

## Tesis de Posgrado

# Nuevos desarrollos en la simulación numérica de la capa límite atmosférica con modelos estacionarios bidimensionales

Aiello, José Luis

1979

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Meteorológicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Aiello, José Luis. (1979). Nuevos desarrollos en la simulación numérica de la capa límite atmosférica con modelos estacionarios bidimensionales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1613\\_Aiello.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1613_Aiello.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Aiello, José Luis. "Nuevos desarrollos en la simulación numérica de la capa límite atmosférica con modelos estacionarios bidimensionales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1979.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_1613\\_Aiello.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1613_Aiello.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

Tesis 1613

ej. 2

**NUEVOS DESARROLLOS EN LA SIMULACION NUMERICA  
DE LA CAPA LIMITE ATMOSFERICA  
CON MODELOS ESTACIONARIOS BIDIMENSIONALES**

**- TESIS DOCTORAL -**

**AUTOR: LIC. JOSÉ LUIS AIELLO**

**DIRECTOR: DR. GUSTAVO VÍCTOR NECCO**

**DEPARTAMENTO DE METEOROLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**- 1979 -**

NUEVOS DESARROLLOS EN LA SIMULACION NUMERICA  
DE LA CAPA LIMITE ATMOSFERICA  
CON MODELOS ESTACIONARIOS BIDIMENSIONALES

AUTOR: Lic. José Luis Aiello  
DIRECTOR: Dr. Gustavo Víctor Necco

1613-2  
Ej. 2

A mi familia

## Agradezco

Al Dr. Gustavo V. Necco por el invalorable apoyo recibido en el desarrollo de este trabajo de Tesis y por el constante aliento en las numerosas reuniones mantenidas.

Al Dr. José A. J. Hoffmann por haberme orientado en mi Plan de Doctorado y por sus valorables sugerencias.

Al Dr. Mariano A. Estoque, quien a través de su fructífera correspondencia disipó varias dudas acerca de su método de resolución que fue aplicado en este trabajo.

Al Lic. Guillermo J. Berri con quien tuve el placer de trabajar en varios aspectos de la capa límite atmosférica.

Al Computador Científico Oscar Geffner por su apoyo en la parte de computación.

Al personal del D.I.S.C.A.D. (F.A.A.) que me brindó una valiosa colaboración en las numerosas corridas de los programas de computación.

## RESUMEN

Se desarrolla un modelo numérico de simulación, estacionario y bidimensional de la capa límite atmosférica con el objeto de encontrar soluciones de las variables medias dinámicas y termodinámicas ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\theta}$  y  $\bar{q}$ ) en la región de resolución, bajo distintas condiciones de contorno en la superficie terrestre y en el tope de la misma.

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales que se resuelve comprende las ecuaciones de movimiento de Navier Stokes con la particularidad de la retención de los términos advectivos en la ecuación de la componente vertical de la velocidad (es decir, no se hace la suposición hidrostática), la ecuación de energía termodinámica (sin procesos radiativos), la ecuación de conservación de humedad (sin cambios de fase del vapor de agua) y la ecuación de conservación de la masa.

Se ensaya una clausura de primer orden haciendo uso de la teoría de la Longitud de mezcla de Prandtl, acoplando la parte dinámica y termodinámica del sistema.

Se emplea un método iterativo mediante el uso de un esquema implícito en diferencias finitas propuesto por Estoque y Bhumralkar.

Bajo distintas condiciones de estabilidad atmosférica se obtienen resultados para las distribuciones de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\theta}$  y  $\bar{q}$  en tres simulaciones correspondientes a un salto de rugosidad en superficie (para el que se discute el efecto de la incorporación de los términos advectivos en la ecuación de la componente  $w$  de la velocidad), una fuente de calor en superficie (con una fuente de humedad asociada) y una ciudad.

Dado que la bibliografía de los tratamientos y estudios de la capa límite atmosférica, que comprende una serie de libros de texto y de publicaciones científicas, abarca un amplio espectro de enfoques, en la primera parte se incluye una monografía que muestra un panorama de los mismos y se hace hincapié en aquellos en que se encuentra fundamentado este trabajo

## CONTENIDO

	PAG.
1. INTRODUCCION	1
2. SISTEMA DE ECUACIONES	6
3. SISTEMA DE ECUACIONES DE LA CAPA LIMITE PLANETARIA	7
3.1. Ecuación de movimiento	8
3.2. Ecuación de energía termodinámica	10
3.3. Ecuación de humedad	11
3.4. Resumen y consideraciones acerca del sistema de ecuaciones de la capa límite planetaria	12
3.5. Ecuaciones de energía de la capa límite planetaria	13
4. PROBLEMA DE CLAUSURA	16
5. SUBDIVISIONES DE LA CAPA LIMITE ATMOSFERICA	20
5.1. Capa de superficie	20
5.2. Subcapa laminar	32
5.3. Capa de transición	33
6. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE MODELOS DE LA CAPA LIMITE ATMOSFERICA	36
6.1. Planteo General	36
6.2. Modelos estacionarios de la capa límite atmosférica en espacios de una, dos y tres dimensiones	37
6.3. Modelos no estacionarios unidimensionales de la capa límite atmosférica	42
6.4. Modelos no estacionarios bidimensionales de la capa límite atmosférica	45

6.5.	Modelos numéricos de la capa límite atmosférica con clausura de orden superior	47
7.	MODELO ESTACIONARIO BIDIMENSIONAL DESARROLLADO	49
7.1.	Consideraciones previas	49
7.2.	Sistema de ecuaciones	50
7.3.	Descripción del método utilizado	51
8.	PROBLEMA UNIDIMENSIONAL (PRIMERA APROXIMACION)	53
8.1.	Sistema de ecuaciones e hipótesis de cierre	53
8.2.	Región de resolución y condiciones de contorno	53
8.3.	Ecuaciones en diferencias finitas	54
8.4.	Método de resolución	55
8.5.	Características del método de resolución	56
8.6.	Consideraciones acerca del coeficiente de difusividad turbulenta	57
8.7.	Consideraciones sobre esquemas en diferencias finitas	59
9.	PROBLEMA BIDIMENSIONAL	63
9.1.	Ecuaciones en diferencias finitas	63
9.2.	Región de resolución y condiciones de contorno	65
9.3.	Método de resolución	67
9.4.	Características del método de resolución	69
10.	CASOS ESTUDIADOS	71
11.	CONCLUSIONES	99
	REFERENCIAS	100
	ANEXO 1; DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA FORTRAN IV ICDIM	106
	LISTA DE FIGURAS	109
	LISTA DE TABLAS	110



## 1. INTRODUCCION

Gran parte de la energía solar que llega al sistema tierra-atmósfera es absorbida por la superficie terrestre. Se generan entonces una serie de transformaciones energéticas que cumplen, en el límite tierra-atmósfera una cierta relación de balance o equilibrio (1).

Parte de la energía que recibe la atmósfera proviene de estos mecanismos, y se generan en ésta, perturbaciones, circulaciones y formaciones nubosas. La respuesta de la atmósfera en gran escala no es inmediata debido a su gran capacidad para absorber energía, y a que los procesos característicos dentro de la misma producen transferencias de energía hacia la superficie terrestre. El resultado es un complejo intercambio energético entre la superficie terrestre y la atmósfera, del que surge la formación de la capa límite atmosférica. Se la puede caracterizar como aquella región de la atmósfera, cercana a la superficie terrestre, directamente afectada por el efecto de fricción de la misma. Su altura es variable y puede tomarse, para latitudes medias, un valor aproximado de 1 Km.

Las distribuciones de las variables dinámicas y termodinámicas dentro de ésta capa tienen relevante importancia para la mayoría de las actividades del hombre. Esto muestra la utilidad de conocer su comportamiento y evolución.

De lo anterior se desprende el interés que tiene en la investigación meteorológica el estudio de sus características y las importantes aplicaciones que de ella se derivan, citando entre otras, la agrometeorología, los cálculos de estructura en ingeniería, el diseño de aerogeneradores para el aprovechamiento de la energía eólica, la contaminación atmosférica y la hidrometeorología. En la última década, dicho interés se vió incrementado por la necesidad de parametrizar los efectos de la capa límite atmosférica en el pronóstico numérico de mediano y largo plazo y en modelos para la simulación de la circulación general de la atmósfera.

La estructura de la capa límite atmosférica, dado el carácter turbulento de la misma, es compleja, debiendo tenerse en cuenta las variaciones de la superficie terrestre (rugosidad, albedo, cambios de temperatura) y de la atmósfera en gran escala.

Es interesante mostrar a continuación algunos aspectos que señalan la complejidad de su estudio (2) y que además remarcan algunas características de la misma.

La mayoría de los estudios suponen el caso ideal en el que se cumplen las condiciones de homogeneidad horizontal y de flujo estacionario.

En el caso neutral, o sea, cuando no hay flujo de calor, los parámetros que determinan su estructura son: el viento geostrófico  $V_g$  en su tope, la rugosidad  $z_0$  y el parámetro de Coriolis  $f$  (es decir, el efecto de la rotación terrestre).

Cuando hay presente un flujo de calor, que es la situación mas frecuente, hay mas complejidad, pues el flujo está rela-

cionado con una fuente o sumidero de energía turbulenta (de empuje), de acuerdo a que el mismo sea ascendente o descendente. En el caso neutral la única fuente de energía es la mecánica. Mientras la energía mecánica decrece rápidamente con la altura, la de empuje es casi constante hasta aproximadamente 50 m (hecho éste, que permite definir la denominada capa de superficie o de flujos constantes). Hay entonces, una altura en la que dicha energía de empuje se hace mayor que la mecánica y se puede definir una escala de altura para la capa límite no adiabática, tal como lo hicieron Monin y Obukhov (3) al introducir la longitud  $L$ , que es función del flujo vertical de calor y de los efectos de fricción en superficie. También una relación entre éstas dos energías, permitió a Richardson (4) definir el parámetro adimensional  $Ri$ .

La estructura de la capa límite en este caso, es fuertemente dependiente de la energía de empuje y se toman como parámetros de estabilidad a  $z/L$  o  $Ri$ . La altura de la capa límite queda determinada por el flujo turbulento de calor y por la estratificación de la atmósfera por encima de la misma. En el caso estable (flujo de calor hacia abajo) queda bien definida, como en el caso neutral, por una relación entre los efectos de fricción y rotación.

La Figura 1 (2), muestra un diagrama en el que se representan los distintos fenómenos que ocurren en la capa límite. Los ejes verticales representan a las alturas adimensionales  $z/H$  y los horizontales a  $H/L$ . El tope de la capa se usa como tope del eje vertical, esto es,  $z=H$ .

La estructura de la capa límite atmosférica real es mucho más compleja y es de utilidad describir la evolución que la misma manifiesta durante un ciclo solar diurno, pues como se señaló al comienzo, la fuente de energía solar es crucial para comprender su comportamiento (5).

Las variaciones en la radiación solar generan un ciclo de calentamiento y enfriamiento de la capa límite que afecta al campo de velocidad de la misma. Antes de la salida del sol la estratificación es estable. Si se supone un día sin nubosidad, la radiación solar, a partir de la salida del sol, comienza a calentar la superficie terrestre y un flujo de calor se genera desde ésta hacia el aire adyacente, el régimen de la capa inferior de aire se torna inestable, es decir, el aire caliente asciende y el frío desciende, y si existiese un ajuste inmediato al ascenso generado por calentamiento se formaría una capa con temperatura potencial constante y de igual valor al de la superficie. Esto no sucede pues hay un retardo entre el calentamiento del aire y el de superficie. Sobre suelo seco, si el aire no contiene vapor de agua, su calor lo recibe de la superficie terrestre y como justo sobre ésta la velocidad del aire es nula, el único mecanismo de transporte es la conducción molecular y entonces aparece un fuerte gradiente de temperatura. Esta capa de conducción molecular es muy fina y se transforma

en una de convección forzada en la cual el transporte de aire se efectúa por turbulencia mecánica. A mayores apartamientos de la superficie hay un decrecimiento de los gradientes de temperatura y de velocidad y también de la turbulencia mecánica. La distribución de temperatura se mantiene superadiabática, pero a mayores alturas se incrementa en la turbulencia el efecto

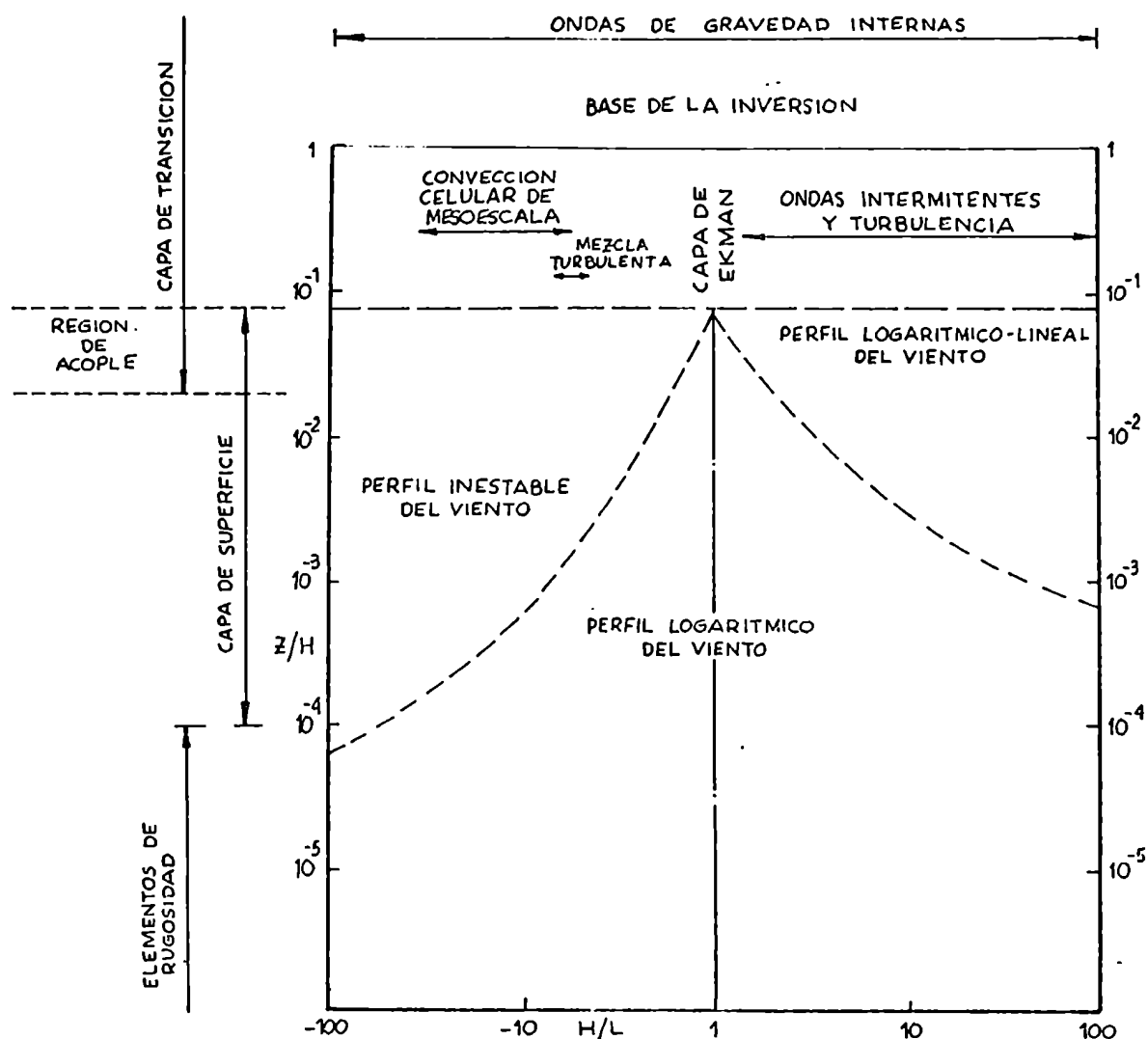


Figura 1: Diagrama altura (logarítmica)-estabilidad de la capa límite, indicando varios fenómenos observables (2).

de empuje. La capa de convección forzada cambia gradualmente a una de convección libre. Fuera de la capa superadiabática, las parcelas turbulentas de aire caliente penetran en regiones más frías y se genera un proceso de mezcla muy agitada debido a que las térmicas tienen significativas velocidades de ascenso y las masas transportadas, asociadas a ellas, crean un movimiento hacia abajo de aire más frío y turbulento. El resultado es una mezcla de aire tan intensa que provoca en esa capa de convección libre una distribución de temperatura potencial aproximadamente constante.

La capa dentro de la cual el campo de temperatura es influenciado por el flujo de calor desde el suelo se denomina capa convectiva. Está limitada en altura por la base de una inversión, es decir, por una distribución estable de temperatura encima de la misma. Durante el curso del día, a medida que la superficie terrestre se sigue calentando continúa ese flujo de calor hacia arriba y dicha capa convectiva adquiere alturas mayores que dependen de dicho flujo, que a su vez está relacionado con el gradiente de temperatura de la capa superadiabática.

Más tarde, luego del mediodía, se alcanza un estado de cuasi-equilibrio y la superficie terrestre tiene la misma temperatura potencial que la capa de aire por encima de ella, haciendo que el flujo de calor no exista y entonces las fluctuaciones de temperatura se amortiguan y la capa límite neutralmente estratificada está asintóticamente libre de dichas fluctuaciones en todas partes. Esta es la situación en la que las condiciones ideales de la denominada capa límite neutra pueden ser bien consideradas y constituye un estado muy particular de la atmósfera.

En horas posteriores la temperatura del aire se hace mayor que la del suelo y el flujo de calor se invierte, es decir, es en dirección hacia el suelo, apareciendo una capa con estratificación estable y un enfriamiento gradual de la capa convectiva. La altura de la base de la inversión superior disminuye y la altura de la inversión generada por éste último proceso aumenta, modificando la capa de temperatura potencial constante que existe entre ambas. Si el enfriamiento del suelo persiste, esta capa intermedia puede desaparecer y toda la estructura se torna estable. Esto continúa hasta la próxima salida del sol y el ciclo se repite.

Este ciclo es ilustrativo pues se puede conectar el estado de la capa límite con la teoría descriptiva que se mencionó anteriormente. En esta sucesión de estados con estructuras inestables, neutras y estables se deben explicar los hechos más salientes de la capa límite atmosférica y los distintos modelos tratan de representarlos con distintos grados de aproximación.

Dado el carácter no lineal del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que gobierna la capa límite atmosférica, los primeros intentos de resolución involucraban técnicas de linealización y bajo ese enfoque se ubicaban las primeras investigaciones. De relevancia resultó el empleo del

análisis dimensional permitiendo encontrar soluciones analíticas para las variables del sistema. Con el advenimiento de las computadoras electrónicas y mediante el empleo de técnicas del análisis numérico, se comenzó una línea que aborda en soluciones cada vez más reales, pues se retienen los efectos de los términos no lineales y se tornaron eficientes los experimentos numéricos haciendo uso de modelos teóricos estacionarios y de evolución, en espacios de una, dos y tres dimensiones (6),(7). Pueden mencionarse también aquellos modelos que combinan los enfoques anteriores (8) y los basados en experiencias de medición en túneles de viento (5).

Los libros y publicaciones científicas acerca de la capa límite atmosférica, tienen la particularidad, en su gran mayoría, de tratar extensamente a la capa límite de superficie y no abordan el estudio de la capa límite atmosférica como un todo (7). Esto se debe a que la capa de superficie es la mejor conocida pues en ella se hicieron la mayoría de las mediciones, y al ser constantes los flujos turbulentos de momento, calor y humedad se elaboró una teoría consistente.

En este trabajo se hace una monografía sobre el tratamiento de la capa límite atmosférica como un todo, enfatizando en la línea que se usa en el desarrollo de la tesis. También se presenta una subdivisión de la misma, mostrando las aproximaciones y resultados en cada uno de los casos.

Se muestran las características del modelo bidimensional desarrollado, señalando los aspectos físicos y numéricos empleados y se simulan tres casos correspondientes a un salto de rugosidad en superficie, a una fuente de calor en superficie y a una ciudad, discutiendo para los mismos diversos aspectos del comportamiento de las variables estudiadas.

## 2. SISTEMA BASICO DE ECUACIONES

En el tratamiento que sigue, se considera a la capa límite atmosférica sin subdivisiones.

Se toma como punto de partida el siguiente sistema de ecuaciones, que comprende la conservación del impulso, de la masa, de la energía y una relación diagnóstica para las variables de estado.

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \phi - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbb{F}) \quad [2.1]$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\rho \nabla) = 0 \quad [2.2]$$

Ecuación de energía termodinámica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T + \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) T (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\rho Q}{c_v} \quad [2.3]$$

Ecuación de estado

$$p = \rho R T \quad [2.4]$$

donde:

$$\mathbb{F} = \rho \gamma \left[ \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbb{E} \right] \quad [2.5]$$

$$\mathbb{E} = \alpha \alpha + \beta \beta + \gamma \gamma \quad [2.6]$$

$$\nabla \phi = \gamma g \quad [2.7]$$

Este sistema, de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que son los valores instantáneos de las componentes de la velocidad ( $u, v, w$ ), la presión  $p$ , la temperatura  $T$  y la densidad  $\rho$ , es cerrado si se hace alguna suposición para dar el valor de las fuentes o sumideros de calor  $\rho Q$ .

Constituye un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

A continuación se harán una serie de consideraciones simplificadoras que permitirán obtener el sistema de ecuaciones que gobierna a la denominada capa límite planetaria.

### 3. SISTEMA DE ECUACIONES DE LA CAPA LIMITE PLANETARIA

Siguiendo a Wippermann (7), se define la capa límite planetaria como la capa límite atmosférica que cumple las siguientes condiciones:

- a) El flujo es turbulento.
- b) El flujo medio y las propiedades de la turbulencia son estacionarios.
- c) El flujo medio y las propiedades de la turbulencia son horizontalmente homogéneos.
- d) Los transportes moleculares de momento, calor y humedad son despreciables respecto a los correspondientes transportes turbulentos.

El carácter turbulento del flujo, dado por la condición (a) es abordado haciendo, para cada una de las variables dependientes, la suposición de que sus valores instantáneos resultan de la suma de un valor medio mas una fluctuación.

Siendo  $\psi$  una de dichas variables, se toma su valor medio como:

$$\bar{\psi}(t) = \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \psi(t+\zeta) d\zeta \quad [3.1]$$

o

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\bar{g}2\Delta t} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} g\psi(t+\zeta) d\zeta \quad [3.2]$$

Estos promedios temporales constituyen un método de separación de movimientos sobre distintas escalas temporales.

Esencialmente, el efecto que se logra es la eliminación de las componentes de corto período sin afectar aquellas de períodos largos (9)

Pueden definirse:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad , \quad \bar{\psi}' = 0 \quad [3.3]$$

o

$$\psi = \hat{\psi} + \psi'' \quad , \quad \hat{\psi}'' = 0 \quad [3.4]$$

La condición (b) establece que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\quad}) = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\quad}) = 0 \quad [3.5]$$

La (c):

$$\nabla_H (\bar{\quad}) = \nabla_H (\hat{\quad}) = 0 \quad [3.6]$$

excepto para

$$\nabla_H \bar{p} = -f \bar{\zeta} \mathbf{k} \times \hat{v}_g \quad [3.7]$$

y

$$\nabla_H \hat{T} = -f \hat{q}^{-1} \hat{T} \mathbf{k} \times \frac{d\hat{v}_g}{dz} \quad [3.8]$$

y la (d) está dada por las siguientes relaciones:

$$|\nabla \cdot \bar{\mathbb{F}}| \ll |\nabla \cdot (\overline{\zeta v'' v''})| \quad [3.9]$$

$$\nu_h |\nabla^2 (c_v \bar{\zeta} \hat{T})| \ll c_p |\nabla \cdot (\overline{\zeta v'' \theta''})| \quad [3.10]$$

$$\nu_q |\nabla^2 (\bar{\zeta} \hat{q})| \ll |\nabla \cdot (\overline{\zeta v'' q''})| \quad [3.11]$$

siendo los primeros y segundos miembros respectivamente, los transportes moleculares y turbulentos de momento, calor y humedad específica.

En la capa límite planetaria estas expresiones se transforman en

$$\left| \frac{d\bar{\mathbb{F}}_x}{dz} \right| \ll \left| \frac{d}{dz} (\overline{\zeta w'' v''}) \right| \quad [3.12]$$

$$\nu_h \left| \frac{d^2 (c_v \bar{\zeta} \hat{T})}{dz^2} \right| \ll c_p \left| \frac{d}{dz} (\overline{\zeta \theta'' v''}) \right| \quad [3.13]$$

$$\nu_q \left| \frac{d^2 (\bar{\zeta} \hat{q})}{dz^2} \right| \ll \left| \frac{d}{dz} (\overline{\zeta q'' v''}) \right| \quad [3.14]$$

### 3.1. Ecuación de movimiento

En primer lugar, se determinará la parte dinámica del sistema, es decir, se obtendrá la ecuación de movimiento, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores.

Reemplazando cada una de las variables instantáneas que aparecen en las ecuaciones [2.1] y [2.2] por sus valores medios y fluctuaciones, según [3.3] y [3.4], una combinación de las mismas permite obtener:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\zeta} \hat{v}) + \nabla \cdot (\bar{\zeta} \hat{v} \hat{v}) + 2 \bar{\zeta} \mathbf{n} \times \hat{v} = -\bar{\zeta} \nabla \phi - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\mathbb{F}} - \nabla \cdot (\overline{\zeta v'' v''}) \quad [3.1.1]$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{v} + (\hat{v} \cdot \nabla) \hat{v} + 2 \mathbf{n} \times \hat{v} = -\nabla \phi - \frac{1}{\bar{\zeta}} \nabla \bar{p} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \nabla \cdot (\bar{\mathbb{F}} - \overline{\zeta v'' v''}) \quad [3.1.2]$$



Esta última es una ecuación para la variable promediada  $\bar{\psi}$  en la que aparecen las fluctuaciones  $\psi''$  a través de los denominados términos de Reynolds.

Aplicando [3.3] y [3.4] a [2.2] se tiene que:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\psi} \hat{v}) = 0 \quad [3.1.3]$$

y ésta, por [3.5] y [3.6] queda de la forma:

$$\frac{d}{dz} (\bar{\psi} \hat{w}) = 0 \quad [3.1.4]$$

o sea:

$$\bar{\psi} \hat{w} = cte \quad [3.1.5]$$

Esta constante es nula pues la superficie terrestre no actúa ni como fuente ni como sumidero, es decir  $w(z=0)=0$  y entonces:

$$\hat{w} = 0 \quad [3.1.6]$$

Aplicando las condiciones [3.5], [3.6], [3.7], [3.8] y [3.1.6] a la ecuación [3.1.2] se llega al siguiente par de ecuaciones:

$$f k \times (\hat{v}_h - \hat{v}_g) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} (\bar{\rho} \overline{w''v''}) \quad [3.1.7]$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\rho} g = 2 |\omega| \cos \varphi |v_{hOE}| - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} (\bar{\rho} \overline{(w'')^2}) \quad [3.1.8]$$

y despreciando los términos del segundo miembro, que son del orden de  $10^{-1} 10^{-2} g \text{cm}^{-2} \text{seg}^{-2}$  respecto de los del primer miembro, del orden de  $1 g \text{cm}^{-2} \text{seg}^{-2}$  la [3.1.8] se transforma en la ecuación hidrostática.

Si se escribe la ecuación [3.1.7] en componentes, se tiene:

$$f (\hat{u} - \hat{u}_g) = \frac{d}{dz} \frac{z_y}{\bar{\rho}} + \frac{z_y}{\bar{\rho}^2} \frac{d}{dz} \bar{\rho} \quad [3.1.9]$$

$$-f (\hat{v} - \hat{v}_g) = \frac{d}{dz} \frac{z_x}{\bar{\rho}} + \frac{z_x}{\bar{\rho}^2} \frac{d}{dz} \bar{\rho} \quad [3.1.10]$$

donde  $z_x = -\overline{\rho u'' w''}$  ,  $z_y = -\overline{\rho v'' w''}$  [3.1.11]

son las componentes según x e y del flujo turbulento de momento.

Considerando además que:

$$\left| \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right| \ll \left| \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{dz}{dz} \right| \quad [3.1.12]$$

se llega a:

$$f (\hat{u} - \hat{u}_g) = \frac{d}{dz} \left( \frac{z_y}{\bar{\rho}} \right) \quad [3.1.13]$$

$$-f(\hat{v} - \hat{v}_\alpha) = \frac{d}{dz} \left( \frac{z_x}{\bar{\rho}} \right) \quad [3.1.14]$$

y este par de ecuaciones representan la parte dinámica de la capa límite planetaria.

### 3.2 Ecuación de energía termodinámica

Haciendo uso de la relación que define la temperatura potencial  $\theta$ :

$$\theta = T \left( \frac{p_e}{p} \right)^\alpha \quad [3.2.1]$$

donde

$$\alpha = \frac{c_p - c_v}{c_p} \quad [3.2.2]$$

se puede escribir la ecuación [2.3] como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{c_p} \frac{\theta}{T} S_Q \quad [3.2.3]$$

Mediante el uso de las ecuaciones [3.3] y [3.4], se puede obtener:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + (\hat{v} \cdot \nabla) \hat{\theta} = \frac{1}{c_p} \left( \frac{\theta}{T} S_Q \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}'' \theta'') \quad [3.2.4]$$

La cantidad  $S_Q$  contiene los siguientes términos:

$$a) \quad (\overline{\rho S_Q})_a = \gamma_h \nabla^2 (c_v \bar{\rho} \hat{T}) \quad [3.2.5]$$

que representa la divergencia del flujo molecular de calor. Según la condición [3.6], su componente horizontal es nula y la parte restante, o sea, su componente vertical, también se desprecia por la condición [3.13].

$$b) \quad (\overline{\rho S_Q})_b = \bar{\rho} \epsilon_m \quad , \quad \epsilon_m > 0 \quad [3.2.6]$$

$$c) \quad (\overline{\rho S_Q})_c = \bar{\rho} \epsilon_t \quad , \quad \epsilon_t > 0 \quad [3.2.7]$$

$\epsilon_m$  y  $\epsilon_t$  son las disipaciones de energía cinética del flujo medio y turbulento respectivamente y las expresiones representan conversiones de energía cinética en calor, siendo válida la siguiente relación:

$$\epsilon_m \ll \epsilon_t \quad [3.2.8]$$

Es decir, la disipación de energía cinética del flujo medio es mucho menor que la disipación de energía cinética turbulenta, pero aún esta contribuye poco, comparada con los demás términos, al aumento de energía interna, por lo tanto, se desprecian ambas.

$$d) \quad (\overline{\zeta S Q})_d = -(\nabla \cdot \overline{R R}) \quad [3.2.9]$$

Este término es el de divergencia de flujo radiativo y se reduce tan solo a la divergencia vertical, quedando:

$$(\overline{\zeta S Q})_d \doteq -\frac{d\overline{R_z}}{dz} \quad [3.2.10]$$

Una interesante discusión acerca del efecto de este término fue dada por Busch (10).

$$e) \quad (\overline{\zeta S Q})_e = -\overline{\zeta} L_v S \hat{q} \quad [3.2.11]$$

$S \hat{q} > 0$  representa evaporación y  $S \hat{q} < 0$  condensación.

Con estas consideraciones anteriores y haciendo uso de las condiciones [3.5], [3.6], [3.1.3] y [3.1.6] se obtiene:

$$c_p \frac{d}{dz} (\overline{\zeta W'' \theta''}) + \frac{\hat{\theta}}{\hat{\tau}} \frac{d\overline{R_z}}{dz} + \frac{\hat{\theta}}{\hat{\tau}} \overline{\zeta} L_v S \hat{q} = 0 \quad [3.2.12]$$

Siendo ésta la expresión de la ecuación de energía termodinámica de la capa límite planetaria.

Denominando:

$$F_H = c_p \overline{\zeta W'' \theta''} \quad [3.2.13]$$

al flujo turbulento de calor sensible, la ecuación [3.2.12] expresa que una divergencia del mismo puede ser compensada por una convergencia del flujo radiativo o por una liberación de calor debida a la condensación del vapor de agua.

Si no se consideran procesos radiativos y se supone una capa límite planetaria "seca", entonces [3.2.12] se transforma en:

$$\frac{d}{dz} (c_p \overline{\zeta W'' \theta''}) = 0 \quad [3.2.14]$$

de donde surge que el flujo turbulento de calor sensible es constante.

### 3.3 Ecuación de humedad

Se obtiene a partir de la ecuación de conservación de humedad:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\gamma_q}{\zeta} \nabla^2 (\zeta q) + S q \quad [3.3.1]$$

El primer y segundo término del segundo miembro representan, respectivamente, a la divergencia del transporte molecular de vapor de agua y a la fuente o sumidero de vapor de agua debido a un cambio de fase, con la convención siguiente:  $S q > 0$ , significa evaporación y  $S q < 0$  condensación o sublimación.

Es de notar que en el sistema básico de ecuaciones que se to-

mó como punto de partida, no se incluyó la ecuación de conservación de humedad. En caso de hacerlo, se introduce una nueva variable, la humedad específica  $q$  y dicho sistema será cerrado si se parametriza el término que contiene a  $Sq$ .

Mediante una combinación de [3.3.1] con [2.2] y usando [3.3] y [3.4] se tiene:

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + (\hat{v} \cdot \nabla) \hat{q} = \frac{\gamma_1}{\bar{s}} \nabla^2 (\bar{s} \hat{q}) + S \hat{q} - \frac{1}{\bar{s}} \nabla \cdot (\bar{s} w'' q'') \quad [3.3.2]$$

y con las consideraciones [3.5], [3.6], [3.14] y [3.16] se obtiene:

$$\frac{d}{dz} (\bar{s} w'' q'') = \bar{s} S \hat{q} \quad [3.3.3]$$

que representa la ecuación de humedad de la capa límite planetaria.

Llamando:

$$F_Q = \overline{\bar{s} w'' q''} \quad [3.3.4]$$

al flujo turbulento de humedad, en caso de no existencia de cambios de fase del vapor de agua, el mismo se mantiene constante.

#### 3.4. Resumen y consideraciones acerca del sistema de ecuaciones de la capa límite planetaria

Resumiendo lo anterior, el conjunto de ecuaciones que gobiernan a la capa límite planetaria, puede escribirse, ordenando lo visto, como:

Ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z_x}{\bar{s}} \right) = -f (\hat{v} - \hat{v}_g) \quad [3.4.1]$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z_y}{\bar{s}} \right) = f (\hat{u} - \hat{u}_g) \quad [3.4.2]$$

Ecuación de energía:

$$\frac{d}{dz} (F_H) = -\frac{\hat{\theta}}{\hat{\tau}} \frac{d}{dz} (R_z) - \frac{\hat{\theta}}{\hat{\tau}} \bar{s} L_v S \hat{q} \quad [3.4.3]$$

Ecuación de humedad:

$$\frac{d}{dz} (F_Q) = \bar{s} S \hat{q} \quad [3.4.4]$$

Resolver este sistema, significa encontrar, bajo determinadas condiciones de contorno en la superficie terrestre y en el tope de la capa límite, las distribuciones de  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{q}$ ,  $z_x$ ,  $z_y$ ,  $F_H$  y  $F_Q$  respecto de la variable independiente  $z$ .

Constituye un sistema de ecuaciones diferenciales no cerrado de 4 ecuaciones con 8 incógnitas, y por lo tanto, para poder resolverlo, hay que ensayar hipótesis de cierre, problema éste que se ha denominado de clausura.

