Propiedades de continuidad de operadores integrales singulares

Gutiérrez, Cristian Enrique

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

"PROPIEDADES DE CONTINUIDAD DE OPERADORES INTEGRALES SINGULARES"

Cristian Enrique Gutiérrez

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO
DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Director: Dr. Alberto P. Calderón

Departamento de Matemática ,Facultad de
Ciencias Exactas y Naturales U.B.A.

BUENOS AIRES
Septiembre de 1979

A mi esposa Graciela

1. INTRODUCCION

En este trabajo estudiaremos algunas propiedades de continuidad de los operadores integrales singulares con núcleo variable de Calderón - Zygmund .Dichos operadores son de la forma :

$$Kf(x) = \text{v.p.} \int_{R^n} k(x,x-y)\ f(y)\ dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y)\ f(y)\ dy \qquad ,$$

donde f es una función definida en R^n y el núcleo k satisface las condiciones siguientes :

i) para cada $x \in R^n$,k(x,y) es una función positivamente homogénea de grado -n en y .

ii) $\int_{\Sigma_{n-1}} k(x,z)\ d\sigma(z) = 0$ para todo $x \in R^n$.

La existencia y continuidad de Kf en los espacios $L^p(R^n)$,$1 < p < \infty$, han sido estudiadas por Calderón y Zygmund obteniendo resultados en diferentes situaciones ,aquellos que nos conviene destacar son los siguientes :

Teorema 1:

Sea $k(x,y)$ que verifica para algún $1 < q < \infty$,

(1.1) $$\|k(x,.)\|_{L^q(\Sigma_{n-1})} = \left(\int_{\Sigma_{n-1}} |k(x,z)|^q d\sigma(z)\right)^{1/q} \leq M \ \forall x \in R^n$$

entonces si $f \in C_0^\infty(R^n)$, Kf existe y

(1.2) $$\|Kf\|_2 \leq C\ M\ \|f\|_2$$

a condición que $q > 2\,\frac{n-1}{n}$ .Además si $q \leq 2\,\frac{n-1}{n}$ la desigualdad (1.2) no es válida .(ver [1] y [2])

Teorema 2:

Sean $2 < p < \infty$, $f \in C_0^\infty(R^n)$,k que verifica (1.1) entonces Kf existe y

$$\|Kf\|_p \leq C\ M\ \|f\|_p \quad ,$$

a condición que $q > \frac{(n-1)p}{(n-1)p+2-n}$. (ver [2])

El objeto de este trabajo es ,en primer lugar ,dar una generalización del Teorema 1 para núcleos pertenecientes a un espacio de Orlicz $L_\phi(\Sigma_{n-1})$. Mas precisamente ,sustituiremos la condición (1.1) por $\sup_{x \in R^n} \|k(x,.)\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} \leq M$ y determinaremos condiciones sobre la función ϕ bajo las cuales la desigualdad (1.2) es válida, (Teoremas 3.1 y 4.1) .

Este hecho será obtenido descomponiendo el núcleo k en serie de armónicos esféricos como en [1] y [2] y luego utilizando un teorema de M. Jodeit y A. Torchinsky sobre interpolación de operadores de tipos $(2,2)$ y $(1,\infty)$.

El resultado obtenido será válido para funciones $f \in C_0^\infty(R^n)$, el problema de existencia de Kf para funciones f mas generales ,aún con la condición (1.1) ,permanece abierto .

En segundo término nuestros resultados están relacionados con el Teorema 2 .En efecto ,mostraremos que si $n=2$ y $q=\frac{(n-1)p}{(n-1)p+2-n}$ existe una función $f \in L^p(R^2)$ y k que verifica (1.1) tal que Kf diverge en casi todo punto ; y si $n \geq 2$, $p \geq 1$, $1 \leq q < \frac{(n-1)p}{n(p-1)}$,existen $f \in L^p(R^n)$ y k verificando (1.1) tal que $Kf \notin L^p(R^n)$. Este último resultado ha sido demostrado por Calderón y Zygmund através de un ejemplo en el cual el comportamiento de Kf en el infinito asegura que $Kf \notin L^p(R^n)$ .Aquí se mostrará con otro ejemplo que Kf ,localmente ,no pertenece a $L^p(R^n)$.

RECONOCIMIENTOS

Deseo manifestar mi gratitud,en primer lugar,al Dr. Alberto P. Calderón quien me ha brindado generosamente su constante guía y apoyo en la realización de este trabajo.Luego al Dr. Alberto González Domínguez por su permanente confianza y estímulo ;a los Doctores Norberto A. Fava y Enzo R. Gentile de quienes he recibido su amistad e interés y especialmente a mi amigo Eduardo Gatto con quien he compartido muchas horas de estudio en éstos últimos años .

Finalmente quiero agradecer al CONICET el haberme otorgado las becas con las cuales ha sido posible llevar a cabo este trabajo .

NOTACION

Si $x \in R^n$, $|x|$ será su norma euclídea , $\sum_{n-1} = \{x \in R^n : |x|=1\}$, $d\sigma(x)$ el elemento de área en $\sum_{n-1}$, ω_{n-1} el área de $\sum_{n-1}$ y si $x \neq 0$, $x' = x \, |x|^{-1}$.

Además si $E \subset R^n$ es un conjunto medible Lebesgue , $|E|$ denotará su medida y la transformada de Fourier de una función f será $f(x) = \int_{R^n} f(y) \, e^{-i(x,y)} dy$.

Por último ,C denota una constante la cual puede ser diferente en ocasiones distintas .

2. Enunciaremos a continuación algunas definiciones y propiedades, relativas a los espacios de Orlicz y armónicos esféricos ,que se utilizarán mas adelante . Las referencias para dichos temas son respectivamente [4] y [6] .

