) & \to & D^n(A/k) & \to & D^n(A/S) & \to & 0 \end{array} .$$

La demostración resulta por la hipótesis $D^n(S/k) = 0$.

2.9 Proposición.

Si A es una k-álgebra y $\{X_\lambda\}\lambda \in I$ es una familia de indeterminadas sobre A se tiene:

$$D^n(A[\{X_\lambda\}]/k) \simeq A[\{X_\lambda\}] \otimes_A D^n(A/k) \oplus D^n(A[\{X_\lambda\}]/A)$$

la inclusión natural $i : A \to A[\{X_\lambda\}]$ da lugar al diagrama (2.5)

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & A[X_\lambda] & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ A[\{X_\lambda\}] \otimes_A D^n(A/k) & \xrightarrow{d(i)} & D^n(A[\{X_\lambda\}]/k) & \to & D^n(A[\{X_\lambda\}]/A) & \to & 0 \end{array}$$

la proposición resulta por ser $D^n(A[\{X_\lambda\}]/A)$ un $A[\{X_\lambda\}]$-módulo libre de base:

$$\{(T^n X_{\lambda_1})^{\alpha_1} \ldots (T^n X_{\lambda_k})^{\alpha_k},\ k \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda_i \in I \text{ y } \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \leqslant n\} \quad .$$

INVARIANTES DE FITTING

2.10

Sea M un A-módulo finitamente generado, $\{m_1, \ldots, m_n\}$ una familia de generadores de M sobre el anillo A.

(a) $$0 \to K \to A^n \overset{\rho}{\to} M \to 0$$

sucesión exacta donde $\rho(0,\ldots,\overset{i}{\hat{1}},\ldots,0) = m_i$.

Los elementos de K son las n-uplas $(a_i, \ldots, a_n) \in A^n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = 0$. Sea entonces $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ el conjunto de n-uplas de A^n que pertenecen a K , donde cada $V_\lambda = (a_{\lambda 1}, \ldots, a_{\lambda n})$, $a_{\lambda i} \in A$.

Para cada familia $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset I$ definimos una matriz que tenga por filas a los vectores $\{V_{\lambda_i}\}$, sea $M(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in A^{n \times n}$.

Dada la familia de matrices así definida llamemos $f_{t,I}(M)$ al ideal en A generado por los determinantes de las matrices menores de $(n-t)\times(n-t)$ de todas las matrices de la forma $M(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, para $0 \leqslant t \leqslant n$ y $f_{t,I}(M) = A$ para $t > n$.

Fitting demuestra que los ideales $f_{t,I}(M)$ dependen solamente del módulo M y no de la sucesión exacta (a) [4] . Pasaremos a denotar a los ideales $f_{t,I}(M)$ por $f_t(M)$ $t \geqslant 0$.

Proposición 2.11

Si $0 \leqslant i \leqslant j$ se tiene $f_i(M) \leqslant f_j(M)$.

Demostración: resulta directamente por propiedades de determinantes.

Proposición 2.12: Dados A,B anillos, M un A-módulo finitamente generado por $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$, $\lambda : A \to B$ morfismo de anillos. Sea la sucesión exacta

(1) $$0 \to K \to A^n \overset{\phi}{\to} M \to 0$$

donde $\ell(e_i) = m_i$ $i=1,\ldots,n$, $\{e_i\}$ la base canónica de A^n .

Aplicando el functor $B \otimes_A (\ )$ resulta la sucesión exacta:

(2) $$0 \to \mathrm{Img}\ (B \otimes_A K) \to B^n \to B \otimes_A M \to 0 .$$

Para la sucesión exacta (1) tenemos definidos una familia de ideales de A, los $f_{\ell,I}(M)$ $\ell \geqslant 0$, análogamente para $B \otimes_A M$ la sucesión exacta (2) define una familia $f_{\ell,L}(B \otimes_A M)$ $\ell \geq 0$ de ideales en B. Afirmamos que:

$$f_{t,L}(B \otimes_A M) = [\lambda'(f_{t,I}(M))]^e \qquad \text{(extendido).}$$

Demostración: resulta evidente teniendo en cuenta que si $\{V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ es una familia de generadores de K como A-módulo entonces $\{1 \otimes V_\lambda\}_{\lambda\in I}$ es una familia de generadores de $B \otimes_A M$ como B-módulo (2.10).

Proposición 2.13

Dados M,N A-módulos finitamente generados y $\phi : M \to N$ A-lineal y sobreyectivo se tiene para todo entero positivo t :

$$f_t(M) \subseteqq f_t(N)$$

Demostración: Dada una resolución:

$$0 \to K \to A^n \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

definimos

$0 \to K' \to A^n \xrightarrow{\phi'} M \to 0$ donde $\phi' = \phi \circ \rho$, luego $K' \supset K$ y la proposición resulta inmediata.

CAPITULO III

Algebras de Lie. Envolventes. [5]

Si A es un anillo que es una k-álgebra sobre otro anillo k, hemos definido en el capítulo II el objeto $D(A/k)$, módulo de k-diferenciales de A . Denotaremos ahora por $L(A/k)$ al A-módulo $\mathrm{Hom}_A(D^1(A/k),A)$ con producto de Lie $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ si $d_1, d_2 \in \mathrm{Hom}(D^1(A/k),A)$.

<u>Definición 3.1</u>. Dado L un A-módulo a izquierda y una k-álgebra de Lie diremos que es una A-k-álgebra de Lie si existe una aplicación $\gamma : L \to L(A/k)$ tal que

i) γ es de A-módulos .

ii) γ es de k-álgebras de Lie .

iii) Si $a,b \in A$, $x, y \in L$ se tiene:

$$[ax,by] = a(\gamma(x)(b))y - b(\gamma(y)(a))x + ab[x,y]$$

γ se llama el A-k-morfismo estructural para L.

<u>Definición 3.2</u>.

Sean B una A-álgebra, A una k-álgebra y L una A-k-álgebra de Lie con morfismo A-k-estructural $\gamma : L \to L(A/k)$. Diremos que B es una L-álgebra si existe una aplicación $\theta : L \to L(B/k)$ de k-álgebras de Lie y A-lineal tal que para todo $d \in L$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma(d)"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\theta(d)"] & B \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

A la aplicación θ se la llama L-estructural para B .

<u>Definición 3.3</u>: Sean A y k anillos, A una k-álgebra y L una A-k-álgebra de Lie con morfismo A-k-estructural $\gamma : L \to L(A/k)$. Dado B un A-módulo y k-álgebra no escalar diremos que B es una A-k-álgebra envolvente para L cuando se verifica:

i) Existe $\rho_B : L \to B$ A-lineal tal que si $a \in A$ y $x \in B$

$$\rho_B(d).a.x = (\gamma(d)(a).x + a.\rho_B(d).\ x$$

ii) Si $d,d' \in L$ $\quad \rho_B([d,d']) = \rho_B(d)\ \rho_B(d') - \rho_B(d')\,\rho_B(d)$.

Nota: Si denotamos $\rho_B(d)\ \rho_B(d') - \rho_B(d')\,\rho_B(d) = [\![\rho_B(d), \rho_B(d')]\!]$ resulta:

$$[\![a\ \rho_B(d),\ b\ \rho_B(d')]\!] = \rho_B[ad,\ bd']$$

Definición 3.4.

Dado L una A-k-álgebra de Lie, una envolvente E de L se dirá universal si dado otra envolvente B de L existe una única aplicación $\psi : E \to B$ tal que:

i) ψ es de k-álgebras.

ii) ψ es de A-módulos a izquierda.

iii) $\psi \circ \rho_E = \rho_B$.

Probada la existencia de E envolvente universal para L, la unicidad resultará obvia por su definición.

Teorema 3.3. Sea A una k-álgebra y L una A-k-álgebra de Lie. Existe una envolvente universial para L que denotaremos E(L) donde $E(L) \simeq T(L)/I$, siendo T(L) el álgebra tensorial de L, $\sum_{j=1}^{\infty} \otimes_k^j L$ e I el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $d \otimes d' - d' \otimes d - [d\ d']$ y los elementos $d(a\theta) - \gamma(d)(a)\theta - a\ d\ \theta$ con $\theta \in T$.

Demostración: Sea B una envolvente de L y $\rho_B : L \to B$ la aplicación asociada. Si $d_1, \ldots, d_r \in L$ entonces $\psi'(d_1 \times \ldots \times d_r) \to \rho_B(d_1) \ldots \rho_B(d_r) \in B$ es k-lineal de donde

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho_B} & B \\ \downarrow & \nearrow_{\psi''} & \\ T(L) & & \end{array}$$

es conmutativo.

Como ψ'' se anula en I , factoriza por E(L) c.q.d

Denotaremos a E(L(A/k)) como E(A/k).

Llamaremos F(n,m) al conjunto de aplicaciones estrictamente crecientes del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ en $\{1,\ldots,m\}$. Si $\alpha \in F(n,m)$ llamaremos $c\alpha$ a la aplicación de $F(n-n,m)$ que tiene como imagen al complemento de la imagen de α en el conjunto $\{1,\ldots, m\}$.

Si α es sobreyectiva entenderemos por $c\alpha$ a la función vacía.

Lema 3.4. Sean A, k anillos, A una k-álgebra, L una A-k-álgebra de Lie con morfismo estructural θ y B una álgebra envolvente para L. Entonces:

$$\rho_B(d_r)\ldots\rho_B(d_1)(a.x) = \sum_{u=0}^{r}\Big(\sum_{\alpha\in F(u,r)}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(v)})\big)(a)\big)\big(\prod_{w=1}^{r-u}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big)x\Big)$$

Demostración:

Por inducción en r . Para r = 1

$$\rho_B(d_1)(ax) = \sum_{u=0}^{1}\sum_{\alpha\in F(u,1)}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(v)})\big)(a)\big(\prod_{w=1}^{1-u}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big).x =$$

$$= a.\rho_B\big(\prod_{w=1}^{1} d_{c\alpha(w)}\big)x + \sum_{\alpha\in F(1,1)}\big(\big(\prod_{v=1}^{1}\theta(d_{\alpha(v)})\big)(a)\big).\big(\prod_{w=1}^{0}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big)x =$$

$$= a\ \rho_B(d_1)x + (\theta(d_1)(a)).x$$

(r-1) implica r

$$(\rho_B(d_r)(\rho_B(d_{r-1}),,,\rho_B(d_1)))(ax) = \rho_B(d_r)\Big(\sum_{u=0}^{r-1}\sum_{\alpha\in F(u,r-1)}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(v)})\big)$$

$$a\big(\prod_{w=1}^{r-u-1}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big).x\Big) =$$

$$= \sum_{u=0}^{r-1}\sum_{\alpha\in F(u,r-1)}\big(\big(\theta(d_r)\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(V)})\big)(a)\big).\big(\prod_{w=1}^{r-u-1}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big)x +$$

$$+\sum_{u=0}^{r-1}\sum_{\alpha\in F(u,r-1)}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(V)})a\big).\rho_B(d_r)\big(\prod_{w=1}^{r-u-1}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big).x =$$

$$= \sum_{u=1}^{r}\ \sum_{\alpha\in F(u,r)\alpha(u)=r}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(V)})\big)(a)\big)\big(\prod_{w=1}^{r-u}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big)x +$$

$$+\sum_{u=0}^{r-1}\ \sum_{\alpha\in F(u,r)\alpha(u)\neq r}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(V)})\big)a\big)\big(\prod_{w=1}^{r-u}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big).x =$$

$$+\sum_{\alpha\in F(0,r)\alpha(0)\neq r}\big(\big(\prod_{v=1}^{0}\theta(d_{\alpha(V)})\big)(a)\big)\big(\prod_{w=1}^{r}\rho_B(d_{c(\alpha)w})\big).x +$$

$$+\sum_{u=1}^{r-1}\sum_{\alpha\in F(u,r)}\big(\big(\prod_{v=1}^{u}\theta(d_{\alpha(V)})\big)(a)\big).\big(\prod_{w=1}^{r-u}\rho_B(d_{c\alpha(w)})\big)x +$$

$$+ \sum_{u=r} \sum_{\alpha\in F(r,r)\alpha(r)=r} (\prod_{v=1}^{u} \theta(d_{\alpha(v)})a)(\prod_{w=1}^{r-u} \rho_B(d_{c\,\alpha(w)}))\, x =$$

$$= \sum_{u=0}^{r} \sum_{\alpha\in F(u,r)} ((\prod_{v=1}^{u} \theta(d_{\alpha(v)}))a)(\prod_{w=1}^{r-u} \rho_B(d_{c\,\alpha(w)}))\, x \qquad \text{c.q.d}$$

Si B es una L-álgebra, por un morfismo estructural $\theta : L \to L(B/k)$ es claro que $1 \otimes \theta : B \otimes L \to L(B/k)$ hace de $B \otimes L$ una B-k-álgebra. (3.1 y 3.2)

<u>Teorema 3.5</u>. Sean L una A-k-álgebra de Lie con A-k-morfismo estructural $\phi : L \to L(A/k)$, B una L-álgebra con morfismo estructural $\theta : L \to L(B/k)$.

Entonces $B \otimes_A E(L)$ es un álgebra envolvente para $B \otimes_A L$, y más aún $B \otimes_A E(L) \simeq E(B \otimes_A L)$.

<u>Demostración</u>: Consideremos el B-módulo $B \otimes_A \sum_{j=1} \otimes_k^j L = B \otimes_A T(L)$. Definimos una aplicación k-bilineal de $(B \otimes_A \otimes_k^r L)\times(B \otimes_A \otimes_k^s L)$ en $\sum_{t=1}^{r+s} B \otimes_A \otimes^t L$ como sigue:

$$(b \otimes d_r \ldots d_1)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha\in F(j,r)} b(\prod_{v=1}^{j} \theta(d_{\alpha(v)}))\beta \otimes_A (\prod_{w=1}^{r-j} d_{c\,\alpha(w)})$$

que podemos extender para definir una forma k-bilineal en $B \otimes_A T(L)$. Notemos que hemos definido $(b \otimes d_r \ldots d_1)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) =$

$= \sum_j b_j' \otimes \theta_j \delta_1 \ldots \delta_s$ con $b_j' \in B$ y $\theta_j \in T(L)$.

Supongamos ahora $R = b \otimes d_r \ldots d_1$; $S = \beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1$ y sean $d,d' \in L$ entonces:

$$R(dd'-d'd-[d,d'])\,S = (b \otimes d_r \ldots d_1)(dd'S-d'dS - [d,d']S) =$$

$$= (b \otimes d_r \ldots d_1)(dd'(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) - d'd\,(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) - [d,d']\beta\otimes \delta_s \ldots \delta_1 =$$

$$= (b \otimes d_r \ldots d_1)(d\,(\theta(d')\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + \beta \otimes d'\delta_s \ldots \delta_1))$$

$$- d'(\theta(d)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + \beta \otimes d'\delta_s \ldots \delta_1))$$

$$- \theta(d)\theta(d')\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(d')\theta(d)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_r$$

$$- \beta \otimes [d,d']\delta_s \ldots \delta_1)$$

$$= (b \otimes d_r \ldots d_1)(\theta(d)\theta(d')\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(d')\beta \otimes d\,\delta_s \ldots \delta_1 +$$

$$+ \theta(d)\beta \otimes d'\delta_s \ldots \delta_1 + \beta \otimes dd'\delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(d')\theta(d)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 - \theta(d)\beta \otimes d'\delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(d')\beta \otimes d\,\delta_s \ldots \delta_1 - \beta \otimes d'd\,\delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(d)\theta(d')\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(d')\theta(d)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \beta \otimes [d,d']\delta_s \ldots \delta_1) =$$

$$= (b \otimes d_r \ldots d_1)(\beta \otimes_A (dd' - d'd - [d,d'])\delta_s \ldots \delta_1) =$$

$$= \sum_u \beta_u \otimes_A \theta_u(dd' - d'd - [d,d'])\delta_s \ldots \delta_1$$

Más aún si $\psi \in T(L)$ y $a \in A$ entonces:

$$\rho = R(d(a\psi) - (\phi(d)a)\psi - a\,d\psi)\,S =$$

$$= R(d(a\psi) - (\phi(d)a)\psi - a\,d\psi)\,(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)$$

$$= R(d(a\psi)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) - ((\phi(d)a)\psi)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) -$$

$$- (a\,d\psi)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1).$$

Supongamos $\psi = d_r \otimes_k \ldots \otimes_k d_1$ luego:

$a\psi = a\,d_r \otimes_k d_{r-1} \otimes \ldots \otimes d_1$ y $d(a\psi) = d \otimes a\,d_r \otimes \ldots \otimes d_1$

Sea $\zeta = d_{r-1} \otimes \ldots \otimes d_1$; entonces:

$$\rho = R((d \otimes_k a\,d_r)\,\zeta\,(\beta \otimes_A \delta_s \otimes_k \ldots \otimes_k \delta_1) -$$

$$- (\phi(d)a)(d_r\,\zeta)(\beta \otimes_A \delta_s \otimes_k \ldots \otimes_k \delta_1) -$$

$$- a\,d \otimes (d_r\,\zeta)(\beta \otimes_A \delta_s \otimes \ldots \otimes \delta_1).$$

Las expresiones $\zeta.\,(\beta \otimes_A \delta_s \otimes_k \ldots \otimes_k \delta_1)$ son combinación lineal de expresiones de la misma forma que $\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1$. Luego ρ es una combinación lineal de expresiones de la forma

$$\rho' = R((d \otimes_k a\,d_r)(\beta \otimes_A \delta_s \ldots \delta_1) - (\phi(d)a)d_r(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) -$$

$$- (a\,d \otimes d_r)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)) =$$

$$= R(\theta(d)\theta(a\,d_r)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + \theta(a\,d_r)\beta \otimes d\,\delta_s \ldots \delta_1 +$$

$$+ \theta(d)\beta \otimes (a\,d_r)\delta_s \ldots \delta_1 + \beta \otimes d\,(a\,d_r)\delta_s \ldots \delta_1 -$$

$$- (\theta(d)(a))\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 - (\phi(d)a)\,\beta \otimes d_r\delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(ad)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 - \theta(d_r)\beta \otimes (ad)\, \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- \theta(ad)\beta \otimes d_r\ \delta_s \ldots \delta_1 - \beta \otimes (ad) d_r\, \delta_s \ldots \delta_1 =$$

$$= R(a\ \theta(d)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + (\phi(d)a)\phi(d_r)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 +$$

$$+ a\theta(d)\beta \otimes d_r\delta_s \ldots \delta_1 + \beta \otimes d(a\ d_r)\delta_s \ldots \delta_1 -$$

$$- ((\phi(d)a)\phi(d_r)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 - (\phi(d)a)\beta \otimes d_r\, \delta_s \ldots \delta_1$$

$$- a(\theta(d)\theta(d_r)\beta) \otimes \delta_s \ldots \delta_1 - a\,\theta(d)\beta \otimes d_r\, \delta_s \ldots \delta_1 - a\ \beta \otimes d\ d_r\, \delta_s \ldots \delta_1)$$

$$= R\ (\beta \otimes d\ (ad_r)\delta_s \ldots \delta_1 - (\phi(d)a)\beta \otimes d_r\, \delta_s \ldots \delta_1 - a\ \beta \otimes d\ d_r\, \delta_s \ldots \delta_1)$$

$$= R\ (\beta \otimes (d(ad_r)\delta_s \ldots \delta_1 - (\phi(d)a) d_r\, \delta_s \ldots \delta_1 - (ad) d_r\, \delta_s \ldots \delta_1)).$$

Por lo tanto los elementos de la forma $R\gamma S$ con $\gamma \in I$ pertenece a $B \otimes I$, donde $I \subset T(L)$ es el ideal generado por las cosas de la forma $dd' - d'd - [d,d']$, y $d(a\rho) - (\phi(d)a)\rho - a\ d\,\rho$.

