C infinito - álgebras

Corach, Gustavo

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

C^{∞}-álgebras

Gustavo Corach

Tesis presentada para optar al título de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Año 1979

A mi esposa Liliana.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo constante y decidido del Prof. Dr. Angel R. Larotonda. Desde 1975 he contado con sus enseñanzas, con sus indicaciones, con una cantidad enorme de estímulos y palabras de aliento, con su amistad. No creo ser capaz de expresar mi reconocimiento por lo mucho que he recibido de él. Vaya, pues, para él mi más profundo agradecimiento.

Indice

Preliminares

Determinaremos aquí la nomenclatura a utilizar.

Sólo consideraremos espacios vectoriales reales o complejos. Cuando no sea indispensable la identificación del cuerpo, éste será denotado .

Todos los anillos y álgebras serán conmutativos y con unidad, que será denotada 1. Por ideal sobrentenderemos ideal propio. Asimismo los subanillos y las subálgebras tendrán unidad, que será la del anillo o álgebra correspondiente. Los morfismos de anillos preservarán la unidad.

Sólo utilizaremos espacios vectoriales topológicos separados.

Para cualquier conjunto X su aplicación idéntica se denotará 1_X. La imagen de una aplicación de conjuntos $f: X \to Y$ se denotará indistintamente por im f o $f(X)$.

Introducción

Prácticamente desde la aparición de los primeros trabajos de Gelfand sobre las álgebras de Banach, comenzaron a surgir distintas generalizaciones a álgebras topológicas. Una de las más fructíferas, pero ni muy remotamente la única, fue la noción de álgebras localmente m-convexas por Arens en 1945 (apenas 5 años después del mencionado trabajo de Gelfand). Sin embargo, no fue Arens sino Michael ([23]) quien desarrolló extensamente esta teoría. Es de destacar que muchos de los problemas propuestos por Michael no han sido resueltos y siguen generando nuevos métodos de investigación para "atacarlos".

Este trabajo se divide en tres capítulos, cuyos contenidos describiremos a continuación.

El primer capítulo contiene problemas referidos a la teoría general. No hemos dudado en incluir en él algunos resultados que surgieron a partir de la consideración de problemas más específicos, porque creemos que tienen interés en sí mismos y no solamente como lemas tendientes a resolver aquellos problemas. En los tres primeros parágrafos damos las definiciones fundamentales y describimos las clases más importantes de álgebras topológicas. En el contexto de las álgebras localmente m-convexas se destacan las llamadas álgebras de Fréchet; a esta categoría pertenecen las álgebras de funciones más conocidas: las álgebras de funciones diferenciables, holomorfas o incluso continuas, cuando el espacio es, por ejemplo, localmente compacto. El salto que hay de la teoría de álgebras de Banach a la de álgebras de Fréchet es lo suficientemente largo como para que se pierdan muchas propiedades del espectro, que en aquella teoría facilitaban muchos cálculos. En el cuarto parágrafo estudiamos álgebras topológicas con involución; éstas son álgebras complejas, estrechamente vinculadas con ciertas álgebras reales, hasta el punto que pueden ser estudiadas simultáneamente. En 1.5 establecemos ciertas propiedades de las álgebras cuyo grupo de unidades es abierto y sobre el cual la operación de tomar inverso es continua; en esta categoría, a la que pertenecen las álgebras de Banach y en general aquellas álgebras de funciones sobre espacios(o variedades)compactos, subsisten muchos resultados de las álgebras de Banach, por ejemplo la compacidad del espectro. En 1.6 estudiamos álgebras topológicas que contienen un subconjunto finito que genera una subálgebra densa; el estudio del espectro se simplifica notablemente porque contamos contamos con una inyección del espectro en algún $\mathbb{K}^n$; a esta categoría pertenecen las álgebras del tipo $C^k(X)$, $0 \leq k \leq \infty$. Es un hecho conocido que un álgebra normada tiene espectro homeomorfo a su completada; en 1.7 estudiamos condiciones suficientes para que un álgebra topológica tenga esta propiedad. A continuación introducimos la categoría de las álgebras fuertemente regulares; ésta es una noción relacionada con la conocida como regularidad, aunque se supone además que hay una cantidad suficiente de elementos con "soporte compacto"; debe consignarse que nuestra definición es una modificación de la introducida en [3] . En los últimos parágrafos estudiamos módulos topológicos, particularmente de Fréchet, productos tensoriales topológicos (basados fundamentalmente en [14]) y A-álgebras topológicas.

Si X es una variedad compacta de clase C^k con k finito, $C^k(X)$ es un álgebra de Banach y hay suficientes instrumentos en la teoría clásica para estudiarla exhaustivamente. En el segundo capítulo estudiamos las álgebras del tipo $C^\infty(X)$, que llamamos C^∞-álgebras. En los tres primeros parágrafos establecemos ciertas propiedades de estas álgebras. En el siguiente consideramos un álgebra A que verifica esas propiedades y construimos coordenadas locales sobre su espectro. En los dos siguientes probamos que, en las mismas condiciones que antes, el espectro X tiene una única estructura de variedad diferenciable y que A es una C^∞-álgebra, más precisamente, que A es isomorfa a $C^\infty(X)$, vía la transformación de Gelfand. Una vez caracterizadas las C^∞-álgebras probamos que hay una correspondencia biyectiva entre las subálgebras C^∞ de $C^\infty(X)$ que son a inversa continua y las compactificaciones diferenciables de X, esto es, las variedades compactas Y que contienen una subvariedad densa difeomorfa a X. Finalizamos el capítulo con algunos resultados que vinculan el número de generadores de una C^∞-álgebra con las estructuras topológica y diferenciable de su espectro.

En el último capítulo, dado un fibrado vectorial $\xi = (X, E, p)$ de clase C^k buscamos describir $C^k(E)$ en términos de $C^k(X)$. Para tratar el problema con más generalidad y poder utilizar los resultados del primer capítulo consideramos el álgebra de polinomios $A_n = A[t_1,\ldots,t_n]$ para un álgebra topológica A, y buscamos una estructura topológica sobre A_n con ciertas propiedades. Cada A-módulo proyectivo de tipo finito M induce una cierta descomposición de A_n en suma directa de un ideal y una subálgebra, que llamamos respectivamente I y B. Con ciertas hipótesis probamos que existe un fibrado vectorial sobre el espectro de A cuyo espacio es el espectro de B. Más aún, si $A = C^k(X)$, utilizando la teoría de Swan [31], resulta que M es un A-módulo isomorfo al módulo de secciones de clase C^k de aquel fibrado vectorial.

Los temas del capítulo 2 han sido objeto de publicaciones en colaboración con el Dr. Angel Larotonda ([9],[10]). En particular a él se deben los siguientes resultados: 1.9.5, 1.9.7, 2.3.1, 2.4.4, 2.4.11, 2.5.6, 2.5.10, 2.6.3 y 2.6.4. Nuevamente quiero agradecerle su invaluable ayuda.

Finalmente deseo consignar que este trabajo ha sido realizado contando con dos becas del CONICET, una de Iniciación y otra de Perfeccionamiento. Que mi agradecimiento llegue a aquellos que hicieron posible que yo accediera a esas becas.

Buenos Aires, Marzo de 1979

Capítulo 1

Algebras topológicas

1.1 Definiciones. Ejemplos.

Un álgebra topológica es un espacio vectorial topológico A sobre $\mathbb{K}$ con una estructura de anillo tal que la multiplicación es una aplicación bilineal continua, cuando AxA tiene la topología producto.

Las álgebras de Banach constituyen el ejemplo más natural de álgebras topológicas. Pasamos a dar la primera generalización de las álgebras de Banach. Consideremos un álgebra A y una seminorma $p: A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica $p(a.b) \leqslant p(a)p(b)$ para todo a,b en A; diremos que una tal seminorma es multiplicativa o de álgebra.

Un álgebra topológica A es localmente m-convexa cuando su topología está definida por un sistema fundamental de seminormas multiplicativas $\{p_i : i \in I\}$. Observando que para todo i,j en I $\sup\{p_i, p_j\}$ es también una seminorma multiplicativa, se puede suponer sin pérdida de generalidad que el sistema de seminormas es filtrante creciente y consideraremos en I la relación de orden:

$$i \leqslant j \text{ si y sólo si } p_j \text{ es más fina que } p_i.$$

Si $i \in I$ definimos $N_i = \{ a \in A : p_i(a) = 0 \}$. Entonces N_i es un ideal cerrado de A. Consideremos el álgebra cociente A/N_i con la norma cociente $\tilde{p}_i(\tilde{a}) = p_i(a)$ $(\tilde{a} \in A/N_i,\ a \in \tilde{a})$ y llamemos A_i al completado de A/N_i. De esta manera tenemos para cada i en I un álgebra de Banach A_i. Más aún, si $i \leqslant j$ hay un epimorfismo continuo

$$f_{ij} : A_j \longrightarrow A_i ;$$

llamando f_i al morfismo canónico $A \longrightarrow A_i$ tenemos las relaciones

$$f_{ij} \circ f_j = f_i, \quad f_{ki} \circ f_{ij} = f_{kj} \quad \text{si } i \leqslant j \leqslant k.$$

Esto nos permite considerar el límite proyectivo del sistema inverso de álgebras de Banach y morfismos $\{ A_i, f_{ij} \}$; obtenemos así un álgebra topológica $\varprojlim A_i$ y un morfismo $f : A \longrightarrow \varprojlim A_i$, que es un isomorfismo topológico sobre la imagen. Si A es completa f es un isomorfismo sobre $\varprojlim A_i$.

La última observación sugiere considerar la extensión de resultados de la teoría de álgebras de Banach a las álgebras localmente m-convexas, que son mucho más numerosas. Existen en la literatura varios tratamientos sistemáticos de estas álgebras, desde los clásicos [1],[23] hasta los más modernos [37],[26],[36]. En el libro [38] se encontrará un desarrollo simultáneo de la teoría de álgebras de Banach y de la de álgebras topológicas en general.

Un álgebra de Fréchet es un álgebra localmente m-convexa A, que es metrizable y completa. En tal caso hay una familia numerable $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas multiplicativas que define la topología de A y, con las notaciones anteriores, A es isomorfa a $\varprojlim A_n$.

Cabe consignar que la escuela polaca no impone la hipótesis de m-convexidad local, de modo que una F-álgebra es un álgebra topológica metrizable y completa, así como una B_0-álgebra es una F-álgebra localmente convexa (aunque no necesariamente m-convexa).

El siguiente resultado sólo será utilizado en el capítulo siguiente.

1.1.1 Proposición

Sean A un álgebra de Fréchet y M un ideal maximal cerrado de A. Si M es finitamente generado entonces M^2 es un ideal cerrado de A. Más generalmente, M^r es cerrado para todo $r \geq 1$.

Demostración: si $x_1, \ldots, x_n$ generan M, entonces sus clases módulo M^2 generan M/M^2 como $\mathbb{K}$-espacio vectorial; en particular $\dim_{\mathbb{K}} M/M^2$ es finita. Consideremos la aplicación A-lineal

$$u: \underbrace{A \oplus \ldots \oplus A}_{n \text{ veces}} \longrightarrow M$$

$$u(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Es evidente que u es suryectiva y continua. Por el teorema del gráfico cerrado u es abierta, de modo que M es un cociente de $A \oplus \ldots \oplus A$. Basta probar que $u^{-1}(M^2)$ es cerrado. Pero $u^{-1}(M^2) \supset M \oplus \ldots \oplus M$ y éste es cerrado de codimensión finita en $A \oplus \ldots \oplus A$, lo que prueba la tesis para $r = 2$. Para $r > 2$ es enteramente análogo.

1.2 Caracteres. Espectro.

Sean A y B álgebras topológicas. Un morfismo de álgebras topológicas es un morfismo de anillos $f: A \longrightarrow B$ $\mathbb{K}$-lineal y continuo. Denotaremos Hom (A, B) al conjunto de morfismos de A en B.

Sea A un álgebra topológica sobre K. Un <u>carácter</u> de A es un morfismo $h: A \longrightarrow \mathbb{K}$. Obsérvese que todo carácter es suryectivo, ya que debe verificar $h(1) = 1$. Denotaremos $X(A)$ al conjunto de caracteres de A y lo llamaremos <u>espectro de A</u>. El espectro de A está contenido, por definición, en el dual A' de A. Si h es un carácter de A su núcleo es un ideal maximal cerrado de A que denotaremos $M(h)$.

El espectro de un elemento a A es el conjunto

$$sp(a) = \{h(a) : h \in X(A)\}$$

Otras definiciones de espectro se pueden encontrar en [38]. Cabe señalar que si A es un álgebra de Banach todas esas definiciones son equivalentes.

Si A es un álgebra topológica consideraremos sobre X(A) la topología de convergencia simple. Entonces X(A) es un espacio separado. Todo morfismo de álgebras topológicas $f: A \longrightarrow B$ define una aplicación continua $f^t: X(B) \longrightarrow X(A)$ $f^t(h) = hf$ que llamamos <u>traspuesta</u> de f.

Hemos definido así correspondencias

$$A \longrightarrow X(A) \qquad f \longrightarrow f^t$$

y es fácil ver que tienen carácter funtorial (contravariante); más precisamente, si $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ son morfismos de álgebras topológicas entonces $(gf)^t = f^t g^t$ y vale también $(1_A)^t = 1_{X(A)}$.

El que sigue es un resultado de demostración evidente que será usado con frecuencia.

1.2.1 Lema

Sea B un álgebra topológica y A una subálgebra densa. Si llamamos i a la inclusión de A en B entonces la traspuesta de i

$$i^t: X(B) \longrightarrow X(A)$$

es una biyección continua

1.2.2 Algebras cociente

Sea A un álgebra topológica, I un ideal cerrado de A. Entonces A/I tiene una estructura de álgebra topológica, con la topología cociente. En lo que sigue caracterizaremos su espectro. Para ello, dado un ideal J de A definimos la cápsula de J, que denotamos h(J), como

$$h(J)=\{ h\in X(A): h|I=0 \}$$

Como los caracteres son continuos todo ideal tiene la misma cápsula que su clausura (eventualmente ésta puede ser todo A). Volvamos al álgebra A y a su ideal cerrado I. La proyección al cociente es un morfismo $p: A \longrightarrow A/I$ que induce, al trasponer, una aplicación continua e inyectiva $p^t: X(A/I) \longrightarrow X(A)$.

Es elemental verificar que la imagen de p^t es exactamente $h(I)\subset X(A)$. Sólo resta probar que p^t es bicontinua; si (h_i) es una red en h(I) que converge a un cierto $h\in h(I)$ entonces, por la definición de p^t y por su suryectividad, existen $\overline{h_i}$, $\overline{h} \in X(A/I)$ tales que $h_i=\overline{h_i}p$, $h=\overline{h}p$ y es claro entonces que $(\overline{h_i})$ converge a $\overline{h}$.

En consecuencia, a partir de ahora, dados un álgebra topológica A y un ideal cerrado I haremos la identificación

$$X(A/I) = h(I).$$

1.2.3 Observaciones

i) Un álgebra topológica puede no admitir caracteres ([37], § 12). Sin embargo si A es un álgebra localmente m-convexa entonces A admite una cantidad apreciable de caracteres; más precisamente, con las notaciones de 1.1 sean A_i $(i\in I)$ las álgebras de Banach asociadas a A. No resulta difícil probar (véase por ejemplo [16]) que las traspuestas de los morfismos $f_i: A \longrightarrow A_i$ $(i\in I)$ dan homeomorfismos de $X(A_i)$ sobre compactos K_i de X(A) y que X(A) es unión de esos compactos.

ii) Si A es un álgebra de Fréchet entonces su espectro es un espacio hemicompacto, es decir, existen compactos K_n en $X(A)$ tales que $X(A)$ es unión de los K_n ($n \in \mathbb{N}$) y todo compacto de $X(A)$ está contenido en uno de los K_n.

iii) Un elemento a de un álgebra localmente m-convexa es inversible si y sólo si $f_i(a)$ es inversible en A_i para cada $i \in I$. Además $a \in A$ es inversible si y sólo si $h(a) \neq 0$ para todo h en $X(A)$ ([37], §10. 13)

iv) Si A es un álgebra de Banach todo ideal maximal es cerrado y es el núcleo de un carácter. En consecuencia todo morfismo de álgebras $A \longrightarrow \mathbb{K}$ es continuo, es decir, es un carácter.

Todo este panorama cambia radicalmente en la categoría de las álgebras de Fréchet. Usualmente hay ideales maximales no cerrados (por ejemplo, en el álgebra $C(\mathbb{R})$ con la topología de convergencia uniforme sobre los compactos de $\mathbb{R}$, todo ideal maximal que contiene al ideal de las funciones con soporte compacto, es denso). Es un problema no resuelto saber si existen morfismos de álgebra no continuos de A en $\mathbb{K}$, para A un álgebra de Fréchet arbitraria. Una respuesta parcial es que si A es topológicamente finitamente generada (véase 1.6) entonces todo morfismo de A en $\mathbb{K}$ es continuo ([1] ; [11], 3.3).

Las observaciones anteriores conducen a la consideración de distintos espectros de un álgebra topológica A, a saber:

a) Max(A), el conjunto de ideales maximales de A;

b) Top(A), el conjunto de ideales maximales cerrados de A;

c) Real(A), el conjunto de morfismos de álgebra de A en K;

d) $X(A)$.

Con la hipótesis de m-convexidad local sobre A tenemos las siguientes relaciones entre ellos ([26],[27]):

i) todo ideal no denso está contenido en un ideal maximal cerrado

ii) $Top(A) \subset Real(A)$

iii) $Top(A) = X(A)$

iv) Si A es completa entonces Top(A) es denso en Max(A).

En consecuencia, el radical de A, es decir, la intersección de los ideales maximales de A coincide con la intersección de los ideales maximales cerrados.

1.3 Transformación de Gelfand

Si E es un espacio topológico el álgebra de las funciones continuas

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

con la topología de convergencia uniforme sobre los compactos de E,es un álgebra localmente m-convexa con un sistema fundamental de seminormas multiplicativas

$$p_K(\varphi) = \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \text{ si } K \text{ es un compacto de } E.$$

C(E) puede no ser completa, aunque con hipótesis bastante amplias sobre E, por ejemplo, que sea un k-espacio, resulta completa ([18] , [21]). Estudiemos el espectro de C(E). Cada elemento x de E define un carácter de C(E), que consiste en asignar a cada $\varphi \in C(E)$ su evaluación en x. Esto nos permite definir una aplicación continua e inyectiva

$$E \longrightarrow X(C(E))$$

que resulta un homeomorfismo si y sólo si E es completamente regular (véase [25])

Sean A un álgebra topológica, a un elemento de A. La aplicación $\hat{a}: X(A) \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $\hat{a}(h) = h(a)$, es continua, y esto nos permite definir un morfismo de álgebras, que llamamos la <u>transformación de Gelfand</u> de A,

$$g_A : A \longrightarrow C(X(A)) \qquad g_A(a) = \hat{a}.$$

Diremos que A es <u>semisimple</u> si g_A es inyectiva. La última observación de 1.2 significa que si A es localmente m-convexa entonces el núcleo de g_A es el radical de A, de modo que en este caso la semisimplicidad es una propiedad algebraica.

Omitiremos la sencilla demostración del resultado siguiente

1.3.1 Lema

1.3.1 Lema

Si B es un álgebra topológica semisimple y A es una subálgebra de B entonces A es semisimple.

1.4 Algebras con involución. Algebras formalmente reales.

Sea A un álgebra topológica compleja. Una <u>involución</u> en A es una aplicación continua $^{*}: A \longrightarrow A$ que verifica:
$(ra+sb)^{*} = \bar{r}a^{*} + \bar{s}\, b^{*}$, $(ab)^{*} = a^{*}b^{*}$, $a^{**} = a$, cualesquiera sean a,b en A r, s en $\mathbb{C}$. Diremos que la involución es simétrica si para cada $a \in A$ $1+aa^{*}$ es inversible.

Sea A un álgebra real. Diremos que A es formalmente real si vale: $a_i \in A, i=1,\dots,n$ $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ no inversible $\Rightarrow$ ningún a_i es inversible.

Es muy estrecha la relación entre estos dos tipos de álgebra. Pasemos a explicitarla. Sea A un álgebra con involución simétrica y consideremos la subálgebra de A de elementos simétricos

$$B = \{a \in A : a^{*} = a\}.$$

Entonces B es una subálgebra real, más aún, es formalmente real y hay un isomorfismo topológico entre A y $B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, donde la involución simétrica está determinada por la regla $(a \otimes r)^{*} = a \otimes \bar{r}$ si $a \in A$, $r \in \mathbb{C}$.

Si A es un álgebra con involución y h es un carácter de A definimos $h^{*}(a) = \overline{h(a^{*})}$ para cada $a \in A$. Es evidente que h^{*} es también un carácter de A. Asimismo es fácil ver que $h \rightarrow h^{*}$ es una aplicación continua de X(A) en X(A). Decimos que un carácter h es hermitiano si $h^{*} = h$. Denotamos $X_{\mathbb{R}}(A)$ al conjunto de caracteres hermitianos de A.
Si B es la subálgebra de elementos simétricos de A entonces hay un homeomorfismo evidente $X_{\mathbb{R}}(A) \longrightarrow X(B)$.

Las observaciones anteriores permiten obtener para álgebras formalmente reales varios resultados que valen para álgebras con involución simétrica. Por ejemplo, si A y B son álgebras de Fréchet formalmente reales y semisimples entonces todo morfismo de A en B es continuo. En particular hay a lo sumo una única topología sobre un álgebra formalmente real semisimple que la hace un álgebra de Fréchet.

1.5 Algebras a inversa continua.

Sea A un álgebra topológica. Los elementos inversibles de A forman un grupo, el grupo de unidades de A, que denotamos U(A).

En la teoría de álgebras de Banach existe un resultado clave que dice que el grupo de unidades es abierto y que la aplicación $a \to a^{-1}$ es continua en U(A). Apenas pasamos a considerar álgebras más generales la situación cambia drásticamente; por ejemplo si $A = C(\mathbb{R})$ entonces U(A) consiste de las funciones de A que no se anulan en ningún punto, pero es fácil construir una sucesión de funciones con soporte compacto (por lo tanto no inversibles), que converge a la unidad, de modo que U(A) no es abierto en A.