(2.1) FUNCIONES DE YOUNG Y ESPACIOS DE ORLICZ

Llamaremos función de Young generalizada (FYG) a cada función ϕ definida en $[0,+\infty)$ que verifica las propiedades siguientes :

i) $\phi(t) \geq 0$, $\phi(0)=0$

ii) ϕ es continua a izquierda

iii) $\phi(x)/x$ es no decreciente .

Una función de Young será una FYG convexa .

Dada ϕ FYG ,su función regularizada ϕ_o será por definición:

(2.2) $$\phi_o(x)=\int_0^x \frac{\phi(t)}{t}\, dt \quad .$$

ϕ_o es una función de Young que verifica :

(2.3) $$\phi_o(x) \leq \phi(x) \leq \phi_o(2x) \quad .$$

Sean (X,μ) un espacio de medida , ϕ una FYG ,la clase de Orlicz $L_\phi(X,\mu)$ será el conjunto de funciones f μ-medibles a valores reales

(con la relación de equivalencia $f \sim g$ si $f = g$ p.p.) tales que

$$\int_X \phi(\varepsilon |f(x)|)\, d\mu(x) < \infty$$

para algún $\varepsilon > 0$ (dependiente de f).

$L_\phi(X,\mu)$ es un espacio lineal y dotado de la norma :

$$\|f\|_\phi = \inf \left\{ k > 0 : \int_X \phi_o\left(\frac{f}{k}\right) d\mu(x) \leq 1 \right\}$$

es un espacio de Banach .

Si ϕ es una FYG la función complementaria de ϕ es por definición :

$$\bar{\phi}(x) = \sup_{y \geq 0} \left[xy - \phi(y) \right] \quad ;$$

$\bar{\phi}$ es una función de Young y se verifica la siguiente desigualdad :

(2.4) $$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leq 2 \|f\|_\phi \|g\|_{\bar{\phi}} \quad .$$

La inversa de una FYG ϕ se define como :

$$\phi^{-1}(y) = \inf \left\{ x : \phi(x) > y \right\} \qquad (\inf \emptyset = +\infty) ,$$

(ϕ^{-1} coincide con la inversa usual en caso de ser ϕ inversible) y verifica :

(2.5) $$\phi(\phi^{-1}(x)) \leq x \leq \phi^{-1}(\phi(x)) \quad \forall\ x > 0 \ .$$

Además vale la siguiente relación entre ϕ y $\bar{\phi}$ (funciones de Young)

(2.6) $$x \leq \phi^{-1}(x)\ (\bar{\phi})^{-1}(x) \leq 2x \quad .$$

(2.7) ARMONICOS ESFERICOS

En R^n un armónico esférico de grado m es por definición la restricción ,a Σ_{n-1},de un polinomio real armónico homogéneo de grado m.

La dimensión del subespacio H_m de armónicos esféricos de grado m es finita y se la denotará con d_m .

Los siguientes resultados son válidos :

(2.8) Si $Y_{m1},\dots,Y_{md_m}$ es una base ortonormal de H_m (con respecto al producto escalar $(P,Q)=\int_{\Sigma_{n-1}} P(x)Q(x)\, d\sigma(x)$) entonces

$$\sum_{j=1}^{d_m} Y_{mj}^2(x) = d_m \omega_{n-1}^{-1} \qquad \text{y} \qquad d_m \leq C\, m^{n-2} \quad ,$$

donde C es una constante que solo depende de n .

(2.9) Si $Y\in H_m$, $\|Y\|_{L^2(\Sigma_{n-1})}=1$ entonces $|Y(x)|\leq C\, m^{(n-2)/2}$,

donde C solo depende de n .

(2.10) Sea para cada $m\geq 0$, $\{Y_{mj}\}_{j=1}^{d_m}$ una base ortonormal de H_m , $f\in L^2(\Sigma_{n-1})$ entonces

$$\|f\|_{L^2(\Sigma_{n-1})}=\left[\sum_{m,j} a_{mj}^2\right]^{1/2}$$

donde $$a_{mj} =\int_{\Sigma_{n-1}} f(x)Y_{mj}(x)\, d\sigma(x) \quad .$$

(2.11) Sean $Y\in H_m$, $k(x)= Y(x')|x|^{-n}$, $x=|x|\, x'$ entonces

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} Y(y') \, |y|^{-n} f(x-y) \, dy$$

existe para toda $f \in L^2(R^n)$ y $\hat{\tilde{f}}(x) = C_m \, Y(x') \, \hat{f}(x)$ con $C_m \leq C \, m^{-n/2}$, donde C es una constante que solo depende de n .

3. Recalquemos que $k(x,y)$ denota un núcleo que verifica :

(3.1) $$k(x,\lambda y) = \lambda^{-n} k(x,y) \quad \text{si } \lambda > 0 \quad \forall x \in R^n$$

(3.2) $$\int_{\Sigma_{n-1}} k(x,z)\, d\sigma(z) = 0 \qquad \forall x \in R^n \quad ,$$

además $$Kf(x) = \text{v.p.} \int_{R^n} k(x,y)\, f(x-y)\, dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} k(x,y)\, f(x-y)\, dy \quad .$$

Probaremos el siguiente

(3.3) Teorema

Sean $k(x,y)$ un núcleo que verifica (3.1) y (3.2) ; ϕ una función de Young tal que $\phi(x)/x^2$ es no creciente y existe $C \geq 1$ tal que $\phi(2x) \leq C\,\phi(x)$ $\forall\, x \geq 0$ .Entonces si $k(x,.) \in L_\phi(\Sigma_{n-1})$ $\forall\, x \in R^n$ y

