Espacios asociados a funciones maximales parabólicas y potenciales de Hp, O p 1 (p mayor a 0 y menor o igual a 1)

Durán, Ricardo Guillermo

1981

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

1684

ESPACIOS ASOCIADOS A FUNCIONES

MAXIMALES PARABOLICAS Y POTENCIALES

DE H^p, $0 < p \leq 1$.

por

Ricardo Guillermo Durán

Trabajo de tesis para optar al título

de Doctor en Matemática

Director: Dr. Carlos Segovia

Este trabajo fue realizado durante la tenencia de una beca otorgada por el CONICET.
Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Carlos Segovia por su apoyo y sus enseñanzas, mediante las cuales he podido llevar a cabo este trabajo.
Quiero también agradecer al Dr. Alberto González Domínguez, por su constante estímulo y generosidad y al Dr. Angel Eduardo Gatto por la valiosa ayuda que me ha brindado en todo momento.
Finalmente dejo expresado mi sincero agradecimiento a las señoritas Alejandra Bertolini y Claudia Clemares quienes tuvieron a su cargo la tarea de mecanografiar este trabajo.

R.D.

INTRODUCCION

En el primer capítulo de este trabajo, se generaliza al caso parabólico diagonalizable la función maximal definida en [4] y se introduce el espacio $\mathcal{H}_u^p$ de clases de funciones que tienen su maximal en L^p, siendo p un número positivo menor o igual que 1. Se define una noción de átomo o función elemental perteneciente a $\mathcal{H}_u^p$ y se da una caracterización de los elementos de este espacio como series de átomos.

En el segundo capítulo, se obtiene un isomorfismo entre $\mathcal{H}_u^p$ y el espacio H^p definido en [1] para ciertos valores enteros de u. Este isomorfismo está dado por un operador diferencial parabólico.

Preliminares y Notación.

Notaremos con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto del espacio Euclídeo R^n. Dada una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ de números reales $a_i > 1$, consideraremos el grupo multiplicativo de matrices $A_t = t^P$, $t > 0$, donde P es la matriz diagonal dada por $(a_1, \ldots, a_n)$, o sea $A_t = \begin{pmatrix} t^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{a_n} \end{pmatrix}$.

Al grupo de matrices A_t, le asociamos la métrica parabólica dada por $d(x,y) = [x-y]$ donde $[x] = t$ si t es el único número tal que $[A_{t^{-1}} x] = 1$, para $x \neq 0$ y $[0] = 0$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

i) $[A_t\, x] = t\,[x]$ si $t > 0$ y $x \in R^n$,

ii) $[x] \in C^\infty (R^n \setminus \{0\})$,

iii) $[x+y] < [x] + [y]$, y

iv) si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $x_j < [x]^{a_j}$ para $1 < j < n$.

Para las demostraciones sobre estas propiedades ver [1].

Notaremos con D^{α} al operador $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ donde $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ es una n-upla de números enteros no negativos y $\alpha . a$ indicará el producto escalar, es decir, $\alpha . a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$. Con $|\alpha|$ indicaremos el número $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Por último, a lo largo de todo el trabajo, utilizaremos la letra C para denotar una constante, no necesariamente la misma, todas las veces en que aparezca.

Sea $L^q_{\ell oc}$, $1 < q < \infty$, el espacio de todas las funciones reales definidas sobre R^n, que pertenecen localmente a L^q. Denotaremos con $B(y,\rho)$ a la bola parabólica de centro y y radio ρ; esto es, $B(y,\rho) = \{x \mid [x-y] < \rho\}$. Es fácil verificar que la medida $|B|$ de la bola es igual a $C\rho^{|\cdot|}$ (ver [1]).

La topología que consideraremos en $L^q_{\ell oc}$ es aquella de la convergencia en L^q sobre compactos. Ella es inducida por la familia de seminormas

$$|f|_{q,B} = \left(|B|^{-1}\int_B |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

donde $B = B(y,\rho)$, $\rho > 0$, $y \in R^n$.

Sea $u > 0$. Dada $f \in L^q_{\ell oc}$ definimos una función maxi mal $n_{q,u}(f,x)$ como:

$$n_{q,u}(f,x) = \sup_{\rho > 0} \rho^{-u} |f|_{q,B(x,\rho)} .$$

Denotaremos con P_u al subespacio de $L^q_{\ell oc}$ formado por todos los polinomios de la forma:

$$P(y) = \sum_{|\alpha| < u} a_\alpha y^\alpha .$$

Este subespacio es de dimensión finita y por lo tanto es un subespacio cerrado de $L^q_{\ell oc}$. Llamaremos E^q_u al espacio cociente de $L^q_{\ell oc}$ por P_u .

Si $F \in E^q_u$, definimos la seminorma

$$\|F\|_{q,B} = \inf \{ |f|_{q,B} : f \in F \} .$$

La familia de todas las seminormas $\|F\|_{q,B}$ que se obtienen variando B induce en E^q_u la topología cociente. El espacio E^q_u es localmente convexo y completo.

Para $F \in E^q_u$, definimos la función maximal

$$N_{q,u}(F,x) = \inf \{ n_{q,u}(f,x) : f \in F \} .$$

CAPITULO I

Llamaremos $\mathcal{H}^p_{q,u}$, $0<p\leq 1$, al conjunto formado por todos los elementos F de E^q_u tales que sus funciones maximales $N_{q,u}(F,x)$ pertenecen a L^p. Para simplificar la notación pondremos $N = N_{q,u}$, $n = n_{q,u}$ y $\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p_{q,u}$ siempre que esta notación no induzca a confusión . En el caso elíptico y cuando u es un entero par estos espacios fueron estudiados en [2].

Definimos norma de un elemento F perteneciente a $\mathcal{H}^p_{q,u}$ como,

$$\| F \|_{\mathcal{H}^p_{q,u}} = \left(\int N(F,x)^p dx \right)^{1/p} .$$

Esta norma no satisface la propiedad triangular y por lo tanto no es una norma en el sentido usual de la palabra. Sin embargo, $\| F \|^p_{\mathcal{H}^p}$ satisface la propiedad triangular y permite definir una distancia,

$$d(F,G) = \| F-G \|^p_{\mathcal{H}^p} = \int N(F-G,x)^p dx$$

sobre $\mathcal{H}^p$. Como veremos, $\mathcal{H}^p$ con esta distancia es un espacio métrico completo.

(1.1) LEMA. Si $p < |a|(u + |a|/q)^{-1}$, entonces $\mathcal{H}^p = 0$.

Demostración. Sea f una función de $L^p_{\ell oc}$ tal que f no pertenece a $\mathcal{P}_u$. Probaremos que si F es la clase de f en E^q_u entonces $N(F,x)$ no pertence a L^p .

Como f no pertenece a $\mathcal{P}_u$, existe una bola $B = B(0,r)$ y un número $\delta > 0$ tales que

$$\left(\int_B |f(y) - P(y)|^q dy \right)^{1/q} > \delta ,$$

para todo P en $\mathcal{P}_u$.

Por otra parte,

$$n(f-P,x) = \sup_{\rho > 0} \rho^{-u} \left(|B(x,\rho)|^{-1} \int_{B(x,\rho)} |f(y) - P(y)|^q dy \right)^{1/q},$$

y si $[x] > r$, tenemos que $B(0,r) \subset B(x, 2[x])$, por lo tanto, tomando $\rho = 2[x]$ resulta,

$$n(f-P,x) \geq C[x]^{-(u+|a|/q)}\left(\int_{B(x,2[x])} |f(y) - P(y)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$\geq C[x]^{-(u+|a|/q)}\left(\int_{B(0,r)} |f(y) - P(y)|^q \; dy\right)^{1/q} \geq C\,\delta[x]^{-(u+|a|/q)} .$$

En consecuencia, $N(F,x) \geq C\,\delta\,[x]^{-(u+|a|/q)}$ y por lo tanto $N(F,x) \notin L^p$.

El siguiente lema, es una adaptación al caso parabólico del lema 3 de [4].

(1.2) LEMA. Sean f_1, f_2 dos representates de $F \in E_u^q$ y $P = f_1 - f_2$. Existe una constante c_α tal que

$$|D^\alpha P(y)| \leq C_\alpha(n(f_1,x_1) + n(f_2,x_2))\,([x_1-y] + [x_2-y])^{u-\alpha.a'}$$

para todo $x_1, x_2, y \in R^n$.

Demostración: Sea ϕ una función C^{∞} con soporte en $[x] \leq 1$ tal que si $\phi_\lambda(x) = \lambda^{|a|}\phi(A_\lambda x)$ entonces, se verifica que $Q = Q * \phi_\lambda$ para todo polinomio Q de la forma $Q(y) = \sum_{\alpha\cdot a < u} b_\alpha y^\alpha$ y para todo $\lambda > 0$.

Para la existencia de esta ϕ, ver [5].

Por lo tanto, tenemos

$$P(y) = \int_{[y-z] < \lambda^{-1}} P(z)\,\lambda^{|a|}\,\phi(A_\lambda(y-z))\,dz\ ,$$

luego,

$$D^\alpha P(y) = \int_{[y-z] < \lambda^{-1}} P(z)\,\lambda^{|a|+\alpha.a}\,(D^\alpha\phi)(A_\lambda(y-z))\,dz\ .$$

Sea $\rho = 2\,[y - x_1] + 2\,[y - x_2] = 2\,\lambda^{-1}$. Entonces, se tiene

$$|D^\alpha P(y)| \leq \lambda^{|a|+\alpha.a}\int_{[y-z]<\lambda^{-1}} |f_1(y)-f_2(y)|\ |D^\alpha\phi(A_\lambda(y-z))|\ dz$$

$$\leq \lambda^{|a|+\alpha.a}\int_{[y-z]<\lambda^{-1}} |f_1(y)|\ |D^\alpha\phi(A_\lambda(y-z))|\ dz$$

$$+ \quad \lambda^{|a|+\alpha\cdot a} \int_{[y-z]<\lambda^{-1}} |f_2(y)| \; |D^{\alpha}\phi(A_{\lambda}(y-z))| \; dz \; ,$$

pero, como $[y-z] < \lambda^{-1}$, se tiene:

$$[z-x_1] < [z-y] + [y-x_1] < 2\lambda^{-1} = \rho \qquad y$$

$$[z-x_2] < [z-y] + [y-x_2] < 2\lambda^{-1} = \rho \; .$$

Por lo tanto,

$$|D^{\alpha} P(y)| \leq \lambda^{|a|+\alpha\cdot a} \int_{[x_1-z]<\rho} |f_1(z)| \; |D^{\alpha}\phi(A_{\lambda}(y-z))| \; dz$$

$$+ \quad \lambda^{|a|+\alpha\cdot a} \int_{[x_2-z]<\rho} |f_2(z)| \; |D^{\alpha}\phi(A_{\lambda}(y-z))| \; dz$$

$$\leq \|D^{\alpha}\phi\|_{\infty} \, \lambda^{|a|+\alpha\cdot a} \int_{[x_1-z]<\rho} |f_1(z)| \; dz \; + \int_{[x_2-z]<\rho} |f_2(z)| \, dz$$

$$\leq \|D^{\alpha}\phi\|_{\infty} \, \lambda^{|a|+\alpha\cdot a} \quad \rho^{|a|} \Bigg[\left(\rho^{-|a|} \int_{[x_1-z]<\rho} |f_1(z)|^{q} \; dz \right)^{1/q}$$

$$+ \left(\rho^{-|s|} \int_{|x_2 - z| < \rho} |f_2(z)|^q \, dz \right)^{1/q} \Bigg]$$

$$\leq C_\alpha \; \lambda^{|s| + \alpha . s} \; \rho^{|s|} \; \rho^{u} (n(f_1, x_1) + n(f_2, x_2))$$

$$\leq C_\alpha \; (n(f_1, x_1) + n(f_2, x_2)) \; ([x_1 - y] + [x_2 - y])^{u - \alpha . s}$$

como queríamos demostrar.

(1.3) LEMA. Sea $F \in E_u^q$ y sea $x_0 \in R^n$ tal que $N(F,x_0) < \infty$. Entonces:

i) existe una única $f \in F$ tal que $n(f,x_0) < \infty$ y por lo tanto $n(f,x_0) = N(F,x_0)$, y

ii) para toda bola B, existe una constante C, que depende de x_0 y de B tal que si f es el representante de F dado en i), entonces:

$$\|F\|_{q,B} \leq |f|_{q,B} \leq C \; n(f,x_0) = C \; N(F,x_0).$$

Si x_0 varía en un compacto, entonces, la constante C puede ser elegida independientemente de x_0.

Demostración: Supongamos $f_1, f_2 \in F$ son tales $n(f_1,x_0)$ y $n(f_2, x_0)$ son ambas finitas. Sea $P = f_1 - f_2$, $P(y) = \sum_{\alpha, |\alpha|<u} a_\alpha y^\alpha$, aplicando el lema (1.2) con $x_0 = x_1 = x_2 = y$, se tiene que para todo α, $D^\alpha P(x_0) = 0$, luego $f_1 = f_2$,

Veamos ahora ii) Dada una bola B, sea ρ_0 el menor valor de ρ para el cual $B \subset B(x_0, \rho)$, entonces,

$$\|F\|_{q,B} \leq |f|_{q,B} = \left(|B|^{-1} \int_B |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q}$$

$$= \left(|B|^{-1} |B(x_0,\rho)| \, |B(x_0,\rho)|^{-1} \int_B |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q}$$

$$= \rho_0^u \, |B|^{-1/q} |B(x_0,\rho_0)|^{1/q} \, \rho_0^{-u} \, |f|_{q,B(x_0,\rho_0)} \leq C_{x_0,B} \, n(f,x_0)$$

$$= C_{x_0,B} \, N(F,x_0).$$

(1.4) COROLARIO. Si $\{F_j\}$ es una sucesión de elementos de E_u^q y $F_j \to F$ en $\mathcal{H}^p$ para algún $0 < p \leq 1$, entonces $F_j \to F$ en E_u^q.

Demostración. Por el lema (1.3), para cada bola B se tiene: $\| F_j - F \|_{q,B} \leq C\, N(F_j - F, x)$, donde x pertenece a B y C no depende de x. Luego,

$$\int_B \| F_j - F \|^p_{q,B}\, dx \leq C^p \int_B N(F_j - F, x)^p dx ,$$

o sea que

$$\| F_j - F \|^p_{q,B} \leq C^p \, |B|^{-1} \int_B N(F_j - F, x)^p dx \leq C \, \| F_j - F \|^p_{\mathcal{H}^p} ,$$

donde C es una constante que depende de B.

(1.5) LEMA. Sea $\{F_j\}$ una sucesión en E_u^q. Supongamos que existe un punto x_0 tal que la serie $\sum_j N(F_j, x_0)$ es finita.

Entonces,

i) la serie $\sum_j F_j$ converge en E_u^q a un elemento F y

$N(F,x_0) \leq \sum_j N(F_j,x_0)$, y

ii) si $f_j \in F_j$ es tal que $n(f_j, x_0) = N(F_j, x_0)$ entonces

$\sum_j f_j$ converge en $L^q_{\ell oc}$ a una función $f \in F$ que satisfa-

ce $n(f, x_0) = N(F,x_0)$.

Demostración: Como $\sum N(F_j,x_0)$ es finita, existen represen-

tantes f_j de F_j que satisfacen $n(f_j,x_0) = N(F_j,x_0) < \infty$.

En virtud del Lema (1.3), para toda bola B se tiene,

$$| \sum_{j=1}^{h} f_j - \sum_{j=1}^{\ell} f_j |_{q,B} \leq \sum_{j=\ell+1}^{h} | f_j |_{q,B} \leq C \sum_{j=\ell+1}^{h} N(F_j,x_0),$$

y por lo tanto, $\sum_j f_j$ converge en $L^q_{\ell oc}$ a una función f.

Llamemos F a la clase de f en E_u^q, como

$$n(f,x_0) \leq \sum_j n(f_j, x_0) = \sum_j N(F_j, x_0) < \infty$$

obtenemos que f es el único representante de F que satisface $n(f,x_0) = N(F,x_0)$. Por otra parte,

$$\| \sum_{j=1}^{h} F_j - F \|_{q,B} \leq | \sum_{j=1}^{h} f_j - f |_{q,B} ,$$

lo que demuestra la convergencia en E_u^q de la serie $\sum_j F_j = F$.

(1.6) COROLARIO. El espacio $\mathcal{H}^p$, $0 < p \leq 1$, es completo.

Demostración: Es suficiente probar que si $\{F_j\}$ es una sucesión tal que $\sum_j \| F_j \|_{\mathcal{H}^p}^p$ es finita, entonces $\sum_j F_j$ converge en $\mathcal{H}^p$. Observemos que, como $p \leq 1$,

$$\int (\sum_j N(F_j,x))^p dx \leq \sum_j \int N(F_j,x)^p dx < \infty ,$$

y por lo tanto $\sum_j N(F_j,x)$ es finita para casi todo x. Luego por el lema (1.5), $\sum_j F_j$ converge en E_u^q a un elemento F. Ahora, también por el mismo lema (1.5),

$$N\left(\sum_{j=1}^{h} F_j - F\ ,\ x\right) \leqslant \sum_{j=h+1}^{\infty} N(F_j, x).$$

Elevando a la p e integrando, se obtiene:

$$\Big\| \sum_{j=1}^{h} F_j - F \Big\|_{\mathcal{H}^p}^{p} \leqslant \sum_{j=h+1}^{\infty} \| F_j \|_{\mathcal{H}^p}^{p} .$$

Como $\sum_j \| F_j \|_{\mathcal{H}^p}^{p}$ es finita, queda demostrado el corolario.

(1.7) LEMA. La función maximal $N(F,x)$ de un elemento F de E_u^q es semicontinua inferiormente.