Existen ejemplos de álgebras localmente convexas en las que la aplicación $a \to a^{-1}$ no es continua en U(A) (véase [38]). No puede dejar de mencionarse un resultado de Banach, por el cual si A es un álgebra metrizable y completa entonces $a \to a^{-1}$ es continua si y sólo si U(A) es de clase G_δ (ver [2], [37],[38]). Un resultado en la misma dirección es que si A es un álgebra localmente m-convexa entonces $a \to a^{-1}$ es continua([23])

Un álgebra topológica A se dice <u>a inversa continua</u> si U(A) es abierto y la aplicación $a \to a^{-1}$ es continua en U(A).

Toda álgebra de Banach es a inversa continua, así como todo límite inductivo de álgebras de Banach.

Si A es a inversa continua entonces todo morfismo de A en $\mathbb{K}$ es continuo, de modo que los cuatro espectros definidos en 1.2 coinciden. Todo elemento de A tiene espectro compacto, X(A) es equicontinuo y compacto y la transformación de Gelfand g_A es continua ([16])

Para álgebras de Fréchet se puede probar ([23],§13) :

A es a inversa continua $\Leftrightarrow$ X(A) es compacto $\Leftrightarrow$ todo $a \in A$ tiene espectro acotado.

Un caso particular interesante es que si X es una variedad de clase C^k ($0 \leq k \leq \infty$) entonces $C^k(X)$ es a inversa continua si y sólo si X es compacta; en efecto se verá en 2.1.1 que el espectro de $C^k(X)$ es homeomorfo a X.

Una consecuencia trivial de 1.2.1 y de las observaciones anteriores es la siguiente

1.5.1 Proposición

Sea A un álgebra a inversa continua. Entonces toda subálgebra densa B de A tiene espectro compacto

1.5.2 Corolario

Sea A un álgebra topológica tal que su completada $\bar{A}$ es a inversa continua. Entonces la traspuesta de la inclusión de A en $\bar{A}$ es un homeomorfismo $\quad i^t: X(\bar{A}) \longrightarrow X(A)$

En 1.7 se encontrarán más resultados que vinculan el espectro de un álgebra con el de su completada.

1.5.3 Nota

Una subálgebra B de A se dice <u>plena</u> cuando $U(B) = U(A) \cap B$. Si A es un álgebra tal que $a \longrightarrow a^{-1}$ es continua en $U(A)$ y B es una subálgebra plena entonces $U(B)$ es abierto en B si $U(A)$ es abierto en A, de modo que B es a inversa continua si A lo es.

1.6 Algebras topológicamente finitamente generadas.

Sea A un álgebra topológica. Decimos que un subconjunto S de A genera topológicamente A si la subálgebra generada por S es densa en A. A será topológicamente finitamente generada si existen elementos $a_1,\ldots,a_n$ en A tales que $\{a_1,\ldots,a_n\}$ genera topológicamente A; en tal caso hay una aplicación inyectiva continua

$$X(A) \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad h \longrightarrow (h(a_1),\ldots,h(a_n))$$

que en general no es un homeomorfismo ([6]).

Toda subálgebra de codimensión finita de un álgebra topológicamente finitamente generada es topológicamente finitamente generada. En el Capítulo 2 probaremos que $C^{\infty}(X)$ es topológicamente finitamente generada si X es una variedad paracompacta de base numerable.

1.6.1 Lema

Sea A un álgebra topológicamente generada por $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Entonces para cada $h \in X(A)$ la subálgebra sin identidad generada por $\{a_1 - h(a_1),\ldots, a_n - h(a_n)\}$ es densa en M(h).

Demostración: basta observar que si P(t) es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ en r variables entonces

$$P(a_1,\ldots,a_r) = Q(a_1-h(a_1),\ldots,a_r-h(a_r)) + z$$

donde Q(t) es un polinomio sin término constante y z es un escalar.

1.6.2 Corolario

Sea A un álgebra localmente m-convexa topológicamente finitamente generada. Entonces todo ideal maximal cerrado es topológicamente finitamente generado.

Demostración: sólo debe recordarse que todo ideal maximal cerrado es el núcleo de un carácter y aplicar 1.6.1 (cf. 1.2)

1.7 El espectro del álgebra completada

En el Capítulo 3 utilizaremos álgebras cuyo espectro es homeomorfo al de su completada. Eso ocurre, por ejemplo, con las álgebras normadas, pero no es válido sin hipótesis sobre el álgebra: en hay ejemplos de álgebras tales que el espectro de su completada no es homeomorfo al suyo ([12], [15])

Omitimos la sencilla demostración del siguiente lema, que tiene interesantes consecuencias

1.7.1 Lema

Sean A, B, C álgebras topológicas tales que

a) A es una subálgebra densa de C

b) hay un diagrama conmutativo de morfismos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

tal que f^t es un homeomorfismo.

Entonces i^t y g^t son homeomorfismos

1.7.2 Proposición

Sea A un álgebra topológica [redacted] tal que su transformación de Gelfand g_A es continua y $C(X(A))$ es completa. Entonces la traspuesta de la inclusión $i: A \to \overline{A}$ es un homeomorfismo.

Demostración: la continuidad de g_A y la completitud de $C(X(A))$ permiten extender g_A a $\overline{A}$. Obtenemos así un diagrama como en 1.7.1 con $B = C(X(A))$ y $C = \overline{A}$. La completa regularidad de $X(A)$ prueba que ${g_A}^t$ es un homeomorfismo de $X(A)$ sobre $X(A)$. Sólo resta aplicar 1.7.1.

1.7.3 Corolario ([21])

Si A es unálgebra m-tonelada y $X(A)$ es un k-espacio entonces $X(\overline{A}) \approx X(A)$.

Demostración: un álgebra topológica es m-tonelada si todo tonel idempotente es un entorno de 0. Si A es m-tonelada entonces g_A es continua (loc.cit.). Para poder usar 1.7.2 basta observar que si X es un k-espacio entonces $C(X)$ es completa ([18])

1.7.4 Observación

En 1.7.1 la hipótesis de densidad no es redundante. En efecto consideremos $B = C(\mathbb{R})$, A la subálgebra de B de funciones que tienden a 0 en infinito y C la subálgebra de B de funciones acotadas. Tenemos entonces un diagrama como en 1.7.1 b) siendo los morfismos todas inclusiones. Además $X(B) = X(A) \approx \mathbb{R}$ mientras que $X(C)$ es homeomorfo a la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{R}$, que es obviamente no homeomorfa a $\mathbb{R}$.

1.8 Subálgebras y morfismos separadores

Sea A un álgebra topológica y S un subconjunto de A. Decimos que S distingue los puntos de $X(A)$ si para cada par de elementos distintos h_1, h_2 de $X(A)$ existe $a \in S$ tal que $h_1(a) \neq h_2(a)$.
Si para cada cerrado F de $X(A)$ y cada $h \in X(A) - F$ existe $a \in S$ tal que $h(a) = 1$ y $h'(a) = 0$ para todo $h' \in F$ decimos que S es separador y que a separa a F de h. Más generalmente, un morfismo de álgebras topológicas $f: A \longrightarrow B$ distingue los puntos de $X(B)$ (resp. es separador) si $S = f(A)$ distingue los puntos de $X(B)$ (resp. es separador).

1.8.1 Observaciones

i) Obviamente todo subconjunto separador de A distingue los puntos de $X(A)$

ii) También es evidente que $f: A \longrightarrow B$ distingue los puntos de $X(B)$ si y sólo si $f^t: X(B) \longrightarrow X(A)$ es inyectiva.

iii) Si $S \supset S'$ y S' distingue los puntos de $X(B)$ (resp. es separador) entonces S también.

iv) Si X es una variedad de clase C^∞ y $A = C^\infty(X)$ entonces

$$A_0 = \{\varphi \in A: \text{soporte de } \varphi \text{ es compacto}\}$$

es una subálgebra separadora densa, así como toda subálgebra que contiene a A_0. Para un álgebra topológica A definamos

$$A_0 = \{a \in A: \text{soporte de } \hat{a} \text{ es compacto}\}$$

Aún suponiendo que A_0 sea densa en A, lo que no ocurre en general, puede existir una subálgebra separadora S de A que no contenga a A_0. En efecto, si $A = C^\infty(\mathbb{R})$ y S es la subálgebra de las aplicaciones de la forma

$$t \longrightarrow \varphi(t^3) \qquad \varphi \in A = C^\infty(\mathbb{R})$$

entonces la traspuesta de la inclusión de S en A es una homeomorfismo (ya que $X(A) \approx X(S) \approx \mathbb{R}$), más precisamente el determinado por $t \longrightarrow t^3$, de modo que S es separadora. Sin embargo, S no puede contener a A_0, pues $\varphi'(0)=0$ para toda $\varphi\in S$ y existen funciones diferenciables de soporte compacto con derivada en cero no nula. No obstante en 2.6.3 se probará que si S es separadora y densa entonces $S\supset A_0$.

1.9 Algebras fuertemente regulares.

Dado un anillo A llamemos Spec(A) al conjunto de los ideales primos de A.

Si I es un ideal de A definimos

$$h(I)=\{J\in \mathrm{Spec}(A):\ I\subset J\}$$

(comparar con 1.2.2).

Si H es un subconjunto de Spec(A) definimos

$$k(H)=\bigcap_{J\in H} J$$

Se prueba entonces que la operación $H\longrightarrow hk(H)$ es una clausura de Kuratowski y define una topología, llamada de Zariski, sobre Spec(A).

Un álgebra A (no necesariamente topológica) se dice <u>armónica</u> cuando Max(A), con la topología Zariski inducida, es separado. Como Max(A) es siempre casicompacto, A es armónica si y sólo si Max(A) es compacto. En [32] se encontrará una extensa descripción de las álgebras armónicas.

Un álgebra topológica A es <u>regular</u> cuando la topología débil sobre X(A) coincide con la Zariski inducida por Spec(A). Nótese que la topología Zariski es en general más débil pues todo cerrado Zariski es de la forma

$$h(I)=\{h\in X(A):\ h(a)=0\quad \text{si } a\in I\}=\bigcap_{a\in I}\{h\in X(A):\ \hat{a}(h)=0\}$$

y por lo tanto es débilmente cerrado.

Si A es un álgebra regular e I es un ideal cerrado de A entonces A/I es regular: basta recordar que $X(A/I)\approx h(I)$.

Vamos a necesitar varios resultados sobre álgebras regulares que se pueden encontrar en [26],[27]. Los citamos sin demostración.

1.9.1 Lema

Un álgebra topológica A es regular si y sólo si para cada cerrado F de X(A) y cada $h \in X(A) - F$ existe $a \in A$ que separa a F de h.

1.9.2 Teorema

Sea A un álgebra localmente m-convexa, tonelada, regular y completa. Son equivalentes

i) A no tiene ideales densos

ii) X(A) es compacto

iii) A es a inversa continua.

1.9.3 Teorema

Sea A un álgebra localmente m-convexa con involución simétrica y sea B la subálgebra de elementos acotados de A, esto es,

$$B = \{ a \in A : p(a) = \sup_{h \in X(A)} |\hat{a}(h)|$$

Consideremos sobre B la topología reunión de la de A y la determinada por la seminorma p. Entonces A es regular si B lo es, se verifica $Max(A) = Top(B)$, de modo que Top(B) es una compactificación de Top(A).

1.9.4 Corolario

Bajo las condiciones anteriores Top(A) es localmente compacto si y sólo si en A hay un ideal denso mínimo.

1.9.5 Teorema

Sea A un álgebra de Fréchet formalmente real regular.

a) Si F,G son cerrados de X(A) disjuntos existe $a \in A$ tal que

$$\hat{a}|F = 0 \quad y \quad \hat{a}|G = 1.$$

b) Si (U_ξ) es un cubrimiento abierto de X(A) existe una partición de la unidad subordinada (cf. [7])

c) Si $\varphi \in C(X(A))$ coincide localmente con elementos de A entonces existe $a \in A$ tal que $\hat{a} = \varphi$.

Diremos que un álgebra topológica A es <u>fuertemente regular</u> si es semisimple y para cada $h \in X(A)$ y cada $a \in M(h)$ existe $b \in A_0$ con $h(b) = 1$ y $b^2(1 - a) + r^2 \in U(A)$ para todo escalar no nulo r (recordemos que $A_0 = \{a \in A : \hat{a}$ tiene soporte compacto$\}$). Cabe consignar que esta definición es una modificación de la dada en [3] .

1.9.6 Teorema

Sea A un álgebra formalmente real, localmente m-convexa y fuertemente regular. Entonces A es armónica y regular, A_0 es un ideal denso. Si suponemos que A es un álgebra de Fréchet entonces X(A) es localmente compacto (y numerable al infinito).

Demostración: sea U un abierto débil de X(A); probaremos que U es un abierto Zariski. Sea $h_0 \in X(A)$. Existen elementos $a_1, \ldots, a_r \in A$ y un número $t > 0$ tales que

$$V = \bigcap_{i=1}^{r} \{h : |h(a_i) - h_0(a_i)| < t\} \subset U$$

Sea ahora $a = \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^{r} (a_i - h_0(a_i))^2$. Claramente $a \in M(h_0)$ y, por la regularidad fuerte de A, existe $b \in A_0$ tal que

$$b^2(1 - a) + r^2 \in U(A) \text{ para todo real } r \text{ no nulo.}$$

En consecuencia, la función $\hat{b}^2(1 - \hat{a}) + r^2$ no se anula en ningún $h \in X(A)$ para todo $r \neq 0$, de modo que $\hat{b}^2(1 - \hat{a}) \geq 0$.
Definamos $x = b^2(1 - a)$; entonces $h_0(x) = 1$ y $h(x) = 0$ si $h \notin U$, ya que si $h \notin U$ $h(a) > 1$ y entonces $h(x) \leq 0$, lo que contradice que $\hat{x} \geq 0$.
Poniendo $V(x) = \{M \in Max(A) : x \notin M\}$ obtenemos un entorno de h_0 en la topología Zariski tal que $V(x) \cap X(A) \subset U$; hemos probado así que A es regular (la única hipótesis utilizada fue la regularidad fuerte).

A es armónica pues Max(A) es homeomorfo a la compactificación de Stone-Cech de X(A) ([7'], [32])

Supongamos que A_0 no es un ideal denso. Existe entonces $h \in X(A)$ tal que $\overline{A_0} \subset M(h)$ (recordar las observaciones finales de 1.2) y esto impide que A sea fuertemente regular.

Finalmente, veamos que si además A es de Fréchet entonces todo $h_0 \in X(A)$ tiene un entorno compacto; para ello elijamos $b \in A_0$ tal que $h_0(b)=1$ y el entorno en cuestión es

$$V=\{h \in X(A): h(b) \neq 0\}$$

(su compacidad sigue del hecho de estar contenido en sop $\hat{b}$).

El resultado siguiente será de utilidad en el Capítulo 2.

1.9.7 Lema

Sea A un álgebra de Fréchet formalmente real fuertemente regular. Sea (h_n) una sucesión en $X(A)$ tal que $h_n \longrightarrow h \in X(A)$, $h_n \neq h$ para todo n. Entonces existe $a \in M(h)$ tal que $h_n(a) > 0$ para todo n.

Demostración: para cada n existe $a_n \in M(h)$ tal que $h_n(a_n)=1$ por 1.9.5 a). Supongamos que la sucesión creciente de seminormas de álgebra (p_n) determina la topología de A y definamos para cada n

$$x_n=(1+p_n(a_n^2))^{-1}.a_n^2.$$

Entonces $x_n \in M(h)$ y $h_n(x_n)>0$ para cada n; además la sucesión (x_n) es acotada pues $p_m(x_n)<1$ si $m<n$. Esto nos permite definir

$$a=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n \qquad \text{(cf. [23] , 7.7 b))}$$

y este elemento de A cumple los requisitos pedidos.

1.9.8 Algebras localizadas

Sea A un álgebra de Fréchet formalmente real y fuertemente regular. Sea $h \in X(A)$ e indicaremos con $A_{M(h)}$ el álgebra local de A en $M(h)$ ([4] , ch. II, § 3) y con A_h el álgebra de gérmenes de elementos de A en h, esto es, el cociente de A por el ideal

$$I_h=\{a \in A: \hat{a}|U=0 \text{ para un entorno } U \text{ de } h\}$$

Como h se anula sobre I_h, define un morfismo de álgebras A_h cuyo núcleo es el ideal M_h de los gérmenes nulos en h.

La semisimplicidad de A dice que g_A es un isomorfismo de álgebras sobre la imagen. Tenemos entonces un isomorfismo de álgebras

$$A/P(h) \longrightarrow A_h \qquad \text{siendo} \quad P(h)=\{a \in A: h \notin \text{sop}\ \hat{a}\}$$

Debe notarse que $P(h)$ es un ideal contenido en $M(h)$ y por el isomorfismo anterior aplica $M(h)/P(h)$ sobre M_h.

Proposición

a) A_h es un álgebra local

b) A_h es isomorfa a $A_{M(h)}$

c) $P(h)$ es el menor ideal cuya cápsula es $\{h\}$. En particular,

$$P(h) \subset M(h)^r \quad \text{para cada } r \geqslant 1$$

Demostración:

a) Es suficiente ver que si $h(a) \neq 0$ entonces a es inversible módulo $P(h)$. Sea V un entorno compacto de h (1.9.6) tal que $h'(a) \neq 0$ si $h' \in V$, y sea $I = k(V) = \bigcap_{h' \in V} M(h')$.

Si $B = A/I$ entonces $X(B) = h(I) = hk(V) = V$, por lo tanto B es a inversa continua y todos sus elementos tienen espectro compacto.

Sea $f: A \longrightarrow B$ el epimorfismo canónico y $b = f(a)$. Entonces $\hat{b}$ no se anula en ningún punto de V y en consecuencia $b \in U(B)$, o sea que a es inversible módulo I, y en particular es inversible módulo $P(h)$. Luego A_h es un álgebra local con ideal maximal M_h.

b) Consideremos el epimorfismo canónico

$$A \longrightarrow A_h \qquad x \longmapsto \overline{x}$$

Para cada $x \in M(h)$ $\overline{x}$ es inversible y esto permite factorizar el epimorfismo como

$$A \longrightarrow A_{M(h)} \xrightarrow{\Theta} A_h,$$

donde Θ se define como sigue:

si utilizamos la notación a/b para los elementos de $M(h)$

$$\Theta(a/b) = \overline{a}.\overline{b}^{-1}.$$

Obviamente Θ es un epimorfismo. Si $\Theta(a/b) = \Theta(c/d)$ entonces $\widehat{ad - bc}$ se anula en un entorno U de h. Si $V \subset U$ es un entorno compacto de h existe $r \in A$ tal que $\hat{r}$ vale 1 en V y 0 fuera de U. Como A es semisimple, $r \in M(h)$ y $r(ad - bc) = 0$, lo que significa que $a/b = a/d$ por la definición de $A_{M(h)}$ y Θ es un isomorfismo.

c) Es una adaptación trivial de [32], 1.23 y la omitimos.

1.10 Cálculo operacional de clase C^k.

Diremos que un álgebra topológica A admite un cálculo operacional de clase C^k ($0\leq k\leq\infty$) si para cada $a\in A$ existe un morfismo (continuo) $T_a: C^k(\mathbb{R}) \longrightarrow A$
tal que $T_a(t)=a$, donde $C^k(\mathbb{R})$ tiene la topología de convergencia uniforme sobre compactos de la función y sus derivadas hasta el orden k ([13], ch. XVII) y donde t denota la aplicación $1_{\mathbb{R}}$.
Si tal morfismo existe, debe ser único, ya que está determinado por su valor en las funciones polinomiales, que forman una subálgebra densa de $C^k(\mathbb{R})$. Más aún, si A es un álgebra de Fréchet semisimple entonces la continuidad de T_a es automática por el teorema del gráfico cerrado.

1.10.1 Lema

Si A es un álgebra de Fréchet semisimple son equivalentes
a) A admite un cálculo operacional de clase C^k;
b) para toda $\varphi\in C^k(\mathbb{R})$ y todo $a\in A$ $\varphi\hat{a}\in g_A(A)$

Si además A es formalmente real y fuertemente regular a) y b) son equivalentes a
c) para toda $\varphi\in C^k(\mathbb{R})$ con soporte compacto y $a\in A$ $\varphi\hat{a}\in g_A(A)$.

Demostración: a)$\Rightarrow$b) Sólo hay que observar que
$$\{\varphi\in C^k(\mathbb{R}) : \varphi\hat{a}=T_a(\varphi)\}$$
es una subálgebra cerrada que contiene a los polinomios, de modo que coincide con $C^k(\mathbb{R})$;
b)$\Rightarrow$a) Como g_A es un isomorfismo sobre su imagen, la regla
$$T_a(\varphi) = \text{único } b\in A \text{ tal que } \varphi\hat{a}=\hat{b}$$
define un morfismo (continuo) $T_a: C^k(\mathbb{R}) \longrightarrow A$
c)$\Rightarrow$b) Sean $\varphi\in C^k(\mathbb{R})$, $a\in A$, $h_0\in X(A)$ y elijamos un entorno compacto V de h_0 y $\psi\in C^k(\mathbb{R})$ con soporte compacto que coincide con φ en el compacto $\hat{a}(V)$. Entonces $\psi\hat{a}\in g_A(A)$ y coincide con $\varphi\hat{a}$ sobre

V; hemos probado así que $\varphi\hat{a}$ coincide localmente con elementos de $g_A(A)$ y por 1.9.5 c) $\varphi\hat{a}\in g_A(A)$.

Diremos que un álgebra topológica A es diferenciablemente completa si A admite un cálculo operacional de clase C^∞. Tanto la denominación como lo que sigue han sido tomados de [26]. En esta referencia se trabaja con álgebras complejas. Para adaptar los resultados allí obtenidos para álgebras formalmente reales, sólo hay que notar que un álgebra real A es diferenciablemente completa si y sólo si su complexificada $A\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ lo es. La demostración del siguiente teorema está en [26],III 2.1.1

1.10.2 Teorema

Sea A un álgebra de Fréchet formalmente real y fuertemente regular. Son equivalentes:

a) A es diferenciablemente completa;

b) para cada $a\in A$ la aplicación de $\mathbb{R}$ en A definida por

$$t \longrightarrow e^{ita}$$

es de crecimiento lento, esto es, para toda seminorma continua multiplicativa de A existen $c>0$, $m\in\mathbb{N}$ tales que

$$p(e^{ita})\leq c(1+|t|^m) \quad \text{para todo } t \text{ real.}$$

Debe notarse que en toda álgebra localmente m-convexa completa se puede definir un cálculo operacional analítico (cf. [36]), de modo que el elemento de A e^{ita} está bien definido.