(3.4) $$\sup_{x \in R^n} \| k(x,.) \|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} \leq M \quad ,$$

se tiene que para toda $f \in C_0^\infty(R^n)$ Kf está definido y

(3.5) $$\|Kf\|_2 \leq C\, M\, \|f\|_2 \quad ,$$

donde C es una constante que solo depende de n y ϕ,a condición que verifique

$$(3.6) \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{\phi(t^{n/2(n-1)})}\, dt \angle \infty .$$

Haremos la demostración de este teorema en tres etapas .

a) Primero supondremos que k ,además de verificar nuestras hipótesis ,es de la forma

$$(3.7) \qquad k(x,y) = \sum_{m\geq 1} \sum_{j=1}^{d_m} a_{mj}(x)\, Y_{mj}(y')\, |y|^{-n}$$

donde la suma en m es finita , $y = y'|y|$, $\{Y_{mj}\}_{m,j}$ es un sistema de armónicos ortonormal y completo en $L^2(\Sigma_{n-1})$ y $a_{mj}(x)$ son funciones medibles .

Observemos que si $f \in C_o^{\infty}(R^n)$ $Kf(x)$ existe para todo x si k verifica solamente (3.1) y (3.2) .En efecto ,si f(y) se anula fuera de $|y| \angle \rho$ entonces

$$\int_{|y|\geq\varepsilon} k(x,y)\, f(x-y)\, dy = \int_{|x|+\rho\geq|y|\geq\varepsilon} k(x,y) \left[f(x-y) - f(x)\right] dy \quad ,$$

y como el integrando de la segunda integral es absolutamente integrable en $|y| \leq |x| + \rho$,puesto que está mayorado allí por $|k(x,y)|\, |y| \sup_z |\nabla f(z)|$, tenemos que existe el límite si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Llamamos

$$\tilde{f}_{mj}(x)=\text{v.p.} \int_{R^n} Y_{mj}(y')\,|y|^{-n} f(x-y)\,dy \quad ,$$

y ponemos

$$a_m(x)=\left[\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj}^2(x)\right]^{1/2} \quad , \; b_{mj}(x) = a_{mj}(x)/a_m(x) \quad ,$$

de forma que $\displaystyle\sum_{j=1}^{d_m} b_{mj}^2(x) = 1$.

Se tiene entonces ,si γ_m es una sucesión de números positivos,que

$$|Kf(x)|^2=\left[\sum_m a_m(x) \sum_{j=1}^{d_m} b_{mj}(x)\, \tilde{f}_{mj}(x)\right]^2$$

(3.8)

$$\leq \left[\sum_m a_m^2(x)\, \gamma_m\right]\left[\sum_m \gamma_m^{-1} \sum_{j=1}^{d_m} \tilde{f}_{mj}^2\right] \quad .$$

Como consecuencia de nuestras hipótesis mostraremos que existe $\gamma_m > 0$ tal que

(3.9) $$\sum_m a_m^2(x)\, \gamma_m \leq C\, M^2 \quad ;$$

donde C es una constante que depende de n y ϕ .

Suponiendo válida (3. 9) e integrando en (3.8) obtenemos :

$$\|Kf\|_2^2 \leq C\, M^2 \sum_m \gamma_m^{-1} \sum_{j=1}^{d_m} \|\tilde{f}_{mj}\|_2^2 \quad .$$

Usando ahora el teorema de Plancherel y teniendo en cuenta (2.8) y (2.11) resulta : $\|Kf\|_2 \leq C\ M\ (\sum_m \gamma_m^{-1}\ m^{-2})^{1/2}\ \|f\|_2$.

Por lo tanto debemos construir una sucesión γ_m que verifique (3. 9) y

(3.10) $$\sum_m \gamma_m^{-1}\ m^{-2} < \infty \quad .$$

b) Construcción de γ_m .

Consideremos para cada $m \geq 1$ un armónico esférico normalizado Y_m , si $g \in L^1(\Sigma_{n-1})$ su representación en dicho sistema es

$$g(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m\ Y_m(x) \qquad ,$$

con $a_m = \int_{\Sigma_{n-1}} g(x)\ Y_m(x)\ d\sigma(x)$.

Entonces de (2.9) y (2.10) resultan las desigualdades :

i) $(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\ )^{1/2} \leq \ \|g\|_{L^2(\Sigma_{n-1})}$ si $g \in L^2(\Sigma_{n-1})$

ii) $|a_m| \leq C\ m^{(n-2)/2}\ \ \|g\|_{L^1(\Sigma_{n-1})}$,$m \geq 1$ y C una constante que solo depende de n .

Por lo tanto el operador $Tg = (\ a_m\ m^{-(n-2)/2})_{m \geq 1}$ verifica :

$$\|Tg\|_{L^2(N,\mu)} \leq \ \|g\|_{L^2(\Sigma_{n-1})} \text{ y } \|Tg\|_{L^\infty(N,\mu)} \leq \ C\ \|g\|_{L^1(\Sigma_{n-1})} ,$$

donde N son los números naturales y μ lamedida definida por $\mu(m) = m^{n-2}$.

Necesitamos interpolar estas dos últimas desigualdades para lo cual utilizaremos el siguiente resultado de M. Jodeit y A. Torchinsky (ver [3]

(3.11) Teorema

Sea T un operador lineal definido sobre funciones medibles de un espacio de medida (X,μ) con valores funciones medibles de un espacio de medida (Y,ν) tal que

$$\|Tf\|_{L^2(Y,\nu)} \leq M_1 \|f\|_{L^2(X,\mu)} \text{ y } \|Tf\|_{L^\infty(Y,\nu)} \leq M_2 \|f\|_{L^1(X,\mu)},$$

entonces si ϕ es una FYG tal que $\phi(x)/x^2$ es no creciente se tiene:

$$\|Tf\|_{L_{\bar{\Phi}^*}(Y,\nu)} \leq C \|f\|_{L_\phi(X,\mu)} ,$$

donde $\bar{\Phi}^*$ es la FYG definida por :

$$\bar{\Phi}^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \sup\limits_{y<x} \dfrac{1}{\bar{\Phi}(y^{-1})} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

y C es una constante que solamente depende de M_1, M_2 y ϕ.