### 3.5. Ecuaciones de energía de la capa límite planetaria

Siguiendo a Wippermann (7), donde se hace un excelente tratamiento de las distintas energías que deben considerarse en la capa límite atmosférica, se muestran las ecuaciones que cumplen las mismas:

Ecuación de energía cinética del flujo medio:\*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\rho} \frac{\hat{v}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \bar{\rho} \hat{v} \frac{\hat{v}^2}{2} \right) = -\bar{\rho} \hat{v} \cdot \nabla \phi - \hat{v} \cdot \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\hat{v} \cdot \mathbb{F}) - \nabla \cdot (\hat{v} \cdot \overline{\rho v'' v''}) - \bar{\rho} \epsilon_m + \overline{\rho v'' v'' \cdot \nabla \hat{v}} \quad [3.5.1]$$

Ecuación de energía cinética del flujo turbulento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \overline{\rho \frac{(v'')^2}{2}} \right] + \nabla \cdot \left[ \hat{v} \overline{\rho \frac{(v'')^2}{2}} \right] + \nabla \cdot \left[ \overline{\rho v'' \frac{(v'')^2}{2}} \right] - \nabla \cdot (\overline{v'' \cdot \mathbb{F}}) = -\overline{v'' \cdot \nabla \bar{p}} - \bar{\rho} \epsilon_t - \overline{\rho v'' v'' \cdot \nabla \hat{v}} \quad [3.5.2]$$

Ecuación de energía interna:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_v \bar{\rho} \hat{T}) + \nabla \cdot (c_p \bar{\rho} \hat{v} \hat{T}) + \nabla \cdot (c_p \overline{\rho v'' T''}) = \bar{\rho} \hat{v} \cdot \nabla \phi + \hat{v} \cdot \nabla \bar{p} + \overline{v'' \cdot \nabla \bar{p}} + \overline{\rho S Q} \quad [3.5.3]$$

donde:

$$\overline{\rho S Q} = \gamma_h \nabla^2 (c_v \bar{\rho} \hat{T}) + \bar{\rho} \epsilon_m + \bar{\rho} \epsilon_t - \nabla \cdot \overline{\mathbb{R}} - \bar{\rho} L_v S \hat{q} \quad [3.5.4]$$

Ecuación de energía del calor latente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{q}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{v} \hat{q}) + \nabla \cdot (\overline{\rho v'' q''}) - \gamma_q \nabla^2 (\bar{\rho} \hat{q}) = \bar{\rho} S \hat{q} \quad [3.5.5]$$

Este conjunto de ecuaciones de energía de la capa límite atmosférica, escritas en forma reordenada se muestran en la Tabla 1.

La Tabla 2, muestra la forma que adopta dicho sistema en la capa límite planetaria, cuando al mismo se le aplican las condiciones (a), (b), (c) y (d) que la definen.

\* El doble punto indica una contracción de los tensores diádicos definida por:

$$AB \cdot CD = (A \cdot D)(B \cdot C)$$

Divergencia del transporte por movimiento turbulento promedio	Conversiones de energía
<p>Ecuación de energía cinética del flujo medio</p> $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \overline{\frac{\hat{v}^2}{2}} \right] + \nabla \cdot (\hat{v} \overline{\hat{c} \frac{\hat{v}^2}{2}}) + \nabla \cdot (\hat{v} \cdot \overline{\hat{c} v'' v''}) - \nabla \cdot (v \cdot \overline{v \cdot F})$ <p>Ecuación de energía cinética del flujo turbulento</p> $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \overline{\frac{(v'')^2}{2}} \right] + \nabla \cdot \left[ \hat{v} \overline{\left[ \frac{(v'')^2}{2} \right]} \right] + \nabla \cdot \left[ \overline{v'' \left[ \frac{(v'')^2}{2} \right]} \right] - \nabla \cdot (\overline{v'' \cdot F})$ <p>Ecuación de energía interna y potencial</p> $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \overline{\hat{c} (\hat{c}_v \hat{T} + \phi)} \right] + \nabla \cdot \left[ \hat{v} \overline{\hat{c} (\hat{c}_p \hat{T} + \phi)} \right] + \nabla \cdot (\overline{c_p \hat{c} v'' T''}) - \gamma_h \hat{c}_v \nabla^2 (\overline{\hat{c} \hat{T}})$ <p>Ecuación de energía del calor latente</p> $\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\hat{c} L \hat{q}}) + \nabla \cdot (\hat{v} \overline{\hat{c} L \hat{q}}) + \nabla \cdot (\overline{L \hat{c} v'' q''}) - \gamma_q L \nabla^2 (\overline{\hat{c} \hat{q}})$	$- \overline{\hat{c} \epsilon_m} \quad - \overline{\hat{c} \hat{v} \cdot \nabla \phi} - \hat{v} \cdot \overline{\nabla \rho} \quad - \overline{\hat{c} \epsilon_t} \quad - \overline{\hat{c} v'' v'' \cdot \nabla \hat{v}} \quad - \overline{\hat{c} \epsilon_t} \quad - \overline{\hat{c} v'' v'' \cdot \nabla \hat{v}} \quad - \overline{\hat{c} \epsilon_t} \quad + \overline{\hat{c} \hat{v} \cdot \nabla \phi} + \hat{v} \cdot \overline{\nabla \rho} + \overline{\hat{c} \epsilon_m} + \overline{\hat{c} \epsilon_t} \quad - \overline{\hat{c} \hat{c} \hat{q}} - \nabla \cdot \overline{L \hat{c} \hat{q}} \quad + \overline{L \hat{c} \hat{q}}$

Tabla 1: Conjunto de ecuaciones de energía y conversiones en la capa límite atmosférica

Ecuación de energía cinética del flujo medio

$$-\frac{d}{dz} (\bar{z} \cdot \hat{v}_h) = -f \bar{z} k \cdot (\hat{v}_h \times \hat{v}_g) - \bar{z} \epsilon_m - (\bar{z} \cdot \frac{d\hat{v}_h}{dz})$$

Ecuación de energía cinética del flujo turbulento

$$\frac{d}{dz} \left[ \overline{z w''} \frac{(v'')^2}{2} \right] = -\overline{g' w'} - \frac{d}{dz} (\overline{w' p'}) - \bar{z} \epsilon_t + (\bar{z} \cdot \frac{d\hat{v}_h}{dz})$$

Ecuación de energía interna y potencial

$$\frac{d}{dz} (\overline{c_p z w'' T''}) = +f \bar{z} k \cdot (\hat{v}_h \times \hat{v}_g) + \overline{g' w'} + \frac{d}{dz} (\overline{w' p'}) + \bar{z} \epsilon_m - \bar{z} \epsilon_t - L \bar{z} S \hat{q} - \frac{dR_z}{dz}$$

Ecuación de energía del calor latente

$$\frac{d}{dz} (\overline{L z w'' q''}) = +L \bar{z} S \hat{q}$$

Tabla 2: Conjunto de ecuaciones de energía y conversiones en la capa límite planetaria

#### 4. PROBLEMA DE CLAUSURA

El sistema de ecuaciones de la capa límite planetaria, [3.4.1] a [3.4.4], con las consideraciones:

- a) No existen efectos radiativos.
- b) No hay cambios de fase del vapor de agua.

se transforma en:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\bar{z}_x}{\bar{S}} \right) = -f (\hat{v} - \hat{v}_g) \quad [4.1]$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\bar{z}_y}{\bar{S}} \right) = f (\hat{u} - \hat{u}_g) \quad [4.2]$$

$$\frac{d}{dz} (F_H) = 0 \quad [4.3]$$

$$\frac{d}{dz} (F_Q) = 0 \quad [4.4]$$

Las ecuaciones [4.1] y [4.2], como ya se ha visto, representan la parte dinámica y forman un sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas, que son  $\frac{\bar{z}_x}{\bar{S}}$ ,  $\frac{\bar{z}_y}{\bar{S}}$ ,  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$ . Es necesario pues, para clausurarlo hacer dos hipótesis.

Por otra parte, las ecuaciones [4.3] y [4.4], tal como están expresadas, no dan información acerca de  $\hat{\theta}(z)$  y  $\hat{q}(z)$ , esto implica la necesidad de dos hipótesis mas que relacionen  $F_H$  con  $\hat{\theta}(z)$  y  $F_Q$  con  $\hat{q}(z)$ .

Las necesidades anteriores quedan satisfechas mediante el empleo de las relaciones de flujos gradientes, que se representan por:

$$\bar{z}_x = \bar{S} K_m \frac{d\hat{u}}{dz} \quad [4.5]$$

$$\bar{z}_y = \bar{S} K_m \frac{d\hat{v}}{dz} \quad [4.6]$$

$$F_H = -c_p \bar{S} K_h \frac{d\hat{\theta}}{dz} \quad [4.7]$$

$$F_Q = -\bar{S} K_q \frac{d\hat{q}}{dz} \quad [4.8]$$

que representan una clausura de primer orden.

El sistema se transforma en:

$$\frac{d}{dz} \left( K_m \frac{d\hat{u}}{dz} \right) = -f (\hat{v} - \hat{v}_g) \quad [4.9]$$

$$\frac{d}{dz} \left( K_m \frac{d\hat{v}}{dz} \right) = f (\hat{u} - \hat{u}_g) \quad [4.10]$$



$$\frac{d}{dz} \left( K_h \frac{d\hat{\theta}}{dz} \right) = 0 \quad [4.11]$$

$$\frac{d}{dz} \left( K_q \frac{d\hat{q}}{dz} \right) = 0 \quad [4.12]$$

En las ecuaciones [4.11] y [4.12] se despreció la variación vertical de densidad.

Ahora el sistema es de 4 por 7 ( $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{q}$ ,  $K_m$ ,  $K_h$  y  $K_q$ ) y entonces se necesitan tres hipótesis de clausura.

En lo que sigue, se señalan algunas alternativas de clausura.

a) Haciendo:

$$K_m = K_m(z) \quad [4.13]$$

b) Mediante:

$$K_m = l^2 \left| \frac{d\hat{v}}{dz} \right| \quad [4.16]$$

y esta relación es conocida como relación de longitud de mezcla de Prandtl, siendo necesaria una hipótesis adicional acerca de  $l$ .

c) Relacionando  $K_m$  con  $l$  y  $b$ , a través de:

$$K_m = l \cdot b^{1/2} \quad [4.17]$$

siendo

$$b = \frac{\int (\hat{v}''')^2}{2\bar{g}} \quad [4.18]$$

de donde se infiere que hay que hacer hipótesis para  $l$  y  $b$ , y a ésta última, en general, se la incluye usando:

$$K_m \frac{d\hat{v}}{dz} - K_h \frac{g}{\hat{\theta}} \frac{d\hat{\theta}}{dz} - \frac{d}{dz} K_b \frac{db}{dz} - \varepsilon_t = 0 \quad [4.19]$$

y se necesitan dos hipótesis más, pudiendo ser:

$$K_b = K_h \quad [4.20]$$

$$\varepsilon_t = c l^{-1} b^{3/2} \quad [4.21]$$

Estos modelos incluyen a la ecuación 4.11 y es necesaria una hipótesis acerca de  $K_h$ .

d) Si la parte dinámica del sistema se considera desacoplada respecto de las ecuaciones [4.11] y [4.12], pueden considerarse éstas con sus variables  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{q}$ ,  $K_h$  y  $K_q$ , siendo una posible clausura:

$$K_h = K_q \quad [4.22]$$

e) Si en cambio, se supone acoplada la parte dinámica, la clausura consiste en encontrar relaciones entre  $K_m$ ,  $K_h$  y  $K_q$ .

En los últimos años, algunos autores ensayaron otros tipos de clausura, denominados de orden superior y que consiste en evitar la parametrización directa de las dos componentes del flujo turbulento de momento  $\overline{z_x} = -\overline{z'v''w''}$  y  $\overline{z_y} = -\overline{z'v''w''}$ , utilizándose ecuaciones adicionales para los mismos. En la capa límite planetaria, éstas son:

$$\frac{d}{dz} \left[ \overline{\hat{u}^2} + \overline{z'u''(w'')^2} \right] - f \overline{z'v''w''} - f^* \left[ \overline{\hat{u}^2} + \overline{z'u''(w'')^2} \right] + g \overline{z'u'} + \overline{u' \frac{\partial p'}{\partial z}} + \overline{w'' \frac{\partial p'}{\partial x}} - D_{xz} = 0 \quad [4.23]$$

$$\frac{d}{dz} \left[ \overline{\hat{v}^2} + \overline{z'v''(w'')^2} \right] + f \overline{z'u''w''} - f^* \left[ \overline{\hat{v}^2} + \overline{z'v''(w'')^2} \right] + g \overline{z'v'} + \overline{v' \frac{\partial p'}{\partial z}} + \overline{w'' \frac{\partial p'}{\partial y}} - D_{yz} = 0 \quad [4.24]$$

$D_{xz}$  y  $D_{yz}$  son términos de fricción molecular y  $f^* = 2 \Omega \cos \varphi$

Se ve en este caso que para determinar los términos de Reynolds, que son de segundo orden, hay que parametrizar otros, entre los que aparecen los de tercer orden. De la misma manera, se se escriben las ecuaciones conteniendo términos de orden  $n$ , hay que parametrizar términos de orden  $n+1$ , y esta es la denominada clausura de orden  $n$ .

Las distintas alternativas de clausura de orden 1 y superior han sido empleadas por distintos investigadores. Wippermann (7), Hanna (6) y Tsaan-Wang Yu (11) muestran características y listas de autores que han usado clausuras de primer orden. Busch (10), Walmsley (12) y Moor-André (13) tratan distintos aspectos de la clausura de orden superior.

Es importante señalar que la principal ventaja del uso de la clausura de primer orden está dada por la simplicidad de los sistemas de ecuaciones resultantes comparados con aquellos que se basan en clausuras de orden superior. Los resultados que se obtienen con métodos de primer orden son aceptables si se supone una buena estimación en los perfiles medios (13).

Formulaciones haciendo uso de la teoría  $K$  son incapaces de explicar el fenómeno conocido como flujo contragradiante, tal como señaló Deardorff (71). Este se da en turbulencia convectiva, en la parte superior de una capa límite de superficie inestable, dado que al ser  $\overline{w'\theta'} > 0$ , con  $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ , debería tomarse un valor negativo de  $K_h$  en la expresión [4.7]. Referencias a este

fenómeno pueden encontrarse en los trabajos de Wyngaard (72) y Walmsley (12). Deardorff (55) en su desarrollo acerca de modelos tridimensionales señala algunas limitaciones del uso de la clausura de primer orden y Donaldson (73) relaciona el uso de clausuras de primer orden y superior. Busch, Chang y Anthes (49) señalan comportamientos de modelos con distintas clausuras en el desarrollo de un modelo numérico de la capa límite planetaria para uso en modelos de mesoescala.

## 5. SUBDIVISIONES DE LA CAPA LIMITE ATMOSFERICA

Habiendo arribado, en el tratamiento anterior, al sistema de ecuaciones de la capa límite planetaria y puntualizando en que el mismo no admite soluciones analíticas, se mostraron las distintas alternativas de clausura. Conviene señalar que, bajo determinadas condiciones de contorno, es posible resolver dicho sistema, mediante el uso de técnicas del análisis numérico (14).

No obstante, los primeros intentos de resolución, antes del advenimiento de las computadoras electrónicas, se basaban en técnicas de linealización o en argumentos de similaridad. Actualmente siguen siendo ampliamente usadas y aún con el empleo del análisis numérico, distintas parametrizaciones y suposiciones físicas se basan en dichos métodos.

Busch (10) escribe: "Sin excepción, las aproximaciones hechas para obtener descripciones de la capa límite turbulenta han sido basadas en argumentos de similaridad. La idea general es que los flujos de interés pueden categorizarse en clases, dentro de las cuales, las propiedades estadísticas de los mismos pueden ser descriptas y pronosticadas usando un conjunto de relaciones y funciones empíricas, en conjunción con una serie de parámetros externos que caracterizan las condiciones bajo las cuales se desarrollan los campos de los flujos.

La utilidad de tal descripción depende del número y complejidad de las funciones empíricas necesarias para obtener resultados satisfactorios así como del número de parámetros externos."

Se mostrará, en lo que sigue, el empleo de algunas de dichas técnicas que permiten soluciones dentro de distintas subcapas de la capa límite atmosférica. Estas subcapas o subdivisiones se muestran en el esquema de la Figura 2.

Dentro de la capa de superficie o de flujos constantes, se mostrarán, siguiendo el planteo de Businger (4), distintas características de su estructura. Respecto a la capa laminar, se señalarán alguna de sus particularidades (4) (9) (15) y en la capa de transición se darán las soluciones obtenidas por Ekman (9) (15) (16).

### 5.1. Capa de superficie

También se la denomina capa de flujos constantes o capa de Prandtl. Se la define usualmente como la parte inferior de la capa límite atmosférica, en contacto con la superficie terrestre, caracterizada por la constancia de los flujos turbulentos con la altura (en realidad las mediciones determinan variaciones que oscilan entre un 10 y un 20 %). La interacción con la superficie terrestre es muy fuerte y el ajuste de su estructura a las condiciones de superficie es relativamente rápido, de aquí que se puede asumir dentro de la misma un estado cuasi-estacionario. Su altura es variable y puede darse como represen-

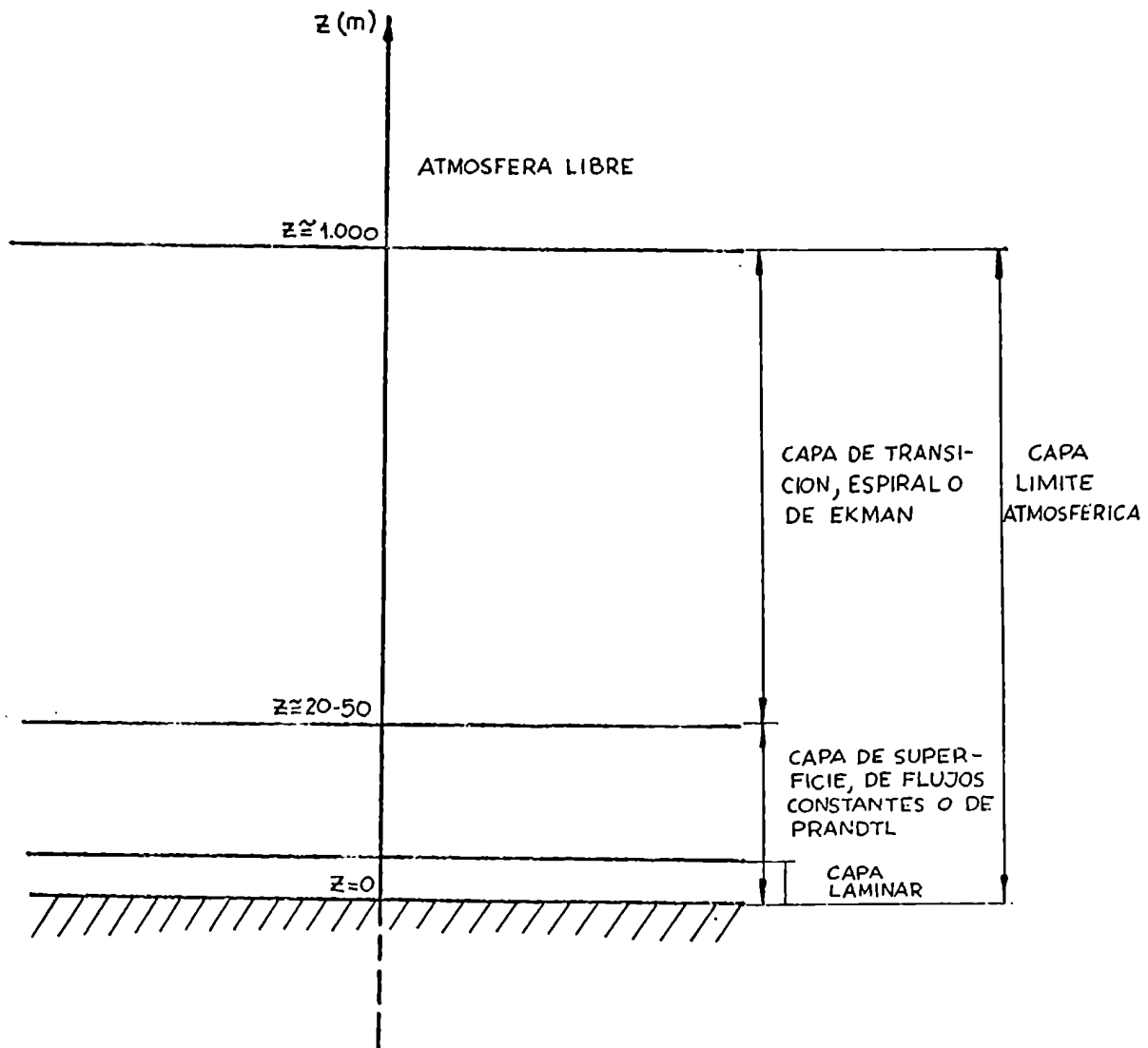


Figura 2: Subdivisiones de la capa límite atmosférica

tativo un valor entre 20 y 50 m.

En la descripción que Businger hace, relativa a la capa de superficie (4), se puntualiza como objetivo principal de los estudios de la capa límite atmosférica y en particular, de la capa de superficie, la obtención de expresiones tratables para los flujos turbulentos de momento, calor, humedad y de otros constituyentes de la atmósfera.

Debido a la complejidad de la turbulencia han sido desarrollados tan solo relaciones semi-empíricas y estas pueden dividirse en dos categorías principales:

a) Mediante el empleo de coeficientes de transferencia en forma integrada.

En particular, si se trata del flujo turbulento de momento, la expresión es de la forma

$$F_m = \int C_D \bar{u}^2 \quad [5.1.1]$$

El coeficiente de transferencia,  $C_D \bar{u}$ , que se piensa como un coeficiente adimensional conveniente, es función de  $z$ , pues  $\bar{u}$  es función de dicha variable.

Varios investigadores encararon la problemática de encontrar experimentalmente el valor de  $C_D$  y también los relativos a las transferencias de calor y humedad, que son respectivamente  $C_H$  (denominado de Stanton) y  $C_E$  (denominado de Dalton), para determinar:

$$F_m = \int C_D (\bar{u} - u_o)^2 \quad [5.1.2]$$

$$F_H = C_p \int C_H (\bar{u} - u_o) (\theta_o - \bar{\theta}) \quad [5.1.3]$$

$$F_q = L \int C_E (\bar{u} - u_o) (q_o - \bar{q}) \quad [5.1.4]$$

Businger (4) hace referencia al problema. Un tratamiento del mismo se encuentra en el trabajo de Boullery (17), donde se da la teoría respectiva y se muestran las estimaciones de  $C_D$  en función de rangos de  $\bar{u}$  (10 m) realizadas por distintos investigadores, para los casos en que se considere constante o variando linealmente con el viento. Dichos resultados se muestran en las Tablas 3 y 4 respectivamente.

b) Usando coeficientes de transferencia turbulenta  $K$  (denominados también de difusividad turbulenta).

En el caso que se ejemplificó anteriormente, la expresión es:

$$F_m = - \int K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad [5.1.5]$$

Comparada esta expresión con la dada en [4.5] se debe puntualizar que se toma una notación distinta, suponiendo que el vector  $\nabla$ , admite solo componente según el versor  $\hat{i}$ . El análisis es similar, pues dentro de la capa límite de superficie se admite una variación en el módulo de  $\nabla$  pero la dirección se considera constante. El uso de distintas notaciones y distintos sistemas de unidades es frecuente en la literatura de los distintos enfoques de la capa límite atmosférica.

Si se consideran los demás flujos turbulentos se obtienen expresiones similares.

Es claro notar que dichas expresiones permiten, a través de estimaciones de los coeficientes de difusividad turbulenta, obtener los flujos turbulentos a partir del conocimiento de los

AUTOR	RANGO DE VELOCIDAD	$C_D$
Wilson (1960)	$1 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{u}_{10} < 10 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$ $10 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{u}_{10}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$ $2,47 \cdot 10^{-3}$
Brocks y Krügermeyer (1970)	_____	$(1,23 \pm 0,25) \cdot 10^{-3}$
Mitsuta y Fujitani (1974)	$3 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{u}_{10} < 9 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$
Kraus (1972)	$5 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{u}_{10} < 15 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$(1,30 \pm 0,30) \cdot 10^{-3}$
Düchel y Hasse (1974)	_____	$1,39 \cdot 10^{-3}$
Kitaygorodsky (1973)	_____	$(1,07 \pm 0,43) \cdot 10^{-3}$

Tabla 3: Valores de  $C_D$  obtenidos por distintos autores en el caso en que se considera constante

AUTOR	RANGO DE VELOCIDAD	$C_D$
Sheppard (1958)	$1 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{\mu}_{10} < 20 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$(0,8 + 0,114 \cdot \bar{\mu}_{10}) \cdot 10^{-3}$
Deacon y Webb (1962)	$1 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{\mu}_{10} < 14 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$(1 + 0,07 \cdot \bar{\mu}_{10}) \cdot 10^{-3}$
Sheppard (1971)	$3 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{\mu}_{10} < 16 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$(0,36 + 0,10 \cdot \bar{\mu}_{10}) \cdot 10^{-3}$
Sheppard (1973)	$3 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{\mu}_{10} < 10 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$(0,82 + 0,039 \cdot \bar{\mu}_{10}) \cdot 10^{-3}$
Smith (1975)	$3 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1} < \bar{\mu}_{10} < 21 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$	$(0,63 + 0,066 \cdot \bar{\mu}_{10}) \cdot 10^{-3}$

Tabla 4: Valores de  $C_D$  obtenidos por distintos autores en el caso en que se considera variando linealmente con el viento.



perfiles medios de las variables.

La estructura de la capa límite atmosférica y en particular la de la capa de superficie es dependiente del tipo de estabilidad y entonces se distingue entre capa de superficie neutra y no neutra (estable o inestable).

Si hay neutralidad vale el siguiente análisis:

Partiendo de la definición del flujo turbulento de momento:

$$F_m = -|\tau| = \rho \overline{u'w'} \quad [5.1.6]$$

e introduciendo una escala de velocidad conveniente, puede definirse:

$$\mu_* = \left( \frac{|\tau|}{\rho} \right)^{1/2} \quad [5.1.7]$$

Entonces, haciendo uso de [5.1.5], dentro de la capa de superficie se tiene:

$$K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \mu_*^2 \quad [5.1.8]$$

donde  $\mu_*$  es independiente de la altura.

Esta ecuación permite la obtención del perfil de  $\bar{u}$  con  $z$ , haciendo para ello una suposición acerca de  $K_m$ . Dicha suposición puede hacerse usando la teoría de longitud de mezcla de Prandtl (9) o por consideraciones dimensionales. Si se hace lo último se deduce que las dimensiones de  $K_m$  son las de velocidad por longitud y se considera pues:

$$K_m \propto \mu_* \cdot z \quad [5.1.9]$$

o

$$K_m = k \cdot \mu_* \cdot z \quad [5.1.10]$$

A esta constante de proporcionalidad  $k$  se la denomina constante de Von Karman.

Combinando [5.1.10] con [5.1.8] se llega a:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\mu_*}{k \cdot z} \quad [5.1.11]$$

Según esta expresión, en superficie ( $z=0$ ), el perfil es infinito, y de ahí que se introduce un parámetro de rugosidad  $z_0$  tal que:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\mu_*}{k \cdot (z+z_0)} \quad [5.1.12]$$

Integrando se obtiene:

$$\bar{u} = \frac{\mu_*}{k} \cdot \ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right) \quad [5.1.13]$$

que es el conocido perfil logarítmico del viento.

Este perfil está considerablemente verificado en forma experimental. Las constantes  $k$  y  $z_0$  se deben determinar experimentalmente y su significado no está claramente entendido. Businger (4) se refiere a dichas constantes usando el postulado de Von Karman:

$$\overline{u'w'} = -\frac{k^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^4}{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right)^2} \quad [5.1.14]$$

Integrando esta ecuación usando [5.1.6] se puede obtener [5.1.12] y consecuentemente [5.1.13].

El valor de  $k$  es aún dudoso. Los experimentos realizados en túneles de viento permitieron obtener un valor de 0,4. Los realizados por el grupo de AFCRL en Kansas (18) determinaron un valor de 0,35 y aún son necesarios mas experimentos para definir esta cuestión. Se necesitan mediciones independientes de  $\bar{z}$  y del perfil de  $\bar{u}$  bajo condiciones de neutralidad. Si las mediciones se realizan a alturas  $z \gg z_0$ , de [5.1.12] se tiene:

$$k = \frac{\mu_*}{z \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} \quad [5.1.15]$$

Esta ha sido la relación usada en las experiencias de Kansas.

Una interesante relación acerca de  $k$  se obtiene a partir de la ecuación de energía cinética turbulenta (10), que en condiciones neutrales queda expresada como:

$$\frac{\mu_*^3}{k \cdot z} = b \quad [5.1.16]$$

El espectro unidimensional de varianza en el subrango inercial está dado por:

$$E(k) = \alpha \cdot b^{2/3} \cdot k^{-5/3} \quad [5.1.17]$$

Sustituyendo [5.1.16] en [5.1.17], se tiene:

$$E(k) = \alpha \cdot \mu_*^2 \cdot k^{-2/3} \cdot z^{-2/3} \cdot k^{-5/3} \quad [5.1.18]$$

o

$$\alpha \cdot k^{-2/3} = \frac{E(k)}{\mu_*^2} \cdot z^{2/3} \cdot k^{5/3} \quad [5.1.19]$$

De donde se infiere que  $\alpha$ , denominada constante de Kolmogorov y  $k$  son interdependientes y una determinación experimental del segundo miembro de [5.1.19] permitiría conocer el valor de  $k$ .

Planteos en esta dirección, acerca de la teoría estadística de la turbulencia en la capa límite atmosférica se encuentran resumidos en Munn (1) y con extensión en Lumley-Panofsky (19), Busch (10) y Moor (20).

Si en la capa límite de superficie no existen condiciones de neutralidad, la estructura turbulenta de la misma está afectada por la presencia de un flujo de calor.

La importancia de los efectos térmicos fue estudiada por Richardson, tomando en consideración la ecuación de balance de la energía cinética turbulenta teniendo en cuenta la aproximación de Boussinesq (5) (21):

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{T_0} \overline{w'e'} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{e'w'} + \frac{1}{\rho_0} \overline{p'w'} - \nu \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} \right) - \nu \frac{\partial \mu'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \mu'_i}{\partial x_j} \quad [5.1.20]$$

Tomando el cociente adimensional entre el término de producción térmica  $\left( \frac{g}{T_0} \overline{w'e'} \right)$  y el de producción mecánica  $\left( \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$ , definió el denominado número de flujo de Richardson:

$$R_f = \frac{\frac{g}{T_0} \overline{w'e'}}{\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} \quad [5.1.21]$$

Por definición  $\overline{w'e'} > 0$  cuando el flujo de calor es hacia arriba (inestabilidad) y  $\overline{w'e'} < 0$  cuando dicho flujo es hacia abajo (estabilidad), y al ser negativo el denominador, salvo en circunstancias muy especiales, se tiene:

En condiciones de inestabilidad	$\overline{w'e'} > 0$	$R_f < 0$	
neutralidad	$\overline{w'e'} = 0$	$R_f = 0$	[5.1.22]
estabilidad	$\overline{w'e'} < 0$	$R_f > 0$	

La determinación de  $R_f$  es dificultosa pues hay que determinar covarianzas  $(\overline{u'w'}$  y  $\overline{w'e'})$  y para esto se necesita instrumental muy elaborado.

Si se hace uso de la teoría K, entonces se tiene:

$$R_f = \frac{\frac{g}{T_0} K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{K_m \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} \quad [5.1.23]$$

y si se supone  $K_m = K_h$  (no exactamente válida) se llega a:

$$R_i = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} \quad [5.1.24]$$

conocido como número de Richardson. A partir del mismo puede estudiarse la importancia relativa de los efectos térmicos y mecánicos tan solo con el conocimiento de los perfiles de  $\bar{u}$  y  $\bar{\theta}$ .

Para las distintas clases de estabilidad se tiene:

inestabilidad	$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0$	$R_i < 0$
---------------	--	-----------

$$\begin{array}{lll} \text{neutralidad} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 & R_i = 0 \\ \text{estabilidad} & \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0 & R_i > 0 \end{array} \quad [5.1.25]$$

Es posible obtener un parámetro de estabilidad usando argumentos de similaridad, tal como lo hicieron Monin-Obukhov (21) considerando [5.1.20] e introduciendo una velocidad característica  $\mu_*$  y una longitud característica  $k \cdot z$ .

En efecto, multiplicando cada término de 5.1.20 por  $k \cdot z / \mu_*^3$  se tiene la ecuación de balance de energía cinética turbulenta en forma adimensional:

$$\frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\overline{u'w'}}{\partial z} + \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{g \cdot \overline{w'\theta'}}{T_0} - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{b'w'} + \frac{1}{S_0} \overline{p'w'} - \nu \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} \right) - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \nu \cdot \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad [5.1.26]$$

Definiendo un gradiente adimensional de velocidad:

$$\phi_m = \frac{k \cdot z}{\mu_*} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad [5.1.27]$$

5.1.26 se transforma en:

$$\frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = \phi_m + \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{g \cdot \overline{w'\theta'}}{T_0} - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{b'w'} + \frac{1}{S_0} \overline{p'w'} - \nu \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} \right) - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \nu \cdot \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad [5.1.28]$$

donde  $\phi_m$  y  $\frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{g \cdot \overline{w'\theta'}}{T_0}$  son respectivamente los términos de producción mecánica y térmica en forma adimensional.

En ésta última, a menos de  $z$  los demás son constantes dentro de la capa límite de superficie, o sea:

$$\frac{k}{\mu_*^3} \cdot \frac{g \cdot \overline{w'\theta'}}{T_0} = \text{cte} \quad [5.1.29]$$

Monin-Obukhov definieron una escala de longitud haciendo:

$$L = - \frac{1}{\frac{k}{\mu_*^3} \cdot \frac{g \cdot \overline{w'\theta'}}{T_0}} = - \frac{\mu_*^3 T_0}{k \cdot g \cdot \overline{w'\theta'}} \quad [5.1.30]$$

denominada longitud de Monin-Obukhov, cumpliéndose:

$$\begin{array}{ll} \text{inestabilidad} & L < 0 \\ \text{estabilidad} & L > 0 \end{array} \quad [5.1.31]$$

Entonces, [5.1.28] queda de la forma:

$$\frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = \phi_m - \frac{z}{L} - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{b'w'} + \frac{1}{S_0} \overline{p'w'} - \nu \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} \right) - \frac{k \cdot z}{\mu_*^3} \cdot \nu \cdot \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad [5.1.32]$$

y entonces, los efectos térmicos pueden ser representados por  $z/L$ , de aquí que se define el parámetro de estabilidad de Monin-Obukhov  $\xi$  como:

$$\xi = \frac{z}{L} \quad [5.1.33]$$

Puede notarse que

inestabilidad	$\xi < 0$	
neutralidad	$\xi = 0$	[5.1.34]
estabilidad	$\xi > 0$	

Los tres parámetros de estabilidad cumplen

$$R_f = \frac{K_h}{K_m} \cdot R_i = \frac{1}{\phi_m} \cdot \xi \quad [5.1.35]$$

Se retoma aquí el planteo de la obtención de los flujos turbulentos a partir del conocimiento de los perfiles medios.

Si bien los esfuerzos en encontrar soluciones analíticas no prosperaron, ha sido posible, mediante el uso del análisis de similitud, la obtención de relaciones semi-empíricas. Desarrollos de los fundamentos y del uso del análisis de similitud pueden encontrarse, entre otros, en el texto Manual de Física (22) y en los trabajos de Monin (3) y de Vasques (21).

Una completa descripción, usando los datos de Kansas (18), ha sido dada por Businger (4) mediante un desarrollo de las denominadas relaciones flujos-perfiles.