1.11 Módulos topológicos

Sea A un álgebra topológica sobre $\mathbb{K}$ y sea M un A-módulo. Diremos que M es un A-módulo topológico si M tiene una estructura de $\mathbb{K}$ -espacio vectorial topológico tal que la aplicación canónica $AxM\rightarrow M$ es continua.

Cuando hablemos de A-módulos de Banach, de Fréchet, etc., nos estaremos refiriendo a la estructura subyacente de espacio vectorial topológico.

1.11.1 Observaciones

i) Si A es un álgebra de Fréchet A^n $(n \in \mathbb{N})$ es un A-módulo de Fréchet con la topología producto.

ii) Si M es un A-módulo de Fréchet libre de tipo finito entonces M es topológicamente isomorfo a A^n, donde $n = \dim_A M$: el isomorfismo de A-módulos $A^n \longrightarrow M$ definido por cualquier base de M, es continuo; más aún, por el teorema del gráfico cerrado, es bicontinuo.

iii) Si M es un A-módulo proyectivo de tipo finito, donde A es un álgebra de Fréchet, existe una única topología sobre M para la cual M es un A-módulo de Fréchet: basta definirla como la topología cociente de cualquier epimorfismo (existe por hipótesis) $A^m \longrightarrow M$; un argumento elemental muestra que esta topología es independiente de m.

iv) Un A-módulo proyectivo de tipo finito M se puede obtener como núcleo de un proyector $A^m \longrightarrow A^m$, automáticamente continuo, y por ende como un sumando directo, en particular cerrado, de A^m.

Dados A-módulos topológicos M, N un morfismo de M en N es una aplicación A-lineal continua $M \longrightarrow N$. Denotamos $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ el conjunto de morfismos de M en N.

1.11.2 Teorema

Sea A un álgebra de Fréchet, M un A-módulo de Fréchet de tipo finito.

a) Si N es un A-módulo de Fréchet toda aplicación A-lineal de M en N es continua.

b) Si M es proyectivo e I un ideal cerrado de A entonces I.M es cerrado en M.

c) Si A es a inversa continua M no tiene submódulos propios densos.

d) Si M es proyectivo M no tiene submódulos propios de tipo finito densos.

Demostración:

a) sea $f: A^m \longrightarrow M$ un epimorfismo; f es continuo y, por el teorema del gráfico cerrado, f es una aplicación abierta, de modo que M es un cociente de A^m.

b) M es sumando directo de un A^m y A^m/M es proyectivo, en particular es playo, de modo que $I.M = I^m \cap M$ (ch.I 2, n°6)

c) Supongamos primero que $M = A^m$.

La continuidad del determinante y el hecho de que $U(A)$ es abierto implican que

$\{(v_1,\dots,v_m) \in A^m x \dots x\ A^m : \{v_1,\dots,v_m\}$ es base de $A^m \}$

es abierto. En consecuencia, todo submódulo denso de M debe contener una base de A^m y por lo tanto debe coincidir con $M = A^m$.

En el caso general hay un epimorfismo abierto $f: A^m \longrightarrow M$. Si N es un submódulo denso de M entonces $f^{-1}(N)$ es denso en A^m y por lo dicho antes debe coincidir con A^m; pero entonces $N = M$.

d) Si $M = A$ es un hecho conocido.(*) Supongamos que es cierto para todo $r \in \mathbb{N}$ con $r < n$. Sea N un submódulo denso de A^n. Consideremos la proyección $P: A^n \longrightarrow A$ sobre la última coordenada; entonces $p(N)$ es un A-módulo denso de tipo finito, por lo que $p(N) = A$. En particular existe $x_0 \in N$ tal que $p(x_0) = 1$. Podemos entonces definir $f: A^n \longrightarrow A^n$ por $f(x) = x - p(x)x_0$ e identifiquemos A^{n-1} con el submódulo de A^n generado por los primeros n-1 vectores de la base canónica. Entonces $f(x) = x$ si y sólo si $x \in A^{n-1}$, de donde resulta que $f(N) = N \cap A^{n-1}$ es un submódulo denso de tipo finito de A^{n-1}. Por la hipótesis inductiva $f(N) = A^{n-1}$ de donde $A^{n-1} \subset N$. Pero como es claro que $\{e_1,\dots,e_{n-1},x_0\}$ es base de A^n, resulta $N = A^n$.

En el caso general hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

que se escinde mediante una aplicación A-lineal $u: M \longrightarrow A^n$.

Si S es un submódulo de M denso generado por $\{v_1,\dots,v_r\}$ entonces

(*) [1]

el submódulo de A^n generado por N y $\{u(v_1),\dots,u(v_r)\}$ es denso de tipo finito; por el caso anterior, este submódulo debe coincidir con A^n, lo que obliga a que S sea todo M.

1.12 Productos tensoriales de álgebras y módulos topológicos.

Dadas álgebras topológicas A, B diremos que una topología τ sobre $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ es compatible si

i) $A \otimes_{\tau} B$ es un álgebra topológica

ii) la aplicación bilineal canónica $A \times B \longrightarrow A \otimes_{\tau} B$ es continua;

iii) si $H \subset A'$ y $K \subset B'$ son equicontinuos entonces

$$H \otimes K \subset (A \otimes_{\tau} B)'$$

y es equicontinuo.

En particular, si $h \in X(A)$ y $k \in X(B)$ entonces $h \otimes k \in X(A \otimes_{\tau} B)$, donde $h \otimes k$ está definido de la manera natural, esto es,

$$h \otimes k \ \left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) = \sum_i h(a_i)k(b_i).$$

Por ejemplo, sean A, B álgebras localmente convexas (resp. localmente m-convexas) con sistemas fundamentales de seminormas multiplicativas $\{p_i : i \in I\}$, $\{q_k : k \in K\}$ respectivamente; entonces la topología proyectiva π sobre $A \otimes_{\mathbb{K}} B$, definida por la familia de seminormas $\{p_{ik} : i \in I, k \in K\}$, donde

$$p_{ik}(x) = \inf\left\{ \sum_j p_i(a_j)q_k(b_j) : \ x = \sum_j a_j \otimes b_j \right. ,$$

es compatible. Además es evidente que $A \otimes_{\pi} B$ es localmente m-convexa si A y B lo son, ya que p_{ik} es multiplicativa si p_i y q_k lo son. Debemos consignar que la definición de topología compatible que acabamos de enunciar es de Mallios, en cuyos trabajos [20], [22] se estudian diferentes propiedades que el álgebra $A \otimes_{\tau} B$ hereda de las de A y B. En ellos se puede encontrar el siguiente resultado

1.12.1 Lema

Sean A, B álgebras topológicas y τ una topología compatible. Entonces la aplicación

$$X(A) \times X(B) \longrightarrow X(A \underset{\tau}{\otimes} B) \qquad (h,k) \longmapsto h \otimes k$$

es un homeomorfismo cuya inversa es

$$X(A \underset{\tau}{\otimes} B) \longrightarrow X(A) \times X(B) \qquad \bar{h} \longrightarrow (\bar{h}f, \bar{h}g)$$

donde $f: A \to A \underset{\tau}{\otimes} B$ es el morfismo $a \mapsto a \otimes 1$ y

$g: B \to A \underset{\tau}{\otimes} B$ es el morfismo $b \mapsto 1 \otimes b$.

Muchas veces no trabajaremos con $A \underset{\tau}{\otimes} B$ sino con su completada $A \underset{\tau}{\hat{\otimes}} B$. El problema que se presenta es que en general no será cierto que el espectro de $A \underset{\tau}{\hat{\otimes}} B$ es homeomorfo a $X(A) \times X(B)$ (cf. [12], [45]) Sin embargo, como en 1.7, hipótesis bastante generales nos llevan al resultado deseado.

1.12.2 Proposición

Sean A, B álgebras topológicas y τ una topología compatible sobre $A \otimes B$. Entonces cada una de las tres condiciones siguientes son suficientes para que valga

$$X(A \underset{\tau}{\hat{\otimes}} B) \approx X(A) \times X(B):$$

i) $g_{A \underset{\tau}{\otimes} B}$ es continua, $X(A) \times X(B)$ es completamente regular y $C(X(A) \times X(B))$ es completa;

ii) $A \underset{\tau}{\otimes} B$ es m-tonelada y $X(A) \times X(B)$ es un k-espacio;

iii) $X(A)$ y $X(B)$ son localmente equicontinuos.

Demostración: para los dos primeros basta aplicar 1.7.2, 1.7.3 y 1.12.1; el tercero está probado en [20], Th. 2.1

Consideremos ahora dos módulos topológicos sobre un álgebra topológica A, M y N. Siguiendo a [26],I.1 definimos el producto tensorial topológico de M y N, que denotamos $M \underset{\tau A}{\otimes} N$, por

$$M \underset{\tau A}{\otimes} N = M \underset{\tau}{\otimes} N \,/\, \overline{D_A \cdot M \underset{\tau}{\otimes} N}$$

donde τ es una topología de espacio vectorial topológico sobre $M \underset{K}{\otimes} N$ y compatible sobre $A \underset{K}{\otimes} A$, D_A es el núcleo del morfismo $A \underset{K}{\otimes} A \longrightarrow A$ inducido por la multiplicación y la barra denota clausura en $M \underset{\tau}{\otimes} N$. Cabe agregar que D_A es el ideal de $A \underset{K}{\otimes} A$ generado por $\{a\otimes 1 - 1\otimes a : a\in A\}$.

Sólo utilizaremos $\tau=\pi$, ya que $M\underset{\pi A}{\otimes} N$ satisface la siguiente propiedad universal:

existe una aplicación A-bilineal continua $t: M\times N \longrightarrow M\underset{\pi A}{\otimes} N$ tal que para todo A-módulo topológico P y toda aplicación A-bilineal continua $f: M\times N \longrightarrow P$ existe un único morfismo de A-módulos topológicos $\overline{f}: M\underset{\pi A}{\otimes} N \longrightarrow P$ tal que $f=\overline{f}\, t$.

Denotaremos $M\underset{\pi A}{\hat{\otimes}} N$ al completado de $M\underset{\pi A}{\otimes} N$. Es fácil ver que si M y N son A-módulos de Frécnet entonces $M\underset{\pi A}{\hat{\otimes}} N = M\underset{\pi}{\hat{\otimes}} N / I$, donde I es el submódulo de $M\underset{\pi}{\hat{\otimes}} N$ que se obtiene al clausurar D_A. $M\underset{\pi}{\otimes} N$ (loc.cit. 1.1.8)

1.12.3 Teorema

Sea A un álgebra de Fréchet, I un ideal cerrado de A, P un A-módulo proyectivo de tipo finito (provisto de su topología de Fréchet canónica (1.11.1 iii)). Entonces $P\underset{\pi A}{\otimes} A/I$ es completo

Demostración: llamando B a A/I obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

que, al ser tensoreada por P, induce otra, también exacta,

$$0 \longrightarrow I.P \longrightarrow P \longrightarrow P\underset{\pi A}{\otimes} B \longrightarrow 0.$$

Por 1.11.2 b) resulta que la topología cociente hace de $P\underset{A}{\otimes} B$ un A-módulo de Fréchet, que llamamos P'. Este es un B-módulo de Fréchet ya que, al ser $B\times P'$ cociente de $A\times P$, la aplicación bilineal $B\times P' \to P'$ es continua. Así P' es un B-módulo de Fréchet de tipo finito. Por otra parte, por las propiedades de $\underset{\pi A}{\hat{\otimes}}$ es claro que $P\underset{\pi A}{\hat{\otimes}} B$ es un B-módulo de Fréchet proyectivo de tipo finito, pues para convenientes S y m es $P\oplus S = A^m$. Como la aplicación

$$P \longrightarrow P\underset{\pi A}{\hat{\otimes}} B \qquad x \longmapsto x\otimes 1$$

es continua, también lo es la inclusión $i: P\underset{A}{\otimes} B \longrightarrow P\underset{\pi A}{\hat{\otimes}} B$ si $P\underset{A}{\otimes} B$ tiene la topología cociente. Pero como i tiene imagen densa, de 1.11.2 d) resulta que i es biyectiva. Por el teorema del gráfico cerrado i es un isomorfismo topológico.

1.12.4 A-álgebras topológicas

Dado un morfismo de álgebras topológicas $f: A \longrightarrow B$ diremos que B es una <u>A-álgebra topológica</u>. En este caso B es un A-módulo topológico, ya que la acción $a.b = f(a)b$ es una aplicación de $A \times B$ en B continua, por ser la composición de $f \times 1_B$ con la multiplicación de B.

Proposición

Sean $f: A \longrightarrow B$, $g: A \longrightarrow C$ morfismos de álgebras topológicas y τ una topología compatible con la estructura de A-módulo topológico de $B \otimes_A C$ y con la de álgebra topológica sobre $A \otimes_{\mathbb{K}} A$ (recordar la definición al comienzo de este parágrafo). Entonces $B \otimes_{\tau A} C$ es una A-álgebra topológica cuyo espectro es homeomorfo a

$$X(B) \underset{X(A)}{\times} X(C) = \{ (h, k) \in X(B) \times X(C) : hf = hg \}.$$

La demostración es evidente si observamos que

$$X(B \otimes_{\tau A} C) = X(B \otimes_{\tau} C \,/\, \overline{D_A \cdot B \otimes_{\tau} C}) = h(D_A \cdot B \otimes_{\tau} C) \qquad (1.2.2).$$

Los comentarios hechos en los dos parágrafos anteriores sobre el completado son válidos en este contexto; en particular si B y C son álgebras de Fréchet entonces $B \hat{\otimes}_{\tau A} C = B \hat{\otimes}_{\tau} C \,/\, I$.

1.13 Derivaciones

Si A es una $\mathbb{K}$ -álgebra y M es un A-módulo, una <u>derivación</u> de A en M es una aplicación $\mathbb{K}$ -lineal $D: A \longrightarrow M$ que verifica

$$D(a_1 a_2) = a_1 D(a_2) + a_2 D(a_1) \qquad \text{si } a_1, a_2 \in A.$$

Nos limitaremos a considerar derivaciones de A en A; el conjunto de estas derivaciones, que denotamos Der(A), es un A-módulo. Un problema interesante es establecer condiciones sobre A para que toda derivación de A sea continua. Esto ocurre, por ejemplo, si A es un álgebra de Fréchet regular semisimple ([30])

Si A es un álgebra de Fréchet entonces el producto induce un morfismo $A \hat{\otimes}_{\pi} A \longrightarrow A$ cuyo núcleo Δ llamamos la <u>diagonal</u> de A y se

puede probar que Der(A) es el A-módulo dual de $\Omega(A) = \Delta/\Delta^2$
Más precisamente $\Omega(A)$ es un A-módulo de Fréchet y Der(A) es isomorfo a $\mathrm{Hom}_A(\Omega(A), A)$. Llamamos a $\Omega(A)$ es <u>módulo de diferenciales</u> de A y tiene un significado análogo al módulo de diferenciales de Kähler en la geometría algebraica.

1.13.1 Proposición

Sea A un álgebra de Fréchet fuertemente regular. Sean $D \in \mathrm{Der}(A)$, U un abierto de X(A) y $a,b \in A$ tales que $\hat{a}|U = \hat{b}|U$. Entonces $\widehat{Da}|U = \widehat{Db}|U$.

Demostración: por la linealidad de D basta considerar el caso $b=0$. Sea $h_0 \in U$ y consideremos un entorno V de h_0 con clausura contenida en U. Por 1.9.5 existe $x \in A$ tal que $\hat{x}|V=1$ y $\hat{x}\,|\,X(A) - U = 0$. Por la semisimplicidad de A es $ax=0$ y por lo tanto $xDa + aDx = 0$; en consecuencia, para todo $h \in X(A)$ vale

$$h(x)h(Da) + h(a)h(Dx) = 0.$$

En particular $h(Da) = 0$ para todo $h \in \overline{V}$, o sea que $\widehat{Da}|\overline{V} = 0$.
Como h_0 es un elemento arbitrario de U no hay nada más que probar.

Capítulo 2

C^∞- álgebras

En este capítulo por variedad sobreentenderemos variedad diferenciable de clase C^∞, de dimensión finita, numerable al infinito.

2.1 El espectro de $C^\infty(X)$

Dada una variedad X consideraremos el álgebra $C^\infty(X)$ de todas las funciones diferenciables de X en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que $C^\infty(X)$ es un álgebra formalmente real y un álgebra de Fréchet separable para la topología usual ([13], ch. XVII).

Cada aplicación diferenciable entre variedades $f: X \longrightarrow Y$ define un morfismo $^t f: C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ por la fórmula $^t f(\varphi) = \varphi f$.

Es inmediato que las reglas $X \longrightarrow C^\infty(X)$, $f \longmapsto {}^t f$ definen un funtor contravariante de la categoría de variedades en la categoría de álgebras de Fréchet. El principal propósito de este capítulo es caracterizar la imagen de este funtor. Llamaremos a ésta la categoría de las <u>C^∞-álgebras</u>.

Para encontrar el espectro de $C^\infty(X)$ ante todo debemos observar que cada $x \in X$ define un carácter, que consiste en evaluar en x y que denotaremos $e_X(x)$: $\quad e_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$.

2.1.1 Proposición

Sea X una variedad. Entonces

a) la aplicación natural $e_X: X \longrightarrow X(C^\infty(X))$ es un homeomorfismo;

b) el álgebra $C^\infty(X)$ es fuertemente regular.

Demostración:

a) como $C^\infty(X)$ es una subálgebra de $C(X)$ que distingue puntos, e_X es inyectiva; su continuidad es inmediata. Veamos que e_X es biyectiva (compárese con [3]). Sea $h_0: C^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un carácter; probaremos que existe $x_0 \in X$ tal que para cada $\varphi \in C^\infty(X)$ vale

$h_0(\varphi) = \varphi(x_0)$.

Supongamos que no existe tal x_0; entonces para cada $x \in X$ existe $\varphi_x \in C^\infty(X)$ tal que $\varphi_x(x) \neq 0$, $h_0(\varphi_x) = 0$. Para cada x consideremos un entorno relativamente compacto U_x tal que $0 \notin \varphi_x(U_x)$. Como X es numerable al infinito, existe un subcubrimiento numerable $(U_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y una partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a dicho subcubrimiento, (ψ_n) (cf. [13])
Si definimos ahora $\varphi = \sum_m \psi_m \cdot \varphi_m^2$
es claro que $\varphi \in C^\infty(X)$ y que $\varphi(x) > 0$ para todo x. En particular φ es inversible. Sin embargo, esto no es posible porque φ pertenece al ideal maximal (cerrado) $M(h_0)$: en efecto si $u_m = \sum_1^m \psi_m \varphi_{x_m}^2$ entonces $u_m \longrightarrow \varphi$ pues cada $x \in X$ tiene un entorno V en el cual φ coincide con todos los u_m a partir de un cierto subíndice.
Por la continuidad de h_0 debe ser $h_0(\varphi) = \lim h_0(u_m) = 0$.
Para terminar a) resta ver que e_X es un homeomorfismo; sea $x_0 \in X$ y sea U un entorno de x_0; entonces existe $\psi \in C^\infty(X)$ con soporte compacto contenido en U tal que $\psi(x_0) = 1$ y el conjunto

$$V = \{ h \in X(C^\infty(X)) : h(\psi) \neq 0 \}$$

es un entorno de $e_X(x_0)$ contenido en $e_X(U)$.

Nota: con las modificaciones obvias, lo anterior vale para $C^k(X)$ con $0 \leq k < \infty$. Además, operando sobre cada componente conexa, podemos pedir solamente que X sea paracompacta.

b) La biyectividad de e_X prueba que $C^\infty(X)$ es semisimple.

Si $x_0 \in X$ y $\varphi(x_0) = 0$ para una $\varphi \in C^\infty(X)$, existe $\psi \in C^\infty(X)$ con soporte compacto contenido en $\{ x \in X : \varphi(x) < 1 \}$ y tal que $\psi(x_0) = 1$. Entonces $\psi^2 \cdot (1 - \varphi) \geq 0$ y es claro ahora que $C^\infty(X)$ es fuertemente regular.

El siguiente resultado es conocido ([33]) y omitimos su demostración.

2.1.2 Proposición

2.1.2 Proposición

Sean X, Y variedades y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces son equivalentes:

a) f es de clase C^∞

b) para toda $\varphi \in C^\infty(Y)$ se tiene $\varphi f \in C^\infty(X)$.

2.1.3 Corolario

Sean X, Y variedades.

a) Para todo morfismo de álgebras $\alpha: C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ existe una única aplicación diferenciable $f: X \longrightarrow Y$ tal que ${}^t f = \alpha$

b) X es difeomorfa a Y si y sólo si $C^\infty(X)$ es isomorfa a $C^\infty(Y)$.

Demostración: b) es consecuencia de a); probemos entonces esa proposición; la unicidad es evidente; para definir f notemos que α induce una aplicación continua $\alpha^t: X(C^\infty(X)) \longrightarrow X(C^\infty(Y))$ y sólo tenemos que poner $f = e_Y^{-1} \circ \alpha^t \circ e_X$ y usar 2.1.1 y 2.1.2.

Observemos que hay una gran analogía entre este resultado y el clásico teorema de Banach que prueba que dos espacios compactos son homeomorfos si y sólo si sus álgebras de funciones continuas son isomorfas.