Luego $B \otimes I$ es un ideal en $B \otimes T(L)$ de donde $B \otimes E(L)$ hereda la estructura de k- álgebra de $B \otimes T(L)$.

Para terminar demostramos que $B \otimes E(L)$ es el álgebra envolvente universal para $B \otimes_A L$.

En efecto si $\rho : B \otimes T(L) \to B \otimes E(L)$ es la proyección natural, entonces para $\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1$ en $B \otimes_A E(L)$, $b \in B$ y $c \otimes d \in B \otimes_A L$ se tiene:

$$\rho_{B \otimes E(L)}\ (c \otimes d)(b.\ \beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1) =$$

$$= c((\theta(d)b)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + b\theta\ (d)\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + b\,\beta \otimes d\, \delta_s \ldots \delta_1) =$$

$$= ((1_B \otimes \theta)(c \otimes d))b)\ \beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1 + b\ \rho_{B \otimes_A E(L)}(c \otimes d)(\beta \otimes \delta_s \ldots \delta_1)\ .$$

Más aún :

$$\rho\,[\,b \otimes d, b' \otimes d'] = \rho\ (b\,\theta\,(d)b') \otimes d' - b'(\theta(d')b) \otimes d +$$

$$bb' \otimes [\,d,d\,]\ ) =$$

$$= \rho(b(\theta(d)b') \otimes d') - \rho(b'(\theta(d')b) \otimes d) + \rho(bb' \otimes [\,d,d']\ )$$

$= \rho(b\ (\theta(d)b') \otimes d') - \rho(b'(\theta(d')b) \otimes d) + \rho(bb' \otimes (dd'-d'd)$

dado que en E(L) se tiene $dd' - d'd = [d,d']$.

Se observa que la última expresión es:

$$\rho(b \otimes d)\ \ \rho(b' \otimes d') - \ \rho(b' \otimes d')\ \rho(b \otimes d).$$

Finalmente, supongamos que U es una álgebra envolvente para $B \otimes_A L$. Si usamos la aplicación $\lambda : d \to \rho_U(1 \otimes d)$ $d \in L$, U resulta envolvente de L. Luego existe un único $h: E(L) \to U$ de A-k-álgebras tal que $h \circ \rho_{E(L)} = \rho_U$. Extendiendo h a un morfismo de B-módulo h : $B \otimes_A E(L)$ en U $h'(b \otimes_A \delta) = b.h(\delta)$, se tiene para $d \in L$ y $b \in B$

$$h'(\rho_{B\otimes E(L)}(b \otimes d)) = h'(b \otimes_A \rho_E(d)) = bh(\rho_E(d)) = b\ \rho_U(d) =$$

$$= \rho_U(b \otimes d)$$

Para completar la demostración que $B \otimes E(L)$ es la envolvente universal basta ver que h' es un morfismo de B-k-álgebras. Sólo falta ver que h' es de k-álgebras.

Como h' es k-lineal bastará demostrar que:

$h'(b\otimes d_r \dots d_1)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)) = h'(b\otimes d_r \dots d_1) h'(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)$.

Pero:

$$h'((b \otimes \rho_E(d_r)\dots \rho_E(d_1))(\beta \otimes \rho_E(\delta_s)\dots \rho_E(\delta_1))) =$$

$$= h'(\sum_{u=0}^{r} b \sum_{\alpha\in F(u,r)} (\prod_{v=1}^{u} \theta(d_{\alpha(v)}))\beta \otimes (\prod_{w=1}^{r-u} \rho_E(d_{c\alpha(w)}))\ \rho_E(\delta_s)\dots \rho_E(\delta_1) =$$

$$= \sum_{u=0}^{r} b \sum_{\alpha\in F(u,r)} (\prod_{v=1}^{u} \theta(d_{\alpha(V)}))\ \beta\ h(\prod_{w=1}^{r-u} \rho_E(d_{c\alpha(w)}))\ \rho_E(\delta_s)\dots \rho_E(\delta_1)) =$$

$$= \sum_{u=0}^{r} b \sum_{\alpha\in F(u,r)} (\prod_{v=1}^{u} \theta(d_{\alpha(V)}))\ \beta\ .\ (\prod_{w=1}^{r-u} \rho_U(1\otimes d_{c\alpha(w)}))\ \rho_U(1\otimes \delta_s)\dots \rho_U(1\otimes \delta_1)$$

$$= b\ (\rho_U(1\otimes d_r)\dots \rho_U(1\otimes d_1))(\beta\ \rho_U(1\otimes \delta_s)\dots \rho_U(1\otimes \delta_1))$$

por lema 3.4.

Luego $\quad h'((b\otimes d_r \dots d_1)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)) =$

$$= h'(b\otimes d_r \dots d_1).\ h'(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) \qquad \text{c.q.d.}$$

Corolario 3.6. Si A es una k-álgebra noetheriana con $D'(A/k)$ finitamente generado, se verifica que dado $S \subset A$ parte multiplicativa:

$$A_s \otimes_A E(A/k) \;=\; E(A_s/k)$$

Lema 3.7. Sean k,A,B anillos, A una k- álgebra , B una A-álgebra, F un A-módulo libre de base $\{f_\alpha\}$ $\alpha \in I$; $i: F \to B$ morfismo A-lineal, $\{b_\alpha\}$ $\alpha \in I$ una familia de elementos de B y $\delta : A \to B$ una k-derivación. Existe una única k-derivación: $\partial : S_A[F] \to B$ tal que si $a \in A$ $\partial(a) = \delta(a) \wedge \partial(f_\alpha) = b_\alpha$.

Demostración: Como B es una A-álgebra el morfismo $i : F \to B$ se extiende naturalmente a $i : S_A[F] \to B$ definiendo en B una estructura de $S_A[F]$ módulo.

Pero F un A-módulo libre de base $\{f_\alpha\}$ $\alpha \in I$ asegura que $S_A[F] = A[f_\alpha]_{\alpha\in I}$ anillo de polinomios sobre A con indeterminadas f_α ; la demostración sigue ahora de:

$$D^1(S_A[F]/k) \simeq S_A[F] \otimes_A D^1(A/k) \oplus D^1(S_A[F]/A)$$

por ser $D^1(S_A[F]/A)$ un módulo libre de base $\{df_\alpha\}\alpha \in I$.

Lema 3.8. Dados k,A,B anillos, A una k-álgebra B una A-álgebra, M un A-módulo, $i : M \to B$ A-lineal, $d : A \to B$ k-derivación y δ : $M \to B$ k-lineal, tal que si $a \in A$ y $m \in M$ $\delta(am) = d(a)i(m) + a\,\delta(m)$, entonces existe una única k-derivación $\partial : S_A[M] \to B$ tal que $\partial(a) = d(a)$ si $a \in A$ y $\partial(m) = \delta(m)$ si $m \in M$.

Demostración: Sea F un A-módulo libre con base $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ $0 \to K \to F \xrightarrow{h} M \to 0$ sucesión exacta, se define naturalmente la sucesión exacta:

$$0 \to \langle K \rangle \to S_A[F] \xrightarrow{H} S_A[M] \to 0 \qquad .$$

Dando a B estructura de $S_A[F]$ -álgebra inducida por $i \circ h$: $F \to B$ por lema 3.7 existe una ∂ k-derivación $\partial : S_A[F] \to B$ tal que $\partial(a) = d(a)$ y $\partial(f_\alpha) = \delta(h(f_\alpha))$, veamos que ∂ se factoriza por $S_A[M]$; dado P.k, $P \in S_A[F]$, $k \in K$

$$\partial(P.k) = \partial(P)\,(i\circ h)(k) + (i \circ H)\,(P).(\delta\circ h)(k) = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

Espacio de Jet

Siendo L Una A-k-álgebra de Lie y B y A k-álgebras, vamos a definir en $B \otimes_k E(L) \otimes_k B$ una estructura de $A \otimes_k B$ módulo como sigue:

$$(a \otimes b).(b' \otimes \theta \otimes b'') = b'b \otimes a\,\theta \otimes b''$$

Definición 3.9 : Llamaremos espacio de jet asociado a (A,B) al anillo $J(L(A/k),A \otimes_k B) = S_{A\otimes B}[B \otimes_k E(A/k) \otimes_k B] / I$ con J el ideal generado por los elementos:

a) $1 \otimes e \otimes 1$ si $e \in E(A/k)$

b) $1 \otimes_k \rho_E(d_r)\ldots\rho_E(d_1) \otimes_k b_1 b_2 -$

$$- \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes_k \prod_{v=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(v)}) \otimes_k b_1).(1 \otimes_k \prod_{u=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(u)}) \otimes_k b_2) -$$

$$- b_1 \otimes_k \prod_{j=1}^{r} \rho_E(d_j) \otimes_k b_2 - b_2 \otimes_k \prod_{j=1}^{r} \rho_E(d_j) \otimes_k b_1 .$$

Vamos a dar a $J(L(A/k),A \otimes_k B)$ estructura de L(A/k)-álgebra a través de un morfismo estructural γ ; $L(A/k) \to L(J(L(A/k),A \otimes B)/k)$

Construcción 3.10. Comenzaremos por definir para cada elemento $d \in L(A/k)$ un elemento $\gamma(d) \in L(J(L,A \otimes B)/k)$

i) Dado $d \in L(A/k)$ definimos:

$d^* : B \times E(A/k) \times B \to J(L(A/k),A \otimes B)$

$d^*(b',x,b'') = (1\otimes \rho_E(d)\otimes b')(1 \otimes x \otimes b'')+(b'\otimes \rho_E(d).x \otimes b'')$

d^* es 3-k lineal, en efecto:

$$d^*(b_1 + b_2 ,x, b') = (1 \otimes d \otimes (b_1 + b_2))(1 \otimes x \otimes b'') +$$
$$+ (b_1 + b_2) \otimes \rho_E(d)x \otimes b'' =$$
$$= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes b_1)(1 \otimes x \otimes b'') + (1 \otimes \rho_E(d) \otimes b_2)(1 \otimes x \otimes b'') +$$
$$+ b_1 \otimes \rho_E(d).\, x \otimes b'' + b_2 \otimes \rho_E(d)x \otimes b'' =$$
$$= d^*(b_1 ,x,b'') + d^*(b_2 ,x,b'').$$

Análogamente se observa que es k-lineal en las otras coordenadas, de donde d^* se factoriza por : $B \otimes E(A/k) \otimes B \xrightarrow{d^*} J(L(A/k),A \otimes B)$.

ii) Sea $\delta : A \times B \rightarrow J(L(A/k), A \otimes B)$

$$\delta(a,b) = d(a) \otimes b + 1 \otimes a\, \rho_E(d) \otimes b$$

δ es k-bilineal (trivial) de donde δ define una aplicación que seguiremos llamando $\delta : A \otimes_k B \rightarrow J(L, A \otimes B)$.

Vamos a demostrar que δ es una d-derivación, para lo cual basta ver que

$$\delta((a\otimes b).(a'\otimes b')) = \delta(a\otimes b)(a'\otimes b') + (a\otimes b)\ \delta(a'\otimes b')$$

en efecto:

$(a\otimes b).(a'\otimes b') = a\,a'\otimes b\,b'$

$\delta(a\,a'\otimes b\,b') = d(a\,a')\otimes b\,b' + 1\otimes a\,a'\ \rho_E(d)\otimes b\,b' =$

$= a\,d(a')\otimes b\,b' + a'\,d(a)\otimes b'\,b + (a\,a'\otimes 1)[b'\otimes \rho_E(d)\otimes b +$

$+ b\otimes\rho_E(d)\otimes b'] =$

$= (a\otimes b)\,[\,d(a')\otimes b' + 1\otimes a'\rho_E(d)\otimes b'] +$

$+ (a'\otimes b')\,[d(a)\otimes b + 1\otimes a\ \rho_E(d)\otimes b\,] =$

$= (a\otimes b)\ \delta(a'\otimes b') + (a'\otimes b')\ \delta(a\otimes b)$ c.q.d.

iii) Si α $A\otimes B$ y x $B\otimes E(A/k)\otimes B$ se afirma que $d^*(\alpha.x) = \delta(\alpha).\,i(x) + \alpha d^*(x)$ basta ver que la fórmula es válida para $\alpha = a\otimes b$ y $x = b_1\otimes\theta\otimes b_2$ en efecto: $d^*\,((a\otimes b)(b_1\otimes\theta\otimes b_2) = d^*\,(b\,b_1\, a\,\theta\otimes b_2) = (1\otimes\rho_E(d)\otimes b\,b_1)(1\otimes a\,\theta\otimes b_2) + (b\,b_1\otimes\rho_E(d).a.\theta\otimes b_2) = (b_1\otimes\rho_E(d)\otimes b_2)(1\otimes a\,\theta\otimes b_2) + (b\otimes\rho_E(d)\otimes b_1)(1\otimes a\theta\otimes b_2) + (b\,b_1\otimes a\rho_E(d)\theta\otimes b_2) + (b\,b_1\otimes d(a)\theta\otimes b_2) = (1\otimes a\,\rho_E(d)\otimes b)(b_1\otimes\theta\otimes b_2) + (d(a)\otimes b)(b_1\otimes\theta\otimes b_2) + (a\otimes b)\,[(1\otimes\rho_E(d)\otimes b_1)(1\otimes\theta\otimes b_2) + (b_1\otimes\rho_E(d)\theta\otimes b_2)] = \delta(a\otimes b)(b_1\otimes\theta\otimes b_2) + (a\otimes b)\,d^*(b_1\otimes\theta\otimes b_2)$ c.q.d.

Estamos en condiciones de aplicar el Lema 3.8 que asegura la existencia de una única k-derivación $d' : S_{A\otimes B}[B\otimes E(A/k)\otimes B] \rightarrow J(L(A/k), A\otimes B)$ que coincide con d^* en $B\otimes E(A/k)\otimes B$ y con δ en $A\otimes B$.

Veamos que d' se anula en el ideal I de la definición 3.9. La verificación es obvia para los elementos de la forma a) sean entonces $d_1, \ldots, d_r \in L(A/k)$ y $b_1, b_2 \in B$:

$$d'(1 \otimes \rho_E(d_r)\ldots\rho_E(d_1) \otimes b_1 b_2) - d'(\sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{u=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(U)}) \otimes b_1).$$
$$.(1 \otimes \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(V)}) \otimes b_2)) =$$

$$= (1 \otimes \rho_E(d)\rho_E(d_r)\ldots\rho_E(d_1) \otimes b_1 b_2) -$$
$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \rho_E(d).\prod_{u=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(U)}) \otimes b_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(V)}) \otimes b_2) -$$
$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{u=1}^{j} \rho_E(d_\alpha) \otimes b_1)(1 \otimes \rho_E(d) \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(V)}) \otimes b_2) \quad .$$

Si denotamos $d = d_{r+1}$ la última expresión se transforma en:

$$1 \otimes \rho_E(d_{r+1})\ldots\rho_E(d_1) \otimes b_1 b_2 -$$
$$- (\sum_{j=1}^{r+1} \sum_{\alpha \in F(j,r+1),\, \alpha(j)=r+1} (1 \otimes \prod_{u=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(U)}) \otimes b_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(V)}) \otimes b_2) -$$
$$- \sum_{j=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(j,r+1)\, \alpha(j) \leqslant r} (1 \otimes \prod_{u=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(U)}) \otimes b_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(V)}) \otimes b_2) =$$

$$= (1 \otimes \rho_E(d_{r+1})\ldots\rho_E(d_1) \otimes b_1 b_2) -$$

$$- (\sum_{j=0}^{r+1} \sum_{\alpha \in F(j,r+1)} (1 \otimes \prod_{u=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(U)}) \otimes b_1)(1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(V)}) \otimes b_2)) = 0$$

c.q.d.