Sea ahora $k(x,y)$ un núcleo en las hipótesis del teorema (3.3), fijemos $x\in R^n$, entonces

$$k(x,.) \sim \sum_{m,j} a_{mj}(x)\, Y_{mj} = \sum_m a_m(x)\, Y_m$$

donde $a_m(x)=\left[\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj}^2(x)\right]^{1/2}$, $b_{mj}(x) = a_{mj}(x)/a_m(x)$

e $Y_m= \sum_{j=1}^{d_m} b_{mj}(x)\, Y_{mj}$.

Definamos $T_x g = (b_m(x)\, m^{-(n-2)/2})_{m\geq 1}$; $g \in L^1(\Sigma_{n-1})$,donde $(b_m(x))$ son los coeficientes de g en el sistema $Y_m = \sum_{j=1}^{d_m} b_{mj}(x)\, Y_{mj}$ .Entonces el operador T_x cumple las hipótesis del teorema (3.11) y como $T_x k(x,.) = (a_m(x)\, m^{-(n-2)/2})_{m\geq 1}$ resulta :

$$(3.12) \qquad \left\| (a_m(x)\, m^{-(n-2)/2})_{m\geq 1} \right\|_{L_{\overline{\phi}^*}(N,\mu)} \leq C \left\| k(x,.) \right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}$$

donde C es una constante que solo depende de n y ϕ .

Usaremos (3.12) para mostrar (3. 9),si A es una FYG ,de (2.4) resulta:

$$(3.13) \qquad \begin{aligned} \sum_m a_m^2(x)\, \gamma_m &= \sum_m (a_m(x)\, m^{-(n-2)/2})^2\, \gamma_m\, m^{n-2} \\ &\leq 2 \left\| (a_m(x)\, m^{-(n-2)/2})^2_{m\geq 1} \right\|_{L_A(N,\mu)} \left\| \gamma_m \right\|_{L_{\overline{A}}(N,\mu)} \end{aligned} .$$

Pero $B(x) = 2\, A(x^2)$ es una FYG y como consecuencia de la definición de norma en L_A se tiene

$$(3.14) \qquad \left\| (a_m(x)\, m^{-(n-2)/2})^2_{m\geq 1} \right\|_{L_A(N,\mu)} = \left\| (a_m(x)\, m^{-(n-2)/2})_{m\geq 1} \right\|^2_{L_B(N,\mu)}$$

Afirmamos que $A(x) = \frac{1}{2}\, \overline{\phi}^*(x^{1/2})$ es una FYG ,(ver Lema 3.15 abajo) por lo tanto tomando $B(x) = \overline{\phi}^*(x)$ y usando (3.12) y (3.14) en (3.13) obtenemos :

$$\sum_m a_m^2(x)\,\gamma_m \leq c\,\|k(x,.)\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}\,\|\gamma_m\|_{L_{\bar{A}}(N,\mu)} \quad .$$

Por lo tanto nuestro problema se redujo a construir (γ_m) que verifique (3.10) y tal que $\|\gamma_m\|_{L_A(N,\mu)} < \infty$, con este fin probaremos los siguientes lemas :

(3.15) Lema

Sea ϕ una función de Young tal que $\phi(x)/x^2$ no crece entonces :

i) $A(x)=\frac{1}{2}\,\overset{*}{\bar{\phi}}(x^{1/2})$ es una FYG .

ii) $\frac{1}{4}\,x^{-1}\left[\phi^{-1}(x^{-1})\right]^{-2} \leq (\bar{A})^{-1}(x) \leq 2\,x^{-1}\left[\phi^{-1}2^{-1}x^{-1}\right]^{-2}$.

Demostración:

i) Como $\bar{\phi}$ es de Young entonces $A(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\bar{\phi}\,(x^{-1/2})}$ si $x\neq 0$.

Luego basta ver que $g(x)=x\,\bar{\phi}(x^{-1/2})$ es no creciente .

Sean $x>0$, $\varepsilon>0$, para cada $y>0$ tomemos $y'=(\frac{x+\varepsilon}{x})^{1/2}\,y$, entonces $y'>y$ e $\frac{\phi(y')}{y'^2} \leq \frac{\phi(y)}{y^2}$. Luego $(x+\varepsilon)\,\phi(y) \geq x\,\phi(y')$, por lo tanto $(x+\varepsilon)^{1/2}\,y - (x+\varepsilon)\,\phi(y) \leq x^{1/2}\,y' - x\,\phi(y') \leq g(x)$, ahora tomando supremo en y resulta $g(x+\varepsilon) \leq g(x)$.

ii) ϕ y $\bar{\phi}$ son estrictamente crecientes e inversibles entonces $A^{-1}(x)=\left[(\bar{\phi})^{-1}(2^{-1}x^{-1})\right]^{-2}$. Luego aplicando (2.6) con A y luego con ϕ obtenemos lo deseado .

(3.16) Lema

Sea ϕ en las hipótesis del lema (3.15) ,entonces ϕ satisface (3.6) si y solo si existe una sucesión $\varepsilon_m > 0$ tal que

$$(3.17)\qquad \begin{aligned} S_1 &= \sum_{m\geq 1} [\phi(\varepsilon_m)]^{-1} \, m^{n-2} < \infty \qquad y \\ S_2 &= \sum_{m\geq 1} [\phi(\varepsilon_m)]^{-1} \, \varepsilon_m^2 \, m^{-2} < \infty \qquad . \end{aligned}$$

Demostración

Por un cambio de variables la condición (3.6) es equivalente a

$$(3.18)\qquad \int_1^{\infty} \frac{x^{n-2}}{\phi(x^{n/2})} \, dx < \infty \quad .$$

Luego si ϕ satisface (3.6) basta tomar $\varepsilon_m = m^{n/2}$.