Demostración: Sea $\{x_j\}$ una sucesión en $\mathbf{R}^n$ que converge a x_0 y tal que $N(F, x_j) < t$ para todo j. Queremos probar que $N(F,x_0) \leqslant t$. Sea $f \in F$ y sea f_j el representante de F tal que $n(f_j, x_j) = N(F,x_j)$; se tiene entonces

$$f_j(y) = f(y) - P_j(y), \quad \text{con} \quad P_j(y) = \sum_{|\alpha| < u} a_\alpha(x_j)(y-x_j)^\alpha/\alpha! \ .$$

Veamos que la sucesión numérica $\{a_\alpha(x_j)\}$ es una sucesión de Cauchy:

Observemos que $a_\alpha(x_j) = D^\alpha P_j(x_j)$ y que por el desarrollo de Taylor;

$$D^\alpha P_k(x_j) = \sum_\beta D^{\alpha+\beta} P_k(x_k)(x_j - x_k)^\beta / \beta! =$$

$$= \sum_\beta a_{\alpha+\beta}(x_k)(x_j - x_k)^\beta / \beta! .$$

Aplicando el lema (1.2) se obtiene:

$$|a_\alpha(x_j) - \sum_\beta a_{\alpha+\beta}(x_k)(x_j - x_k)^\beta / \beta!| \leq C\, t\, [x_j - x_k]^{u-\alpha.a} .$$

Sea $r_1 \in R$, $r_1 = \max\ \{\alpha.a / \alpha.a < u\}$, entonces si $\alpha.a = r_r$. se obtiene:

(1.8) $\qquad |a_\alpha(x_j) - a_\alpha(x_k)| \leq C.t\ [x_j - x_k]^{u-r_1} < \varepsilon,$

para j y k suficientemente grandes.

Sea $r_2 = \max \{\alpha . a / \alpha . a < r_1\}$, luego si $\alpha . a = r_2$,

$$|a_\alpha(x_j) - a_\alpha(x_k)| < C\, t\, [x_j - x_k]^{u - r_2} + \Big| \sum_{\substack{\beta > 0 \\ (\alpha+\beta) a < u}} a_{\alpha+\beta}(x_k)(x_j - x_k)^\beta / \beta! \Big|$$

pero $(\alpha+\beta)\, a < u$, $\beta > 0$ y $\alpha . a = r$ implica $(\alpha+\beta) a = r_1$

luego:

$$|a_\alpha(x_j) - a_\alpha(x_k)| < C\, t\, \varepsilon + C \sum_{\substack{\beta > 0 \\ (\alpha+\beta) a < u}} |a_{\alpha+\beta}(a_k)|\ [x_j - x_k]^{\beta . a} < C\, \varepsilon$$

si j y k son suficientemente grandes pues, como $(\alpha+\beta) a = r_1$ en virtud de (1.8) la sucesión $\{a_{\alpha+\beta}(x_k)\}$ es de Cauchy y por lo tanto acotada. Continuando inductivamente, resulta que $\{a_\alpha(x_j)\}$ es una sucesión de Cauchy para todo α.

Sean $a_\alpha(x_0) = \lim\limits_{j \to \infty} a_\alpha(x_j)$ y $P(y) = \sum\limits_{\alpha . a < u} a_\alpha(x_0)(y - x_0)^\alpha / \alpha!$ o sea $P(y) = \lim\limits_{j \to \infty} P_j(y)$. En consecuencia

$$\int_{|y-x_0|<\rho} |F(y) - P(y)|^q dy = \lim_{j\to\infty} \int_{|y-x_j|<\rho} |f(y) - P_j(y)|^q dy \leq t^q \rho^{u.q+|a|}$$

y por lo tanto $N(F,x_0) \leq t$.

(1.9) DEFINICION. Una clase $A \in E_u^q$ es un p-átomo en E_u^q si existe un representante $b(x)$ de A y una bola B tal que $\operatorname{sop} b \subset B$ y $N(A,x) \leq |B|^{-1/p}$

(1.10) LEMA. Si f es una función con todas sus derivadas de orden menor que $u+1$ continuas y acotadas, y si F es la clase de f en E_u^q , entonces $N_{q,u}(F,x) \in L^\infty$.

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$|f(y) - \sum_{|\alpha|<u} D^\alpha f(x)(y-x)^\alpha/\alpha! | \leq C\, |y-x|^u .$$

Supongamos primero $|y-x| < 1$. En este caso, aplicando el desarrollo de Taylor, tenemos

$$|f(y) - \sum_{\alpha.s<u} D^{\alpha}f(x)(y-x)^{\alpha}/\alpha!| = |\sum_{\substack{|\alpha|<u \\ \alpha.s>u}} D^{\alpha}f(x)(y-x)^{\alpha}/\alpha!$$

$$+ \sum_{u<|\alpha|<u+1} D^{\alpha}f(x+\theta(y-x))(y-x)^{\alpha}/\alpha!|$$

$$< \sum_{\substack{|\alpha|<u \\ \alpha.s>u}} \|D^{\alpha}f\|_{\infty} [y-x]^{\alpha.s}/\alpha! + \sum_{u<|\alpha|<u+1} \|D^{\alpha}f\|_{\infty} [y-x]^{\alpha.s}/\alpha! < C[y-x]^{u}.$$

Por otra parte, si $[y-x] > 1$, resulta,

$$|f(y) - \sum_{\alpha.s<u} D^{\alpha}f(x)(y-x)^{\alpha}/\alpha!| < \|f\|_{\infty}$$

$$+ \sum_{\alpha.s<u} \|D^{\alpha}f\|_{\infty} [y-x]^{\alpha.s}/\alpha! < C[y-x]^{u}$$

(1.11) COROLARIO. Si f es una función de soporte compacto con derivadas de orden menor que $u+1$ continuas y si F es la clase de f en E_u^q, entonces existe una constante λ tal que λF es un p-átomo en E_u^q.

Demostración. Sea B una bola tal que sop $f \subset B$. Por el lema anterior, sabemos que existe una constante C tal que

$N(F,x) \leq C$. Sea $\lambda = |B|^{-1/p} C^{-1}$, entonces, $N(\lambda F,x) =$

$= \lambda N(F,x) = |B|^{-1/p} C^{-1} N(F,x) < |B|^{-1/p}$, y por lo tanto

λF es un p-átomo en E_u^q.

(1.12) LEMA. Sea A un p-átomo en E_u^q, con

$|a| (u+|a|/q)^{-1} < p < 1$. Entonces $A \in \mathcal{H}^p$ y existe una constante C independiente de A tal que:

$$\int N(A,x)^p \, dx < C$$

Demostración. Sea a el representante de A cuyo soporte está contenido en la bola $B = B(x_0,r)$ tal que $N(A,x) \leq |B|^{-1/p}$. Si $x \notin B(x_0,2r)$, estimaremos,

$$n(a,x) = \sup_{\rho > 0} \rho^{-u} [|B(x,\rho)|^{-1} \int_{B(x,\rho)} |a(y)|^q \, dy]^{1/q}$$

Observemos que si $B(x,\rho) \cap B(x_0,r) = \phi$, entonces

$$\int_{B(x,\rho)} |a(y)|^q \, dy = 0.$$

Por lo tanto, podemos suponer que $B(x,\rho) \cap B(x_0,r) \neq \phi$.

En este caso, se tiene que $r < \rho$ y $[x-x_0] < 2\rho$, luego,

$$n(a,x) \leq C\, r^{-(u+|a|/q)} \left(\int_{B(x_0,r)} |a(y)|^q \, dy \right)^{1/q} < \infty$$

y en consecuencia $N(A,x) = n(a,x)$ si $x \notin B(x_0,2r)$. Sea x_1 tal que $2r < [x_0 - x_1] < 3r$, entonces $B(x_0,r) \subset B(x_1,4r)$.

Por lo tanto,

$$N(A,x) = n(a,x) = \sup_{\rho > 0} \rho^{-u} \left(|B(x,\rho)|^{-1} \int_{|y-x| < \rho} |a(y)|^q \, dy \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sup_{\rho > 0} \rho^{-(u+|a|/q)} \, r^{u+|a|/q} \, r^{-u} \left(r^{-n} \int_{[y-x_1] < 4r} |a(y)|^q \, dy \right)^{1/q}$$

$$\leq C\,(r/[x-x_0])^{u+|a|/q} \, N(A,x_1) \; ,$$

de donde obtenemos que si $x \notin B(x_0,2r)$, entonces,

$$N(A,x) \leq C(r/[x-x_0])^{u+|\beta|/q}\,|B|^{-1/p} .$$

En virtud de la estimación que acabamos de probar y como además, por hipótesis $N(A,x) \leq |B|^{-1/p}$ para todo x , resulta,

$$\int N(A,x)^p\,dx = \int_{[x-x_0]<2r} |B|^{-1}\,dx + \int_{[x-x_0]>2r} C(r/[x-x_0])^{(u+|a|/q)p}\,|B|^{-1/p}\,dx$$

$$\leq C\,|B|^{-1}\,|B| + C\int_{[y]>2} [y]^{-p(u+|a|/q)}\,r^{|a|}\,|B|^{-1}\,dy \leq C$$

como queríamos demostrar.

(1.13) LEMA. Sea $\{A_i\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}^p$ tales que $\int N(A_i,x)^p\,dx \leq C$. Si $\{\mu_i\}$ es una sucesión numérica tal que $\sum_i |\mu_i|^p < \infty$, entonces la serie $\sum_i \mu_i A_i$ converge absolutamente en $\mathcal{H}^p$, y si denotamos con F a su suma, se tiene,

$$\int N(F,x)^p\,dx \leq C \sum_i |\mu_i|^p$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\sum_{i=k}^{m} \|\mu_i A_i\|^p_{\mathcal{H}^p} = \sum_{i=k}^{m} |\mu_i|^p \int N(A_i, x)^p dx < C\,\varepsilon \quad \text{si } k \text{ y } m \text{ son}$$

suficientemente grandes, lo que prueba la convergencia absoluta de la serie en $\mathcal{H}^p$. Además, por el lema (1.5)

$$\int N(F, x)^p dx \leq \sum_i |\mu_i|^p \int N(A_i, x)^p dx \leq C \sum_i |\mu_i|^p ,$$

lo que concluye la demostración.

(1.14) LEMA. (Partición de la unidad). Sea Ω un subconjunto abierto propio de R^n. Existe una sucesión $\{\phi_k\}$ de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto que satisfacen las siguientes condiciones:

i) $0 \leq \phi_k(x) \leq 1$ y $\sum_k \phi_k(x) = \chi_\Omega(x)$,

ii) para cada k, hay una bola $B_k = B(x_k, r_k) \subset \Omega$ tal que sop $\phi_k \subset B_k$ y para todo $z \in B_k$, $r_k < d(z, \Omega^c) < C\, r_k$,

iii) para todo k, $B(x_k, 2r_k)$ está contenida en Ω. Además existe un entero M tal que el número de bolas $B(x_j, 2r_j)$ que intersecan a $B(x_k, 2r_k)$ no supera a M y

iv) para todo α, se tiene, $|D^\alpha \phi_k(x)| \leq C_\alpha\, r_k^{-\alpha \cdot}$, donde C_α no depende de k.

Demostración. Como Ω es abierto propio, existe una familia $B_k = B(x_k, r_k) \subset \Omega$ que cumple iii) tal que $\Omega = \bigcup_k B(x_k, r_k/2)$ y si $z \in B_k$ $r_k < d(x, \Omega^c) < C\; r_k$ (ver [6]).

Sea $\phi(x)$ una función C^∞ y con soporte contenido en $\{[x] < 1\}$ y tal que $\phi(x) = 1$ si $[x] < \frac{1}{2}$ y $0 \leq \phi(x) \leq 1$.

Sea $\tilde{\phi}_k(x) = \phi(A_{r_k}^{-1}(x - x_k))$, entonces se tiene que sop $\tilde{\phi}_k \subset \{[A_{r_k}^{-1}(x - x_k)] < 1\} = \{[x - x_k] < r_k\}$ y $\tilde{\phi}_k(x) = 1$ si $[x - x_k] < r_k/2$. Por lo tanto, si $\psi(x) = \sum_k \tilde{\phi}_k(x)$

resulta $1 \leq \psi(x) \leq M$ para todo x perteneciente a Ω.

Definimos $\phi_k(x) = \tilde{\phi}_k(x)/\psi(x)$, y en consecuencia,

$$\sum_k \phi_k(x) = \chi_\Omega \quad , \; 0 \leq \phi_k(x) \leq 1 \quad \text{y} \quad \text{sop}\; \phi_k \subset B_k \;.$$

Veamos ahora iv). Tenemos,

$$|D^\alpha \tilde{\phi}_k(x)| = |r_k^{-\alpha\cdot s} (D^\alpha \phi)(A_{r_k}^{-1}(x-x_k))| \leq \|D^\alpha \phi\|_\infty r_k^{-\alpha\cdot s}$$

$$= C_\alpha r_k^{-\alpha\cdot s} \;,$$

y por otra parte, en virtud de ii) y iii), resulta,

$$|D^\alpha \psi(x)| = |D^\alpha(\sum_k \tilde{\phi}_k(x))| \leq M \; C_\alpha r_k^{-\alpha\cdot s} \;,$$

para todo $x \in B_k$. Luego,

$$D^\alpha \phi_k(x) = D^\alpha [\tilde{\phi}_k(x)/\psi(x)] = \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} C_\gamma D^\gamma \tilde{\phi}_k(x) \; D^{\alpha-\gamma}\left[\psi^{-1}\right](x) \;,$$

además, se demuestra inductivamente que

$$|D^{\beta} \; [\psi^{-1}] \; (x)| \leqslant C_{\beta} \, r_k^{-\beta \cdot a} \qquad \text{si} \quad x \in B_k \quad ,$$

y en consecuencia $\; | D^{\alpha} \phi_k (x)| \leqslant C_{\alpha} \; r_k^{-\alpha \cdot a}$

A continuación, probamos un lema que nos permite luego, obtener una descomposición atómica para clases de $\mathcal{H}^p$ siguiendo el método de [3] .

(1.15) LEMA. Sea p tal que $|a| (u+|a|/q)^{-1} < p \leqslant 1$ y sea $F \in \mathcal{H}^p$. Dado $t > 0$, sea $\Omega = \Omega_t = \{x : N(F,x) > t\}$. Por el lema (1.7), Ω es abierto. Sea $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ la partición de la unidad asociada a Ω en el lema (1.14).

Para cada k, sea $y_k \in \Omega^c$ un punto tal que $d(B(x_k , 2r_k),\Omega^c) =$
$= d(B(x_k , 2r_k), y_k)$.

Dado un representante f de F, existe un polinomio

$P(y_k,y)$ de $\mathcal{P}_u$ que satisface

$$N(F,y_k) = n(f(y) - P(y_k,y),\ y_k).$$

Para cada k, definimos la función

$$w_k(y) = \phi_k(y)(f(y) - P(y_k,y))$$

Denotemos con W_k a la clase de w_k en E_u^q.

Entonces se verifican las siguientes condiciones:

i) $N(W_k,x) \leqslant C\ N(F,x)$ si $x \in B(x_k,2r_k)$,

ii) $N(W_k,x) \leqslant C\ t(r_k/(r_k+[x-x_k]))^{u+|a|/q}$ si $x \notin B(x_k,2r_k)$,

iii) la serie $\sum_k N(W_k,x)$ converge puntualmente para casi todo $x \in R^n$. Además,

$$\int \left(\sum_k N(W_k,x)\right)^p dx \leqslant \sum_k \int N(W_k,x)^p dx \leqslant C \int_\Omega N(F,x)^p dx ,$$

iv) la serie $\sum_k W_k = W$ converge en E^q_u y para casi todo x se tiene,

$$N(W,x) \leq \sum_k N(W_k,x) \quad ,$$

v) $\int N(W,x)^p\, dx \leq C \int_\Omega N(F,x)^p\, dx$, y

vi) si $G = F - W$, $N(G,x) \leq c\, t$

Demostración.

i) Suponemos $N(F,x) < \infty$, pues, de lo contrario no hay nada que probar.

Sea $P(x,y)$ el polinomio que satisface,

$$n(f(y) - P(x,y),\ x) = N(F,x)$$

Definimos $Q_k(x,y)$ como

$$Q_k(x,y) = \sum_{\alpha \cdot a < u} D_y^\alpha \,[\phi_k(y)(P(x,y) - P(y_k,y))]_{y=x}\, (y-x)^\alpha/\alpha\,!$$

$$= \sum_{\alpha.a<u} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D_y^{\alpha-\gamma} \phi_k(y)\ D_y^{\gamma}(P(x,y) - P(y_k,y))\Big|_{y=x} (y-x)^{\alpha}/\alpha\,!$$

Estimemos $\rho^{-u}\left[\rho^{-|a|}\int_{[y-x]<\rho} |w_k(y) - Q_k(x,y)|^{q'}\ dy\right]^{1/q}$.