Hemos construido así una función $\gamma : L(A/k) \to L(J(L(A/k), A \otimes B/k)$.

iv) La función γ es A-lineal.

Basta probar que $\gamma(ad)(a' \otimes b') = a\gamma(d)(a' \otimes b')$ y $\gamma(ad)(b' \otimes \theta \otimes b'') = a\gamma(d)(b' \otimes \theta \otimes b'')$.

$$\gamma(ad)(a' \otimes b') = a(da') \otimes b' + (1 \otimes \rho_E(a'ad) \otimes b') =$$
$$= (a \otimes 1)(da' \otimes b' + 1 \otimes \rho_E(a'd) \otimes b')$$

$$\gamma(ad)(b' \otimes \theta \otimes b'') = (1 \otimes \rho_E(ad) \otimes b')(1 \otimes \theta \otimes b'') + (b' \otimes \rho_E(ad)$$
$$\theta \otimes b'') =$$

$= (a\otimes 1)((1\otimes\rho_E(d)\otimes b')(1\otimes\theta\otimes b'')) + (b'\otimes\rho_E(d)\otimes b''))$ c.q.d.

v) La función γ es de k-álgebras de Lie.
Sean $d,d'\in L(A/k)$, $a\in A$, $b\in B$ se tiene:

$$[\gamma(d),\ \gamma(d')]\ (a\otimes_k b) = \gamma(d)\gamma(d')(a\otimes b)-\gamma(d')\gamma(d)(a\otimes b) =$$

$$= \gamma(d)(d'a\otimes b+(1\otimes a\,\rho_E(d')\otimes b))-\gamma(d')(da\otimes b + (1\otimes a\,\rho_E(d)\otimes b)) =$$

$$= (dd'a)\otimes b + (1\otimes(d'a)\,\rho_E(d)\otimes b)+(1\otimes\rho_E(d)(a\,\rho_E(d'))\otimes b) -$$

$$- (d'da)\otimes b-(1\otimes(da)\rho_E(d')\otimes b)-(1\otimes\rho_E(d')(a\,\rho_E(d))\otimes b) =$$

$$= (dd'a)\otimes b + (1\otimes(d'a)\,\rho_E(d)\otimes b)+(1\otimes(da)\,\rho_E(d')\otimes b) +$$

$$+ (1\otimes a\,\rho_E(d)\rho_E(d')\otimes b) - (d'da)\otimes b - (1\otimes(da)\,\rho_E(d')\otimes b) -$$

$$- (1\otimes(d'a)\,\rho_E(d)\otimes b) - (1\otimes a\,\rho_E(d')\rho_E(d)\otimes b) =$$

$$= (dd'a)\otimes b + (1\otimes a\,\rho_E(d)\,\rho_E(d')\otimes b) -$$

$$- (d'da)\otimes b - (1\otimes a\,\rho_E(d')\,\rho_E(d)\otimes b) =$$

$$= (dd'a)\otimes b - (d'da)\otimes b + (1\otimes a\rho_E[d,d']\otimes b) =$$

$$= ([d,d']\ a)\otimes b + 1\otimes a\rho([d,d'])\otimes b =$$

$$= (\gamma[d,d'])(a\otimes b)$$

Además si $b,b'\in B$ y $x\in E(A/k)$ se tiene $[\gamma(d),\ \gamma(d')]$ $(b\otimes x\otimes b') = (\gamma(d)\gamma(d')-\gamma(d)\gamma(d)(b\otimes x\otimes b') =$

$$= (1\otimes\rho_E(d)\,\rho_E(d')\otimes b)(1\otimes x\otimes b') + (1\otimes\rho_E(d')\otimes b)(1\otimes\rho_E(d)x\otimes b') +$$

$$+ (1\otimes\rho_E(d)\otimes b)(1\otimes\rho_E(d')\otimes b') + (b\otimes\rho_E(d)\,\rho_E(d')x\otimes b') -$$

$$- (1 \otimes \rho_E(d')\, \rho_E(d) \otimes b)(1 \otimes x \otimes b') -$$

$$- (1 \otimes \rho_E(d) \otimes b)(1 \otimes \rho_E(d')x \otimes b') -$$

$$- (1 \otimes \rho_E(d') \otimes b)(1 \otimes \rho_E(d)x \otimes b') - (b \otimes \rho_E(d')\, \rho_E(d)x \otimes b') =$$

$$= (1 \otimes \rho_E[d,d'] \otimes b)(1 \otimes x \otimes b') + (b \otimes \rho_E[d,d'] \otimes x\, b') =$$

$$= \gamma([d,d']).(b \otimes x \otimes b') \quad \text{c.q.d.}$$

Como $\gamma(d).(a \otimes 1) = da \otimes 1$ hemos probado que $J(L(A/k), A \otimes B)$ tiene estructura de $L(A/k)$ álgebra a través de γ .

3.11 Espacio de Jets: Propiedad universal.

Para abreviar notación al anillo $J(L/A/k), A \otimes_k B)$ lo denotaremos simplemente por $J(A,B)$.

Hemos construido entonces una $A \otimes B$-álgebra $J(A,B)$ y una aplicación $\gamma : L(A/k) \to L(J(A,B)/k)$ que hace de $J(A.B)$ un $L(A/k)$-álgebra.

Sea ahora $\rho_J : L(J(A,B)/k) \to E(L(J(A,B)/k)$ la aplicación en la envolvente universal (definición 3.4):

$$\begin{array}{ccc} L(A/k) & \xrightarrow{\gamma} & L(J(A,B)/k) \\ \rho_A \downarrow & & \downarrow \rho_J \\ E(A/k) & \xrightarrow{\varepsilon(\gamma)} & E(J(A,B)/k) \end{array}$$

Como $E(J(A,B)/k)$ resulta una A-k-álgebra envolvente para $L(A/k)$ por el morfismo $\rho_J \circ \gamma$, resulta la existencia de una única aplicación $\varepsilon(\gamma)$ tal que:

i) $\varepsilon(\gamma)$ es de k-álgebras,

ii) $\varepsilon(\gamma)$ es de A-módulos a izquierda,

iii) $\varepsilon(\gamma) \circ \rho_A = \rho_J \circ \gamma$.

(Ver definición 3.4).

En general si T es una $L(A/k)$-álgebra con morfismo estructural θ: $L(A/k) \to L(T/k)$(def. 3.2) y si $\rho_T : L(T/k) \to E(L(T/k))$ es la aplicación en la envolvente universal, vamos a denotar por $\varepsilon(\theta)$ al único morfismo de k-álgebras y de A-módulos a izquierda tal que $\varepsilon(\theta) \circ \rho_A = \rho_T \circ \theta$ que resulta de la propiedad universal de $E(A/k)$ (def. 3.4).

<u>Teorema 3.11</u> . Si T es una $L(A/k)$-álgebra con aplicación estructural $\theta : L(A/k) \to L(T/k)$ (def.3.2) y una $A \otimes_k B$-álgebra por un morfismo λ: $A \otimes_k B \to T$, entonces existe una única aplicación $j_{\theta\lambda}$: $J(A,B) \to T$ de $A \otimes_k B$-álgebras tal que para todo $\alpha \in E(A/k)$, $a \in A$ y $b \in B$ se tiene:

$$j_{\theta\lambda}(\varepsilon(\gamma)(\alpha)(a \otimes b)) = (\varepsilon(\theta)(\alpha))(\lambda(a \otimes b)) .$$

<u>Demostración</u>: Notemos que $j_{\theta\lambda}(1 \otimes \alpha \otimes b) = \varepsilon(\theta)(\alpha)(1 \otimes b)$ y $j_{\theta\lambda}(b' \otimes \alpha \otimes b'') = \lambda(1 \otimes b')(\varepsilon(\theta)(\alpha)(1 \otimes b''))$ con lo cual se deter-

mina unívocamente una aplicación de $A \otimes_k B$-módulos: $\mu : B \otimes_k E(A/k) \otimes_k B \to T$ donde $\mu(b \otimes \alpha \otimes b') = \lambda(1 \otimes b)\varepsilon(\theta)(\alpha)(1 \otimes b')$. Luego una única extensión de μ a una aplicación de $A \otimes_k B$-álgebras: $\mu : S_{A\otimes B}[B \otimes E(A/k) \otimes B] \to T$.

Por construcción de μ , si $d \in L(A/k)$;

$$\mu(d(a) \otimes b + 1 \otimes ad \otimes b) = \lambda(d(a) \otimes b) + \mu(a\,\gamma(d)(b)) =$$

$$= \theta(d)(\lambda(a \otimes b)) \quad .$$

Más aún si $d_1, \ldots, d_r \in L(A/k)$ y $b_1, b_2 \in B$ por lema 3.4:

$$\theta(d_1)\ldots\theta(d_r)(b_1 b_2) = \sum_{u=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(u,r)} \left(\prod_{v=1}^{u} \theta(d_{\alpha(v)})\right) b_1 \left(\prod_{w=1}^{r-u} \theta(d_{c\,\alpha(w)})\right) b_2 \quad .$$

Resulta también claro que $\mu(1 \otimes d \otimes 1) = 0$ de donde μ se factoriza por $J(A,B)$ y lo denotaremos por $j_{\theta,\lambda}$.

Si $a \in A$, $b \in B$ y $d_1, \ldots, d_r \in L(A/k)$ se tiene:

$$j_{\theta,\lambda}(\varepsilon(\gamma)(\rho_E(d\ )\ldots\rho_E(d\ ))(a \otimes b)) =$$

$$= j_{\theta,\lambda}\left(\sum_{u=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(u,r)} \left(\left(\prod_{v=1}^{u} d_{\alpha(v)}\right)a\right)\left(1 \otimes \prod_{w=1}^{r-u} \rho_E(d_{c\,\alpha(w)}) \otimes b\right)\right) =$$

$$= \sum_{u=0}^{r} \sum_{\alpha \in F(u,r)} \left(\left(\prod_{v=1}^{u} d_{\alpha(v)}\right)a\right)\left(\varepsilon(\theta) \prod_{w=1}^{r-u} \rho_E(d_{c\,\alpha(w)})\right)(b) =$$

$$= \theta(d_r)\ldots\theta(d_1)\,\lambda(a \otimes b) = \varepsilon(\theta)(\rho_E(d_r)\ldots\rho_E(d_1))\,\lambda(a \otimes b) \quad .$$

Como $\varepsilon(\theta)$ y $j_{\theta,\lambda}$ son A-lineales resulta para todo $\alpha \in E(A/k)$

$$j_{\theta,\lambda}((\varepsilon(\theta)\alpha)\ (a \otimes b)) = (\varepsilon(\theta)\alpha)\ \lambda(a \otimes b). \qquad \text{c.q.d.}$$

Corolario 3.11. Si en el caso de las hipótesis del teorema anterior tenemos dado $h : B \to A$ morfismo de k-álgebras, en A queda definida una estructura de $A \otimes B$-álgebra por $H : A \otimes_k B \to A$ donde:

$$H(a \otimes b) = a.h(b) \quad .$$

Como A es también una $L(A/k)$-álgebra queda definido un morfismo $j_{id,H}$ por el teorema 3.11

$$j_{id,H} : J(A,B) \to A$$

que denominaremos <u>sección jet</u> de h y notaremos por j_h.

<u>Proposición 3.12</u>

$$A_s \otimes_A J(A,B) \simeq J(A_s, B) \ .$$

Vamos a construir $\gamma_s : L(A/k) \to L(A \otimes_A J(A,B)/k)$ que haga de $A \otimes_A J(A,B)$ una $L(A/k)$-álgebra (def. 3.2) y definiremos λ_s : $A_s \otimes B \to A_s \otimes_A J(A,B)$ que haga de $A_s \otimes_A J(A,B)$ una $A_s \otimes_k B$-álgebra.

Queremos ver que dado una $L(A/k)$-álgebra T con morfismo estructural $\theta : L(A_s/k) \to L(T/k)$ y $A_s \otimes B$-álgebra por $\mu : A_s \otimes B \to T$, existe un único morfismo de $A \otimes B$-álgebras

$$j_{\theta,\mu} : A_s \otimes_A J(A,B) \to T \qquad \text{tal que}$$

$j_{\theta,\lambda}(\varepsilon(\gamma_s)(x)(\lambda_s(a_s \otimes b))) = (\varepsilon(\theta)(x))(\mu(a_s \otimes b)$ si $x \in E(A_s/k)$.

Denotaremos por $\gamma: L(A/k) \to L(J(A,B)/k)$ y $\lambda: A \otimes B \to J(A,B)$ a las aplicaciones que hacen de $J(A,B)$ una $L(A/k)$-álgebra y una $A \otimes B$-álgebra respectivamente

i) Dado $\lambda : A \otimes_k B \to J(A,B)$ definimos naturalmente : $\lambda_s : A_s \otimes_k B \to A_s \otimes_A J(A,B)$ donde $\lambda_s = id_{A_s} \otimes_A \lambda$.

ii) Construcción de γ_s: $L(As/k) \to L(A \otimes_A J(A,B)/k)$ $L(A_s \otimes J(A,B)/k)$ se identifica con:

$$\mathrm{Hom}_{A_s \otimes J(A,B)}(D^1(A_s \otimes J(A,B)/k), A_s \otimes J(A,B) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{J(A,B)}(D^1(J(A,B)/k), J(A,B)_s)(\text{ por ser } A_s \otimes J(A,B) = J(A,B)_s).$$

Al aplicar el funtor covariante $\mathrm{Hom}(D^1(J(A,B)/k))$ a la inclusión $i: J(A,B) \to J(A,B)_s$ se tiene:

$$\mathrm{Hom}_{J(A,B)}(D^1(J(A,B)/k), J(A,B)) \to \mathrm{Hom}_{J(A,B)}(D^1(J(A,B)/k), J(A,B)_s)$$

que define $L(J(A,B)/k) \to L(J(A,B)_s/k)$ las extensiones naturales de las derivaciones se tiene:

$$L(A/k) \xrightarrow{\gamma} L(J(A,B)/k) \xrightarrow{i} L(A \otimes_A J(A,B)/k)$$

$i_{\circ}\gamma$ se extiende a una aplicación A_s-lineal

$$\gamma_s : A_s \otimes L(A/k) \to L(A_s \otimes_A J(A,B)/k)$$

en el caso A-un anillo regular se tiene $D^1(A/k)$ proyectivo luego: $A_s \otimes_A L(A/k) = L(A\ /k)$ por lo tanto $\gamma_s: L(A_s/k) \to L(A_s \otimes J(A,B)/k)$ hace de $A_s \otimes_A J(A,B)$ un $L(A_s/k)$-álgebra.

iii) Existencia de $j_{\theta\mu}$

Dado $\theta : L(A_s/k) \to L(T/k)$ resulta: $L(A/k) \xrightarrow{i} L(A_s/k) \xrightarrow{\theta} L(T/k)$ i el morfismo anteriormente para el caso A regular, denotaremos $\bar{\theta} = \theta\ .\ i$.

Por otro lado sea $\bar{\mu} = \mu\ .\ i$

$$A \otimes_k B \xrightarrow{i} A_s \otimes_k B \xrightarrow{\mu} T \quad .$$

Resulta ahora por propiedad universal de J(A,B) la existencia de un único morfismo de $A \otimes_k B$-álgebras $j_{\bar{\theta}\bar{\mu}} : J(A,B) \to T$ tal que para $x \in E(A/k)$, $a \in A$ y $b \in B$ se tiene:

$$j_{\theta\mu}(\varepsilon(\gamma)(x)\lambda(a \otimes b)) = [\varepsilon(\bar{\theta})(x)]\ (\mu(a \otimes b))$$

Como s es inversible en T queda unívocamente definido $j_{\bar{\theta}\bar{\mu}}$ a un morfismo $j_{\theta\mu}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \otimes_A J(A,B) \arrow[rd, "j_{\theta\mu}"] & \\
& T \\
J(A,B) \arrow[uu, "i"] \arrow[ru, "j_{\bar{\theta}\bar{\mu}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $A_s \otimes_A E(A/k) = E(A\ /k)$ (Corolario 3.6) se tiene:

$$E(A/k) \xrightarrow{\varepsilon(\gamma)} E(J(A,B)/k) \xrightarrow{\varepsilon(i)} E(A \otimes_A J(A,B)/k) \qquad y$$

$id_{A_s} \otimes_A \varepsilon(i_{\circ}\gamma) = \varepsilon(\gamma_s)$ por la propiedad universal de $E(A_s/k)$.

Supongamos $x = \rho_E(d_1)\dots\rho_E(d_n) \in E(A/k)$ y $a'_s \in A_s$ se tiene: $\varepsilon(\gamma_s)(a'_s \otimes x) = a'_s \otimes_A \varepsilon(i_{\circ}\gamma)(x)$.

Sea $a_s \otimes b \in A_s \otimes_k B$ se tiene:

$$[\varepsilon(\gamma_s)(a'_s \otimes x)] \quad (\lambda_s(a_s \otimes b)) = a'_s \otimes_A [\varepsilon(i\circ\gamma)(x)] \quad (a_s \otimes \lambda(1 \otimes b)) .$$

Sea como siempre $F(r,n)$ para $0 \leqslant r \leqslant n$ el conjunto de aplicaciones estrictamente crecientes de $\{1, 2,\ldots,r\}$ en $\{1,\ldots,n\}$ y dado $\alpha \in F(r,n)$ sea $c\alpha \in F(n-r,n)$ tal que su imagen sea el complemento de la imagen de α .