Sea ε_m que verifica (3.17) ,definimos $g_m = \dfrac{\phi(\varepsilon_m)\, m^{n/2}}{\varepsilon_m \, \phi(m^{n/2})}$.

Entonces $g_m \leq 1$ si $\varepsilon_m < m^{n/2}$ y $g_m \leq \varepsilon_m \, m^{-n/2}$ si $\varepsilon_m \geq m^{n/2}$,por lo tanto

$$\sum_{m\geq 1} m^{n-2} \left[\phi(m^{n/2})\right]^{-1} =$$

$$\Bigg[\sum_{\{m:\,\varepsilon_m < m^{n/2}\}} + \sum_{\{m:\,\varepsilon_m \geq m^{n/2}\}} \Bigg] \frac{m^{n/2}\varepsilon_m}{m^2 \, \phi(\varepsilon_m)} \, g_m \leq S_1^{1/2} \, S_2^{1/2} + S_2 \quad .$$

Luego (3.18) es válida .

Retornemos a la demostración del teorema .

Elegimos $\gamma_m = (\bar{A})^{-1}([\phi(\varepsilon_m)]^{-1})$,con ε_m la sucesión del lema anterior .

De (2.5) tenemos entonces

$$\sum_m \bar{A}(\gamma_m)\, m^{n-2} \leq \sum_m \left[\phi(\varepsilon_m)\right]^{-1} m^{n-2} = S_1 < \infty \ ,$$

y por lo tanto $\left\|\gamma_m\right\|_{L_{\bar{A}}(N,\mu)} < \infty$.

Además del Lema (3.15) obtenemos

$$\sum_m m^{-2}\ \gamma_m^{-1} \leq 4 \sum_m \left[\phi(\varepsilon_m)\right]^{-1} \varepsilon_m^2\ m^{-2} = S_2 < \infty \ ,$$

lo cual concluye el teorema si el núcleo tiene la forma (3.7) .

c) Probaremos ahora el teorema en el caso general pasando al límite . Supongamos primero que $k(x,y')$ es un núcleo acotado en x e y', $|y'|=1$, $x \in R^n$ .Si tomamos

$$k_N(x,y') = \sum_{\substack{m<N \\ j}} a_{mj}(x)\ Y_{mj}(y') \quad ,$$

donde $a_{mj}(x)$ son los coeficientes del desarrollo de $k(x,y')$ en serie de armónicos esféricos ,se tendrá

(3.19) $$\left\| k_N(x,.) - k(x,.)\right\|_{L^2(\Sigma_{n-1})} \longrightarrow 0 \quad N \to \infty,\ \forall x \in R^n.$$

Necesitamos mostrar que $\forall\ x \in R^n$

(3.20) $$\left\| k_N(x,.) - k(x,.)\right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} \longrightarrow 0 \ \text{ si } \ N \to \infty \ .$$

Para ello usaremos el siguiente

(3.21) Lema

Si ϕ es una función de Young , $\phi(x)/x^2$ no crece entonces existen constantes C_1 y C_2 que solamente dependen de n y ϕ tales que

$$\|f\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Sigma_{n-1})} \quad y \quad \|f\|_{L^1(\Sigma_{n-1})} \leq C_2 \|f\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} .$$

Demostración

Si $x \geq 1$ o $x < 1$ tenemos respectivamente $\phi(x) \leq \phi(1)\, x^2$ o $\phi(x) \leq \phi(1)\, x$. Sea $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Sigma_{n-1})$, $\|f\|_{L^2(\Sigma_{n-1})} \neq 0$ entonces

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \phi_o\left(\frac{|f(x)|}{\lambda \|f\|_2}\right) d\sigma(x) \leq \int_{|f| \geq \|f\|_2 \lambda} + \int_{|f| < \|f\|_2 \lambda} \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda \|f\|_2}\right) d\sigma(x)$$

$$\leq \phi(1) \left[\frac{\|f\|_1}{\lambda \|f\|_2} + \frac{1}{\lambda^2}\right] \leq \phi(1) \left[\frac{\omega_{n-1}^{1/2}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right] .$$

Si elegimos ahora λ de manera que el segundo miembro de la desigualdad anterior sea ≤ 1 obtenemos la primera desigualdad del Lema ,la segunda se demuestra de manera análoga .

Por lo tanto de (3.19) y el Lema se obtiene (3.20) .

Sea $s \in N$, $\varepsilon > 0$,por el teorema de Egoroff existe un conjunto medible $B_\varepsilon^s \subset \{|x| \leq s\}$ tal que $\left|\{|x| \leq s\} - B_\varepsilon^s\right| < \varepsilon$ y (3.20) vale uniformemente en B_ε^s . En consecuencia si φ_ε^s es la función característica de B_ε^s tendremos

$$(3.2_2)\qquad \left\|\varphi_\varepsilon^s(x)k_N(x,\cdot)\right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}\longrightarrow\left\|\varphi_\varepsilon^s(x)\ k(x,\cdot)\right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}$$

uniformemente si $N\to\infty$.

Por otra parte ,si $f\in C_0^\infty(R^n)$,debemos mostrar que

$$K_Nf(x)=\text{v.p.}\int_{R^n}k_N(x,y)\ f(x-y)\ dy$$

converge a $Kf(x)$ si $N\to\infty$ p.p. en x .