Por el lema (1.2), se tiene,

$$|D_y^{\alpha}[P(x,y) - P(y_k,y)]| \leq C(N(F,x) + N(F,y_k))([y-x]+[y-y_k])^{u-\alpha.a}$$

De las hipótesis se deduce que $[x_k - y_k]\leq c\ r_k$, luego,

$$[y-x] + [y-y_k] \leq \rho + [y-x] + [x-x_k] + [x_k-y_k] \leq C(\rho + r_k),$$

además, $N(F,y_k) \leq t < N(F,x)$; por lo tanto,

(1.16) $$|D_y^{\alpha}(P(x,y) - P(y_k,y))| \leq C\ N(F,x)(\rho + r_k)^{u-\alpha.a}$$

Consideremos primero el caso $\rho \geq 2r_k$, entonces

$$|W_k(y) - Q_k(x,y)| = |\phi_k(y)(f(y) - P(y_k,y)) - Q_k(x,y)|$$

$$\leq |\phi_k(y)(f(y) - P(x,y))| + |\phi_k(y)(P(x,y) - P(y_k,y))| + |Q_k(x,y)| .$$

Teniendo en cuenta (1.16), resulta

$$|\phi_k(y)(P(x,y) - P(y_k,y))| \leq |P(x,y) - P(y_k,y)| \leq C\, N(F,x)\, \rho^{u} .$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el lema (1.2), obtenemos

$$\left| D_y^{\alpha}(P(x,y) - P(y_k,y))\Big|_{y=x} \right| \leq C\, N(F,x)\, [x-y_k]^{u-\alpha\cdot a} \leq C\, N(F,x)\, r_k^{u-\alpha\cdot a} ,$$

por lo tanto, como $[y-x] < \rho$

$$|Q_k(x,y)| \leq \sum_{\alpha\cdot a<u} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |D^{\alpha-\gamma}\phi_k(y)|\, \left| D_y^{\gamma}(P(x,y) - P(y_k,y)\Big|_{y=x} \right| |(y-x)^{\alpha}/\alpha!|$$

$$\leq \sum_{\alpha\cdot a<u} \sum_{\gamma\leq\alpha} C\, r_k^{-\alpha\cdot a+\gamma\cdot a}\, N(F,x)\, r_k^{u-\gamma\cdot a}\, \rho^{\alpha\cdot a}$$

$$= \sum_{\alpha\,.\,a<u} \sum_{\gamma\leqslant\alpha} C \quad r_k^u \ (\rho/r_k)^{\alpha\,.\,a} \ N(F,x) \leqslant C\, N(F,x)\ \rho^u ,$$

la última desigualdad es válida pues $\rho/r_k \geqslant 2$, y por lo tanto $(\rho/r_k)^{\alpha\,.\,a} < (\rho/r_k)^u$; en consecuencia, si $\rho \geqslant 2r_k$, se obtuvo

$$| w_k(y) - \Omega_k(x,y) | \leqslant C | f(y) - P(x,y) | + C\, N(F,x)\ \rho^u$$

Consideremos ahora, el caso $\rho < 2r_k$. De la definición de $\Omega_k(x,y)$, resulta

$$\Omega_k(x,y) = \sum_{\beta\,.\,a<u} [\, D^\beta \phi_k(x) ((y-x)^\beta/\beta!) \sum_{\gamma\,.\,a<u-\beta\,.\,a} D^\gamma (P(x,y)-P(y_k,y)) \Big|_{y=x} (y-x)^\gamma/\gamma!$$

entonces,

$$w_k(y) - \Omega_k(x,y) = \phi_k(y)(f(y) - P(y_k,y))$$

$$- \sum_{\beta\,.\,a<u} [\, D^\beta \phi_k(x) ((y-x)^\beta/\beta!) \sum_{\gamma\,.\,a<u-\beta\,.\,a} D_y^\gamma (P(x,y) - P(y_k,y)) \Big|_{y=x} (y-x)^\gamma/\gamma!]$$

Sumando y restando la expresión

$$\phi_k(y)\ P(x,y) + \sum_{\beta\cdot a<u} D^{\beta}\phi_k(x)\ [(y-x)^{\beta}/\beta!]\quad (P(x,y)-P(y_k,y)),$$

resulta,

$$W_k(y) - Q_k(x,y) = \phi_k(y)(f(y)-P(x,y)) + \{\phi_k(y)$$

$$-\sum_{\beta\cdot a<u} D^{\beta}\phi_k(x)(y-x)^{\beta}/\beta!\ \}\quad (P(x,y) - P(y_k,y))$$

$$+\sum_{\beta\cdot a<u} D^{\beta}\phi_k(x)((y-x)^{\beta}/\beta!)\ [P(x,y) - P(y_k,y)$$

$$-\sum_{\alpha\cdot a<u-\beta\cdot a} D_y^{\gamma}(P(x,y) - P(y_k,y))\Big|_{y=x} (y-x)^{\gamma}/\gamma!\ ]$$

Por lo tanto,

$$|W_k(y) - Q_k(x,y)| \leq |f(y) - P(x,y)| + A_1 + A_2$$

Estimemos A_1. Por (1.16), tenemos

$$A_1 = \left| \phi_k(y) - \sum_{\beta\cdot a<u} D^\beta \phi_k(x)(y-x)^\beta/\beta! \right| \, | P(x,y) - P(y_k,y) |$$

$$\leq C\, N(F,x)\, r_k^u \quad \left| \phi_k(y) - \sum_{\beta\cdot a<u} D^\beta \phi_k(x)\,(y-x)^\beta/\beta! \right| .$$

En virtud de la fórmula de Taylor, resulta,

$$\phi_k(y) = \sum_{|\beta|<u} D^\beta \phi_k(x)(y-x)^\beta/\beta! + \sum_{u\leq|\beta|<u+1} D^\beta \phi_k(y_0)(y-x)^\beta/\beta!$$

donde y_0 es un punto intermedio entre x e y, luego

$$\left|\phi_k(y) - \sum_{\beta\cdot a<u} D^\beta \phi_k(x)(y-x)^\beta/\beta! \right| =$$

$$= \sum_{\substack{\beta\cdot a\geq u \\ |\beta|<u}} D^\beta \phi_k(x)(y-x)^\beta/\beta! + \sum_{u\leq|\beta|<u+1} D^\beta \phi_k(y_0)(y-x)^\beta/\beta! \,|$$

$$\leq C \sum_{\substack{\beta\cdot a\geq u \\ |\beta|<u+1}} r_k^{-\beta\cdot a} \rho^{\beta\cdot a} = C \sum_{\substack{\beta\cdot a\geq u \\ |\beta|<u+1}} (\rho/2r_k)^{\beta\cdot a}\, 2^{\beta\cdot a} \leq C\,(\rho/r_k)^u$$

pues $\rho/2r_k \leq 1$.

Por lo tanto, $A_1 \leqslant C\, N(F,x)\, \rho^{u}$.

Estimemos A_2 . Tenemos,

$$A_2 = \Big| \sum_{\beta\cdot a < u} D^{\beta} \phi_k(x) \left((y-x)^{\beta}/_{\beta}!\right) \;[\, P(x,y) - P(y_k,y)$$

$$- \sum_{\gamma\cdot a < u-\beta\cdot a} D^{\gamma}_{y}(P(x,y) - P(y_k,y))\Big|_{y=x} (y-x)^{\gamma}/_{\gamma}! \;]\;\Big|$$

$$\leqslant C \sum_{\beta\cdot a<u} r_k^{-\beta\cdot a} \rho^{\beta\cdot a} \Big| \sum_{\substack{u>\gamma\cdot a\geqslant u-\beta\cdot a \\ |\gamma|<u-\beta\cdot a}} D^{\gamma}_{y}(P(x,y) - P(y_k,y))\Big|_{y=x} (y-x)^{\gamma}/_{\gamma}!$$

$$+ \sum_{\substack{u-\beta\cdot a \leqslant |\gamma| < u-\beta\cdot a+1 \\ \gamma\cdot a < u}} D^{\gamma}_{y}(P(x,y) - P(y_k,y))\Big|_{y=y_0} (y-x)^{\gamma}/_{\gamma}!\Big|$$

donde y_0 es un punto intermedio entre x e y.

Como $[y_0-x] \leqslant [y-x] \leqslant \rho$ y $[y_0-y_k] \leqslant [y_0-x] + [x-y_k] \leqslant \rho$ $+ c\, r_k \leqslant c\, r_k$ resulta,

$$A_2 \leqslant C \sum_{\beta\cdot a<u} r_k^{-\beta\cdot a} \rho^{\beta\cdot a} [\sum_{\substack{u>\gamma\cdot a\geqslant u-\beta\cdot a \\ |\gamma|<u-\beta\cdot a+1}} N(F,x)\, r_k^{u-\gamma\cdot a} \rho^{\gamma\cdot a}$$

$$\leq C \sum_{\beta.a<u} \sum_{\substack{u>\gamma.a>u-\beta.a \\ |\gamma|<u-\beta.a+1}} N(F,x)(\rho/r_k)^{\gamma.a+\beta.a} r_k^u \leq C\, N(F,x)\rho^u .$$

En consecuencia, para todo $\rho > 0$, si $[x-y] < \rho$, tenemos,

$$|w_k(y) - Q_k(x,y)| \leq |f(y) - P(x,y)| + C\, N(F,x)\rho^u ,$$

luego,

$$\rho^{-u}[\rho^{-|a|} \int_{|x-y|<\rho^k} |w_k(y) - Q_k(x,y)|^q \, dy]^{1/q} \leq C\, N(F,x)$$

$$+ \rho^{-u}\left[\rho^{-|a|} \int_{|x-y|<\rho} |f(y) - P(x,y)|^q \, dy\right]^{1/q}$$

Tomando el supremo en ρ, se obtiene,

$$n(w_k(y) - Q_k(x,y), x) \leq C\, N(F,x) ,$$

o sea, si $x \in B(x_k, 2r_k)$,

$$N(W_k,x) \leq C\, N(F,x) .$$

ii) Sea $x \notin B(x_k, 2r_k)$; vamos a estimar

$$\rho^{-u}\left[\rho^{-|\alpha|}\int_{|x-y|<\rho}|w_k(y)|^q\ dy\right]^{1/q} .$$

Esta expresión es nula si $B(x,\rho)\cap B(x_k,r_k) = \phi$ pues sop $w_k \subset B(x_k,r_k)$. Supongamos entonces $B(x,\rho)\cap B(x_k,r_k) \neq \phi$.

Sea $z \in B(x,\rho)\cap B(x_k,r_k)$, entonces,

$$2r_k < |x-x_k| \leq |x-z| + |z-x_k| \leq \rho + r_k ,$$

luego, $r_k<\rho$ y $|x-x_k| < 2\rho$. Por otra parte, $B(x_k,r_k) \subset B(y_k, cr_k)$, y en consecuencia tenemos,

$$\int_{B(x,\rho)}|w_k(y)|^q dy \leq \int_{B(x_k,r_k)}|w_k(y)|^q dy \leq \int_{B(y_k,cr_k)}|f(y) - P(y_k,y)|^q dy .$$

Luego

$$\rho^{-u}\left[\rho^{-|\alpha|}\int_{B(x,\rho)}|w_k(y)|^q\ dy\right]^{1/q}$$

$$\leq C\rho^{-u}|B(x,\rho)|^{-1/q}\left(\int_{B(y_k,Cr_k)}|f(y)-P(y_k,y)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

$$= C\rho^{-u}|B(x,\rho)|^{-1/q}|B(y_k,cr_k)|^{1/q}\left[|B(y_k,cr_k)|^{-1}\int_{B(y_k,cr_k)}|f(y)-P(y_k,y)|^q\,dy\right]^{1/q}$$

$$\leq C\rho^{-u}\rho^{-|a|/q}r_k^{|a|/q}r_k^{u}N(F,y_k)\leq ct(r_k/\rho)^{u+|a|/q}\leq ct(r_k/(r_k+[x-x_k]))^{u+|a|/q}.$$

La última desigualdad se obtiene de $[x-x_k]+r_k<3\rho$. Tomando el supremo en ρ, queda probado ii).

Para probar iii), en virtud de i) y ii), tenemos

$$\int\left(\sum N(W_k,x)\right)^p dx \leq \sum_k\left\{\int_{B(x_k,2r_k)}N(W_k,x)^p\,dx+\int_{C\,B(x_k,2r_k)}N(W_k,x)^p\,dx\right\}$$

$$\leq C\sum_k\int_{B(x_k,2r_k)}N(F,x)^p\,dx+C\sum_k\int_{B(x_k,2r_k)}t^p(r_k/(r_k+[x-x_k]))^{(u+|a|/q)p}\,dx$$

$$= C\int N(F,x)^p\sum_k\chi_{B(x_k,r_k)}(x)\,dx+C\sum_k\int_{CB(x_k,2r_k)}t^p(r_k/(r_k+[x-x_k]))^{(u+|a|/q)p}\,dx$$

$$= I_1 + I_2$$

Como $\sum_k \chi_{B(x_k, 2r_k)}(x) \leq M \ \chi_\Omega(x)$, resulta

$$I_1 \leq C M \int_\Omega N(F,x)^p \, dx .$$

Para estimar I_2, haciendo el cambio de variable $y = A_{r_k}^{-1}(x-x_k)$ en cada sumando, resulta,

$$I_2 = C \sum_k \int_{CB(x_k, 2r_k)} t^p (r_k/(r_k + [x-x_k]))^{(u+|a|/q)p} \, dx$$

$$= C \sum_k \int_{[y]>2} t^p (r_k/(r_k + r_k [y]))^{(u+|a|/q)p} r_k^{|a|} \, dy$$

$$\leq c \, t^p \sum_k r_k^{|a|} \int (1/(1 + [y]))^{(u+|a|/q)p} \, dy .$$

Como $\sum_k r_k^{|a|} = C \sum_k |B(x_k, r_k)| = C \int \sum_k \chi_{B_k}(x) \, dx \leq CM \, |\Omega|$

Obtenemos,

$$I_2 \leq C t^p |\Omega| \leq C \int_\Omega N(F,x)^p \, dx .$$

En consecuencia,

$$\int \left(\sum_k N(W_k, x) \right)^p dx \leq C \int_\Omega N(F,x)^p \, dx ,$$

lo que demuestra iii) . La parte iv) es consecuencia de iii) y del lema (1.5). En cuanto a la parte v) es una consecuencia inmediata de iii) y iv).

Veamos ahora vi). Sea $x_0 \notin \Omega$ tal que $\sum_k N(W_k, x_0) < \infty$. Como $x_0 \notin B(x_k, 2r_k)$ para todo $k = 1,2, \ldots,$ entonces, sabemos que $w_k(y)$ es el único representante de W_k que satisface $n(w_k, x_0) = N(W_k, x_0)$. Entonces, por el lema (1.5), la serie $\sum_k w_k(y)$ converge en L^q_{loc} a una función w que es un representante de $W = \sum_k W_k$ que satisface $n(w, x_0) = N(W, x_0)$. Por lo tanto, la función $g(x) = f(x) - w(x)$ es un representante de $G = F - W$ y se tiene,

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si} \quad y \in \Omega^c \\ \sum_k \phi_k(y) \, P(y_k, y) & \text{si} \quad y \in \Omega . \end{cases}$$

Observamos que $g(y)$ es infinitamente diferenciable en Ω.

Sea,

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha g(x), & \text{si} \quad x \in \Omega, \ y \\ \\ D_y^\alpha P(x,y)\big|_{y=x}, & \text{si} \quad x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Demostraremos que si $\alpha . a < u$, $\bar{x} \in \Omega^c$ y $x \in R^n$ entonces.

(1.17) $$|b_\alpha(x) - \sum_\beta b_{\alpha+\beta}(\bar{x})(x-\bar{x})^\beta/\beta\,!| \leq C\, t\, [x-\bar{x}]^{u-\alpha\cdot a}$$

En efecto, por el lema (1.2) sabemos que

$$|D_y^\alpha(P(x_1,y)-P(x_2,y))| \leq C(N(F,x_1) + N(F,x_2))([x_1-y] + [x_2-y])^{u-\alpha\cdot a}$$

y en consecuencia, si $x \in \Omega^c$, se tiene

$$|D_y^\alpha(P(x,y) - P(\bar{x},y))| \leq ct\,([x-y] + [\bar{x}-y])^{u-\alpha\cdot a}$$

y haciendo $y = x$, resulta,

$$|b_\alpha(x) - \sum_\beta b_{\alpha+\beta}(\bar{x})(x-\bar{x})^\beta/\beta\,!| \leq ct\,[x-\bar{x}]^{u-\alpha\cdot a}$$

o sea que (1.17) vale para $x \in \Omega^c$.

Consideremos ahora $x \in \Omega$; tenemos

$$D^\alpha g(x) = \sum_k \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi_k(x) \, D_y^\gamma P(y_k, y)\Big|_{y=x}$$

Sea j tal que $x \in \operatorname{sop} \phi_j$ y además $[y_j - x] < [y_k - x]$ para todo k tal que $x \in \operatorname{sop} \phi_k$. Este j existe puesto que el número de índices k tales que $x \in \operatorname{sop} \phi_k$ es menor o igual que M. Se tiene entonces que $[y_j - x] < [y_k - x] < c r_k$ si $x \in \operatorname{sop} \phi_k$. Luego,

$$D^\alpha g(x) - D_y^\alpha P(\bar{x}, y)\Big|_{y=x} = \sum_k \Bigg[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta,\gamma} D^\beta \phi_k(x) \big[D_y^\gamma P(y_k, y)\Big|_{y=x}$$

$$- D_y^\gamma P(y_j, y)\Big|_{y=x} \Bigg] + \Bigg[D_y^\alpha P(y_j, y)\Big|_{y=x} - D_y^\alpha P(\bar{x}, y)\Big|_{y=x} \Bigg].$$

Por lo tanto,

$$|D^{\alpha}g(x) - D_y^{\alpha}P(\bar{x},y)|_{y=x}| \leq \sum_{\substack{k \\ x \in sop\, \phi_k}} \sum_{\gamma+\beta=\alpha} c\ t\ r_k^{-\beta\cdot a}([y_k - x] + [y_j - x])^{u-\gamma\cdot a}$$

$$+\ c\ t\ ([x-y_j]+[x-\bar{x}])^{u-\alpha\cdot a} \leq c\ t\ r_k^{u-\alpha\cdot a} + c\ t\ [x-\bar{x}]^{u-\alpha\cdot a} \leq c\ t\ [x-\bar{x}]^{u-\alpha\cdot a}.$$

En consecuencia (1.17) vale también para $x \in \Omega$.

Veamos ahora, que si $x \in \Omega$, entonces,

$$(1.18)\qquad |b_o(\bar{x}) - \sum_{\alpha\cdot a<u} b_{\alpha}(x)(\bar{x}-x)^{\alpha}/_{\alpha}!| \leq c\ t\ [\bar{x}-x]^u ,$$

para todo $\bar{x} \in R^n$. Para esto necesitamos la siguiente estimación:

Para todo $x \in \Omega$ y $\alpha .a > u$

$$(1.19)\qquad |D^{\alpha}g(x)| \leq c\ t\ d(x,\Omega^c)^{u-\alpha\cdot a}.$$

En efecto, si $x' \in \Omega^c$ y $[x-x'] = d(x,\Omega^c)$, se tiene

$$D^{\alpha} g(x) = \sum_{k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} \phi_k(x) \, D_y^{\gamma} P(y_k, y) \Big|_{y=x}$$

$$= \sum_{k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} \phi_k(x) \, D_y^{\gamma} P(y_k, y) \Big|_{y=x} - D_y^{\alpha} P(x', y) \Big|_{y=x}$$

$$= \sum_{k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} \phi_k(x) \, [D_y^{\gamma} (P(y_k, y) - P(x', y)) \Big|_{y=x}] .$$

Por lo tanto,

$$|D^{\alpha} g(x)| \leqslant \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \gamma\cdot a < u}} \sum_{\substack{k \\ x \in sop.\phi_k}} c \, t \, r_k^{-\beta\cdot a} ([y_k - x] + [x' - x])^{u-\gamma\cdot a}$$

Como $[x'-x] = d(x,\Omega^c) \leqslant c\, r_k$ y $[y_k - x] \leqslant c\, r_k$ si $x \in sop\, \phi_k$, entonces

$$|D^{\alpha} g(x)| \leqslant c\, t \sum_{\substack{k \\ x \in sop\, \phi_k}} r_k^{u-\alpha\cdot a} \leqslant c\, t\, d(x,\Omega^c)^{u-\alpha\cdot a} .$$

Demostraremos ahora la desigualdad (1.18), considerando los casos $[x-\bar{x}] \leqslant \frac{1}{2} d(x,\Omega^c)$ y $[x-\bar{x}] > \frac{1}{2} d(x,\Omega^c)$. En el primer caso, por la fórmula de Taylor, puesto que $b_\alpha(x) = D^\alpha g(x)$ para todo $x \in \Omega$, se tiene que,

$$b_0(\bar{x}) - \sum_{\alpha.s<u} b_\alpha(x)(\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha! = \sum_{\substack{|\alpha|< u \\ \alpha.s>u}} b_\alpha(x)(\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha!$$

$$+ \sum_{u<|\alpha|<u+1} b_\alpha(x+s(\bar{x}-x))\,(\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha!$$

con s entre 0 y 1. Obervamos que $d(x+s(\bar{x}-x),\Omega^c) \geqslant \frac{1}{2} d(x,\Omega^c)$, pues en caso contrario, existiría $z \in \Omega^c$ tal que

$$d(x+s(\bar{x}-x),\ z) < \frac{1}{2} d(x,\Omega^c) \ ,$$

por lo tanto

$$d(x,z) \leqslant d(x,\ x+s(\bar{x}-x)) + d(x+s(\bar{x}-x),z) < [\ s(\bar{x}-x)\ ] + \frac{1}{2} d(x,\Omega^c) .$$

Como también,

$$[s(\bar{x}-x)] \leqslant [\bar{x}-x] \leqslant \frac{1}{2}\, d(x,\Omega^c),$$

entonces $d(x,z) < d(x,\Omega^c)$, lo cual es una contradicción.