2.2 Una descripción de $C^\infty(X)$

En este apartado enumeramos una serie de condiciones que satisfacen las C^∞ -álgebras. El resto del Capítulo está destinado a probar que son suficientes para caracterizarlas.

a) Toda C^∞-álgebra es fuertemente regular (2.1.1)

b) Toda C^∞ -álgebra es diferenciablemente completa (1.10.1)

c) Si A es una C^∞ -álgebra entonces Der(A) es un A-módulo proyectivo de tipo finito: esto es consecuencia inmediata de identificar $Der(C^\infty(X))$ con el módulo de campos vectoriales C^∞ sobre

X, esto es, con las secciones de clase C^∞ del fibrado tangente de X que denotamos T(X) (cf. [34],[28]). Por supuesto el A-módulo dual $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}(A), A)$ también es proyectivo de tipo finito y se identifica con el módulo de secciones C^∞ del fibrado dual de T(X), que denotaremos $\Gamma(T(X)^*)$ ("formas diferenciales de grado uno")

d) Si A es una C^∞-álgebra $\Omega(A)$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

Demostración: sea $A = C^\infty(X)$; consideremos primero un caso particular

i) $X = U$ abierto de $\mathbb{R}^m$:

en este caso se sabe que $A \hat{\otimes}_\pi A$ se identifica con $C^\infty(U \times U)$ y Δ con el ideal de las funciones que se anulan sobre la diagonal de $U \times U$; de la fórmula de Taylor se deduce que Δ está generado por $x_i - y_i$, $1 \leq i \leq m$ (las x_i, y_i son las funciones coordenadas) y de aquí sigue inmediatamente que los elementos

$$dx_i = \text{clase módulo } \Delta^2 \text{ de } x_i - y_i \; , \; 1 \leq i \leq m \, ,$$

forman una base de $\Omega(A)$; este resulta así un A-módulo libre de dimensión m.

ii) Caso general:

por el teorema de inmersión de Whitney ([13], ch. XVI, [28] 2. 15.18) podemos suponer que X es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^m$ para m suficientemente grande; sea U un entorno tubular de X y sea $r: U \longrightarrow X$ una retracción C^∞ (loc.cit.); entonces la inclusión $i: X \longrightarrow U$ induce un epimorfismo ${}^t i: B = C^\infty(U) \longrightarrow A$ con inversa a derecha ${}^t r: A \longrightarrow B$. Por la teoría general, hay un epimorfismo $u: A \otimes_B \Omega(B) \longrightarrow \Omega(A)$ tal que $u(1 \otimes d_B b) = d_A({}^t i(b))$ para cada $b \in B$ ([26], III). Como $\Omega(B) \approx B^m$ por la parte i), resulta que $A \otimes_B \Omega(B)$ es un A-módulo libre y bastará definir una inversa a derecha de u. Si ponemos $d: A \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ $\quad d(a) = 1 \otimes d_B({}^t r(a))$ entonces d es una derivación continua y por definición hay una aplicación lineal continua $v: \Omega(A) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ tal que $d = v d_A$.

Por las definiciones resulta $uv(d_A x) = d_A x$ para cada $x \in A$ y por lo tanto $uv = 1_{\Omega(A)}$, ya que $\{d_A x : x \in A\}$ genera un submódulo denso de $\Omega(A)$ ([26], III). Esto termina la demostración.

Observemos que por ser Der(A) el dual de $\Omega(A)$, usando d) es fácil probar que $\Omega(A)$ es canónicamente isomorfo al módulo de diferenciales de grado 1.

e) Toda C^∞-álgebra es topológicamente finitamente generada: esto es inmediato si $A = C^\infty(\mathbb{R}^m)$ ya que las funciones coordenadas x_i $1 \leq i \leq m$ generan topológicamente A; en el caso general, por el teorema de inmersión de Whitney, A es cociente de un $C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

f) Si A es una C^∞-álgebra entonces para cada $h \in X(A)$ su núcleo M(h) es un ideal maximal de tipo finito y $M(h)^r$ es un ideal cerrado para cada $r \geq 1$.

Demostración: como antes $A = C^\infty(X)$, y comenzaremos por el caso más fácil, a saber, $X = \mathbb{R}^m$; entonces M(h) está determinado por el punto $s = (s_1, \ldots, s_m)$ (2.1.1), y la fórmula

$$f(x) = f(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (\partial f/\partial x_i\ (tx + (1-t)s)\, dt)(x_i - s_i)$$

muestra que los elementos $x_i - s_i$, $1 \leq i \leq m$, generan M(h).
En el caso general podemos suponer que X es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^m$. Si $f \in M(h)$ entonces hay una extensión $\overline{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ de f y se aplica lo anterior a $\overline{f}$, con lo que resulta que los elementos $x_i|X - s_i$ $1 \leq i \leq m$ generan M(h).
Si bien en 1.1.1 ya fue probado que cada $M(h)^r$ es cerrado, conviene observar que de la fórmula integral anterior resulta que

$$M(h)^2 = \{f \in C^\infty(X) : f(s) = 0,\ df(s) = 0\},$$

donde df(s) es la diferencial de la función f en el punto s:
en efecto, podemos suponer que X es un entorno abierto de s en $\mathbb{R}^m$, y por la fórmula es $df(s) = 0$ si y sólo si $\partial f/\partial x_i\ (s) = 0$, $1 \leq i \leq m$.

g) Si A es una C^∞-álgebra, $h \in X(A)$ y $A^+ = \{a \in A : \hat{a} \geq 0\}$ entonces $A^+ \cap M(h) \subset M(h)^2$:

esto no es otra cosa que el criterio elemental de determinación de extremos relativos de una función, pues si $f \in C^\infty(X)^+$ y se anula en $x \in X$, debe tener un mínimo en x y por consiguiente $df(x) = 0$.

h) La diagonal Δ de una C^∞ -álgebra A es un ideal de $A \hat{\otimes}_\pi A$ de tipo finito; además Δ^2 es un ideal cerrado

si $X = \mathbb{R}^m$, $A \hat{\otimes}_\pi A = C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ y $\Delta = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) : \varphi(x, x)$ si $x \in \mathbb{R}^m \}$

Con un razonamiento similar al de f) se prueba que

$\varphi \in \Delta$ si y sólo si $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x, y)(x_i - y_i)$, $\psi_i \in A \hat{\otimes}_\pi A$, $1 \leq i \leq m$

y en consecuencia $x_i - y_i$, $1 \leq i \leq m$, generan Δ.

En el caso general se utiliza una inmersión en algún $\mathbb{R}^m$ y el caso anterior.

De la misma manera que antes se prueba que Δ^r es el ideal cerrado de las aplicaciones que se anulan en la diagonal junto con sus derivadas de orden menor que r.

Resumimos los resultados de este parágrafo.

2.2.1 Proposición

Sea A una C^∞ -álgebra. Entonces

i) A es un álgebra de Fréchet formalmente real;

ii) A es fuertemente regular;

iii) $\Omega(A)$ es un A-módulo proyectivo;

iv) Δ es un ideal de $A \hat{\otimes}_\pi A$ de tipo finito y Δ^2 es cerrado;

v) A es topológicamente finitamente generada;

vi) para cada $h \in X(A)$ $A^+ \cap M(h) \subset M(h)^2$;

vii) A es diferenciablemente completa.

Los siguientes tres parágrafos están destinados a probar que las condiciones i) - vii) caracterizan a las C^∞ -álgebras.

2.3 Lemas técnicos

2.3.1 Lema

Sea A un álgebra de Fréchet formalmente real, fuertemente regular tal que $A^+ \cap M(h) \subset M(h)^2$ para todo $h \in X(A)$ y sea $x \in A$ tal que $\hat{x}$ tiene un mínimo local en $h_0 \in X(A)$, es decir que existe un entorno U de h_0 tal que $h_0(x) \leq h(x)$ si $h \in U$. Entonces $x - h_0(x) \in M(h_0)^2$.

Demostración: por 1.9.6 existe $a \in A_0$ tal que $\hat{a}|V = 1$ y sop $\hat{a} \subset V$, siendo V un entorno de h_0 con $\bar{V} \subset U$; entonces

$$a^2(x - h_0(x)) \in A^+ \cap M(h)$$

de modo que

$$x - h_0(x) = a^2(x - h_0(x)) + (1 - a^2)(x - h_0(x)) \in M(h_0)^2 + P(h_0) \subset M(h_0)^2$$

puesto que, por 1.9.8, $P(h) \subset M(h)^r$ para todo $h \in X(A)$ y $r \geq 1$.

2.3.2 Lema

Sea A un álgebra localmente convexa tal que el ideal Δ de $A \hat{\otimes}_\pi A$ es de tipo finito. Entonces $M(h)$ es un ideal maximal de tipo finito para todo h $X(A)$.

Demostración: tenemos dos morfismos de $A \hat{\otimes}_\pi A$ en A, uno determinado por la multiplicación y otro, que llamaremos p, definido por $p(x \otimes y) = h(x)y$ para cada $x, y \in A$; ellos inducen un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & A \hat{\otimes}_\pi A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M(h) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si $z_1, \dots, z_r$ generan Δ como ideal de $A \hat{\otimes}_\pi A$, veamos que $P(z_1), \dots, p(z_r)$ generan $M(h)$. Ante todo obsérvese que $p(\Delta) \subset M(h)$ por la conmutatividad del diagrama. Para cada $x \in M(h)$ existen $c_i \in A \hat{\otimes}_\pi A$ $(1 \leq i \leq r)$ tales que $1 \otimes x - x \otimes 1 = \sum_{i=1}^{r} c_i z_i$ (en realidad, esto es cierto para cada $x \in A$); pero como $x = P(1 \otimes x - x \otimes 1)$ por ser

$h(x)=0$, vale $x=\sum_{i=1}^{r} p(c_i)p(z_i)$, como queríamos probar.

En lo que resta del parágrafo A será un álgebra de Fréchet que verifica las hipótesis

1. $\Omega(A)$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.
2. $M(h)$ es un ideal finitamente generado para cada $h\in X(A)$

Usando el mismo argumento que en la demostración de 1.12.3 obtenemos una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet

$$0 \longrightarrow M(h).\Omega(A) \longrightarrow \Omega(A) \xrightarrow{\pi} \Omega(A)\otimes_A \mathbb{R} \longrightarrow 0,$$

en el que consideramos a $\mathbb{R}$ como A-módulo vía el morfismo $h: A\to\mathbb{R}$. Como $\Omega(A)$ es de tipo finito, $\Omega(A)\otimes_A\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real de dimensión finita. Si definimos

$$d_h: A \longrightarrow M(h)/M(h)^2 \qquad d_h x = \text{clase módulo } M(h)^2 \text{ de } x - h(x)$$

entonces d_h es una derivación continua, de modo que existe una única aplicación A-lineal continua $f:\Omega(A)\longrightarrow M(h)/M(h)^2$ tal que $d_h=fd_A$ (1.13). Obviamente $f(M(h).\Omega(A))=0$, así que $f=\bar{f}\pi$ para una cierta $\bar{f}:\Omega(A)\otimes_A\mathbb{R}\longrightarrow M(h)/M(h)^2$ continua.
Por otra parte $d_A(M(h)^2)\subset M(h).\Omega(A)$, de modo que hay una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\Delta_h: M(h)/M(h)^2\longrightarrow \Omega(A)\otimes_A\mathbb{R}$ que verifica $\Delta_h d_h=\pi d_A$, o sea que $\Delta_h f d_A=\pi d_A$. Pero como la imagen de d_A es un submódulo denso de $\Omega(A)$, resulta que Δ_h y $\bar{f}$ son isomorfismos recíprocos. Hemos probado así que

$$\Omega(A)\otimes_A\mathbb{R}=M(h)/M(h)^2.$$

Sea $D\in Der(A)$ y sea $h\in X(A)$; como la aplicación $\mathbb{R}$-lineal hD (continua) se anula sobre $M(h)^2$, induce $\overline{hD}: M(h)/M(h)^2\longrightarrow\mathbb{R}$
Tenemos así un morfismo de A-módulos $k_h: Der(A)\longrightarrow (M(h)/M(h)^2)^*$
$k_h(D)=\overline{hD}$, donde la estrella indica el $\mathbb{R}$-dual.
Consideremos ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
Hom_A(\Omega(A),A) & \xleftarrow{i} & Der(A)\otimes_A\mathbb{R} & \xleftarrow{p} & \\
\downarrow g & & \downarrow & & Der(A) \\
Hom_{\mathbb{R}}(\Omega(A)\otimes_A\mathbb{R},\mathbb{R}) & \xrightarrow{\Delta_h^*} & (M(h)/M(h)^2)^* & \xleftarrow{k_h} &
\end{array}$$

donde $p(D)=D\otimes 1$ y $g(F\otimes 1)(\omega\otimes 1)=h(\langle F,\omega\rangle)$.

Como Δ_h es un isomorfismo, su traspuesta también lo es; por otra parte, como $\Omega(A)$ es proyectivo de tipo finito, es un resultado clásico que g es un isomorfismo; de 1.11.2 a) y de $\mathrm{Hom}_A(\Omega(A), A)\approx \mathrm{Der}(A)$ se desprende que i es un isomorfismo, k_h es un epimorfismo y la sucesión

$$0 \longrightarrow M(h).\mathrm{Der}(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A) \longrightarrow (M(h)/M(h)^2)^* \longrightarrow 0$$

es exacta.

2.3.3 Lema

Sean $h_o\in X(A)$, $D_i\in \mathrm{Der}(A)$ $1\leq i\leq n$ tales que $k_{h_o}(D_i)$, $1\leq i\leq n$ es base de $(M(H)/M(h)^2)^*$. Entonces existe un entorno U de h_o tal que para cada $h\in U$ $k_h(D_i)$ $1\leq i\leq n$ es base de $(M(h)/M(h)^2)^*$. Además, si $h\in U$ y $x\in M(h)$ entonces $x\in M(h)^2$ si y sólo si $hD_ix=0$ para todo $i\leq n$.

Demostración: como $\mathrm{Der}(A)$ es proyectivo de tipo finito, existe a $M(h_o)$ tal que el módulo de fracciones

$$\mathrm{Der}(A)_a=\mathrm{Der}(A)\otimes A_a$$

es un A_a-módulo libre de rango un cierto m. Multiplicando, si es necesario, por un elemento inversible de A_a (de la forma a^r), podemos suponer que hay una base de $\mathrm{Der}(A)_a$ de la forma $T_i/1$, $1\leq i\leq m$, para ciertos $T_i\in \mathrm{Der}(A)$. Consideremos la aplicación A-lineal $u: A^m \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ $u(a_1,\dots,a_m)=\sum_{i=1}^{m} a_iT_i$. Llamemos N y C al núcleo y conúcleo de u respectivamente. Por definición, $N_a=0$ y $C_a=0$. Como C es de tipo finito, existe $r\geq 0$ tal que $a^rC=0$. Además, para cada $v\in N$ hay un $q=q(v)\geq 0$ tal que $a^qv=0$. Por consiguiente, si $D\in \mathrm{Der}(A)$ existen elementos $a_i\in A$ $1\leq i\leq m$ tales que $a^rD=\sum_{i=1}^{m} a_iT_i$; además, si $\sum_{i=1}^{m} c_iT_i=0$ entonces $(c_1,\dots,c_m)\in N$ y debe existir $q=q(c_1,\dots,c_m)$ tal que $a^qc_i=0, 1\leq i\leq m$.

Después de estos preliminares generales, consideremos el entorno abierto de h_o $U_o=\{h\in X(A): h(a)\neq 0\}$

1) para todo $h\in U_o$ $k_h(T_i)$ $1\leq i\leq m$ genera $(M(h)/M(h)^2)^*$:

en efecto, si $\psi \in (M(h)/M(h)^2)^*$ existe $D \in Der(A)$ tal que $\psi = k_h(D)$; por lo anterior, existen $a_i \in A$, $1 \leq i \leq m$ tales que $a^r D = \sum_{i=1}^{m} a_i T_i$ y entonces $h(a^r) k_h(D) = \sum_1^m h(a_i) k_h(T_i)$, de donde $\psi = \sum_i \frac{h(a_i)}{h(a^r)} k_h(T_i)$, como queríamos probar

2) si $h \in U_0$ $k_h(T_i)$ $1 \leq i \leq m$ es linealmente independiente:

si existen $s_i \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_1^m s_i k_h(T_i) = 0$, por la sucesión exacta previa al enunciado de este lema resulta que $\sum_i s_i T_i \in M(h).Der(A)$ y en consecuencia existen $b_k \in M(h)$, $L_k \in Der(A)$, $1 \leq k \leq p$, tales que $\sum_{i=1}^{m} s_i T_i = \sum_{k=1}^{p} b_k L_k$. Ahora bien, para cada k existen $c_{ki} \in A$ $1 \leq i \leq m$ tales que $a^r L_k = \sum_{i=1}^{m} c_{ki} T_i$.
Por lo tanto $\sum_{i=1}^{m} (a^r s_i - \sum_{k=1}^{p} b_k c_{ki}).T_i = 0$ y existe $q \geq 0$ tal que $a^q(a^r s_i - \sum_{k=1}^{p} b_k c_{ki}) = 0$ $1 \leq i \leq m$. Pero como $h(a) \neq 0$ y $h(b_k) = 0$ para todo k, debe ser $s_i = 0$ para todo i.

Las afirmaciones probadas, 1) y 2), junto con la hipótesis implican $n = m$, pues $\dim_{\mathbb{R}} (M(h_0)/M(h_0)^2)^* = n$.

Para cada D_i del enunciado existen $a_{ik} \in A$ $1 \leq k \leq n$ tales que $a^r D_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} T_k$ $1 \leq i \leq n$ y la matriz $(h_0(a_{ik})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible ("matriz de cambio de base"). Por continuidad, hay un entorno U_1 de h_0 tal que $(h(a_{ik})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible para cada $h \in U_1$ y entonces $U = U_0 \cap U_1$ verifica lo pedido.

Finalmente, es evidente que si $x \in M(h)^2$ entonces $hDx = 0$ para toda $D \in Der(A)$; supongamos que $hD_i x = 0$ $1 \leq i \leq n$. Entonces

$k_h(D)$ ("clase módulo $M(h)^2$ de x") $= 0$ para toda $D \in Der(A)$

y así "clase módulo $M(h)^2$ de x" $= 0$, o sea $x \in M(h)^2$.

Observación

El resultado anterior permite establecer la existencia del "fibrado tangente" de $X(A)$ con fibra $(M(h)/M(h)^2)^*$ en cada $h \in X(A)$.

2.3.4 Lema

2.3.4 Lema

Sea A un álgebra fuertemente regular que satisface 1. y 2. Para cada $h_0 \in X(A)$ son equivalentes

a) $M(h_0) = M(h_0)^2$

b) $M(h_0) = P(h_0)$

c) $M(h_0)$ está generado por un idempotente

d) $\{h_0\}$ es abierto y cerrado en $X(A)$

Demostración:

a) b) En el anillo local A_{h_0} vale $M_{h_0} = M_{h_0}^2$ y por el lema de Nakayama debe ser $M_{h_0} = 0$; sólo resta aplicar 1.9.8

b) c) Como $A_{h_0} = A/P(h_0)$ resulta $M(h_0)_{h_0} = 0$ y por ser $M(h_0)$ de tipo finito existe $c \in P(h_0)$ tal que $(1 - c)M(h_0) = 0$. Como $c \in M(h_0)$ resulta $c^2 = c$ y $cx = x$ para todo $x \in M(h_0)$, y en consecuencia $M(h_0) = Ac$

c) a) Evidente

c) d) Resulta $\{h_0\}$ abierto en $Max(A)$, a fortiori en $X(A)$.

d) c) Por la regularidad fuerte, existe $c \in A$ tal que $h_0(c) = 0$ y $h(c) = 1$ para todo $h \neq h_0$; siendo A semisimple debe ser $c^2 = c$ y $cx = x$ para todo $x \in M(h_0)$.

Definamos para cada $h \in X(A)$ $\rho(h) = \dim_{\mathbb{R}}(M(h)/M(h)^2)$ Entonces es claro que $\rho(h) < \infty$ para todo $h \in X(A)$.

2.3.5 Corolario

La aplicación ρ es localmente constante.

2.4 Coordenadas locales en X(A)

En todo lo que sigue A será un álgebra que verifica las condiciones i) - vii) de 2.2.1. Veremos que es posible dotar a X(A) de una estructura de variedad, para lo cual precisamos construir primero coordenadas locales.

El siguiente resultado es clave para nuestro propósito.

2.4.1 Proposición

Sea $h_o \in X(A)$ tal que $\rho(h_o) > 0$. Entonces existen elementos $x_i, y_k \in A$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$, derivaciones $D_i \in Der(A)$, $1 \leq i \leq n$, y un entorno U_o de h_o tales que

a) $\{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\}$ genera topológicamente A

b) para cada $h \in X(A)$ $\{x_i - h(x_i),\ y_k - h(y_k) : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq m\}$ genera $M(h)$

c) para cada $h \in U_o$ y cada $i = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,n$ es $hD_i x_k = \delta_{ik}$

d) las clases módulo $M(h)^2$ de los $x_i - h(x_i)$ forman una base de $M(h)/ M(h)^2$ para cada $h \in U_o$

e) para cada $h \in U_o$ $M(h)$ es generado por $P(h)$ y $\{x_i - h(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$

f) si $h \in U_o$ y $h(x_i) = 0$ para todo $i \leq n$ entonces $h = h_o$

g) para cada $x \in A$ y cada $i, j = 1,\dots,n$ $\widehat{D_iD_jx}|U_o = \widehat{D_jD_ix}|U_o$

h) existe $a \in 1 + P(h_o)$ tal que $aD_ix_j = a\,\delta_{ij}$ $i, j = 1,\dots,n$ y para todo $\omega \in \Omega(A)$ $a.\omega = \sum_{i=1}^{m} \langle D_i, \omega\rangle . dx_i$; en particular $a.dx = a.\sum_{i=1}^{m} D_i x . dx_i$ si $x \in A$.

Demostración:

a) por la hipótesis v) hay una familia finita $\{u_1,\dots,u_r\} \subset A$ que genera topológicamente A; por 1.6.1, para cada $h \in X(A)$ la subálgebra sin identidad generada por $u_1 - h(u_1),\dots,u_r - h(u_r)$ es densa en $M(h)$; claramente las imágenes de los $u_i - h_o(u_i)$ generan un subespacio denso de $M(h_o)/ M(h_o)^2$; por un eventual reordenamiento, podemos suponer que las imágenes de los n primeros forman una base de $M(h_o)/ M(h_o)^2$. Definiendo

$$x_i = u_i - h_o(u_i) \quad 1 \leq i \leq n$$
$$y_i = u_i - h_o(u_i) \quad n+1 \leq i \leq r$$

queda probado a).

c) De la sucesión exacta anterior a 2.3.3 resulta que existen $F_i \in Der(A)$ $1 \leq i \leq n$ tales que $h_oF_ix_k = \delta_{ik}$, $1 \leq i,k \leq n$; como existe un entorno W de h_o tal que la matriz $(hF_ix_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es inversible para todo $h \in W$ el elemento de A $a = \det(F_ix_k)$ es tal que $h(a) \neq 0$ para todo $h \in W$; en consecuencia existe $b \in A$

tal que $ab \in 1 + P(h_o)$. Si (c_{ik}) indica la matriz adjunta de $(F_i x_k)$ entonces $(c_{ik}).(F_i x_k) = a.(\delta_{ik})$. Si ponemos $a_{ik} = ac_{ik}$ entonces $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} F_j x_k = \delta_{ik} + p_{ik}$, para ciertos $p_{ik} \in P(h_o)$.