En dicha descripción, los perfiles de viento y temperatura fueron expresados en forma adimensional definiendo:

$$\phi_m = \frac{k \cdot z}{\mu_*} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad [5.1.36]$$

y

$$\phi_h = \frac{k \cdot z}{\theta_*} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad [5.1.37]$$

con:

$$\theta_* = \frac{-\overline{w'\theta'}}{\mu_*} \quad [5.1.38]$$

Tanto  $\phi_m$  como  $\phi_h$  son expresados como funciones de  $\xi$ . Los resultados de las observaciones se muestran en las Figuras 3 y 4. Un ajuste de dichas observaciones permite obtener:

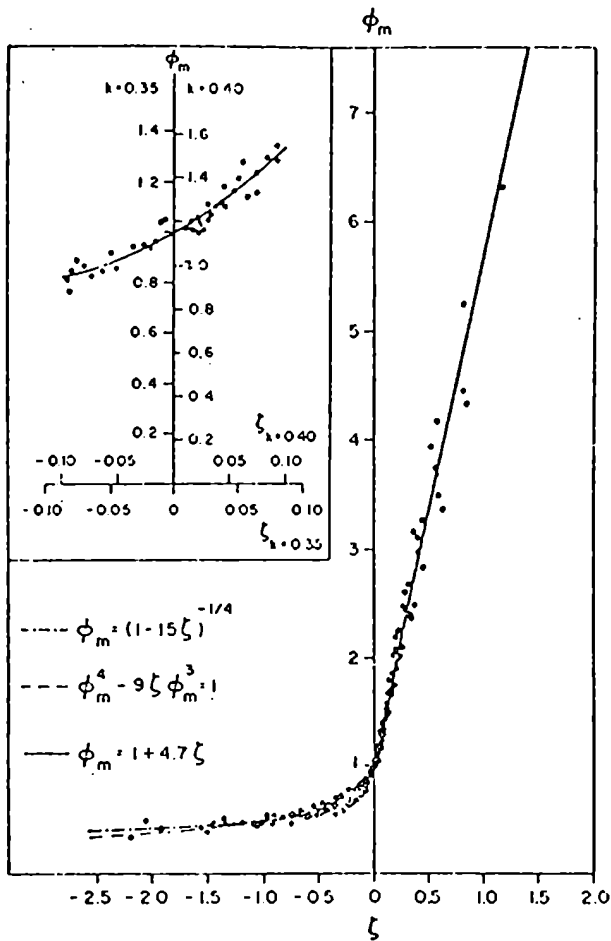


Figura 3: Comparación entre observaciones del perfil adimensional del viento con fórmulas de interpolación. (4)

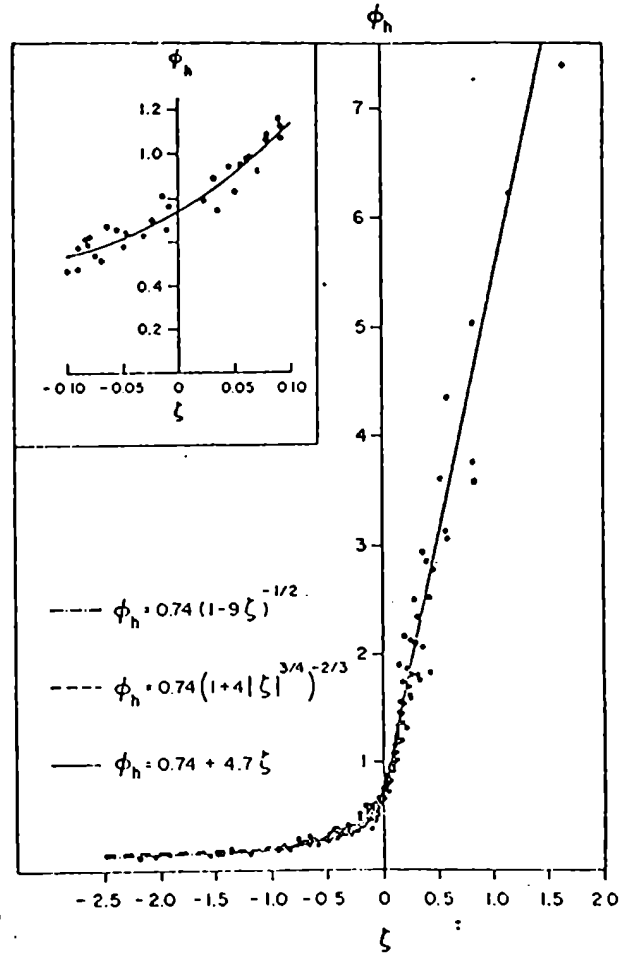


Figura 4: Comparación entre observaciones del gradiente adimensional de temperatura con fórmulas de interpolación. (4)

Para  $\xi < 0$  (inestabilidad)

$$\phi_m = (1 - 15 \cdot \xi)^{-1/4} \quad [5.1.39]$$

$$\phi_h = 0,74 \cdot (1 - 9 \cdot \xi)^{-1/2} \quad [5.1.40]$$

Para  $\xi > 0$  (estabilidad)

$$\phi_m = 1 + 4,7 \xi \quad [5.1.41]$$

$$\phi_h = 0,74 + 4,7 \xi \quad [5.1.42]$$

Cuando  $\xi = 0$ ,  $\phi_m = 1$  y el perfil de viento es el logarítmico y al ser  $\phi_h = 0,74$  se infiere que

$$\frac{\phi_m}{\phi_h} = \frac{K_h}{K_m} \quad 1,35 \quad [5.1.43]$$

Esta es una relación mayor que la que usualmente se usa para condiciones neutrales (se tomaba igual a 1), pero coincide con las mediciones de laboratorio.

Las ecuaciones [5.1.39] a [5.1.42] fueron integradas por Paulson (23) llegando a los siguientes resultados:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \cdot \left( \ln \frac{z}{z_0} - \psi_1 \right) \quad [5.1.44]$$

$$\bar{\theta} - \theta_0 = 0,74 \cdot \frac{\theta_*}{k} \left( \ln \frac{z}{z_0} - \psi_2 \right) \quad [5.1.45]$$

donde las funciones de estabilidad  $\psi_1$  y  $\psi_2$  están dadas por:

Para  $\xi < 0$

$$\psi_1 = 2 \cdot \ln [(1+x)/2] + \ln [(1+x)^2/2] - 2 \cdot \tan^{-1} x + \frac{\pi}{2} \quad [5.1.46]$$

$$\psi_2 = \ln [(1+y)/2] \quad [5.1.47]$$

con

$$x = \phi_m^{-1} \quad [5.1.48]$$

$$y = \phi_h^{-1} \quad [5.1.49]$$

Para  $\xi > 0$

$$\psi_1 = \psi_2 = -4,7 \cdot \xi \quad [5.1.50]$$

El uso de estas relaciones semi-empíricas puede encontrarse en los trabajos de Berri (24) y Aiello-Berri (8), en éste último también se supone la siguiente relación para  $\bar{q}$ :

$$\bar{q} - q_0 = 0,74 \cdot \frac{q_*}{k} \left( \ln \frac{z}{z_0} - \psi_2 \right) \quad [5.1.51]$$

con

$$q_* = \frac{-w'q'}{\mu_*} \quad [5.1.52]$$

Las relaciones  $\phi_m(\xi)$  y  $\phi_h(\xi)$  definen la estructura de la capa límite de superficie no neutra y se derivan las relaciones  $R_i(\xi)$  y  $\alpha(\xi_i)$  usando:

$$R_i = \frac{\xi}{\alpha \cdot \phi_m} = \frac{\xi \cdot \phi_h}{\phi_m^2} \quad [5.1.53]$$

$$\alpha = \frac{\phi_m}{\phi_h} \quad [5.1.54]$$

a partir de [5.1.39] a [5.1.42], obteniéndose:

Para  $\xi < 0$

$$R_i = \frac{0,74 \cdot \xi \cdot (1 - 15\xi)^{1/4}}{(1 - 9\xi)^{1/2}} \quad [5.1.55]$$

$$\alpha = \frac{1,35 (1 - 9\xi)^{1/2}}{(1 - 15\xi)^{1/4}} \quad [5.1.56]$$

Para  $\xi > 0$

$$R_i = \frac{0,74 \cdot \xi + 4,7 \xi^2}{(1 + 4,7\xi)^2} \quad [5.1.57]$$

$$\alpha = \frac{1,0 + 4,7\xi}{0,74 + 4,7\xi} \quad [5.1.58]$$

## 5.2. Subcapa laminar

En ciertos casos, cuando  $z_0$  es pequeño, o sea, para aquellas superficies suavizadas, el valor del coeficiente de difusividad turbulenta  $K_m = k \cdot \mu_* \cdot z_0$  puede llegar a ser del mismo orden de magnitud que  $\nu$ , que en el análisis realizado para obtener la expresión [5.1.13] de  $\bar{u}$ , no fue considerado. Entonces, cuando ello ocurre, en vez de considerar [5.1.8], se debe tomar:

$$(K_m + \nu) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \mu_*^2 \quad [5.2.1]$$

Aún mas, cuando:

$$K_m = k \cdot \mu_* \cdot z_0 \ll \nu \quad [5.2.2]$$



la estructura de la capa de superficie está dominada por los efectos de la viscosidad molecular y la transferencia turbulenta es despreciable. Esta condición permite la denominación de "flujo aerodinámicamente suave".

La teoría muestra que cuando:

$$Re = \frac{z_0 \cdot \mu_*}{\nu} > 2,5 \quad [5.2.3]$$

entonces es lícito no considerar  $\nu$  en [5.2.1], con lo cual vale la expresión [5.1.13].

Cuando:

$$Re < 0,13 \quad [5.2.4]$$

el flujo es aerodinámicamente suavizado y la expresión a usar es:

$$\nu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \mu_*^2 \quad [5.2.5]$$

de donde:

$$\bar{u} = \nu^{-1} \mu_*^2 z \quad [5.2.6]$$

Se ve que el perfil es lineal, y esto es válido en una capa de pequeño espesor en contacto con la superficie terrestre en cuestión donde es dominante la viscosidad molecular y se la denomina subcapa laminar.

### 5.3. Capa de transición

También se la denomina capa espiral o de Ekman, pues la solución del perfil de viento fue lograda por dicho investigador.

Un tratamiento matemático para arribar a dicha solución puede encontrarse en los textos de Haltiner-Martin (15), Wiin Nielsen (9) y Holton (16).

Siguiendo al segundo de ellos se muestran los fundamentos de la teoría de Ekman y los resultados obtenidos.

Se supone un balance entre las fuerzas de presión, de Coriolis y de fricción, con lo cual puede escribirse:

$$0 = -\frac{1}{S} \nabla_H \bar{p} - f \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{V}} + \frac{1}{S} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} \quad [5.3.1]$$

La Figura 5 muestra un balance de dichas fuerzas para el hemisferio sur.

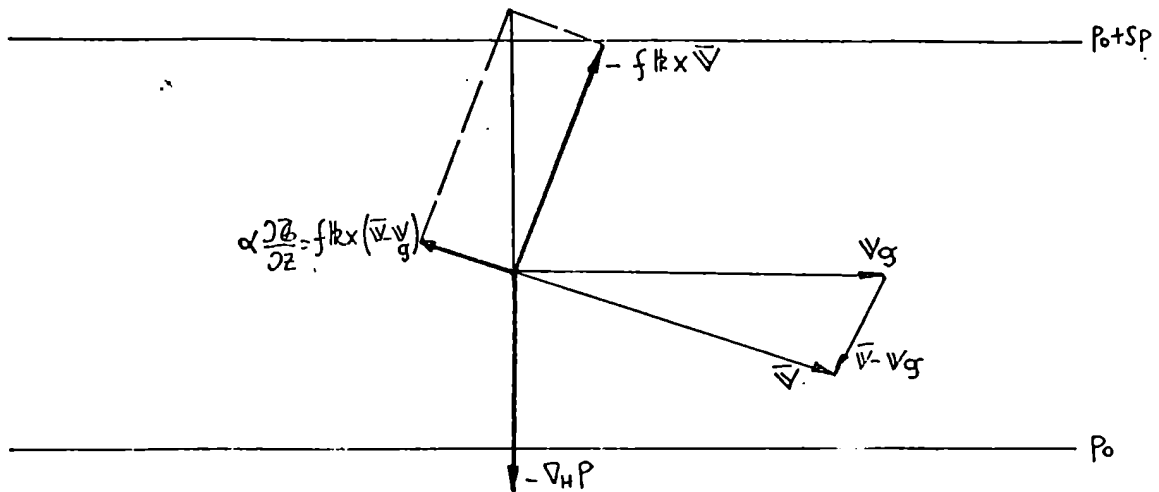


Figura 5: Balance de fuerzas en la capa de transición

Se plantea el problema de determinar  $\bar{v}(z)$  cuando el término de fricción está expresado en función de  $z$ , o sea:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \quad [5.3.2]$$

y se hace la suposición de que  $K_m$  es independiente de  $z$ , con lo cual

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = K_m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad [5.3.3]$$

Esto permite linealizar el sistema y entonces la ecuación diferencial lineal de segundo orden a resolver es:

$$K_m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - f k \times \bar{v} + f k \times \nabla_g = 0 \quad [5.3.4]$$

Escrita en componentes:

$$K_m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + f \bar{v} = 0 \quad [5.3.5]$$

$$K_m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - f (\bar{u} - \mu_g) = 0 \quad [5.3.6]$$

habiendo tomado  $\nabla_g = \mu_g \hat{i}$ .

Suponiendo que  $\nabla_g = \text{cte}$ , o lo que es lo mismo,  $\nabla_T = 0$ , se llega a la siguiente solución del sistema:

$$\bar{u} = \mu_g + \sqrt{2} \mu_g \cdot \text{sen} \alpha_0 \cdot e^{-z/H_*} \cdot \cos \left[ \left( \alpha_0 + \frac{3\pi}{4} \right) - \frac{z}{H_*} \right] \quad [5.3.7]$$

$$\bar{v} = -\sqrt{2} \, v_g \cdot \sin \alpha_0 \cdot e^{-z/H_*} \cdot \sin \left[ \left( \alpha_0 + \frac{3}{4} \pi \right) - \frac{z}{H_*} \right] \quad [5.3.8]$$

Esta solución es la que determina la denominada espiral de Ekman y de ahí que a esta capa se la denomina también capa espiral.

En estas expresiones  $H_* = \sqrt{2 \, K_m / f}$  y  $\alpha_0$  es el ángulo entre el viento real y el geostrófico en  $z=0$ .

En esta región de la capa límite atmosférica, al igual que como fue señalado para la capa límite de superficie, es posible hacer uso de argumentos de similaridad para determinar las características de las variables en cuestión.

Un exhaustivo estudio de dichos aspectos fue encarado por Tennekes (74), donde muestra como mediante la definición de una escala de longitud neutral  $\lambda$ , de una altura adimensional  $\tilde{\xi}$ , de un parámetro de estabilidad  $\mu$  y de una altura relativa  $\Lambda$ , expresadas mediante:

$$\lambda = \frac{k \, u_*}{f} \quad [5.3.9]$$

$$\tilde{\xi} = \frac{z}{\lambda} = \frac{z \, f}{k \, u_*} \quad [5.3.10]$$

$$\mu = \frac{\lambda}{L} = \frac{k \, u_*}{f \, L} \quad [5.3.11]$$

$$\Lambda = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \, f}{k \, u_*} \quad [5.3.12]$$

se llega a poder dar la estructura de la capa límite de transición en función del parámetro de estabilidad  $\mu$  (tal como se hizo con  $\xi$  en la capa límite de superficie), para lo cual son válidas las siguientes expresiones:

$$\frac{h}{\lambda} = \Lambda = \Lambda(\mu) \quad [5.3.13]$$

$$\sin \alpha = \frac{A(\mu)}{k} \cdot \frac{u_*}{|v_g|} \quad [5.3.14]$$

$$\ln R_0 = B(\mu) + \ln \frac{|v_g|}{u_*} + \left[ k^2 \frac{|v_g|^2}{u_*^2} - A^2(\mu) \right]^{1/2} \quad [5.3.15]$$

$$\frac{\theta_H - \theta_0}{\theta_*} = \left( \frac{K_m}{k_h} \right)_0 \left[ \ln \left( R_0 \frac{u_*}{|v_g|} \right) - C(\mu) \right] \quad [5.3.16]$$

donde  $R_0 = |v_g| / k \, z_0$  es el denominado número de Rossby.

Las funciones  $\Lambda(\mu)$ ,  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$  y  $C(\mu)$  fueron obtenidas a partir de datos experimentales y Tennekes (74) muestra gráficos de las mismas obtenidos por Zilitinkevitch.

## 6. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE MODELOS NUMERICOS DE LA CAPA LIMITE ATMOSFERICA

### 6.1. Planteo general

En la extensa literatura acerca de esta cuestión, que comprende libros de textos y gran cantidad de publicaciones científicas, es posible encontrar diversos planteos sobre el modelado de la capa límite atmosférica.

Los mismos comprenden el estudio de distintos aspectos del comportamiento de la capa límite atmosférica y conforman metodologías con las que pueden examinarse relaciones entre diversos factores externos y los parámetros internos que son estudiados.

Tal como se estructuró hasta aquí esta monografía, es interesante enfatizar que el planteo que debe hacerse para la denominada capa límite planetaria comprende el uso del sistema de ecuaciones [4.9] a [4.12] (o algún otro en el que se cumplan las condiciones que definen a la capa límite planetaria). Su resolución implica, con el uso de alguna alternativa de clausura y bajo ciertas condiciones de contorno en la superficie terrestre y en el tope de la capa límite planetaria, encontrar las distribuciones de las variables dependientes  $\hat{u}(z)$ ,  $\hat{v}(z)$ ,  $\hat{\theta}(z)$  y  $\hat{q}(z)$ .

Las condiciones a que se hace referencia fueron dadas anteriormente y es claro notar que por ejemplo, en el caso de intentar la resolución de un sistema no estacionario, no se cumpliría una de dichas condiciones (la (a)) y entonces, no se puede estrictamente hacer referencia a la capa límite planetaria, y lo mismo se extiende a los demás casos en que no se cumplan una o más de dichas condiciones. De aquí es que en lo que sigue se hace mención a sistemas de ecuaciones diferenciales de la capa límite atmosférica\*, entendiéndose por éstos, a sistemas simplificados respecto del sistema completo de ecuaciones [2.1] a [2.7], sobre los que no se imponen condiciones tan fuertes como aquellas que determinan a la capa límite planetaria.

Conforman sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, estacionarios o de evolución en espacios de una, dos y tres dimensiones.

Es importante mencionar que, debido a las dificultades de costos de instrumental, son pocas las experiencias realizadas para obtener mediciones de la capa límite atmosférica, de ahí que muchos de los modelos realizados conforman fundamentalmente aquel tipo denominado de simulación. En el desarrollo que sigue se hará mención de las experiencias más importantes que fueron usadas para los tests de alguno de los modelos que se mostrarán.

\*En adelante, por claridad en el texto, se obviarán las barras que indican variables promediadas, aunque las mismas se sigan tomando como sus valores medios.

## 6.2. Modelos estacionarios de la capa límite atmosférica en espacios de una, dos y tres dimensiones

El autor, en el trabajo de Tesis Doctoral aquí presentado, hace uso de una metodología propuesta por Estoque-Bhumralkar (25). La misma conforma un método para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en estado estacionario que gobiernan al flujo de la capa límite atmosférica. Es aplicable a movimientos sobre superficies homogéneas (caso unidimensional en el cual puede hacerse referencia a la capa límite planetaria) y sobre aquellas en que las propiedades varíen en una dirección (caso bidimensional) y en dos direcciones (caso tridimensional). También es aplicable a aquellos sistemas denominados acoplados (atmósfera-agua y atmósfera-suelo).

En el caso de estudiar un flujo sobre un terreno homogéneo, el sistema de ecuaciones a usar es el de la capa límite planetaria:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [6.2.1]$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad [6.2.2]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad [6.2.3]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad [6.2.4]$$

La clausura es una de primer orden con la suposición:

$$K_m = K_h = K_q = K \quad [6.2.5]$$

y para  $K$  se adopta una expresión similar a la obtenida por Blackadar (26).

Sobre los gradientes horizontales de presión se suponen

$$f \cdot u_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad [6.2.6]$$

$$f \cdot v_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad [6.2.7]$$

y tomando las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{En } z = 0, \quad u(0) = 0 \quad v(0) = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 \quad q(0) = q_0$$

$$\text{En } z = H, \quad u(H) = u_g \quad v(H) = v_g \quad \theta(H) = \theta_H \quad q(H) = q_H$$

es posible resolver el sistema como uno de valores de contorno mediante un proceso iterativo con el uso de un esquema centrado en diferencias finitas, con el cual es posible simular, defi-

niendo distintas condiciones de  $\theta_0$  y  $\theta_H$ , diversos casos de estabilidad atmosférica. Particularmente, detalles de esta metodología se dan extensamente en el trabajo de Tesis.

Estoque (27) muestra algunas características de uso y comparación de esta metodología con las usadas por otros investigadores.

Aiello (14) muestra resultados de dicho método usando distintas condiciones de contorno y considerando distintos casos de estabilidad.

Wippermann (28) presenta un método de resolución del sistema de ecuaciones de la capa límite planetaria, planteando un sistema de ecuaciones adimensionales que forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y usa un método de relajación según un procedimiento de Liebmann modificado. En dicho trabajo, se alude al método de Estoque-Bhumralkar señalando como desventaja el que puede ser usado para un número muy restringido de puntos según la coordenada  $z$ , a causa de la necesidad de inversión de una matriz (la que resuelve la distribución de  $u(z)$  y  $v(z)$ ) en el proceso iterativo.

Recientemente, Aiello-Berri (8) desarrollaron un método de resolución de las ecuaciones de la capa límite planetaria, considerándola subdividida en una capa de superficie y una de transición. En la capa de superficie se empleó la teoría de Monin-Obukhov usando las expresiones integradas de Paulson ([5.1.44], [5.1.45] y [5.1.51]), a través de un sistema iterativo, acoplando las soluciones así obtenidas a un esquema implícito en diferencias finitas para resolver en forma directa el sistema [6.2.1] a [6.2.4] de la capa de transición, en ésta capa, para calcular el coeficiente de difusividad turbulenta, se adoptó una expresión polinómica cúbica deducida por O'Brien (29).

Retomando el método de Estoque-Bhumralkar, se considera el estudio de las propiedades del flujo de la capa límite atmosférica en el caso en que las propiedades de la superficie terrestre varíen en una dada dirección. Los parámetros cuya variación es permitida son, el de rugosidad, la temperatura y la humedad específica.

Suponiendo que dicha dirección de variación sea según  $x$ , proponen entonces el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para el estudio en cuestión:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [6.2.8]$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad [6.2.9]$$

$$\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad [6.2.10]$$

$$\mu \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad [6.2.11]$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [6.2.12]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\gamma} = - \frac{\gamma \cdot g}{R \cdot \theta} \quad [6.2.13]$$

En la región bidimensional se supuso la incorporación de los términos advectivos en las ecuaciones de movimiento para  $u$  y  $v$ , en la ecuación de energía termodinámica y en la de humedad. La ecuación de movimiento para la velocidad vertical  $w$  fue aproximada mediante la consideración hidrostática y se consideró incompresibilidad.

Al igual que en el caso unidimensional se ensayó un cierre de primer orden, siendo válida la suposición [6.2.5] y la consideración de Blackadar en la elección de  $K$ .

El sistema es cerrado, las variables dependientes son  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\theta$  y  $q$ . El método de Estoque-Bhumralkar permite calcularlas en toda la región de resolución (coordenadas  $x$  y  $z$ ) tan solo a partir de las condiciones de contorno en la superficie terrestre (se pueden simular distintos casos reales) y en el tope de la capa límite atmosférica (a través de estimaciones sinópticas). Con extensión e introduciendo nuevos aspectos, el método en cuestión será explicado en el trabajo de Tesis. El mismo consiste en ir incorporando, a través de un proceso iterativo de solución de un sistema implícito de ecuaciones en diferencias finitas, los distintos mecanismos físicos que caracterizan al sistema de ecuaciones diferenciales.

El método puede extenderse al caso en que las propiedades del flujo varíen según dos direcciones ( $x$  e  $y$ ) y el efecto de la no homogeneidad según  $y$  se traduce en la incorporación de nuevos términos advectivos en las distintas ecuaciones y la introducción de  $\partial v / \partial y$  en la ecuación de continuidad.

El sistema adopta la forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [6.2.14]$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad [6.2.15]$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad [6.2.16]$$

$$u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad [6.2.17]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [6.2.18]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\gamma} = - \frac{\gamma \cdot g}{R \cdot \theta} \quad [6.2.19]$$

Valen las suposiciones mencionadas para los casos en las regiones uni y bidimensionales.

Es interesante mencionar que Estoque-Bhumralkar extienden esta metodología al estudio de acoples entre la capa límite atmosférica y una capa de suelo, incorporando a este efecto, una expresión simplificada de la ecuación de balance en condiciones estacionarias, detalles de la misma se encuentran en el trabajo de dichos autores.

Como se mencionó al comienzo, son muy pocas las experiencias realizadas con el fin de obtener mediciones de la capa límite atmosférica. La mayor parte de las efectuadas han sido llevadas a cabo buscando aquellas zonas con muy poca rugosidad y bajo adecuadas condiciones sinópticas. De importancia entre éstas últimas son la de Great Plains (30) y la de Wangara (31), y es en base a estos datos tomados en algunos días particulares, que se hacen los tests de alguno de los modelos que se mencionaron y también de otros que se describirán someramente mas adelante. Es importante expresar que las verificaciones o tests sólo se realizan en casos muy particulares, de ahí que la denominación, en la mayoría de los casos, sería la de modelos de simulación, enfatizando que la principal importancia de dichos modelos, es el conocer el comportamiento de los distintos efectos o mecanismos físicos en la capa límite atmosférica.

Muy pocas fueron las experiencias para medir parámetros de la capa límite atmosférica sobre terrenos no homogéneos, y en particular lo que fue mas medido es el campo de velocidad horizontal sobre una superficie sujeta a un cambio de rugosidad, y se citan, por ejemplo, las dos experiencias importantes llevadas a cabo por Bradley (32) y Peterson-Kristensen-Chang Chun Su (33). En ambos trabajos se mencionan las distintas teorías elaboradas para explicar el comportamiento del campo de viento en dicha situación. En el segundo de dichos trabajos se categorizan los enfoques en forma clara. Es de mención aquellos trabajos realizados por Elliot (34) y Panofsky-Townsend (35) basados en argumentos de similaridad. Mazzeo (36), haciendo referencia a la aplicación de la teoría de semejanza lagrangiana en la capa de superficie en el conocimiento de la dispersión vertical de contaminantes emitidos desde superficie y mediante una modificación de dicha hipótesis, obtiene las variaciones de la capa límite interna originada por un cambio abrupto de rugosidad. Descripciones de la capa límite interna están dadas en el texto de Plate (5).

Estoque-Bhumralkar hacen referencia a los trabajos de Nickerson (37), Onishi-Estoque (38), Onishi (39), Taylor (40) y Peterson (41).



Estas últimas consideraciones versan sobre uno de los muchos aspectos que se investigan en el modelado de la capa límite atmosférica, tal vez el concerniente al salto de rugosidad en superficie sea uno de los mas estudiados.

Es interesante el trabajo de Onishi-Estoque (38). Dichos investigadores estudian la distribución del campo de velocidad con la altura en una situación de cambio de rugosidad mediante la integración numérica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [6.2.20]$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} - g \quad [6.2.21]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [6.2.22]$$

donde  $\tilde{P} = P/\rho$ .

En este sistema, se despreció el término de Coriolis y los autores supusieron que el coeficiente de difusividad turbulenta varía linealmente con la altura. Se hacen comparaciones entre sus resultados numéricos y aquellos que derivan de estudios teóricos y experimentales.

Nickerson (37) estudia el ajuste en una capa límite neutralmente estratificada a un cambio de rugosidad, tratando el problema como de valores iniciales. Los cambios de la velocidad del viento se obtienen a partir de la integración numérica de un sistema de ecuaciones no lineales de la capa límite y se arriba a resultados que son mayores que los previstos por las teorías que usan argumentos de similaridad.

Peterson (41) estudia el mismo problema, usando el hecho de que la tensión  $\tau$  es proporcional a la energía turbulenta, postulando que el campo de movimiento está gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial |\tau|}{\partial z} \quad [6.2.23]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [6.2.24]$$

$$\frac{de}{dt} = |\tau| \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{wb'} - \epsilon \quad [6.2.25]$$

Esta última es la ecuación de energía turbulenta. Las consideraciones hechas son:

$$|\tau| = 0.16 \cdot b \quad [6.2.26]$$

$$\epsilon = |\tau|^{1/2} / (0.4 \cdot z) \quad [6.2.27]$$

$$w'e' = - \left( \frac{|z|}{\frac{\partial u}{\partial z}} \right) \cdot \frac{\partial b}{\partial z} \quad [6.2.28]$$

Este sistema se resuelve numericamente y se comparan las soluciones con las teorías anteriores.

### 6.3. Modelos no estacionarios unidimensionales de la capa límite atmosférica

Se toma como punto de partida el modelo desarrollado por Estoque en el año 1963 (42). El mismo autor en su tratado sobre la modelación numérica de la capa límite atmosférica (27) discute características de dicho modelo y de varios aspectos concernientes a la problemática del modelado con modelos no estacionarios unidimensionales de la capa límite atmosférica.

El problema planteado es el conocimiento de la estructura de la capa límite cuando es forzada a cambiar temporalmente a partir de una variación de la temperatura de superficie. Dicho forzante depende de relaciones energéticas debidas a las radiaciones de onda corta emitidas desde el sol y de onda larga emitidas desde la superficie terrestre. Los calentamientos y enfriamientos de la superficie terrestre son transmitidos a la atmósfera y al suelo mediante mecanismos de difusión molecular y turbulenta. Las variaciones inducidas en la temperatura del aire y la estratificación térmica afectan a los campos de velocidad y humedad.

Es importante señalar que hay dos formas posibles de introducir las variaciones temporales de la temperatura de superficie. La mas simple es mediante la suposición de una temperatura periódica arbitraria en superficie en función del tiempo. La otra es mas realista y consiste en la determinación de la temperatura a partir de la resolución de la ecuación de balance en la superficie terrestre, para lo cual hay que acoplar una capa de atmosfera con una capa de suelo. Esta última alternativa fue usada por Estoque (42) y en su trabajo se hace referencias a lo hecho por Krishna (43) y Sasamori (44).

El modelo de Estoque considera tres capas, tal como se muestra en la Figura 6.

Las ecuaciones usadas son las siguientes:

Capa de suelo  $0 \leq z \leq -D$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [6.3.1]$$

Capa de superficie  $0 \leq z \leq h$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad [6.3.2]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0 \quad [6.3.3]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial q}{\partial z} \right) = 0 \quad [6.3.4]$$

Capa de transición

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = f \cdot v - \frac{1}{S} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \quad [6.3.5]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -f \cdot \mu - \frac{1}{S} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad [6.3.6]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + S_{\theta} \quad [6.3.7]$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad [6.3.8]$$

$S_{\theta}$  representa los cambios de temperatura debido a procesos de radiación.

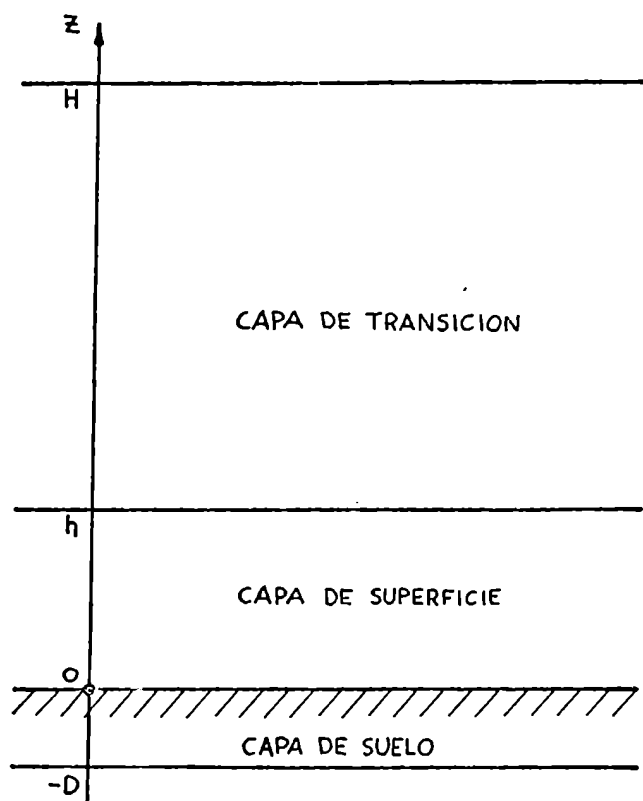


Figura 6: Capas consideradas en el modelo de Estoque (42)

Los detalles de las soluciones de las variables en las distintas capas, sus acoples y el cálculo de la ecuación de balance en la interfase se encuentran ampliamente detallados en el trabajo de Estoque.

En términos generales se puede mencionar que se suponen válidas las igualdades expresadas en [6.2.5] y se considera en:

Capa de superficie:

$$K = [k(z+z_0) \cdot (1 + \alpha \cdot Ri)]^2 \frac{\partial |V|}{\partial z} \quad Ri > Ri_c \quad [6.3.9]$$

$$K = C_1 (z+z_0)^2 \left(\frac{g}{\theta_0}\right)^{1/2} \left|\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|^{1/2} \quad Ri \leq Ri_c \quad [6.3.10]$$

dónde  $Ri_c = -0,03$ ,  $C_1 = 0,9$  y  $\alpha = -3$  (deducida de la experiencia de Great Plains).

Capa de transición: Variación lineal de  $K$  a partir de  $K(h)$  y considerando  $K(H) = 0$ .

Las distribuciones de  $|V|$ ,  $\theta$  y  $q$  son calculadas analíticamente en la capa de superficie y en la capa de transición se usa un esquema en diferencias finitas (45).

La integración del modelo fue comprobada usando las observaciones de uno de los días de la experiencia de Great Plains.

Walmsley (46), en su Tesis Doctoral, desarrolla un modelo para acoplar las capas límite de una superficie de agua y de la atmósfera. En ambos fluidos se suponen capas de flujos constantes. Mediante un método predictor-corrector de Hamming se integran temporalmente según la coordenada  $z$  las ecuaciones de movimiento, la ecuación termodinámica, la ecuación de humedad y la ecuación de la conservación de la salinidad. Los coeficientes de difusividad turbulenta se consideran dependientes de la coordenada  $z$ , de los perfiles de las variables en la capa de superficie y de la estabilidad. Se usa un espacio transformado para mejorar los errores de truncado en el esquema en diferencias finitas (47).

Berri (24) realiza una experimentación numérica con un modelo de dos capas (de superficie y de transición) usando como forzante un flujo de calor de superficie tomando una función sinusoidal del tiempo. En un trabajo posterior (48) desarrolla un modelo en el que introduce una capa de suelo y el forzante se obtiene a partir de la incorporación de una ecuación simplificada para el balance calórico en la interfase suelo-atmósfera. Los resultados son testeados con las observaciones realizadas durante el Sexto período de la experiencia de Great Plains.

Es interesante notar que en todos los trabajos a que se hicieron referencias, se usa una capa de superficie, en donde de una forma u otra, se supone válida la teoría de Monin-Obukhov.

Busch, Chang y Anthes (49), plantean la problemática y desarrollan un modelo de la capa límite atmosférica para uso en mo-

delos de mesoescala. Escriben: " Muchos modelos de la capa límite atmosférica de variada complejidad, han sido desarrollados con el propósito de estudiar detalles de procesos físicos dentro de la misma. No obstante, el tratamiento de la capa límite atmosférica es también una parte importante de modelos numéricos de meso y gran escala. En dichos modelos el comportamiento de la capa límite atmosférica en sí misma es de interés secundario, lo que se requiere es una adecuada representación entre dicha capa y el flujo atmosférico en el resto del modelo."

Usos de modelos de la capa límite atmosférica para parametrizar fenómenos en modelos de gran escala se encuentran en el trabajo de Long y Shaffer (50) y en una publicación del European Centre for Medium Range Weather Forecasts (51).

#### 6.4. Modelos no estacionarios bidimensionales de la capa límite atmosférica

Una discusión acerca de este tipo de modelos se encuentra en el tratado de Estoque (27). A modo de ejemplo se mencionan a continuación tres modelos.

Estoque (52) desarrolla un modelo para analizar las propiedades de las perturbaciones inducidas en un flujo de aire por una fuente de calor aislada en la superficie terrestre.

Considera una región bidimensional, tal como se muestra en la Figura 7, ensayando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} + f v - \frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{pc} + K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad [6.4.1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - w \frac{\partial v}{\partial z} + f (\mu_g - \mu) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{pc} + K_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad [6.4.2]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} = \frac{-g}{c_p \theta} \quad [6.4.3]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (S u) + \frac{\partial}{\partial z} (S w) = 0 \quad [6.4.4]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{pc} + K_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad [6.4.5]$$

$$p = S \cdot R \cdot T \quad [6.4.6]$$

$$\frac{\theta}{T} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad [6.4.7]$$

Es de notar la incorporación de los términos con subíndice  $pc$  que representan el efecto de mezcla vertical por penetración convectiva y el término de difusión según la coordenada  $x$ . El cálculo de la presión se basa en una combinación de las

ecuaciones [6.4.1] , [6.4.3] y [6.4.4] . Derivando la ecuación [6.4.1] respecto de  $x$  y promediando verticalmente entre  $z = 0$  y  $z = H$  se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{S}G) \quad [6.4.8]$$

donde:

$$G = u \frac{\partial \mu}{\partial x} + w \frac{\partial \mu}{\partial z} - f v - \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_{pc} - K_x \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \quad [6.4.9]$$

Integrando por partes y usando la ecuación hidrostática se obtiene:

$$p_H = \bar{p} - \frac{g}{R_H} \int_0^H z \frac{P}{\theta} \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p} dz \quad [6.4.10]$$

Se muestran dos ejemplos de integración numérica para obtener las perturbaciones de las variables en distintos tiempos de integración.