Utilizando la desigualdad (1.19) se tiene que para $\alpha\,.a > u$

$$|b_\alpha(x+s(\bar{x}-x))| \leqslant c\ t\ d(x+s(\bar{x}-x),\Omega^c)^{u-\alpha.a} \leqslant c\ t\ d(x,\Omega^c)^{u-\alpha.a}$$

y

$$|b_\alpha(x)| \leqslant c\ t\ d(x,\Omega^c)^{u-\alpha.a}.$$

Luego,

$$|b_0(\bar{x}) - \sum_{\alpha.a<u} b_\alpha(x)(\bar{x}-x)^\alpha/\alpha!\,|$$

$$\leqslant c\ t \sum_{\substack{\alpha.a>u \\ |\alpha|<u+1}} d(x,\Omega^c)^{u-\alpha.a}\,[\bar{x}-x]^{\alpha.a} \leqslant c\ t\ [\bar{x}-x]^u$$

Veamos ahora el caso $[x-\bar{x}] > \frac{1}{2}\, d(x,\Omega^c)$; sea $z \in \Omega^c$,

tal que $[z-x] = d(x,\Omega^c)$, entonces

$$b_0(\bar{x}) - \sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(x)(\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha!$$

$$= b_0(\bar{x}) - \sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(z)(\bar{x}-z)^\alpha/_\alpha! + \sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(z)(\bar{x}-z)^\alpha/_\alpha!$$

$$+ \sum_{\alpha\cdot a<u} D_y^\alpha P(z,y)\Big|_{y=x} (\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha!$$

$$- \sum_{\alpha\cdot a<u} D_y^\alpha P(z,y)\Big|_{y=x} (\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha! - \sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(x)(\bar{x}-x)^\alpha/_\alpha! \;.$$

por (1.17) resulta,

$$\Big|b_0(\bar{x}) - \sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(z)(\bar{x}-z)^\alpha/_\alpha!\Big| \leq c\ t\ [\bar{x}-z]^u$$

$$\leq c\ t\,([z-x] + [x-\bar{x}])^u \leq c\ t\ [x-\bar{x}]^u.$$

Por otra parte, utilizando nuevamente la desigualdad (1.17) obtenemos,

$$\Big| \sum_{\alpha\cdot a<u} [\, b_\alpha(x) - D_y^\alpha P(z,y)\big|_{y=x}]\, (\bar{x}-x)^\alpha/\alpha\,! \Big|$$

$$\leqslant \quad c\; t \sum_{\alpha\cdot a<u} [x-z]^{u-\alpha\cdot a}\, [\bar{x}-x]^{\alpha\cdot a} \leqslant c\; t\, [\bar{x}-x]^u \,.$$

Por último, observamos que

$$\sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(z)\,(\bar{x}-z)^\alpha/\alpha! - \sum_{\alpha\cdot a<u} D_y^\alpha P(z,y)\big|_{y=x} (\bar{x}-x)^\alpha/\alpha\,! \;=\; 0,$$

puesto que

$$\sum_{\alpha\cdot a<u} b_\alpha(z)\,(\bar{x}-z)^\alpha/\alpha\,! \;=\; \sum_{\alpha\cdot a<u} D_y^\alpha P(z,y)\big|_{y=z} (\bar{x}-z)^\alpha/\alpha!$$

$$= P(z,\bar{x}) \;=\; \sum_{\alpha\cdot a<u} D_y^\alpha P(z,y)\big|_{y=x} (\bar{x}-x)^\alpha/\alpha!\,.$$

Luego, $\left| b_0(\bar{x}) - \sum_{\alpha \cdot a<u} b_\alpha(x)(\bar{x}-x)^\alpha/\alpha! \right| \leq c\, t[\bar{x}-x]^u$.

Sabemos que $b_0(x) = g(x)$ para $x \in \Omega$. Si x pertenece a Ω^c, tenemos $b_0(x) = P(x,x)$ y $f(x) = g(x)$; como además, ver [4], $P(x,x) = f(x)$ en casi todo punto de Ω^c, resulta $b_0(x) = g(x)$ en casi todo punto de Ω^c Por lo tanto, en virtud de (1.17) y (1.18), resulta,

$$N(G,x) \leq c\, t$$

(1.20) TEOREMA. Sea $F \in E^q_u$ y sea $|a|(u+|a|/q)^{-1} < p \leq 1$.

Entonces $F \in \mathcal{H}^p$ si y sólo si, existe una sucesión numérica $\{\mu_j\}$ tal que $\sum_j |\mu_j|^p < \infty$ y una sucesión $\{A_j\}$ de p-átomos en E^q_u tales que $F = \sum_j \mu_j A_j$ en E^q_u. Además, la serie converge en $\mathcal{H}^p$ y existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que,

$$C_1 \|F\|^p_{\mathcal{H}^p} \leq \inf \sum_j |\mu_j|^p \leq C_2 \|F\|^p_{\mathcal{H}^p},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles descomposiciones de F. En consecuencia, inf $(\sum_j |\mu_j|^p)^{1/p}$, define una norma equivalente a $\| \ \|_{\mathcal{H}^p}$.

Para la demostración del teorema (1.20) necesitamos el siguiente lema.

(1.21) LEMA. Sea $H \in E_u^q$ tal que $N(H,x) \leq 1$ y $\int N(H,x)^r \, dx < \infty$ para algún r tal que $|a|(u + |a|/q)^{-1} < r < p \leq 1$.

Entonces exiten, una sucesión $\{A_j\}$ de p-átomos en E_u^q y una sucesión numérica $\{\lambda_j\}$, tales que $H = \sum_j \lambda_j A_j$ en $\mathcal{H}^p$. Además,

$$\sum_j |\lambda_j|^p \leq C \int N(H,x)^r \, dx \quad .$$

Demostración. Sea s un número extre 0 y 1 que luego determinaremos. Definimos inductivamente la siguiente sucesión $\{H_k\}$ en E_u^q, como

$$H_0 = H$$

$$H_k + W_k = H_{k-1}, \quad k \in N$$

donde H_k es la clase G en la descomposición de H_{k-1} según el lema (1.15) para $t = s^k$. El lema (1.15) se puede aplicar reiteradamente pues, por v) de este lema, $N(H_{k-1},x) \in L^r$ para todo $k \in N$.

Sea $\Omega_k = \{x : N(H_{k-1},x) > s^k\}$. Denotamos con $B_{k,h} = B(x_{k,h}, r_{k,h})$ a la familia de bolas asociadas a Ω_k según el lema (1.14). Siendo $W_k = \sum_h W_{k,h}$ la expresión de W_k según iv) del lema (1.15), probaremos que para todo $k, h \in N$ vale la estimación

(1.22) $$N(W_{k,h},x) \leq C\ s^{k-1}.$$

En efecto, como consecuencia de vi) del lema (1.15), tenemos

$$N(H_k,x) \leq C\ s^k.$$

De las partes i), ii) del lema (1.15) se deduce,

$$N(W_{k,h},x) \leqslant C\, N(H_{k-1},x) \leqslant C\, s^{k-1} \qquad \text{si} \quad x \in B(x_{k,h},2r_{k,h}) \text{ , y}$$

$$N(W_{k,h},x) \leqslant C\, s^{k}(r_{k,h}/(r_{k,h}+[x-x_{k,h}]))^{u+|a|/q} < C\, s^{k-1}$$

si $x \notin B(x_{k,h},2r_{k,h})$, lo que demuestra (1.22).

Probaremos ahora que se puede elegir s de tal manera que:

$$(1.23) \qquad \sum_{k} s^{(k-1)p}|\Omega_k| \leqslant C \int N(H,x)^{r}\,dx \ .$$

Si $x \notin \Omega_k$, entonces $x \notin B(x_{k,h},2r_{k,h})$ para todo h, por lo tanto, usando ii) y iv) del lema (1.15) se tiene,

$$N(H_k,x) \leqslant N(H_{k-1},x) + N(W_k,x) \leqslant N(H_{k-1},x) + \sum_{h} N(W_{k,h},x)$$

$$\leqslant N(H_{k-1},x) + C\, s^{k} \sum_{h} (r_{k,h}/(r_{k,h}+[x-x_{k,h}]))^{u+|a|/q} .$$

Por otra parte, si $x \in \Omega_k$, existe h tal que $[\, x-x_{k,h}] < r_{k,h}$

y en consecuencia,

$$(r_{k,h}/(r_{k,h}+[x-x_k]))>(1/2)^{u+|a|/q}$$

luego,

$$N(H_k,x)\leqslant C\,s^k \leqslant C\,s^k(r_{k,h}/(r_{k,h}+[x-x_{k,h}]))^{u+|a|/q} ,$$

por lo tanto, para todo x, vale la desigualdad

$$N(H_k,x)\leqslant N(H_{k-1},x)+C\,s^k\sum_h(r_{k,h}/(r_{k,h}+[x-x_{k,h}]))^{u+|a|/q} .$$

Aplicando k veces esta desigualdad, se obtiene

$$N(H_k,x)\leqslant N(H,x)+C\sum_{i=1}^{k}s^i\sum_j(r_{i,j}/(r_{i,j}+[x-x_{i,j}]))^{u+|a|/q} .$$

En virtud de la desigualdad de Chebychev, la estimación obtenida para $N(H_k,x)$ y el cambio de variables $y=A^{-1}_{r_{i,j}}(x-x_{i,j})$ resulta,

$$s^{kr} \; |\Omega_k| \leq \int N(H_{k-1}, x)^r \, dx$$

$$\leq \int N(H,x)^r \, dx + C \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir} \sum_j \int (r_{i,j} / (r_{i,j} + |x - x_{i,j}|))^{r(u+|a|/q)} \, dx$$

$$= \int N(H,x)^r \, dx + C \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir} \sum_j \int (1/(1+|y|))^{r(u+|a|/q)} \, dy \; r_{i,j}^{|a|}$$

$$\leq \int N(H,x)^r \, dx + C \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir} \; |B_{i,j}|$$

$$\leq \int N(H,x)^r \, dx + C \sum_{i=1}^{k-1} s^{ir} \, |\Omega_i| \; .$$

Llamando $b_0 = \int N(H,x)^r \, dx$ y $b_i = s^{ir} |\Omega_i|$, $i \in N$, la desigualdad recién obtenida puede escribirse como

$$b_k \leq C \sum_{i=0}^{k-1} b_i \; .$$

Es fácil verificar que esta relación entre los términos de la sucesión b_k , implica $b_k \leq b_0 \; \alpha^k$ para todo k con $\alpha = C + 1$.

En consecuencia hemos probado

$$|\Omega_k| \leqslant s^{-kr} \alpha^k \int N(H,x)^r \, dx \ ,$$

para todo $k \in N$. Luego,

$$\sum_k s^{(k-1)p} |\Omega_k| \leqslant \sum_k s^{(k-1)p-kr} \alpha^k \int N(H,x)^r \, dx$$

$$= s^{-p} \int N(H,x)^r dx \sum_k (s^{p-r} \alpha)^k$$

Puesto que $p > r$, puede elegirse s suficientemente pequeño como para que $s^{p-r} \alpha < 1$. Esta elecci6n de s hace conver gente a la serie $\sum_k (s^{p-r} \alpha)^k$, quedando probado (1.22).

Demostraremos ahora que la serie

$$(1.24) \qquad H = \sum_{k,h} W_{k,h}$$

converge absolutamente en $\mathcal{H}^p$. En efecto, por iv) del lema

(1.15) tenemos

$$H = H_0 = H_k + \sum_{j=1}^{k} W_j = H_k + \sum_{j=1}^{k} \sum_{h} W_{j,h} ,$$

donde la convergencia se entiende en el espacio E_u^q .
Además, por el lema (1.3)

$$\| H_k \|_{q,B} \leq C \quad N(H_k ,x) \leq C\, s^k$$

y por lo tanto H_k converge a 0 en E_u^q cuando k tiende a ∞ . Luego,

$$H = \sum_{j} \left(\sum_{h} W_{j,h} \right)$$

Utilizando iii) del lema (1.15) y (1.23), se tiene,

$$\left(\sum_{j,h} \| W_{j,h} \|_{\mathcal{H}^p} \right)^p \leq \sum_{j,h} \| W_{j,h} \|_{\mathcal{H}^p}^p = \sum_{j,h} \int N(W_{j,h} ,x)^p \, dx$$

$$\leq C \sum_k \int_{\Omega_k} N(H_{k-1},x)^p dx \leq C \sum_k s^{(k-1)p} |\Omega_k| \leq C \int N(H,x)^r dx ,$$

lo que demuestra que $\sum_{j,h} W_{j,h}$ converge absolutamente en $\mathcal{H}^p$ y como $\sum_{j,h} W_{j,h} = H$ en E_u^q, en virtud del corolario (1.4) la serie $\sum_{j,h} W_{j,h}$ converge a H en $\mathcal{H}^p$.

Definamos ahora, $\lambda_{i,j} = C s^{i-1} |B_{i,j}|^{1/p}$ para todo i,j, donde C es la constante de (1.22) y sea $A_{i,j} = \lambda_{i,j}^{-1} W_{i,j}$. Sea $w_{i,j}$ el representante asociado a $W_{i,j}$ en el lema (1.15) y definamos $a_{i,j}(x) = \lambda_{i,j}^{-1} W_{i,j}(x)$. Entonces $a_{i,j}(x)$ es un representante de $A_{i,j}$ y su soporte está contenido en la bola $B_{i,j}$. Además, por la desigualdad (1.22) se tiene,

$$N(A_{i,j},x) = \lambda_{i,j}^{-1} N(W_{i,j},x) \leq (C s^{i-1})^{-1} |B_{i,j}|^{-1/p} C s^{i-1} = |B_{i,j}|^{-1/p}$$

Por lo tanto, $A_{i,j}$ es un p-átomo en E_u^q y se verifica $H = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} A_{i,j}$. Finalmente, por (1.23) y iii) del lema (1.14) resulta,

$$\sum_{i,j} |\lambda_{i,j}|^{r} = C^{p} \sum_{i,j} s^{(i-1)p} |B_{i,j}|$$

$$\leq C \sum_{i} s^{(i-1)p} |\Omega_{i}| \leq C \int N(H,x)^{r}\, dx ,$$

como queríamos demostrar.

Demostración del teorema (1.20).

Si $\{A_i\}$ es una sucesión de p-átomos en E_u^q y $\{\mu_i\}$ es una sucesión numérica tal que $\sum_i |\mu_i|^p < \infty$, entonces por los lemas (1.12) y (1.13) sabemos que la serie $\sum \mu_i \cdot A_i$ converge absolutamente en $\mathcal{H}^p$. Además, si denotamos con F a la suma de la serie, resulta

$$\int N(F,x)^{p}\, dx \leq c \sum_{i} |\mu_i|^{p} .$$

Sea ahora $F \in \mathcal{H}^p$. Para cada k entero, sea

$$F = G_k + W_k ,$$

la descomposición de F correspondiente a $t = 2^k$ según el lema (1.15) y sea $\Omega_k = \{x : N(F,x) > 2^k\}$.

Definimos

$$F_k = G_{k+1} - G_k = W_k - W_{k+1} , \quad k \in Z .$$

Probaremos que la serie $\sum F_k$ converge a F en $\mathcal{H}^p$. En efecto, por el lema (1.15), se tiene que

$$N(G_k,x) \leqslant C\, 2^k , \quad N(G_{k+1},x) \leqslant C\, 2^{k+1} = C'2^k ,$$

entonces

(1.25) $\quad N(F_k,x) \leqslant C\, 2^k$

Sea $W_k = \sum_h W_{k,h}$ la expresión de W_k según el lema (1.15).
Observemos que $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$; por lo tanto, aplicando el lema (1.15),

si $x \notin \Omega_k$, entonces,

$$(1.26)\quad N(F_k,x) \leq N(W_k,x) + N(W_{k+1},x) \leq \sum_h N(W_{k,h},x) + \sum_h N(W_{k+1,h},x)$$

$$\leq C\, 2^k \left\{ \sum_h (r_{k,h}/(r_{k,h} + [x-x_{k,h}]))^{u+|a|/q} \right.$$

$$\left. + \sum_h (r_{k+1,h}/(r_{k+1,h} + [x-x_{k+1,h}]))^{u+|a|/q} \right\}.$$

Como r satisface $|a|(u + |a|/q)^{-1} < r \leq 1$, de las desigualdades (1.25) y (1.26) resulta,

$$\int N(F_k,x)^r dx = \int_{\Omega_k} N(F_k,x)^r dx + \int_{\Omega_k^c} N(F_k,x)^r dx$$

$$\leq C\, 2^{kr} |\Omega_k| + C\, 2^{kr} (I_k + I_{k+1}),$$

donde, $I_j = \int_{\Omega_j^c} \sum_h (r_{j,h}/(r_{j,h} + [x-x_{j,h}]))^{(u+|a|/q)r}$.