Si denotamos por d_α al monomio : $d_\alpha = \rho_E(d_{\alpha(1)})\ldots \rho_E(d_{\alpha(r)})$ se tiene:

$$[\varepsilon(i\circ\gamma)(x)] \quad (a_S \otimes \lambda(1 \otimes b)) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha\in F(t,n)} d_\alpha(a_s) \otimes_A \varepsilon(\gamma)(d_{c\alpha})\lambda(1 \otimes b)$$

$$j_{\theta\mu}([\varepsilon(\gamma_s)(a'_s \otimes x)] \lambda_s(a_s \otimes b)) =$$

$$= j_{\theta\mu}([(1 \otimes \varepsilon(i\circ\gamma)(a'_s \otimes x)] \quad (1 \otimes \lambda)(a_s \otimes b)) =$$

$$= (1 \otimes j_{\theta\mu})(a'_s \otimes \varepsilon(i\circ\gamma)(x))(a_s \otimes \lambda(1 \otimes b))$$

Pero $\varepsilon(i\circ\gamma)(\rho_E(d_1) \circ \circ\rho_E(d_n))(a_s \otimes \lambda(1 \otimes b)) =$

$$= \sum_{t=0}^{n} \cdot \sum_{\alpha\in F(t,n)} d_\alpha(a_s) \otimes_A \varepsilon(\gamma)(d_{c\alpha})(\lambda(1 \otimes b))$$

$$(1 \otimes j_{\theta\mu})([a'_s \otimes_A \varepsilon(i\circ\gamma)(x)] \quad (a_s \otimes_A \lambda(1 \otimes b)) =$$

$$= (1 \otimes j_{\theta\mu}) [\sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha\in F(t,n)} a'_s \, d_\alpha(a_s) \otimes_A [\varepsilon(\gamma)(d_{c\alpha})] \quad (\lambda(1 \otimes b)) =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha\in F(t,n)} a'_s \, d_\alpha(a_s) \otimes_A j_{\theta\mu}([\varepsilon(\gamma)(d_{c\alpha})] \quad (\lambda(1 \otimes b)) =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha\in F(t,n)} a'_s \, d_\alpha(a_s) \otimes_A \varepsilon(\bar\theta)(d_{c\alpha})(\bar\mu \, (1 \otimes b)) =$$

$$= a'_s \quad \varepsilon(\theta)(\rho_E(d_1)\ldots\rho_E(d_n))(\mu(a_s \otimes b)) \qquad \text{c.q.d.}$$

iv) Unicidad

Las aplicaciones $\gamma_s : L(A_s/k) \to L(A_s \otimes_A J(A,B)/k)$ y $\lambda_s : A_s \otimes B \to$

$A_s \otimes_A J(A,B)$ definidas anteriormente aseguran la existencia de una única flecha $j_{\gamma_s \lambda_s} : J(A_s, B) \to A_s \otimes J(A,B)$.

La unicidad de la flecha construida en iii) resultará de la sobreyectividad de $j_{\gamma_s \lambda_s}$ por la propiedad universal de $J(A_s, B)$.

En efecto $j_{\gamma_s \lambda_s}$ proviene de la aplicación natural sobreyectiva

$$B \otimes_k E(A_s/k) \otimes_k B \to A \otimes_A (B \otimes_k E(A/k) \otimes_k B)$$

<u>Proposición 3.13.</u>

$$B_t \otimes_B J(A,B) \simeq J(A,B_t)$$

Tenemos definidos $\gamma : L(A/k) \to L(J(A,B)/k)$ que hace de $J(A,B)$ un $L(A/k)$-álgebra y $\lambda : A \otimes B \to J(A,B)$ da a $J(A,B)$ estructura de $A \otimes_k B$-álgebra.

Como $B_t \otimes_B J(A,B) = J(A,B)_t$ se tiene una inclusión natural i : $L(J(A,B)/k) \to L(J(A,B)_t/k)$, sea $\gamma' = i \circ \gamma : L(A/k) \to L(B_t \otimes_B J(A,B)/k)$ y $\lambda' = \lambda \otimes id_{B_t} : A \otimes B_t \to B_t \otimes_B J(A,B)$. Queda definida una estructura de $L(A/k)$-álgebra para $B_t \otimes_B J(A,B)$ como también una estructura de $A \otimes B_t$-álgebra.

Dado T, una $L(A/k)$ álgebra con morfismo estructural $\theta : L(A/k) \to L(T/k)$ y una $A \otimes B_t$-álgebra por $\mu : A \otimes B_t \to T$ se tiene naturalmente un morfismo $\mu' : A \otimes B \to T$, luego existe un único morfismo $j_{\theta\mu}$: $J(A,B) \to T$ tal que:

$$j_{\theta\mu}(\varepsilon(\gamma)(x)(\lambda(a \otimes b))) = \varepsilon(\theta)(x)\, \mu'(a \otimes b)$$

si $x \in E(A/k)$ $a \in A$ y $b \in B$.

Sea $j_{\theta\mu} = 1_{B_t} \otimes_B j_{\theta\mu}$: $B_t \otimes_B J(A,B) \to T$ se tiene $\varepsilon(i \circ \gamma)(d_1 \circ \dots \circ d_n)(b_t \otimes_B (a \otimes b)) =$

$$= \sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha \in F(t,n)} \varepsilon(i_0\gamma)(d_\alpha)(b_t) \otimes_B [\varepsilon(\gamma)(d_{c\alpha})]\, \lambda(a \otimes b)$$

donde $F(t,n)$ son las aplicaciones definidas en la proposición 3.12.

Aplicando $j_{\theta\mu} = 1_{B_t} \otimes_B j_{\theta\mu'}$ se tiene:

$$(1_{B_t} \otimes_B j_{\theta\mu}) \left(\sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha \in F(t,n)} d_\alpha(b_t) \otimes_B ([\varepsilon(\gamma)(d_{c\,\alpha})] \lambda(a \otimes b)) \right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha \in F(t,n)} d_\alpha(b_t) \otimes_B j_{\theta\mu}(\varepsilon(\gamma)(d_{c\,\alpha}) \lambda(a \otimes b)) =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \sum_{\alpha \in F(t,n)} d_\alpha(b_t) \otimes_B \varepsilon(\theta)(d_{c\,\alpha})\mu'(a \otimes b) =$$

$$= \varepsilon(\theta)(d_1 \circ \cdots \circ d_n)(b_t \otimes_B \mu'(a \otimes b)) \qquad \text{c.q.d.}$$

El morfismo $\gamma' : L(A/k) \to L(B_t \otimes_B J(A,B)/k)$ y $\lambda' : A \otimes_k B_t \to B_t \otimes_B J(A,B)$ aseguran la existencia de un único morfismo $j : J(A,B_t) \to B_t \otimes_B J(A,B)$ claramente sobreyectivo.

De aquí resulta la unicidad de $j_{\theta\mu}$ construida anteriormente .

Definición 3.13.

Dadas dos k-álgebras A y B hemos definido en 3.9 el anillo J(A,B) con una inclusión natural de k-álgebras

$$i : A \otimes_k B \to J(A,B)$$

que induce a nivel de esquemas una proyección

$$\Pi : \mathrm{Esq}(J(A,B)) \to \mathrm{Esq}(A \otimes B) = \mathrm{Esq}\, A \times \mathrm{Esq}\, B.$$

Las proposiciones 3.12 y 3.13 nos aseguran que dados (X,θ_X); (Y,θ_Y) pre-esquemas de k-álgebras queda definido el pre-esquema $J(\theta_X,\theta_Y)$ y una proyección:

$$\Pi : \mathrm{Sop}(J(\theta_X,\theta_Y)) \to X \times Y$$

de modo que si $V \subset X$, $U \subset Y$ son abiertos tales que $(V,\theta_{X\,V}) \simeq \mathrm{Esq}\, A$ y $(U,\theta_{Y\,U}) \simeq \mathrm{Esq}\, B$ se tiene $\Pi^{-1}(V \times U) \simeq \mathrm{Spec}\,(J(A,B))$.

3.14 Sección Jet: j_λ

Aquí vamos a hacer un desarrollo más constructivo de la sección jet definida en el corolario 3.11.

Dados A,B k-álgebras y $\lambda : B \to A$ morfismo de k-álgebras, queda definida en A una estructura de $A \otimes_k B$-álgebra por el morfismo

$1_A \otimes \lambda : A \otimes B \to A$.

Sea ahora la aplicación

$$\bar{j}_\lambda : B \times E(A/k) \times B \to A$$

$$(b \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} d_i , b_2) \to \lambda(b_1)(d_n \circ d_{n-1} \circ \cdots \circ d_1)(\lambda b_2)$$

$\bar{j}_\lambda$ está bien definida y es claramente 3-k-lineal luego $\bar{j}_\lambda$ factoriza y define:

$$\bar{j}_\lambda : B \otimes E(A/k) \otimes B \to A \quad .$$

Afirmamos que $\bar{j}_\lambda$ está en la categoría de $A \otimes_k B$ módulos, para lo cual basta notar que dados $a \in A$ $b, b_1, b_2 \in B$ y $\theta \in E(A/k), \theta = \rho_E(d_r) \circ \circ \rho_E(d_1)$

$$\bar{j}_\lambda((a \otimes b)(b_1 \otimes \theta \otimes b_2)) = \bar{j}_\lambda(b_1 b \otimes a\theta \otimes b_2) =$$

$$= \lambda(b_1)\lambda(b)\, a(d_r \circ\circ d_1)(\lambda b_2) = (a \otimes b).\, j_\lambda(b_1 \otimes \theta \otimes b_2) .$$

Luego $\bar{j}_\lambda$ define un único morfismo de $A \otimes B$-álgebras j'_λ : $S_{A\otimes B}[B \otimes E(A/k) \otimes B] \to A$ tal que j'_λ restringida a $B \otimes E(A/k) \otimes B$ coincida con $\bar{j}_\lambda$.

Nos proponemos demostrar que j'_λ factoriza por $J(L(A/k), A \otimes B)$ para esto notemos que j'_λ se anula en el ideal I de la definición 3.9.

i) Sea $e \in E(A/k)$ $e = \rho_E(d\ ) \ldots \rho_E(d\ )$

$$j'_\lambda (1 \otimes e \otimes 1) = \lambda(1). (\rho_E(d_r) \circ \cdots \circ \rho_E(d_1))(1) = 0$$

Como $E(A/k)$ está generado como k-álgebra por elementos de la forma de e , resulta que j'_λ se anula en los elementos de la forma a) de la definición 3.9.

ii) $j'_\lambda (1 \otimes \rho_E(d_r) \ldots \rho_E(d_1) \otimes b_1 b_2 -$

$$- \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{v=1}^{j} \rho_E(d_{\alpha(v)}) \otimes b_1)(1 \otimes_k \prod_{u=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\,\alpha(u)}) \otimes b_2) -$$

$$- b_1 \otimes_k \prod_{j=1}^{r} \rho_E(d_j) \otimes b_2 - b_2 \otimes_k \prod_{j=1}^{r} \rho_E(d_j) \otimes_k b_1) =$$

$$= (d_r \circ \cdots \circ d_1)(b_1 . b_2) - \sum_{u=0}^{r} (\sum_{\alpha \in F(u,r)} ((\prod_{v=1}^{u} d_{\alpha(v)}) \lambda(b_1)) (\prod_{w=1}^{r-u} d_{c\alpha(w)}) (\lambda(b_2)) =$$

$= 0$ (por Lema 3.4).

Luego j'_λ define bien un morfismo de $A \otimes_k B$ álgebras j_λ : $J(L(A/k), A \otimes B) \to A$.

<u>Proposición 3.15</u>. Dadas A,B k-álgebras, $\lambda : B \to A$ de k-álgebras d $L(A/k)$; $j \in J(LA/k), A \otimes_k B)$ se tiene:

$$j_\lambda \ (\gamma(d)(j)) = d(j_\lambda(j))$$

donde $\gamma : L(A/k) \to L(J(LA/k), A \otimes B)/k)$ es la función definida en la construcción 3.10.

Sea $a \in A$ $b \in B$, $\{d_1, \ldots, d_r\} \subset L(A/k)$

$$j_\lambda(\gamma(d)(a \otimes b)) = j_\lambda(da \otimes b + 1 \otimes ad \otimes b) =$$

$$= d(a)\ \lambda(b) + a.d(\lambda b) = d(j_\lambda(a \otimes b))$$

$$j_\lambda(\gamma(d)(1 \otimes \rho_E(d_r) \ldots \rho_E(d_1) \otimes b)) =$$

$$= \ j_\lambda(1 \otimes \rho_E(d)\rho_E(d_r) \ldots \rho_E(d_1) \otimes b) = d\ ((d_r \circ \cdots \circ d_1)(\lambda b)) =$$

$$= \ d(j_\lambda(1 \otimes \rho_E(d_r) \ldots \rho_E(d_1) \otimes b)) \quad .$$

Como $\gamma(d)$ es una derivación, la proposición queda probada para los elementos de $B \otimes E(A/k) \otimes B$ por lo tanto para todo elemento $j \in J(L(A/k), A \otimes B)$.

En lo que sigue denotaremos $J(L(A/k), A \otimes B)$ como $J(A,B)$.

3.16

En la construcción 3.10 obtuvimos un morfismo γ: $L(A/k) \to L(J(A,B)/k)$ de k-álgebras y de A-módulos, definamos:

$$1 \otimes \gamma : J(A,B) \otimes L(A/k) \to L(J(A,B)/k) \qquad \text{j-lineal.}$$

Si aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{J(A,B)}(J(A,B)$ resulta, denotando por M^* el dual de M:

$$(1 \otimes \gamma)^t : D^1(J(A,B)/k)^{**} \to \mathrm{Hom}_{J(A,B)}(J(A,B) \otimes_A L(A/k), J(A,B)) .$$

Suponiendo $D^1(A/k)$ finitamente generado y proyectivo, resulta L(A/k) proyectivo de donde existe un isomorfismo α_2 :

$$\mathrm{Hom}_{J(A,B)}(J(A,B) \otimes_A L(A/k), J(A,B)) \overset{\alpha_1}{\simeq} \mathrm{Hom}_A(L(A/k), J(A,B)) \simeq$$

$$\overset{\alpha_2}{\simeq} J(A,B) \otimes_A D^1(A/k)^{**} .$$

Como todo módulo proyectivo es reflexivo resulta un isomorfismo α_3 natural:

$$J(A,B) \otimes_A D^1(A/k)^{**} \overset{\alpha_3}{\simeq} J(A,B) \otimes_A D^1(A/k)$$

$\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ es resulta un isomorfismo de J(A,B)-módulos:

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{J(A,B)}(J(A,B) \otimes_A L(A/k), J(A,B)) \to J(A,B) \otimes_A D(A/k)$$

Dado $\Gamma : D^1(J(A,B)/k) \to D^1(J(A,B)/k)^{**}$ el morfismo natural resulta

$$D^1(J/k) \xrightarrow{\Gamma} D^1(J/k)^{**} \xrightarrow{(1\otimes\gamma)^t} \mathrm{Hom}_{J(A,B)}(J(A,B) \otimes_A L(A/k), J(A,B)) \xrightarrow{\alpha} J(A,B) \otimes_A D^1(A/k) .$$

3.17

Denotaremos $\theta = \alpha \circ (1 \otimes \gamma)^t \circ \Gamma$ d J(A,B) módulos

$$\theta : D^1(J/k) \to J(A,B) \otimes_A D^1(A/k) .$$

Un morfismo $\lambda : B \to A$ de k-álgebras define $j_\lambda : J(A,B) \to A$ (3.11) un morfismo de A-álgebras, sea el diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
J & & A \\
{\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\
D^1(J/k) & \xrightarrow{\theta} & J \otimes D^1(A/k)
\end{array}
$$

Aplicando en la flecha horizontal el funtor $A\otimes_J$ resulta $1_A\otimes \theta : A \otimes_J D^1(J/k) \to A \otimes_J J \otimes_A D^1(A/k) = D^1(A/k)$.

Proposición 3.18

El morfismo $j_\lambda : J(A,B) \to A$ hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
J(A,B) & \xrightarrow{j_\lambda} & A \\
\downarrow{\scriptstyle d_*} & & \downarrow{\scriptstyle d_A} \\
A \otimes D^1(J(A,B)/k) & \xrightarrow{1\otimes\theta} & D^1(A/k)
\end{array}
$$

Proposición 3.18': $1_A\otimes \theta = d(j_\lambda)$

Las proposiciones 3.18 y 3.18' son equivalentes, en efecto $D^1(J(A,B)/k)$ está generado como $J(A,B)$-módulo por los elementos de la forma $d(j)$, $j \in J(A,B)$.

Demostración de la proposición 3.18!

Basta demostrar que para todo primo $P \subset A$ se tiene $1_{A_p} \otimes \theta = d(j_\lambda)$, y siempre suponiendo $D^1(A/k)$ proyectivo finitamente generado, resulta $A_p \otimes_A D^1(A/k) \simeq D^1(Ap/k)$ libre y finitamente generado, podemos suponer entonces $D^1(A/k)$ libre finitamente generado de base $\{d_1, \ldots, d_n\}$.

Dado $d(j) \in D^1(J(A,B)/k)$, $\Gamma(d(j)) \in \mathrm{Hom}_{J(A,B)}(L(J(A,B)/k), J(A,B))$ si $\delta \in L(J(A,B)/k)$ $\Gamma(d(j))(\delta) = \delta(j)$ ahora: $(1 \otimes \gamma)^t(\Gamma(d(j))) \in J \otimes D(A/k)^{**}$ libre de base $\{d_1^{**}, \ldots, d_n^{**}\}$ donde $\{d_i^{**}\}$ es la base dual asociada a $\{d_i^*\}$.