En efecto ,si $f(y)$ se anula fuera de $|y|<\rho$ entonces

$$\left|K_Nf(x)-Kf(x)\right|=\left|\int_{|y|<|x|+\rho}\left[k_N(x,y)-k(x,y)\right]\left[f(x-y)-f(x)\right]dy\right|$$

$$\leq\sup_y|\nabla f(y)|\int_0^{|x|+\rho}\int_{\Sigma_{n-1}}\left|k_N(x,y')-k(x,y')\right|dy'\,dt$$

$$\leq C\sup_y|\nabla f(y)|\quad(|x|+\rho)\quad\left\|k_N(x,\cdot)-k(x,\cdot)\right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}$$

y luego de (3.2_0) obtenemos lo deseado .

Ahora como nuestro teorema vale para $\varphi_\varepsilon^s(x)\ k_N(x,y')$ se tiene

$$\left\|\varphi_\varepsilon^s\ K_Nf\right\|_2\leq C\sup_x\left\|\varphi_\varepsilon^s(x)\ k_N(x,\cdot)\right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}\|f\|_2$$

y haciendo tender N a ∞,por el teorema de Fatou y (3.2_2) resulta

$$\left\|\varphi_\varepsilon^s\ Kf\right\|_2\leq C\sup_x\left\|k(x,\cdot)\right\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}\|f\|_2\ .$$

Por último si $\varepsilon \to 0$ y luego s a infinito se obtiene el teorema si k es acotado .

Dado ahora $k(x,y')$ y N un número natural definimos :

$$k^{(N)}(x,y') = \begin{cases} k(x,y') & \text{si} \quad |k(x,y')| \leq N \\ 0 & \text{si} \quad |k(x,y')| > N \end{cases}$$

$$\text{y} \qquad k_N(x,y) = k^{(N)}(x,y') \, |y|^{-n} - |y|^{-n} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma_{n-1}} k^{(N)}(x,y') \, d\sigma(y').$$

Ya que $|k^{(N)}(x,y')| \leq |k(x,y')|$, $k(x,y') \in L_\phi(\Sigma_{n-1})$ entonces de la segunda desigualdad de (3.21) y (3.2) por el teorema de la convergencia mayorada obtenemos

(3.23) $$k_N(x,y') \longrightarrow k(x,y') \quad \text{si } N \to \infty \quad \text{p.p. en } x \text{ e } y' .$$

Por otra parte ,de (3.21) y (3.4) se tiene

$$|k_N(x,y')| \leq |k(x,y')| + C\, M\, \omega_{n-1}^{-1} = g(x,y') .$$

Debemos mostrar que $k_N(x,y')$ converge a $k(x,y')$ en $L_\phi(\Sigma_{n-1})$.

En efecto ,usando ahora el hecho que existe $C \geq 1$ tal que $\phi(2x) \leq C\,\phi(x)$, si $0 < \varepsilon < 2$ podemos elegir $r \in N$ tal que $2/\varepsilon \leq 2^r$ y

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \phi\left(\frac{|k_N(x,y') - k(x,y')|}{\varepsilon \, \|g(x,.)\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})}}\right) d\sigma(y') \leq \int_{\Sigma_{n-1}} \phi\left(\frac{2\,|g(x,y')|}{\varepsilon \, \|g(x,.)\|_{L_\phi}}\right) d\sigma(y') \leq$$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \phi\left(2^r \frac{|g(x,y')|}{\|g(x,.)\|_{L_\phi}}\right) d\sigma(y') \leq c^r \int_{\Sigma_{n-1}} \phi\left(\frac{|g(x,y')|}{\|g(x,.)\|_{L_\phi}}\right) d\sigma(y') \leq c^r$$

Luego de (3.23) tenemos $\|k_N(x,.) - k(x,.)\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} \leq \varepsilon \|g(x,.)\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1}}$

si N es grande .

Finalmente argumentando como en el caso en que k es acotado concluímos la demostración del teorema .

4.

(4.1) Teorema

Si ϕ es una función de Young tal que para algún $M > 0$

$$(4.2) \qquad \int_M^{\infty} \frac{1}{\left[\phi\left(t^{1/2}\right)\right]^{n/n-1}}\, dt = +\infty$$

entonces existen un núcleo $k(x,y)$ que verifica (3.1) y (3.2) $, f \in C_o^{\infty}(R^n)$ tales que $\sup_x \|k(x,.)\|_{L_\phi(\Sigma_{n-1})} < \infty$ y $Kf \notin L^2(R^n)$.

Demostración

Tomemos como f a una función $C_o^{\infty}(R^n)$ que vale 1 en $|x| \leq 1$ y cero en $|x| \leq 2$, $0 \leq f(x) \leq 1$ .Además definimos :

$$k(x,y') = \begin{cases} \phi_o^{-1}(|x|^{n-1}) & \text{si} \quad |x' - y'| \leq |x|^{-1} \\ \\ -\phi_o^{-1}(|x|^{n-1}) & \text{si} \quad |x' + y'| \leq |x|^{-1} \end{cases}$$

para $|x|$ suficientemente grande y $k(x,y') = 0$ en caso contrario .