Definamos $D_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} F_j$, $1 \leq i \leq n$.

Sea $V_o \subset W$ un entorno abierto de h_o tal que $\widehat{p_{ik}}|V_o = 0$ para todo i,k. Entonces c) es válido para todo $h \in V_o$; se construirá U_o de modo que $U_o \subset V_o$.

d) Como $k_{h_o}(D_i)$, $1 \leq i \leq n$ es base de $(M(h_o)/M(h_o)^2)^*$ hay un entorno $V_1 \subset V_o$ tal que $k_h(D_i)$ $1 \leq i \leq n$ es base de $(M(h)/M(h)^2)^*$ para todo $h \in V_1$ (2.3.3). Como $\rho(V_1) = n$, bastará ver que para cada $h \in V_1$ $\sum_{i=1}^{m} s_i(x_i - h(x_i)) \in M(h)^2 \Rightarrow s_i = 0$, $1 \leq i \leq n$; pero esto es evidente pues para cada $k = 1,\dots,n$ vale que

$$hD_k\Big(\sum_{i=1}^{m} s_i(x_i - h(x_i))\Big) = s_k \in hD_k(M(h)^2) = 0.$$

e) Consideremos el anillo local A_h, para $h \in V_1$. Las clases de los $x_i - h(x_i)$ generan $M(h)/M(h)^2 \approx M_h/M_h^2$ y por el lema de Nakayama las clases de los $x_i - h(x_i)$ generan M_h en $A_h = A/P(h)$.

f) Sea V un entorno de h_o con clausura compacta contenida en V_1. Como A es separable (como se desprende de a)) y de Fréchet, $\bar{V}$ resulta equicontinuo débilmente cerrado y por lo tanto compacto y metrizable ([5] , ch. IV, § 2); en particular, es legítimo el uso de sucesiones en V. Sea $F = \{h \in V: h(x_i) = 0 , 1 \leq i \leq n\}$

Entonces F es un cerrado que contiene a h_o. Veamos que h_o no es un punto de acumulación de F; supongamos que exista una sucesión de puntos de F, todos distintos, $h_m \in F$, que converge a h_o, $h_m \neq h_o$ para todo m; por 1.9.7 existe $x \in M(h_o)$ tal que $h_m(x) > 0$ para todo m. Por lo probado en e) debe ser $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + b$ con $a_i \in A$, $b \in P(h_o)$. Claramente $h_m(b) = 0$ si m m_o, de modo que $0 < h_m(x) = \sum_{i=1}^{m} h_m(a_i) h_m(x_i) = 0$ lo que es absurdo. Por lo tanto h_o tiene un entorno abierto U_o en V tal que $U_o \cap F = \{h_o\}$, lo que prueba f).

b) Para cada $h \in X(A)$ sea $I(h)$ el ideal generado por los $x_i - h(x_i)$

y los $y_k - h(y_k)$, $1 \leq k \leq m$. Claramente $I(h) \subset M(h)$. Por la construcción de x_i, y_k y por la parte e) resulta que $I(h)$ y $P(h)$ generan $M(h)$, para todo $h \in X(A)$. Bastará ver que $P(h) \subset I(h)$ para todo h, o, lo que es igual por 1.9.8, que la cápsula de $I(h)$ es $\{h\}$. Pero como la subálgebra sin identidad generada por aquellos elementos está contenida en $I(h)$, por 1.6.1 resulta que $I(h)$ es denso en $M(h)$. Entonces $I(h)$ no puede estar contenido en otro ideal maximal cerrado distinto de $M(h)$. Esto prueba que su cápsula es $\{h\}$.

g) Ante todo es claro por la parte d) que si $h \in U_0$ entonces las clases módulo $M(h)^3$ de $(x_i - h(x_i))(x_k - h(x_k))$ $1 \leq i \leq k \leq n$ generan el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M(h)^2/M(h)^3$. Veamos que son linealmente independientes: sean $s_{ik} = s_{ki} \in \mathbb{R}$ tales que

$$(\circledast) \quad \sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}(x_i - h(x_i))(x_k - h(x_k)) \in M(h)^3;$$

por la parte e) $D_k x_i = \delta_{ik} + a_{ik}$ con $\widehat{a_{ik}}|U_0 = 0$ $1 \leq i,k \leq n$ y entonces $a_{ik} \in P(h) \subset M(h)^r$ si $r \geq 1$; en particular $a_{ik} \in M(h)^3$. Como para toda $D \in Der(A)$ y todo $r \geq 1$ $D(M(h)^{r+1}) \subset M(h)^r$, aplicando D_j a $(\circledast)$ obtenemos

$$\sum_{i,k} s_{ik}(D_j x_i(x_k - h(x_k)) + (x_i - h(x_i))D_j x_k) \quad M(h)^2$$

y como $D_j x_i - \delta_{ij} = a_{ij} \in M(h)^3$ queda

$$\sum_{i,k} s_{ik}(\delta_{ij}(x_k - h(x_k)) + \delta_{jk}(x_i - h(x_i))) \in M(h)^2$$

de donde $2\sum_k s_{jk}(x_k - h(x_k)) = \sum_k s_{jk}(x_k - h(x_k)) + \sum_i s_{ij}(x_i - h(x_i)) \in M(h)^2$, y por la parte d) resulta $s_{jk} = 0$ para todo j, k. Acabamos de probar así que las clases de $(x_i - h(x_i))(x_k - h(x_k))$ $1 \leq i \leq k \leq n$ forman una base de $M(h)^2/M(h)^3$. Entonces, para cada $x \in A$ existen $s_{ik} = s_{ki} \in \mathbb{R}$ tales que

$$x - h(x) - \sum_{i=1}^{n} hD_i x(x_i - h(x_i)) - \sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}(x_i - h(x_i))(x_k - h(x_k)) \in M(h)^3.$$

Aplicando hD_rD_s, $1 \leq r, \ell \leq n$ y recordando que $D_r x_i - \delta_{ir} \in M(h)^2$ obtenemos $hD_rD_\ell x = s_{r\ell}$ y por lo tanto $hD_rD_\ell = hD_\ell D_r x$. Como esto vale para cualquier $h \in U_0$, se obtiene lo afirmado.

h). Consideremos las aplicaciones A-lineales

$$f: A^n \longrightarrow \Omega(A) \quad f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i . dx_i \quad y$$

$g : \Omega(A) \longrightarrow A^n \quad g(\omega) = (\langle D_i, \omega \rangle)_{i \leq n}$.

Pasando al anillo local $A_{h_o} = A/P(h_o)$ obtenemos

$f_o : A_{h_o}{}^n \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A A_{h_o}$ y $g_o : \Omega(A) \otimes_A A_{h_o} \longrightarrow A_{h_o}{}^n$; veamos que f_o y g_o son isomorfismos recíprocos. Como se trata de aplicaciones entre A_{h_o}-módulos libres, es suficiente ver que, reduciendo todo módulo M_{h_o}, se obtiene $g_o f_o = id$ (ver [4], ch.II, § 3 n°2).

Como $A_{h_o} / M_{h_o} = A/M(h_o) = \mathbb{R}$ lo último equivale a decir que $\mathbb{R}^n = A^n \otimes_A \mathbb{R} \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A \mathbb{R} \longrightarrow A^n \otimes_A \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ es la identidad ($\mathbb{R}$ considerado como A-módulo vía h_o) y esto es inmediato porque, en el diagrama previo a 2.3.3, el isomorfismo Δ_{h_o} aplica la clase módulo $M(h_o)^2$ de los x_i en los correspondientes $dx_i \otimes 1$, y por otra parte $\{h_o D_i : 1 \leq i \leq n\}$ es la base dual correspondiente.

Como f_o y g_o son isomorfismos recíprocos existe $a \in 1 + P(h_o)$ tal que $a.fg = a.1_{\Omega(A)}$ y $a.gf = a.1_{A^n}$ (loc.cit. ch.II, § 2 Prop 19) lo que da la tesis.

Observación

Si $h \in U_o$ y $x \in M(h)$ entonces $x \in M(h)^2 \Leftrightarrow D_i x \in M(h), 1 \leq i \leq n$ (2.3.3)

2.4.2 Notación

Desde ahora indicaremos con U un entorno abierto de ho con clausura contenida en U_o.

En lo que sigue nos ubicaremos en las condiciones de 2.4.1 Tenemos así una aplicación continua $\theta : X(A) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\theta(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n))$, que verifica $(\theta|U)^{-1}(0) = \{h_o\}$ (2.4.1 f)).

2.4.3 Lema

Definamos para cada $t > 0$ $F_t = \{ h \in X(A) : t \geq \|\theta(h)\| \}$

$U_t = \{ h \in X(A) : t > \|\theta(h)\| \}$

Entonces

a) si $0 < t < s$ $\quad F_t \cap \overline{U} \subset \overline{U_s \cap U} \subset F_s \cap \overline{U}$

b) $\{F_t \cap \overline{U} : t > 0\}$ es una base de entornos de h_o.

c) $\{U_t \cap U : t > 0\}$ es una base de entornos de h_o

Demostración:

a) si $h \in F_t \cap \overline{U}$ entonces $\|\Theta(h)\| \leq t$ y existen $h_k \in U$ $(k \in \mathbb{N})$ tales que $h = \lim h_k$, de modo que existe k_o tal que $\|\Theta(h_k)\| < s$ si $k \geq k_o$. Entonces $h_k \in U_s \cap U$ si $k \geq k_o$ y por ende $h \in \overline{U_s \cap U}$. La otra inclusión es trivial.

b) como, por 2.4.1 f), $\bigcap_{t>0} F_t \cap \overline{U} = \{h_o\}$, resulta que h_o es el único punto de adherencia de la base de filtro $(F_t \cap \overline{U})_{t>0}$ y en consecuencia esta base de filtro converge a $h_o \in \overline{U}$. Si W es un entorno de h_o en $X(A)$, $W \cap \overline{U}$ es un entorno de h_o en $\overline{U}$ y entonces debe existir $t > 0$ tal que $F_t \cap \overline{U} \subset W \cap \overline{U} \subset W$

c) es evidente por a) y b).

Notación

$$E_t(0) = \{ v \in \mathbb{R}^n : \|v\| < t\}$$

2.4.4 Lema

Existe un $t_o > 0$ tal que $\Theta(U_t \cap U) \supset E_{t/2}(0)$ si $0 < t < t_o$

Demostración: sea V un entorno abierto de h_o con clausura compacta contenida en U y sea $t_o > 0$ tal que $F_{t_o} \cap \overline{U} \subset V$; entonces, si $0 < t < t_o$ y v $E_t(0)$ definimos $x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - v_i)^2$ con $v = (v_i)_{i \leq n}$

Por la compacidad de $F_t \cap \overline{U}$ existe $h' \in F_t \cap \overline{U}$ tal que $\hat{x}$ alcanza su mínimo α en h'. Nótese que $\alpha \geq 0$ pues $\hat{x} \geq 0$. Veamos que $h' \in U_t$.

Supongamos, por el contrario, que $\|\Theta(h')\| = t$; entonces

$$2\sum_{i=1}^{n} h'(x_i)v_i \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} h'(x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2} < 2t.t/2 = t^2$$

de donde resulta

$$\|v\|^2 = h_o(x) \geq h'(x) = \|\Theta(h')\|^2 + \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h'(x_i)v_i =$$
$$= t^2 + \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h'(x_i)v_i > \|v\|^2,$$

lo que es absurdo.

Luego $h' \in U_t \cap \overline{U} \subset F_t \cap \overline{U} \subset V$; pero como $U_t \cap \overline{U} \supset U_t \cap V$ resulta que

$U_t \cap \overline{U} = U_t \cap V$; así, h' pertenece al abierto $U_t \cap V \subset F_t \cap \overline{U}$ y entonces $h'(x) \leq h(x)$ para todo $h \in U_t \cap V$. Esto prueba que $\hat{x}$ tiene un mínimo local en h'; por 2.3.1 $x - d \in M(h')^2$ y entonces $h'D_ix = h'D_i(x - d) = 0$; pero como, por otro lado, $h'D_ix = 2(h'(x_i) - v_i)$ debe ser $h'(x) = v$, con lo que concluimos.

Necesitaremos ahora algunos resultados de la teoría de álgebras diferenciables, que adaptaremos de [49], [34].

Como es habitual para cada multi-índice de enteros no negativos $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ponemos $|p| = \sum_{i=1}^{m} p_i$ y definimos el operador que actúa sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\partial^p/\partial t^p : \varphi \longrightarrow \partial^p\varphi/\partial t_1^{p_1} \ldots t_n^{p_n}$.
Si A es un álgebra como en 2.4.1 y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $1 \leq \alpha_i \leq n$ ponemos $D^{(\alpha)} : A \longrightarrow A$ $D^{(\alpha)}x = D_{\alpha_1} \cdots D_{\alpha_r} x$.
El orden, en la n-upla α, es fundamental pues en general no es cierto que sea $D_iD_k = D_kD_i$ si $i \neq k$. Sin embargo, de 2.4.1 resulta

2.4.5 Lema

Si los multi-índices α, β difieren en una permutación y U es como en 2.4.2 entonces para todo $x \in A$ $\widehat{D^{(\alpha)}x}\big|U = \widehat{D^{(\beta)}x}\big|U$.

Una consecuencia del lema es que resulta posible definir para cada multi-índice p como antes un operador $D^p : A \longrightarrow C(U)$ como cualquiera de los $D^{(\alpha)}$ si $p_k = \text{card}\{i : \alpha_i = k, 1 \leq k \leq n\}$. Para cada $h \in U$ se obtiene así una "derivación puntual de orden $|p|$ asociada al carácter h", definida sin ambigüedad por $hD^p : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y que resulta continua.

Para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ indicaremos $\Pi_n(v) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi(v) = 0\}$ de modo que $\Pi_n(v)^r = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial^p\varphi/\partial t^p\,(v) = 0 \text{ si } |p| < r\}$
Es evidente que $\Pi_n(v)$ es un ideal maximal cerrado generado por $t_i - v_i$, $1 \leq i \leq n$.

Asimismo, indicaremos $\mathcal{E}_n$ el álgebra local de gérmenes de aplicaciones de clase C^∞ es 0. Obviamente $\mathcal{E}_n = C^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_n$, donde $\mathcal{P}_n = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \varphi | W = 0$ para un entorno W de $0\}$

El ideal maximal de $\mathcal{E}_n$ es $\mathcal{M}_n = \pi_n(0)/\mathcal{P}_n$.

Denotaremos $\mathcal{F}_n$ al álgebra de series formales en n indeterminadas. Es un resultado clásico que $\mathcal{F}_n$ se identifica con el completado separado de $\mathcal{E}_n$ para la topológía $\mathcal{M}_n$-ádica, esto es,

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n/\mathcal{M}_n^\infty \quad \text{si } \mathcal{M}_n^\infty = \bigcap_{r\geq 1} \mathcal{M}_n^r \qquad ([19])$$

Consideremos ahora el cálculo operacional C^∞ $T: C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow A$ determinado por $T(t_i) = x_i$ $1 \leq i \leq n$. Obsérvese que, cualquiera sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $h \in X(A)$ $h(T(\varphi)) = \varphi(h(x_1),\dots,h(x_n))$

2.4.6 Proposición

Para cada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vale:

a) $T(\varphi) \in P(h_0)$ si y sólo si $\varphi \in \mathcal{P}_m$

b) $hD_iT(\varphi) = hT(\partial\varphi/\partial t_i)$ para $1 \leq i \leq n$ y $h \in U$

c) $hD^pT(\varphi) = hT(\partial^p\varphi/\partial t^p)$

Demostración:

a) si $\varphi | W = 0$ para un entorno W de 0, por la continuidad de Θ resulta $\widehat{T(\varphi)} | \Theta^{-1}(W) = 0$; si $T(\varphi) \in P(h_0)$ existe $t > 0$ tal que $\widehat{T(\varphi)} | U_t \cap U = 0$ (2.4.3 c)). Si $t_0 > 0$ es como en 2.4.4, achicando t podemos suponer que $t < t_0$, así que $\varphi(h(x_1),\dots,h(x_n)) = 0$ si $h \in U_t \cap U$; así $\varphi | \Theta(U_t \cap U) = 0$ y por 2.4.4 $\varphi | E_{t/2}(0) = 0$, lo que prueba que $\varphi \in \mathcal{P}_m$

b) Ambos miembros definen derivaciones continuas de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{R}$, y coinciden, por 2.4.1 c), sobre $\varphi = t_k$, $1 \leq k \leq n$. Como los polinomios son densos, resulta lo pedido.

c) Es evidente por la parte b) usando inducción.

2.4.7 Corolario

Si $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $h\in U$ entonces $\varphi\in \Pi_n(\Theta(h))^r$ si y sólo si $T(\varphi)\in M(h)^r$, para cada $r\geq 1$. En particular,

$$\Pi_n(\Theta(h))^{\infty}=\bigcap_{r\geq 1}\Pi_n(\Theta(h))^r \Longleftrightarrow T(\varphi)\in M(h)^{\infty}=\bigcap_{r\geq 1} M(h)^r$$

Demostración: claramente $T(\Pi_n(\Theta(h)))\subset M(h)$, de modo que una implicación es evidente; la otra también lo es para $r=1$ ya que $h(T(\varphi))=\varphi(\Theta(h))$. Supongamos que $T(\varphi)\in M(h)^{r+1}$ y sea p un multiíndice con $|p|\leq r$. Por 2.4.6 c), como $hD^p(T(\varphi))=0$, resulta que $\partial^p\varphi/\partial t^p(\Theta(h))=0$ si $|p|\leq r$, o sea que $\varphi\in\Pi_n(\Theta(h))^{r+1}$.

Para cada $h\in X(A)$ existe un morfismo de álgebras

$$\tau_h:\mathbb{R}[t_1,\dots,t_n]\longrightarrow A \quad \text{definido por } \tau_h(t_i)=x_i-h(x_i)$$

Obsérvese que τ_{h_0} es la restricción de T al álgebra de polinomios. Por 2.4.7 τ_h es compatible con las filtraciones definidas por $\Pi_n(0)^r$ $(r\geq 0)$ y $M(h)^r$ $(r\geq 0)$, y así define un morfismo de álgebras graduadas

$$\overline{\tau_h}:\mathbb{R}[t_1,\dots,t_n]\longrightarrow gr_{M(h)}(A)=\bigoplus_{r\geq 1} M(h)^r/M(h)^{r+1}$$

2.4.8 Proposición

Para cada $h\in U$, $\overline{\tau_h}$ es un isomorfismo de álgebras graduadas. En particular, las clases módulo $M(h)^{r+1}$ de

$$(x_1-h(x_1))^{p_1}\dots(x_n-h(x_n))^{p_n} \quad \text{para } |p|=r$$

forman una base de $M(h)^r/M(h)^{r+1}$.

Demostración: si $h\in U$, los elementos $x_i-h(x_i)$ $1\leq i\leq n$ forman una base de $M(h)/M(h)^2$, de modo que $gr_1(\overline{\tau_h})$ es un isomorfismo; por lo tanto $\overline{\tau_h}$ es un epimorfismo. Sea f un polinomio homogéneo de grado r, $f=\sum_{|p|=r}c_pt^p$ tal que $\overline{\tau_h}(f)=0$. Esto significa $\sum_{|p|=r}c_p(x_1-h(x_1))^{p_1}\dots(t_n-h(x_n))^{p_n}\in M(h)^{r+1}$. Por 2.4.7 a) el polinomio $g=\sum_{|p|=r}c_p(t_1-h(x_1))^{p_1}\dots(t_n-h(x_n))^{p_n}$ tiene todas las derivadas de orden menor o igual que r+1 nulas en el punto $h(x)=(h(x_1),\dots,h(x_n))$. Pero como el grado de g es a lo sumo r debe ser $g=0$; luego $f=0$, ya que $g(t)=f(t-h(x))$. Esto prueba que $gr_r(\overline{\tau}_h)$ es inyectiva para todo $r\geq 1$ y concluimos.

2.4.9 Corolario

Si $h\in U$ y $x\in A$ existen únicos $c_p\in\mathbb{R}$ tales que

$$x-\sum_{|p|\leq r} c_p(x_1-h(x_1))^{p_1}\dots(x_n-h(x_n))^{p_n}\in M(h)^{r+1}$$

2.4.10 Observación

los coeficientes c_p están determinados por la fórmula

$$p!\,c_p = hD^p x.$$

En efecto, basta aplicar sucesivamente los hD^p con $|p|\leq r$ y usar 2.4.6 c) con $\varphi(t)=\sum_{|p|\leq r} c_p(t-h(x))^p$

Consideremos ahora el siguiente diagrama de álgebras:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "T"] \arrow[d] & A \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathcal{E}_n \arrow[r, "T_0"] \arrow[ddr, bend right] & A/P(h_0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & A/M(h_0) \arrow[dl, "\alpha"'] \\
& \widehat{A/P(h_0)} \arrow[d, "\hat{T}_0"] & \\
& \mathcal{F}_n \arrow[uur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Las flechas sin nombre son las evidentes, $\widehat{A/P(h_0)}$ es el completado separado de $A/P(h_0)$ para la topología $M(h_0)/P(h_0)$-ádica, α es el morfismo que resulta de la igualdad $\widehat{A/P(h_0)}=\varprojlim A/M(h_0)^r$; la existencia de T_0 resulta de 2.4.6 a) y es evidente que

T_0(germen de t_i en 0) $=$ clase módulo $P(h_0)$ de x_i

$\hat{T}_0$ se obtiene por la continuidad de T_0 ya que $\mathcal{F}_n=\hat{\mathcal{E}}_n$; finalmente como el núcleo de πT_0 es $\mathcal{M}_n^\infty$ (2.4.7) esto nos permite definir un morfismo inyectivo $u:\mathcal{F}_n\longrightarrow A/M(h_0)^\infty$

2.4.11 Proposición

Con la notación anterior $\hat{T}_0$, α y u son isomorfismos.

Demostración: α es trivialmente inyectivo; como $M_{h_0} \approx \approx \mathrm{rad}(A/P(h_0))$ es generado por las clases de los x_i, $\hat{T}_0$ es suryectivo; de la igualdad $\alpha u = \hat{T}_0$ sale la suryectividad de α ; para obtener lo pedido resta notar que u es inyectivo.