Haciendo el cambio de variable $y = A_{r_{j,h}}^{-1}(x-x_{j,h})$, y recordando que $(u + |a|/q)r > |a|$ y $\sum_h r_{j,h}^{|a|} \leq C\ |\Omega_j|$,

se obtiene,

$$I_j \leq \left(\sum_h r_{j,h}^{|a|} \right) \int (1/(1 + [y]))^{(u+|a|/q)r} dy \leq C\ |\Omega_j|.$$

Luego,

$$(1.27) \qquad \int N(F_k, x)^r\ dx \leq C\ 2^{kr}\ |\Omega_k|.$$

Por otra parte,

$$p \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda^{p-1}\ |\{x : N(F,x) > \lambda\}|\ d\lambda \geq |\Omega_k| (2^{kp}(1-2^{-p})) \geq C\ 2^{kp} |\Omega_k|$$

y por lo tanto, haciendo $r = p$ en (1.27) se tiene,

$$\sum_h \|F_k\|^p_{\mathcal{H}^p} = \sum_k \int N(F_k, x)^p\, dx \leq C \sum_k 2^{kp} |\Omega_k|$$

$$\leq C\ p \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda^{p-1}\ |\{x : N(F,x) > \lambda\}|\ d\lambda$$

$$= C\,p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \,|\{x : N(F,x) > \lambda\}|\, d\lambda = C \int N(F,x)^p\, dx < \infty .$$

En consecuencia, $\sum_k F_k$ converge en $\mathcal{H}^p$

Por otro lado, de la definición de F_k se deduce,

$$\sum_k F_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} (G_{k+1} - G_k) = \lim_{K\to\infty} (G_{K+1} - G_{-K})$$

$$= \lim_{K\to\infty} (F - W_{K+1} - G_{-K}) \text{ en } E_u^q .$$

Veamos ahora que $\lim_{k\to\infty} W_k = \lim_{k\to\infty} G_{-k} = 0$ en E_u^q .

Dada la bola B cualquiera, y para $x \in B(0,1)$ se tiene, por el lema (1.3) y iv) del lema (1.15),

$$\| W_k \|^p_{q,B} \leq C\, N(W_k, x)^p \leq C \sum_h N(W_{k,h}, x)^p ,$$

en consecuencia, usando iii) del lema (1.15)

$$\| W_k \|^p_{q,B} \leq C\, |B(0,1)|^{-1} \int_{B(0,1)} \sum_h N(W_{k,h}, x)^p\, dx \leq C' \int_{\Omega_k} N(F,x)^p\, dx ,$$

como el último término de esta cadena de desigualdades tiende a cero cuando k tiende a infinito, queda probado que W_k tiende a 0 en E_u^q. También por el lema (1.3), tenemos que

$$\| G_{-k} \|_{q,B} \leq C\, N(G_{-k}, x) \leq C\, 2^{-k},$$

de donde resulta la convergencia a 0 de G_{-k} cuando k tiende a infinito. Entonces, $F = \sum_k F_k$ en E_u^q y como la serie $\sum_k F_k$ converge en $\mathcal{H}^p$ resulta $F = \sum_k F_k$ en $\mathcal{H}^p$.

Sea ahora r tal que $|a|(u + |a|/q)^{-1} < r < p \leq 1$, y consideremos el elemento $F_k/C_0 2^k$ en E_u^q, donde C_0 es la constante que aparece en (1.25). Por (1.25) y (1.27), $F_k/C_0 \cdot 2^k$ satisface las condiciones del lema (1.21); en efecto,

$$N(F_k/C_0 2^k, x) \leq 1 \qquad y,$$

$$\int N(F_k/ C_0 2^k, x)^r\, dx \leq C_0^{-r}\, 2^{-kr}\, C\, 2^{kr}\, |\Omega_k| = C'\, |\Omega_k| < \infty.$$

Entonces, para cada k, existe una sucesión $\{A_{k,h}\}_{h=1}^{\infty}$ de p-átomos en E_u^q y una sucesión numérica $\{\lambda_{k,h}\}_{h=1}^{\infty}$ tales que,

$$F_k/C_0 2^k = \sum_h \lambda_{k,h} A_{k,h} \quad \text{en} \quad \mathcal{H}^p \quad , \quad y$$

$$(1.28) \qquad \sum_h |\lambda_{k,h}|^p \leq C \int N(F_k/C_0 2^k, x)^r dx \leq C' |\Omega_k| .$$

Definimos ahora $\mu_{k,h} = C_0 2^k \lambda_{k,h}$; entonces

$$F = \sum_k F_k = \sum_k \Big(\sum_h \mu_{k,h} A_{k,h} \Big) \quad \text{en} \quad \mathcal{H}^p .$$

Además, por (1.28),

$$\sum_{k,h} |\mu_{k,h}|^p = C_0^p \sum_k 2^{kp} \Big(\sum_h |\lambda_{k,h}|^p \Big) \leq C \sum_k 2^{kp} |\Omega_k|$$

$$\leq C \int N(F,x)^p \, dx < \infty .$$

Por lo tanto, aplicando los lemas (1.12) y (1.13) resulta que la serie $\sum_{k,h} \mu_{k,h} A_{k,h}$ converge absolutamente en $\mathcal{H}^p$, y entonces $F = \sum_{k,h} \mu_{k,h} A_{k,h}$ en $\mathcal{H}^p$ y además $\int N(F,x)^p dx \leq C \sum_{k,h} |\mu_{k,h}|^p$, con lo que conluye la demostración del teorema.

CAPITULO II

Como es usual, llamamos S al espacio de funciones infinitamente diferenciables cuyas derivadas son rápidamente decrecientes en el infinito.

Dados j, h enteros no negativos y $\phi \in S$, definimos,

$$p_{j,h}(\phi) = \max_{|\alpha| \leq h} \sup_{x \in R^n} |D^\alpha \phi(x)| (1 + [x])^k$$

La familia de seminormas $p_{j,h}$ define la topología que usualmente se considera sobre S

(2.1) LEMA. Sean $g \in L^q_{loc}$, $\phi \in S$ y $j > u + |a|$. Entonces,

$$\int |g(y)| \; |\phi(y)| \, dy \leq C \, p_{j,0}(\phi) \, n(g,0) .$$

Demostración. Como $|\phi(y)| \leq p_{j,0}(\phi)(1 + [y])^{-j}$, resulta

$$\int |g(y)| \; |\phi(y)| \, dy \leq p_{j,0}(\phi) \int |g(y)| (1 + [y])^{-j} \, dy .$$

Tenemos que

$$\int_{B(0,1)} |g(y)|\,(1+[y])^{-j}dy \leq \int_{B(0,1)} |g(y)|\,dy \leq C\, n(g,0) \;.$$

Además, si $2^{i} < [y]$ se tiene $(1+[y])^{-j} \leq [y]^{-j} \leq 2^{-ij}$, luego,

$$\int_{B(0,2^{i+1})\setminus B(0,2^{i})} |g(y)|\,(1+[y])^{-j}\,dy \leq 2^{-ij} \int_{B(0,2^{i+1})} |g(y)|\,dy$$

$$\leq 2^{-ij}\,|B(0,2^{i+1})| \quad |B(0,2^{i+1})|^{-1}\left(\int_{B(0,2^{i+1})} |g(y)|^{q}\,dy\right)^{1/q}$$

$$\leq C\,2^{-ij}\,2^{(i+1)|a|}\,2^{(i+1)u}\,n(g,0) = C\,2^{(u-j+|a|)i}\,n(g,0) \;.$$

Como $u - j + |a| < 0$, sumando todas las estimaciones se obtiene la desigualdad que queríamos probar

(2.2) COROLARIO. Sea $g \in L^{q}_{\ell oc}$ y sea x_0 un punto tal que

$n(g,x_0) < \infty$. Entonces g define una distribución temperada que satisface:

$$\left| \int g(y)\ \phi(y)\ dy \right| \leq C\ p_{j,0}(\phi)\ n(g,x_0)\ (1+[x_0])^j \quad ,$$

para $j > u + |a|$ y C una constante que depende de j

Demostración. Por el lema (2.1), para $j > u + |a|$ se tiene,

$$(2.3) \quad \int |g(y)|\ |\phi(y)|\ dy = \int |g(x_0+y)|\ |\phi(x_0+y)|\ dy$$

$$\leq C\ p_{j,0}(\phi(x_0+y))\ n(g(x_0+y),0).$$

Como,

$$p_{j,0}(\phi(x_0+y)) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\phi(x_0+y)|(1+[y])^j$$

$$\leq C \sup_{y \in R^n} |\phi(x_0+y)| (1+[x_0+y])^j (1+[x_0])^j$$

$$= C (1+[x_0])^j \; p_{j,0}(\phi),$$

y por otra parte,

$$n(g(x_0+y),0) = \sup_{\rho>0} \rho^{-u}\left(|B(0,\rho)|^{-1} \int_{[y]<\rho} |g(x_0+y)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$= n(g,x_0) \;,$$

sustituyendo en la desigualdad (2.3), queda probado el corolario .

En todo lo que sigue, supondremos que $a = (a_1, \ldots, a_n)$ tiene componentes racionales. Sea k el mínimo entero positivo tal que k/a_i es un entero par para todo i .

Consideremos el operador diferencial L asociado al polinomio $P(\xi) = \xi_1^{k/a_1} + \ldots + \xi_n^{k/a_n}$, o sea

$L\,f = (P(\xi)\,\hat{f}\,)^{\vee}$, donde $\hat{f}$, $\check{f}$ indican la transformada y la antitransformada de Fourier de f respectivamente.

Observemos que $P(\xi)$ es un polinomio casi - homogéneo de grado k, o sea $P(A_\lambda\,\xi) = \lambda^k\, P(\xi)\ \forall\, \lambda>0$.

Estudiaremos en lo que sigue, algunas propiedades de una solución fundamental del operador L^m.

(2.4) DEFINICION. Se dice que la función f es casi - homogénea de grado ℓ si para todo $\lambda > 0$ y todo $x \neq 0$, se verifica $f(A_\lambda\, x) = \lambda^\ell f(x)$.

(2.5) DEFINICION. Se dice que una distribución T es casi-homogénea de grado ℓ si para todo $\phi \in \mathcal{D}$ y todo $\lambda > 0$, se tiene que,

$$< T, \phi_\lambda > = \lambda^\ell < T, \phi > \quad ,$$

donde $\phi_\lambda\,(x) = \lambda^{-|a|}\,\phi\,(A_\lambda^{-1} x)$.

(2.6) LEMA. Sea $T \in \mathcal{S}'$ una distribución casi-homogénea de grado ℓ , entonces $\hat{T}$ es una distribución casi-homogénea de grado $-|a| - \ell$.

Demostración. Si $\psi^{\lambda}(x) = \hat{\phi}(A_{\lambda} x)$, entonces $\hat{\phi}_{\lambda} = \psi^{\lambda}$.

Luego,

$$< \hat{T}, \phi_{\lambda} > = < T, \hat{\phi}_{\lambda} > = < T, \psi^{\lambda} > = \lambda^{-\ell} \lambda^{\ell} < T, \psi^{\lambda} >$$

$$= \lambda^{-\ell} < T, (\psi^{\lambda})_{\lambda} > = \lambda^{-\ell} < T, \lambda^{-|a|} \phi > = \lambda^{-|a|-\ell} < \hat{T}, \phi > .$$

(2.7) LEMA. Si T es una distribución casi-homogénea de grado ℓ y existe una función g continua en $R^n \setminus \{0\}$, tal que verifica $< T, \phi > = \int g(x)\, \phi(x)\, dx$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(R^n \setminus \{0\})$. entonces $g(A_{\lambda} x) = \lambda^{\ell} g(x)$, para todo $x \neq 0$ y todo $\lambda > 0$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(R^n \setminus \{0\})$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi(x) = 0$ si $[x] < \varepsilon$, por lo tanto $\phi_{\lambda}(x) = \lambda^{-|a|} \phi(A_{\lambda}^{-1} x) = 0$ si $[A_{\lambda}^{-1} x] < \varepsilon$, luego $\phi_{\lambda}(x) = 0$ si $[x] < \lambda \varepsilon$. Por lo tanto $\phi_{\lambda} \in \mathcal{D}(R^n \setminus \{0\})$.

Fijando λ y haciendo el cambio de variables $y = A_{\lambda} x$, resulta,

$$\int g(A_\lambda x)\phi(x)\,dx = \int g(y)\phi(A_\lambda^{-1} y)\,\lambda^{-|a|}dy = \int g(y)\phi_\lambda(y)\,dy$$

$$= \langle T , \phi_\lambda \rangle = \lambda^{\ell} \langle T , \phi \rangle = \lambda^{\ell} \int g(x)\phi(x)\,dx ,$$

por lo tanto, $g(A_\lambda x) = \lambda^{\ell} g(x)$, como queríamos probar.

(2.8) LEMA. Sea $g \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ una función casi-homogénea de grado ℓ entonces $D^\alpha g$ es una función casi-homogénea de grado $\ell - \alpha.a$ y además, $|D^\alpha g(x)| \leq C_\alpha [x]^{\ell-\alpha.a}$

Demostración. Derivando ambos miembros la igualdad $g(A_\lambda x) = \lambda^{\ell} g(x)$ se obtiene

$$D^\alpha g\,(A_\lambda x)\,\lambda^{\alpha.a} = \lambda^{\ell} D^\alpha g(x)$$

Además, si $x \neq 0$

$$|D^{\alpha}g(x)| = |D^{\alpha}g(A_{[x]}\, A^{-1}_{[x]}\, x)|$$

$$= [x]^{\ell-\alpha\cdot a}\, |D^{\alpha}g(A^{-1}_{[x]}\, x)| \leq \|D^{\alpha}g\|_{L^{\infty}(S^{n-1})}\, [x]^{\ell-\alpha\cdot a} .$$

(2.9) TEOREMA. Si $k\,m < |a|$, $(P(\xi))^{-m}$ define una distribución temperada y $((P(\xi))^{-m})^{\check{}}$ es una solución fundamental de L^m que satisface:

i) Coincide con una función $h \in L^1_{\ell oc} \cap C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$

ii) h es casi-homogénea de grado $k\,m - |a|$

Demostración. Como $P(\xi)$ es una función casi-homogénea de grado k y se anula sólo en el origen, $(P(\xi))^{-m}$ es una función casi-homogénea de grado $-k\,m$ e infinitamente diferenciable fuera del origen. Luego, como $km < |a|$, tenemos que $(P(\xi))^{-m} \in L^1_{\ell oc}$. Además, como $(P(\xi))^{-m}$ tiende a cero en el infinito, define una distribución temperada.

Para demostrar i), veamos primero, que existe una función $h \in C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$ que coincide con $((P(\xi))^{-m})^{\vee}$ fuera del origen. Sea $\psi \in \mathcal{D}$ tal que $\psi(\xi) = 1$ en $\{|\xi| \leq 1\}$, $\psi(\xi) = 0$ en $\{|\xi| \geq 2\}$, entonces

$$(P(\xi)^{-m})^{\vee} = (\psi(\xi)(P(\xi)^{-m})^{\vee} + ((1-\psi(\xi))(P(\xi)^{-m})^{\vee} = h_1 + h_2$$

donde h_1 es una función analítica puesto que $\psi(\xi)(P(\xi))^{-m}$ es una distribución de soporte compacto.

Para ver que h_2 coincide fuera del origen con una función C^{∞}, basta ver que todas sus derivadas distribucionales, coinciden fuera del origen con funciones continuas.

Sean α y β multi-índices arbitrariamente elegidos, entonces,

$$x^{\alpha} D^{\beta} h_2 = C_{\alpha\beta} (D^{\alpha}[(1-\psi(\xi))\ \xi^{\beta}(P(\xi))^{-m}])^{\vee} .$$

Como $\xi^{\beta}(P(\xi))^{-m}$ es una función casi-homogénea de grado $\beta .a-km$, aplicando el lema (2.8) resulta,

$$|D^{\alpha}[(1-\Psi(\xi))\,\xi^{\beta}(P(\xi))^{-m}]| = |D^{\alpha}(\xi^{\beta}(P(\xi))^{-m})| < C_{\alpha,\beta}[\xi]^{-km+\beta\cdot a-\alpha\cdot a},$$

para $|\xi| > 2$.

Si se elige α tal que $-km+\beta . a-\alpha . a < -|a|$, se tiene que $D^{\alpha}[(1-\Psi(\xi))\,\xi^{\beta}(P(\xi))^{-m}]$ pertence a $L^{1}(R^{n})$ y por lo tanto, $x^{\alpha} D^{\beta} h_{2}$ es una función continua y acotada.

Eligiendo α convenientemente, resulta de lo ya dicho, que $x_{j}^{2\ell} D^{\beta} h_{2}$ son funciones continuas y acotadas para todo j, si ℓ es suficientemente grande. Por lo tanto, sumando sobre j, se obtiene que también $\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{2\ell}\right) D^{\beta} h_{2} = g_{\beta}$ es una función continua y acotada.

Sea $f_{\beta}(x) = g_{\beta}(x)\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{2\ell}\right)^{-1}$. Esta función es continua fuera del origen.

Veamos que $D^{\beta} h_{2}$ coincide con f_{β} fuera del origen; en efecto, si $\phi \in \mathcal{D}(R^{n} \setminus \{0\})$ entonces $\phi(x)\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j}^{2\ell}\right)^{-1} \in \mathcal{D}$, luego

$$< D^{\beta} h_2 , \phi > = < D^{\beta} h_2 , \sum_{j=1}^{n} x_j^{2\ell} [\phi / \sum_{j=1}^{n} x_j^{2\ell}]>$$

$$= < \sum_{j=1}^{n} x_j^{2\ell} D^{\beta} h_2 , \phi / \sum_{j=1} x_j^{2\ell} >$$

$$= < g_{\beta} , \phi / \sum_{j=1}^{n} x_j^{2\ell} >= \int f_{\beta}(x) \phi(x) dx .$$

Por lo tanto, $((P(\xi))^{-m})^{\vee}$ coincide fuera del origen con una función $h \in C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$. Por el lema (2.6) sabemos que $((P(\xi))^{-m})^{\vee}$ es una distribución casi-homogénea de grado km-$|a|$. Por otra parte en virtud del lema (2.7), h es una función casi--homogénea de grado km $-|a|$ y por lo tanto es localmente integrable. Entonces $((P\xi))^{-m})^{\vee} - h$ es una distribución con soporte en el origen y por lo tanto, puede expresarse como una combinación lineal de derivadas de la δ

$$((P(\xi))^{-m})^{\vee} - h = \sum_{\beta} c_{\beta} \delta^{(\beta)}$$

transformando Fourier, resulta $(P(\xi))^{-m} - \hat{h}(\xi) = Q(\xi)$ donde

Q es un polinomio.