Luego:

$$(1 \otimes \gamma)^t \quad [\Gamma(d(j))] \quad = \sum_{i=1}^{n} [((1 \otimes \gamma)^t \; [\Gamma(d(j))] \;) \; (d_i^*)] \; d_i^{**}$$

$$\theta(d(j)) = \alpha_3[(1 \otimes \gamma)^t[\Gamma(d(j))]] \quad = \sum_{i=1}^{n}[((1 \otimes \gamma)^t[\Gamma(d(j))]) \; (d_i^*)] \; d_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\gamma(d_i^*)] (j)\ d_i$$

Dado $\lambda: B \to A$ definimos $j_\lambda: J(A,B) \to A$ y resulta:

$$(1 \otimes_A \theta)(d(j)) = \sum_{i=1}^{n} j_\lambda([\gamma(d_i^*)](j))\ d_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_i^*(j_\lambda(j)).d_i \text{ por prop. 3.15}$$

$$= d_A(j_\lambda(j))$$

Donde $d_A: A \to D^1(A/k)$ es la aplicación diferencial. c.q.d.

<u>3.19</u>

Dado N un A-módulo finitamente generado; denotaremos por $f_j(N)$ al j-ésimo invariante de Fitting (2.10).

Sea A una k-álgebra, M un A-módulo finitamente generado y $\Delta: A \to M$ una derivación de orden 1 , k-lineal definimos:

i) $\beta_j(M) = f_{j-1}(M)$

ii) $M(j) = A/\beta_j(M) \otimes_A M/\Delta\beta_j(M)$ donde por $\Delta\beta_j(M)$ entendemos el A-submódulo de M generado por la imagen de $\beta_j(M)$ por Δ ; y:

a) $\beta(i(1)) = \beta_{i(1)}(M)$

b) $M(i(1)) = A(\beta_{i(1)}(M) \otimes_A M/\Delta\beta_{i(1)}(M)$.

Definidos $M(i(1),\ldots, i(r-1))$, $\beta(i(1),\ldots,i(r-1))$

c) $\beta(i(1),\ldots i(r)) = (\beta(i(1)),\ldots,i(r-1)),\ \ \beta_{i(r)}(M(i(1),\ldots,i(r-1))$

d) $M(i(1),\ldots,i(r)) = A/\beta(i(1),\ldots,i(r)) \otimes_A M/\Delta(\beta(i(1),\ldots,i(r))$

<u>Definición 3.19.1</u>

Sean A,k,M como en la definición 3.19 dada una familia ordenada $i(1),\ldots,i(r)$ de enteros no negativos definimos un subesquema del Esq(A) : $\Sigma(\Delta,M,i(1),\ldots,i(r))$

i) el soporte de $\Sigma(\Delta,M,i(1),\ldots,i(r))$ consiste de los primos p Spec(A) tal que

a) $p \supset \beta(i(1),\ldots,i(r))$

b) $p \not\supset \beta(i(1),\ldots, i(j-1),i(j)+1) \quad 1 \leqslant j \leqslant r$

(definición 3.19).

ii) la estructura de haz es la inducida naturalmente por el anillo $A/\beta(i(1),\ldots, i(r))$.

Corolario: Dadas dos sucesiones $(i(1),\ldots, i(r))$ y $(i(1)',\ldots, i(r)')$ en las condiciones anteriores, si existe $1 \leqslant j \leqslant r$ tal que $i(j) \neq i(j)'$ se tiene:

Soporte de $\Sigma(M,A,i(1),\ldots,i(r)) \cap$ Soporte $\Sigma(M,A,i(1)',\ldots,i(r)')= \emptyset$.

3.20

i) Sean B,A k-álgebras y λ: B $\to$ A morfismos de k-álgebras, se define $d(\lambda)$ tal que el diagrama conmute (Nota 2.5)

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{\lambda} & A & & & & \\ {\scriptstyle 1\otimes d_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_A} & & & & \\ A \otimes D^1(B/k) & \xrightarrow{d(\lambda)} & D^1(A/k) & \xrightarrow{p} & D^1(A/B) & \to & 0 \end{array}$$

con los pares $(d_B, D^1(B/k); (d_A,D^1(A/k))$ como en el corolario 2.4.

Si suponemos $D^1(A/k)$ finitamente generado, tambiá lo será $d(\lambda) = D^1(A/B)$ sea entonces $\Delta = p_o d_A$; quedan definidos los objetos $D^1(A/B)(i(1),\ldots,i(n))$ y los ideales $\beta(j(1),\ldots,i(n))$ que denotaremos por $Z_\lambda(i(1),\ldots,i(n))$.

ii) Para dos k-álgebras B y A con $D^1(A/k)$ proyectivo y finitamente generado como A-módulo hemos construido un morfismo de J(A,B)-módulos $\theta : D^1(J(A,B)/k) \to J(A,B) \otimes_A D^1(A/k)$ (3.17); sean $i : B \to J(A,B)$ la inclusión natural

$$\begin{array}{ccccccccc} B & \xrightarrow{i} & J(A,B) & & & A & & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_J} & & & \downarrow{\scriptstyle d_A} & & & \\ J(A,B) \otimes D^1(B/k) & \xrightarrow{d(i)} & D^1(J(A,B)/k) & \xrightarrow{\theta} & J(A,B) \otimes & D^1(A/k) & \xrightarrow{p} & D & \to 0 \end{array}$$

donde $D = \operatorname{coker}(\theta\circ d(i))$ y $\Delta = p\,\theta\, d_J$ k-derivación de orden 1 .

Definimos entonces como en 3.19 los objetos $D(i(1),\ldots,i(n))$ y los ideales $\beta(i(1),\ldots,i(n))$ que denotaremos por $Z(i(1),\ldots,i(n))$.

Teorema 3.20. Sean A,B k-álgebras, $D^1(A/k)$ A-módulo proyectivo finitamente generado, $\lambda : B \to A$ morfismo de k-álgebras y $j_\lambda : J(A,B) \to A$ la sección jet inducida (corolario 3.11), se tiene:

$$j_\lambda(Z(i(1),\ldots,i(n)) = Z_\lambda(i(1),\ldots,i(n)).$$

Demostración: por inducción en n; caso $n = 1$.

Tenemos el diagrama construido anteriormente:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[d] & J(A,B) \arrow[d, "d_J"] & & A \arrow[d, "d_A"] & & \\
J(A,B) \otimes D^1(B/k) \arrow[r, "d(i)"'] & D^1(J(A,B)/k) \arrow[rr, "\theta"] & & J(A,B) \otimes_A D^1(A/k) \arrow[r] & D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\text{con} \quad D = \frac{J(A,B) \otimes D^1(A/k)}{(\theta_o d(i))(J \otimes_B D^1(B/k))}$$

Dado ahora $j_\lambda : J(A,B) \to A$ donde $j_\lambda{}_o i = \lambda$ queda definida sobre A una estructura de J(A,B)-álgebra, aplicando el funtor $A \otimes_J X$ en la fila inferior del diagrama resulta:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[d] & J(A,B) \arrow[r, "j_\lambda"] \arrow[d, "d_J"] & A \arrow[d, "d_A"] & & \\
A \otimes_B D^1(B/k) \arrow[r] & A \otimes_{J(A,B)} D^1(J(A,B)/k) \arrow[r, "1\otimes\theta"'] & D^1(A/k) \arrow[r, "p"'] & A \otimes_{J(A,B)} D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por proposición 3.18' $1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$; y por ser $A \otimes_J X$ como funtor en X exacto a derecha resulta:

$$A \otimes_{J(A,B)} D = D^1(A/k) /\ d(j_\lambda)_o d(i)\ (A \otimes D^1(B/k)$$

pero $d(j_\lambda)_o(d(i) = d(j_\lambda{}_o i) = d(\lambda)$ luego:

$$A \otimes_{J(A,B)} D \quad = D^1(A/B)$$

por lo tanto $Z_\lambda(i(1)) = \ [\, j_\lambda(Z_\lambda(i(1)))]^e$ (extendido) (prop.2.12); pero por ser j_λ en morfismo sobreyectivo resulta

$$Z_\lambda(i(1)) = j_\lambda(A(i(1))) \qquad \text{c.q.d.}$$

$n \Rightarrow n+1$

Denotemos $Z(i(1),\ldots,i(n))$ por Z y $Z_\lambda(i(1),\ldots,i(n))$ por Z_λ, tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
B & \xrightarrow{i} & J(A,B) & & A & & & & \\
\downarrow d_B & & \downarrow d_J & & \downarrow d_A & & & & \\
J(A,B)\otimes_B D^1(B/k) & \to & D^1(J(A,B)/k)/d_J(Z) & \xrightarrow{\theta} & \dfrac{J(A,B)\otimes_A D^1(A/k)}{\theta(d_J Z)} & \to & \dfrac{D}{p\circ\theta(dZ)} & \to & 0
\end{array}$$

donde $D(p\circ\theta(d_J Z) = D/\Delta Z$ si por $d_J(Z)$ éntendemos el $J(A,B)$-submódulo de $D^1(J(A,B)/k)$ generado por la imagen de Z por d_J .

Por ser $A\otimes_{J(A,B)} X$ como funtor en X exacto a derecha resulta:

$$A \otimes_{J(A,B)}(D/p\circ\theta(dZ)) = \frac{A\otimes D}{p\circ(1\otimes\theta)(dZ)} \quad \text{donde:}$$

i) $A\otimes D \simeq D^1(A/B)$ como ya se ha visto

ii) Por 3.18' se tiene $1\otimes\theta = d(j_\lambda)$ luego:

$$p\circ(1\otimes\theta)(dZ) = p\circ d(j_\lambda)(d_J(Z)) = p\,[d_A(j_\lambda(Z))] =$$

$$= p\,[d_A(Z_\lambda)] = \Delta Z_\lambda$$

por hipótesis inductiva, entonces:

$$A\otimes_{J(A,B)} D/\Delta Z \simeq D^1(A/B)/\Delta Z_\lambda$$

de donde $j_\lambda(f_{i(n+1)-1}(D/\Delta Z)) = f_{i(n+1)-1}(D(A/B)/\Delta Z_\lambda)$ (prop.2.12), y esto asegura con la hipótesis inductiva:

$$j_\lambda(Z(i(1),\ldots,i(n+1)) = Z_\lambda(i(1),\ldots,i(n+1)) \qquad \text{c.q.d.}$$

3.21

Dados A,B k-álgebras regulares con módulos diferenciales finitamente generados hemos construido el anillo $J(A,B)$, los ideales

$Z(i(1),\ldots,i(n))$ y los $J(A,B)$-módulos $D(i(1),\ldots,i(n))$ para toda sucesión $i(1),\ldots,i(n)$ de enteros no negativos (3.10). Por definición 3.19.1 queda definido un subesquema de Esq $(J(A,B))$: $\Sigma\ (D,\Delta,i(1),\ldots,i(r))$. Dado ahora un morfismo de k-álgebras $\lambda: B \to A$ queda definido por 3.20; 3.19 y 3.19.1 el subesquema de esquema de A : $\Sigma(D(A/B),\Delta,i(1),\ldots,i(n))$.

Si $j_\lambda : J(A,B) \to A$ es la sección jet correspondiente a $\lambda : B \to A$ queda definido naturalmente un morfismo continuo de espectros

$$\text{Spec }(A) \xrightarrow{\bar{j}_\lambda} \text{Spec }(J(A,B))$$

El teorema 3.20 asegura que:

$$\bar{j}_\lambda^{-1}\ (\text{sop}(\Sigma(D,\Delta,i(1),\ldots,i(n)))) =$$

$$= \text{sop}(\Sigma(D(A/B),\Delta,i(1),\ldots,i(n)))$$

CAPITULO IV

Un módulo diferencial para k-álgebras de característica $p \neq 0$.

4.1

Sea V una variedad analítica, $p \in U$ abierto en V. Si $f \in F(U)$ (ver capítulo 1) podemos definir una sección continua en el fibrado tangente, definida en cada punto como el vector gradiente. Esta sección continua permite a su vez reconstruir parcialmente la función original f.

Los campos vectoriales, definidos como las secciones continuas en el fibrado tangente, sobre el abierto U de V operan sobre F(U) como derivaciones; el modo natural de definir los campos vectoriales para el esquema afín de una k-álgebra A es el de tomar la k-álgebra de Lie de sus derivadas primeras sobre k, $L(A/k)$ (ver capítulo 3).

Notemos sin embargo que esta definición resulta deficiente para k-álgebras, dominios de integridad, de característica $p \neq 0$.

Sea k un cuerpo de característica $p \neq 0$ y $A = k[x]$ el anillo de polinomios en una indeterminada x. $x^p \in k[x]$ y $\frac{\partial x^p}{\partial x} = 0$ con lo cual el polinomio x^p no puede ser reconstruido a partir de su "sección gradiente".

DERIVADAS DE DIEUDONNE

Dieudonné observa en su trabajo "Le calcul diferentiel dans le corps de caracteristique p > 0" [6] que dado el anillo $k[[x]]$ series en una indeterminada sobre un cuerpo k y $f(x) \in k[[x]]$ se tiene:

$f(x+Tx) = Tf(x)$ donde por $Tf(x)$ se entiende el desarrollo de Taylor, es decir si desarrollamos y agrupamos:

$$f(x+Tx) = \sum_{i \geq 0} \Delta_i(f(x))\,(Tx)^i$$

resulta (si la característica de k es cero):

$$\Delta_i = \frac{1}{i!}\,\frac{\partial^i}{\partial^i_x}$$

Si la característica de k es $p \neq 0$ para $i \geq p$ $i \in N$ se tiene $i! = 0$ de donde $\frac{1}{i!}$ no está definido, y el operador $\frac{\partial^i}{\partial^i x}$ es nulo.

No obstante los operadores Δ_i estan bien definidos, mas aún si el desarrollo p-ádico de un natural n es:

$$n = \alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_r p^r \quad \text{con } 0 \leq \alpha_i < p \quad \text{se tiene}$$

$\Delta_n = \Delta_{p^r}^{\alpha_r} \ldots \Delta_p^{\alpha_1} \Delta_1^{\alpha_0}$ donde el producto denota la composición de operadores.

Dieudonné estudia entonces los operadores $\{\Delta_{p^e} / e \in N\}$ y nota que dado $e \in N$ se tiene:

i) En la restricción al anillo $k[[x^{p^e}]]$ de series formales en x^{p^e} Δ_{p^e} opera como $\frac{\partial}{\partial x^{p^e}}$

ii) Si $f \in k[[x^{p^e}]]$, para todo $g \in k[[x]]$ se tiene

$$\Delta_{p^e}(f.g) = f\, \Delta_{p^e}(g) + g\, \Delta_{p^e}(f)$$

Volviendo entonces al problema original de definir un "espacio tangente" adecuado para k-álgebras de característica $p \neq 0$ notamos que dado $f \in k[[x]]$, si bien en general no puede reconstruirse f a partir de su "sección gradiente" $\frac{\partial f}{\partial x}$, si se puede en cambio conociendo la familia $\{\Delta_{p^e} f / e \in N\}$

Esto sugiere entonces la construcción de un nuevo "espacio tangente" donde la "sección gradiente" de un elemento $f \in k[[x]]$ esto dado por toda la familia $\{\Delta_{p^e} f / e \geq 0\}$.

Sea R un anillo local regular, $M \subset R$ su ideal maximal, R^* el completado de la k-álgebra R en la topología M-ádica, N un R-módulo separado completo y $\Delta : R \to N$ una derivación de orden n k-lineal (Def. 2.3).

Proposición 4.2:

En las condiciones anteriores la derivación de orden n $\Delta : R \to N$ se puede extender a una derivación de orden n k-lineal $\Delta : R^* \to N$.

Demostración:

Notemos que la derivación Δ de orden n es una aplicación k-lineal continua en las topologías M-ádicas, en efecto el ideal M^{n+1} está generado por elementos de la forma $m_0 \dots m_n$ con $m_i \in M$ y

$$\Delta(m_a \dots m_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1<\dots<j_i} m_{j_1} \dots m_{j_i}\, \Delta(m_0 \dots \hat{m}_{j_1} \dots \hat{m}_{j_i} \dots m_n)$$

luego $\Delta(m_0 \dots m_n) \in M.N$

Sea ahora $r^* \in R^*$ y $\{r_n\}$ $n \in N$ una familia en R tal que $r_n \to r$, definiendo $\Delta(r) = \lim_{n\in N} \Delta(r_n)$ la buena definidión resulta de la separabilidad de N.

Dada una familia $\{r_0^*, \dots, r_n^*\}$ en R^* y familias $\{r_i^k / k \in N\}$ $i = 0, \dots, n$ tales que $r_k^i \to r_i^*$ se tiene

$$\Delta(r_0^* \dots r_n^*) = \Delta(\lim_k r_k^0 . r_k^1 \dots r_k^n) =$$

$$= \lim_k \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1<\dots<j_i} r_k^{j_1} \dots r_k^{j_i}\, \Delta(r_k^0 \dots \hat{r}_k^{j_1} \dots \hat{r}_k^{j_i} \dots r_k^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1<\dots<j_i} r_{j_1}^* \dots r_{j_i}^*\, \Delta(r_0^* \dots \hat{r}_{j_1}^* \dots \hat{r}_{j_i}^* \dots r_n^*)$$

de donde $\Delta : R^* \to N$ resulta una derivación de orden n k-lineal c.q.d.

<u>Proposición 4.3</u>:

La inclusición $i: R \hookrightarrow R^*$ da lugar al diagrama conmutativo (Nota 2.5):

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R^* \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ R^* \otimes D^n(R/k) & \xrightarrow{d(i)} & D^n(R^*/k) \end{array}$$

Si $D^n(R/_k)$ es un R-módulo finitamente generado la flecha d(i) escinde.