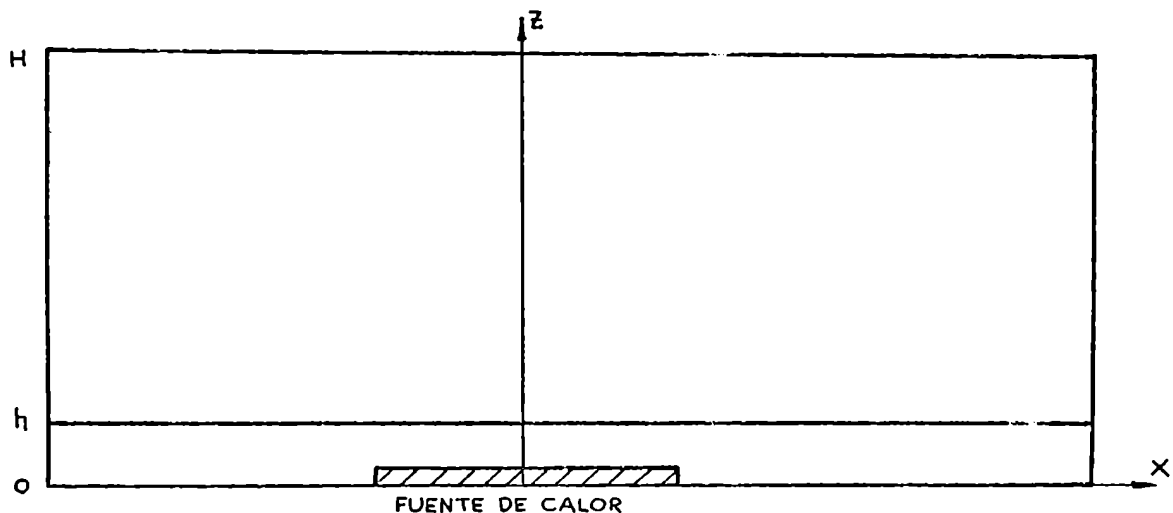


Figura 7: Región bidimensional en el modelo de Estoque (52)

Gutman y Torrance (53) desarrollan un modelo para determinar las respuestas de la capa límite atmosférica a fuentes de calor y rugosidades de superficie. Se encuentra en dicho trabajo una amplia discusión de la metodología usada y referencias a investigaciones de otros autores.

El último ejemplo es el modelo de Tsaan-Wang Yu y Wagner (54) para estudiar los distintos mecanismos físicos dentro de la capa límite atmosférica en condiciones nocturnas sobre una ciudad. El modelo es de dos capas (una capa de suelo y la capa límite atmosférica) y se basa en el siguiente sistema de ecua-

ciones:

Capa de suelo:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_s \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \right) \quad [6.4.11]$$

Capa límite atmosférica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [6.4.12]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = f v_g + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad [6.4.13]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad [6.4.14]$$

El acople se efectúa a través de una ecuación de balance en la interfase. Se muestran resultados de una integración y se discuten las características del comportamiento del modelo.

#### 6.5. Modelos numéricos de la capa límite atmosférica con clausura de orden superior

Todos los planteos y consideraciones anteriores consistían en el uso del cierre o clausura de primer orden. En los últimos años han aparecido una cantidad de modelos denominados de orden superior. Los mismos son de evolución en espacios de dos y tres dimensiones.

Deardorff presenta, en la introducción de su tratamiento acerca del modelado tridimensional (55), una discusión de los modelos en tres dimensiones (3-D) y de los bidimensionales (2-D). Escribe: "El modelado numérico de la turbulencia en tres dimensiones (3-D) está comenzando a ser competitivo con otros métodos, en la opinión del que escribe. Las computadoras digitales mas avanzadas son ahora suficientemente rápidas como para permitir tratamientos de escalas de turbulencia por debajo del 5 % de la escala máxima del problema. Hasta ahora esto no era posible y los modeladores numéricos se restringían a dos dimensiones."

En su texto, analiza en detalle las ecuaciones de gobierno, las consideraciones de clausura y también hace referencia a distintos métodos de diferencias finitas, mencionando también la posibilidad de uso del método de Galerkin (56) y muestra distintos resultados obtenidos con modelos tridimensionales.

Desarrollos de modelos de orden superior se encuentran en los trabajos de Deardorff (57), Wyngaard y Coté (58) y Wyngaard (59). Los dos primeros son testeados usando el día 33 de la experiencia de Wangara. Es posible encontrar en dichos trabajos,

características, discusiones y referencias.

Un excelente tratamiento sobre modelado con clausura de segundo orden se encuentra en el trabajo de Walmsley (12). De Moor y André (13) presentan un interesante enfoque sobre el modelado de la turbulencia en la capa límite atmosférica haciendo una comparación entre distintos cierres.



## 7. MODELO ESTACIONARIO BIDIMENSIONAL DESARROLLADO

### 7.1. Consideraciones previas

Tal como se señaló en el parágrafo 6.2., Estoque y Bhumralkar (25) propusieron una metodología para resolver un sistema de ecuaciones de gobierno de la capa límite atmosférica en estado estacionario.

Dicha metodología es aplicable a regiones de una, dos y tres dimensiones y las variables dependientes en cuestión pueden ser obtenidas a partir de sus valores en los contornos inferior (superficie terrestre) y superior (tope de la capa límite atmosférica).

Para los casos bi y tridimensionales el sistema de ecuaciones diferenciales que utilizaron está formado por las ecuaciones de conservación del momento, de masa, de energía y la de relación de variables de estado. En el mencionado parágrafo se señalaron las aproximaciones hechas y habiendo supuesto válido un cierre de primer orden se arribaba, para el caso bidimensional, al sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales [6.2.8] a [6.2.13].

En el trabajo aquí expuesto se introducen los términos advectivos en la ecuación de la velocidad vertical  $w$  y se resuelve, ensayando el método propuesto por dichos investigadores, el sistema completo en aquellos casos en que la superficie terrestre es inhomogénea, arribando a las soluciones, en la región bidimensional  $x, z$  de las componentes  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  de la velocidad, la presión atmosférica  $\bar{p}$ , la temperatura potencial  $\bar{\theta}$  y la humedad específica  $\bar{q}$ .

En el desarrollo que contiene este trabajo se expone inicialmente una descripción general del modelo, mostrando el sistema de ecuaciones y el método de resolución que consiste en un esquema implícito en diferencias finitas y el uso de un método iterativo que permite, a través de cuatro aproximaciones, la incorporación de los distintos efectos o mecanismos físicos que definen al mismo. La convergencia del esquema determina la distribución de las variables dependientes.

La primera aproximación consiste en resolver el problema unidimensional como uno de valores de contorno. Se señalan distintas alternativas y resultados de experimentaciones numéricas.

La segunda, tercera y cuarta aproximaciones introducen, respectivamente, los efectos de la advección según la componente de la velocidad, de la componente vertical  $\bar{w}$  y el efecto del campo de presión.

Se discuten distintas alternativas para considerar la estabilidad de la capa límite atmosférica, los coeficientes de difusividad turbulenta y esquemas en diferencias finitas.

Se dan tres ejemplos de simulación numérica considerando: Caso 1) Un salto de rugosidad en superficie, para el que se muestran los efectos de la introducción de advección en la e-

cuación de la componente vertical  $w$ .

Caso 2) El efecto de una fuente de calor en superficie.

Caso 3) Una situación nocturna sobre una ciudad, simulada por las condiciones de contorno, comparando los resultados obtenidos con este método y el usado por otros investigadores.

En todos los casos se muestra el comportamiento de diversos campos de variables dependientes y se señalan algunas de sus características más salientes.

## 7.2. Sistema de ecuaciones

Con las consideraciones mencionadas, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

Ecuaciones de movimiento para las componentes  $u$  y  $v$  de la velocidad:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad [7.2.1]$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad [7.2.2]$$

Ecuación de energía termodinámica:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad [7.2.3]$$

Ecuación de la conservación de humedad:

$$u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad [7.2.4]$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [7.2.5]$$

Ecuación de movimiento para la componente  $w$  de la velocidad:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

considerando

$$p = \rho R T$$

y

$$T = \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\alpha}$$

se tiene:

$$S = \frac{P_0^\alpha}{R \cdot \theta} \cdot P^{1-\alpha}$$

entonces,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{-P_0^\alpha}{R \cdot \theta} \cdot P^{1-\alpha} \left( \alpha + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

que puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P}{P_0} \right)^\alpha = \frac{-\alpha}{R \theta} \left( \alpha + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad [7.2.6]$$

Puede notarse que si no se consideran los términos advectivos la expresión resultante es la denominada ecuación hidrostática.

El sistema constituye uno de 6 ecuaciones con 6 variables dependientes de  $x, z$ , que son  $u, v, w, p, \theta$  y  $q$ .

### 7.3. Descripción del método utilizado

Resolver el sistema completo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [7.2.1] a [7.2.6] consiste en encontrar, bajo determinadas condiciones de contorno las distribuciones  $u, v, w, p, \theta$  y  $q$  en la región de resolución.

Al constituir un sistema no lineal no existe para el mismo una solución analítica y, por lo tanto, es necesario recurrir a métodos numéricos, discretizando el sistema para encontrar la solución en un retículo de la región, lo cual se logra mediante la resolución de un problema algebraico.

Cabe señalar que en el enfoque aquí adoptado, se ensaya la resolución de un sistema que no contiene términos con variaciones temporales. Si se contempla al sistema conteniendo dichos términos, es sabido que a las ecuaciones [7.2.1] a [7.2.4] se las denomina de pronóstico y a las [7.2.5] y [7.2.6] de diagnóstico, y un método para llegar al estado estacionario consiste en integrar temporalmente el sistema partiendo de ciertas condiciones iniciales y de contorno suponiendo un forzante nulo (60).

La metodología aquí usada, que es la propuesta por Estoque y Bhumralkar (25), consiste en un método iterativo haciendo uso de un esquema implícito en diferencias finitas que permite converger a la solución del problema considerando, a través de cuatro aproximaciones, los distintos mecanismos físicos que caracterizan al sistema de ecuaciones diferenciales.

Las mismas son:

Primera aproximación: Resolución del problema unidimensional. Esto es, en el caso en que las condiciones de contorno de la superficie terrestre correspondan al caso de homogeneidad. Entonces, el sistema de ecuaciones a resolver se transforma en el que caracteriza a la capa límite planetaria ([4.9] a [4.12] del parágrafo 4).

Fijando las condiciones de contorno y tratando al problema como uno de valores de contorno es posible encontrar las distribuciones  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $\theta(z)$  y  $q(z)$ . Como se supuso homogeneidad en la superficie terrestre según la dirección  $x$  y se toman constantes las condiciones del borde superior dichas distribuciones no varían sobre cualquier punto de la coordenada  $x$ , entonces para cualquiera de las variables dependientes  $\varphi_i$  (con  $\varphi_1 = u$ ,  $\varphi_2 = v$ ,  $\varphi_3 = \theta$ ,  $\varphi_4 = q$ ) vale:

$$\text{Para todo } x: \quad \varphi_i(x, z) = \varphi_i(x_0, z)$$

donde  $x_0$  representa el origen de coordenada  $x$ .

Cuando la superficie terrestre presenta inhomogeneidades o discontinuidades lo anterior no es válido, es decir, las distribuciones de las variables según  $z$  varían sobre los distintos puntos de la coordenada  $x$  y entonces, en la región de resolución dada por el plano bidimensional  $x, z$  hay que resolver el sistema [7.2.1] a [7.2.6] y se admite que la primera aproximación a la solución es, sobre cada punto discreto  $x(I)$ , la solución del problema unidimensional, que queda determinada por los valores de contorno  $\varphi_i(x(I), z(1))$ , donde  $z(1)$  representa la superficie terrestre. Las condiciones de contorno en el tope de la capa límite atmosférica o condiciones sinópticas se consideran constantes, o sea  $\varphi_i(x(I), z(N))$ , donde  $z(N)$  representa el tope, no varían.

De ahora en mas, sobre cada punto  $(x(I), z(1))$  se define la "columna I".

Segunda aproximación: Suponiendo  $\varphi_5 = p$ , constante para todo punto  $(x(I), z(J))$  e igual a  $p(x(I), z(N))$  y  $\varphi_6 = w$ , nulo para todo punto  $(x(I), z(J))$ , se introduce el efecto de la advección según  $u$  avanzando por columnas según la dirección del flujo.

Tercera aproximación: Se introduce el efecto de  $w$  haciendo uso de [7.2.5] que permite calcular  $w = w(u)$

Cuarta aproximación: Se introduce el efecto del campo de presión  $p$  haciendo uso de [7.2.6] calculando  $p = p(u, w, \theta)$

La dependencia puntual depende del esquema en diferencias finitas.

En lo que sigue se explicitan estas aproximaciones.

## 8. PROBLEMA UNIDIMENSIONAL (PRIMERA APROXIMACION)

### 8.1. Sistema de ecuaciones e hipótesis de cierre

El sistema de ecuaciones es el obtenido en el parágrafo 4. dado por las ecuaciones [4.9] a [4.12]. Se suponen iguales los coeficientes de difusividad turbulenta (relación dada por [6.2.5]) y se adopta la relación [4.16] corregida por una función dependiente de la estabilidad atmosférica:

$$K = \lambda^2 \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \cdot S_M \quad [8.1.1]$$

con  $S_M = S_M(R_i)$

### 8.2. Región de resolución y condiciones de contorno

Se considera la región  $0 \leq z \leq H$ , donde  $H$  es el tope de la capa límite planetaria.

En dicha región se toma un retículo no uniforme  $z(j)$  con  $j=1, \dots, N$ , definido en forma arbitraria.

Las condiciones de contorno son:

En  $z(1)=0$

$$u(1) = v(1) = 0, \quad \theta(1) = \theta_0, \quad q(1) = q_0$$

En  $z(N)=H$

$$u(N) = u_g, \quad v(N) = v_g, \quad \theta(N) = \theta_H, \quad q(N) = q_H$$

La Figura 8 muestra un esquema de la región y del retículo referido.

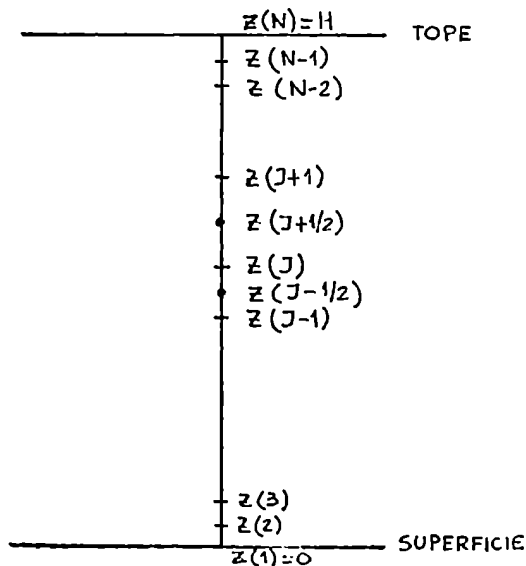


Figura 8: Esquema de la región y el retículo en el problema unidimensional.

### 8.3. Ecuaciones en diferencias finitas

Se usa un esquema en diferencias finitas centradas. En las ecuaciones que conforman el sistema aparecen términos con derivada de segundo orden (los de difusión) y a continuación se muestra la discretización, en el punto  $J$  del retículo, del que aparece en la ecuación de la componente  $u$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_J &= \frac{K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{J+1/2} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{J-1/2}}{\frac{z(J+1) - z(J-1)}{2}} = \\ &= \frac{K(J+1/2) \frac{[u(J+1) - u(J)]}{[z(J+1) - z(J)]} - K(J-1/2) \frac{[u(J) - u(J-1)]}{[z(J) - z(J-1)]}}{\frac{z(J+1) - z(J-1)}{2}} \end{aligned}$$

$$Dz(J) = z(J) - z(J-1)$$

$$DDz(J) = z(J+1) - z(J-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_J &= \frac{2 \cdot K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} \cdot [u(J+1) - u(J)] - \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \cdot [u(J) - u(J-1)] = \\ &= \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \cdot u(J-1) - 2 \cdot \left[ \frac{K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} + \frac{K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \right] u(J) + \\ &\quad + \frac{2 \cdot K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} \cdot u(J+1) \end{aligned}$$

Entonces, para el punto  $J$ , la expresión en diferencias finitas de la ecuación de movimiento para la componente  $u$  es:

$$\begin{aligned} f \cdot v_g &= f \cdot v(J) + \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \cdot u(J-1) - 2 \cdot \left[ \frac{K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} + \frac{K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \right] \cdot [8.3.1] \\ &\quad u(J) + \frac{2 \cdot K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} \cdot u(J+1) \end{aligned}$$

En forma similar, se obtienen las discretizaciones de las demás ecuaciones.

Ecuación de movimiento para  $v$  :

$$\begin{aligned} -f \cdot v_g &= -f \cdot v(J) + \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \cdot v(J-1) - 2 \cdot \left[ \frac{K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} + \frac{K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \right] \cdot [8.3.2] \\ &\quad v(J) + \frac{2 \cdot K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} \cdot v(J+1) \end{aligned}$$

Ecuación de energía termodinámica:

$$0 = \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \cdot \theta(J-1) - 2 \cdot \left[ \frac{K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} + \frac{K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \right] \cdot \theta(J) + \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} \cdot \theta(J+1) [8.3.3]$$

Ecuación de humedad:

$$0 = \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \cdot q(J-1) - 2 \cdot \left[ \frac{K(J+1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} + \frac{K(J-1/2)}{Dz(J) \cdot DDz(J)} \right] \cdot q(J) + \frac{2 \cdot K(J-1/2)}{Dz(J+1) \cdot DDz(J)} \cdot q(J+1) [8.3.4]$$

Ensayando el esquema anterior,  $R_i$ ,  $S_M$  y  $K$  se deben tomar en los puntos medios de retículo, o sea:

$$K(J+1/2) = \lambda^{(J+1/2)} \cdot \left\{ \left[ \frac{U(J+1) - U(J)}{Dz(J+1)} \right]^2 + \left[ \frac{V(J+1) - V(J)}{Dz(J+1)} \right]^2 \right\}^{1/2} \cdot S_M(J+1/2) \quad [8.3.5]$$

#### 8.4. Método de resolución

La parte dinámica del problema, dada por las ecuaciones en diferencias finitas para  $U$  y  $V$  ([8.3.1] y [8.3.2]) permite determinar un sistema de ecuaciones lineales de  $2(N-2) \times 2(N-2)$  ecuaciones con  $2(N-2)$  incógnitas, que son  $U(J)$  y  $V(J)$  con  $J=2,3,\dots,N-1$

La ecuación para  $\theta$  ([8.3.3]) determina un sistema de  $(N-2) \times (N-2)$  ecuaciones con  $(N-2)$  incógnitas  $\theta(J)$  con  $J=2,3,\dots,N-1$ . Identicamente sucede con [8.3.4] para  $q(J)$ .

En caso de conocer la expresión de  $K$  en todos los puntos medios del retículo, la solución es directa, es decir, resolviendo directamente las tres matrices definidas anteriormente se encuentran las distribuciones de las variables dependientes.

En el caso que se considera en este trabajo, donde  $K$  es dependiente de la solución de las variables  $U$ ,  $V$  y  $\theta$ , lo último no es posible y se ensaya un método iterativo que consiste en:

- 1) Se cierran los sistemas suponiendo  $K$  constante y se obtiene:

$$U^{(1)*}(J), V^{(1)}(J), \theta^{(1)}(J) \text{ y } q^{(1)}(J)$$

- 2) Se calcula  $R_i^{(1)}$  constante para todo  $J$  como el promedio:

$$R_i^{(1)} = \frac{R_i^{(1)}(1+1/2) + R_i^{(1)}(N/2 + 1/2)}{2}$$

- 3) Se calcula  $S_M^{(1)}$  usando:

$$S_M^{(1)} = S_M(R_i^{(1)})$$

- 4) Haciendo uso de la expresión [8.3.5] se calcula la distribución

$$K^{(1)}(J+1/2)$$

y se hace:

$$K^{(1)}(J+1/2) = \frac{[K^{(1)}(J+1/2) + K(J+1/2)]}{2}$$

- 5) Con  $K^{(1)}(J+1/2)$  se obtiene, resolviendo las matrices, las distribuciones de las variables dependientes para la iteración 2, obteniéndose:

$$U^{(2)}(J), V^{(2)}(J), \theta^{(2)}(J) \text{ y } q^{(2)}(J)$$

\*: El superíndice indica el número de iteración.

6) Se continúan las iteraciones hasta que:

$$\text{Máx } |\varphi_i^{(n+1)}(j) - \varphi_i^{(n)}(j)| \leq \epsilon \quad [8.4.1]$$

Como se había expresado al comienzo, el método expuesto es uno de valores de contorno y a continuación se hará una discusión mostrando distintos aspectos del mismo.

### 8.5. Características del método de resolución

En los párrafos 8.1. a 8.4. se mostró la idea central del método usado. El mismo está sujeto a varios aspectos que determinan su solución.

Al pasar de un problema continuo a uno algebraico y al ensayar un esquema implícito es claro que el producto final es la resolución de tres matrices que deben resolverse en cada una de las iteraciones, entonces, obviamente, la convergencia a la solución del sistema depende de las características de dichas matrices. Si estas se caracterizan por sus coeficientes  $\partial_{lt}$  y sus terminos independientes  $T_t$ , entonces:

$$\varphi_i = \varphi_i(\partial_{lt}, T_t)$$

Si  $i=1,2$

$$\partial_{lt} \in \mathbb{R}^{2(N-2) \times 2(N-2)}$$

$$T_t \in \mathbb{R}^{2(N-2)}$$

y se tiene que:

$$\partial_{lt} = \partial_{lt}(\text{Esquema en diferencias finitas, } K, f)$$

$$T_t = T_t(\text{Esquema en diferencias finitas, } K, f, U_g, V_g)$$

de donde puede apreciarse la dependencia de la solución.

Esta matriz es banda, no tridiagonal por la aparición del parámetro de Coriolis  $f$ . Se usa para su inversión un método propuesto en Forsythe y Moler (61)

Si  $i=3$  ó  $i=4$

$$\partial_{lt} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times (N-2)}$$

$$T_t \in \mathbb{R}^{(N-2)}$$

y se tiene:

$$\partial_{lt} = \partial_{lt}(\text{Esquema en diferencias finitas, } K)$$



$$\tau_t = \tau_t (\text{Esquema en diferencias finitas}, \kappa, \theta_o (\circ q_o), \theta_H (\circ q_H))$$

Estas dos matrices son tridiagonales y se emplea un método propuesto también por los mismos autores.

En el tratamiento explicado, la convergencia se logra con el criterio dado por [8.4.1], un criterio o ley de convergencia debería encontrarse mediante un estudio de las dependencias anteriores. En todas las matrices hay una dependencia con el coeficiente de difusividad turbulenta y esto muestra el acople entre las distintas variables dependientes.

De lo anterior surge claramente cuales son las dependencias de la solución. El parámetro  $f$ , dependiente de la latitud terrestre, el viento geostrófico  $V_g$  y el parámetro de rugosidad  $z_o$  determinan el conjunto de los denominados parámetros externos. La parametrización de  $K$  y la elección del esquema en diferencias finitas son dos factores de importancia que se discuten a continuación.

#### 8.6. Consideraciones acerca del coeficiente de difusividad turbulenta.

Varios fueron los estudios y consideraciones acerca de dicho coeficiente, que es de gran importancia en los mecanismos físicos de los modelos como el aquí considerado.

Blackadar (26), enfocando el problema de resolver la parte dinámica de las ecuaciones de la capa límite planetaria se refiere a las soluciones obtenidas cuando  $K_m$  es independiente de  $z$  deducidas independientemente por Ekman (ver el parágrafo 5.3.) y por Taylor (62). Hace referencia a suposiciones hechas por otros investigadores y menciona que una teoría completa acerca de la distribución del viento con  $z$  fue realizada por Rossby y Montgomery (las referencias se encuentran en el trabajo de Blackadar) haciendo uso del parámetro de rugosidad y del gradiente de presión en superficie.

Blackadar supone:

$$K_m = \epsilon_t^{1/3} \ell^{4/3} \quad [8.6.1]$$

y considera

$$\epsilon_t = K_m \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^2 \quad [8.6.2]$$

Entonces:

$$K_m = \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \cdot \ell^2 \quad [8.6.3]$$

Esta fue la expresión usada por Prandtl para explicar la distribución del viento cerca del suelo.

Haciendo referencia a distintas consideraciones acerca de  $\lambda$ , adopta

$$\lambda = kz / (1 + \frac{kz}{\lambda}) \quad [8.6.4]$$

$\lambda$  es el valor al que tiende  $\lambda$  en la atmósfera libre y se toma de la forma:

$$\lambda = c \cdot |V_g| / f \quad [8.6.5]$$

donde  $c$  es una constante que permite adoptar distintos  $\lambda$ .

Blackadar hace uso de:

$$\lambda = 0,00027 |V_g| / f$$

y adoptando  $|V_g| = 10 \text{ m s}^{-1}$  se tiene  $\lambda \rightarrow 27,272 \text{ m}$ , si  $c = 0,0004$  entonces  $\lambda \rightarrow 40,404 \text{ m}$ .  
Con el uso de la relación [8.6.3],  $c$  es una constante "de ajuste".

Teniendo en cuenta la relación [8.1.1] es necesario considerar la forma que puede adoptar  $S_M$ .

Varias fueron las expresiones que explicitan la función  $S_M(R_i)$ , las distintas consideraciones determinan otro ajuste del método y es importante señalar lo realizado por Tsaan-Wang Yu (11), quien haciendo uso de un modelo unidimensional examina el comportamiento de catorce formas distintas de parametrización de  $k$ , entre las que se ubica la alternativa usada en este trabajo. Las mismas corresponden a:

- 1) Del tipo de Blackadar con corrección por  $S_M$ .
- 2) Consideraciones de O'Brien (mas adelante se referencia su uso).
- 3) Clausura con energía turbulenta.

Entre las correcciones por  $S_M$  de interés para este desarrollo se encuentran:

$$S_M = \begin{cases} (1 + 3 R_i)^{-2} & R_i \geq 0 \\ (1 - 3 R_i)^2 & R_i < 0 \end{cases} \quad [8.6.6]$$

$$S_M = \begin{cases} (1 + 3 R_i)^{-1} & R_i \geq 0 \\ (1 - 3 R_i) & R_i < 0 \end{cases} \quad [8.6.7]$$

$$S_M = \begin{cases} (1 - 3 R_i)^{1/2} & R_i < 1 \\ 0 & R_i \geq 1 \end{cases} \quad [8.6.8]$$

Usó un modelo evolutivo y simuló el 5<sup>to</sup> Período de la experiencia de Great Plains integrando desde las 12<sup>00</sup> horas y durante 32 horas. También simuló el día 32 de la experiencia de Wanagera partiendo de las 00 horas e integrando a 24 horas. En sus conclusiones se señalan los comportamientos de las distintas alternativas ensayadas.

### 8.7. Consideraciones sobre esquemas en diferencias finitas

Cuando se ensayan esquemas en diferencias finitas en problemas como el aquí tratado, se debe tener presente que las variables dinámicas  $u$  y  $v$  tienen mucha variación con  $z$  cerca de la superficie terrestre y poca variación en alturas mayores. Este hecho condiciona la forma de considerar al esquema, pues si se busca uno con error de truncado de segundo orden, las diferencias finitas para las derivada primera y segunda requieren el empleo de un retículo con paso  $\Delta z$  constante. Entonces, si dicho paso es grande no se obtiene resolución cerca de la superficie y si es chico, logrando tener mucha resolución donde importa, aparece el inconveniente de tener también mucha resolución donde no es necesaria y obviamente, con esquemas como el aquí usado las dimensiones de las matrices serían muy grandes (tener en cuenta que la longitud de la región es de aproximadamente 1.000 m y la de mucha variación de  $u$  y  $v$  es  $h \cong 20-50$  m)

Estos aspectos fueron estudiados por distintos investigadores y en lo que sigue se señalan algunas conclusiones de interés:

Taylor y Delage (47) realizaron un excelente enfoque al problema y luego de un análisis de lo realizado por los mismos se señalan algunas conclusiones:

Hay dos alternativas que pueden ensayarse para tener una interesante y razonable resolución en toda la región de interés:

- 1) Usar una "capa pared", que debe considerarse en la región de flujos constantes (ver parágrafo 5.1.). Dentro de la misma las soluciones son semi-empíricas y no hay por supuesto, problemas de truncado. Por encima de la misma se pueden resolver las ecuaciones con truncado de segundo orden tomando paso constante.
- 2) Usar un espacio transformado  $\xi = \xi(z)$  y expresar las discretizaciones en función de  $\xi$ .

Tomando el término de difusión (de segundo orden), se tiene, para la ecuación de  $u$  :

En el espacio  $z$  :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial k}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Definiendo  $\eta(z)$ , para una variable  $\eta$  :

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \\ &= \xi' \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \xi'' \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \xi' \frac{\partial K}{\partial \xi} \cdot \xi' \frac{\partial u}{\partial \xi} + K \left( \xi' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi'' \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \\ &= (\xi')^2 \frac{\partial K}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + K \left( \xi' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi'' \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)\end{aligned}$$

Luego, mediante la elección de una transformación conveniente, entre las que proponen:

$$\xi = \ln \left( \frac{z+z_0}{z} \right) \quad (\text{logarítmica})$$

o

$$\xi = A_0 \left( A_1 z + A_2 \ln \left( \frac{z+z_0}{z} \right) \right) \quad (\text{logarítmica-lineal})$$

con  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  constantes.

es posible discretizar las derivadas en el nuevo espacio  $\xi$ , haciendo

$$\Delta \xi = \frac{\xi(z(1)) + \xi(z(N))}{N-1}$$

que constituye un paso constante en el espacio  $\xi$ .

Kalnay de Rivas (63) realizó un estudio de errores de truncado en esquemas no uniformes para flujos de capa límite, usando también un espacio transformado y resolvió con esta alternativa la ecuación diferencial para la circulación forzada por el viento en un océano homogéneo propuesta por Stommel. Encontró resultados satisfactorios y demuestra como cierto tipo de transformaciones  $x(\xi)$  (transformó el espacio  $\xi$  en el  $x$ ) permiten obtener errores de truncado de segundo orden.

Sundqvist y Veronis (64) dedujeron una forma interesante de lograr errores de truncado de segundo orden sin hacer uso de un espacio transformado, resultado que logran definiendo el retículo no uniforme según lo que se expone a continuación:

Consideran una función analítica  $f(x)$  en la región  $0 \leq x \leq L_x$  con  $f_i = f(x_i)$ , y desarrollando  $f_{i+1}$  y  $f_{i-1}$  en series de Taylor alrededor de  $x_i$  obtienen, haciendo  $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - \left( \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2 \cdot f_{i-1} - \left[ 1 - \left( \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2 \right] f_i}{h_i \left( 1 + \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)} - \frac{h_i \cdot h_{i-1}}{6} f''_i$$

$$f''_i = \frac{2 \cdot \left[ f_{i+1} + \frac{h_i}{h_{i-1}} \cdot f_{i-1} - \left( 1 + \frac{h_i}{h_{i-1}} \right) f_i \right]}{h_i \cdot h_{i-1} \left( 1 + \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)} - \frac{(h_i - h_{i-1})}{3} f'''_i$$

Si  $h_{i-1} = h_i = h$  entonces:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h^2)$$

y

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + o(h^2)$$

o sea, ambas derivadas se definen con error de truncado de segundo orden.

Cuando  $h_{i-1} \neq h_i$  el error de truncado en  $f''$  es  $o(h_i - h_{i-1})$  y entonces la idea de dichos investigadores fue definir un retículo en el que:

$$h_i - h_{i-1} = o(h_{i-1}^2)$$

y dan una alternativa mediante la elección:

$$h_1 = h, \quad h_2 = h_1 \left(1 + \alpha \frac{h_1}{L_*}\right), \dots, \quad h_i = h_{i-1} \left(1 + \alpha \frac{h_{i-1}}{L_*}\right) \quad [8.7.1]$$

siendo  $\alpha$  una constante.

También se refieren a la ecuación de Stommel y en el intervalo  $(0, \pi)$  comparan resultados numéricos obtenidos con retículos uniformes ( $\alpha=0$ ) de distintos números de puntos, con  $\alpha=2$  y los comparan con la solución analítica.

Como consecuencia de errores que ocurren cerca de  $X=\pi$  con  $\alpha > 0$  presentan otra alternativa

$$h_i = h_{i-1} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi - X_i}{\pi} \right)^\beta h_{i-1} \right]$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes.

Plantean la cuestión de que podrían elegirse otras formas diferentes de elección de  $h_i$ . Las mismas deben ser elegidas para problemas específicos.

Es interesante señalar que tratándose de un problema como el que se desarrolla en este trabajo de Tesis, en el que  $L_* \approx 1.000$  m, por ejemplo, la elección [8.7.1] no es posible, pues si para algún  $h_i$  vale que  $h_i > 1$  entonces los que se definen a partir de éste crecen muy rápidamente (cuadráticamente) y si vale  $h_i < 1$  para todo  $h_i$  el retículo no es utilizable para este problema.

Tal vez una alternativa sería tomar esta elección en una capa cerca de superficie y sobre la misma considerar espaciado constante. Es decir, se podría usar lo anterior en  $0 \leq z \leq H_1$  y para  $H_1 \leq z \leq H$  ensayar uno o mas espaciados uniformes, los únicos puntos en los que no se tendría un  $o(\Delta z^2)$  serían aquellos  $H_i$  de cambio de paso.

Si bien la alternativa de usar una capa de superficie en la que se toman las soluciones semi-empíricas, resulta interesante, no hay que perder de vista que para hacerlo se deben considerar dos niveles dentro de la capa de superficie, con lo cual el

problema deja de ser uno de valores de contorno, que constituye el enfoque de este trabajo.

Los resultados que se mostrarán fueron logrados con un espaciado arbitrario, o sea, con errores de truncado  $O(\Delta z)$ , cualquiera de las otras alternativas podrían ser ensayadas. Como generalidades, es interesante señalar que en el caso de usar  $\xi(z)$  logarítmica, aparece una dependencia con  $z_0$  y si se quiere estudiar por ejemplo, un problema bidimensional con  $z_0$  variable, aparecen en las distintas columnas según  $x$ , distintos pasos  $\Delta \xi$ .

## 9. PROBLEMA BIDIMENSIONAL

## 9.1. Ecuaciones en diferencias finitas

Sé hacen las siguientes consideraciones:

Términos advectivos: Se toman las diferencias finitas atrasadas flujo arriba, por ejemplo, para el término  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ , se tiene:

Si  $u \geq 0$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(I,J)} = u(I,J) \cdot \frac{u(I,J) - u(I-1,J)}{x(I) - x(I-1)}$$

Si  $u < 0$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(I,J)} = u(I,J) \cdot \frac{u(I+1,J) - u(I,J)}{x(I+1) - x(I)}$$

Definiendo  $\lambda(I,J)$  y  $S(I,J)$  tal que

si  $u \geq 0$

$$\lambda(I,J) = 1$$

$$S(I,J) = 0$$

si  $u < 0$

$$\lambda(I,J) = 0$$

$$S(I,J) = 1$$

Se tiene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(I,J)} = \lambda(I,J) \cdot u(I,J) \cdot \frac{u(I,J) - u(I-1,J)}{x(I) - x(I-1)} + S(I,J) \cdot u(I,J) \cdot \frac{u(I+1,J) - u(I,J)}{x(I+1) - x(I)}$$

en aquellos términos advectivos según  $w(I,J)$  se definen  $\omega(I,J)$  y  $\varepsilon(I,J)$  en forma similar a  $\lambda(I,J)$  y  $S(I,J)$  respectivamente.