Como $\hat{h} \in C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$ y es casi-homogénea de grado $-km$ entonces, $\hat{h}(\xi)$ tiende a cero cuando $|\xi|$ tiende a infinito y en consecuencia Q es idénticamente nulo. Con esto termina la demostración del teorema.

Consideraremos ahora el caso $km > |a|$. Una solución fundamental de L^m será la antitransformada de Fourier de una distribución T, solución del problema,

$$(P(\xi))^m \, T = 1$$

Definimos,

$$(2.10) \quad \langle T , \phi \rangle = \int_{|\xi|<1} [\, \phi(\xi) - \sum_{\beta\cdot a < km-|a|} D^{\beta}\phi(0)\, \xi^{\beta} / \beta! \,] \quad (P(\xi))^{-m}$$

$$+ \int_{|\xi|>1} \phi(\xi) \, (P(\xi))^{-m} \, d\xi \quad .$$

T está bien definida y es continua pues,

$$\phi(\xi) - \sum_{\beta\cdot a < km - |a|} D^{\beta}\phi(0)\,\xi^{\beta}/\beta! = \sum_{\substack{|\beta| < km - |a| \\ \beta\cdot a > km - |a|}} D^{\beta}\phi(0)\,\xi^{\beta}/\beta!$$

$$+ \sum_{km - |a| < |\beta| \leq km - |a| + 1} (\xi^{\beta}/\beta!) \int_0^1 D^{\beta}\phi(t\xi)(1-t)^{s}\, c\, dt$$

por lo tanto, si $[\xi] \leq 1$,

$$\left|\phi(\xi) - \sum_{\beta\cdot a < km - |a|} D^{\beta}\phi(0)\,\xi^{\beta}/\beta!\right|$$

$$\leq C \max_{\substack{|\beta| \leq km - |a| + 1 \\ \beta\cdot a > km - |a|}} \| D^{\beta}\phi \|_{\infty} \sum_{\substack{|\beta| \leq km - |a| + 1 \\ \beta\cdot a > km - |a|}} [\xi]^{\beta\cdot a},$$

(2.11) LEMA. La distribución T definida en (2.10) es una solución de $(P(\xi))^{m}\, T = 1$.

Demostración. Por definición de T, tenemos

$$<(P(\xi))^{m}\, T\,,\ \phi> = <T\,,\ (P(\xi))^{m}\ \phi>$$

$$= \int_{|\xi|<1} [(P(\xi))^m \phi(\xi) - \sum_{\beta.a<km-|a|} D^\beta((P(\xi))^m\phi)(0)\,\xi^\beta/\beta!\,] \quad (P(\xi))^{-m}$$

$$+ \int_{|\xi|>1} \phi(\xi)\, d\xi .$$

Basta demostrar que $D^\beta((P(\xi))^m\phi)(0) = 0$ si $\beta.a < km - |a|$. Teniendo en cuenta que $D^\gamma(P(\xi))^m(0) = 0$, para todo γ tal que $\gamma.a < km$, resulta,

$$D^\beta((P(\xi))^m\phi)(0) = \sum_{\gamma+\mu=\beta} C_{\gamma\mu} D^\gamma(P(\xi))^m(0)\; D^\mu\phi(0) = 0 ,$$

como queríamos demostrar.

(2.12) TEOREMA. Si $km \geq |a|$, la solución fundamental $\check{T}$ del operador L^m, satisface las siguientes propiedades:

i) Coincide con una función $h \in L^1_{loc} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$,

ii) si $\alpha.a < km - |a| + 1$, entonces $D^\alpha\check{T} = D^\alpha h \in L^1_{loc}$

iii) si $\alpha.a > km - |a|$, $D^{\alpha}h$ es una función casi-homogénea de grado $km - |a| - \alpha .a$.

Demostración. Representemos a T como $T_1 + T_2$ donde

$$<T_1 , \phi> = \int_{|\xi|<1} [\phi(\xi) - \sum_{\beta.a < km - |a|} D^{\beta}\phi(0)\, \xi^{\beta}/_{\beta}!]\, (P(\xi))^{-m} d\xi$$

y

$$<T_2 , \phi> = \int_{|\xi|>1} \phi(\xi)\, (P(\xi))^{-m} d\xi$$

Comenzamos probando la parte i). Procediendo como en el teorema (2.9) se demuestra que $\check{T}$ coincide fuera del origen con una función $h \in C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$.

Veamos que $\check{T} \in L^1_{\ell oc}$.

Por ser T_1 de soporte compacto, $\check{T}_1$ es analítica. Por otra parte, T_2 coincide con $\chi(\xi)(P(\xi))^{-m}$, donde $\chi(\xi)$ es la característica de $\{|\xi|>1\}$. Luego, como $km > |a|$ $T_2 \in L^2$ y por lo tanto $\check{T} \in L^2 \subset L^1_{\ell oc}$.

En consecuencia $\check{T} = \check{T}_1 + \check{T}_2$ coincide con una función localmente integrable y por lo tanto $\check{T} = h$.

Por lo demostrado en el punto i), tenemos que para cualquier α , $D^\alpha\check{T} = D^\alpha h$ en $R^n \setminus \{0\}$. Si $\alpha.a < km - |a| + 1$, entonces, $D^\alpha\check{T} = D^\alpha n$ en todo R^n. Para probar esta última afirmación basta ver que $D^\alpha\check{T}$ coincide con una función localmente integrable. En efecto, $D^\alpha \; T_1 \in L^1_{loc}$ puesto que es una función continua. Por otra parte, como $D^\alpha \; \check{T}_2 = C_\alpha \; (\xi^\alpha \chi(\xi)(P(\xi))^{-m})^\vee$, basta ver que $\xi^\alpha\chi(\xi)(P(\xi))^{-m} \in L^2$. Teniendo en cuenta que $2 < |a|$ y que $\alpha.a - km < 1 - |a|$, obtenemos, $2(\alpha.a - km) < -|a|$. Como $|\xi^\alpha\chi(\xi)(P(\xi))^{-m}| \leq C \; [\xi]^{\alpha.a-km}$ resulta que $\xi^\alpha \chi(\xi)(P(\xi))^{-m} \in L^2$ y queda probado ii)

Para probar iii) veamos que $\xi^\alpha \; T$ coincide con $\xi^\alpha (P(\xi))^{-m}$ y por lo tanto, es casi-homogénea de grado $\alpha.a - km$. Por definición de T, tenemos,

$$<\xi^\alpha T , \phi> = \int_{[\xi]<1} [\xi^\alpha \phi(\xi) - \sum_{\beta.a<km|a|} D^\beta(\xi^\alpha\phi)(0)\xi^\beta/\beta!\,] (P(\xi))^{-m} d\xi$$

$$+ \int_{[\xi]>1} \xi^\alpha\phi(\xi)(P(\xi))^{-m} d\xi$$

pero $D^{\beta}(\xi^{\alpha}\phi)(0) = 0$ pues $\beta.a \leq km - |a| < \alpha.a$.

En consecuencia, por los lemas (2.6) y (2.7), $D^{\alpha}h$ es una función casi-homogénea de grado $km - |a| - \alpha.a$

(2.13) LEMA. Sea $f \in C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$ una función casi-homogénea de grado $-|a| + a_j$. Entonces $k = \frac{\partial f}{\partial x}$ verifica:

i) $k \in C^{\infty}(R^n \setminus \{0\})$

ii) k es casi-homogénea de grado $-|a|$, y

iii) $\int_{1<|x|<2} k(x)\, dx = 0$,

en consecuencia, k es un núcleo singular parabólico, según se define en [7].

Demostración. La parte i) es evidente. La parte ii) resulta del lema (2.8). Para probar iii), comenzaremos demostrando que para toda $\phi \in \mathcal{D}$, el límite

(2.14) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} k(x)\,\phi(x)\, dx$, existe y es finito.

En efecto, si D_j indica la derivada respecto de la coordenada j, calculando la derivada distribucional de f, se tiene

$$< D_j f, \phi > = - < f, D_j \phi > = - \int f(x)\ D_j \phi(x)\ dx =$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} f(x) \quad D_j \quad \phi\ (x) \quad dx$$

Haciendo el cambio de variables $A_\varepsilon\ y = x$, y teniendo en cuenta la casi-homogeneidad de f, resulta

$$< D_j\ f,\ \phi >= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>1} f(A_\varepsilon y)\,(D_j \phi)\,(A_\varepsilon y)\, \varepsilon^{|a|} dy$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>1} f(y)\,(D_j \phi) \quad (A_\varepsilon y) \quad \varepsilon^{a_j} \ d\ y \ =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>1} f(y) \quad D_j(\phi(A_\varepsilon y)) \quad dy \ .$$

Integrando por partes, se obtiene

$$<D_j f\ ,\phi > \ =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|y|>1} k(y) \ \phi(A_\varepsilon y) \ dy + \int_{|y|=1} f(y) \ \phi(A_\varepsilon y) \ y_j \ d\sigma(y) \right].$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|=1} f(y) \phi(A_\varepsilon y) \ y_j \ d\sigma(y) = \phi(0) \int_{|y|=1} f(y) \ y_j \ d\sigma(y),$$

obtenemos que existe el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>1} k(y) \ \phi(A_\varepsilon y) \ dy ,$$

que por un cambio de variables coindice con (2.14).

Tomando $\phi \in \mathcal{D}$, tal que $\phi(x) = 1$ si $|x| < 2$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} k(x) \ \phi(x) \ dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon<|x|<2} k(x) \ dx + \int_{2<|x|} k(x) \phi(x) dx \right)$$

lo que demuestra que existe $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|x|<2} k(x) \ dx$.

Haciendo el cambio de variables $x = A_\lambda^{-1} y$ se obtiene que para todo $\lambda > 0$,

$$\int_{1<[x]<2} k(x)\ dx = \int_{\lambda<[y]<2\lambda} k(A_{\lambda}^{-1}y)\ \lambda^{-|a|}dy = \int_{\lambda<[y]<2\lambda} k(y)\ dy\ ,$$

en particular, si $\lambda = 2^{-k}$, $k = 1,2, \ldots$; resulta

$$\int_{1<[x]<2} k(x)\ dx = \int_{2^{-k}<[x]<2^{-k+1}} k(x)\ dx\ .$$

Por otra parte,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<[x]<2} k(x)\ dx = \lim_{j\to\infty} \int_{2^{-j}<[x]<2} k(x)\ dx =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{j} \int_{2^{-i}<[x]<2^{-i+1}} k(x)\ dx$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=0}^{j} \int_{1<[x]<2} k(x)\ dx = \lim_{j\to\infty} (j+1) \int_{1<[x]<2} k(x)dx.$$

Como este límite es finito, se cumple necesariamente que

$$\int_{1<|x|<2} k(x)\, dx = 0 .$$

(2.15) COROLARIO. Si h es la solución fundamental de L^m, definida en los teoremas (2.9) y (2.12) y $\alpha .a = km$ entonces $D^{\alpha}h(x)$ es un núcleo singular parabólico.

Demostración. Basta ver que $D^{\alpha}h(x)$ se escribe como $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ donde $f(x)$ es una función infinitamente diferenciable fuera del origen y casi-homogénea de grado $-|a|+a_j$. Por los teoremas (2.9) y (2.12) sabemos que $D^{\beta}h$ es casi-homogénea de grado $-|a|+km-\beta.a$ si $\beta.a > km - a$. Sea j tal que $\alpha_j \neq 0$ y sea $\bar{\alpha} - (\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)$. Entonces, $D^{\alpha}h(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\bar{\alpha}}h(x)$. Veamos que $f(x) = D^{\bar{\alpha}}h(x)$ cumple con lo requerido en el lema (2.13). En efecto, como $h \in C^{\infty}(R^n\setminus\{0\})$, entonces $f \in C^{\infty}(R^n\setminus\{0\})$. Por otra parte $f(x)$ es casi-homogénea de grado $-|a| + km - \bar{\alpha}.a = -|a| + a_j$ puesto que $\bar{\alpha}.a = \alpha.a - a_j = km - a_j > km - |a|$.

Dada $F \in E^q_{km}$, definimos $L^m F = L^m f$ donde f es cualquier representante de F. L^m está bien definido en E^q_{km}, pues si

f_1 y f_2 son dos representantes de F entonces $f_1 - f_2 = Q$, con $Q(x) = \sum_{\alpha.a<km} a_\alpha x^\alpha$ y por lo tanto $L^m Q = 0$.

(2.16) LEMA. El operador L^m de $\mathcal{H}^p_{q,km}$ en S' es inyectivo.

Demostración. Como $\mathcal{H}^p_{q,km}$ está contenido en S', su imagen también lo está. Demostraremos que si $F \in \mathcal{H}^p_{q,km}$ y f es un representante de F tal $L^\ell f = 0$ para algún $\ell > 1$, entonces $f \in P_{km}$. En efecto, como f es una distribución temperada se puede transformar Fourier y se obtiene,

$$(L^\ell f)\hat{} = (P(\xi))^\ell \hat{f} = 0 .$$

Dado que $P(\xi)$ se anula solamente en el origen, la distribución $\hat{f}$ tiene soporte concentrado en el origen y por lo tanto, f es un polinomio que puede escribirse como $f(y) = \sum_{\alpha.a<h} a_\alpha y^\alpha$, donde $h = \{\max \alpha.a : a_\alpha \neq 0\}$. Queremos demostrar que $h < km$. Supongamos que $h > km$ y sea x_0 tal que $N(F,x_0) < \infty$. Sea $f \in F$ tal que $n(f,x_0) = N(F,x_0)$. Entonces

$$n(f,x_0)^q \rho^{(km-h)q} \geq \rho^{(km-h)q} \rho^{-kmq-|a|}\left(\int_{[y-x_0]<\rho} |f(y)|^q \, dy\right)$$

$$= C\rho^{-|a|-hq} \int_{[y-x_0]<\rho} |f(y)|^q \, dy = C \rho^{-|a|-hq} \int_{[y-x_0]<\rho} \Big| \sum_{\alpha\cdot a<h} a_\alpha y^\alpha \Big|^q \, dy$$

Eligiendo $\rho > 2[x_0]$, se tiene que si $[y]< \rho/2$, entonces $[y-x_0] < \rho$, y en consecuencia

$$\rho^{-|a|-hq}\left(\int_{[y-x_0]<\rho} \Big| \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha y^\alpha \Big|^q \, dy\right)$$

$$\geq \rho^{-|a|-hq}\left(\int_{[y]<\rho/2} \Big| \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha y^\alpha \Big|^q \, dy\right)$$

$$(2.17) \qquad \rho^{-|a|-hq}\left(\int_{[y]<\rho/2} \Big| \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha y^\alpha + \sum_{\alpha\cdot a<h} a_\alpha y^\alpha \Big|^q \, dy\right) .$$

Haciendo el cambio de variables $A_{\rho/2} z = y$ la expresión

(2.17) se convierte en

$$\rho^{-|a|-hq}\left(\int_{|z|<1} \Big| \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha (\rho/2)^{\alpha\cdot a} z^\alpha + \sum_{\alpha\cdot a<h} a_\alpha (\rho/2)^{\alpha\cdot a} z^\alpha \Big|^q (\rho/2)^{|a|} dz\right.$$

$$= 2^{-|a|}\left(\int_{|z|<1} \Big| 2^{-h} \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha z^\alpha + \sum_{\alpha\cdot a<h} a_\alpha \rho^{-h} (\rho/2)^{\alpha\cdot a} z^\alpha \Big|^q dz\right)$$

$$= 2^{-|a|} \int_{|z|<1} \Big| 2^{-h} \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha z^\alpha \Big|^q dz + g(\rho)$$

donde $g(\rho)$ tiende a cero cuando ρ tiende a infinito.

En consecuencia,

$$n(f,x_0)^q \rho^{(km-h)q} \geq C\, 2^{-|a|-hq} \int_{|z|<1} \Big| \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha z^\alpha \Big|^q + g(\rho).$$

Si $h>km$, haciendo que ρ tienda a infinito, tenemos

$$\int_{|z|<1} \Big| \sum_{\alpha\cdot a=h} a_\alpha z^\alpha \Big|^q dz = 0 ,$$

y por lo tanto $a_\alpha = 0$ para todo α tal que $\alpha.a = h$ lo que es una contradicción.

Por otra parte, si $h = km$, haciendo $\rho \to \infty$, resulta,

$$\int_{|z|<1} \Big| \sum_{\alpha \cdot a = h} a_\alpha z^\alpha \Big|^q dz < C\, 2^{|a|+hq}\, n(f,x_0)^q .$$

Pero si f y $\bar{f} \in F$, entonces $(\bar{f} - f)(y) = \sum_{\alpha . a < km} b_\alpha y^\alpha$. Luego, si $f(y) = \sum_{\alpha . a < h} a_\alpha y^\alpha$, resulta $\bar{f}(y) = \sum_{\alpha \cdot a < h} a_\alpha y^\alpha + \sum_{\alpha . a < km = h} b_\alpha y^\alpha$, es decir que para $\alpha.a = h$, a_α no depende del representante elegido. Por lo tanto,

$$\int_{|z|<1} \Big| \sum_{\alpha \cdot a = h} a_\alpha z^\alpha \Big|^q dz < C\, 2^{|a|+hq}\, N(F,x_0)^q .$$

Como $N(F,x) \in L^p$, dado $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in R^n$ tal que $N(F,x_0)^q \; 2^{|a|+hq} < \varepsilon$, por lo tanto $\int_{|z|<1} \big| \sum_{\alpha \cdot a = h} a_\alpha z^\alpha \big|^q dz = 0$, luego, $a_\alpha = 0$ si $\alpha.a = h$ lo que contradice la definición de h. Se concluye entonces que $f(y) = \sum_{\alpha \cdot a < km} a_\alpha y^\alpha$, o sea que F es la clase nula en E^q_{km}.