Entonces si $|x|$ es grande y $\varepsilon < 1$ tenemos

$$Kf(x) = \int_{R^n} k(x,y)\, f(x-y)\, dy = \int_{|x'-y'| \leq |x|^{-1}} k(x,y)\, f(x-y)\, dy \geq$$

$$C_n\ \phi_o^{-1}(|x|^{n-1})\ |x|^{-n} \int_{\substack{|x'-y'|\leq|x|^{-1} \\ |x-y|\leq 1}} dy = C_n'\ \phi_o^{-1}(|x|^{n-1})\ |x|^{-n} .$$

Por otra parte ,de (2.5) :

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \phi_o(|k(x,y')|)\ d\sigma(y') \leq C \qquad \forall\ x \in R^n .$$

Luego para $M_1 > 0$ suficientemente grande tenemos

$$\int_{|x|\geq M_1} |Kf(x)|^2\ dx \geq C \int_{M_1}^{\infty} t^{-(n+1)} \left[\phi_o^{-1}(t^{n-1})\right]^2 dt = I ,$$

si ponemos $t=\left[\phi_o(u)\right]^{1/n-1}$ de (2.3) y (2.5) resulta :

$$I \geq C \int_{M_2}^{\infty} u\ \phi(u) \left[\phi_o(u)\right]^{-(2n-1)/(n-1)} du \geq$$

$$C \int_{M_2}^{\infty} u \left[\phi_o(u)\right]^{-n/n-1} du \geq C \int_{M_3}^{\infty} \frac{1}{\left[\phi(u^{1/2})\right]^{n/n-1}}\ du = +\infty .$$

5. Usaremos aquí el siguiente resultado de M. Weiss y A.Zygmund [7]:

(5.1) <u>Teorema</u>

Sea $\varphi(t)$, $t\geq 0$,una función no negativa y no decreciente tal que $\varphi(t)=o(\,t\log t\,)$ si $t\to\infty$.Entonces existen una función k homogénea de grado -n ,con valor medio nulo sobre Σ_{n-1} ,tal que $\int_{\Sigma_{n-1}}(|k(x')|)\,d\sigma(x')<\infty$,y $f\in L^p(R^n)$ $(\forall\, p\geq 1)$,tal que

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=\int_{|y|\geq\varepsilon} k(y)\,f(x-y)\,dy$$

satisface $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\tilde{f}_\varepsilon(x)\right|=+\infty$ p.p.

Probaremos ahora los resultados vinculados con el teorema 2 mencionado en la introducción .

(5.2) <u>Teorema</u>

i) Si $n=2$ existen un núcleo k(x,y) que verifica (3.1),(3.2) y (1.1) con $q=\frac{(n-1)p}{(n-1)p+2-n}$ y una $f\in L^p(R^2)$ tal que Kf(x) es divergente p.p.

ii) Si $n\geq 2$, $p\geq 1$ y $1\leq q<\frac{(n-1)p}{n(p-1)}$ existen un núcleo k(x,y) verificando (3.1),(3.2) y (1.1) y una $f\in L^p(R^n)$ tal que $Kf\notin L^p(R^n)$.

<u>Demostración</u>

i) Como $n=2$ entonces $q=1$, luego basta tomar $\varphi(t)=t$ y aplicar (5.1).

ii) Sean $\alpha > 0$, $\varphi(t)=t^{-\alpha}$ si $t>0$. Definimos $f(x)=(|x|)$ si $|x|<1$, $f(x)=0$ si $|x|\geq 1$, y

$$k(x,y')=\begin{cases} |x|^{-\beta}|x'-y'|^{-\gamma} & \text{si } |x'-y'|\leq |x|, \quad |x|<1 \\ -|x|^{-\beta}|x'+y'|^{-\gamma} & \text{si } |x'+y'|\leq |x|, \quad |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|\geq 1 \quad , \end{cases}$$

donde $\gamma, \beta > 0$ tales que $\gamma+\beta=\frac{n-1}{q}$.

Usaremos el siguiente hecho: si $\delta < n-1$ entonces

$$(5.3) \qquad \int_{|x'-y'|\leq|x|} |x'-y'|^{-\delta} d\sigma(y') \simeq c\,|x|^{n-1-\delta} \quad .$$

k verifica (1.1), en efecto

$$\int_{\Sigma_{n-1}} |k(x,y')|^q\, d\sigma(y')=\frac{2}{|x|^{\beta q}} \int_{|x'-y'|\leq|x|} |x'-y'|^{-\gamma q}\, d\sigma(y') \leq c\,.$$

Consideremos $\Sigma_x^+=\{y'\in\Sigma_{n-1} : k(x,y')\geq 0\}$, entonces

$$K_\varepsilon f(x)=\int_{|y|\geq\varepsilon} k(x,y)\, f(x-y)\, dy$$

$$=\int_{\Sigma_x^+} k(x,y') \int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{f(x-ty')}{t}\, dt\, dy' \quad .$$

Llamando (x',y') al ángulo que forman los vectores x' e y', $d=|x|\,\mathrm{sen}(x',y')$, $\mu=|x|\cos(x',y')$ tenemos si $|x|<1$:

$$f(x-ty')=\varphi_d(\mu-t)\ \chi_d(\mu-t) \quad ;$$

donde $\varphi_d(t)=\varphi((t^2+d^2)^{1/2})$ y χ_d es la función característica del intervalo $I_d=\left[-(1-d^2)^{1/2},(1-d^2)^{1/2}\right]$.

Sean ahora H y H_ε la transformada de Hilbert y la transformada de Hilbert truncada respectivamente ,es decir

$$H_\varepsilon g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\varepsilon}\frac{1}{x-y}\,g(y)\,dy\quad,\ Hg(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon g(x)\ .$$

Entonces

$$K_\varepsilon f(x)=\pi\int_{\Sigma_x^+}k(x,y')\ \ H_\varepsilon(\varphi_d\chi_d)(\mu)\ d\sigma(y')\quad,$$

por otra parte ,de la definición de φ_d tenemos que $H_\varepsilon(\varphi_d\chi_d)(x)\nearrow H(\varphi_d\chi_d$ si $\varepsilon\to 0$,por lo tanto

$$(5.4)\qquad Kf(x)=\pi\int_{\Sigma_x^+}k(x,y')\ H(\varphi_d\chi_d)(\mu)\ d\sigma(y')\ .$$