Tomando las demás derivadas en la forma usual, teniendo en cuenta lo expresado en el caso unidimensional para los términos de segundo orden y llamando  $DX(I) = x(I) - x(I-1)$  se tiene el sistema de ecuaciones [7.2.1] a [7.2.6] discretizado de la siguiente forma:

Ecuación para la componente  $u$  :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \cdot u(I,J-1) + \left[ \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{\varepsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot u(I,J) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{-\varepsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} \right] \cdot u(I,J+1) + f \cdot v(I,J) = \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{u}(I-1,J) + \right. \\ & \left. + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{u}(I+1,J) + \frac{1}{S} \cdot \frac{[\tilde{p}(I,J) - \tilde{p}(I-1,J)]}{DX(I)} \right] \end{aligned} \quad [9.1.1]$$

Ecuación para la componente  $v$  :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot v(I,J-1) + \left[ \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) - \right. \\
 & \left. - \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{\epsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot v(I,J) + \quad [9.1.2] \\
 & + \left[ \frac{-\epsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} \right] \cdot v(I,J+1) - f \cdot u(I,J) = \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{v}(I-1,J) + \\
 & + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{v}(I+1,J) + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}(I,J)
 \end{aligned}$$

Ecuación de energía:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot \theta(I,J-1) + \left[ \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) \right. \\
 & \left. - \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{\epsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot \theta(I,J) \quad [9.1.3] \\
 & + \left[ \frac{-\epsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} \right] \cdot \theta(I,J+1) = \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{\theta}(I-1,J) + \\
 & + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{\theta}(I+1,J)
 \end{aligned}$$

Ecuación de humedad:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot q(I,J-1) + \left[ \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) \right. \\
 & \left. - \frac{\omega(I,J)}{DZ(J)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{\epsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} - \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J-1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J)} \right] \cdot q(I,J) \quad [9.1.4] \\
 & + \left[ \frac{-\epsilon(I,J)}{DZ(J+1)} \cdot \tilde{w}(I,J) + \frac{2 \cdot \tilde{K}(I,J+1/2)}{DDZ(J) \cdot DZ(J+1)} \right] \cdot q(I,J+1) = \frac{-\lambda(I,J)}{DX(I)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{\theta}(I-1,J) + \\
 & + \frac{S(I,J)}{DX(I+1)} \cdot \tilde{u}(I,J) \cdot \tilde{\theta}(I+1,J)
 \end{aligned}$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{[\tilde{u}(I+1,J) - \tilde{u}(I,J)]}{DX(I+1)} + \frac{[\tilde{u}(I+1,J+1) - \tilde{u}(I,J+1)]}{DX(I+1)} \right\} + \frac{[w(I,J+1) - w(I,J)]}{DZ(J+1)} = 0 \quad [9.1.5]$$



Ecuación para la componente w:

$$\frac{\rho_{(I,J)}^x - \rho_{(I,J-1)}^x}{Dz(J)} = \frac{-\rho_0^x \cdot x_0}{R} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J)}} + \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J-1)}} \right] \cdot \left\{ q + \lambda_{(I,J-1)} \cdot \tilde{u}_{(I,J-1)} \right. \\ \left. + \frac{[\tilde{w}_{(I,J-1)} - \tilde{w}_{(I-1,J-1)}]}{Dx(I)} + S_{(I,J-1)} \cdot \tilde{u}_{(I,J-1)} \cdot \frac{[\tilde{w}_{(I+1,J-1)} - \tilde{w}_{(I,J-1)}]}{Dx(I+1)} + \omega_{(I,J-1)} \right. \\ \left. + \tilde{w}_{(I,J-1)} \cdot \frac{[\tilde{w}_{(I,J-1)} - \tilde{w}_{(I,J-2)}]}{Dz(J-1)} + \epsilon_{(I,J-1)} \cdot \tilde{w}_{(I,J-1)} \cdot \frac{[\tilde{w}_{(I,J)} - \tilde{w}_{(I,J-1)}]}{Dz(J)} \right\} \quad [9.1.6]$$

Dado el carácter iterativo del método, en estas ecuaciones el símbolo  $\sim$  indica el valor de la variable en la última iteración.

Como particularidades se señalan:

En la ecuación de continuidad [9.1.5] el término  $\frac{\partial u}{\partial x}$  se toma como el promedio en dos niveles (suavizado).

En la ecuación de la presión [9.1.6] se toma  $\frac{1}{2} [1/\theta_{(I,J)} + 1/\theta_{(I,J-1)}]$  en vez de  $1/\theta_{(I,J)}$  y el efecto es el siguiente:

Si la estratificación es nuestra:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J)}} + \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J-1)}} \right] = \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J)}}$$

o sea, el efecto del uso de cualquiera de las dos formas es idéntico.

Si la estratificación es estable:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J)}} + \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J-1)}} \right] > \frac{1}{\bar{\theta}_{(I,J)}}$$

y entonces, se obtienen valores mas altos de  $\rho_{(I,J)}$  y en el caso estable dichos valores son menores.

## 9.2. Región de resolución y condiciones de contorno

La Figura 9 muestra un esquema de la región utilizada.

Las condiciones de contorno son:

Superficie:

$$u(I,1) = v(I,1) = w(I,1) = 0$$

$\theta(I,1)$  y  $q(I,1)$  arbitrarias, hecho que permite simular distintas situaciones.

$\rho(I,1)$  se calcula según el esquema.

$Z_0(I)$  arbitrario, pudiendo definirse entonces, superficies con saltos de rugosidad.

Tope:

$$u(I,N) = U_q, \quad v(I,N) = V_q$$

$w(I,N)$  se calcula según el esquema.

$\rho(I,N)$  arbitrario.

$\theta(I,N)$  y  $q(I,N)$  arbitrarias.

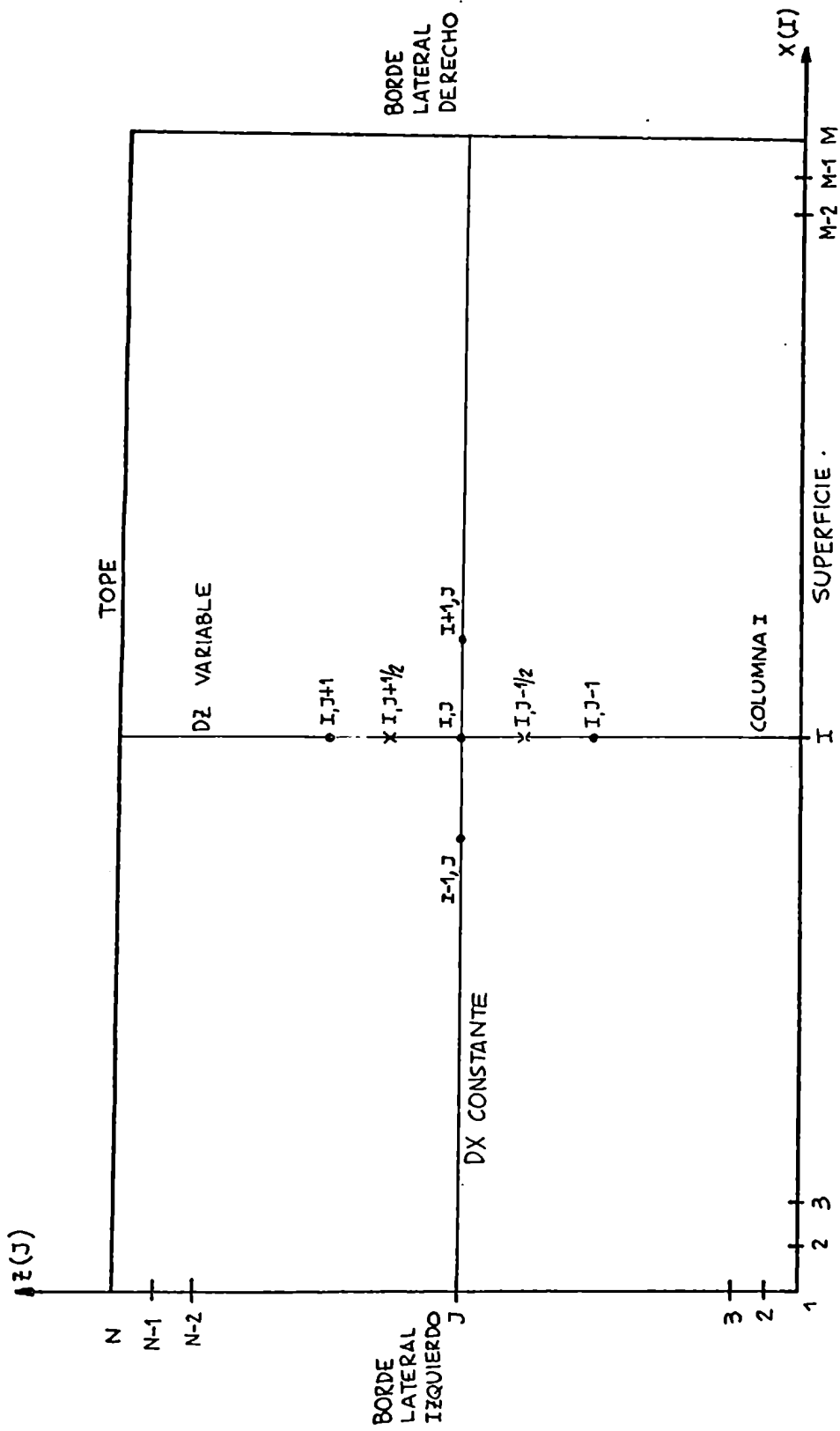


Figura 9: Región utilizada en el problema bidimensional

En particular, las condiciones sobre  $\theta(I,1)$  y  $\theta(I,N)$  son las que determinan el tipo de estabilidad en la simulación que se considere.

Las condiciones de contorno en los bordes laterales dependen de la dirección del flujo; tal como se consideró en este trabajo, la misma es hacia las  $x$  crecientes y entonces se tiene:

Borde lateral izquierdo:

$u(I,J)$ ,  $v(I,J)$ ,  $\theta(I,J)$  y  $q(I,J)$  son las soluciones de la primera aproximación (problema unidimensional).

$w(I,J)$  y  $p(I,J)$  se calculan con el esquema propuesto mas adelante.

Borde lateral derecho:

Es abierto, o sea, las variables (a menos de  $w(M,J)$ ) son calculadas con el esquema del modelo. En el caso de  $w(M,J)$  se supone

$$w(M,J) = w(M-1,J)$$

### 9.3. Método de resolución

Como se expresó anteriormente (parágrafo 7.3.) el método consiste en cuatro aproximaciones, tal como se describe a continuación:

La primera se obtiene con la metodología del caso unidimensional, usándola en cada columna de la región de resolución. Se obtiene pues, para todo punto del retículo la distribución de las variables:

$$u(I,J), v(I,J), \theta(I,J), q(I,J), R_i(I,J) \text{ y } K(I,J)$$

Las variables  $w(I,J)$  y  $p(I,J)$  se suponen iguales a sus valores en el tope de la región.

La segunda, tercera y cuarta aproximaciones se obtienen avanzando por columnas en el sentido de las  $x$  crecientes. En cada una de dichas columnas, se usa la misma idea que en el caso unidimensional, pero las matrices que se forman, se obtienen a partir de las ecuaciones [9.1.1] y [9.1.2] para  $u$  y  $v$ , [9.1.3] para  $\theta$  y [9.1.4] para  $q$ .

Las dimensiones de dichas matrices son las mismas que en el caso unidimensional pero están caracterizadas en forma distinta pues incluyen el efecto del campo de presión y los efectos de las advecciones según  $u$  y  $w$ . Este hecho introduce nuevas dependencias en la solución de  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) y una caracterización de  $\partial \varphi_i$  y  $\tau_i$  se modifica por lo anterior y por el nuevo esquema en diferencias finitas. Los métodos de solución de estas matrices son idénticos al del caso unidimensional pues aquella que se usa para  $u, v$  es de estructura banda y la de  $\theta$  (o  $q$ ) es tridiagonal.

Explicitando estas aproximaciones se tiene:

Segunda aproximación:

- 1) Se comienza por la columna  $I = 2$  y con la incorporación de la advección según  $u(z, j)$ . Con alguna alternativa de elección de  $K$  se itera hasta lograr la convergencia para la cota dada. Se considera  $w(z, j) = 0$  y  $p(z, j) = P(z, N)$
- 2) Se repite el mismo procedimiento para las columnas  $I = 3, 4, \dots, M$

Tercera aproximación:

Se repite el procedimiento seguido en la segunda aproximación pero se incluye el efecto de la advección según  $w$ . El campo de  $w(I, j)$  para la columna en cuestión se calcula en cada iteración usando los últimos valores de la distribución de  $u(I, j)$  y se toman fijos los de la próxima columna  $u(I+1, j)$ . Esto se hace mediante el uso de la expresión en diferencias finitas [9.1.5], de la cual se deduce:

$$w(I, j+1) = w(I, j) - \frac{1}{2} \cdot \frac{Dz(j+1)}{Dx(I+1)} \cdot [\tilde{u}(I+1, j) + \tilde{u}(I+1, j+1) - \tilde{u}(I, j) - \tilde{u}(I, j+1)] \quad [9.3.1]$$

El campo de  $p(I, j)$  sigue sin modificarse.

Cuarta aproximación:

Se introduce, mediante el mismo procedimiento anterior, el efecto del campo de la presión, incorporando de esta forma todos los mecanismos que determinan al sistema de ecuaciones adoptado para este modelo.

En cada columna, el campo de presión se calcula haciendo uso de [9.1.6], de la cual se obtiene:

$$p(I, j-1) = \left\{ p^{\infty}(I, j) + \frac{p_0^{\infty} \cdot \alpha \cdot Dz(j)}{R} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\theta(I, j)} + \frac{1}{\theta(I, j-1)} \right] \cdot \left\{ \sigma + \lambda(I, j-1) \cdot \tilde{u}(I, j-1) \cdot \frac{[\tilde{w}(I, j-1) - \tilde{w}(I-1, j-1)]}{Dx(I)} + \xi(I, j-1) \cdot \tilde{u}(I, j-1) \cdot \frac{[\tilde{w}(I+1, j-1) - \tilde{w}(I, j-1)]}{Dx(I+1)} + \omega(I, j-1) \cdot \tilde{w}(I, j-1) \cdot \frac{[\tilde{w}(I, j-1) - \tilde{w}(I, j-2)]}{Dz(j-1)} + \epsilon(I, j-1) \cdot \tilde{w}(I, j-1) \cdot \frac{[\tilde{w}(I, j) - \tilde{w}(I, j-1)]}{Dz(j)} \right\} \right\}^{1/\alpha} \quad [9.3.2]$$

En cada columna  $I$ , el campo de presión se obtiene a partir del valor en el tope y es dependiente de la temperatura potencial en dicha columna y de los campos de  $u$  y  $w$  (la dependencia puntual la determina el esquema en diferencias finitas) que se incorporan a través de los términos advectivos. En el caso de suponer válida la aproximación hidrostática la dependencia del campo de  $p$  sólo está dada en función de la temperatura potencial.

#### 9.4. Características del método de resolución

Varias son las características que condicionan la solución del modelo aquí propuesto.

Una es la forma de parametrizar el coeficiente de difusividad turbulenta, o también los coeficientes de difusividad turbulenta de momento, calor y humedad si no se supone válida la relación [6.2.5].

En los casos estudiados que se mostrarán se consideraron parametrizaciones de  $K$  similares a aquellas del problema unidimensional.

Shir y Bornstein (65) en un trabajo donde tratan distintas maneras de especificar los coeficientes de intercambio turbulento, estudian en particular los problemas de usar la teoría sobre terrenos inhomogéneos y señalan la alternativa

$$K = l^2 \left[ z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

El uso de ésta o alguna otra expresión que incorpore efectos advectivos resultarían de interés en el modelo aquí propuesto.

Acerca del esquema en diferencias finitas, es interesante señalar que el error de truncado es del orden  $o(\Delta x, \Delta z)$ . Si se quiere lograr un error  $o(\Delta x^2, \Delta z^2)$  habría que aplicar para la discretización vertical alguna de las alternativas expuestas para el caso unidimensional referentes a la coordenada  $z$  y aunque el espaciado según  $x$  se toma uniforme (ver los retículos en los casos estudiados), la forma de discretizar el término de la presión (derivada atrasada) y los términos advectivos (ver el párrafo 9.1.) imponen truncados de primer orden, y es claro que para lograr segundo orden deberían tomarse diferencias centradas, lo cual introduciría los inconvenientes de tratar soluciones de tipos computacionales además de la física.

También cabe señalar que la forma en que se aceleró la convergencia estuvo dada por el promedio del coeficiente de difusividad turbulenta entre dos iteraciones sucesivas. Estoque y Bhumralkar promedian todas las variables (correspondencia personal de Estoque), en este trabajo esto no se hizo.

Al no existir un criterio teórico de convergencia (planteado en el párrafo 8.5.), se adoptó el criterio usado por Estoque y Bhumralkar que consiste en reemplazar las soluciones en las ecuaciones de partida y determinar el residuo para cada una de las mismas como la diferencia entre el primer miembro y el segundo; la solución es mas exacta cuando dicha diferencia o residuo se aproxima mas a cero. Si el método converge, a mayor número de iteraciones dicho residuo se aproxima mas a cero. En todos los casos se calcularon residuos para todas las ecuaciones del sistema y en todo punto de la región.

En un trabajo de Gutman y Torrance (66) se discuten algunas características del método aquí utilizado (referidas al traba-

jo de Estoque y Bhumralkar, donde se hace la suposición hidros-  
tática) y una acotación de interés es la de que el tomar atra-  
sadas las diferencias finitas en el término  $\frac{\partial u}{\partial x}$  de la ecuación  
[9.3.1], permite una mas rápida y suave convergencia de las ite-  
raciones en una dada columna.

.

## 10. CASOS ESTUDIADOS

Previamente se describirán una serie de resultados que son el producto de experimentaciones numéricas con modelos unidimensionales, que obedecen a las formulaciones explicitadas en el parágrafo 8.

Una alternativa interesante consiste en usar una capa de superficie, dentro de la cual se adoptan las soluciones semi-em-píricas de Monin-Obhukov y las expresiones resultantes de Paulson. Las soluciones para las variables dependientes  $\bar{u}(z)$ ,  $\bar{v}(z)$ ,  $\bar{\theta}(z)$  y  $\bar{q}(z)$  en el tope de dicha capa se toman como condiciones de contorno en el límite inferior de la capa de transición, para la cual se resuelve el sistema completo de ecuaciones con los esquemas en diferencias finitas expuestos.

Tal como está formulado el modelo, su resolución hace necesaria fijar, además de las condiciones de contorno en la superficie terrestre y en el tope de la capa límite planetaria, los valores de  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  y  $q$  en algún nivel dentro de la capa de superficie.

En un trabajo realizado por Aiello y Berri (8) se ensaya una solución según dicha formulación tomando, dentro de la capa de superficie los siguientes valores:  $\theta(1,6m)$ ,  $q(1,6m)$  y las componentes  $u$  y  $v$  en  $z=16m$ . Estos valores corresponden a los niveles en que se midieron dichas variables en la experiencia de Great Plains.

La solución del sistema completo de ecuaciones en la capa de transición es directa, pues se supuso válida la expresión de O'Brien (29), que permite conocer la distribución de los coeficientes de difusividad turbulenta, que en este caso no obedecen a la relación [6.2.5] ya que se calculan independientemente. Dicha expresión es:

$$K(z) = K(H) + [(z-H)^2 / (H-h)^2] \cdot \left\{ K(h) - K(H) + (z-h) [K'(h) + 2(K(h) - K(H) / (H-h)^2)] \right\}$$

$K(h)$  se obtiene a partir de la formulación usada en la capa de superficie y  $K(H)$  se toma con un valor tendiendo a cero.

En dicho trabajo se muestran las particularidades del método y un ejemplo de integración con los resultados respectivos.

El autor, en un trabajo acerca de la resolución en el caso unidimensional (14) realizó una experimentación numérica de simulación, tomando distintas alternativas para la función de estabilidad atmosférica y en distintas condiciones de estabilidad y de contorno obtuvo las respectivas soluciones. En dicho trabajo se explicita el cierre adoptado y las expresiones usadas para  $S_M$ . En un caso de inestabilidad se muestran las distribuciones de las variables dependientes  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $\theta(z)$  y  $q(z)$ , y del coeficiente de difusividad turbulenta  $K$ .

En este tipo de modelos, es interesante enfatizar que fijadas las condiciones de contorno para  $\theta$ , que definen la estabilidad del problema, la distribución de  $\theta(z)$  resultante es constante si  $\theta_0 = \theta_H$  (neutralidad) y monótona creciente o decreciente según sea  $\theta_0 \leq \theta_H$  respectivamente (estabilidad o inestabilidad). Es decir, no se reproducen distintos tipos de estabilidades una vez fijadas las condiciones de contorno.

El método es adecuado para simular casos con distintas condiciones de estabilidad y de forzantes externos.

En los casos que se presentan a continuación, que corresponden a problemas bidimensionales, dado que en el borde lateral izquierdo se resuelve el problema unidimensional, las características de las distribuciones de las variables quedan determinadas como un caso particular, modificándose cuando en la superficie terrestre aparece una inhomogeneidad.

Caso 1) Consiste en la simulación de un salto de rugosidad en superficie.

Como resultado de la experimentación numérica se infiere el efecto de incorporar, en el cálculo de la presión, los términos advectivos según la componente vertical  $w$ .

Para estudiar dicho efecto se comparan los resultados que se obtienen cuando se incorpora en la cuarta aproximación, el efecto del campo de presión hidrostático y no hidrostático (con efectos advectivos incorporados). La estructura del programa FORTRAN IV DOSDIM (en el Anexo 1 se muestra su diagrama de flujo) permite realizar lo anterior.

La experimentación se realizó usando las características y condiciones de contorno que se muestran en la Tabla 5.

La diferencia entre las distintas simulaciones estuvo dada por la definición del retículo horizontal  $X(I)$ , el cual, si bien fue siempre considerado uniforme, adoptaba en cada caso distintos pasos.

Se obtuvieron resultados en siete simulaciones, para las cuales se usaron, respectivamente, los siguientes pasos:

Simulación	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta x$ (m)	400	300	275	250	225	200	100

Cuando  $\Delta x \geq 275$  m se obtuvo convergencia en ambos casos (o sea, según las versiones hidrostática y no hidrostática) y comparando ambas soluciones, se encontraron diferencias muy pequeñas.

En la simulación con  $\Delta x = 250$  m, la versión hidrostática converge rápidamente en tanto que la no hidrostática lo hace más lentamente en la zona del salto de rugosidad. En la estructura del programa se permitió un número de 100 iteraciones por columna, y en este último ejemplo, para la versión no hidrostática, al realizar las mismas sobre el salto de rugosidad, se logró una cota de convergencia entre  $10^{-1}$  y  $10^{-2}$ . Se comprobó que



al aumentar el número de iteraciones la cota disminuía, permitiendo lograr una convergencia mas fuerte (del orden de  $10^{-4}$  con 300 iteraciones).

En aquellos casos en que  $\Delta x < 250$  m se comprobó que la versión hidrostática permitía la convergencia en tanto que la no hidrostática no permite soluciones cuando el esquema encuentra el salto de rugosidad. Esto puede deberse a que se introducen, al eliminar el equilibrio hidrostático, soluciones tales como las ondas de sonido (16). De esta manera, como el proceso iterativo conduce a una "seudo" evolución temporal (67) es posible que se viole la condición de estabilidad lineal, al reducir el paso del retículo.

Para el ejemplo en que  $\Delta x = 300$  m se presentan los siguientes resultados en el caso no hidrostático:

El campo de  $u$  está representado en la Figura 10. Las isolíneas significan apartamientos para una misma altura respecto de la distribución del borde lateral izquierdo. Los rangos de dichos apartamientos y la distribución del borde lateral izquierdo (caso homogéneo) están dadas en la parte lateral izquierda de la Figura. Las mismas representaciones valen para las demás variables.

En este caso el salto de rugosidad es  $\Delta z_0 = 0.99$  m y se encuentra a 1.500 m del borde lateral izquierdo (en  $I = 6$ ). Se puede apreciar que el máximo apartamiento (en valores negativos) de  $u$  se encuentra en el nivel aproximado de  $z = 2$  m y a los 2.700 m ( $I = 10$ ) del borde lateral izquierdo representando una disminución respecto del valor en dicho borde de aproximadamente un 55 %, para el nivel de  $z = 150$  m dicha disminución ya se hace del orden del 1 % y por encima de este nivel no se observan disminuciones, significando esto el hecho de que el flujo no es afectado por el salto de rugosidad en superficie. Estos valores quedan determinados por el salto de rugosidad y por las condiciones de contorno adoptadas, debiendo simularse en cada caso particular.

En el modelo de Estoque y Bhumralkar (25) (donde se hace la suposición hidrostática) se adoptó un retículo de 15 puntos según  $x$  con un espaciado uniforme de  $\Delta x = 50$  m y 14 puntos según  $z$  con espaciado no uniforme hasta una altura de  $z = 1.000$  m, se muestran varios ejemplos de integración y en el relativo al cambio de rugosidad en superficie se toma un salto central y se aprecian una deceleración de la componente  $u$  sobre la zona central y una aceleración de la misma luego de dicha zona, como es de esperar, dado que el flujo se encuentra con un aumento abrupto de rugosidad y luego con una disminución de la misma. Lo que sucede en la simulación aquí presentada es solamente el primero de dichos efectos y luego del salto de rugosidad hay una "acomodación" del flujo que no es nuevamente perturbado.

La Figura 11 muestra los apartamientos del campo de  $v$  donde es posible apreciar las mismas perturbaciones posicionales cua-

litativas debido a la presencia del efecto de Coriolis.

La Figura 12 muestra el campo de  $w$  donde se ven los ascensos y descensos inducidos por el salto de rugosidad.

Acerca de los apartamientos de la presión, los resultados de la simulación quedan representados en la Figura 13 donde se observa una sobrepresión a barlovento del salto de rugosidad y una depresión, algo mas débil, a sotavento del mismo.

Respecto del campo de temperatura potencial se obtiene neutralidad en toda la región. Los resultados numéricos muestran apartamientos del orden de  $10^{-19}$ , de lo que se infiere que dicho campo solo es afectado por "ruido numérico".

La Figura 14 indica los apartamientos del campo de humedad cuya distribución está fuertemente determinada por las condiciones de contorno.

La Figura 15 señala el comportamiento del coeficiente de difusividad turbulenta  $K$  mostrando los apartamientos al caso homogéneo. En el caso homogéneo la solución presenta un máximo cerca de los 300 m tal como lo predicen los tratamientos teóricos usuales (es decir, el máximo  $K$  a un tercio del tope de la capa límite). Si bien los apartamientos, luego del salto de rugosidad, son máximos a una altura de 150 m aproximadamente; el campo total de  $K$  conserva su estructura inicial.

Caso 2) Consiste en la simulación de una fuente de calor en superficie, ubicada en la parte central de la región en estudio.

La Tabla 6 muestra las condiciones de contorno y características adoptadas en este caso.

Respecto del parámetro de rugosidad de superficie se lo supuso constante en la misma en un caso y también se admitió un salto  $\Delta z_0 = 0,4m$  coincidente con la zona de discontinuidad de temperatura (indicado con \* en la Tabla 6).

En el caso en que no hay salto de rugosidad en superficie las Figuras 16 a 22, muestran respectivamente, los apartamientos de las variables  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\theta$ ,  $q$  y  $K$  respecto del borde lateral izquierdo.

Estoque y Bhumralkar (25), empleando el retículo y la geometría ya citadas en el Caso 1, simulan el mismo fenómeno tomando  $Z_0 = 0,001m$  (constante en toda la superficie),  $\theta = 313^\circ K$  en  $6 \leq I \leq 10$  y  $303^\circ K$  en  $1 \leq I \leq 5$  y  $11 \leq I \leq 15$  y  $\theta(I,N) = 309^\circ K$ .

Puede apreciarse que las diferencias entre los dos modelos están dadas por la distinta geometría según la coordenada  $x$  y las distintas temperaturas en la parte central.

En la Figura 16, puede apreciarse que sobre la fuente de calor simulada (aproximadamente a 5.600 m del borde lateral izquierdo) y en  $z$  entre 5 y 10m se encuentra el máximo apartamiento de  $u$  con un valor aproximado de  $0,07m \cdot s^{-1}$ , indicando el hecho de la aceleración inducida por la fuente de calor en superficie. En el trabajo de Estoque y Bhumralkar también se

aprecia el mismo fenómeno (ver la Figura respectiva) detectándose dicho máximo (con un valor de  $0,08 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$ ) desplazado hacia la parte derecha de la fuente de calor y en  $z=6 \text{ m}$ . En ambos modelos se encuentra el máximo apartamiento en valores negativos alrededor de  $z=300 \text{ m}$  y por encima de la parte derecha de la fuente de calor en superficie.

La Figura 17 muestra los apartamientos de  $v$  en donde se aprecia el máximo apartamiento sobre la parte derecha de la fuente de calor.

La Figura 18 señala un máximo ascenso ( $w=0,03 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$ ) casi justo sobre la fuente de calor y en aproximadamente  $z=300 \text{ m}$  y en el trabajo de Estoque y Bhumralkar se observa un máximo ascenso sobre la fuente casi en el tope de la región con un valor  $w=0,08 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$  y en  $z=32 \text{ m}$  (también sobre la fuente) aparece un  $w=0,01 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$  indicando un descenso en dicha región; en el modelo aquí presentado se observa una zona de descenso en la parte superior derecha de la región considerada (con valores máximos en valores negativos de  $w=0,02 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$ ).

Acerca del campo de presión, en la Figura 19 se aprecia una disminución de la misma (respecto del borde lateral izquierdo) a sotavento de la fuente de calor.

La Figura 20 muestra el comportamiento de  $\Theta$  y comparando los resultados de ambos modelos se aprecia un idéntico comportamiento cualitativo y el máximo apartamiento de  $\Theta$  en el modelo aquí presentado es menor que el que obtienen Estoque y Bhumralkar por las distintas condiciones de contorno consideradas. Los resultados del modelo expuesto indican una estratificación estable hasta la fuente de calor. La fuente provoca por sobre ella una inestabilidad hasta una altura de  $z=150 \text{ m}$  y los efectos advectivos producen una lengua caliente a sotavento de la fuente y centrada en una altura aproximada de  $z=100 \text{ m}$ .

El campo de humedad reproduce el comportamiento del campo térmico. Si se hubieran considerado cambios de fase, el efecto anterior se modificaría debido a los procesos termodinámicos asociados.

El efecto de la fuente de calor produce un considerable aumento de la difusividad turbulenta por sobre ella.

Cuando se asoció a dicha fuente de calor un aumento de rugosidad los resultados de la Figura 23 (campo de  $u$ ) muestran una disminución de la componente  $u$ ; por lo tanto el efecto decelerante debido al aumento de rugosidad impuesto predomina por sobre los efectos de empuje hidrostático debidos a la fuente de calor.

Caso 3) En este caso se simulan las condiciones nocturnas en la capa límite sobre una ciudad, adaptando las condiciones de contorno y las dimensiones del retículo de manera que permitan una comparación de resultados con los obtenidos por Yu y Wagner (54) (ver parágrafo 6.4.). Estos autores, mediante un modelo no estacionario y bidimensional en una región que com-

prende la capa límite atmosférica y una capa de suelo, usando como forzante la resolución de la ecuación de balance en el límite tierra-atmósfera, simulan el comportamiento de la capa límite atmosférica sobre una ciudad de dimensión media especificando una longitud de aspereza máxima de 1,50 m en el centro del área urbana decreciendo hasta 0,05 m para las regiones rurales.

El modelo elaborado por dichos investigadores utiliza un retículo que contiene 24 puntos en dirección  $x$ , con un espaciado uniforme de  $\Delta x = 500\text{ m}$  y 23 puntos en dirección  $z$ , con espaciado no uniforme.

Bajo condiciones iniciales que se especifican en dicho trabajo estudian la evolución de distintas variables y características de la capa límite atmosférica sobre una ciudad. Los resultados que muestran corresponden al estado estacionario y a las 5 horas de integración.

Con el modelo aquí propuesto se adoptan las condiciones de contorno obtenidas por dichos autores correspondientes a las 5 horas de integración tomando una región bidimensional con un retículo de 15 puntos según la dirección  $x$  y un espaciado  $\Delta x = 800\text{ m}$  y 14 puntos según  $z$  con espaciado no uniforme, de manera de simular una región de iguales dimensiones que la de dichos autores. En la Tabla 7 se muestran el retículo utilizado y las condiciones de contorno.

A pesar de utilizar una resolución mas gruesa que el modelo de los investigadores nombrados, se observa una buena concordancia en los campos de las variables consideradas.

Los apartamientos de las variables  $u$  y  $v$  obtenidos con este modelo se muestran respectivamente en las Figuras 24 y 25.

Como ilustración se indican los valores máximos del decrecimiento de la componente  $u$  ( $\text{m}\cdot\text{seg}^{-1}$ ) que se encuentran sobre la ciudad, obtenidos por este modelo y por el de dichos autores.

$z$ (m)	2	10	150
Yu-Wagner	2,00	1,70	0,40
Modelo propuesto	1,60	1,40	0,50

Con los valores de contorno tomados se tiene en el nivel de  $z = 2\text{ m}$  un valor de  $u = 2,86\text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$  en el borde lateral izquierdo y a ese mismo nivel sobre la ciudad ( $I = 6$ )  $u = 1,22\text{ m}\cdot\text{seg}^{-1}$ , representando una disminución de un 57 %, a un nivel de  $z = 10\text{ m}$  aparece un valor de 33 % y a  $z = 100\text{ m}$  de 5 %. Estos resultados son similares a los descriptos por Yu y Wagner pues en  $z = 2\text{ m}$  obtienen disminuciones de 61 %, en  $z = 10\text{ m}$  de 35 % y por encima de  $z = 100\text{ m}$  despreciables. Observaciones experimentales hechas por Landsberg (68) y Kratzer (69) dieron para la disminución del viento en el nivel anemométrico, al pasar de una zona rural a una ciudad, valores de 30 % comprobando que el valor de 33 % obtenido por el modelo es razonable.

Respecto de los apartamientos de  $v$  los resultados de este modelo dan una disminución de  $0,75 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$  en  $z=2 \text{ m}$  sobre la ciudad y en el trabajo de Yu y Wagner dicho apartamiento es de  $0,85 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1}$ .

La distribución de  $w$  obtenida con el modelo, mostrando los ascensos y descensos se aprecia en la Figura 26.

El campo de apartamiento térmico (Figura 27) reproduce la misma distribución obtenida por los autores citados. Es interesante notar que, tal como en el Caso 2 (fuente de calor), aparece, a sotavento de la ciudad una lengua térmica alrededor de los 50 m de altura. Este comportamiento coincide con observaciones efectuadas en ciudades de Estados Unidos y Canadá (70).

## RETICULO

COORDENADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
HORIZONTAL $x(I)$ (m)	0	300	600	900	1.200	1.500	1.800	2.100	2.400	2.700	3.000	3.300	3.600	3.900	4.200
VERTICAL $z(I)$ (m)	0	0,25	0,50	1	2	5	10	30	70	150	300	450	700	1.000	

## CONDICIONES DE CONTORNO

CONTORNO VARIABLE	SUPERFICIE	TOPE
$U$ (m·seg <sup>-1</sup> )	$U(I,1) = 0$	$U(I,N) = 10$
$V$ (m·seg <sup>-1</sup> )	$V(I,1) = 0$	$V(I,N) = 0$
$W$ (m·seg <sup>-1</sup> )	$w(I,1) = 0$	Abierto
$P$ (mb)	Abierto	$P(I,N) = 900$
$\theta$ (°K)	$\theta(I,1) = 303$	$\theta(I,N) = 303$
$q$ (gr/kg·r)	$I = 1,5 \quad q(I,1) = 15$ $I = 6,15 \quad q(I,1) = 30$	$q(I,N) = 12$
$z_0$ (m)	$I = 1,5 \quad z_0(I) = 0,01$ $I = 6,15 \quad z_0(I) = 1,0$	

## CARACTERISTICAS

$$f = -0,000099$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \text{cte} = -f \cdot \rho g$$

$$\text{COTA DE CONVERGENCIA } (\epsilon) = 10^{-6}$$

$$\text{ITERACIONES POR COLUMNA} = 100$$

$$S_M = \begin{cases} (1+3R_i)^{-2} & \text{si } R_i \geq 0 \\ (1-3R_i)^2 & \text{si } R_i < 0 \end{cases}$$

$$\text{Neutralidad: } R_i = 0$$

converge con la cota y con iteraciones  $< 100$  para toda columna

Tabla 5: Características y condiciones de contorno en el Caso 1.

**RETICULO**

PUNTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
COORDENADA HORIZONTAL X (I) (m)	0	800	1.600	2.400	3.200	4.000	4.800	5.600	6.400	7.200	8.000	8.800	9.600	10.400	11.200
VERTICAL Z (J) (m)	0	0,25	0,50	1	2	5	10	30	70	150	300	450	700	1.000	

**CONDICIONES DE CONTORNO**

CONTORNO VARIABLE	SUPERFICIE	TOPE
U (m·seg <sup>-1</sup> )	U(I,1)=0	U(I,N)=10
V (m·seg <sup>-1</sup> )	V(I,1)=0	V(I,N)=0
w (m·seg <sup>-1</sup> )	w(I,1)=0	Abierto
P (mb)	Abierto	P(I,N)=900
θ (°K)	1 ≤ I ≤ 5 y 11 ≤ I ≤ 15 6 ≤ I ≤ 10	θ(I,1)=303 θ(I,1)=309
q (gr·kg <sup>-1</sup> )	1 ≤ I ≤ 5 y 6 ≤ I ≤ 10 11 ≤ I ≤ 15	q(I,1)=15 q(I,1)=30
z <sub>0</sub> (m)	Z <sub>0</sub> (I,1)=0,5	

**CARACTERISTICAS**

f = -0,000099

$\frac{\partial P}{\partial y} = \text{cte} = -f \cdot U_0 g$

COTA DE CONVERGENCIA = 10<sup>-6</sup>

ITERACIONES POR COLUMNA = 100

$$S_M = \begin{cases} (1+3R_i)^{-2} & \text{si } R_i > 0 \\ (1-3R_i)^2 & \text{si } R_i < 0 \end{cases}$$

R<sub>i</sub> (I=3) = 0,0418  
 R<sub>i</sub> (I=8) = -0,1711  
 R<sub>i</sub> (I=12) = 0,0984

CONVERGE PARA LA COTA DADA Y CON ITERACIONES < 100 PARA TODA COLUMNA

\*SALTO DE RUGOSIDAD CENTRAL: Δz<sub>0</sub> = 0,4  
 1 ≤ I ≤ 5 y 11 ≤ I ≤ 15 z<sub>0</sub> = 0,1  
 6 ≤ I ≤ 10 z<sub>0</sub> = 0,5

Tabla 6: Características y condiciones de contorno en el Caso 2.