2.5 Estructura de variedad de X(A)

En todo este parágrafo seguiremos con las notaciones e hipótesis anteriores. Sea V un entorno abierto relativamente compacto de h_0 con clausura contenida en U tal que $h(a)=1$ si $h\in \bar{V}$ (recordemos que a ha sido definido en 2.4.1). Llamemos I al ideal definido por $\bar{V}$, esto es, $I = \{ x\in A: \hat{x}|\bar{V}= 0\}$ y B al álgebra A/I. Entonces $X(B)= \bar{V}$ y así B es a inversa continua (1.2.2 y 1.5). Indicaremos con $\bar{x}$ a la imagen en B de cada $x \in A$.

2.5.1 Lema

i) si $x\in I$ y $D\in \mathrm{Der}(A)$ entonces $Dx \in I$

ii) si $x\in A$ $D_iD_jx - D_jD_ix\in I$ para todo i, j

iii) si $h\in \bar{V}$ $I\subset M(h)^r$ para cada $r\geq 1$.

Demostración:

i) si $x\in I$ entonces $\hat{x}|V= 0$ y por 1.13.1 resulta $\widehat{Dx}|V =0$; por continuidad $\widehat{Dx}|\bar{V}=0$ de modo que $Dx \in I$;

ii) evidente por 2.4.1 g);

iii) en virtud de 2.4.9 bastará probar que para todo p $hD^px= 0$ si $x\in I$ y $h\in \bar{V}$; por continuidad es suficiente probarlo para $h\in V$, pero en este caso $x\in P(h)$ y basta apelar a 1.9.8 b).

En vista de lo anterior se puede definir una aplicación A-lineal $\mathrm{Der}(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(B)$ $D\longmapsto \bar{D}$ con $\bar{D}(\bar{a})=\overline{Da}$

En particular, por 2.4.1 h) $\overline{D_i}(\overline{x_k}) = \delta_{ik}$ $1 \le i,k \le n$, de donde se deduce que $\overline{D_i D_j} = \overline{D_j D_i}$, $1 \le i,j \le n$ y esto permite definir sin ambigüedad, como en 2.4.5 $\overline{D}^p : B \longrightarrow B$, para cualquier p.

De manera general, si A es un álgebra de Fréchet consideraremos a $A \otimes A$ como A-módulo vía el morfismo $a \mapsto a \otimes 1$.

2.5.2 Proposición

i) El ideal generado por los elementos

$$1 \otimes x_i - x_i \otimes 1, \; 1 \otimes y_k - y_k \otimes 1 \qquad 1 \le i \le n, \; 1 \le k \le m$$

es denso en la diagonal Δ_A

ii) $\Omega(A)$ es generado por los elementos dx_i, dy_k

Demostración:

i) consideremos la sucesión exacta $0 \to D_A \to A \otimes A \to A \to 0$.
Es sabido que Δ_A es la clausura de D_A ([26], III 1.2) de modo que es suficiente probar que el ideal generado por aquellos elementos es denso en D_A; ahora bien, D_A es generado por los elementos $1 \otimes a - a \otimes 1$ para $a \in A$, y como los x_i, y_k generan una subálgebra densa de A, existe una sucesión de polinomios p_r en n+m variables tal que $a = \lim p_r(x, y)$; así, cada $1 \otimes a - a \otimes 1$ es límite de elementos de $A \otimes A$ de la forma $p(1 \otimes x, 1 \otimes y) - p(x \otimes 1 - y \otimes 1)$ y basta probar que éstos están en el ideal del enunciado i). Existen polinomios Q_i, S_j en 2(n+m) variables tales que

$$p(t,s) - p(t',s') = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t,s,t',s')(t_i - t'_i) + \sum_{j=1}^{m} S_j(t,s,t',s')(s_j - s'_j)$$

y el resultado sigue sustituyendo $t_i \mapsto 1 \otimes x_i$, $s_j \mapsto 1 \otimes y_j$, $t'_i \mapsto x_i \otimes 1$, $s'_j \mapsto y_j \otimes 1$;

ii) por i) el submódulo de $\Omega(A)$ generado por dx_i, dy_k es denso; basta entonces aplicar 1.11.2 d).

2.5.3 Proposición

i) la diagonal Δ_B es generada por los elementos $1\otimes\overline{x_i} - \overline{x_i}\otimes 1$, $1\otimes\overline{y_k} - \overline{y_k}\otimes 1$

ii) $\Omega(B)$ es un B-módulo libre de base $d\overline{x_i}$, $1\leq i\leq n$

Demostración:

i) consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D_A & \longrightarrow & A\otimes A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D_B & \longrightarrow & B\otimes B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

como $A\to B$ es suryectivo y como D_B es generado, como B-módulo, por $\{1\otimes b - b\otimes 1 : b\in B\}$ $D_A\longrightarrow D_B$ es un epimorfismo; por otro lado, $B\otimes B$ es un cociente de $A\otimes A$ (algebraica y topológicamente) de donde D_B es cociente de D_A (algebraica y topológicamente) y al pasar a los completados obtenemos un epimorfismo $\Delta_A\longrightarrow\Delta_B$ y Δ_B es un $B\otimes B$-módulo de tipo finito (recordar la hipótesis iv) de 2.2.1 sobre Δ_A); basta ahora combinar 2.5.2 i) con 1.11.2 c).

ii) tenemos una sucesión exacta

$$0\longrightarrow I.\Omega(A)\longrightarrow\Omega(A)\longrightarrow B\underset{A}{\otimes}\Omega(A)\longrightarrow 0$$

(1.12.3) y un epimorfismo de A-módulos $j: B\underset{A}{\otimes}\Omega(A)\longrightarrow\Omega(B)$ determinado por $j(b\otimes d_A x)=b.d_B\overline{x}$ para $b\in B$, $a\in A$ ([26], III 1.4). De esto y de 2.5.2 ii) resulta que los elementos dx_i, dy_k generan el B-módulo $\Omega(B)$; pero como $a.dy_k=a.\sum_j D_j y_k.dx_j$ $1\leq k\leq m$ (2.4.1 h)) y como $\overline{a}=1$, resulta $d\overline{y_k}=\sum_j \overline{D_j y_k}.d\overline{x_j}$ $1\leq k\leq m$ y entonces los $d\overline{x_i}$ generan $\Omega(B)$; supongamos que existen $b_i\in B$ tales que $\sum_{i=1}^{n} b_i d\overline{x_i}=0$ y apliquemos las derivaciones $\overline{D_k}$ de B recordando que $\langle\overline{D_k}, d\overline{x_i}\rangle = D_k x_i = \delta_{ik}$; esto nos da $b_i=0$, $1\leq i\leq n$ y todo queda probado.

Se deduce de lo anterior que existe una matriz $(c_{ik})\in B^{m\times n}$ tal que $dy_j=\sum_k c_{jk}dx_k$ $1\leq j\leq m$ (claramente $c_{ik}=D_k y_i$, $1\leq i\leq m$, $1\leq k\leq n$).

Consideremos el epimorfismo $B^{n+m}\to\Omega(B)$ determinado sobre la base canónica por $e_i \mapsto d\overline{x_i}$, E $e'_k \mapsto d\overline{y_k}$, $1 \leq i \leq n$ $1 \leq k \leq m$. Obtenemos entonces una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B^{n+m} \longrightarrow \Omega(B) \longrightarrow 0$$

2.5.4 Lema

N es un B-módulo libre de base $e'_j - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}e_k$, $1 \leq j \leq m$.

Demostración: inmediata a partir de la definición.

2.5.5 Proposición

$\Delta_B^{\,2}$ es cerrado en $B\hat{\otimes}_\tau B$ y $\Omega(B) = \Delta_B/\Delta_B^{\,2}$

Demostración: la aplicación natural $i: \Delta_B/\Delta_B^{\,2} \longrightarrow \Omega(B)$ es un epimorfismo de B-módulos.

Definamos una aplicación B-lineal $v: B^{n+m} \longrightarrow \Delta_B$ por $v(e_i) = 1\otimes\overline{x_i} - \overline{x_i}\otimes 1$, $v(e'_j) = 1\otimes\overline{y_j} - \overline{y_j}\otimes 1$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

Veamos primero que $v(N) \subset \Delta_B^{\,2}$. Para esto basta probar que para todo j $v(e'_j - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}e_k) = 1\otimes\overline{y}_j - \overline{y}_j\otimes 1 - \sum_{k=1}^{n}\overline{D_k(y_j)}(1\otimes\overline{x}_k - \overline{x}_k\otimes 1) \in \Delta_B^{\,2}$.

Esto sigue inmediatamente pues por 2.4.1 h)

$$a(1\otimes y_j - y_j\otimes 1) - a\cdot\sum D_k y_j.\ (1\otimes x_k - x_k\otimes 1) \in \Delta_A^{\,2}$$

y porque $\Delta_A^{\,2}$ es cerrado, por 2.2.1 iv).

La relación $v(N) \subset \Delta_B^{\,2}$ nos permite obtener un diagrama conmutativo; para probar que $\overline{v}$ es suryectivo, alcanza con probar que $\Delta_B = \Delta_B^{\,2} + \operatorname{im} v$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & B^{n+m} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \Omega(B) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{v}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta_B^2 \arrow[r] & \Delta_B \arrow[r] & \Delta_B/\Delta_B^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pero si definimos $w: A^{n+m} \longrightarrow \Delta_A$ por $w(e_i) = 1\otimes x_i - x_i\otimes 1$ $w(e'_j) = 1\otimes y_j - y_j\otimes 1$ y demostramos $\Delta_A = \Delta_A^2 + \operatorname{im} w$ la otra igualdad será evidente; tomemos entonces $x \in \Delta_A$ y escribamos la imagen de x en $\Omega(A) = \Delta_A/\Delta_A^{\,2}$ en la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i.dx_i + \sum_{j=1}^{m} a'_j.dy_j$ para ciertos a_i, $a'_j \in A$ (2.5.2 ii)); tenemos así

$x - \sum_{i=1}^{n} a_i(1\otimes x_i - x_i\otimes 1) - \sum_{j=1}^{m} a'_j(1\otimes y_j - y_j\otimes 1) \in \Delta_A^{\,2}$ y hemos probado que $\overline{v}$ es suryectivo.

Los epimorfismos $\overline{v}: \Omega(B) \longrightarrow \Delta_B/\Delta_B^{\,2}$, $i: \Delta_B/\Delta_B^{\,2} \longrightarrow \Omega(B)$ son tales que son tales que $i\bar{v}$ es un isomorfismo; así, $\bar{v}$ es inyectiva y por lo anterior un isomorfismo, lo mismo que i (cf. 2.5.3 ii)).

2.5.6 Proposición

Existe un isomorfismo de B-álgebras graduadas
$\mu : B[T_1,\ldots,T_n] \longrightarrow gr_{\Delta_B}(B\hat{\otimes}_{\pi}B) = \bigoplus_{r\geq 1}\Delta_B{}^r/\Delta_B{}^{r+1}$
unívocamente determinado por la condición $\mu(T_i) = 1\otimes\bar{x}_i - \bar{x}_i\otimes 1$

Demostración: en primer lugar, como $gr_{\Delta_B}(B\hat{\otimes}_{\pi}B)_1 = \Delta_B/\Delta_B{}^2$ por 2.5.5 y 2.5.3 ii) $gr_1(\mu)$ es un isomorfismo y por lo tanto μ es un epimorfismo. Consideremos $h\in\bar{V}$ y sea $i_h: B\hat{\otimes}_{\pi}B \longrightarrow B$ el morfismo definido por $i_h(x\otimes y) = h(x)y$, es decir, $i_h = h\otimes 1_B$
Tenemos así un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
B[T_1,\ldots,T_n] & \xrightarrow{\mu} & gr_{\Delta_B}(B\hat{\otimes}B) \\
\alpha\downarrow & & \downarrow gr(i_h) \\
Q[t_1,\ldots,t_n] & \xrightarrow{\bar{\tau}_h'} & gr_{M(h)}(B) \\
 & \bar{\tau}_h\searrow \quad \nearrow\pi_h & \\
 & gr_{M(h)}(A) &
\end{array}$$

donde α es el morfismo definido por $\alpha(b) = h(b)$, $\alpha(T_i) = t_i$, $gr(i_h)$ es inducido por i_h, ya que $i_h(\Delta_B) = M(h)$ (2.5.3 i), 2.3.2) π_h está definido en forma evidente vía $\pi: A\longrightarrow B$, $\bar{\tau}_h$ es como en 2.4.8 y por lo tanto un isomorfismo, y $\bar{\tau}_h'$ se define análogamente poniendo $\bar{\tau}_h'(t_i) =$ clase módulo $M(h)^2$ de x_i.

Gracias a 2.5.1 iii) π_h es un isomorfismo y por 2.4.8 también $\bar{\tau}_h'$. Sea $P = \sum_{|p|=m} b_p T^p$ $Ker(gr_m(\mu))$, $m\geq 1$; entonces
$\sum_{|p|=m} b_p(1\otimes x_1 - x_1\otimes 1)^{p_1}\ldots(1\otimes x_n - x_n\otimes 1)^{p_n} = 0$
y aplicando $gr_m(i_h)$ queda
$\sum_{|p|=m} h(b_p)(\bar{x} - h(\bar{x}))^p = 0$. Por lo dicho antes queda $h(b_p) = 0$, ya que π_p es un isomorfismo. Como esto vale para todo $h\in\bar{V} = X(B)$ resulta $b_p = 0$ para todo p, de donde $P = 0$ y concluimos.

2.5.7 Corolario

Para cada $a \in B\hat{\otimes}_{\pi} B$ existe una única familia $(R_p(a))_p$ de elementos de B tal que

$$a - \sum_{|p|\leq m} R_p(a)(1\otimes x_1 - x_1\otimes 1)^{p_1}\dots(1\otimes x_n - x_n\otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

para todo $m \geq 0$.

La aplicación $\sigma : B\hat{\otimes}_{\pi} B \longrightarrow B[[T_1,\dots,T_n]]$ definida por $\sigma(a) = \sum R_p(a) T^p$ es un morfismo de B-álgebras con núcleo Δ_B^{∞}.

2.5.8 Observaciones

a) Para explicitar los coeficientes $R_p(a)$ aplicamos i_h y comparando con 2.4.10, obtenemos $h(R_p(a)) = h\bar{D}^p(i_h(a))/\ p!$ para cada $h \in \bar{V}$. En particular, si $a = 1\otimes x$ resulta $i_h(a) = x$ y entonces $R_p(1\otimes x) = \bar{D}^p x/\ p!$; por el contrario, si $a = x\otimes 1$ es $i_h(a) = h(x)$ y $R_p(x\otimes 1) = 0$ si $|p| > 0$, $R_0(x\otimes 1) = x$.

b) Para cada $x \in B$ y cada $m \geq 0$ resulta

$$1\otimes x - \sum_{|p|\leq m} \frac{\bar{D}^p x}{p!}(1\otimes x_1 - x_1\otimes 1)^{p_1}\dots(1\otimes x_n - x_n\otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

c) Si en b) reemplazamos x por $\bar{D}^q x$ y m por $m - |q|$

$$1\otimes \bar{D}^q x - \sum_{|q|+|p|\leq m} \frac{\bar{D}^{p+q} x}{p!}(1\otimes x_1 - x_1\otimes 1)^{p_1}\dots(1\otimes x_n - x_n\otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

para todo $m \geq 0$ y todo q con $|q| < m+1$.

Consideremos la aplicación continua

$$\eta : X(A) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \qquad \eta(h) = (h(x_1),\dots,h(x_n),h(y_1),\dots,h(y_m))$$

η es inyectiva ya que los polinomios en x_i, y_k son densos en A. Sea K el compacto $\eta(\bar{V})$; entonces tenemos, por restricción, un homeomorfismo $j : \bar{V} \longrightarrow K$ que induce un isomorfismo de álgebras de Banach $^t j : C(K) \longrightarrow C(\bar{V}) = C(X(B))$ (recordar que $^t j(\varphi) = \varphi j$) Utilizando la transformación de Gelfand $g_B : B \longrightarrow C(\bar{V})$, que es inyectiva, definimos un morfismo inyectivo $f : B \longrightarrow C(K)$ por la fórmula $^t jf = g_B$; esto nos permite representar a cada elemento $b \in B$ como una función continua $f(b) : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Vamos a probar que las funciones $f(b)$ son de clase C^∞, es decir, para cada $b\in B$ existe $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ tal que $\varphi|K=f(b)$. Para ello, basta probar que hay un jet de orden m $F=(F^k)_{|k|\leq m}\in \mathcal{E}^m(K)$ con $F^0=f(b)$ (con la notación de [19], ch.I).

Definamos un morfismo de álgebras

$$F: B \longrightarrow C(K)[[t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_m]]=J(K)$$

$$F(b)=\sum \frac{1}{p!}f(\bar{D}^p b)\ t^p$$

Sólo hay que verificar que para cada $m\geq 0$ el jet así definido está en $\mathcal{E}^m(K)$ (loc.cit. ch.I, 2.2, 2.3); esto es consecuencia de las identidades de 2.5.8 c) y del siguiente lema (cf.[26], III 3.1).

2.5.9 Lema

Para cada $a\in\Delta_B{}^r$ $(r\geq 1)$ definamos $f_a=(f\otimes f)(a): K\times K\longrightarrow\mathbb{R}$ Entonces existe una constante $c>0$ tal que

$$|f_a(v_1,v_2)|\leq c\,\|v_1-v_2\|^r \quad \text{si} \quad v_1,\ v_2\in K$$

Demostración: por 2.5.3 i) existen $c_p\in B\hat{\otimes}_\pi B$, $p=(p_1,\dots,p_{n+m})$ tales que $a=\sum_{|p|=r} c_p(1\otimes\bar{x}_1-\bar{x}_1\otimes 1)^{p_1}\dots(1\otimes\bar{x}_n-\bar{x}_n\otimes 1)^{p_n}.$

$$.(1\otimes\bar{y}_1-\bar{y}_1\otimes 1)^{p_{n+1}}\dots(1\otimes\bar{y}_m-\bar{y}_m\otimes 1)^{p_{n+m}}$$

Si observamos que $f(x_i)=t_i|K$, $f(y_k)=s_k|K$, la tesis resulta de la igualdad $f_a((t,s),(t',s'))=\sum_{|p|=r} g_p(t,t',s,s')(t-t')^p(s-s')^q$ donde $g_p=(f\otimes f)(c_p)$ y $q=(p_{n+1},\dots,p_{n+m})$. La constante c depende de $\sup_{|p|=r}\left\{\sup\left\{|g_p(t,s,t',s')| : (t,s),\ (t',s')\in K\right\}\right\}$

Conviene observar que si $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ corresponde a un $f(b)$, es decir, si $f(b)=\varphi|K$, entonces las derivadas parciales de φ restringidas a K son exactamente los $F^p(b)$, esto es, la serie de Taylor de φ sobre K coincide con $F(b)$.

Consideremos ahora el cálculo operacional C^∞

$T'': C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})\longrightarrow B \qquad T''(t_i)=x_i,\ T''(s_k)=y_k \quad 1\leq i\leq n,\ 1\leq k\leq m$

2.5.10 Corolario

T'' es un epimorfismo

Demostración: si $b \in B$, $f(b) = \varphi|K$ para alguna $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ y como obviamente $fT''(\varphi) = \varphi|K$ resulta $b = T''(\varphi)$.

2.5.11 Proposición

$T_0 : \hat{\mathcal{E}}_n \longrightarrow A/P(h_0)$ es un isomorfismo (cf. 2.4.10)

Demostración: definamos el cálculo operacional C^∞ sobre A $T' : C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) \longrightarrow A$ por $T'(t_i) = x_i$, $T'(s_k) = y_k$. Nótese que $\pi T' = T''$. de modo que T' es suryectivo por 2.5.10. Como el ideal I que define a B está contenido en $P(h_0)$, el morfismo $B \longrightarrow A/P(h_0)$ es suryectivo por lo que la composición $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}) \xrightarrow{T'} A \longrightarrow A/P(h_0)$, que llamamos F, es suryectivo e induce un epimorfismo $F_0 : \hat{\mathcal{E}}_{n+m} \longrightarrow A/P(h_0)$. Entonces $A/P(h_0)$ es un álgebra diferenciable, en el sentido de [19], ch III 2.2. Llamando p a la proyección de $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{E}}_n \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, equal] & \hat{\mathcal{E}}_{n+m} \arrow[d, "F_0"] \\
\hat{\mathcal{E}}_n \arrow[r, "T_0"] & A/P(h_0)
\end{tikzcd}$$

lo que significa que T_0 es un morfismo de álgebras diferenciables. Como $\hat{T}_0$ es un isomorfismo (2.4.11) la tesis resulta de [19], ch V 4.4.

2.5.12 Corolario

Existen un entorno W de h_0 y $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $1 \leq k \leq m$ tales que $\hat{y}_k = T(\varphi_k)$ sobre W para cada k.

2.5.13 Lema ([3], Prop.1)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y sea A' una subálgebra de $C(\Omega)$ que verifica;

1. $u_i = t_i|\Omega \in A'$ $, 1 \leq i \leq n$

2. para cada $s \in \Omega$ el ideal maximal $\{\varphi \in A' : \varphi(s) = 0\}$ es generado por $u_i - s_i$ $1 \leq i \leq n$

3. existen $\delta_i \in Der(A')$ $1 \leq i \leq n$ tales que $\delta_i(u_j) = \delta_{ij}$. Entonces $A' \subset C^\infty(\Omega)$ y $\delta_i = \partial / \partial t_i$ $1 \leq i \leq n$

Sea A un álgebra de Fréchet que verifica las condiciones i), ii) y v) de 2.2.1; incluso con menos hipótesis es posible definir un haz $\mathcal{A}$ sobre el espacio X(A) cuyas secciones globales coinciden con A. Para ello se considera para cada abierto $U \subset X(A)$ el conjunto multiplicativo $S_U = \{a \in A : h(a) \neq 0 \text{ si } h \in U\}$ y se define

$\mathcal{A}(U) = A[S_U^{-1}]$ (álgebra de fracciones de A definida por S_U) Es un hecho conocido que esto define un haz ([26], I 2), así como que cada $\mathcal{A}(U)$ admite una topología de álgebra de Fréchet formalmente real. También se puede probar que $\mathcal{A}(U)$ puede describirse como el conjunto de aplicaciones $U \longrightarrow \mathbb{R}$ que coinciden localmente con funciones de la forma $\hat{a}|U$ $(a \in A)$. La aplicación natural $A \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ $a \longmapsto a/1$ induce un homeomorfismo $X(\mathcal{A}(U)) \longrightarrow U$. Mencionemos que para cada abierto $U \subset X(A)$ hay una aplicación A-lineal $Der(A) \longrightarrow Der(\mathcal{A}(U))$ $D \longmapsto D|U$ definida por la fórmula

$$D|U\ (a/b) = (bDa - aDb)/\ b^2$$

2.5.14 Teorema

Sea A un álgebra que verifica las condiciones i)-vii) de 2.2.1. Existe entonces una única estructura de variedad diferenciable en X(A) tal que la transformación de Gelfand g_A induce un isomorfismo $g : A \longrightarrow C^\infty(X(A))$.