Si $y'\in\Sigma_x^+$, $|x|<1$,se tiene $\cos(x',y')\geq 0$ y $\mu\in I_d$;luego como φ_d es par resulta

$$(5.5)\qquad H(\varphi_d\chi_d)(\mu)\geq H(\varphi_d)(\mu)\ .$$

Además $H\varphi_d(x)=d^{-\alpha}H\varphi_1(d^{-1}x)$,luego de (5.4) y (5.5) resulta

$$(5.6)\qquad Kf(x)\geq\pi\int_{\Sigma_x^+}k(x,y')\ d^{-\alpha}H\varphi_1(\mu/d)\ d\sigma(y')\ .$$

Supongamos que existe $C_\alpha>0$ tal que

$$(5.7)\qquad H\varphi_1(x)\geq C_\alpha\frac{1}{x}\qquad\text{si}\quad x\longrightarrow+\infty\quad,$$

entonces de (5.6) y la definición de k tenemos, para $|x|$ pequeño,

$$Kf(x) \geq C_\alpha \int_{\Sigma_x^+} k(x,y') \, d^{-\alpha+1} \mu^{-1} \, d\sigma(y')$$

$$\geq C'_\alpha \, |x|^{-\beta-\alpha} \int_{|x'-y'|\leq|x|} |x'-y'|^{-(\gamma+\alpha-1)} \, d\sigma(y') \, .$$

Si $\alpha+\gamma < n$, de (5.3) el último término de la desigualdad anterior es mayor o igual que

$$C''_\alpha \, |x|^{-(\beta+\gamma+2\alpha-n)} = C''_\alpha \, |x|^{-(\frac{n-1}{q}+2\alpha-n)} \, .$$

Sea $I = \left[\frac{n}{p} + n - \frac{n-1}{q} \, , \, \frac{2n}{p}\right)$, como consecuencia de la hipótesis hecha sobre q, I es no vacío, por lo tanto elegimos $\alpha > 0$ tal que $2\alpha \in I$ y obtenemos que $f \in L^p(R^n)$ y $|Kf(x)| \geq C \, |x|^{-n/p}$ en un entorno del origen.

Queda por demostrar la relación (5.7).

φ_1 es una función continua y acotada ($\forall \varphi_1 \in L^p(R)$ para algún $p \geq 1$), por lo tanto

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \, \frac{x-t}{\varepsilon^2+(x-t)^2} \, dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} H\varphi_1(x) \quad \forall x \in R^n \, ,$$

(ver [5], capítulo VI).

Ahora como φ_1 es derivable, cambiando variables obtenemos :

$$I_{\varepsilon}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}-\varphi_1'(s)\quad\chi_{[x-t,x+t]}(s)\ \text{ds dt} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\int_{0}^{+\infty}-\varphi_1'(s)\ (\chi_{[x-t,x+t]}(s) - \chi_{[x-t,x+t]}(-s))\ \text{ds dt},$$

donde $\chi_{[x-t,x+t]}$ es la función característica del intervalo $[x-t,x+t]$.

Si en la integral anterior partimos el dominio de integración en $0<t<x$ y $t>x$ es posible cambiar el orden de integración y resulta:

$$I_{\varepsilon}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}-\varphi_1'(s)\int_{0}^{x}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\quad\chi_{[x-t,x+t]}(s)\ \text{dt ds} +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}-\varphi_1'(s)\int_{x}^{+\infty}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\quad\chi_{[-(x-t),x+t]}(s)\ \text{dt ds} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{x}-\varphi_1'(s)\int_{x-s}^{x}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\ \text{dt ds}+\frac{1}{\pi}\int_{x}^{2x}-\varphi_1'(s)\int_{s-x}^{x}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\ \text{dt ds}+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2x}-\varphi_1'(s)\int_{x}^{x+s}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\ \text{dt ds}+\frac{1}{\pi}\int_{2x}^{+\infty}-\varphi_1'(s)\int_{x-s}^{x+s}\frac{t}{\varepsilon^2+t^2}\ \text{dt ds}=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} -\varphi_1'(s) \quad \log \left(\frac{\varepsilon^2 + (x+s)^2}{\varepsilon^2 + (x-s)^2}\right) ds \quad .$$

Entonces si $\varepsilon \to 0$,aplicando el teorema de FAtou se obtiene

$$H\varphi_1(x) \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} -\varphi_1'(s) \quad \log \left|\frac{x+s}{x-s}\right| \quad ds \quad ,$$

pero si $0 < s < x$ se tiene $\log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \geq \frac{2s}{x+s}$, luego

$$H\varphi_1(x) \geq \frac{1}{\pi x}\int_0^{x} -\varphi_1'(s) \; s \; ds \geq C_\alpha \; \frac{1}{x} \quad \text{si } x \longrightarrow +\infty \; .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A.P. Calderón y A. Zygmund ;"On a problem of Mihlin",Transactions of the American Mathematical Society ,78(1955) ,pag. 209-224; "Addenda" a este trabajo ,ibidem ,84(1957) ,pag. 559-560 .

[2] A.P. Calderón y A. Zygmund ;"On singular integrals with variable kernels",por aparecer .

[3] M. Jodeit Jr. y A. Torchinsky ;"Inequalities for Fourier Transforms";Studia Mathematica ,37(1971),pag. 244-276 .

[4] M.A. Krasnoselsky y Y.B. Rutitsky ;"Convex Functions and Orlicz Spaces" .(1962).

[5] E.M. Stein y G. Weiss;"Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces",Princeton (1971).

[6] E.M. Stein;"Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions",Princeton(1970).

[7] M. Weiss y A. Zygmund ;"An Example in the Theory of singular integrals",Studia Mathematica 26(1965), pag. 101-111.

Alberto P. Calderón