RETICULO

COORDENADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
HORIZONTAL X (I) (m)	0	800	1.600	2.400	3.200	4.000	4.800	5.600	6.400	7.200	8.000	8.800	9.600	10.400	11.200
VERTICAL Z (J) (m)	0	0,25	0,50	1	2	5	10	30	70	150	300	450	700	1.000	

CONDICIONES DE CONTORNO

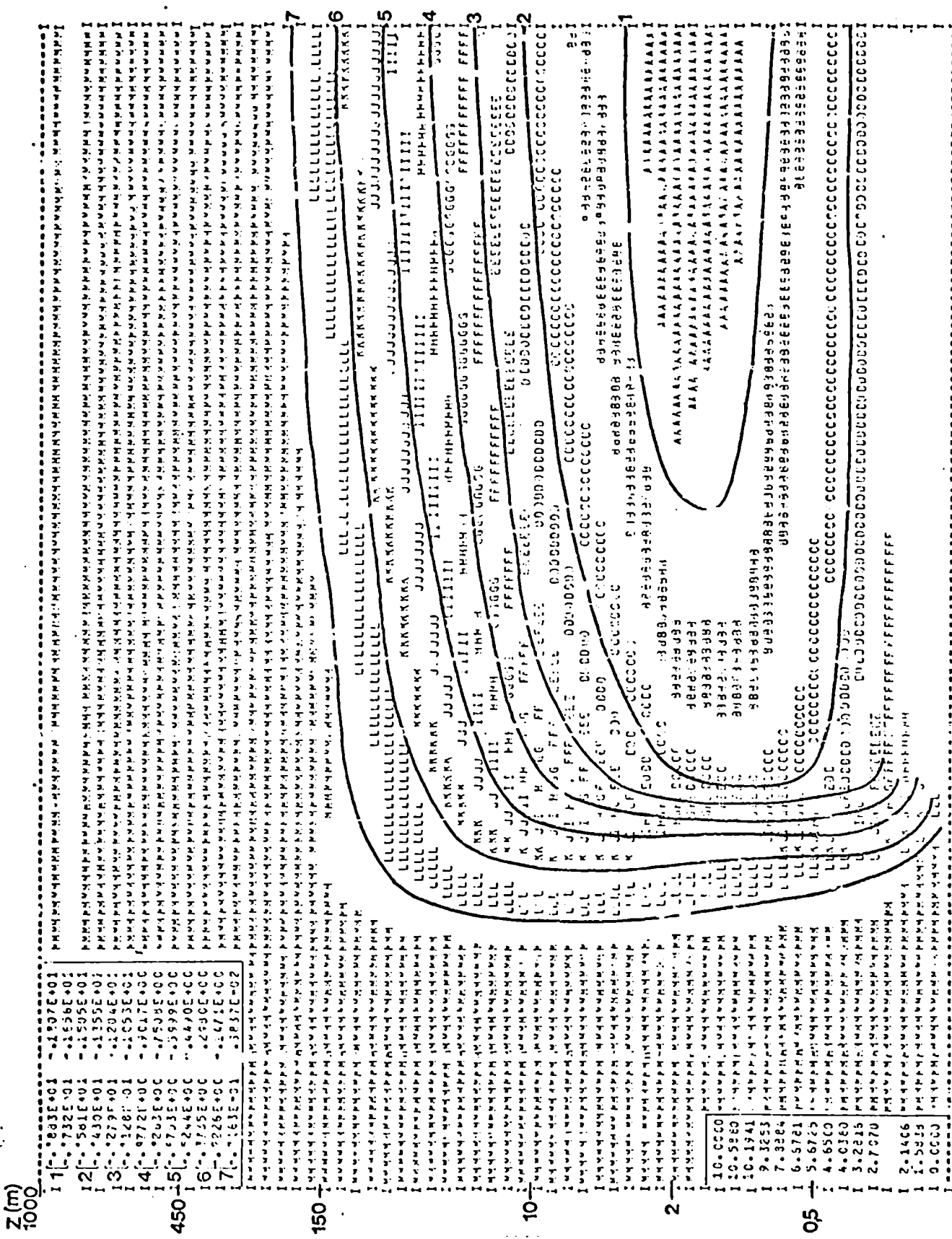
CONTORNO VARIABLE	SUPERFICIE	TOPE
$U (m \cdot sec^{-1})$	$U(I,1) = 0$	$U(I,N) = 10$
$V (m \cdot sec^{-1})$	$V(I,1) = 0$	$V(I,N) = 0$
$w (m \cdot sec^{-1})$	$w(I,1) = 0$	Abierto
P (mb)	Abierto	$P(I,N) = 900$
$\theta (^{\circ}K)$	$1 \leq I \leq 3 \quad \theta(I,1) = 296 ; \theta(4,1) = 297,5 ; \theta(5,1) = 298 ; \theta(6,1) = 298,6 ; \theta(7,1) = 298,6 ;$ $\theta(8,1) = 298 ; \theta(9,1) = 297 ; \theta(10,1) = 296,5 ;$ $\theta(11,1) = 295,2 ; 12 \leq I \leq 15 \quad \theta(I,1) = 294$	$\theta(I,N) = 312$
$z_0 (m)$	$z_0(1) = 0,1 ; z_0(2) = 0,1 ; z_0(3) = 0,5 ; z_0(4) = 1$ $z_0(5) = 1,3 ; z_0(6) = 1,5 ; z_0(7) = 1,3$ $z_0(8) = 1 ; z_0(9) = 0,5 ; z_0(10) = 0,1$ $11 \leq I \leq 15 \quad z_0(I) = 0,05$	

CARACTERISTICAS

$f = -0,000099$   
 $\frac{\partial p}{\partial y} = cte = -f \cdot \rho g$   
 COTA DE CONVERGENCIA ( $\epsilon$ ) =  $10^{-3}$   
 ITERACIONES POR COLUMNA = 100  
 $S_M = \begin{cases} (1+3R_i)^{-2} & \text{si } R_i \geq 0 \\ (1-3R_i)^2 & \text{si } R_i < 0 \end{cases}$   
 $R_i (I=3) = 0,0283$   
 $R_i (I=6) = -0,0312$   
 $R_i (I=8) = -0,0058$   
 $R_i (I=12) = 0,1255$   
 EN LAS COLUMNAS 6, 7 Y 8 LA CONVERGENCIA ES LENTA, EN 100 ITERACIONES  $\epsilon \approx 10^{-2}$ , LOS RESIDUOS SON ACEPTABLES

Tabla 7: Características y condiciones de contorno en el Caso 3.





4200  
X (m)

1500

0

FIGURA 10 : APARTAMIENTOS DE U (m·seg<sup>-1</sup>), CASO 1

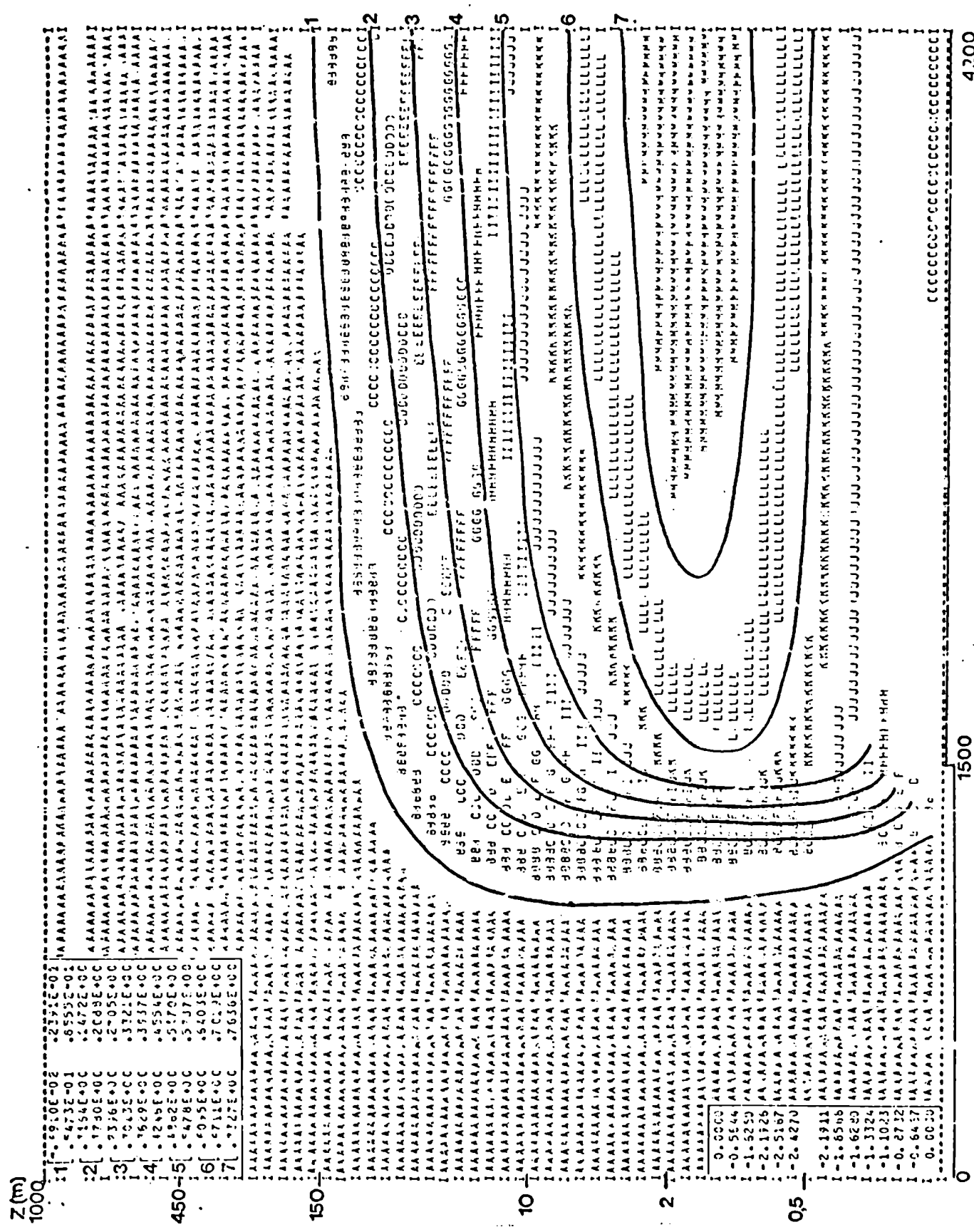


FIGURA 11 : APARTAMIENTOS DE  $V$  ( $m \cdot seg^{-1}$ ), CASO 1

1500  
4700  
X(m)

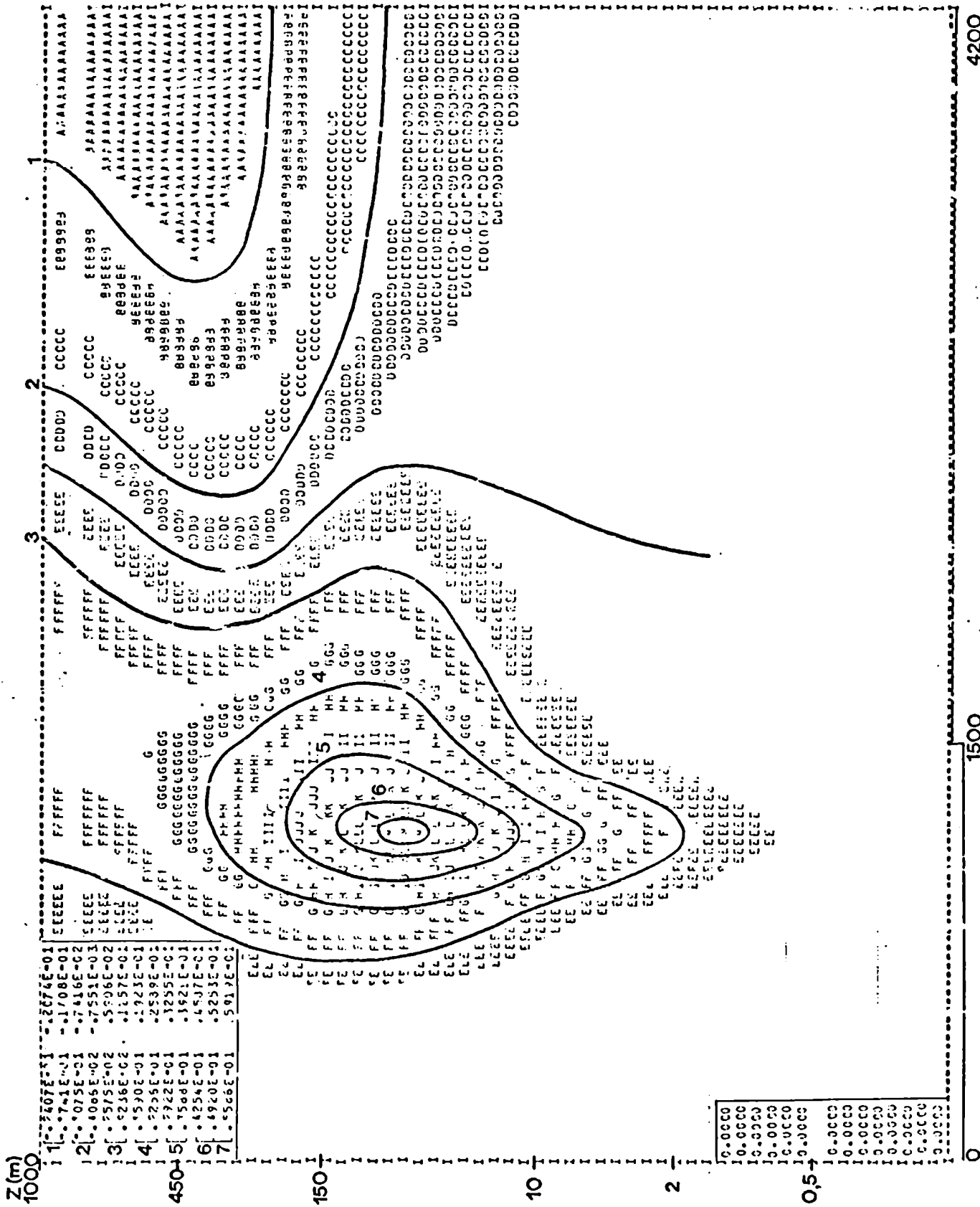
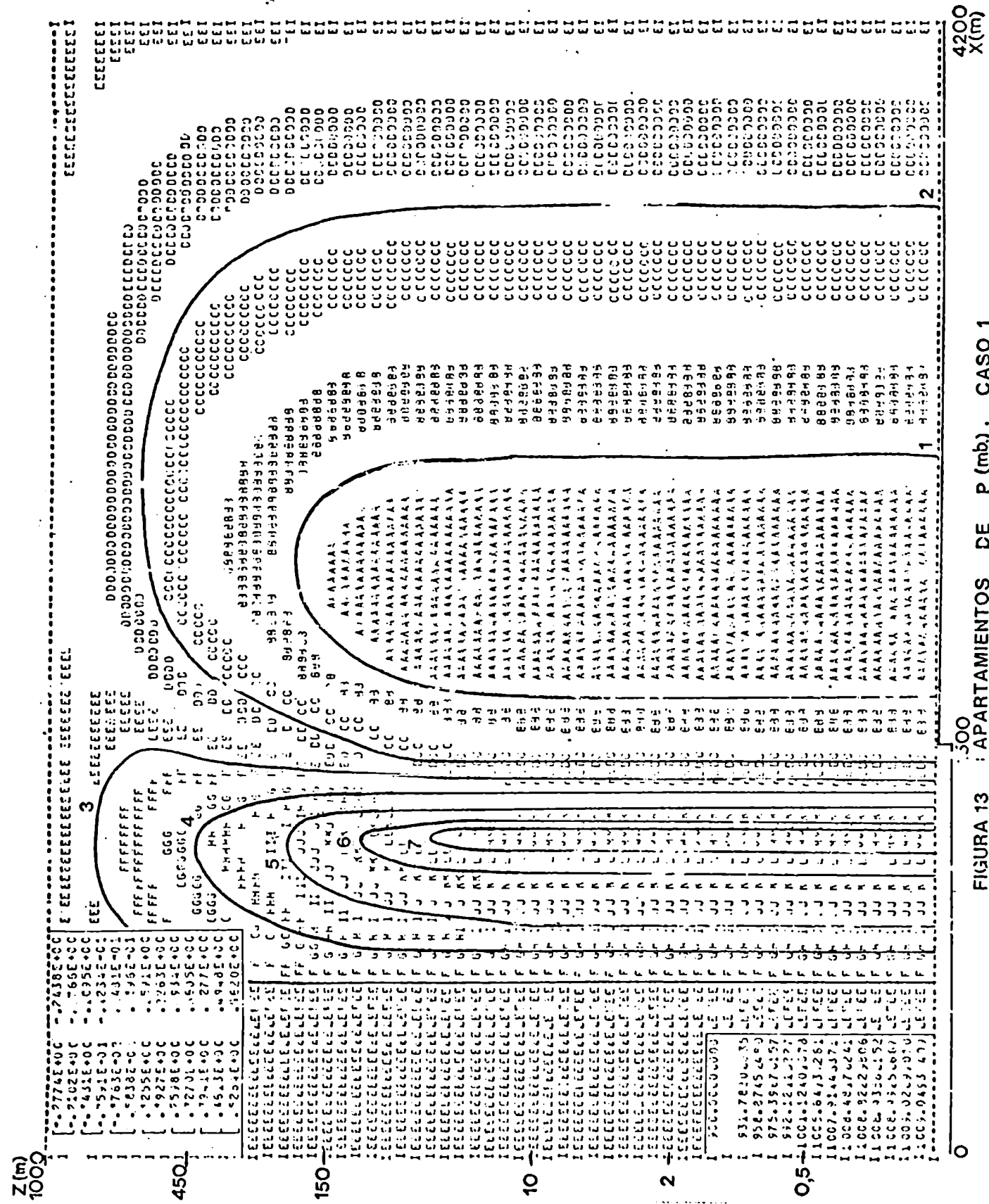


FIGURA 12 : APAFTAMIENTOS DE W (mssg), CASO 1.



4200 X(m)

500 : APARTAMIENTOS DE P (mb), CASO 1

FIGURA 13

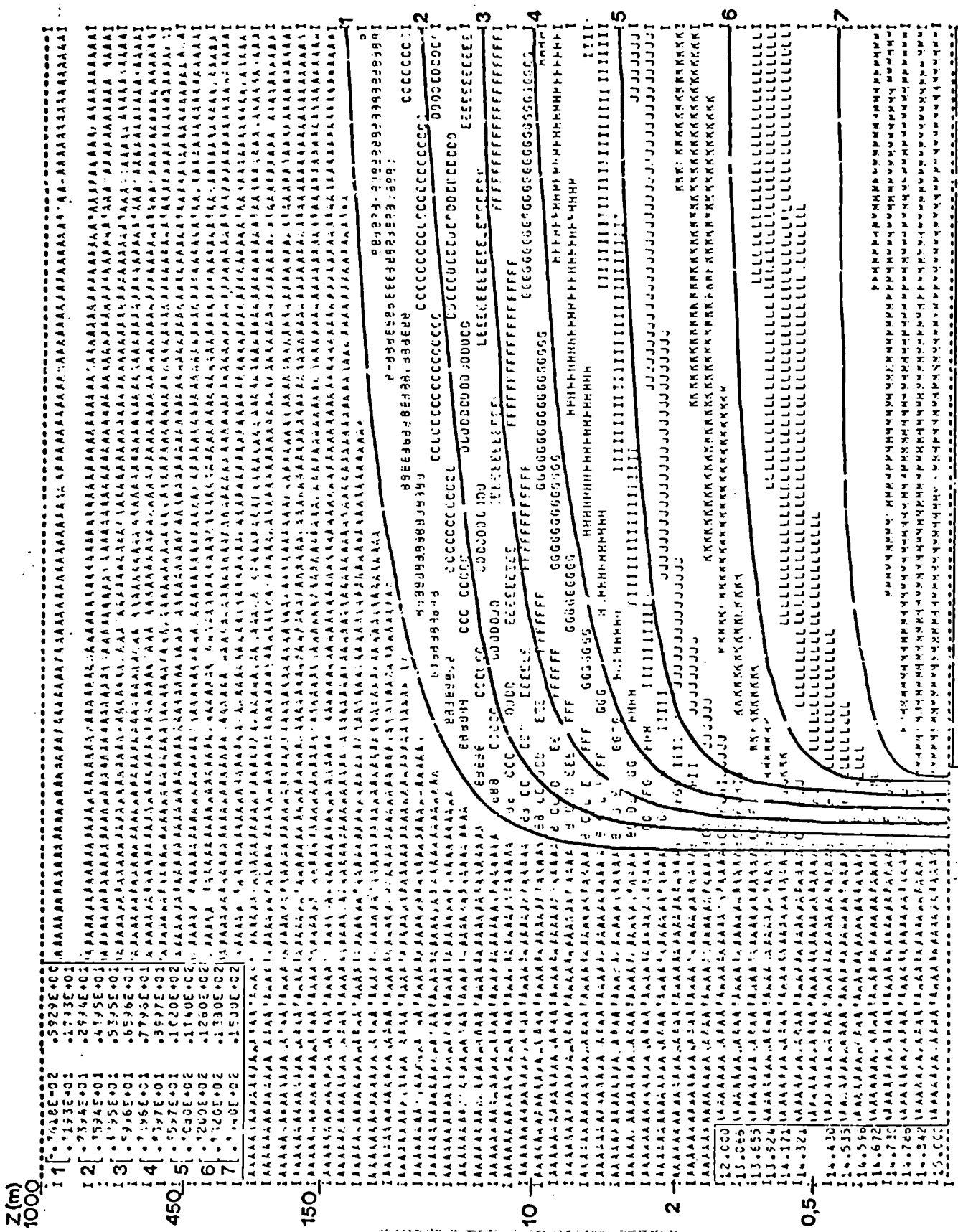


FIGURA 14 : APAITAMIENTOS DE Q (Gr.Kgr<sup>3</sup>), CASO 1

1000  
Z(m)

0  
0.5  
2  
10  
150  
1000

0  
1500  
4200  
X(m)

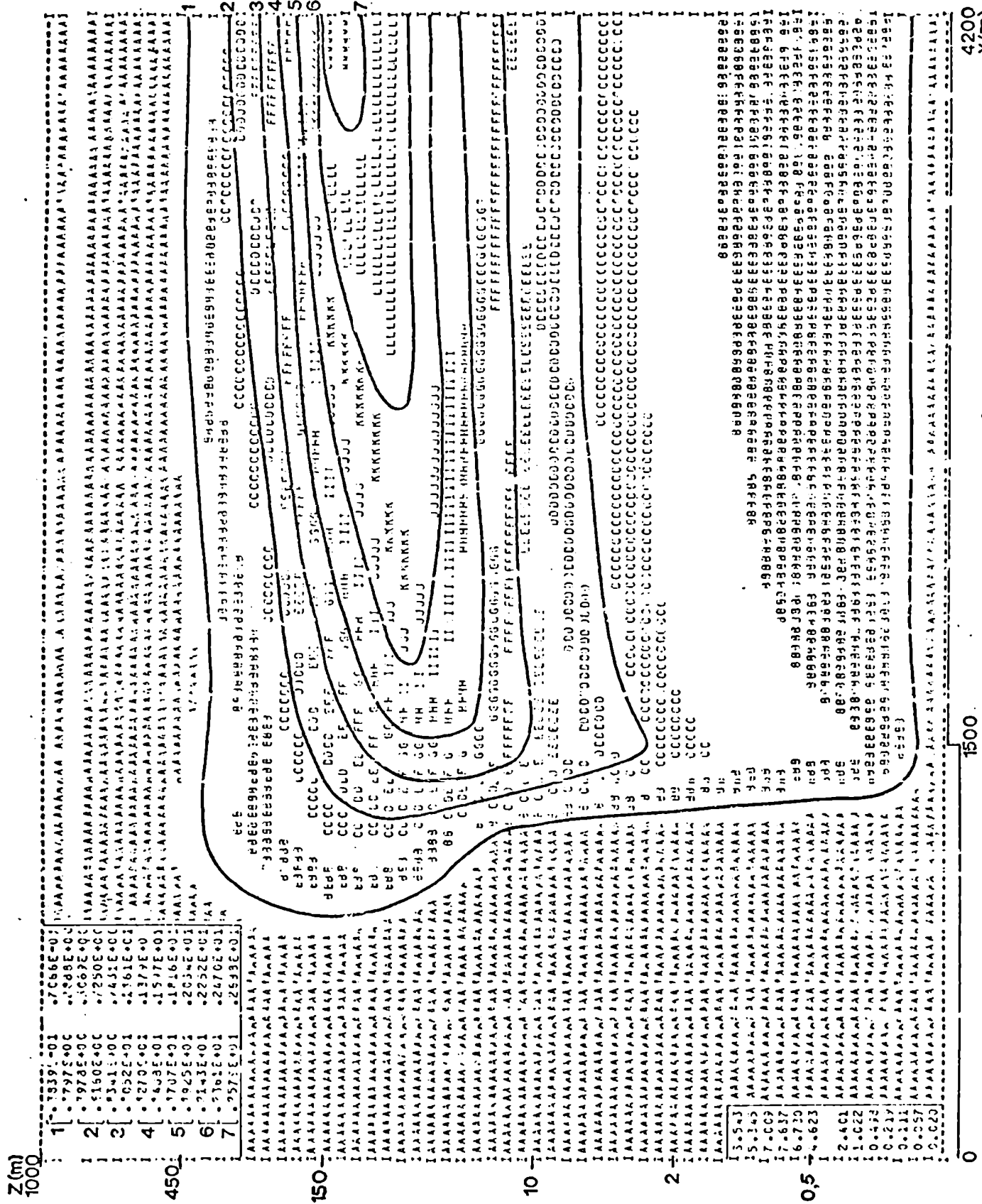


FIGURA 15 : AFARTAMIENTOS DE K (m<sup>2</sup>seg<sup>-1</sup>), CASO 1

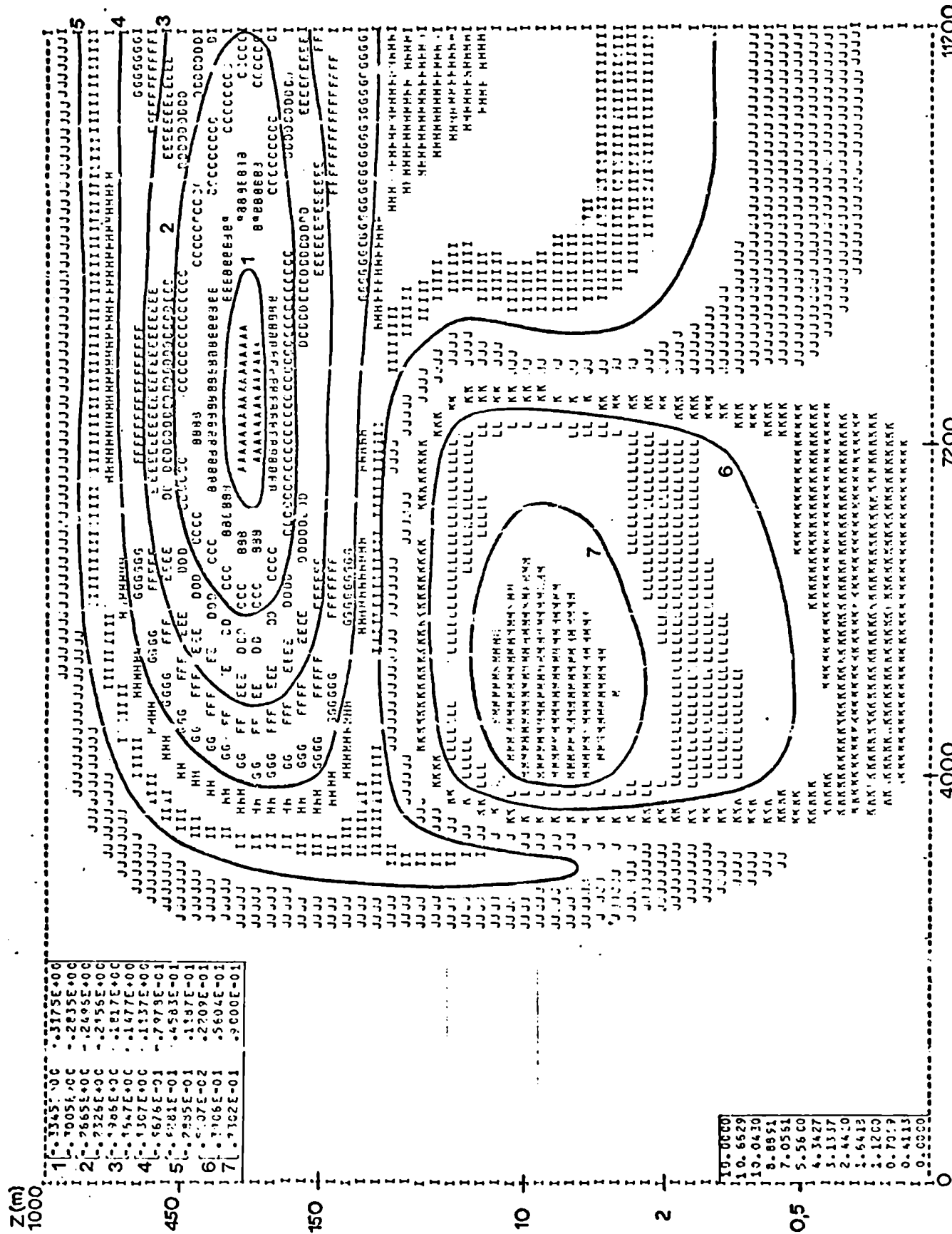


FIGURA 16 : APARTAMIENTOS DE U (m/s) , CASO 2

1200  
X(m)

7200

4000

0

Z(m)  
1000

450

150

10

2

0,5

- 1 -3345+00
- 2 -7005+00
- 3 -2665+00
- 4 -2956+00
- 5 -1817+00
- 6 -1477+00
- 7 -1337+00
- 8 -7973+01
- 9 -4583+01
- 10 -1347+01
- 11 -2709+01
- 12 -5604+01
- 13 -9000+01

- 10-0000
- 10.6629
- 10.0430
- 8.8951
- 7.0561
- 5.5660
- 4.3427
- 3.1337
- 2.4420
- 2.5413
- 1.1200
- 0.7019
- 0.4113
- 0.0000

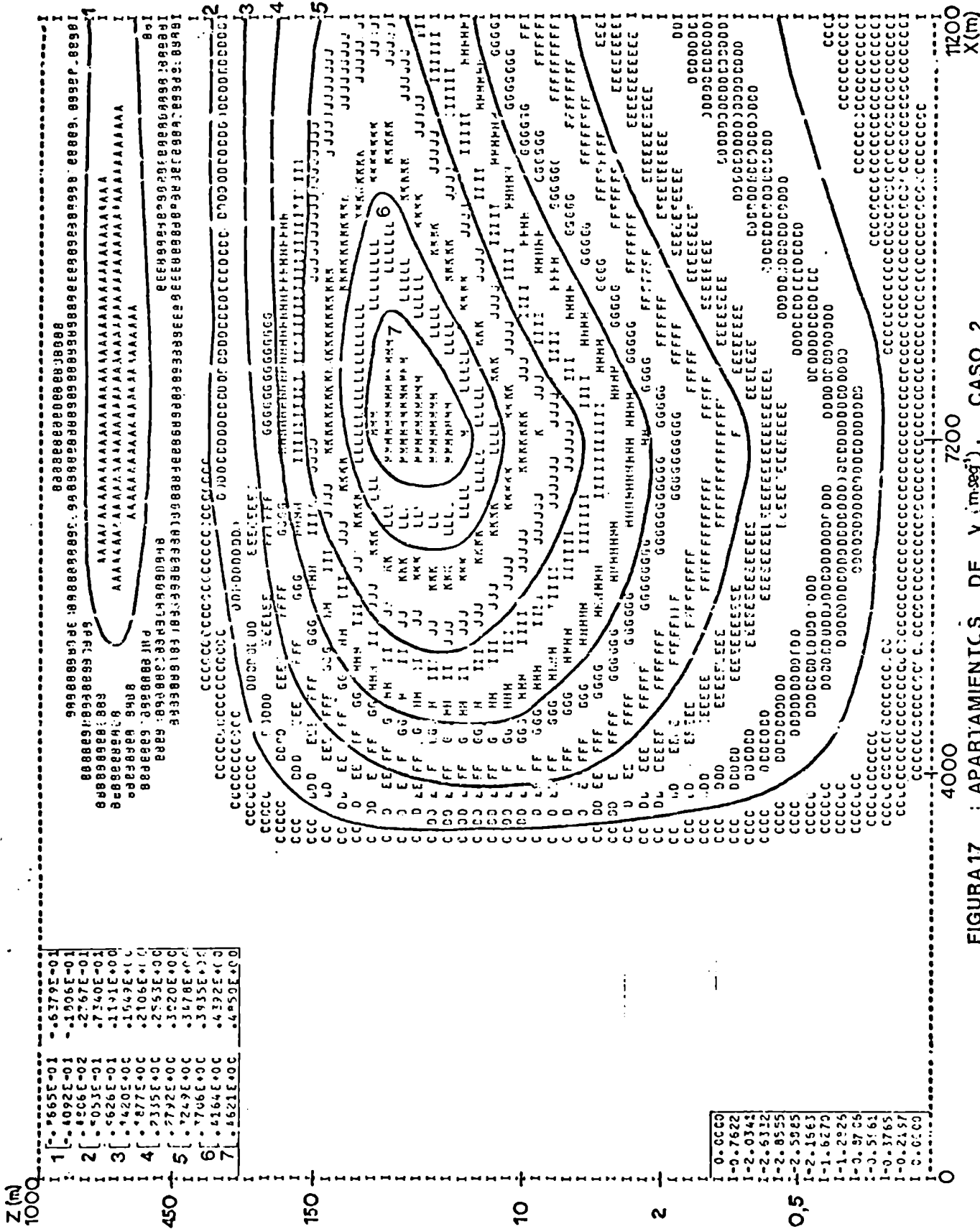


FIGURA 17 : APARTAMIENTOS DE V (m/s), CASO 2

1200  
X(m)

700

4000

Z(m)