Demostración:

Por la proposición anterior existe una flecha $D: R^* \to R^* \otimes_R D^r(R/_k)$ tal que $D_0 i = d$, como D resulta una de orden n k-lineal existe una aplicación de R^*-módulos.

$$\gamma : D^n(R^*/_k) \to R^* \otimes_R D^n(R/_k) \quad \text{tal que} \quad \gamma . d' = D.$$

(Por la propiedad universal de $D^n(R^*/_k)$, Corol. 2.4)

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d"'] & R^* \arrow[d, "d'"] \\
R^* \otimes_R D^n(R/_k) \arrow[r, shift left, "d(i)"] & D^n(R^*/_k) \arrow[l, shift left, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\gamma \circ d(i) = id_{R^* \otimes D^r(R/_k)}$. Como γ y d(i) con morfismos de R^*-módulos y $R^* \otimes_R D^n(R/_k)$ está generado como R^*-módulo por los elementos de la forma $1 \otimes dr$ con $r \in R$ basta probar:

$[\gamma \circ d(i)]\ (1 \otimes dr) = 1 \otimes dr$

Como $d(i) \circ d = d' \circ i$ se tiene

$$(\gamma \circ d(i))(1 \otimes dr) = (\gamma \circ d')(i(r)) = D(i(r)) = 1 \otimes dr \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 4.4:

Sea el anillo $k[x_1, \ldots, x_r]$ de polinomios en r indeterminados sobre un anillo k, el $k[x_1, \ldots, x_r]$-módulo $D^n(k[x_1, \ldots, x_r]/_k)$ résulta un módulo libre que admite como base la familia
$F = \{(T^n x_1)^{\alpha_1} \ldots (T^n x_r)^{\alpha_r} / \alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leq n\}$ (Ver teorema 2.3)

Demostración:

La definición de $T^n : k[x_1, \ldots, x_r] \to D^n(k[x_1, \ldots, x_r]/_k)$ asegura que F es una familia de generadores de $D^n(k[x_i]/_k)$.

La independencia resulta de la existencia de una base dual asociada inducida por los operadores $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_r): k[x_1, \ldots, x_r] \rightarrow$ $\rightarrow k[x_1, \ldots, x_r]$ de Dieudonné donde $f(x_i + Tx_i) =$

$$= \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)(f)'(Tx_1)^{\alpha_1} \ldots (Tx_r)^{\alpha_r}$$

<u>Corolario 4.4</u>:

Si k' es una k-álgebra separable (2.8) se tiene:

$$k'[x_1, \ldots, x_r] \underset{k[x_1, \ldots, x_r]}{\otimes} D^n(k[x_1, \ldots, x_r]/k) = D^r(k'[x_1, \ldots, x_r]/k)$$

Demostración:

La proposición anterior asegura que el morfismo $d(i)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
k[x_1, \ldots, x_r] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T^n"] & k'[x_1, \ldots, x_r] \arrow[dr, "T^n"] & \\
k'[x_1, \ldots, x_r] \otimes D^n(k[x_1, \ldots, x_r]/k) \arrow[rr, "d(i)"] & & D^r(k'[x_1, \ldots, x_r]/k)
\end{tikzcd}$$

manda bases en bases, luego es un isomorfismo. Como por hipótesis $D^n(k'[x_1, \ldots, x_r]/k) = D^n(k'[x_1, \ldots, x_r]/k')$ el corolario queda resuelto.

<u>Proposición 4.5</u>:

Sea k un cuerpo de característica $p \neq 0$, R una k-álgebra local regular de ideal maximal M que admite un sistema de parámetros $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Supongamos $\bar{k} = R/M$ una extensión separable de k y $D^n(R/k)$ finitamente generado como R-módulo entonces

$$D^n({}^{R}/_{k[x_1,\dots,x_r]}) = 0$$

Demostración:

Como R es una k-álgebra resulta la inclusión $i:k[x_1,\dots,x_r] \to R$ con $\{x_1,\dots,x_r\}$ analíticamente independientes sobre k (Ver Zarisky-Samuel [7])

Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} k[x_1,\dots,x_r] & \xrightarrow{\ i\ } & R & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ R \otimes D^n({}^{k[x_i]}/_k) & \xrightarrow{d(i)} & D^n({}^{R}/_k) & \longrightarrow & D^n({}^{R}/_{k[x_i]}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de cuadrado conmutativo y fila inferior exacta (corolario 2.5).

Sea R^* el completado de R en la topología M-ádica resulta:

$$\begin{array}{ccccc} k[x_i] & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & R^* \underset{R}{\otimes} D^n({}^{R}/_{k[x_i]}) & \longrightarrow & D^n({}^{R^*}/_{k[x_i]}). \end{array}$$

Donde R^* resulta isomorfo a $\bar{k}[[x_1,\dots,x_r]]$ [7]

Como por hipótesis $D^n({}^{\bar{k}[[x_i]]}/_{\bar{k}}) = D^n({}^{\bar{k}[[x_i]]}/_k)$

también será $D^n({}^{\bar{k}[[x_i]]}/_{k\ [x_i]}) = D^n({}^{\bar{k}[[x_i]]}/_{\bar{k}[x_i]})$.

Ahora bien $D^n({}^{\bar{k}[[x_i]]}/_{\bar{k}[x_i]}) = M^*\ D^n({}^{\bar{k}[[x_i]]}/_{\bar{k}[x_i]})$

La hipótesis de finitud de $D^n(R/_k)$ asegura que $D^n(R/_{k[x_i]})$ es finitamente generado y por lo tanto separado. Extendiendo por continuidad la aplicación $d:R \to R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]})$ resulta una derivación $\Delta:R^* \to R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]})$ y por lo tanto un morfismo de R^*-módulos

$\gamma:D^n(R^*/_{k[x_i]}) \to R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]})$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "d"'] & & R^* \arrow[d, "d'"] \arrow[dll, "\Lambda"'] \\
R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]}) \arrow[rr, "d(i)"] & & D^n(R^*/_{k[x_i]}) \arrow[ll, bend left, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

tal que $\gamma d^* = \Lambda$, de aquí resulta:

$$\gamma \circ d(i) = \text{identidad en } R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]}).$$

Como γ resulta entonces sobreyectiva y $D^n(R^*/_{k[x_i]}) =$ $= M^* D^n(R^*/_{k[x_i]})$ se tiene:

$$R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]}) = M^* \left(R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]})\right)$$

y $R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]})$ finitamente generado asegura $R^* \underset{R}{\otimes} D^n(R/_{k[x_i]}) = 0$ de donde resulta $D^n(R/_{k[x_i]}) = 0$ c.q.d.

<u>Teorema 4.6</u>:

Sea k cuerpo perfecto, R una k-álgebra local regular de radial M, $R/_M = \bar{K}$ algebraico sobre k, $D^n(R/_k)$ finito.

Si $x_1, \ldots, x_r$ es una familia de parámetros de M se tiene:

$$R \underset{k[x_i]}{\otimes} D^n(^{k[x_i]}/_k) \overset{\theta}{=} D^n(R/_k) \text{ donde } \theta \text{ es el morfismo de}$$

R-módulos que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
k[x_i] \arrow[r, "i"] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
R \otimes D^n(^{k[x_i]}/_k) \arrow[r, "\theta"] & D^n(R/_k)
\end{tikzcd}$$

Demostración:

La sobreyectividad de θ quedó probada en la proposición 4.5.

La inyectividad de θ resulta del hecho que la familia $F = \{(Tx_1)^{\alpha_1}\dots(Tx_r)^{\alpha_r} / \alpha_1+\dots+\alpha_r \leq n\}$ incluida en $D^n(R/_k)$ tiene por imagen por el morfismo α que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R^* = \bar{k}[[x_1,\dots,x_r]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n(R/_k) & \longrightarrow & D^n(\bar{k}[[x_i]]/_k) \end{array}$$

una familia cuya independencia lineal esta asegurada por los operadores de Dieudonné $\{\Delta_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} / \alpha_1+\dots+\alpha_n \leq n\}$. c.q.d.

4.7

Consideremos en lo que sigue k un cuerpo perfecto de característica $p \neq 0$.

Sea A un anillo regular y una k-álgebra denotamos por Max(A) al subconjunto de Spec(A) (Espectro de A) formado por los primos maximales.

Vamos a considerar k-álgebras regulares con $D^n(A/_k)$ finitamente generado para todo natural n y con la condición que si $M \in$ Max(A) el cuerpo $A/_M$ resulta una extensión algebraica de k (luego separable).

Hemos probado que bajo estas condiciones que para todo $M \in$ Max(A) el anillo local regular A_M tiene un módulo diferencial n-ésimo $D^n(A_M/_k)$ libre de base $F = \{(Tx_1)^{\alpha_1}\dots(Tx_r)^{\alpha_r} / \alpha_1+\dots+\alpha_r \leq n\}$ donde $\{x_1,\dots,x_r\}$ es alguna familia de parámetros de A_M.

Sea ahora $P \in$ Spec(A) existe $M \in$ Max(A) tal que $P \subseteq M$ de donde $A_P = (A_M)_P$ y

$$D^n(A_P/_k) = (A_M)_P \otimes_{A_M} D^n(A_M/_k)$$

por lo tanto es libre con base

$\{(Tx_1)^{\alpha_1}\dots(Tx_\ell)^{\alpha_\ell} / \alpha_1+\dots+\alpha_\ell \leq n\}$ si $\{x_1,\dots,x_\ell\}$ es una familia de parámetros en A_M.

Por propiedad 2.1 dado un morfismo de k-álgebras $\lambda : A \to B$ resulta un morfismo de A-álgebras Θ que hace conmutativa el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "T_k"'] & B \arrow[d, "T_k"] \\ I(A/_k) \arrow[r, "\Theta"] & I(B/_k) \end{tikzcd}$$

y que por ser de álgebras factoriza para todo natural n dando un morfismo:

$$\Theta : I(A/_k) \Big/ I(A/_k)^{n+1} \longrightarrow I(B/_k) \Big/ I(B/_k)^{n+1}$$

resultando así el morfismo definido en la nota 2.5.

Recordemos las propiedades de la aplicación $T_k : A \to I(A/_k)$ (2.1) se tiene:

$$T_k(x^2) = 2x\, T_k(x) + (T_k(x))^2 \qquad \text{por 2.1. iii)}$$

y mas generalmente resulta:

$$T_k(x^n) = (x + T_k(x))^n - x^n$$

en particular $T_k(x^{p^e}) = (T_k(x))^{p^e}$

Consideremos la inclusión natural $i : A^{p^e} \to A$ que da lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A^{p^e} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T_k"'] & A \arrow[d, "T_k"] \\ I(A^{p^e}/_k) \arrow[r, "\Theta"] & I(A/_k) \end{tikzcd}$$

Para $x \in A^{p^e}$ existe $y \in A$ tal que $i(x) = y^{p^e}$, luego $\theta(T_k(x)) = T_k(i(x)) = T_k(y^{p^e}) = (T_k(y))^{p^e}$, de donde imagen de θ está incluida en $(I(A/_k))^{p^e}$ y:

$$\theta(I(A^{p^e}/_k)^2) \subset I(A/_k)^{2p^e} \subset I(A/_k)^{p^e+1}$$

quedando bien definido un morfismo $d(i): D^1(A^{p^e}/_k) \to D^{p^e}(A/_k)$ que extenderemos a un morfismo de A-módulos que seguiremos llamando $d(i)$ y que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A^{p^e} & \xrightarrow{\quad i \quad} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \underset{k}{\otimes} D^1(A^{p^e}/_k) & \longrightarrow & D^{p^e}(A/_k) \end{array}$$

Notemos que las hipótesis "k perfecto" asegura que A^{p^e} es una k-álgebra.

Sea Q un primo cualquiera de A, como A es un dominio de integridad de característica $p \neq 0$ resulta:

$$(A_Q)^{p^e} = A^{p^e}_{Q\cap A^{p^e}} = A^{p^e}_{\sigma(e)(Q)}$$ Si denotamos por $\sigma(e): A \to A^{p^e}$ el isomorfismo de anillos $\sigma(e)(x) = x^{p^e}$

$$A_Q \underset{A}{\otimes} A \underset{A^{p^e}}{\otimes} D^1(A^{p^e}/_k) \xrightarrow{1\otimes d(i)} A_Q \underset{A}{\otimes} D^{p^e}(A/_k) = D^{p^e}(A_Q/_k)$$

$$A_Q \underset{A}{\otimes} A \underset{A^{p^e}}{\otimes} D^1(A^{p^e}/_k) = A_Q \underset{(A_Q)^{p^e}}{\otimes} (A_Q)^{p^e} \underset{A^{p^e}}{\otimes} D^1(A^{p^e}/_k) =$$

$$= A_Q \underset{A^{p^e}_{\sigma(e)(Q)}}{\otimes} D^1(A^{p^e}_{\sigma(e)(Q)}/_k) = A_Q \underset{(A_Q)^{p^e}}{\otimes} D^1((A_Q)^{p^e}/_k)$$

Sea M un ideal maximal tal que $Q \subset M$ y $\{x_1,\dots,x_r\}$ una familia de parámetros en A_M.

Como $\sigma(e): A_M \to (A_M)^{p^e}$ es un isomorfismo de anillos, $(A_M)^{p^e}$ resulta un anillo local regular con una familia de parámetros $\{x_1^{p^e},\dots,x_r^{p^e}\}$.

Por teorema 4.6 se tiene que $D^1((A_Q)^{p^e}/_k)$ es un $(A_Q)^{p^e}$-módulo libre de base $\{Tx_1^{p^e},\dots,Tx_r^{p^e}\}$ y $D^{p^e}(A_Q/_k)$ con A_Q-módulo libre de base $F = \{(Tx_1)^{\alpha_1}\dots(T(x_r))^{\alpha_r} / \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq p^e\}$ y $d(i)$ el morfismo natural que aplica cada

$$T(x_i)^{p^e} \in D^1({(A_Q)^{p^e}}/_k) \quad \text{en} \quad (T(x_i))^{p^e} \in D^{p^e}(A_Q/_k)$$

Luego localmente $d(i)$ escinde, en particular como toda localización del morfismo $d(i)$ es inyectiva resulta

$$d(i): A \underset{A^{p^e}}{\otimes} D^1(A^{p^e}/_k) \to D^{p^e}(A/_k) \text{ un morfismo inyectivo.}$$

Mas aun para todo Q Spec(A) se tiene

$$D^{p^e}(A_Q/_k) = A_Q \otimes D^1({(A_Q)^{p^e}}/_k) \oplus N$$

luego:

$$\mathrm{Hom}_{A_Q}(D^{p^e}(A_Q/_k), A_Q) = \mathrm{Hom}_{A_Q}(A_Q \otimes D^1({(A_Q)^{p^e}}/_k), A_Q)$$

$$\oplus \mathrm{Hom}_{A_Q}(N, A_Q)$$

Pero $D^1({(A_Q)^{p^e}}/_k)$ proyectivo asegura:

$$\mathrm{Hom}_{A_Q}(A_Q \otimes D^1({(A_Q)^{p^e}}/_k), A_Q) = A_Q \otimes \mathrm{Hom}_{(A_Q)^{p^e}}(D^1(A_Q^{p^e}/_k), A_Q^{p^e})$$

con lo cual podemos definir a partir de derivadas de orden 1 en $(A_0)^{p^e}$, derivadas de orden p^e en A_0.

Definición 4.8:

Prehaces de módulos diferenciales de pre-esquemas de k-álgebras de característica $p \neq 0$.

Si k es un cuerpo de característica cero se define el pre-haz de módulos diferenciales sobre un cubrimiento de abiertos afines $\{U_\alpha\}$ donde $U_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ para alguna k-algebra A como el funtor contravariante D tal que $D(U_\alpha) = D^1(A_\alpha/_k)$; la buena definición de este pre-haz de módulos resulta de la proposición 2.7.

En el caso de pre-esquemas de k-álgebras donde k es un cuerpo perfecto de característica $p \neq 0$ vamos a constuir en cambio una sucesión de pre-haces de módulos $\{D^{(e)}\}$ e recorriendo los enteros no negativos, donde $D^{(e)}(U_\alpha) = A_\alpha \otimes_{A_\alpha^{p^e}} D^1(A_\alpha^{p^e}/_k)$.

La buena definición de cada pre-haz $D^{(e)}$ resulta en forma análoga a la anterior y a la igualdad: $(A_\alpha)_t = (A_\alpha)_{t^{p^e}}$ para todo $t \in A_\alpha$

CAPITULO V

Proposición 5.1:

Si R es un anillo unitario, entero y conmutativo, $U \subset X = \mathrm{Spec}(R)$ un abierto en la topología Zarisky, el morfismo de restricción ρ_U^X del haz de secciones correspondiente es inyectivo.

Demostración:

Si denotamos por X_t con $t \in R$ al conjunto de primos que no contiene al elemento t, se tiene una familia

$$B = \{X_t / t \in R\}$$

donde B resulta una base de la topología, luego existe t tal que $X_t \subset U$, mas aún:

$$\Gamma(\mathrm{Esq}\ R, X_t) = R_t \text{ y el morfismo } \rho_{X_t}^X : R \to R_t$$

resulta la inclusión natural (inyectiva por ser R entero). La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
R = \Gamma(\mathrm{Esq}\ R, X) \arrow[dd, "\rho_{X_t}^X"'] \arrow[dr, "\rho_U^X"] & \\
& \Gamma(\mathrm{Esq}\ R, U) \arrow[dl, "\rho_{X_t}^U"] \\
R_t = \Gamma(\mathrm{Esq}\ R, X_t) &
\end{tikzcd}$$

asegura la inyectividad de ρ_U^X. c.q.d.