(2.18) LEMA. El operador L^m es continuo de $\mathcal{H}^p_{q,km}$ en $\mathcal{S}'$ para todo $m \geq 1$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{H}^p_{q,km}$, y sea x_0 un punto en el cual $N(F,x_0) < \infty$. Observamos que casi todo $x_0 \in R^n$ satisface esta condición. Sea f el representante de F que satisface $n(f,x_0) = N(F,x_0)$. Dada $\phi \in \mathcal{S}$, por el corolario (2.2), se tiene,

$$| < L^m F , \phi > | = |< L^m f , \phi >| = | < f , L^m \phi >|$$

$$= | \int f(x) \, L^m \phi(x) \, dx | \leq CN(F,x_0)(1 + [x_0])^j \, p_{j,km}(\phi).$$

Elevando a la potencia p e integrando sobre $\{[x_0] \leq 1\}$ obtenemos

$$|\langle L^m F, \phi\rangle| \leq C\, p_{j,km}(\phi) \quad \|F\|_{\mathcal{H}^p_{q,km}} \qquad ,$$

lo que demuestra el lema.

Dada $\phi \in S$ tal que $\int \phi(x)\,dx \neq 0$ y dada $f \in S'$ se define $f^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |f * \phi_t(y)|$ donde $\phi_t(x) = t^{-|a|} \phi(A_t^{-1} x)$. Dado p tal que $0 < p \leq 1$, se llama H^p al espacio de distribuciones temperadas f tales que $f^* \in L^p$ y se define $\|f\|^p_{H^p} = \int f^*(x)^p\,dx$ (ver [1]). Una función $b(x)$ definida en R^n, se llama un p-átomo de orden N si existe una bola $B(x,\rho)$ tal que sop $b \subset B$ y $\|b\|_\infty \leq |B|^{-1/p}$ y además los momentos de b son nulos hasta un orden N, esto es $\int x^\alpha\, b(x)\,dx = 0$ si $|\alpha| \leq N$. Se sabe (ver [8]) que $f \in H^p$ si y sólo si existe una sucesión numérica $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ con $\sum_i |\lambda_i|^p < \infty$ y una sucesión de p-átomos de orden N suficientemente grande, $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ tales que, $f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i\, b_i$ en S'. Además existen C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \|f\|^p_{H^p} \leq \inf \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p \leq C_2 \quad \|f\|^p_{H^p}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles descomposiciones de f como suma de múltiplos de átomos de un orden N fijo que puede ser elegido tan grande como se quiera.

(2.19) LEMA. Sea $g \in L^q_{loc} \cap S'$ y sea $f = L^m g$. Si $\phi \in S$, se tiene la desigualdad siguiente,

$$f^*(x) \leq C\, p_{j,km}(\phi)\, n(g,x), \qquad j > km + |a|$$

Demostración. Tenemos, $(f * \phi_t)(y) = (L^m g * \phi_t)(y)$ $= (g * L^m \phi_t)(y)$. Por otra parte, $L^m \phi_t(y) = ((P(\xi))^m \hat{\phi}_t(\xi))^{\vee}(y)$ y como $\hat{\phi}_t(\xi) = \hat{\phi}(A_t \xi)$ resulta $L^m \phi_t(y)$ $= \int e^{-2\pi i y \xi}(P(\xi))^m \hat{\phi}(A_t \xi)\, d\xi$. Haciendo el cambio de variables $\eta = A_t \xi$, se obtiene,

$$L^m \phi_t(y) = \int e^{-2\pi i A_t^{-1} y \eta}(P(A_t^{-1}\eta))^m \hat{\phi}(\eta)\, t^{-|a|} d\eta$$

$$= t^{-|a|-km} \int e^{-2\pi i A_t^{-1} y \cdot \eta} (P(\eta))^m \hat{\phi}(\eta)\, d\eta$$

$$= t^{-|a|-km} (L^m \phi)(A_t^{-1} y) .$$

En consecuencia,

$$(f * \phi_t)(y) = t^{-|a|-km} \int g(z) (L^m \phi)(A_t^{-1} (y-z))\, dz$$

$$= t^{-km} \int g(z) (L^m \phi)_t (y-z)\, dz .$$

Por un nuevo cambio de variables, $z = x + A_t u$, se obtiene

$$(2.20) \qquad (f * \phi_t)(y) = t^{-km} \int g(x + A_t u) (L^m \phi)_t (y-x-A_t u)\, t^{|a|}\, du .$$

Llamando $h(u) = g(x + A_t u)$, resulta,

$$n(h,0) = \sup_{\rho>0} \rho^{-km}\left(|B(0,\rho)|^{-1}\int_{B(0,\rho)} |h(u)|^q\, du\right)^{1/q}$$

$$= \sup_{\rho>0} \rho^{-km}\left(|B(0,\rho)|^{-1}\int_{B(0,\rho)} |g(x+A_t u)|^q\, du\right)^{1/q} .$$

Haciendo el cambio de variables $y = x + A_t u$, tenemos,

$$n(h,0) = C \sup_{\rho>0} \rho^{-km}\left(\rho^{-|a|}\int_{B(x,\rho)} |g(y)|^q\, t^{-|a|} dy\right)^{1/q}$$

$$= t^{km}\, n(g,x) .$$

Por lo tanto, aplicando el lema (2.19) en (2.20) obtenemos,

$$|f * \phi_t (y)| \leq C\, n(g,x)\, p_{j,0}\, ((L^m \phi)(A_t^{-1}(y-x) - u))] .$$

Además, si $[y-x] < t$, entonces

$$1 + [u] \leqslant 1 + [u - A_t^{-1}(y-x) + A_t^{-1}(y-x)]$$

$$\leqslant 1 + [A_t^{-1}(y-x) - u] + t^{-1}[y-x] \leqslant 2 + [A_t^{-1}(y-x) - u]$$

$$\leqslant 2\,(1 + [A_t^{-1}(y-x) - u])$$

luego,

$$p_{j,0}((L^m\phi)(A_t^{-1}(y-x)-u)) = \sup_{u\in R^n} |(L^m\phi)(A_t^{-1}(y-x)-u)|\,(1+[u])^j$$

$$\leqslant C \sup_{u\in R^n} |(L^m\psi)(A_t^{-1}(y-x) - u)|\,(1+[A_t^{-1}(y-x) - u])^j$$

$$= C\, p_{j,0}(L^m\phi) \leqslant C\, p_{j,km}(\phi).$$

En consecuencia, si $[y-x] < t$, resulta

$$|f * \phi_t(y)| \leqslant C\, p_{j,km}(\phi)\, n(g,x) ,$$

luego,

$$f^*(x) \leqslant C\, p_{j,km}(\phi)\; n(g,x)$$

como queríamos probar.

(2.21) LEMA. Sea $b(x)$ un p-átomo con N momentos nulos, $N \geqslant km$, sop $b \subset B(0,r)$ y $\| b \|_\infty \leqslant |B|^{-1/p} = c\, r^{-|a|/p}$.

Sea $h(x)$ la solución fundamental de L^m obtenida en los teoremas (2.9) y (2.12) y sea $f = h * b$ la solución de $L^m f = b$. Entonces,

i) Si $[x] \geqslant 2r$, se tiene,

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant C\, r^{-|a|/p}\, [x]^{km-\alpha\cdot a}\, (r/[x])^{|a|+N+1}$$

ii) Si $[x] \leqslant 2r$, se tiene,

$$|f(x)| \leqslant C\, r^{-|a|/p + km}$$

Demostración. Comenzamos con i). Como $[x] \geq 2r$ y $L^{(m)}$ es un operador hipoelíptico, la función f tiene infinitas derivadas en x y vale,

$$D^{\alpha} f(x) = \int_{[z] < r} D^{\alpha} h(x-z)\ b(z)\ dz$$

$$= \int_{[z] < r} \sum_{|\beta| < N} D^{\beta} D^{\alpha} h(x)\,((-z)^{\beta}/\beta!)\ b(z)\ d\,z$$

$$+ \int_{[z] < r} \sum_{|\beta| = N+1} D^{\beta} D^{\alpha} h(x-\lambda z)\,((-z)^{\beta}/\beta!)\ b(z)\ dz\ ,$$

con $0 < \lambda < 1$. Como b es un p-átomo de orden N, el primer sumando es nulo , o sea que,

$$|D^{\alpha} f(x)| = \left| \int_{[z] < r} \sum_{|\beta| = N+1} D^{\beta} D^{\alpha} h(x-\lambda z)\,((-z)^{\beta}/\beta!)\ b(z)\ dz \right| .$$

Como $N \geq km$ y $|\beta| = N + 1$, por los teoremas (2.9) y (2.12), tenemos que $D^{\beta+\alpha} h$ es una función casi-homogénea, resultando

$$|D^{\alpha}f(x)| \leq C \sum_{|\beta|=N+1} r^{-|a|/p}\, r^{\beta \cdot a} \int_{[z]<r} [x-\lambda z]^{km-|a|-\alpha.a-\beta.a}\, dz$$

Además, como $[x-\lambda z] \geq [x] - [\lambda z]$ y $[\lambda z] \leq r \leq [x]/2$, se verifica que $[x-\lambda z] \geq [x]/2$. Por lo tanto,

$$\int_{[z]<r} [x-\lambda z]^{km-|a|-\alpha.a-\beta.a}\, dz \leq C[x]^{km-|a|-\alpha.a-\beta.a}\, r^{|a|} .$$

En consecuencia,

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq C \sum_{|\beta|=N+1} r^{-|a|/p}\, r^{\beta.a}\, r^{|a|}\, [x]^{km-|a|-\alpha.a-\beta.a}$$

$$= C \sum_{|\beta|=N+1} r^{-|a|/p}\, [x]^{km-\alpha.a}\, (r/[x])^{\beta.a+|a|} .$$

Teniendo en cuenta que $r/[x] < 1/2$ y $\beta.a \geq |\beta| = N+1$, resulta

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq C\, r^{-|a|/p}\, [x]^{km-\alpha.a}\, (r/[x])^{|a|+N+1}$$

lo que prueba la parte i) del enunciado.

Para demostrar ii). Supongamos primero que $km<|a|$. En este caso $h(y)$ es una función casi-homogénea de grado $-|a| + km$ y por lo tanto,

$$|f(x)| \leq \int_{[z]\leq r} |h(x-z)|\,|b(z)|\,dz \leq C\,r^{-|a|/p} \int_{[z]\leq r} |h(x-z)|\,dz.$$

Si $[z]\leq r$, entonces $[x-z]\leq [x] + [z]\leq 2r + r = 3r$. Luego

$$|f(x)|\leq C\,r^{-|a|/p} \int_{[t]\leq 3r} |h(t)|\,dt \leq C\,r^{-|a|/p} \int_{[t]\leq 3r} [t]^{-|a|+km}\,dt$$

$$= C\,r^{-|a|/p} \int_0^{3r} s^{km-|a|}\, s^{|a|-1}\, ds = C\,r^{km}\, r^{-|a|/p}.$$

Consideremos ahora, el caso $km \geq |a|$. Recordamos que $f(x) = (h * b)(x) = (\hat{b}\,T)^{\vee}(x)$, donde

$$<T, \phi> = \int_{[\xi]\leq 1} [\phi(\xi) - \sum_{\beta\,.\,a< km-|a|} D^{\beta}\phi(0)\,\xi^{\beta}/\beta\,!]\,(P(\xi))^{-m}\,d\xi +$$

$$+ \int_{|\xi|>1} \phi(\xi)\ (P(\xi))^{-m}\ d\xi \ .$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula de Taylor aplicada a $e^{2\Pi i y\xi}$, resulta,

$$\hat{b}(\xi) = \int_{|y|<r} e^{2\Pi i y\xi} b(y)\ dy$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq N} \int_{|y|<r} (2\Pi i)^{|\alpha|}\ y^{\alpha}(\xi^{\alpha}/\alpha!\ )\,b(y)\ dy$$

$$+ \sum_{|\alpha|=N+1} \int_{|y|<r} (\xi^{\alpha}/\alpha!\ )\ [\int_0^1 (2\Pi i)^{|\alpha|}\ y^{\alpha}\ e^{ity\cdot\xi}$$

$$(1-t)^N (N+1)\ dt\ ]\ \ b(y)\ dy\ .$$

Como b tiene momentos nulos hasta el orden N, el primer término del miembro de la derecha es nulo. Luego,

$$(2.22) \qquad |\hat{b}(\xi)| \leq C \sum_{|\alpha| = N+1} [\xi]^{\alpha . a} \int_{[y] < r} [y]^{\alpha . a} |b(y)| \, dy$$

$$\leq C \sum_{|\alpha| = N+1} [\xi]^{\alpha . a} r^{\alpha . a} |B|^{-1/p} r^{|a|} ,$$

donde la constante C no depende de b.

Además, como $\beta . a \leq km - |a| < N$, las derivadas $(D^{\beta}\hat{b})(0)$ son nulas, puesto que se suponen nulos los momentos de b hasta el orden N.

Luego, si $\phi \in S$ y $\beta . a < km - |a|$, tenemos

$$D^{\beta} (\hat{b} . \phi)(0) = \sum_{\gamma < \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^{\gamma} \hat{b}(0) D^{\beta - \gamma} \phi(0) = 0.$$

Por lo tanto, resulta inmediatamente de la definición de T que

$$< \hat{b} T , \phi > = < T , \hat{b} \phi > = \int \hat{b}(\xi) (P(\xi))^{-m} \phi(\xi) \, d\xi ,$$

o sea, que $\hat{b} T$ coincide con la función $\hat{b}(\xi) P(\xi)^{-m}$ que es integrable sobre R^n. En consecuencia,

$$f(x) = \int e^{-2\pi i x\xi}\, \hat{b}(\xi)\,(P(\xi))^{-m}\, d\xi$$

y por lo tanto,

$$|f(x)| \leqslant \int |\hat{b}(\xi)|\,(P(\xi))^{-m}\, d\xi$$

$$= \int_{|\xi|<r^{-1}} |\hat{b}(\xi)|\,(P(\xi))^{-m}\, d\xi + \int_{|\xi|>r^{-1}} |\hat{b}(\xi)|\,(P(\xi))^{-m}\, d\xi \,.$$

Utilizando la desigualdad (2.22), se obtiene,

$$\int_{|\xi|<r^{-1}} |\hat{b}(\xi)|\,(P(\xi))^{-m}\, d\xi \leqslant C \int_{|\xi|<r^{-1}} \sum_{|\alpha|=N+1} [\xi]^{\alpha\cdot a}\, r^{\alpha\cdot a-|a|/p+|a|}\, [\xi]^{-km}\, d\xi$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=N+1} r^{\alpha\cdot a-|a|/p+|a|}\, r^{-\alpha\cdot a+km}\, r^{-|a|} = C\, r^{-|a|/p+km} \,.$$

Por otra parte, aplicando la desigualdad de Schwartz, resulta,

$$\int_{|\xi|>r^{-1}} |\hat{b}(\xi)|\,(P(\xi))^{-m}\,d\xi \le C\,\|\hat{b}\|_{L^2}\left(\int_{|\xi|>r^{-1}} [\xi]^{-2km}\,d\xi\right)^{1/2}$$

$$= C\left(\int_{r^{-1}}^{\infty} s^{-2km+|a|-1}\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{|y|<r} |b(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

$$\le C\, r^{km-|a|/2}\; r^{-|a|/p}\; r^{|a|/2} = C\, r^{-|a|/p+km}$$

Reuniendo las estimaciones obtenidas, resulta $|F(x)| \le C\, r^{-|a|/p+km}$, con lo que queda, demostrada la parte ii) del lema.

(2.23) LEMA. Sea $|a|/p < km + |a|/q$ y sea b un p-átomo con N momentos nulos $N > km + |a|/q$. Sea f la solución de $L^m f = b$ obtenida como en el lema (2.21). Si F es la clase de f en E^q_{km}, entonces existe una constante C, que no depende de b, tal que,

$$\int N(F,x)^p\, dx \leq C \quad .$$

Demostración. Haciendo una traslación podemos suponer que b tiene soporte centrado en el origen, o sea $\operatorname{sop} b \subset B(0,r)$ y $\|b\|_\infty \leq |B|^{-1/p}$. Queremos estimar $N(F,x)$. Para esto, consideraremos primero el caso $[x]>4r$. En este caso, si $[x]> 2\rho$ se tiene,

$$(2.24) \qquad \rho^{-km}\left[\rho^{-|a|}\int_{[y]<\rho} |f(x+y) - P(x,y)|^q\, dy\right]^{1/q}$$

$$\leq C \; r^{-|a|/p}\, (r/[x])^{|a|+N+1} \quad ,$$

donde $P(x,y) = \sum_{\alpha\cdot a<km} D^\alpha f(x)\, y^\alpha/\alpha!$. En efecto,

$$f(x+y) - P(x,y) = \sum_{\substack{|\alpha|<km\\ \alpha\cdot a\geq km}} D^\alpha f(x)\, y^\alpha/\alpha!$$

$$+ \sum_{|\alpha|=km} D^\alpha f(x+\theta y)\, y^\alpha/\alpha! \; , \text{ con } \; 0<\theta<1.$$

Luego,

$$\rho^{-(km+|s|/q)}\left(\int_{|y|<\rho} |f(x+y) - P(x,y)|^q \, dy\right)^{1/q}$$

$$\leqslant \rho^{-(km+|s|/q)}\left[\sum_{\substack{|\alpha|<km \\ \alpha.s>km}}\left(\int_{|y|<\rho} |D^\alpha f(x) \, y^\alpha/\alpha!|^q \, dy\right)^{1/q}\right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=km}\left(\int_{|y|<\rho} |D^\alpha f(x+\theta y) \, y^\alpha/\alpha!|^q \, dy\right)^{1/q}\right]$$

$$= \rho^{-(km+|s|/q)}(I_1 + I_2).$$

Por el lema (2.21), tenemos que

$$I_1 \leqslant C \sum_{\substack{|\alpha|<km \\ \alpha\cdot s>km}} r^{-|s|/p} [x]^{km-\alpha\cdot s} (r/[x])^{|s|+N+1} \rho^{\alpha\cdot s} \rho^{|s|/q},$$

por lo tanto,

$$\rho^{-(km+|s|/q)} I_1 \leqslant C \sum_{\substack{|\alpha|<km \\ \alpha.s>km}} (\rho/[x])^{\alpha.s-km} r^{-|s|/p} (r/[x])^{|s|+N+1}.$$

Como $[x] > 2\rho$, si $\alpha.a \geq km$, entonces $(\rho/[x])^{\alpha.a-km} \leq (1/2)^{\alpha.a-km} \leq 1$. Luego,

$$\rho^{-(km+|a|/q)} I_1 \leq C\, r^{-|a|/p} (r/[x])^{|a|+N+1}$$

Como $[\theta y] \leq \rho < [x]/2$ tenemos : $[x+\theta y] \geq [x]-[\theta y] \geq [x]/2 > 2r$.Con esta estimación de $[x+\theta y]$ y procediendo como en el caso de I_1, resulta para I_2 la misma acotación que la ya obtenida para I_1.