1	-.665E-01
2	-.637E-01
3	-.609E-01
4	-.581E-01
5	-.553E-01
6	-.525E-01
7	-.497E-01
8	-.469E-01
9	-.441E-01
10	-.413E-01
11	-.385E-01
12	-.357E-01
13	-.329E-01
14	-.301E-01
15	-.273E-01
16	-.245E-01
17	-.217E-01
18	-.189E-01
19	-.161E-01
20	-.133E-01
21	-.105E-01
22	-.772E+00
23	-.735E+00
24	-.698E+00
25	-.661E+00
26	-.624E+00
27	-.587E+00
28	-.550E+00
29	-.513E+00
30	-.476E+00
31	-.439E+00
32	-.402E+00
33	-.365E+00
34	-.328E+00
35	-.291E+00
36	-.254E+00
37	-.217E+00
38	-.180E+00
39	-.143E+00
40	-.106E+00
41	-.679E+00
42	-.642E+00
43	-.605E+00
44	-.568E+00
45	-.531E+00
46	-.494E+00
47	-.457E+00
48	-.420E+00
49	-.383E+00
50	-.346E+00
51	-.309E+00
52	-.272E+00
53	-.235E+00
54	-.198E+00
55	-.161E+00
56	-.124E+00
57	-.817E+00
58	-.780E+00
59	-.743E+00
60	-.706E+00
61	-.669E+00
62	-.632E+00
63	-.595E+00
64	-.558E+00
65	-.521E+00
66	-.484E+00
67	-.447E+00
68	-.410E+00
69	-.373E+00
70	-.336E+00
71	-.299E+00
72	-.262E+00
73	-.225E+00
74	-.188E+00
75	-.151E+00
76	-.114E+00
77	-.750E+00
78	-.713E+00
79	-.676E+00
80	-.639E+00
81	-.602E+00
82	-.565E+00
83	-.528E+00
84	-.491E+00
85	-.454E+00
86	-.417E+00
87	-.380E+00
88	-.343E+00
89	-.306E+00
90	-.269E+00
91	-.232E+00
92	-.195E+00
93	-.158E+00
94	-.121E+00
95	-.786E+00
96	-.749E+00
97	-.712E+00
98	-.675E+00
99	-.638E+00
100	-.601E+00
101	-.564E+00
102	-.527E+00
103	-.490E+00
104	-.453E+00
105	-.416E+00
106	-.379E+00
107	-.342E+00
108	-.305E+00
109	-.268E+00
110	-.231E+00
111	-.194E+00
112	-.157E+00
113	-.120E+00
114	-.754E+00
115	-.717E+00
116	-.680E+00
117	-.643E+00
118	-.606E+00
119	-.569E+00
120	-.532E+00
121	-.495E+00
122	-.458E+00
123	-.421E+00
124	-.384E+00
125	-.347E+00
126	-.310E+00
127	-.273E+00
128	-.236E+00
129	-.199E+00
130	-.162E+00
131	-.125E+00
132	-.780E+00
133	-.743E+00
134	-.706E+00
135	-.669E+00
136	-.632E+00
137	-.595E+00
138	-.558E+00
139	-.521E+00
140	-.484E+00
141	-.447E+00
142	-.410E+00
143	-.373E+00
144	-.336E+00
145	-.299E+00
146	-.262E+00
147	-.225E+00
148	-.188E+00
149	-.151E+00
150	-.114E+00
151	-.754E+00
152	-.717E+00
153	-.680E+00
154	-.643E+00
155	-.606E+00
156	-.569E+00
157	-.532E+00
158	-.495E+00
159	-.458E+00
160	-.421E+00
161	-.384E+00
162	-.347E+00
163	-.310E+00
164	-.273E+00
165	-.236E+00
166	-.199E+00
167	-.162E+00
168	-.125E+00
169	-.780E+00
170	-.743E+00
171	-.706E+00
172	-.669E+00
173	-.632E+00
174	-.595E+00
175	-.558E+00
176	-.521E+00
177	-.484E+00
178	-.447E+00
179	-.410E+00
180	-.373E+00
181	-.336E+00
182	-.299E+00
183	-.262E+00
184	-.225E+00
185	-.188E+00
186	-.151E+00
187	-.114E+00
188	-.754E+00
189	-.717E+00
190	-.680E+00
191	-.643E+00
192	-.606E+00
193	-.569E+00
194	-.532E+00
195	-.495E+00
196	-.458E+00
197	-.421E+00
198	-.384E+00
199	-.347E+00
200	-.310E+00
201	-.273E+00
202	-.236E+00
203	-.199E+00
204	-.162E+00
205	-.125E+00
206	-.780E+00
207	-.743E+00
208	-.706E+00
209	-.669E+00
210	-.632E+00
211	-.595E+00
212	-.558E+00
213	-.521E+00
214	-.484E+00
215	-.447E+00
216	-.410E+00
217	-.373E+00
218	-.336E+00
219	-.299E+00
220	-.262E+00
221	-.225E+00
222	-.188E+00
223	-.151E+00
224	-.114E+00
225	-.754E+00
226	-.717E+00
227	-.680E+00
228	-.643E+00
229	-.606E+00
230	-.569E+00
231	-.532E+00
232	-.495E+00
233	-.458E+00
234	-.421E+00
235	-.384E+00
236	-.347E+00
237	-.310E+00
238	-.273E+00
239	-.236E+00
240	-.199E+00
241	-.162E+00
242	-.125E+00
243	-.780E+00
244	-.743E+00
245	-.706E+00
246	-.669E+00
247	-.632E+00
248	-.595E+00
249	-.558E+00
250	-.521E+00
251	-.484E+00
252	-.447E+00
253	-.410E+00
254	-.373E+00
255	-.336E+00
256	-.299E+00
257	-.262E+00
258	-.225E+00
259	-.188E+00
260	-.151E+00
261	-.114E+00
262	-.754E+00
263	-.717E+00
264	-.680E+00
265	-.643E+00
266	-.606E+00
267	-.569E+00
268	-.532E+00
269	-.495E+00
270	-.458E+00
271	-.421E+00
272	-.384E+00
273	-.347E+00
274	-.310E+00
275	-.273E+00
276	-.236E+00
277	-.199E+00
278	-.162E+00
279	-.125E+00
280	-.780E+00
281	-.743E+00
282	-.706E+00
283	-.669E+00
284	-.632E+00
285	-.595E+00
286	-.558E+00
287	-.521E+00
288	-.484E+00
289	-.447E+00
290	-.410E+00
291	-.373E+00
292	-.336E+00
293	-.299E+00
294	-.262E+00
295	-.225E+00
296	-.188E+00
297	-.151E+00
298	-.114E+00
299	-.754E+00
300	-.717E+00
301	-.680E+00
302	-.643E+00
303	-.606E+00
304	-.569E+00
305	-.532E+00
306	-.495E+00
307	-.458E+00
308	-.421E+00
309	-.384E+00
310	-.347E+00
311	-.310E+00
312	-.273E+00
313	-.236E+00
314	-.199E+00
315	-.162E+00
316	-.125E+00
317	-.780E+00
318	-.743E+00
319	-.706E+00
320	-.669E+00
321	-.632E+00
322	-.595E+00
323	-.558E+00
324	-.521E+00
325	-.484E+00
326	-.447E+00
327	-.410E+00
328	-.373E+00
329	-.336E+00
330	-.299E+00
331	-.262E+00
332	-.225E+00
333	-.188E+00
334	-.151E+00
335	-.114E+00
336	-.754E+00
337	-.717E+00
338	-.680E+00
339	-.643E+00
340	-.606E+00
341	-.569E+00
342	-.532E+00
343	-.495E+00
344	-.458E+00
345	-.421E+00
346	-.384E+00
347	-.347E+00
348	-.310E+00
349	-.273E+00
350	-.236E+00
351	-.199E+00
352	-.162E+00
353	-.125E+00
354	-.780E+00
355	-.743E+00
356	-.706E+00
357	-.669E+00
358	-.632E+00
359	-.595E+00
360	-.558E+00
361	-.521E+00
362	-.484E+00
363	-.447E+00
364	-.410E+00
365	-.373E+00
366	-.336E+00
367	-.299E+00
368	-.262E+00
369	-.225E+00
370	-.188E+00
371	-.151E+00
372	-.114E+00
373	-.754E+00
374	-.717E+00
375	-.680E+00
376	-.643E+00
377	-.606E+00
378	-.569E+00
379	-.532E+00
380	-.495E+00
381	-.458E+00
382	-.421E+00
383	-.384E+00
384	-.347E+00
385	-.310E+00
386	-.273E+00
387	-.236E+00
388	-.199E+00
389	-.162E+00
390	-.125E+00
391	-.780E+00
392	-.743E+00
393	-.706E+00
394	-.669E+00
395	-.632E+00
396	-.595E+00
397	-.558E+00
398	-.521E+00
399	-.484E+00
400	-.447E+00
401	-.410E+00
402	-.373E+00
403	-.336E+00
404	-.299E+00
405	-.262E+00
406	-.225E+00
407	-.188E+00
408	-.151E+00
409	-.114E+00
410	-.754E+00
411	-.717E+00
412	-.680E+00
413	-.643E+00
414	-.606E+00
415	-.569E+00
416	-.532E+00
417	-.495E+00
418	-.458E+00
419	-.421E+00
420	-.384E+00
421	-.347E+00
422	-.310E+00
423	-.273E+00
424	-.236E+00
425	-.199E+00
426	-.162E+00
427	-.125E+00
428	-.780E+00
429	-.743E+00
430	-.706E+00
431	-.669E+00
432	-.632E+00
433	-.595E+00
434	-.558E+00
435	-.521E+00
436	-.484E+00
437	-.447E+00
438	-.410E+00
439	-.373E+00
440	-.336E+00
441	-.299E+00
442	-.262E+00
443	-.225E+00
444	-.188E+00
445	-.151E+00
446	-.114E+00
447	-.754E+00
448	-.717E+00
449	-.680E+00
450	-.643E+00
451	-.606E+00
452	-.569E+00
453	-.532E+00
454	-.495E+00
455	-.458E+00
456	-.421E+00
457	-.384E+00
458	-.347E+00
459	-.310E+00
460	-.273E+00
461	-.236E+00
462	-.199E+00
463	-.162E+00
464	-.125E+00
465	-.780E+



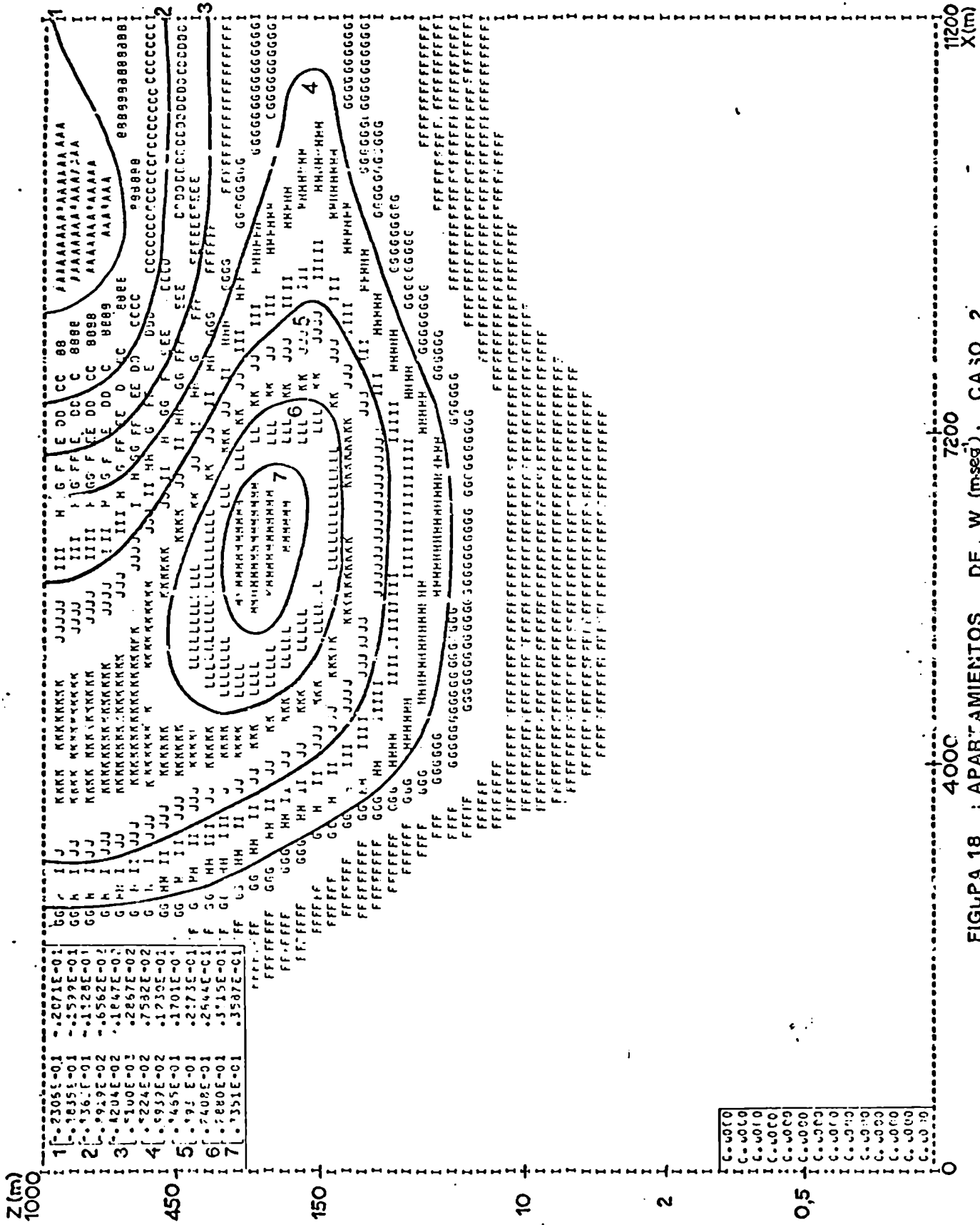


FIGURA 18 : APARTAMIENTOS DE W (msec), CA 30 2

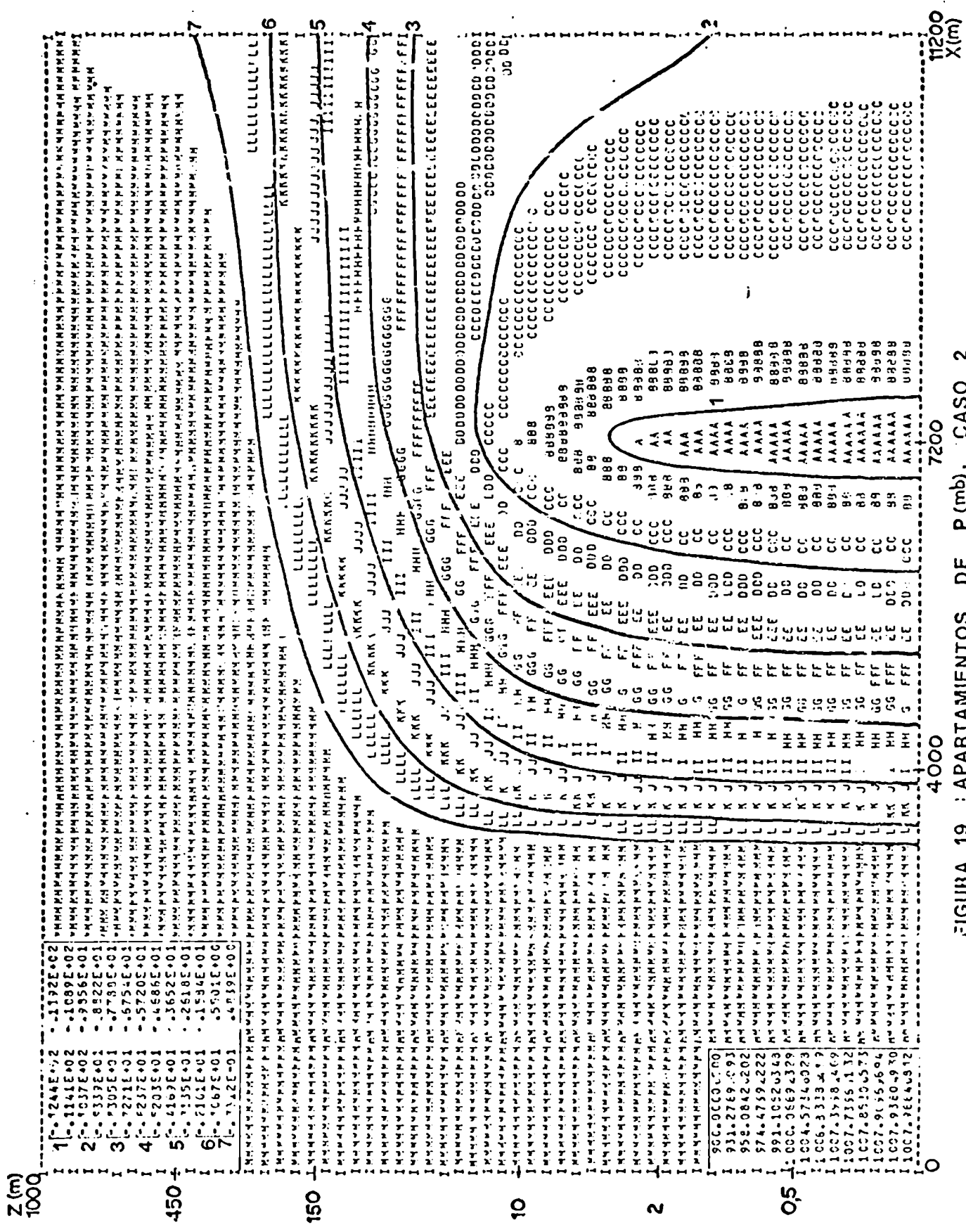


FIGURA 19 : APARTAMIENTOS DE P (mb), CASO 2

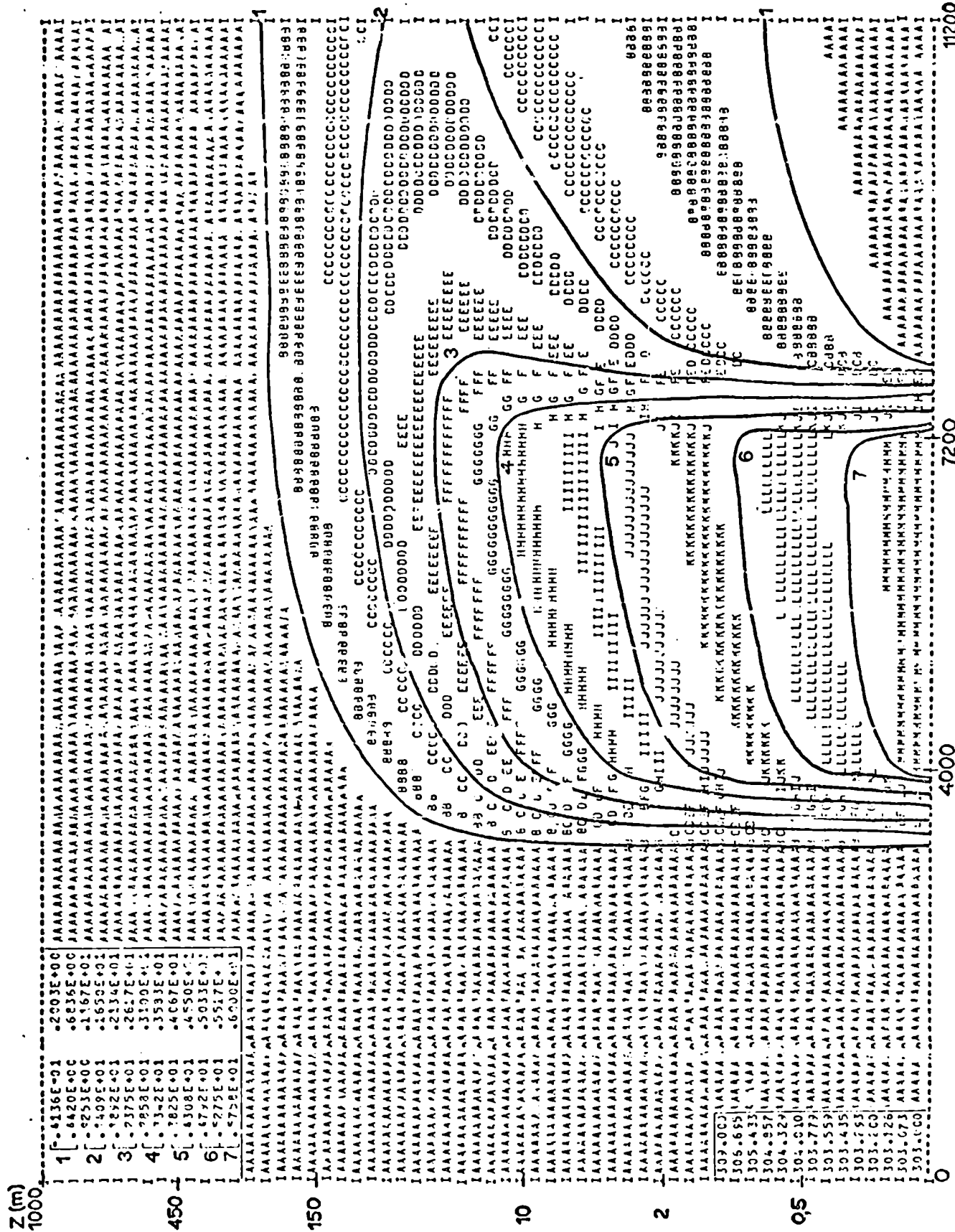


FIGURA 20 : APARTAMENTOS DE 6(°K), CASO 2

11200  
X(m)

7200

4000

0

1000  
Z (m)

450

150

10

2

0.5

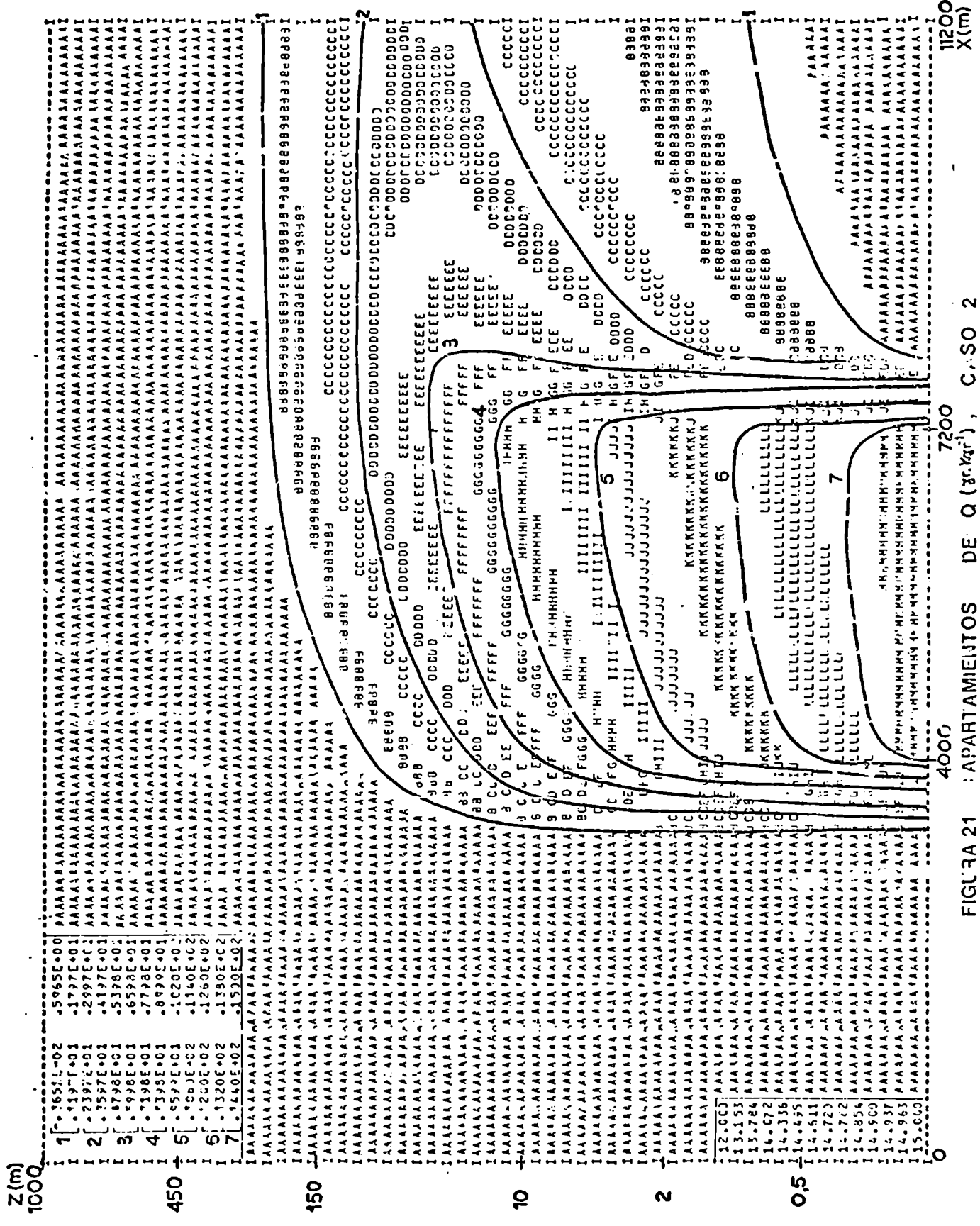


FIGURA 21 : APARTAMENTOS DE Q (8x12m), C-50 2

11200  
X(m)

7200

4000

0

Z (m)  
1000

450

150

10

2

0.5

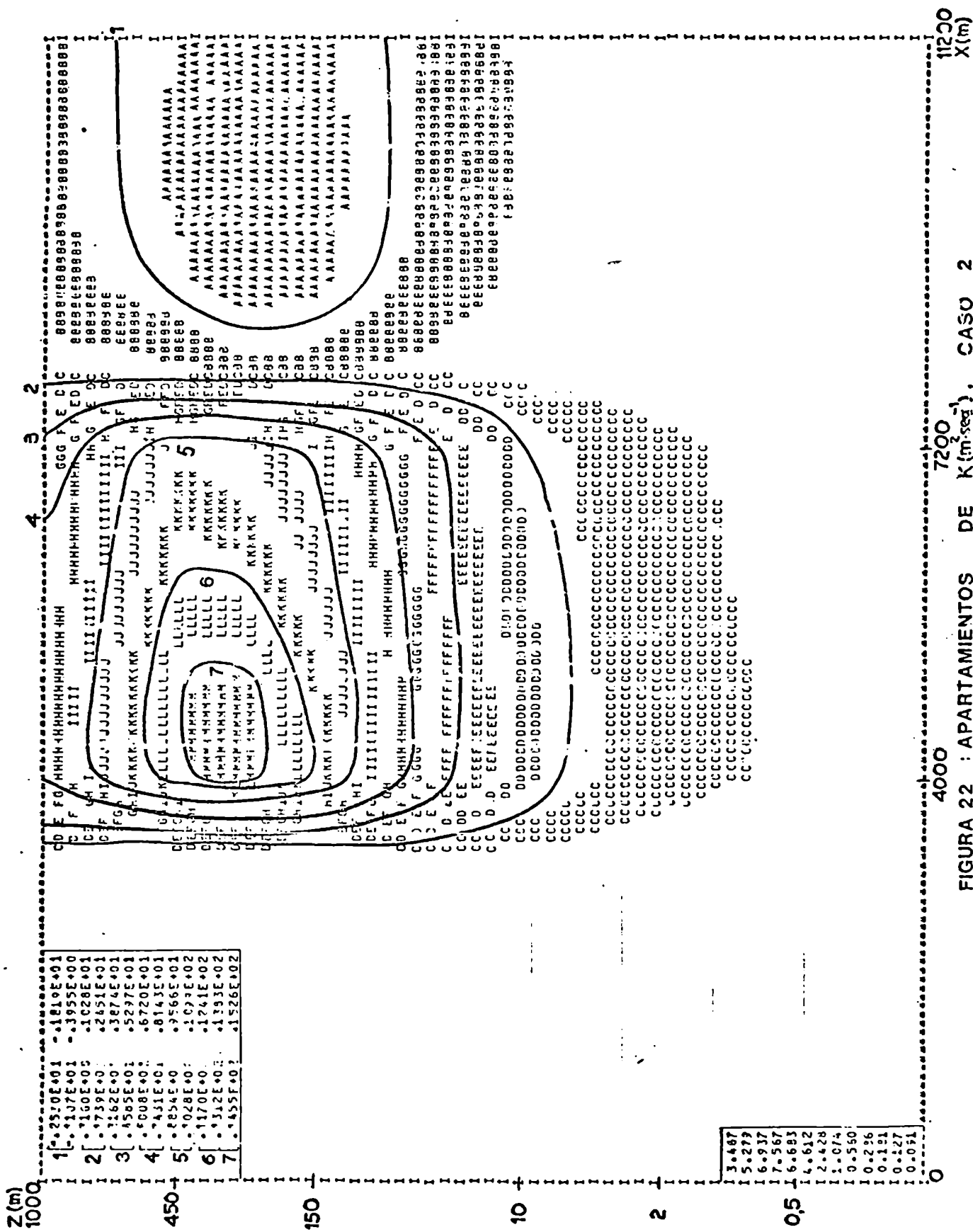


FIGURA 22 : APARTAMENTOS DE K(m-seg), CASO 2

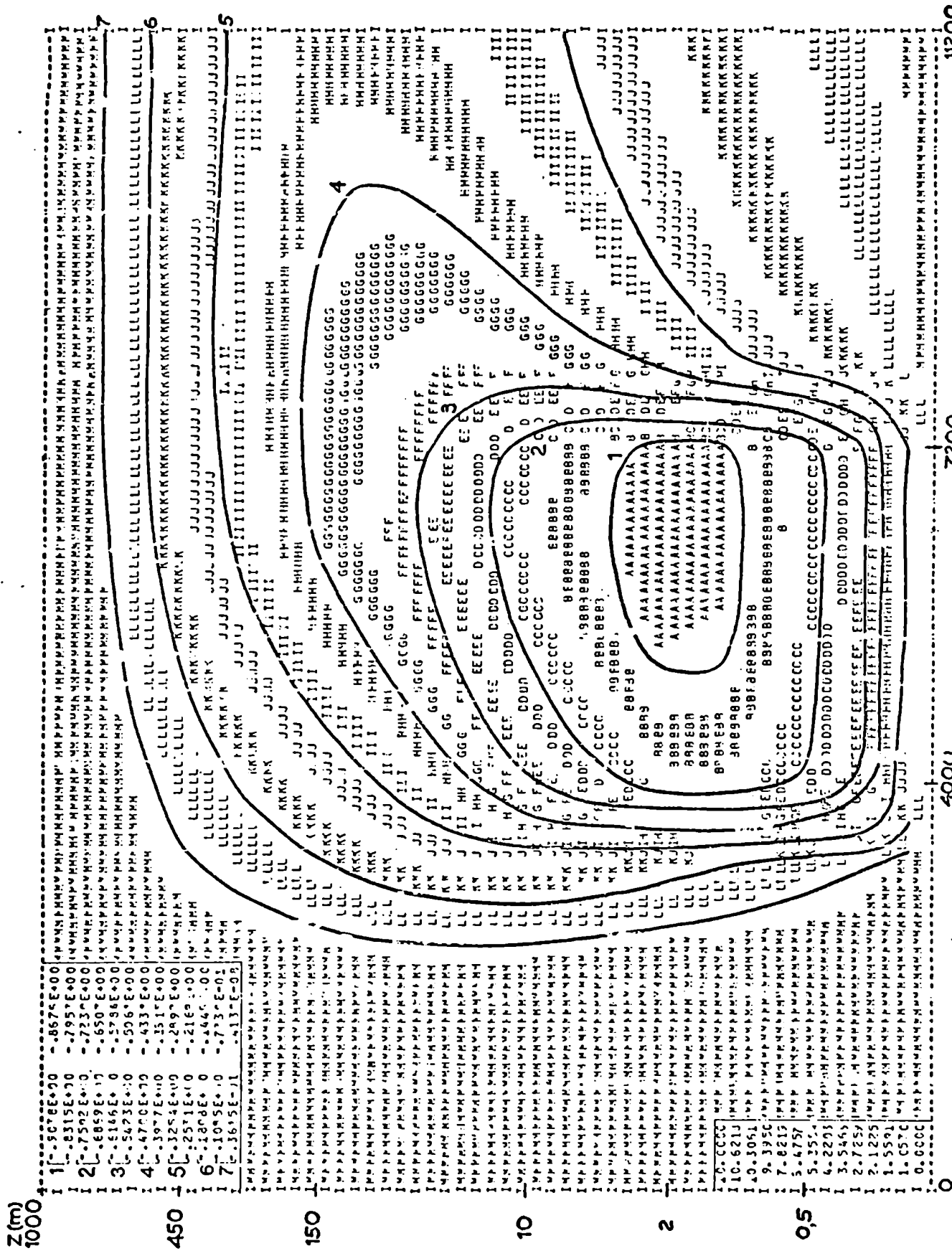
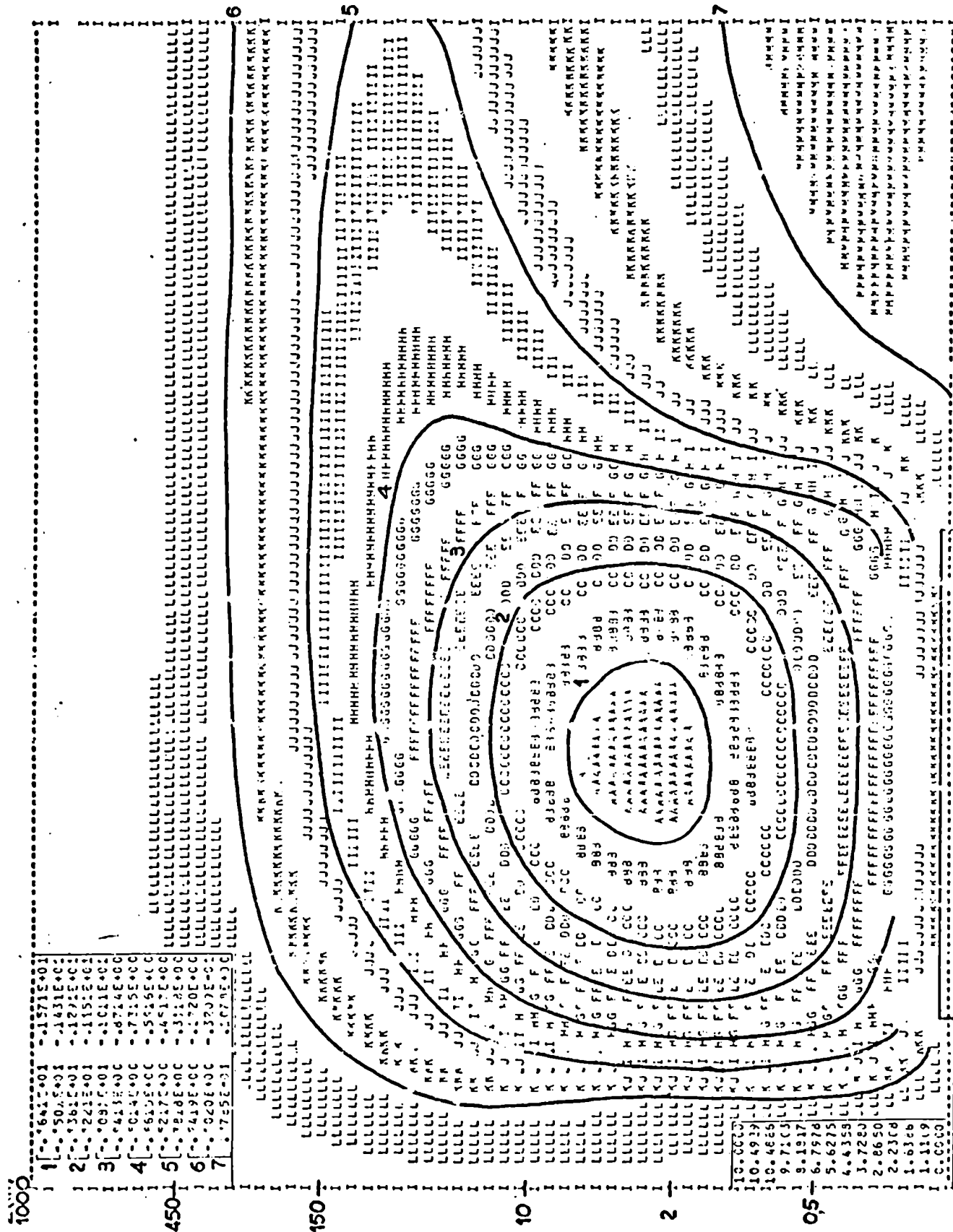


FIGURA 23 : APATITAMIENTOS DE U/mseg<sup>2</sup>, CASO 2 (CON RUGOSIDAD: 11200 X(m) 7200 4000)



1000  
 1  
 2  
 3  
 4  
 5  
 6  
 7  
 150  
 10  
 2  
 0,5  
 1600  
 1800  
 6400  
 X(m)  
 FIGURA 24 : APARTAMIENTOS DE U.M.A.F.I., CASO 3