Corolario 5.1:

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un pre-esquema reducido irreducible, $U \subset U'$ abiertos en X. Entonces el morfismo de anillos $\rho_U^{U'} : \Gamma(\mathcal{O}_X, U') \to \Gamma(\mathcal{O}_X, U)$ es inyectivo.

Demostración:

Supongamos $U' = X$, $s \in \Gamma(\mathcal{O}_X, X)$ y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento por abiertos afines donde $\mathcal{O}_X/_{U_\alpha} = \mathrm{Esp}(B_\alpha)$ para algún anillo conmutativo, unitario y entero B_α.

Por propiedad de haces $\rho^X_U\, s = 0$ si y solo si $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U}(\rho^X_{U_\alpha}\, s) = 0$ para todo $\alpha \in I$, de donde $\rho^X_U\, s = 0$ para todo $\alpha \in I$ (Prop. 5.1) y $s = 0$.

El corolario queda demostrado teniendo en cuenta que si $U' \subset X$ es un abierto, el haz restricción $(U', \mathcal{O}_X/_{U'})$ es nuevamente un pre-esquema reducido irreducible.

<u>5.2</u>:

Si A es una k-álgebra con k un cuerpo perfecto de característica $p \neq 0$ definimos como antes $\sigma: A \to A$ al morfismo tal que $\sigma(x) = x^p$ y en general $\sigma(e): A \to A$ tal que $\sigma(e)(x) = x^{p^e}$ y por A^{p^e} denotaremos al anillo imagen de $\sigma(e)$

Dado B otra k-álgebra y $\lambda: B \to A$ un morfismo de la categoría definiremos una familia de k-subálgebras de B

$$\{B^e / B^e = \lambda^{-1}(A^{p^e}),\ e \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Notemos que B^e resulta siempre una k-álgebra por ser k perfecto y mas aún:

$$B^{p^e} \subseteq B^e \subseteq B \text{ por ser } \lambda \text{ un morfismo de álgebras.}$$

Si $t \in B$ y el morfismo λ no se anula en t resulta el diagrama conmutativo para la extensión natural de λ:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B_t \arrow[r] & A_{\lambda(t)} \end{tikzcd}$$

dado que consideraremos k-álgebras enteras.

<u>Proposición 5.2</u>:

Dada A una k-álgebra de característica $p \neq 0$ y $S \subset A$ una parte multiplicativa se tiene:

$$(A_S)^{p^e} = A^{p^e}_{\sigma(e)(S)}$$

esta resulta de la simple observación $(\frac{a}{s})^{p^e} = \frac{a^{p^e}}{s^{p^e}}$

Si notamos por $\sigma(e)(Q)$ la imagen de un ideal primo Q por el morfismo $\sigma(e)$ como ideal primo en A^{p^e} se tiene

$$\sigma(e)(Q) \doteq Q \cap A^{p^e}$$

luego si $S = A-Q$:

$$(A_Q)^{p^e} = A^{p^e}_{Q\cap A^{p^e}}$$

Considerando como siempre A entero y de característica $p \neq 0$ se tiene en forma natural un morfismo $A^{p^e} \to A$ inverso de $\sigma(e)$, luego a nivel de espectros resulta un homeomorfismo de espacios topológicos

$$\mathrm{Spec}(A) \approx \mathrm{Spec}(A^{p^e})$$

Proposición 5.2.i:

A, B k-álgebras enteras, $\lambda : B \to A$ morfismo de k-álgebras, si $\lambda(t) \neq 0$ se tiene

$$[B_t]^e = (B^e)_{t^{p^e}} \qquad (5.2)$$

Vamos a demostrar que si $t \in B^e$ se tiene $[B_t]^e = (B^e)_t$, la proposición resultará entonces de la igualdad $B_t = B_{t^{p^e}}$

$$[B_t]^e = \lambda^{-1}((A_{\lambda(t)})^{p^e}) = \lambda^{-1}(A^{p^e}_{(\lambda(t))^{p^e}})$$

la inclusión $(B^e)_t \subset [B_t]^e$ es clara. Sea $\frac{b}{t^r} \in [B_t]^e$

$\lambda(\frac{b}{t^r}) \in (A^{p^e})_{\lambda(t)^{p^e}}$ y $\lambda(t^r) \in A^{p^e}$ por hipótesis, luego

$\lambda(b) \in A^{p^e}_{\lambda(t)^{p^e}}$; si $s \in N$ es tal que:

$$\lambda(b).\lambda(t^{p^e})^s \in A^{p^e} \qquad \text{se tiene}$$

$$\frac{b}{t^r} = \frac{b\ t^{p^e.s}}{t^{r+sp^e}} = \frac{b'}{t^{r'}} \in [B^e]_t \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 5.2.2:

La inclusión $i:B^e \to B$ define un homeomorfismo de espacios topológicos

$$s(i):\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B^e)$$

Demostración:

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B^{p^e} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i''"'] & B^e \arrow[d, "i'"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

y el correspondiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B^{p^e}) & \mathrm{Spec}(B^e) \arrow[l, "S(i)"'] \\
& \mathrm{Spec}(B) \arrow[u, "S(i')"'] \arrow[ul, "S(i'')"]
\end{tikzcd}$$

i) Como $S(i'')$ es un homeomorfismo, $S(i')$ resulta inyectivo.

Consideremos el diagrama conmutativo de inclusiones:

$$\begin{tikzcd}
(B^e)^{p^e} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha''"'] & B^{p^e} \arrow[d, "i"] \\
& B^e
\end{tikzcd}$$

y el correspondiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}((B^e)^{p^e}) & \mathrm{Spec}(B^{p^e}) \arrow[l, "S(\alpha)"'] \\
& \mathrm{Spec}(B^e) \arrow[u, "S(i)"'] \arrow[ul, "S(\alpha'')"]
\end{tikzcd}$$

Nuevamente como $S(\alpha'')$ es un homomorfismo $S(i)$ resulta inyectiva.

ii) $S(i')$ es sobreyectiva:

En efecto dado $Q \in \mathrm{Spec}(B^e)$ afirmamos que

$$S(i').S(i'')^{-1}.S(i)Q = Q$$

En efecto aplicando la función inyectiva $S(i)$ resulta

$$S(i).S(i').S(i'')^{-1}.S(i)Q = S(i'').S(i'')^{-1}.S(i)Q = S(i)Q \qquad \text{c.q.d.}$$

iii) Para ver que $S(i')$ es un homeomorfismo basta notar que $\mathrm{Spec}(B)$ y $\mathrm{Spec}(B^e)$ tienen bases de sus topologías que se corresponden por $S(i)$. En efecto sea $X = \mathrm{Spec}\ B$, $X' = \mathrm{Spec}\ B^e$ y las familias

$$\{B = X_t / t \in B\} \qquad y \qquad B' = \{X'_{t'},\ t' \in B^e\} \qquad (5.1)$$

Como $X_t = X_{t^{p^e}}$ resulta $S(i')(X_t) = S(i')(X_{t^{p^e}}) = X'_{t^{p^e}}$.

Dado $(X, \mathcal{O}_X)$ un pre-esquema de k-álgebras enteras, k un cuerpo perfecto de característica $p \neq 0$, se tiene un cubrimiento por abiertos afines $\{U_\alpha\}$ donde $\mathcal{O}_X/_{U_\alpha} \simeq \mathrm{Esp}(A_\alpha)$ para una k-álgebra entera A_α. Resulta por composición en cada $U_\alpha \cap U_\beta$ los isomorfismos

$$\Theta_{\alpha\beta}: \mathrm{Esq}(A_\alpha)/_{U_\alpha \cap U_\beta} \qquad \mathrm{Esq}(A_\beta)/_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

Para $U \supset U_\alpha \cap U_\beta$ abierto se tiene un isomorfismo de anillos

$$\Theta_{\alpha\beta}(U): \Gamma(A_\alpha, U) \to \Gamma(A_\beta, U)$$

que define naturalmente por restricción un isomorfismo de subanillos:

5.3:

i) $$\Theta_{\alpha\beta}(U): \Gamma(A_\alpha, U)^{p^e} \longrightarrow \Gamma(A_\beta, U)^{p^e}$$

Veamos que para todo abierto $U \subset X = \mathrm{Spec}(A)$ que podemos también suponer incluído en $X' = \mathrm{Spec}(A^{p^e})$ se verifica:

5.3:

ii) $$\Gamma(A, U)^{p^e} = \Gamma(A^{p^e}, U)$$

Demostración:

Supongamos $\{U_\lambda\}$ un cubrimiento por abiertos de U. Como el anillo de secciones sobre un abierto es un dominio de integridad y por la unicidad de la raiz p^e-esima se tiene

$$s \in \Gamma(A,U)^{p^e} \quad \text{si y solo si} \quad \rho^U_{U_\lambda}(s) \in \Gamma(A,U_\lambda)^{p^e}$$

para todo λ:

Luego 5.3 ii) es válido para cualquier abierto en X si es válido para una base de abiertos. Consideremos los abiertos

$$X_t = \{Q \in X/t \notin Q\} = X_{t^{p^e}}$$

$$(\Gamma(A,X_t))^{p^e} = (A_t)^{p^e} = (A^{p^e})_{t^{p^e}} = \Gamma(A^{p^e},X'_{t^{p^e}}) \quad \text{c.q.d.}$$

<u>Corolario 5.3</u>:

Si $(X,\mathcal{O}_X)$ es un pre-esquema de k-álgebras de característica $p \neq 0$, existe un cubrimiento por afines $\{U_\alpha\}$ donde $\mathcal{O}_{X/U} \simeq \mathrm{Esq}(A_\alpha)$ e isomorfismo de haces:

$$\theta_{\alpha\beta}:\mathrm{Esq}(A_\alpha)/_{U_\alpha \cap U_\beta} \simeq \mathrm{Esq}(A_\beta)/_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

que definen para todo $U \subset U_\alpha \cap U_\beta$ isomorfismos de anillos $\theta_{\alpha\beta}(U):\Gamma(A_\alpha,U) \to \Gamma(A_\beta,U)$ y por restricción un isomorfismo de sub-anillos

$$\theta_{\alpha\beta}(U):\Gamma(A_\alpha,U)^{p^e} \longrightarrow \Gamma(A_\beta,U)^{p^e}$$

de donde resultan los isomorfismos:

$$\Gamma(A_\alpha^{p^e},U) = \Gamma(A_\alpha,U)^{p^e} \simeq \Gamma(A_\beta,U)^{p^e} = \Gamma(A_\beta^{p^e},U)$$

que aseguran la buena definición de un pre-esquema que denotaremos $(X,\mathcal{O}_X^{p^e})$ donde $\mathcal{O}_X^{p^e}/_{U_\alpha} = \mathrm{Esq}(A_\alpha^{p^e})$

Sean $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ pre-esquemas reducidas irreducibles de k-álgebras enteras, k cuerpo perfecto de característica $p \neq 0$. $(\theta,\psi):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ morfismo de pre-esquemas de k-álgebras [2], donde $\psi:X \to Y$ es una aplicación continua de espacios topológicos y θ define:

$\theta_x^{\#}: \mathcal{O}_{\psi(x)} \to \mathcal{O}_x$ morfismo de k-álgebras para todo $x \in X$.

Dado $U \subset Y$ abierto afín tal que $\mathcal{O}_Y/_U = \mathrm{Esq}B$ se define por restricción:

$$(\theta,\psi):(\psi^{-1}(U),\ \mathcal{O}_X/_{\psi^{-1}(U)}) \to (U,\mathcal{O}_X/_U) = \mathrm{Esq}(B)$$

que define un morfismo de las secciones globales $\theta(U):B = \Gamma(\mathcal{O}_Y,U) \to$ $\to \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$. Grothendieck demuestra mas aún que la restricción del morfismo de pre-esquemas queda determinado por θ_U. [8]

Recordamos que dado $F(A)$ el haz inducido por un anillo A y $\theta:B \to A$ morfismo de anillos queda definido un morfismo continuo $\overline{\theta}:X' = \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B) = X$ y un haz definido sobre $\mathrm{Spec}(A)$, $\overline{\mu}^{-1}(F(B))$, donde:

$$\overline{\mu}^{-1}(F(B))(U) = \lim_{X_t \supset \overline{\theta}(U)} F(B)(X_t)$$

Si llamamos $F_{\ker\theta}$ al cerrado definido en Spec(B) por el ideal primo $\ker\theta$ (A es entero) se tiene $\mathrm{Img}\overline{\theta} \subseteq F_{\ker\theta}$. Luego $X_t \cap F_{\ker\theta} = \emptyset$ asegura que $X_t \cap \mathrm{Img}\overline{\theta} = \emptyset$.

$X_t \cap F_{\ker\Theta} = \emptyset$ equivale a pedir $t \in \ker\Theta$, en efecto para todo primo P tal que $P \supset \ker\Theta$ debe valer que $t \in P$, luego t pertenece al radical de $\ker\Theta$ que es $\ker\Theta$.

Si $X_t \supset \overline{\Theta}(U)$ para U abierto en $\mathrm{Spec}A$ se tiene que $X_t \cap \mathrm{Img}\overline{\Theta} \neq \emptyset$ de donde $t \notin \ker\Theta$ y queda bien definido:

$$\Theta : B_t \to A_{\Theta(t)}$$

Pasando al límite queda bien definido un morfismo $\Theta(U):\overline{\mu}^{-1}(\mathcal{F}(\,))(U) \to \mathcal{F}(A)(U)$ que resultará un morfismo de haces.

Dado el abierto $X_t \subset \mathrm{Spec}(B)$, se tiene $\overline{\Theta}^{-1}(X_t)$ abierto en $\mathrm{Spec}(A_\alpha)$, mas aun si $X_t \cap \mathrm{Img}\overline{\Theta} \neq \emptyset$ resulta $\overline{\Theta}^{-1}(X_t) = X'_{\Theta(t)}$

<u>Definición 5.5</u>:

Dado $(\psi,\Theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ morfismo de pre-esquemas, diremos que $(Y,\mathcal{O}_Y)$ es admisible para el morfismo (ψ,Θ) si existe un cubrimiento por abiertos afines $\{U_\alpha\}$ $\alpha \in I$ de Y tal que $U_\alpha \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$.

Dado $(\psi,\Theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ existe claramente un abierto U en Y tal que

$(\psi,\Theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (U,\mathcal{O}_{Y/U})$ es admisible y mas aun el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{O}_X) \arrow[rr, "(\psi,\Theta)"] \arrow[dr, "(\psi,\Theta)"'] & & (Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[dl, "(i,id)"] \\
& (U,\mathcal{O}_{Y/U}) &
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde (i,id) es la inclusión natural.

5.6:

Dado $(\psi,\theta):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ un morfismo de pre-esquemas y $U\subset Y$ abierto tal que $\operatorname{Img}\psi\cap U\neq\emptyset$ queda definido un morfismo de anillos $\theta_U:\Gamma(\mathcal{O}_Y,U)\xrightarrow{\;\;}\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$ (5.4), dado e un entero no negativo denotamos

$$\Gamma(\mathcal{O}_Y,U)^e = \theta_U^{-1}(\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))^{p^e}$$

Suponiendo $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ pre-esquemas reducidos irreducibles de k-álgebras, k cuerpo perfecto de característica $p\neq 0$ y $(Y,\mathcal{O}_Y)$ admisible para el morfismo (ψ,θ), vamos a demostrar la existencia de un pre-esquema de k-álgebras $(Y,\mathcal{O}_Y^e)$ para todo entero no negativo e, tal que si $U\subset Y$ es abierto y $U\cap\operatorname{Img}\psi\neq\emptyset$ se tiene:

$$\Gamma(\mathcal{O}_Y,U)^e = \Gamma(\mathcal{O}_Y^e,U)$$

Proposición 5.6.1:

Si $\{U_\alpha\}$ $\alpha\in I$ es un cubrimiento por abiertos de U tal que $U_\alpha\cap\operatorname{Img}\psi\neq\emptyset$ para todo $\alpha\in I$, dado $s\in\Gamma(\mathcal{O}_Y,U)$ se tiene:

$$s\in\Gamma(\mathcal{O}_Y,U)^e \text{ si y solo si } \rho^U_{U_\alpha}\, s\in\Gamma(\mathcal{O}_Y,U_\alpha)^e \quad \alpha\in I.$$

Demostración:

Si $s\in\Gamma(\mathcal{O}_Y,U)^e$ la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{O}_Y,U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U_\alpha}"'] & \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho^{\psi^{-1}(U)}_{\psi^{-1}(U_\alpha)}"] \\
\Gamma(\mathcal{O}_Y,U_\alpha) \arrow[r, "\theta_{U_\alpha}"] & \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U_\alpha))
\end{tikzcd}$$

junto con $\rho^{\psi^{-1}(U)}_{\psi^{-1}(U_\alpha)}[\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))^{p^e}] \subset \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U_\alpha))^{p^e}$

asegura $\rho^U_{U_\alpha} s \in \Gamma(\mathcal{O}_Y,U_\alpha)^e = \Theta^{-1}_{U_\alpha}\ \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U_\alpha))^{p^e})$ para todo $\alpha \in I$.

Supongamos ahora que $\rho^U_{U_\alpha} s \in \Gamma(\mathcal{O}_Y,U_\alpha)^e$ para todo $\alpha \in I$, luego $\Theta_{U_\alpha}(\rho^U_{U_\alpha} s) = \beta_\alpha^{p^e}$ para un único $\beta_\alpha \in (\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U_\alpha))$. entero por ser $(X,\mathcal{O}_X)$ pre-esquema reducido irreducible), de donde β_α y $\beta_{\alpha'}$ coinciden en $\psi^{-1}(U_\alpha) \cap \psi^{-1}(U_{\alpha'})$ $(\alpha,\alpha' \in I)$, luego existe $\beta \in \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$ tal que $\rho^{\psi^{-1}(U)}_{\psi^{-1}(U_\alpha)} = \beta_\alpha$ y $\beta^{p^e} = \Theta_U(s)$ c.q.d.