Dem: por 2.1.3 la unicidad es clara; veamos la existencia. En primer lugar $X_0 = \{h \in X(A) : \rho(h) = 0\}$ es un subespacio discreto abierto y cerrado de X(A) (2.3.4) y no hay dificultad en dotar a X_0 de una estructura de variedad de dimensión 0. El problema reside en los puntos de $X - X_0$. Para tratar este caso puede suponerse que X_0 es vacío. Construimos un haz como antes, que llamamos $\mathcal{A}$.

Sea $h_0 \in X(A)$. Por 2.5.12 puede suponerse que hay un entorno W de h_0 y funciones $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $\hat{y}_k = \widehat{T(\varphi_k)}$ en W. Sea U un entorno abierto relativamente compacto de h_0 con clausura contenida en W tal que $\theta|U: U \longrightarrow E_t(0)$ es suryectiva para un cierto $t > 0$ (2.4.4) y tal que $\bar{U} \subset U_0$ (2.4.2). Para probar que $\theta|U; U \longrightarrow E_t(0)$ es un homeomorfismo basta probar que $\theta|W$ es inyectiva; supongamos que $h_1(x_i) = h_2(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, para ciertos $h_1, h_2 \in W$; entonces

$$h_1(y_k) = \varphi_k(h_1(x_1),\ldots,h_2(x_n)) = \varphi_k(h_2(x_1),\ldots,h_2(x_n)) = h_2(y_k)$$

y por 2.4.1 b) debe ser $h_1 = h_2$.

Probaremos ahora que si $V \subset U$ es abierto y $h \in V$ entonces el ideal $M(h)$ de $\mathcal{A}(V)$ es generado por $x_i/1 - h(x_i)$, $1 \leq i \leq n$.
Es evidente que $M(h)$ es generado por $x_i/1 - h(x_i)$, $y_k/1 - h(y_k)$, así que basta ver que cada $y_k/1 - h(y_k)$ está en el ideal generado por los $x_i/1 - h(x_i)$. Sabemos que $y_k = T(\varphi_k) + a_k$ con $\hat{a}_k|W = 0$. Sea $s \in A$ tal que $sa_k = 0$, $1 \leq k \leq m$, $\hat{s}|\bar{U} = 1$, $\hat{s}|X(A)-W = 0$. Entonces $s/1 = 1$ en $\mathcal{A}(V)$ y $a_k/1 = 0$ en $\mathcal{A}(V)$, si V es como en la hipótesis. Sea $w = \theta(h)$. Entonces $\varphi_k - \varphi_k(w) = \sum_{j=1}^{n} \psi_{kj}(t_j - w_j)$, $1 \leq k \leq m$, para ciertas $\psi_{kj} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto

$$y_k - h(y_k) - a_k = T(\varphi_k) - hT(\varphi_k) = T(\varphi_k) - T(\varphi_k(w)) = T(\varphi_k - \varphi_k(w))$$
$$= \sum_{j=1}^{n} T(\psi_{kj})(x_j - h(x_j))$$

Lo afirmado resulta aplicando el morfismo $A \longrightarrow \mathcal{A}(V)$ $x \longmapsto x/1$.

Sea $V \subset U$ un abierto no vacío, $\Omega = \theta(V)$ y consideremos $\theta_0^*: C^\infty(\Omega) \longrightarrow C(V)$ $\theta_0^*(\varphi) = \varphi\theta$. Probaremos que ésta es una biyección sobre $\mathcal{A}(V)$. Para ello, consideremos el cálculo operacional $T: C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow A$ definido por $T(t_i) = x_i$ $1 \leq i \leq n$ y sean S_Ω, S_V los correspondientes conjuntos multiplicativos de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y A. Es evidente que $T(S_\Omega) \subset S_V$ y queda entonces inducido un único morfismo T_V que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{T} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{T_V} & \mathcal{A}(V) \end{array}$$

(la primera flecha vertical proviene de la igualdad $C^\infty(\mathbb{R}^n)[S_\Omega^{-1}] = C^\infty(\Omega)$). Si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ existen $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_2 \in S_\Omega$ tales que $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, de modo que, para cada $h \in V = X(\mathfrak{a}(V))$

$$\widehat{T_V(\varphi)}(h) = (\widehat{T(\varphi_1)/T(\varphi_2)})(h) = hT(\varphi_1)/hT(\varphi_2) = \varphi_1(\theta(h))/\varphi_2(\theta(h))$$
$$= \varphi(\theta(h)),$$

y hemos probado así que $T_V = \theta_0^*$; en consecuencia $\theta_0^*(C^\infty(\Omega)) \subset \mathfrak{a}(V)$ y probaremos que, en realidad, vale la igualdad.

Para cada $a \in \mathfrak{a}(V)$ definimos $f(a) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(a)(\theta(h)) = h(a)$ (recordemos que $\theta|V : V \longrightarrow \Omega$ es un homeomorfismo). Tenemos entonces un morfismo inyectivo $f : \mathfrak{a}(V) \longrightarrow C(\Omega)$ con imagen A', que cumple las hipótesis de 2.5.13:

1. $f(x_i/1) = t_i|\Omega \quad 1 \leq i \leq n$
2. $a \in M(h) \Leftrightarrow f(a)(w) = 0$
3. sean $D_i \in \mathrm{Der}(A)$ tales que $\widehat{D_i x_k}|U = \delta_{ik}$; entonces $\delta_i : A' \longrightarrow A'$

definida por $\delta_i(f(a)) = f(D_i|U(a))$.

Por 2.5.13 $A' \subset C^\infty(\Omega)$ así que $f : \mathfrak{a}(V) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ es un morfismo inyectivo; pero $\theta_0^* f = 1_{\mathfrak{a}(V)}$ pues para cada $h \in V$

$$\theta_0^*(f(a)(h)) = f(a)(\theta(h)) = \hat{a}(h),$$

por lo que $\theta_0^* : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{a}(V)$ es un isomorfismo.

De lo probado resulta que es posible definir en $X(A)$ una estructura de variedad diferenciable tal que para cada abierto $U \subset X(A)$ el álgebra $C^\infty(U)$ se identifica con $\mathfrak{a}(U)$, y entonces la tesis es evidente.

2.5.15 Observación

Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es una aplicación diferenciable, obtenemos un morfismo ${}^t\varphi : B \longrightarrow A$; la diferencial usual de φ en $h \in X = X(A)$ se identifica con la aplicación lineal inducida por ${}^t\varphi$

$$(M(h)/M(h)^2)^* \longrightarrow (M(\varphi(h))/M(\varphi(h))^2)^*$$

2.5.16 Conclusión

La categoría de las C^∞-álgebras se identifica con la suboategoría plena de la categoría de álgebras reales, formada por las álgebras topológicas que verifican i)-vii) de 2.2.1. Los funtores

$$X \longrightarrow C^\infty(X) \ , \ (\varphi : X \longrightarrow Y) \longrightarrow ({}^t\varphi : C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X))$$

$$A \longrightarrow X(A) \ , \ (f : A \longrightarrow B) \longrightarrow (f^t : X(B) \longrightarrow X(A))$$

establecen una equivalencia entre esta categoría y la de variedades diferenciables.

2.6 Compactificaciones diferenciables

Es un hecho conocido que la teoría de álgebras de Banach permite "algebrizar" el problema de caracterizar las compactificaciones de un espacio completamente regular X. Más precisamente, hay una correspondencia biyectiva entre compactificaciones de X y subálgebras separadoras cerradas de $BC(X) = \{\varphi \in C(X);\ \varphi \text{ es acotada}\}$ (ver, por ejemplo, [16], Algèbres de Banach Commutatives, § 8.1)

En este parágrafo probaremos que la teoría de las C^∞-álgebras permite establecer una correspondencia análoga entre las compactificaciones diferenciables de una variedad X (definidas en 2.6.5) y ciertas subálgebras de $C^\infty(X)$.

Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo de C^∞-álgebras. Por 2.5.15 su traspuesta $f^t: X(B) \longrightarrow X(A)$ es una aplicación diferenciable cuya diferencial en $h \in X(B)$ se obtiene así:

como $M(f^t(h)) = \{ a \in A : \hat{a}(f^t(h)) = 0\} = \{ a \in A : \widehat{f(a)}(h) = 0\}$,vale $f(M(f^t(h))) \subset M(h)$ y $f(M(f^t(h))^2) \subset M(h)^2$; llamando f_h a la restricción de f a $M(f^t(h))$ obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M(f^t(h)) & \xrightarrow{f_h} & M(h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(f^t(h))/M(f^t(h))^2 & \xrightarrow{\bar{f}_h} & M(h)/M(h)^2 \end{array} \qquad (@)$$

y la aplicación lineal tangente de f^t en h es la traspuesta de la aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\overline{f_h}$.

Esta observación permite formular en el lenguaje de C^∞-álgebras las propiedades locales de una aplicación diferenciable (cf.[13], ch.XVI)

2.6.1 Proposición

Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo de C^∞-álgebras y sea $f^t: X(B) \longrightarrow X(A)$ la aplicación diferenciable asociada. Entonces

a) f^t es una inmersión si y sólo si para cada $h \in X(B)$
$$M(h) = f(M(f^t(h))) + M(h)^2$$

b) f^t es una sumersión si y sólo si para cada $h \in X(B)$
$$f_h^{-1}(M(h)^2) = M(f^t(h))^2$$

La demostración de ambas afirmaciones resultan del diagrama (@) y del hecho que la diferencial de f^t en h es inyectiva (resp. suryectiva) si y sólo si $\overline{f_h}$ es suryectiva (resp.inyectiva)

Para lo que sigue conviene tener presente las definiciones de subálgebras y morfismos separadores (1.8)

2.6.2 Teorema

Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo de C^∞-álgebras. Entonces

a) f es separador si y sólo si f^t es un homeomorfismo sobre su imagen

b) f en inyectiva si y sólo si la imagen de f^t es densa en X(A)

c) f es suryectiva si y sólo si f^t es una inmersión regular sobre una subvariedad cerrada de X(A)

Demostración:

a) si f es separador entonces es inyectiva (1.8.1); basta probar que para cada cerrado $F \subset X(B)$ vale $f^t(F) = \operatorname{im} f^t \cap \overline{f^t(F)}$. Si $h \in X(B)-F$ entonces $f^t(h) \in \operatorname{im} f^t - f^t(F)$; entonces si f(a) separa a F de h tendremos $\widehat{f(a)}(h) = \hat{a}(f^t(h)) = 1$, $\hat{a}|f^t(F) = 0$ y por la continuidad de $\hat{a}$ es $\hat{a}|\overline{f^t(F)} = 0$, lo que prueba que $f^t(h) \notin \overline{f^t(F)}$. Recíprocamente si f^t es un homeomorfismo y $F \subset X(B)$ para cada $h \in X(B)-F$ es $f^t(h) \in \operatorname{imm} f^t - \overline{f^t(F)}$, de modo que si $a \in A$

separa $f^t(F)$ de $f^t(h)$ es claro que $f(a)$ separa a F de h.

b) Recordemos que una inmersión $\psi : X \longrightarrow Y$ es regular si ψ es un homeomorfismo sobre su imagen; ello implica automáticamente que $\mathrm{im}\,\psi$ es una subvariedad de Y y que $\psi : X \to \mathrm{im}\,\psi$ es un difeomorfismo (loc.cit.)

Llamemos I al núcleo de f. Claramente la cápsula de I conicide con la clausura de $\mathrm{im}\, f^t$ para la topología Zariski. Como A es fuertemente regular $\overline{\mathrm{im}\, f^t} = \{ h \in X(A) : I \subset M(h) \}$ con lo que concluimos, ya que A es semisimple.

c) Una afirmación es conocida ("teorema de Tietze diferenciable"); para la otra notemos en primer lugar que, por gráfico cerrado, B se identifica con el cociente A/I. De esto resulta que f^t es un homeomorfismo sobre h(I). La regularidad de A prueba la primera parte. Para ver que f^t es una inmersión, como f es suryectiva resulta $f(M(f^t(h))) = M(h)$ y basta aplicar 2.6.1 a).

2.6.3 Proposición

Si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo de C^∞-álgebras son equivalentes:

a) f^t es una inmersión regular

b) $\mathrm{im}\, f \supset B_0$ (cf. 1.8.1 iv))

c) im f es una subálgebra separadora y densa de B

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b) Con identificaciones evidentes es suficiente probar que si Y es una subvariedad de X entonces toda aplicación con soporte compacto $\varphi \in C^\infty(Y)$ admite una extensión $\tilde{\varphi} \in C^\infty(X)$. Esto es evidente si Y es cerrada o abierta; en general también es claro pues Y es una subvariedad cerrada de una subvariedad abierta

b) $\Rightarrow$ c) Evidente (1.8.1)

c) $\Rightarrow$ a) Por 2.6.2 f^t es un homeomorfismo sobre la imagen y sólo falta ver que es una inmersión, o sea que para todo $h \in X(B)$ $\overline{f_h}$ es un epimorfismo (2.6.1). Como $M(h)/M(h)^2$ tiene dimensión finita basta probar que la imagen de $\overline{f_h}$ es densa. Esto es consecuencia de un hecho más fuerte: para cada $h \in X(B)$ $f_h(M(f^t(h))) = M(h) \cap \operatorname{im} f$ es denso en $M(h)$. Esto último se prueba a partir del

2.6.4 Lema

Sean E un espacio vectorial real localmente convexo, H un hiperplano cerrado de E y S un subespacio vectorial denso. Entonces $H \cap S$ es denso en H.

Demostración: sea $h: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal continua con núcleo H; pongamos $E^+ = h^{-1}((0,+\infty))$, $E^- = h^{-1}((-\infty,0))$.
Si $x_0 \in H$ y U es un entorno de 0, existe un entorno convexo V de 0 tal que $V \subset 1/2\, U$. También existen s_1, $s_2 \in S$ tales que

$$s_1 \in (x_0 + V) \cap S \cap E^+, \quad s_2 \in (x_0 + V) \cap S \cap E^-.$$

Como consecuencia, existe un número t, $0 \leq t \leq 1$ tal que

$$s = ts_1 + (1 - t)s_2 \in H \cap S \quad \text{y entonces} \quad x_0 - s \in V + V \subset U.$$

Podemos pasar de inmediato al tema propuesto. Sea X una variedad diferenciable. Una <u>compactificación diferenciable</u> de X es un par (Y, α), siendo Y una variedad compacta y $\alpha: X \longrightarrow Y$ una inmersión regular con imagen densa

Como sólo usamos variedades localmente compactas, la imagen de α es un abierto denso de Y, de modo que la dimensión de X en x es igual a la dimensión de Y en $\alpha(x)$.

2.6.5 Teorema

Sean X una variedad diferenciable, A una C^∞-álgebra con un morfismo inyectivo $i: A \longrightarrow C^\infty(X)$. Entonces el par $(X(A), i^t)$ es una compactificación diferenciable de X si y sólo si

i) $i(A)$ es separadora y densa

ii) A es a inversa continua

La demostración, evidente a partir de 2.6.2 y 2.6.3, la omitimos.

Llamemos $\mathcal{B}$ a la clase de las subálgebras de $C^\infty(X)$ que verifican las condiciones de 2.6.5 y ordenémosla por inclusión. También llamemos $\mathcal{B}^*$ a la clase de las compactificaciones diferenciables de X y ordenémosla así: $(Y_1,\alpha_1)\leq(Y_2,\alpha_2)$ si y sólo si existe $\theta\in C^\infty(Y_2, Y_1)$ tal que $\theta\alpha_2=\alpha_1$. Diremos que son equivalentes si cada una es menor o igual que la otra.

2.6.6 Teorema

Para cada variedad diferenciable X las correspondencias

$\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}^*$ $\quad A\longrightarrow(X(A),i^t)$, $\quad\mathcal{B}^*\longrightarrow\mathcal{B}$, $(Y,\alpha)\longrightarrow A_{Y,\alpha}$,

donde $A_{Y,\alpha}=\{\psi\alpha\in C^\infty(X):\ \psi\in C^\infty(Y)\}$, conservan el orden. Además (Y_i,α_i) $i=1,2$ son equivalentes si y sólo si $A_{Y_1,\alpha_1}=A_{Y_2,\alpha_2}$

Demostración: si $A_1\leq A_2$ hay un diagrama conmutativo de C^∞-álgebras

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[d, "j"'] & \\ A_2 \arrow[r, "i_2"'] & C^\infty(X) \end{tikzcd}$$

que, al ser traspuesto, prueba que $j^t i_2{}^t=i_1{}^t$, de donde resulta $(X(A_1),i_1{}^t)\leq(X(A_2),i_2{}^t)$.

Recíprocamente, si $(Y_1,\alpha_1)\leq(Y_2,\alpha_2)$ con $\theta\in C^\infty(Y_2, Y_1)$ $\theta\alpha_2=\alpha_1$ se tiene $A_{Y_1,\alpha_1}=\{\psi\alpha_1\in C^\infty(X):\psi\in C^\infty(Y_1)\}=\{\psi\theta\alpha_2:\ \psi\in C^\infty(Y_1)\}\subset A_{Y_2,\alpha_2}$ y, en consecuencia, $(Y_1,\alpha_1)\sim(Y_2,\alpha_2)\Longleftrightarrow A_{Y_1,\alpha_1}\subset A_{Y_2,\alpha_2}\subset A_{Y_1,\alpha_1}$

2.6.7 Observación

Salvo equivalencias, las correspondencias anteriores son recíprocas una de otra. En efecto, si $A\in\mathcal{B}$ entonces a $(X(A),\ i^t)$ le corresponde $A_{X(A),i^t}=\{\psi i^t:\ \psi\in\hat{A}=C^\infty(X(A))\}=\{\hat{a}i^t:\ a\in A\}=\{\widehat{i(a)}:\ a\in A\}$ o sea que $A_{X(A),i^t}\approx g_A(A)$; análogamente si $(Y,\alpha)\in\mathcal{B}^*$ entonces a $A_{Y,\alpha}$ le corresponde la compactificación $(X(A_{Y,\alpha}),\ i^t)$ que es equivalente a (Y,α), ya que el morfismo $C^\infty(Y)\longrightarrow A_{Y,\alpha}$ $\psi\longmapsto\psi\alpha$ es un isomorfismo y se puede usar 2.1.1 y 2.1.3.

2.6.8 Ejemplo

Consideremos en $C^\infty(\mathbb{R})$ la derivación $D=(1/2)(1+t^2).d/dt$.

Sea $A=\{\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}) :$ para todo $n\geq 0$ $D^n\varphi$ es acotada$\}$. Las seminormas $p_n(\varphi)=\sup\{|D^n\varphi(t)| : t\in\mathbb{R}\}$ definen sobre A una estructura de álgebra de Fréchet a inversa continua. Las funciones $x(t)=2t/(1+t^2)$ $y(t)=(t^2-1)/(t^2+1)$ son elementos de A que, como verifican que $x^2+y^2=1$, inducen una aplicación continua $\theta : X(A)\rightarrow S^1$ por $\theta(h)=(h(x), h(y))$. Usando la proyección estereográfica $t\mapsto(x(t),y(t))$ resulta enseguida que $A=C^{\infty}(S^1)$, de modo que $(X(A), i^t)$ es una compactificación diferenciable de $\mathbb{R}$; obsérvese que la inclusión de A en $C^{\infty}(\mathbb{R})$ es separadora con imagen densa pues contiene a las funciones de $C^{\infty}(\mathbb{R})$ con soporte compacto.

2.7 Número de generadores topológicos de una C^{∞}-álgebra

Si A es una C^{∞}-álgebra y $h\in X(A)$ definimos

$\rho_A(h)=\dim_{\mathbb{R}} M(h)/M(h)^2$,

$m_A=\min\{n\in\mathbb{N} :$ existen $x_1,\dots,x_n$ que generan topológicamente $A\}$

$i_A=\min\{n\in\mathbb{N} :$ existe una inmersión regular de $X(A)$ en $\mathbb{R}^n\}$

Cabe señalar que el teorema de inmersión de Whitney muestra que i_A es finito.

2.7.1 Lema

Si A es una C^{∞}-álgebra $m_A=i_A\leq\rho_A(h)$ para cada $h\in X(A)$

Demostración: si hay una inmersión regular $\alpha: X(A)\rightarrow\mathbb{R}^n$ entonces las restricciones de las funciones coordenadas a $\alpha(X(A))$ generan topológicamente A, lo que prueba que $m_A\leq i_A$.
Si $\{x_1,\dots,x_r\}$ genera topológicamente A probaremos que la aplicación $\alpha : X(A)\rightarrow\mathbb{R}^r$ $\alpha(h)=(h(x_1),\dots,h(x_r))$ es una inmersión regular. Sea $f: C^{\infty}(\mathbb{R}^r)\longrightarrow A$ el morfismo determinado por las condiciones $f(t_i)=x_i$. Entonces $f^t=\alpha$ y basta probar, por 2.6.3, que $\operatorname{im} f\supset A_0$. Sea $\varphi=\hat{a}$ para $a\in A_0$. Multiplicando por una partición de la unidad adecuada podemos suponer que $\operatorname{sop}\varphi$ está contenido en un abierto coordenado U de X(A). Por 2.4.1 podemos elegir

$\{x_{i_1},\dots,x_{i_n}\}\subset\{x_1,\dots,x_r\}$, que por comodidad podemos suponer que son los n primeros, siendo $n=\rho_A(h)$ $(h\in U)$ tales que $(U,(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n))$ es un mapa de $X(A)$. Si $\theta=(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$ entonces $\varphi\theta^{-1}\in C(\theta(U))_0$ Como existe $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi=\varphi\theta^{-1}$ en $\theta(U)$. Se prueba así que $f(\psi)=\varphi$. La desigualdad $i_A\geqslant\rho_A(h)$ es trivial .