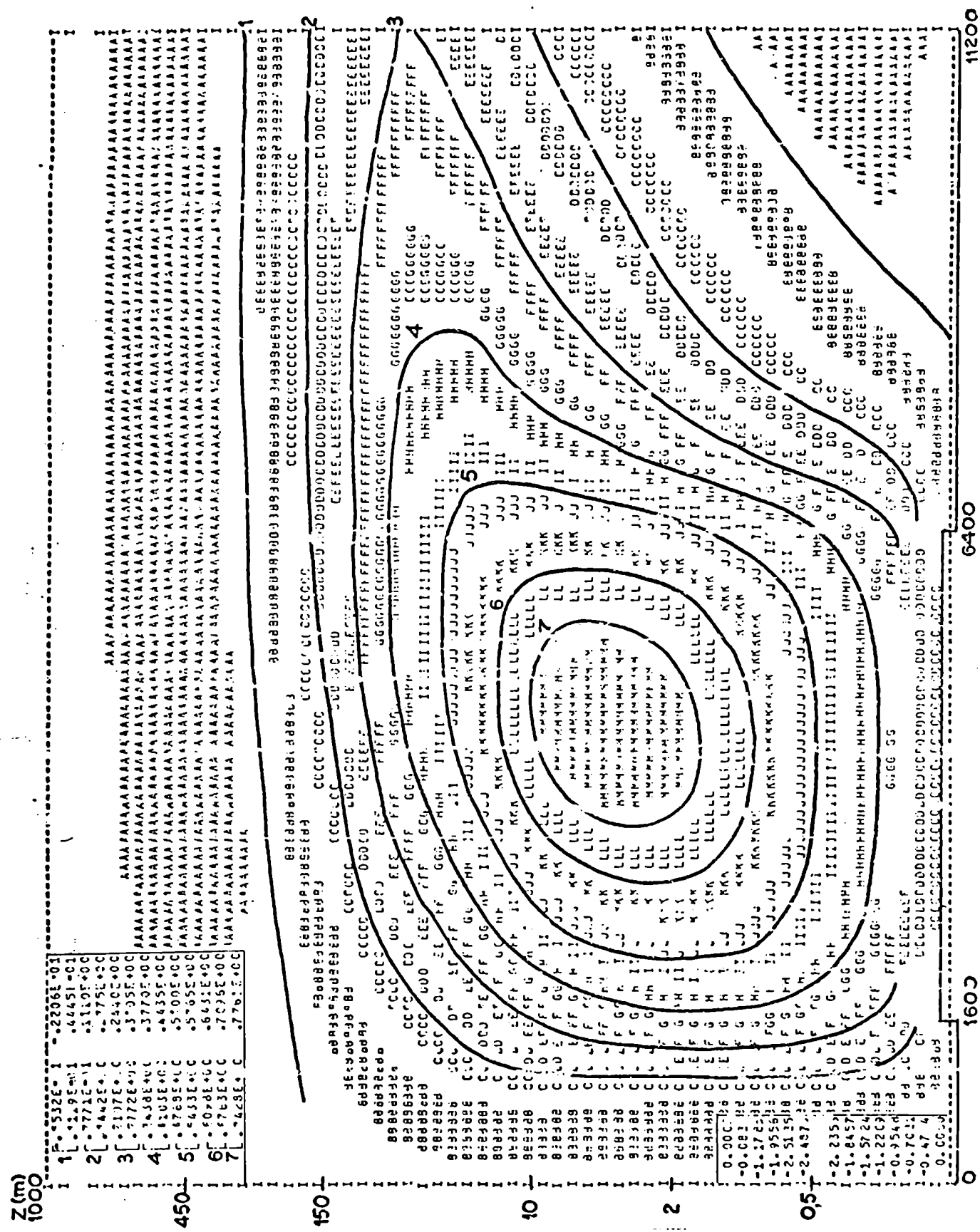


FIGURA 25 : APARTAMIENTOS DE V (m·seg<sup>-1</sup>), CASO 3

11200  
X (m)

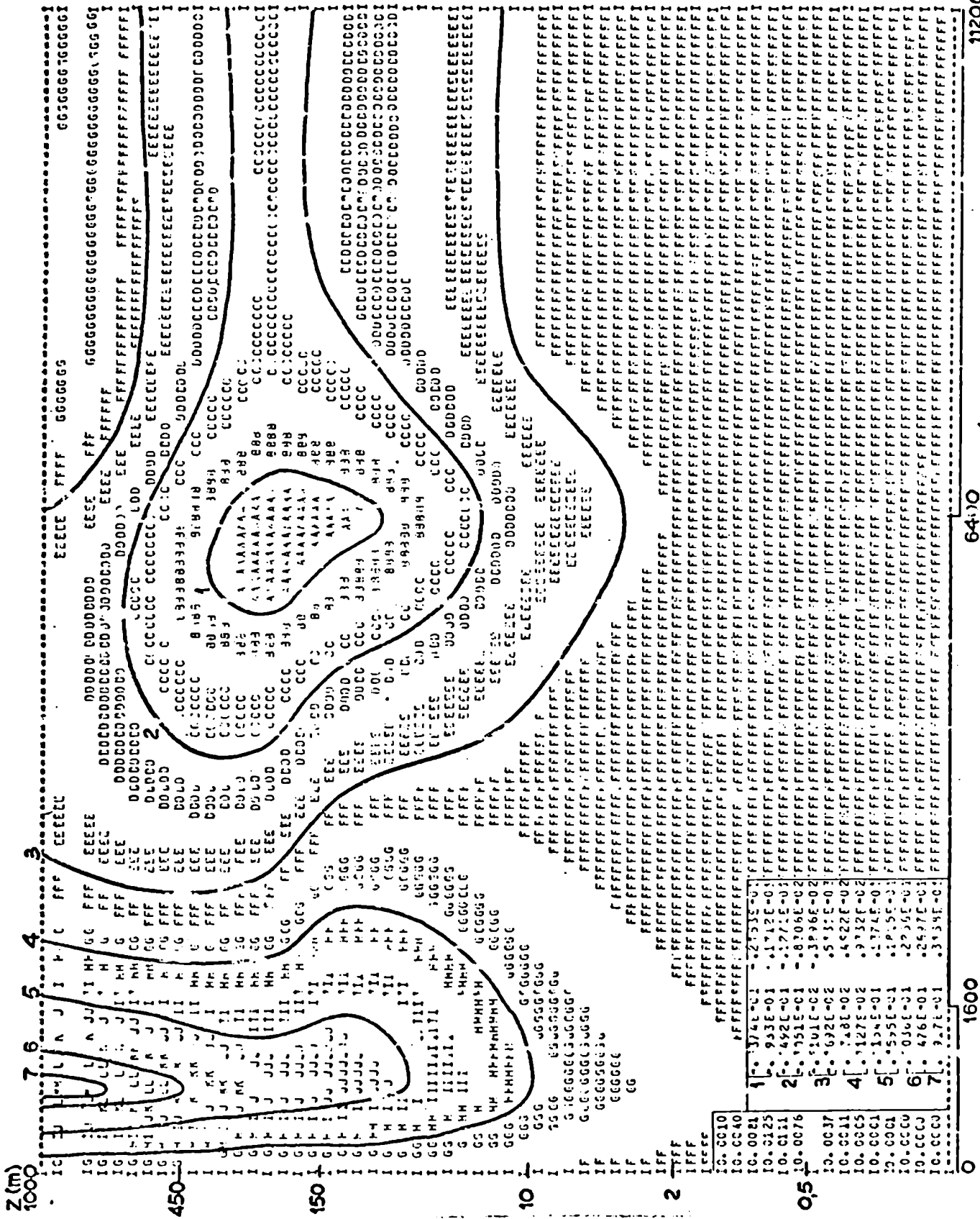
1600  
6400

0

Z (m)

- 1 [ 2206E+01
- 2 [ 4445E+01
- 3 [ 5110E+00
- 4 [ 2440E+00
- 5 [ 3775E+00
- 6 [ 3775E+00
- 7 [ 2170E+00
- 8 [ 4355E+00
- 9 [ 5700E+00
- 10 [ 5700E+00
- 11 [ 6433E+00
- 12 [ 7095E+00
- 13 [ 7095E+00
- 14 [ 7685E+00
- 15 [ 7685E+00





1200  
X(m)

FIGURA 25 : APARTAMIENTOS DE W (m·seg<sup>-1</sup>), CASO 3

1600

1.	374E-01	-2733E-01
2.	933E-01	-1712E-01
3.	492E-01	-1771E-01
4.	1751E-01	-8706E-02
5.	101E-02	-396E-02
6.	692E-02	533E-03
7.	748E-02	4522E-02
8.	128E-02	932E-02
9.	134E-01	1774E-01
10.	575E-01	195E-01
11.	036E-01	225E-01
12.	476E-01	257E-01
13.	97E-01	3154E-01

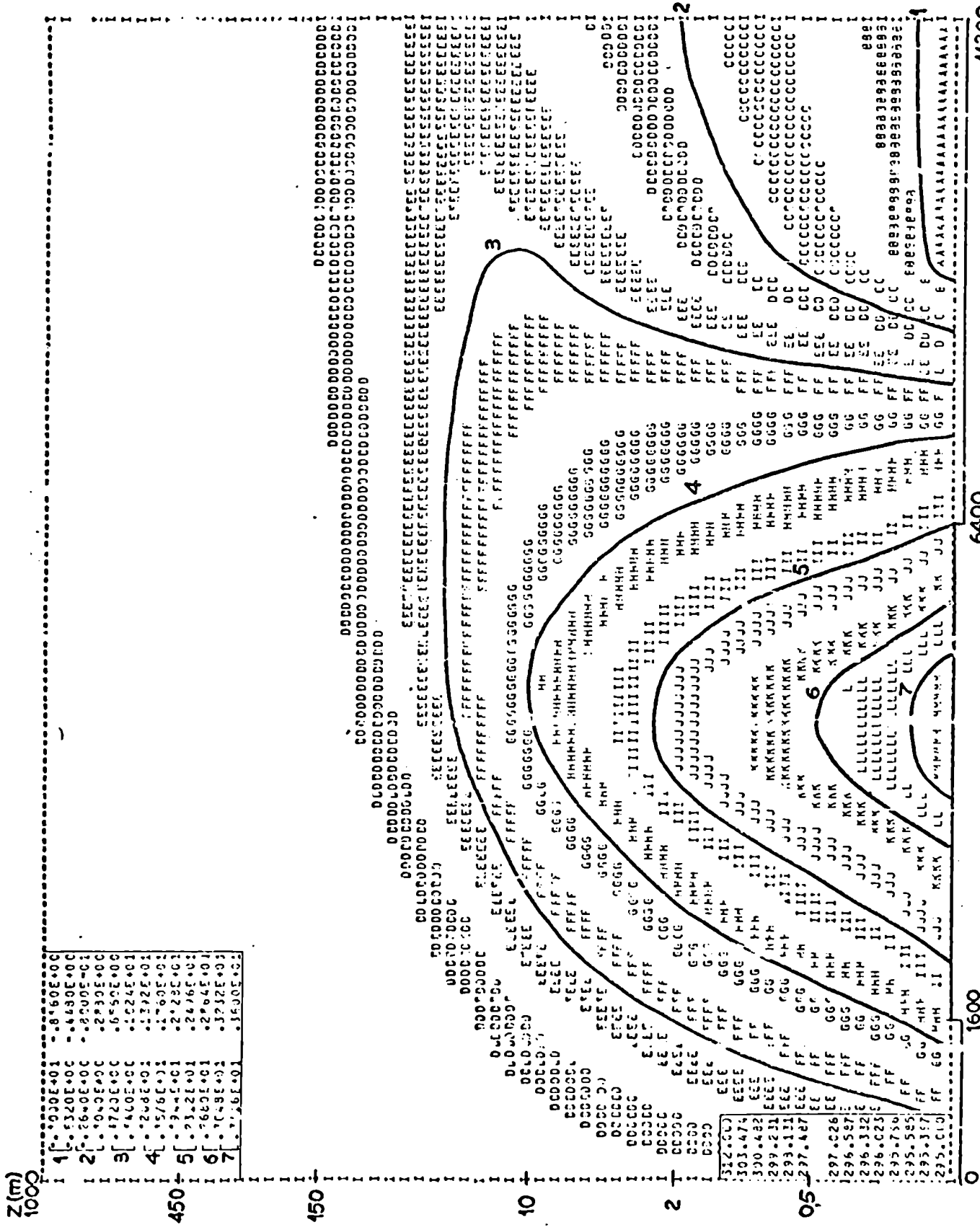


FIGURA 27 : APAR. AMIENTOS DE  $\theta$  ( $^{\circ}$ ), CASO 3

## 11. CONCLUSIONES

Se ha mostrado la utilidad de los modelos numéricos como herramienta válida para el conocimiento y la simulación de los procesos que ocurren en la capa límite atmosférica, aún utilizando un cierre de primer orden para la turbulencia.

Se comprobó en el caso unidimensional la posibilidad de simular la capa límite planetaria en distintas condiciones de estratificación térmica y con distintos forzantes externos. Las condiciones de contorno inferior y superior de la temperatura potencial fijan el tipo de estabilidad en toda la capa límite planetaria y entonces no pueden simularse distintas estratificaciones dentro de la misma.

Acerca del modelo bidimensional, formulando la metodología propuesta por Estoque y Bhumralkar, se comprobó que la introducción de la suposición no hidrostática (o sea, la retención de los términos advectivos en la ecuación de la componente de la velocidad), por debajo de un paso  $\Delta x$  dado (que depende del tipo de problema que se trate) no permite lograr la solución del sistema y para pasos mayores se logra la convergencia a una solución que difiere muy poco de aquella obtenida cuando se supone válida la aproximación hidrostática. Por lo tanto no se logran ventajas apreciables eliminando la restricción hidrostática.

Aún usando alguna alternativa para lograr errores de truncado  $O(\Delta z^2)$  según la coordenada  $z$ , no es simple lograr, para el modelo bidimensional, errores  $O(\Delta x^2, \Delta z^2)$ . dado que habría que tomar centradas las diferencias finitas en los términos advectivos y en el de la presión, lo cual introduciría los inconvenientes de tratar soluciones de tipo computacionales además de la física.

La metodología resulta de utilidad dado que permite el conocimiento de la estructura de la capa límite atmosférica, a partir de condiciones de contorno en la superficie terrestre y estimaciones sinópticas en el tope, tal como fue mostrado en los casos correspondientes a un salto de rugosidad en superficie, a una fuente de calor en superficie (con una fuente de humedad asociada) y a una ciudad. Por consiguiente el modelo propuesto puede utilizarse como interpolador en situaciones reales.

Entre los ajustes que deberían contemplarse, se destaca aquel referente a la parametrización de las difusividades turbulentas de momento, calor y humedad. En la formulación de este trabajo se consideraron iguales; un mejoramiento consistiría en no hacer ésta suposición y tomarlos individualmente (de acuerdo al tipo de problema que se estudie) aprovechando las distintas investigaciones realizadas a éste efecto. Con la parametrización hecha en este trabajo, los "ajustes" estarían dados por la elección de  $l(\lambda)$ , por la función de estabilidad  $S_M$  y por la incorporación de los efectos advectivos.

*José Luis Piella*

## REFERENCIAS

- (1) Munn, R.E.: Descriptive Micrometeorology, New York, Academic Press, 1966.
- (2) Businger, J.A.: The Need for Boundary-Layer Measurements and Their Significance for Solving Atmospheric Problems, Atmospheric Technology, N° 7, 1975.
- (3) Monin, A.S.: The Atmospheric Boundary Layer, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 2, 225-250, 1970.
- (4) Businger, J.A.: Turbulent Transfer in the Atmospheric Surface Layer, Workshop on Micrometeorology, Amer. Meteorol. Soc., 1973.
- (5) Plate, E.J.: Aerodynamic Characteristics of Atmospheric Boundary Layers, AEC Critical Rev. Series, U.S. Atomic Energy Commission, 1971.
- (6) Hanna, S.R.: Characteristics of Winds and Turbulence in the Planetary Boundary Layer, Air Res. Lab., Technical Mem. N° 8, 1969.
- (7) Wippermann, F.: The Planetary Boundary Layer of the Atmosphere, Annalen der Met., Vol. 7, Deutscher Wetterdienst, 1973.
- (8) Aiello, J.L. y Berri, G.J.: Modelo unidimensional estacionario de la capa límite planetaria, Meteorológica, Vols. 8 y 9, 1977-1978.
- (9) Wiin Nielsen, A.: Compendio de Meteorología, Vol. 1, Parte 1- Meteorología Dinámica, O.M.M., 1974.
- (10) Busch, N.E.: On the Mechanics of Atmospheric Turbulence, Workshop on Micrometeorology, Amer. Meteorol. Soc., 1973
- (11) Tsann-Wang Yu: Notes on a Turbulence Parameterization of the Atmospheric Boundary Layer, J. of the Meteorol. Soc. of Japan, Vol. 5, N° 6, 1977
- (12) Walmsley, J.L.: A Second-Order-Closure Model of Wind and Turbulence for Use in the Atmospheric Environment Service, Internal Report N° ARQT-1-76, Atmospheric Environment Service-Canadá, 1976.
- (13) De Moore, G. et Andre, J.C.: La Turbulence dans la couche limite atmosphérique, 2<sup>eme</sup> Partie: Modelisation de la couche limite, La Météorologie, Série 5, N° 33, 1975
- (14) Aiello, J.L.: Resolución de las ecuaciones de la capa límite atmosférica en estado estacionario, Métodos numéricos en la mecánica del continuo, G. Marshall (Comp.), EUDEBA, Ediciones previas, 1978.

- (15) Haltiner, G.J. and Martin, F.L.: Dynamical and Physical Meteorology, McGraw-Hill, New York, 1957.
- (16) Holton, J.R.: An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press, 1972.
- (17) Boullery, B.: Etude experimentale du coefficient de frottement pour un fetch court et en régime de vent faible, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie A, N° 1, Electricite de France, 1977.
- (18) Businger, J.A., Wyngaard, J.C., Izumi, Y. and Bradley, E.F.: Flux-Profile Relationships in the Atmospheric Surface Layer, J. Atmos. Sci., Boston, N° 28, 1971.
- (19) Lumley, J.L. and Panofsky, H.A.: The Structure of Atmospheric Turbulence, New York, Interscience Publishers, Monographs and Texts in Physics and Astronomy, Vol. XII, 1964.
- (20) De Moor, G.: La turbulence dans la couche limite atmosphérique, 1<sup>ere</sup> Partie: Parametrisation des flux turbulents, La Météorologie, Série 5, N° 33, 1975
- (21) Vasques, E.J.: Determinação de parametros micrometeorológicos através do ajuste do perfil de vento, Piracicaba, 1978.
- (22) Yavorski, B.M. y Detlaf, A.A.: Manual de Física, Editorial MIR, Moscú, 1972
- (23) Paulson, C.A.: The Mathematical representation of Wind Speed on Temperature Profiles in the Unstable Atmospheric Surface Layer, J. of App. Met., Vol. 9, 857-861, 1970
- (24) Berri, G.J.: Experiments with a One-Dimensional Time-Dependent Planetary Boundary Layer Model, Atmospheric Environment Service of Canada, ARQL 77/9, 1977.
- (25) Estoque, M.A. and Bhumralkar, C.M.: A Method for Solving the Planetary Boundary-Layer Equations, Boundary-Layer Meteor., 1, 169-194, 1970.
- (26) Blackadar, A.K.: The Vertical Distribution of Wind and Turbulence Exchange in a Neutral Atmosphere, J. Geophys. Res., 67, 3095-3102, 1962
- (27) Estoque, M.A.: Numerical Modeling of the Planetary Boundary Layer, Workshop on Micrometeorology, Amer. Meteorol. Soc., 1973
- (28) Wippermann, F.: A Note on a Method for Solving the Planetary Boundary-Layer Equations, Beiträge zur Physik der Atmosphäre, 44 Band, S. 293-296, 1971

- (29) O'Brien, J.J.: A Note on the Vertical Structure of the Eddy Exchange Coefficient in the Planetary Boundary Layer, *J. of Atm. Sci.*, Vol. 27, 1213-1215, 1970
- (30) Lettau, H.H. and Davidson, B.: Exploring the Atmosphere's First Mile, Vol. II, Site Description and Data Tabulation, Pergamon Press, 1953.
- (31) Clarke, R.H., Dyer, A.J., Brook, R.R., Reid, D.G. and Troup, A.J.: The Wangara Experiment: Boundary Layer Data, Div. of Meteorological Phys. Tech. paper N° 19, Commonwealth Scientific and Industrial Res. Org., Australia, 1971.
- (32) Bradley, E.F.: A Micrometeorological Study of Velocity Profiles and Surface Drag in the Region Modified by a Change in the Surface Roughness, *Quart. J. R. Met. Soc.*, 94, 361-379, 1968.
- (33) Peterson, E.W., Kristensen, L. and Chang-Chun Su: Some Observations and Analysis of Wind Over Non-uniform Terrain, *Quart. J. R. Met. Soc.*, 102, 857-869, 1976.
- (34) Elliot, W.P.: The Growth of the Atmospheric Internal Boundary Layer, *Trans. Am. Geophys. Union*, 39, 1048-1054, 1958.
- (35) Panofsky, H.A. and Townsend, A.A.: Change of Terrain Roughness and the Wind Profile, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 90, 147-155, 1964.
- (36) Mazzeo, N.A.: El crecimiento de la capa límite interna atmosférica, *Meteorológica*, Vols. 8 y 9, 1977-1978.
- (37) Nickerson, E.C.: Boundary Layer Adjustment as an Initial Value Problem, *J. Atmospheric Sci.*, 25, 207-213, 1968.
- (38) Onishi, G.A. and Estoque, M.A.: Numerical Study on Atmospheric Boundary Layer Flow Over Inhomogeneous Terrain, *J. Meteorol. Soc. Japan*, 46, 280-286, 1968
- (39) Onishi, G.A.: On the Surface Wind Blowing Over a Strait, *J. Meteorol. Soc. Japan*, 47, 199-204, 1969.
- (40) Taylor, P.A.: The Planetary Boundary Layer Flow Above a Change in Surface Roughness, *J. Atmospheric Sci.* 26, 432-440, 1969.
- (41) Peterson, E.W.: Modification of Mean Flow and Turbulent Energy by a Change in Surface Roughness Under Conditions of Neutral Stability, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 95 561-575, 1969.
- (42) Estoque, M.A.: A Numerical Model of the Atmospheric Boundary Layer, *J. of Geophys. Res.*, Vol. 68, N° 4, 1963

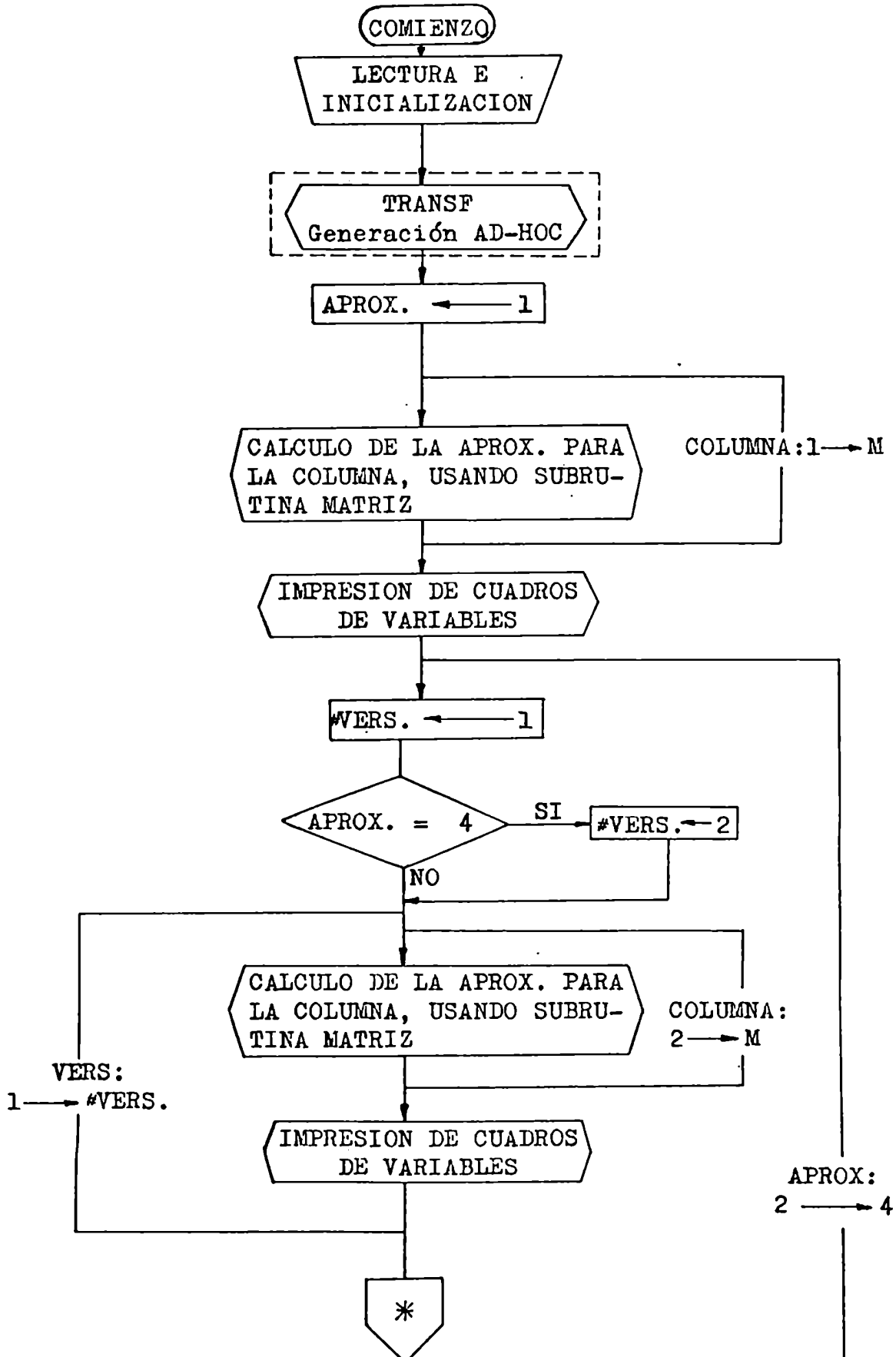
- (43) Krishna, K.: A Numerical Study of the Diurnal Variation of Meteorological Parameters in the Planetary Boundary Layer, *Mon. Wea. Rev.*, 96, 269-276, 1968.
- (44) Sasamori, T.: A Numerical Study of Atmospheric and Soil Boundary Layers, *J. Atmos. Sci.*, 27, 1122-1137, 1970.
- (45) Richtmeyer, R.D. and Morton, K.W.: *Difference Methods for Initial Value Problems*, New York, Interscience, 1967.
- (46) Walmsley, J.L.: A One-Dimensional Time-Dependent Air-Water Boundary Layer Model, Ph.D. Thesis, Dep. of Meteorology of McGill Univ., Montreal, Canadá, 1972.
- (47) Taylor, P.A. and Delage, Y.: A Note on Finite Differencing Schemes for the Surface and Planetary Boundary Layers, *Boundary-Layer Meteorol.*, 2, 108-121, 1971.
- (48) Berri, G.J.: Resolución del balance calórico en la interfase suelo-atmósfera, en un modelo unidimensional y no estacionario de la capa límite planetaria, *Meteorológica*, Vols. 8 y 9, 1977-1978.
- (49) Busch, N.E., Chang, S.W. and Anthes, R.: A Multi-Level Model of the Planetary Boundary Layer Suitable for Use with Mesoscale Dynamic Models, *J. App. Meteorol.*, Vol. 15, N° 9, 1976
- (50) Long, P.E. and Shaffer, W.A.: Some Physical and Numerical Aspects of Boundary Layer Modeling, NOAA Technical Memorandum NWS TDL-56, 1975.
- (51) European Centre for Medium Range Weather Forecasts: Seminars on The Treatment of the Boundary Layer in Numerical Weather Prediction, Reading, 1976.
- (52) Estoque, M.A.: Flow Over a Localized Heat Source, *Month. Weather Rev.*, Vol. 97, N° 12,
- (53) Gutman, D.P. and Torrance, K.E.: Response of the Urban Boundary Layer to Heat Addition and Surface Roughness, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 9, N° 2, 1975.
- (54) Tsaan-Wang Yu and Wagner, N.K.: Numerical Study of the Nocturnal Urban Boundary Layer, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 9, N° 2, 1975.
- (55) Deardorff, J.W.: Three-Dimensional Numerical Modeling of the Planetary Boundary Layer, Workshop on Micrometeorology, Amer. Meteorol. Soc., 1973.
- (56) Gresho, P.M. and Lee, R.L.: Modeling the Planetary Boundary Layer using the Galerkin Finite-Element Method, Third Sy. on Atmospheric Turbulence, Diffusion and Air Quality, Amer. Meteorol. Soc., 1976.

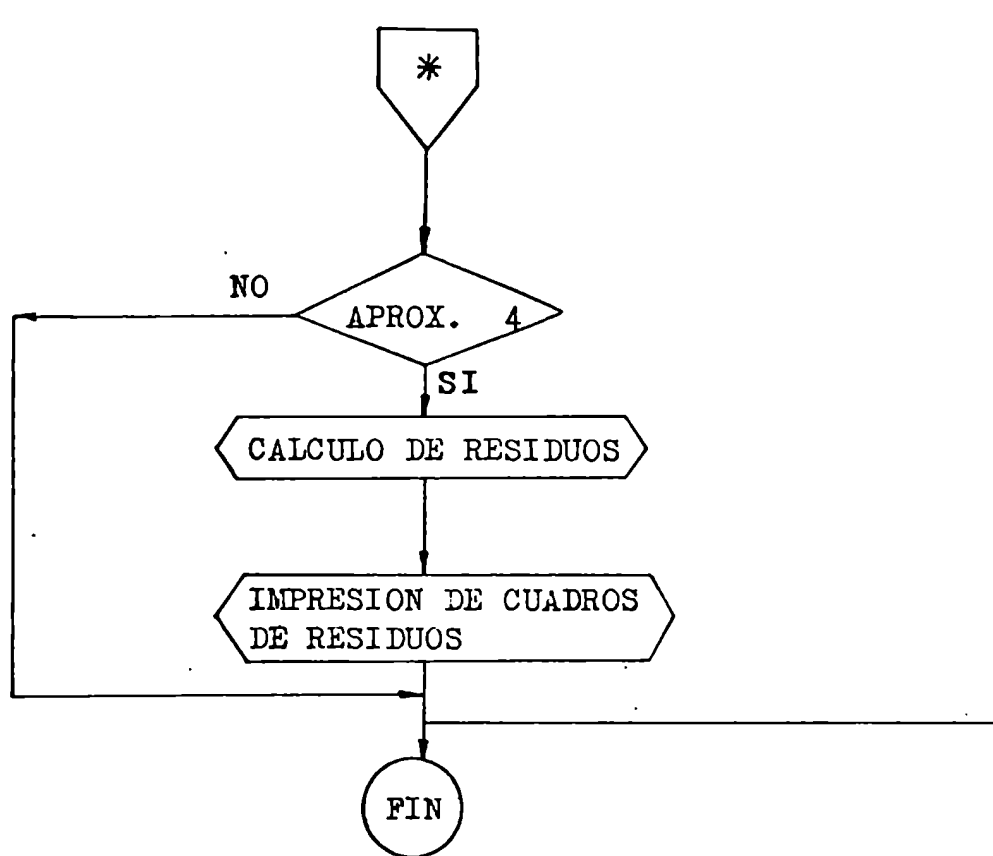
- (57) Deardorff, J.W.: Three-Dimensional Numerical Study of the Height and Mean Structure of a Heated Planetary Boundary Layer, *Boundary-Layer Meteorology*, 7, 81-106, 1974
- (58) Wyngaard, J.C. and Coté, O.R.: The Evolution of a Convective Planetary Boundary Layer-A Higher-Order-Closure Model Study, *Boundary-Layer Meteorology*, 7, 289-308, 1974
- (59) Wyngaard, J.C.: Modeling the Planetary Boundary Layer Extension to the Stable Case, *Boundary-Layer Meteorology*, 9, 441-460, 1975.
- (60) Marshall, G. y Necco, G.V.: Aspectos computacionales en la simulación de procesos de transferencia de calor y materia en dispersión de contaminantes. Cuadernos del CAMAT, 1979.
- (61) Forsythe, G.E. y Moler, C.B.: Solución mediante computadoras de sistemas algebraicos lineales, EUDEBA, Buenos Aires, 1973
- (62) Taylor, G.I.: Eddy Motion in the Atmosphere, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A*, 215, 1-26, 1915.
- (63) Kalnay de Rivas, E.: On the Use of Nonuniform Grids in Finite-Difference Equations, *J. of Computational Physics* 10, 202-210, 1972.
- (64) Sundqvist, H. and Veronis, G.: A Simple Finite-Difference Grid with Nonconstant Intervals, *Tellus* 22, 26-31, 1970.
- (65) Shir, C.C. and Bornstein, R.D.: Eddy Exchange Coefficients in Numerical Models of the Planetary Boundary Layer, *Boundary-Layer Meteorology* 11, 171-185, 1977.
- (66) Gutman, D.P. and Torrance, K.E.: Use of the Numerical Method of Estoque and Bhumralkar for the Planetary Boundary Layer, *Boundary-Layer Meteorology* 5, 341-346, 1973.
- (67) Martchouk, G.I.: *Methodes Numériques pour la prévision du temps*. Armand Colin, Paris, 1970.
- (68) Landsberg, H.E.: "The Climate of Towns", in W.L. Thomas, Jr. (ed.), *Man's Role in Changing the Face of the Earth*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 584-606, 1956.
- (69) Kratzer, P.A.: *Das Stadtklima, Wissenschaft (Braunschweig)*, traducido en *The Climate of Cities*, American Meteorological Soc., Boston, 1956.
- (70) Clarke, J.F.: "Nocturnal Urban Boundary Layer over Cincinnati, Ohio", *Month. Weather Rev.*, 97, 582-589, 1968.



- (71) Deardorff, J.W.: The Counter-Gradient Heat Flux in the Lower Atmosphere and in the Laboratory, *J. Atmospheric Sci.*, 23, 503-506, 1966.
- (72) Wyngaard, J.C.: On Surface Layer Turbulence, Workshop on Micrometeorology, *Amer. Meteorol. Soc.*, 1973.
- (73) Donaldson, CduP.: Construction of a Dynamic Model of the Production of Atmospheric Turbulence and the Dispersal of Atmospheric Pollutants, Workshop on Micrometeorology, *Amer. Meteorol. Soc.*, 1973.
- (74) Tennekes, H.: Similarity Laws and Scale Relations in Planetary Boundary Layers, Workshop on Micrometeorology, *Amer. Meteorological Soc.*, 1973.

## ANEXO 1: DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA FORTRAN IV DOSDIM





#### DETALLES GENERALES DEL DIAGRAMA DE FLUJO

##### LECTURA E INICIALIZACION:

- Definición de las constantes.
- Definición de la geometría del modelo:  
N y lectura del paso según x (uniforme).  
M y uso de un subprograma Ad-Hoc para definir pasos según z.
- Definición de las condiciones de contorno.
- Definición de los parámetros de rugosidad de superficie.
- Definición de indicadores para distintas alternativas de elección del coeficiente de difusividad turbulenta.

##### SUBROUTINA MATRIZ

- Se calculan las cuatro aproximaciones del método usado, distinguiendo para la cuarta entre hidrostática y no hidrostática.
- Se generan los coeficientes de las matrices.
- Se calculan las matrices
- Se calcula la distribución del coeficiente de difusividad turbulenta.

**IMPRESION DE CUADROS**

- Se utiliza la subrutina IMPRE que permite la impresión de variables y residuos.
- Para la cuarta aproximación se hace uso de la subrutina MAPA que grafica para cada variable, las curvas de nivel.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA		PAG.
1	Diagrama altura (logarítmica)-estabilidad de la capa límite, indicando varios fenómenos observables (2).	3
2	Subdivisiones de la capa límite atmosférica.	21
3	Comparación entre observaciones del perfil adimensional del viento con fórmulas de interpolación(4).	30
4	Comparación entre observaciones del gradiente adimensional de temperatura con fórmulas de interpolación(4).	30
5	Balance de fuerzas en la capa de transición.	34
6	Capas consideradas en el modelo de Estoque (42).	43
7	Región bidimensional en el modelo de Estoque(52).	46
8	Esquema de la región y el retículo en el problema unidimensional.	53
9	Región utilizada en el problema bidimensional.	66
10	Apartamientos de $U$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 1	81
11	Apartamientos de $V$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 1	82
12	Apartamientos de $w$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 1	83
13	Apartamientos de $P$ (mb), Caso 1	84
14	Apartamientos de $q$ ( $gr \cdot Kgr^{-1}$ ), Caso 1	85
15	Apartamientos de $K$ ( $m^2 \cdot sec^{-1}$ ), Caso 1	86
16	Apartamientos de $U$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 2	87
17	Apartamientos de $V$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 2	88
18	Apartamientos de $w$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 2	89
19	Apartamientos de $P$ (mb), Caso 2	90
20	Apartamientos de $\theta$ ( $^{\circ}K$ ), Caso 2	91
21	Apartamientos de $q$ ( $gr \cdot Kgr^{-1}$ ), Caso 2	92
22	Apartamientos de $K$ ( $m^2 \cdot sec^{-1}$ ), Caso 2	93
23	Apartamientos de $u$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 2	94
24	Apartamientos de $v$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 3	95
25	Apartamientos de $V$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 3	96
26	Apartamientos de $w$ ( $m \cdot sec^{-1}$ ), Caso 3	97
27	Apartamientos de $\theta$ ( $^{\circ}K$ ), Caso 3	98

## LISTA DE TABLAS

TABLA		PAG.
1	Conjunto de ecuaciones de energía y conversiones en la capa límite atmosférica.	14
2	Conjunto de ecuaciones de energía y conversiones en la capa límite planetaria.	15
3	Valores de $C_D$ obtenidos por distintos autores en el caso que se considere constante.	23
4	Valores de $C_D$ obtenidos por distintos autores en el caso que se considera variando linealmente con el viento.	24
5	Características y condiciones de contorno en el Caso 1.	78
6	Características y condiciones de contorno en el Caso 2.	79
7	Características y condiciones de contorno en el Caso 3.	80