<u>5.7</u>:

Dado $(\psi,\Theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ morfismo de pre-esquemas y $U \subset Y$ abierto afín tal que $(U,\mathcal{O}_{Y/_U}) \simeq$ (SpecB, EsqB) para un anillo B, se tiene por restricción un morfismo de pre-esquemas que seguiremos llamando: $(\psi,\Theta):(\psi^{-1}(U),\mathcal{O}_{X/_{\psi^{-1}(U)}}) \to (U, \mathcal{O}_{Y/_U})$ que define naturalmente un morfismo de anillos

$$\Theta_U:B \to (\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$$

Grothendieck [8] demuestra mas aún que $(\psi,\Theta):(\psi^{-1}(U),\mathcal{O}_{X/_{\psi^{-1}(U)}}) \to$ $\to (U,\mathcal{O}_{Y/_U})$ queda definido por $\Theta_U:B \to \Gamma(\mathcal{O}_X, \psi^{-1}(U))$. En efecto si $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un cubrimiento de $\psi^{-1}(U)$ por abiertos afines tales que $(V_\alpha, X/_{U_\alpha}) \simeq (\mathrm{Spec}A_\alpha, \mathrm{Esq}A_\alpha)$ para una familia de anillos A_α se tiene

$$(V_\alpha,\mathcal{O}_{X/_{V_\alpha}}) \xrightarrow{(i_\alpha,id)} (\psi^{-1}(U),\mathcal{O}_{X/_{\psi^{-1}(U)}}) \xrightarrow{(\psi,\Theta)} (U,\mathcal{O}_{Y/_U})$$

donde la composición como morfismo de esquemas afines viene inducida por la composición:

$$A_\alpha \xrightarrow{\rho^{\psi^{-1}(U)}_{V_\alpha}} \Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O}_{X/\psi^{-1}(U)}) \xrightarrow{\Theta_U} B$$

que llamaremos Θ_α. Si $t \in B$ es tal que $\Theta_U(t) \neq 0$ y si suponemos $(X,\mathcal{O}_X)$ reducido irreducible sera $\Theta_\alpha(t) \neq 0$ para todo $\alpha \in I$ (por ser $\rho^{\psi^{-1}(U)}_{V_\alpha}$ inyectivo). Mas aún como:

$$(\psi,\Theta) \circ (i_\alpha, id) = (\overline{\Theta}_\alpha, \Theta_\alpha) \qquad (5.4)$$

se tiene: $\psi^{-1}(U_t) \cap V_\alpha = \overline{\Theta}_\alpha^{-1}(U_t) = (V_\alpha)_{\Theta_\alpha(t)}$

de donde $\psi^{-1}(U_t) = \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha)_{\Theta_\alpha(t)}$

Supondremos en la que sigue $(X,\mathcal{O}_X)$ e $(Y,\mathcal{O}_Y)$ pre-esquemas reducos irreducibles.

Proposición 5.7:

$$\Gamma(\psi^{-1}(U_t),\mathcal{O}_X) = \Gamma(\psi^{-1}(U),\mathcal{O}_X)_{\Theta_U(t)}$$

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B = \Gamma(\mathcal{O}_Y, U) & \xrightarrow{\Theta_U} & \Gamma(\mathcal{O}_X, \psi^{-1}(U)) \\ \Big\downarrow i & & \Big\downarrow \rho^{\psi^{-1}(U)}_{\psi^{-1}(U_t)} \\ B_t = \Gamma(\mathcal{O}_Y, U_t) & \xrightarrow{\Theta_{U_t}} & \Gamma(\mathcal{O}_X, \psi^{-1}(U_t)) \end{array}$$

como $\Theta_{U_t}(i(t))$ en inversible y $\Theta_{U_t} \circ i = \rho^{\psi^{-1}(U)}_{\psi^{-1}(U_t)} \circ \Theta_U$ se tiene la extensión natural

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U)) \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\
& \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))_{\Theta_U(t)} \arrow[dl, "\bar{\rho}"] \\
\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U_t)) &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\bar{\rho}$ es un isomorfismo.

i) $\bar{\rho}$ es inyectivo: Sea $s' \in \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))_{\Theta_U(t)}$ $s' = \dfrac{i(s)}{\Theta_U(t)^r}$ con

$s \in \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$ tal que $\bar{\rho}(s') = 0$ pero

$\bar{\rho}(s') = \bar{\rho}\left(\dfrac{i(s)}{\Theta_U(t)}\right) = \dfrac{\rho(s)}{\Theta_{U_t}(t)}$

$0 = \Theta_{U_t}(t) = \rho(s') = \rho(s)$ de donde $s = 0$ porque ρ inyectiva y

$s' = \dfrac{i(s)}{\Theta_U(t)^r} = 0$ c.q.d.

ii) $\bar{\rho}$ es sobreyectiva:

$h \in \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U_t))$ define y queda definida por una familia

$\dfrac{s_\alpha}{\Theta_\alpha(t)^r} \in \Gamma(\mathcal{O}_X,(V_\alpha)_{\Theta_\alpha(t)}) = (A_\alpha)_{\Theta_\alpha(t)}$ para todo $\alpha \in I$.

Podemos suponer I finito en el caso de ser $(X,\mathcal{O}_X)$ un pre-esquema noetheriano que es lo que vamos a considerar, cuyo caso r puede ser elegido independiente de α.

$$\rho^{\psi^{-1}(U_t)}_{(V_\alpha)_{\theta_\alpha(t)}}(\theta_{U_t}(t^r).h) = \rho^{V_\alpha}_{(V_\alpha)_{\theta_\alpha(t)}} s_\alpha \qquad s_\alpha \in \Gamma(\mathcal{O}_X, V_\alpha)$$

luego dado $\alpha,\beta \in I$ se tiene

$$\rho^{V_\alpha \cap V_\beta}_{(V_\alpha)_{\theta_\alpha(t)} \cap (V_\beta)_{\theta_\beta(t)}} s_\alpha = \rho^{V_\alpha \cap V_\beta}_{(V_\alpha)_{\theta_\alpha(t)} \cap (V_\beta)_{\theta_\beta(t)}} s_\beta$$

como los morfismos de restricción son inyectivos se tiene:
$\rho^{V_\alpha}_{V_\alpha \cap V_\beta} s_\alpha = \rho^{V_\beta}_{V_\alpha \cap V_\beta} s_\beta$ luego la familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se "pega" en una sección $s' \in \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$. Como el elemento $\dfrac{i(s')}{\theta_U(t)^r}$ es tal que restringido a $(V_\alpha)_{\theta_\alpha(t)}$ es $\dfrac{s_\alpha}{\theta_\alpha(t)^r}$ se tiene:

$$\bar{\rho}\left(\frac{i(s')}{\theta_U(t)^r}\right) = h \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 5.8:

Sea $U_\alpha \subset Y$ abierto tal que $(U_\alpha, \mathcal{O}_{Y/U_\alpha}) \simeq (\mathrm{Spec}B_\alpha, \mathrm{Esq}(B_\alpha))$ esquema afín del anillo B_α. Dado $U \subset U_\alpha$ abierto y $(\psi,\theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ tal que $U \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset$ se tiene que para todo $P \in U$ existe $t \in B_\alpha$ tal que:

a) $P \in (U_\alpha)_t$ b) $(U_\alpha)_t \subset U$ c) $(U_\alpha)_t \cap \mathrm{Im}\,g\psi \neq \emptyset$

Demostración:

Sea $I \subset B_\alpha$ un ideal que define el cerrado $U_\alpha - U$, son condiciones suficientes:

i) $t \notin P$ ii) $t \in I$ iii) $t \notin \ker\theta_\alpha$

Veamos en efecto que $\ker\theta_\alpha \in \mathrm{Im}\,g\psi$.

$$(V, \mathcal{O}_{X/V}) \to (\psi^{-1}(U_\alpha), \mathcal{O}_{X/\psi^{-1}(U_\alpha)}) \to (U_\alpha, \mathcal{O}_{Y/U_\alpha})$$

donde $V \subset \psi^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto afín tal que $(V, \mathcal{O}_{X/V}) \simeq (\mathrm{Spec}A, \mathrm{Lsq}A)$ para algún anillo A.

La sucesión de arriba viene dada por la sucesión de morfismos de anillos

$$A \xrightarrow{\rho_V^{\psi^{-1}(U_\alpha)}} \Gamma(\psi^{-1}(U_\alpha), {}_X) \xrightarrow{\theta_\alpha} B_\alpha .$$

y como $\rho_V^{\psi^{-1}(U_\alpha)}$ es inyectiva se tiene $\ker \rho_V^{\psi^{-1}(U_\alpha)}\theta_\alpha = \ker\theta_\alpha$. Luego $\ker\theta_\alpha$ pertenece a la imagen de la composición de donde $\ker\theta_\alpha \in \mathrm{Im}\,g\psi$.

Veamos que es posible elegir $t \in B_\alpha$ tal que se verifiquen i), ii) y iii).

En efecto si fuera $I \subset P \cup \ker\theta_\alpha$ como $\ker\theta_\alpha$ es primo tiene que valer $I \subset P$ ó $I \subset \ker\theta_\alpha$, pero $I \subset P$ contradice $P \in U$ e $I \subset \ker\theta_\alpha$ contradice $U \cap \mathrm{Im}\,g\psi \neq \emptyset$.

5.9:

Consideremos $(\psi,\theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ un morfismo admisible de pre-esquemas reducidos irreducibles (def. 5.5) y un cubrimiento por abiertos afines $\{U_\alpha\}\alpha \in I$ donde $(U_\alpha,\mathcal{O}_{Y/U}) = (\mathrm{Spec}B_\alpha, \mathrm{Esq}B_\alpha)$ y $U_\alpha \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset$ cualquiera sea $\alpha \in I$.

En la proposición 5.8 hemos visto que para el morfismo restricción

$$(\psi,\theta):(\psi^{-1}(U_\alpha),\mathcal{O}_{X/\psi^{-1}(U_\alpha)}) \to (U_\alpha,\mathcal{O}_{Y/U_\alpha})$$

y $U \subset U_\alpha$ abierto tal que $U \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset$ se tiene $\Gamma(U,\mathcal{O}_Y)^e = \Gamma(U, \mathrm{Esq}(B_\alpha)^e)$, luego la construcción de un pre-esquema $(Y,\mathcal{O}_Y^e)$ tal que $\Gamma(U,\mathcal{O}_Y)^e = \Gamma(U,\mathcal{O}_Y^e)$ quedará probado si vemos que los esquemas $(U_\alpha, \mathrm{Esq}B_\alpha^e)$ se "pegan bien".

Para ver esto basta notar que para todo abierto $U \subset U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene $\Gamma(U, \mathrm{Esq}B_\alpha^e) = \Gamma(U, \mathrm{Esq}B_\beta^e)$ por isomorfismos compatibles con las restricciones.

Como $\psi^{-1}(U_\alpha)$ y $\psi^{-1}(U_\beta)$ son abiertos no vacíos en X, la irreducibilidad asegura que:

$$\psi^{-1}(U_\alpha) \cap \psi^{-1}(U_\beta) = \psi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset \quad \text{luego}$$

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset.$$

Como $U_{\alpha\beta}$ es abierto en U_α y $U_{\alpha\beta} \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset$ por 5.8 existe una familia $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in N} \subset B_\alpha$ tal que la familia $\{(U_\alpha)_{\omega_\lambda}\}\ \lambda \in N$ forma un cubrimiento de $U_{\alpha\beta}$ y $(U_\alpha)_{\omega_\lambda} \cap \mathrm{Img}\psi \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in N$.

Como $((U_\alpha)_{\omega_\lambda}, \operatorname{Esq}^{(B_\alpha^e/(U_\alpha)_{\omega_\lambda})}) \simeq ((U_\alpha)_{\omega_\lambda}, (\operatorname{Esq} B_\alpha)^e/(U_\alpha)_{\omega_\lambda}) \simeq$

$$\simeq ((U_\alpha)_{\omega_\lambda}, \operatorname{Esq}(B_\alpha)^e/(U_\alpha)_{\omega_\lambda})$$

luego para todo $U \subset U_{\alpha\beta}$ se tiene

$$\Gamma(U, \operatorname{Esq} B_\alpha^e) \subset \Gamma(U, \operatorname{Esq} B_\beta^e)$$

análogamente resulta

$$\Gamma(U, \operatorname{Esq} B_\beta^e) \subset \Gamma(U, \operatorname{Esq} B_\alpha^e) \qquad \text{c.q.d.}$$

5.10:

Hemos visto que todo morfismo admisible (5.7)

$$(\psi,\theta):(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$$

de pre-esquemas reducidos irreducibles de k-álgebras define para todo entero no negativo e un pre-esquema de k-álgebras $(Y,\mathcal{O}_Y^e)$ tal que si $U \subset Y$ es un abierto afín y $U \cap \operatorname{Img}\psi \neq \emptyset$ se tiene:

$$\theta_U^{-1}(\Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))^{p^e}) = \Gamma(\mathcal{O}_Y^e, U) \qquad (5.9)$$

con $\theta_U:\Gamma(\mathcal{O}_Y,U) \to \Gamma(\mathcal{O}_X,\psi^{-1}(U))$ el morfismo definido por (ψ,θ)

Denotemos por $L(\mathcal{O}_X,\{\mathcal{O}_Y^e\}_{e\geq 0})$ al conjunto de morfismos de pre-esquemas de $(X,\mathcal{O}_X)$ en $(Y,\mathcal{O}_Y)$ admisibles (5.5) que definan la filtración de haces $(Y,\mathcal{O}_Y^e)$. Se tiene: $(\theta,\psi) \in L(\mathcal{O}_X,\{\mathcal{O}_Y^e\}_{e\geq 0})$ y dado $(\theta',\psi') \in L(\mathcal{O}_X,\{\mathcal{O}_Y^e\}_{e\geq 0})$ se tiene definido para todo entero positivo e, el morfismo de pre-esquemas:

$$(\psi',\theta'):(X,\mathcal{O}_X^{p^e}) \rightarrow (Y,\mathcal{O}_Y^e)$$

donde $\theta_x:\mathcal{O}^e_{\psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x^{p^e}$ es la restricción de $\theta_x: \mathcal{O}_{\psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$ a $\mathcal{O}^e_{\psi(x)} = \mathcal{O}_x^{-1}(\mathcal{O}_x^{p^e})$

Vamos a considerar en la que sigue a pre-esquemas de k-álgebras con k un cuerpo perfecto de característica $p \neq 0$ que admita un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ por abiertos afines donde $\mathcal{O}_X/_{U_\alpha}$ Esq(B_α), B_α una k-álgebra entera regular de módulo diferencial $D^1(B_{\alpha}/k)$ finitamente generaso. Supongamos además que para todo ideal maximal $M \subset B_\alpha$ el cuerpo B_α/M resulte una extensión entera de k.

Tenemos definido para todo entero positivo e el pre-esquema $J_k(\mathcal{O}_X^{p^e},\mathcal{O}_Y^e)$. (3.13)

5.11:

DEFINICION DE SINGULARIDAD Y ESPACIOS DE JETS

Sea $(\psi,\Theta) \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_X,\{\mathcal{O}_Y^e\}_{e\geq 0})$ (5.10), dada una familia $\{i(1),\ldots,i(n)\}$ de sucesiones de enteros positivos $i(t) = \{i(t)_e\}_{e\in \mathbb{Z}\geq 0}$ definimos:

$$X \supset \textstyle\sum (i(1),\ldots,i(n)) = \{x \in X/x \in \sum(i(1)_e,\ldots,i(n)_e)$$

para todo $e \geq 0\}$

donde $\sum(i(1)_e,\ldots,i(n)_e)$ resulta, como lo hemos definido en 3.21, del morfismo

$$(\psi,\Theta):(X,\mathcal{O}_X^{p^e}) \rightarrow (Y,\mathcal{O}_Y^e).$$

Se considerará entonces como espacio de Jets de la familia $\mathcal{L}(\mathcal{O}_X,\{\mathcal{O}_Y^e\}_{e\geq 0})$ a la familia $\{J_k(\mathcal{O}_X^{p^e},\mathcal{O}_Y^e)_{e\geq 0}\}$ $J_k(\mathcal{O}_X^{p^e},\mathcal{O}_Y^e)$ definido en definición 3.13.

REFERENCIAS

[1] J.M.Boardman: SIngularities of differentiable maps, Publ. Math. J.H.E.S., 33 (1967).

[2] Serge Lang: Introduction to differentiable manifolds, Inter science Publishers 22

[3] K.Mount y O.E.Villamayor: Taylor series and higher derivations. Publicación del departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires N° 18.

[4] Fitting, H. Die Determinantenideale eines Módules, Jahresbericht d. Deutschen Matem. Vereinigung XLVI (1936) 195-228

[5] K.Mount y O.E.Villamayor: An algebric construction of the generic singularities of Boardman-Thom, I.H.E.S. 43

[6] J. Dieudonné, Le Calcul differentiel dans les corps de caractéristique p > 0.
"Proc. International Congress of Math." p. 240-252, North Holland Pub. Co., Amsterdan 1954

[7] O. Zarisky y P. Samuel: Conmutative álgebra D. Van Nostrand Comp.; Vol. II.

[8] Grothendieck. Le Lengage des schémas. I.H.E.S. N° 4

[9] Torelli: The theory of higher order M-ádic differentials. Tesis doctoral North-Western University.