2.7.2 Corolario

a) $X(A)$ es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $n=\rho_A(h)=m_A$ para todo $h\in X(A)$

b) Si X es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{n+1}$ $m_{C^\infty}(X)=n$ ó $n+1$

c) Si X es una hipersuperficie compacta de $\mathbb{R}^{n+1}$ $m_{C^\infty}(X)=n+1$

Sólo A) requiere demostración; si $\{x_1,\dots,x_n\}$ genera topológicamente A entonces $h\longmapsto(h(x_1),\dots,h(x_n))$ es un difeomorfismo sobre una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión n. Por invariancia de dominio esta subvariedad debe ser un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 3

El álgebra de un fibrado vectorial

En este capítulo describiremos el álgebra del espacio de un fibrado vectorial en términos del álgebra de la base. Para ello necesitamos establecer algunos hechos referidos a álgebras de polinomios.

3.1 El álgebra $A[t_1,\dots,t_n]$

Sea A un álgebra topológica y denotemos A_n el álgebra de polinomios en n variables a coeficientes en A. En este parágrafo definiremos estructuras de álgebra topológica sobre A_n con ciertas propiedades que pasamos a especificar.

3.1.1 Es un hecho conocido que hay una biyección

$$\Theta : \mathrm{Real}(A_n) \longrightarrow \mathrm{Real}(A) \times \mathbb{K}^n$$

(recordar que Real(A) es el conjunto de morfismos de álgebra de A sobre $\mathbb{K}$) definido por $\Theta(\bar{h}) = (\bar{h}|A,\ (\bar{h}(t_1),\dots,\bar{h}(t_n)))$.
Si tuviéramos una estructura de álgebra topológica sobre A_n tal que Θ indujera un homeomorfismo de $X(A_n)$ sobre $X(A) \times \mathbb{K}^n$, podríamos afirmar que hemos obtenido el álgebra del fibrado vectorial trivial de rango n sobre X(A). La primera condición que exigiremos será entonces que valga la fórmula $X(A_n) \approx X(A) \times \mathbb{K}^n$.

3.1.2 La segunda condición será que la inclusión canónica de A en A_n sea continua. En términos de fibrados vectoriales equivale a exigir que la sección nula sea continua. De esta manera A_n será una A-álgebra topológica. Más generalmente pediremos que si $n \leq m$ entonces el morfismo $A_n \longrightarrow A_m$ es continuo.

3.1.3 Si bien las dos condiciones anteriores simplifican mucho el problema para hallar el álgebra del espacio de un fibrado trivial para fibrados vectoriales no necesariamente triviales hay que poner más condiciones. Pediremos entonces que si $q_1(t),\dots, q_n(t) \in A_n$ entonces el morfismo de sustitución

$$A_n \longrightarrow A_n \qquad p(t) \longmapsto p(q_1(t),\dots,q_n(t))$$

es contimuo. En realidad, sólo será necesario sustituir polinomios homogéneos de grado 1.

3.1.4 El álgebra topológica A_n deberá tener el mismo espectro que su completada. El objeto de este requerimiento se verá claramente más adelante.

Debe notarse que no toda estructura de álgebra topológica sobre A_n cumple con estos requerimientos. Por ejemplo, si sobre A_n consideramos la topología de convergencia simple de todos los coeficientes, es decir la topología determinada por las seminormas de álgebra $\| \sum_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}} t^{\mathrm{i}} \|_m = \sum_{|\mathrm{i}|\leq m} |a_{\mathrm{i}}|$, $n \in \mathbb{N}$, entonces vale que $X(A_n) = X(A)$ y no se verifica 3.1.1 en general.

No sabemos si para toda álgebra topológica A existe sobre A_n una estructura de álgebra topológica con los requerimientos hechos. Sin embargo, la respuesta es positiva con sólo pedir que A sea semisimple y que la transformación de Gelfand g_A sea continua: en efecto, el morfismo de álgebras

$$g_n : A_n \longrightarrow C(X(A) \times \mathbb{K}^n) \qquad g_n(\textstyle\sum a_{\mathrm{i}} t^{\mathrm{i}})(h,r) = \sum h(a_{\mathrm{i}}) r^{\mathrm{i}}$$

es inyectivo y permite que demos a A_n la estructura topológica inducida por $C(X(A) \times \mathbb{K}^n)$. Con esta topología las hipótesis anteriores se cumplen: la sustitución se transforma en una composición y la continuidad de g_A muestra que vale 3.1.2. En rigor de verdad, para que valga 3.1.4 hay que pedir que A esté en condiciones de que sea $X(\bar{A}) = X(A)$, pero hemos visto (1.7) que esto no es una gran restricción.

Con respecto a lo anterior es importante decir que muchas veces la topología más natural sobre A_n no es la de $C(X(A) \times \mathbb{K}^n)$;

por ejemplo, si $A = C^{\infty}(X)$, para una variedad X, entonces nos convendrá considerar a A_n como subálgebra de $C^{\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$ y la topología de esta última es obviamente más fuerte que la de $C(X(A) \times \mathbb{R}^n)$. Con relación a esta observación véase 3.1.5.

Diremos que A_n es una <u>FV-álgebra</u> si satisface las propiedades enunciadas entre 3.1.1 y 3.1.4.

3.1.5 Proposición

Sea A_n una FV-álgebra, sea B una subálgebra de $C(X(A) \times \mathbb{K}^n)$ y supongamos que existe un diagrama conmutativo de álgebras topológicas

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[dr, "i"'] & & C(X(A) \times {}^n) \\ & B \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

siendo i inyectivo con imagen densa. Si X(A) es completamente regular entonces i^t y j^t son homeomorfismos

Demostración: como $X(A) \times \mathbb{K}^n$ es completamente regular, $g_n{}^t$ es un homeomorfismo y sólo resta aplicar 1.7.2

3.2 Descomposiciones de A_n

En este parágrafo A será un álgebra conmutativa con identidad (no necesariamente topológica), M un A-módulo proyectivo de tipo finito. En este caso, existe otro A-módulo N tal que $A^n = M \oplus N$ y en consecuencia una matriz idempotente $a = (a_{ik}) \in A^{n \times n}$ tal que M es isomorfo a la imagen de la aplicación A-lineal de A^n en sí mismo inducida por a. Nótese que, reemplazando a por $1 - a = (\delta_{ik} - a_{ik})$, M es isomorfo al núcleo de la aplicación inducida por $1 - a$.

Llamemos $I = I_M$ al ideal de A_n generado por

$\{p_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} t_k : i = 1, \ldots, n\}$

y $B = B_M$ a la subálgebra de A_n generada por

$\{q_i(t) = t_i - p_i(t) : i = 1, \ldots, n\}$

Es evidente que $A_n = B + I$ y vamos a probar que $B \cap I = 0$, o sea que $A_n = B \oplus I$.

En primer término, probemos que

3.2.1 $\quad p_i(q_1(t),\dots,q_n(t)) = 0 \;, i = 1,\dots,n$:

en efecto, como $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = a_{ij} \quad i,j = 1,\dots,n$, entonces vale

$$p_i(q_1(t),\dots,q_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}t_j) = 0$$

Más generalmente

3.2.2 $\quad p(q_1(t),\dots,q_n(t)) = 0$ si $p(t) \in I$:

pues si $p(t) \in I$ entonces existen $s_i(t)$ $i = 1,\dots,n$ tales que

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i(t)p_i(t)$$

y basta aplicar 3.2.1.

El último resultado parcial que necesitamos es

3.2.3 $\quad p(t) \in I \iff p(q_1(t),\dots,q_n(t)) \in I$:

una implicación es trivial por 3.2.2; para la otra, utilizando el desarrollo de Taylor de orden 1 obtenemos para $p(t) \in A_n$

$$p(q_1(t),\dots,q_n(t)) = p(t_1 - p_1(t),\dots,t_n - p_n(t)) = p(t) + q(t)$$

para un cierto $q(t) \in I$, con lo que sale la otra implicación.

Probemos ahora que $B \cap I = 0$. Si $p(t) \in B \cap I$, por pertenecer a B existe un polinomio $q(t) \in A_n$ tal que $p(t) = q(q_1(t),\dots,q_n(t))$ por la definición de B; como $p(t) \in I$ debe ser $q(q_1(t),\dots,q_n(t)) \in I$ y por 3.2.3 $q(t) \in I$; aplicando 3.2.2 a $q(t)$ resulta $q(q_1(t),\dots,q_n(t)) = 0$. Volviendo hacia atrás obtenemos $p(t) = 0$ y hemos terminado.

3.2.4 $\quad$ La aplicación $\quad A_n \to B \times I \quad p(t) \mapsto (p(q(t)),\ p(t) - p(q(t)))$ es un isomorfismo, donde $q(t) = (q_1(t),\dots,q_n(t))$.

3.3 Teorema

Sea A un álgebra topológica y A_n una FV-álgebra. Si M es un A-módulo proyectivo de tipo finito existe una descomposición algebraica y topológica $A_n = B_M \oplus I_M$ siendo I_M un ideal y B_M una subálgebra de A_n tales que

i) B_M es el álgebra simétrica de M ([29],pág. 103)

ii) Si i es la composición de los morfismos

$$A \longrightarrow A_n \longrightarrow B_M \longrightarrow \overline{B_M}$$

entonces $(X(A),\ X(\overline{B_M}),\ i^t)$ es un fibrado vectorial de rango finito.

Demostración: la descomposición algebraica nos la provee el parágrafo 3.2; es topológica porque el isomorfismo de 3.2.4 es contimuo por la hipótesis 3.1.3 y bicontimuo porque la inversa es $I \times B \longrightarrow A_n$ $\quad (p(t),\ q(t)) \longmapsto p(t) + q(t)$. Demostremos ahora las otras dos afirmaciones; la de i) es completamente algebraica: tenemos un morfismo de A-módulos (no continuo)

$$j : M \longrightarrow B_M \qquad j(\sum_{i,k} a_{ik}x_k e_i) = \sum_{i,k} a_{ik}x_k t_i \qquad (x_k \in A)$$

donde estamos identificando a M con la imagen de la aplicación A-lineal inducida por a y $e_1,\dots,e_n$ es la base canónica de A^n; si $f: M \to E$ es un morfismo de M en la A-álgebra E extendemos f a A^n y llamamos $v_i = f(e_i)$; entonces tenemos un morfismo de A-álgebras

$$\bar{f}: B_M \longrightarrow E \qquad \bar{f}(\sum_{i,k} a_{ik}x_k t_i) = \sum_{i,k} a_{ik}x_k v_i$$

que verifica $\bar{f}j = f$; de este modo $(B_M,\ j)$ es solución del problema universal que define el álgebra simétrica de M ([29], pág. 103)

Para la parte ii) consideremos el fibrado trivial sobre X(A) de rango n $\mathcal{E}^n_{X(A)} = (X(A),\ X(A) \times \mathbb{K}^n,\ p_1)$ y por la Prop. 1 de [31] bastará definir un morfismo de fibrados vectoriales $\phi: \mathcal{E}^n_{X(A)} \longrightarrow \mathcal{E}^n_{X(A)}$ con núcleo $X(B_M)$ y tal que la dimensión de las fibras de $X(B_M)$ sea localmente constante; para ello vamos a calcular $X(B_M)$. Como vale $B_M = A_n / I_M$ y además $\overline{B_M} = \overline{A_n} / \overline{I_M}$ podemos identificar a $X(B_M)$ y a $X(\overline{B_M})$ con un subespacio de

$X(A) \times \mathbb{K}^n$, a saber, con $h(I) = \{ (h,r) : \sum_{k=1}^{n} h(a_{ik})r_k = 0,\ i = 1,\dots,n \}$
Esta observación prácticamente nos obliga a definir

$$\phi\,(h,r) = (h, \sum_{k=1}^{n} h(a_{1k})r_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} h(a_{nk})r_k)$$

Evidentemente ϕ es un morfismo de fibrados vectoriales con núcleo $h(I)$ y sólo hay que verificar la constancia local de la dimensión de las fibras de $h(I)$. Esto es consecuencia inmediata del siguiente resultado

3.3.1 Lema

Sea X un espacio topológico y sea $a : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una aplicación continua tal que $a(x)^2 = a(x)$ para todo $x \in X$. Entonces la función $x \longmapsto$ rango de $a(x)$ es localmente constante

Demostración: si rg $a(x) = r$ existe un entorno U de x tal que rg $a(z) \geq r$ para todo $z \in U$; pero como rg $(1 - a)(x) = n - r$ existe un entorno V de x tal que rg $(1 - a)(z) \geq n - r$ para todo $z \in V$. Así, para todo $z \in U \cap V$ vale rg $a(z) \leq r \leq$ rg $a(z)$.

3.3.2 Observación

También hemos probado que $(X(B_M), X(A), p)$ es un fibrado vectorial, ya que en nuestras condiciones $X(B_M) = X(\overline{B_M})$. En efecto la descomposición $A_n = B_M \oplus I_M$ induce otra, $\overline{A_n} = \overline{B_M} \oplus \overline{I_M}$, y sólo debemos recordar que A_n tiene el mismo espectro que su completada.

3.3.3 Ejemplos

i) Si $A = C^k(X)$, $k = 0,1,\dots,\infty$, y M es un A-módulo proyectivo de tipo finito existe un fibrado vectorial de clase C^k $\xi = (X, E, p)$ tal que $\overline{B_M} = C^k(E)$

ii) Sea $A = C^\infty(\mathbb{R}^{n \times n})/I$, siendo I el ideal generado por las funciones $x_{ik} - \sum_j x_{ij}x_{jk}$, $x_{ik} - x_{ki}$, $\sum_i x_{ii} - k$, $i,k = 1,\dots,n$
Entonces la imagen de la aplicación A-lineal de A^n en sí mismo de-

fi nida por $x = (x_{ik})$ es un A-módulo proyectivo que llamamos M. Con el método del Teorema 3.3 obtenemos el fibrado canónico $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ sobre la grassmanniana $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ (cf. [24], § 5)

iii) Si $A = C^\infty(S^1)$ y $a_{ik}(x) = x_i x_k$ entonces $a \in A^{2x2}$, $a^2 = a$ y la traza de a es 1. Por lo tanto la imagen de a es un A-módulo proyectivo de tipo finito y por 3.3 obtenemos un fibrado, que resulta ser el fibrado tangente a la circunferencia: en efecto, con las notaciones de 3.3, I está generado por $p_1(t) = x_1^2 t_1 + x_1 x_2 t_2$ y $p_2(t) = x_1 x_2 t_1 + x_2^2 t_2$ y entonces
$X(B_M) = \{(z,r) \in S^1 x \mathbb{R}^2 : z_1 r_1 + z_2 r_2 = 0\}$
y la fibra por el punto $z \in S^1$ es $\{(z,r) \in S^1 x \mathbb{R}^2 : \langle z,r \rangle = 0\}$ que es el espacio tangente a S^1 por el punto z.

iv) Más generalmente, si $A = C^\infty(S^n)$ y $a_{ik}(x) = x_i x_k$ entonces $a = (a_{ik}) \in A^{(n+1)x(n+1)}$; sea I el ideal de A_{n+1} generado por $p_i(x,t) = \sum_k x_i x_k t_k$. Entonces se obtiene como antes el fibrado tangente de la esfera S^n.

v) Sea X una variedad de clase C^k y sea $(\varphi_{ik}) \in C^k(X)^{nxn}$ una matriz idempotente. Entonces

$$\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x) t_k = 0,\ i = 1,\dots,n\}$$

es una subvariedad de clase C^k de $X \times \mathbb{R}^n$.

vi) Si $A = C^\infty(\mathbb{P}^n)$, donde $\mathbb{P}^n$ es el espacio proyectivo de dimensión n, y si $a_{ik}(x) = x_i x_k$,de igual manera que antes se obtiene el fibrado tangente a $\mathbb{P}^n$.

vii) Si A es como en vi) y $M = \{\varphi \in C^\infty(S^n) : \varphi(-x) = -\varphi(x)$ para todo $x \in S^n\}$ entonces M es proyectivo de tipo finito y la traspuesta del morfismo $A \longrightarrow \overline{B_M}$ induce el fibrado canónico $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+1})$

Para finalizar, damos dos resultados que tienen una estrecha relación tanto con el teorema 3.3 como con algunos de los ejemplos.

3.3.4 Proposición

Sean $\xi = (X, E, p)$ un fibrado vectorial de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ $A = C^k(X)$, $B = C^k(E)$. Entonces hay una correspondencia biyectiva entre los elementos del A-módulo (proyectivo de tipo finito) de secciones de clase C^k de ξ, que denotamos $\Gamma^k(\xi)$, y los ideales I de B tales que $A \oplus I = B$.

Demostración: como es natural, podemos considerar a B como un A-módulo (en verdad, como una A-álgebra) mediante la acción $(\psi.\varphi)(e) = \psi(p(e)).\varphi(e)$. Sea I un ideal de B tal que $A \oplus I = B$; entonces $A = B/I$ y $X = X(A) = h(I)$, mediante el homeomorfismo $\theta: X \longrightarrow h(I)$ que proviene de trasponer $A \longrightarrow B \longrightarrow A = B/I$; θ verifica $p\theta = 1_X$, de modo que $\theta \in \Gamma^k(\xi)$. Recíprocamente, si $\theta \in \Gamma^k(\xi)$ el ideal $I_\theta = \{\varphi \in B: \varphi(\theta(x)) = 0 \text{ si } x \in X\}$ es sumando directo de B: en efecto, $I \cap A = \{\varphi \in A: \varphi(\theta(x)) = 0 \text{ si } x \in X\} = 0$ (donde identificamos a A con una subálgebra de B mediante la sección θ); por otra parte, si $\varphi \in B$ y $\psi(x) = \varphi(\theta(x))$ entonces $\psi \in A$ y $\varphi - \psi \in I$ pues $\varphi(\theta(x)) - \psi(x) = 0$ para todo $x \in X$, de modo que $B = A + I$.

3.3.5 Proposición

Si X es una variedad de clase C^k, $\xi = (X, E, p)$ es un fibrado vectorial de clase C^k, $A = C(X)$, $B = C(X \times \mathbb{R}^n)$ (donde n es tal que ξ es sumando directo de ε_X^n), $A' = C^k(X)$ y $B' = C^k(X \times \mathbb{R}^n)$ entonces para cada $s \in \Gamma^k(\xi)$ es $A' \oplus I_s = B_s$ y $A' \oplus I_s \cap B' = B'$, donde $I_s = \{\varphi \in B: \varphi(s(x)) = 0 \text{ para cada } x \in X\}$

$B_s = \{\varphi \in B: \varphi s \in A'\}$.

Referencias

1. Arens R. Dense inverse limit rings, Michigan Math. J. 5 n° 2 (1958)

2 Banach S. Théorie des Opérations Linéaires, Chelsea Publishing Company, New York (1955)

3 Banaschewski B. An algebraic characterization of $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, Bull. Acad. Polon. Sci. 16 (1968) 169-174

4 Bourbaki N. Algebre Commutative, Hermann, Paris (1962)

5 Bourbaki N. Espaces Vectoriels Topologiques, Hermann, Paris, (1955)

6 Brooks R. On spectrum of finitely generated locally m-convex algebras, Studia Math. 29 (1968) 143-150

7 Brooks R. Partitions of unity in F-algebras, Math. Ann. 177 (1968) 265-272

8 Byrnes C. Closed algebras of smooth functions, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975) 195-198

9 Corach G., Larotonda A. Algebras de funciones diferenciables Revista de la UMA (a aparecer)

10 Corach G., Larotonda A. Compactificaciones diferenciables Revista de la UMA (a aparecer)

13 Dieudonné J. Eléments d'Analyse, Gauthier-Villars, Paris (1970)

11 Dales H.G. Automatic continuity: a survey, Bull. London Math. Soc. 10 (1978) 129-183

12 Dietrich W. The maximal ideal space of the topological algebra C(X, E), Math. Ann. 183 (1969) 201-212

14 Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1952)

15 Guennebaud B. Algebres localement convexes sur les corps values, Bull. Sci. Math. 91 (1967) 75-96

16 Guichardet A. Leçons sur certaines algebres topologiques Gordon & Breach, London (1968)

17 Iversen B. Generic local structure in commutative algebra, Lecture Notes in Math. 310, Springer

18 Kelley J. Topología General, Eudeba, Buenos Aires (1962)

19 Malgrange B. Ideals of differentiable funstions, Oxford Univ. Press (1966)

20 Mallios A. Spectrum and boundary of topological tensor products, Bull. Soc. Math. Grece 8 (1968) 101-115

21 Mallios A. On m-barrelled algebras, Prakt. Akad. Athenon 49 (1974) 98-112

22 Mallios A. Heredity of tensor products of topological algebras Math. Annalen 162 (1966) 246-257

23 Michael E. Locally multiplicatively convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952)

24 Milnor J. Characteristic classes, Annals of Mathematical Studies 76 (1974) Princeton

25 Morris P.; Wulbert D. Functional representation of topological algebras, Pacific J. Math. 22(1967) 323-337

26 Muñoz Díaz J. Caracterización de las álgebras diferenciables Collectanea Math. 23 (1972)17-83

27 Muñoz Díaz J., Ortega J.M. Sobre las álgebra localmente convexas Coll. Math. 20 (1969) 127-149

28 Narasimham R. Analysis on real and complex manifolds, Masson & Cie, Paris (1968)

29 Riesabarra R., Larotonda A. Notas de topología algebraica, Cursos y Seminarios de Matemática 24, Buenos Aires.

30 Rosenfeld M. Commutative F-algebras, Pacific J. Math. 16 (1966) 159-166

31 Swan R. Vector bundles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 264-277

32 Teleman S. Lectures on the applications of sheaves to ring theory, Lecture Notes in Math. 248 Springer (1971) 100-311

33 Teleman S. Representations des anneaux tauberiens discrets par des faisceaux, Rev. Roumaine de Math. 14 (1969) 249-264

34 Tougeron J. Idéaux de fonctions differentiables, Springer (1972) Berlin

35 Turpin P. Une remarque sur les algebres a inverse continu, C.R. Acad. Sci. Paris 270 (1970) A1686-A1689

36 Waelbroeck L. Topological vector spaces and algebras, Lecture Notes in Math. 230, Springer

37 Żelazko, W. Metric generalizations of Banach algebras, Dissertationes Math 47 (1965)

38 Żelazko W Banach algebras, Elsevier Publishing Company, Amsterdam (1973)