Siguiendo con el caso $[x] \geq 4r$, supongamos que $[x] \leq 2\rho$. Entonces,

$$\rho^{-(km+|a|/q)} \left(\int_{[y]<\rho} |f(x+y) - P(x,y)|^q dy \right)^{1/q}$$

$$\leq \rho^{-(km+|a|/q)} \left[\left(\int_{[y]<\rho} |f(x+y)|^q dy \right)^{1/q} + \left(\int_{[y]<\rho} |P(x,y)|^q dy \right)^{1/q} \right]$$

$$= \rho^{-(km+|a|/q)} (I_1 + I_2).$$

Estimemos I_1 . Tenemos,

$$I_1 = \left(\int_{|y|<\rho} |f(x+y)|^q \, dy \right)^{1/q} \leqslant \|f\|_q$$

$$\leqslant \left(\int_{|u|<2r} |f(u)|^q \, du \right)^{1/q} + \left(\int_{|u|>2r} |f(u)|^q \, du \right)^{1/q} .$$

Aplicando la parte ii) del lema (2.21), resulta,

$$\left(\int_{|u|<2r} |f(u)|^q \, dy \right)^{1/q} \leqslant C \, r^{-|a|/p + km + |a|/q}$$

Por otra parte aplicando la parte i) del lema (2.21), se obtiene,

$$\left(\int_{|u|>2r} |f(u)|^q du \right)^{1/q} \leqslant C \, r^{-|a|/p + |a| + N + 1} \left(\int_{|u|>2r} [u]^{kmq - |a|q - Nq - q} \, du \right)^{1/q}$$

$$= C \, r^{-|a|/p + |a| + N + 1} \left(\int_{2r}^{\infty} s^{(km-1)q - |a|q - Nq} \, s^{|a|-1} \, ds \right)^{1/q} .$$

Como $N \geq km + |a|/q$, la última integral resulta finita y por lo tanto,

$$\left(\int_{[u]>2r} |f(u)|^q \, du \right)^{1/q} \leq C \, r^{-|a|/p + |a| + N+1} \; r^{km-1-|a|-N+|a|/q}$$

$$= C \, r^{-|a|/p + km + |a|/q} .$$

De estas estimaciones obtenemos $I_1 \leq C \, r^{-|a|/p + km + |a|/q}$. Luego,

$$\rho^{-(km + |a|/q)} I_1 \leq C \rho^{-(km+|a|/q)} \, r^{-|a|/p + km + |a|/q}$$

$$\leq C([x]/2)^{-(km+|a|/q)} \, r^{-|a|/p + km + |a|/q}$$

Estimemos I_2. Tenemos,

$$I_2 = \left(\int_{[y]<\rho} \Big| \sum_{\alpha \cdot a < km} D^{\alpha} f(x) \, y^{\alpha}/\alpha ! \Big|^q \, dy \right)^{1/q} \leq$$

$$\leqslant C \sum_{\alpha\cdot a < km} |D^{\alpha} f(x)| \left(\int_{[y] \leqslant \rho} [y]^{(\alpha\cdot a)q} \, dy \right)^{1/q}$$

Aplicando la parte i) del lema (2.21), resulta,

$$I_2 \leqslant C\, r^{-|a|/p} (r/[x])^{|a|+N+1} \sum_{\alpha\cdot a < km} [x]^{km-\alpha\cdot a} \rho^{\alpha\cdot a} \rho^{|a|/q} .$$

Por lo tanto,

$$\rho^{-(km+|a|/q)} I_2 \leqslant C\, r^{-|a|/p} (r/[x])^{|a|+N+1} \sum_{\alpha\cdot a < km} ([x]/\rho)^{km-\alpha\cdot a}$$

como estamos suponiendo que $[x] \leqslant 2\rho$, tenemos

$$\sum_{\alpha\cdot a < km} ([x]/\rho)^{km-\alpha\cdot a} \leqslant C .$$

Luego,

$$\rho^{-(km+|a|/q)} I_2 \leqslant C\, r^{-|a|/p} (r/[x])^{|a|+N+1}$$

En consecuencia, hemos demostrado que si $[x] > 4r$ y $[x] \leq 2\rho$, entonces

$$\rho^{-(km+|a|/q)} \left(\int_{[y]<\rho} |f(x+y) - P(x,y)|^q \, dy \right)^{1/q}$$

$$\leq C\, r^{-|a|/p} \left[(r/[x])^{km+|a|/q} + (r/[x])^{|a|+N+1} \right].$$

Como $|a|/q + km \leq N$ y además $r/[x] < 1$, resulta,

$$(r/[x])^{|a|+N+1} \leq (r/[x])^{|a|/q+km} ,$$

Por lo tanto, para $4r < [x] \leq 2\rho$, tenemos

$$(2.25) \quad \rho^{-(km+|a|/q)} \left(\int_{[y]<\rho} |f(x+y) - P(x,y)|^q \, dy \right)^{1/q}$$

$$\leq C\, r^{-|a|/p} (r/[x])^{km+|a|/q}$$

De (2.24) y (2.25), se deduce que si $[x] > 4r$, entonces

$$N(F,x) \leq C\, r^{-|a|/p}\, (r/[x])^{km+|a|/q},$$

donde C es una constante que no depende del átomo b en cuestión. Elevando a la p e integrando, se tiene,

$$\int_{[x]>4r} N(F,x)^p\, dx \leq C.r^{-|a|}\, r^{(km+|a|/q)p} \int_{[x]>4r} [x]^{-(km+|a|/q)p}\, dx .$$

Como $p(km + |a|/q) > |a|$, resulta

$$\int_{[x]>4r} [x]^{-(km+|a|/q)p}\, dx = C \int_{4r}^{\infty} s^{-p(km+|a|/q)}\, s^{|a|-1}\, ds$$

$$= C\, r^{-p(km+|a|/q)+|a|} .$$

Luego,

$$\int_{[x]>4r} N(F,x)^p\, dx \leq C$$

Consideremos ahora el caso $|x| \leq 4r$. Tenemos

$$f(x+z) - P(x,z) = \int [\, h(x+z-y) - \sum_{\alpha\cdot a < km} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha!\,]\, b(y)\,dy$$

$$= \int_{|x-y| < 2|z|} [\, h(x+z-y) - \sum_{\alpha\cdot a < km} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha!\,]\; b(y)\; dy$$

$$+ \int_{|x-y| > 2|z|} [\, h(x+z-y) - \sum_{\alpha\cdot a < km} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha!\,]\; b(y)\; dy$$

$$= I_1 + I_2 \;.$$

Estimemos I_1 . Haciendo el cambio de variables $x-y = u$ se tiene,

$$(2.26) \qquad |I_1| \leq \int_{|u| < 2|z|} \Big|\, h(u+z) - \sum_{\alpha\cdot a < km - |a|} D^{\alpha}h(u)\; z^{\alpha}/\alpha! \,\Big| \; |b(x-u)|\,du$$

$$+ \int_{|u| < 2|z|} \Big| \sum_{km - |a| < \alpha\cdot a < km} D^{\alpha}h(u)\; z^{\alpha}/\alpha! \,\Big| \; |b(x-u)|\,du \;.$$

Para acotar el segundo sumando, aplicando el teorema (2.9) o (2.12), según corresponda, resulta

$$\int_{[u]<2[z]} \Big| \sum_{km-|a|<\alpha\cdot a<km} D^{\alpha} h(u)\, z^{\alpha}/\alpha! \Big| \, |b(x-u)| \, du$$

$$\leqslant C\, r^{-|a|/p} \sum_{km-|a|<\alpha\cdot a<km} \int_{[u]<2[z]} |D^{\alpha} h(u)|\, [z]^{\alpha\cdot a} \, du$$

$$\leqslant C\, r^{-|a|/p} \sum_{km-|a|<\alpha\cdot a<km} [z]^{\alpha\cdot a} \int_{[u]<2[z]} [u]^{-|a|+km-\alpha\cdot a} \, du$$

$$= C\, r^{-|a|/p} \sum_{km-|a|<\alpha\cdot a<km} [z]^{\alpha\cdot a} \int_{0}^{2[z]} s^{-|a|+km-\alpha\cdot a+|a|-1} \, ds$$

$$= C\, r^{-|a|/p} [z]^{km} .$$

En cuanto al primer sumando de (2.26), si $km<|a|$, se reduce a

$$\int_{[u]<2[z]} |h(u+z)| \, |b(z-u)| du$$

y se acota de la misma manera que el segundo sumando de (2.26).

Por otra parte, si $km > |a|$, tenemos

$$\int_{|u|<2|z|} \Big| h(u+z) - \sum_{\alpha\cdot a<km-|a|} D^{\alpha}h(u)\, z^{\alpha}/\alpha\,! \Big|\ |b(x-u)|\,du$$

$$\leq C\, r^{-|a|/p} \int_{|u|<2|z|} \Big| h(u+z) - \sum_{\alpha\cdot a<km-|a|} D^{\alpha}h(u)\, z^{\alpha}/\alpha\,! \Big|\ du\ .$$

En el integrando, se puede aplicar la fórmula de Taylor si u no pertenece a la recta que une 0 y z. Por lo tanto

$$(2.27)\quad \int_{|u|<2|z|} \Big| h(u+z) - \sum_{\alpha\cdot a<km-|a|} D^{\alpha}h(u)\, z^{\alpha}/\alpha\,! \Big|\ du$$

$$= \int_{|u|<2|z|} \Big| \sum_{\substack{|\alpha|<km-|a| \\ \alpha\cdot a>km-|a|}} D^{\alpha}h(u)\, z^{\alpha}/\alpha!$$

$$+ \sum_{km-|a|<|\alpha|<km-|a|+1} z^{\alpha}/\alpha\,! \int_0^1 D^{\alpha}h(u+tz)(1-t)^{s-1}s\,dt\, \Big|\,du$$

donde s es la parte entera de $km - |a| + 1$.

Haciendo el cambio de variables $u = A_{[z]}\, v$ y llamando $\bar{z} = A^{-1}_{[z]}\, z$, la expresión (2.27) resulta igual a

$$\int_{|v|<2} [z]^{|a|} \Big| \sum_{\substack{|\alpha| < km-|a| \\ \alpha\cdot a > km-|a|}} D^{\alpha} h(A_{[z]}\, v)\; z^{\alpha}/\alpha! \quad +$$

$$+ \sum_{km-|a| < \alpha < km-|a|+1} (z^{\alpha}/\alpha!) \int_0^1 D^{\alpha} h(A_{[z]}(v + t\bar{z}))(1-t)^{s-1} s\, dt \Big| dv$$

o también, en virtud de la casi-homogeneidad de $D^{\alpha}h$ demostrado en el teorema (2.12), es igual a

$$= \int_{|v|<2} [z]^{|a|} \Big| \sum_{\substack{|\alpha| < km-|a| \\ \alpha . a > km-|a|}} [z]^{-|a|+km-\alpha . a} D^{\alpha} h(v)\; z^{\alpha}/\alpha!$$

$$+ \sum_{km-|a| < |\alpha| < km-|a|+1} (z^{\alpha}/\alpha!) \int_0^1 [z]^{-|a|+km-\alpha\cdot a} D^{\alpha} h(v+t\bar{z})(1+t)^{s-1} s\, dt \Big| dv$$

$$=[z]^{km}\int_{[v]<2}\Big|\sum_{\substack{|\alpha|<km-|a|\\ \alpha.a>km-|a|}} D^{\alpha}h(v)\ [z]^{-\alpha.a}\ z^{\alpha}/\alpha!$$

$$+\sum_{km-|a|<|\alpha|<km-|a|+1}[z]^{-\alpha.a}\ (z^{\alpha}/\alpha!)\int_0^1 D^{\alpha}h(v+t\bar{z})\,(1-t)^{s-1}\,s\,dt\Big|\,dv$$

$$=\ [z]^{km}\int_{[u]<2}\Big|\sum_{\substack{|\alpha|<km-|a|\\ \alpha.a>km-|a|}} D^{\alpha}h(v)\ \bar{z}^{\alpha}/\alpha!$$

$$+\sum_{km-|a|<|\alpha|<km-|a|+1}(\bar{z}^{\alpha}/\alpha!)\int_0^1 D^{\alpha}h(v+t\bar{z})\,(1-t)^{s-1}\,s\ \ dt\Big|\,dv$$

$$=\ [z]^{km}\int_{[v]<2}\Big|\ h(v+\bar{z})-\sum_{\alpha.a<km-|a|} D^{\alpha}h(v)\ \bar{z}^{\alpha}/\alpha!\ \Big|\ dv\ .$$

La última igualdad vale pues los integrandos son iguales si v es tal que $0\notin[v,\ v+\bar{z}\ ]$.

Por el teorema (2.12) se sabe que si $\alpha.a\leq km-|a|$, entonces $D^{\alpha}h$ pertenece a $L'_{\ell oc}$. Por lo tanto

$$\int_{[u]<2[z]} \left| h(u+z) - \sum_{\alpha\cdot a<km-|a|} D^{\alpha}h(u)\; z^{\alpha}/\alpha! \right| du$$

$$= [z]^{km} \int_{[v]<2} \left| h(v+\bar{z}) - \sum_{\alpha\cdot a<km-|a|} D^{\alpha}h(v)\; \bar{z}^{\alpha}/\alpha! \right| dv$$

$$\leqslant [z]^{km} \left(\int_{[v]<2} |h(v+\bar{z})|\, dv + \sum_{\alpha.a<km-|a|} \int_{[v]<2} |D^{\alpha} h(v)| \left([\bar{z}]^{\alpha\cdot a}/\alpha!\right) dv \right)$$

$$\leqslant [z]^{km} \left(\int_{[w]<3} |h(w)|\, dw + \sum_{\alpha\cdot a< km-|a|} (1/\alpha!) \int_{[v]<2} |D^{\alpha} h(v)|\, dv \right) \leqslant C[z]^{km}$$

donde C depende de $h(x)$ y sus derivadas de orden α con $\alpha.a \leqslant km - |a|$. En consecuencia,

$$|I_1| \leqslant C\, r^{-|a|/p}\, [z]^{km} .$$

Estimemos I_2. Tenemos

$$I_2 = \int_{[x-y]>2[z]} [h(x+z-y) - \sum_{\alpha\cdot a< km} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha!]\; b(y)\, dy \;=$$

$$= \int_{|x-y|>2|z|} [\, h(x+z-y) - \sum_{\alpha\cdot a<km} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha!\,] \; b(y)\, dy$$

$$+ \int_{|x-y|>2|z|} \sum_{\alpha\cdot a=km} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha! \;\; b(y)\, dy = J_1 + J_2 \; .$$

Aplicando la fórmula de Taylor, se tiene,

$$J_1 = \int_{|x-y|>2|z|} \Bigg[\sum_{\substack{|\alpha|<km \\ \alpha\cdot a>km}} D^{\alpha}h(x-y)\; z^{\alpha}/\alpha!$$

$$+ \sum_{|\alpha|=km+1} D^{\alpha}h(x-y+\theta z)\; z^{\alpha}/\alpha! \Bigg] \; b(y)\, dy \; ,$$

con $0<\theta<1$. Luego, por la casi-homogeneidad de $D^{\alpha}h(x)$ para $\alpha .a > km$, resulta,

$$|J_1| \leq C\, r^{-|a|/p} \Bigg[\sum_{\substack{|\alpha|<km, \\ \alpha\cdot a>km}} \int_{|x-y|>2|z|} [x-y]^{-|a|+km-\alpha\cdot a} \, [z]^{\alpha\cdot a} \, dy$$

$$+ \sum_{|\alpha|=km+1} \int_{|x-y|>2|z|} [x-y+\theta z]^{-|a|+km-\alpha\cdot a} \, [z]^{\alpha\cdot a} \, dy \Bigg].$$

Como $[x-y+\theta z] \geq [x-y] - [\theta z] \geq [x-y] - [z] \geq [x-y]/2$, resulta

$$|J_1| \leq C\, r^{-|a|/p} \sum_{\substack{\alpha.a > km \\ |\alpha| < km+1}} \int_{[x-y] \geq 2[z]} [x-y]^{-|a|+km-\alpha.a} [z]^{\alpha.a}\, dy$$

Integrando en coordenadas polares parabólicas resulta,

$$|J_1| \leq C\, r^{-|a|/p} \sum_{\substack{\alpha.a > km \\ |\alpha| < km+1}} [z]^{\alpha.a} \int_{2[z]}^{\infty} t^{-|a|+km-\alpha.a+|a|-1}\, dt$$

$$= C\, r^{-|a|/p} [z]^{km}.$$

Para estimar J_2 se utiliza que, en virtud del corolario (2.15) si $\alpha.a = km$, entonces $D^{\alpha} h$ es un núcleo integral singular parabólico. Por lo tanto, el operador maximal asociado,

$$K_{\alpha}^{*} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{[x-y]>\varepsilon} D^{\alpha} h(x-y)\, f(y)\, dy \right|,$$

es acotado en L^2 (ver [7]). Luego,

$$|J_2| = \left| \int_{[x-y]>2[z]} \sum_{\alpha\cdot a=km} D^\alpha h(x-y)(z^\alpha/\alpha!)\, b(y)\, dy \right|$$

$$\leq C \sum_{\alpha\cdot a=km} [z]^{km} \left| \int_{[x-y]>2[z]} D^\alpha h(x-y) b(y)\, dy \right|$$

$$\leq C\,[z]^{km} \sum_{\alpha\cdot a=km} K_\alpha^* b(x) .$$

En consecuencia, se ha obtenido que

$$|f(x+z) - P(x,y)| \leq C\, r^{-|a|/p} [z]^{km} + C\,[z]^{km} \sum_{\alpha\cdot a=km} K_\alpha^* b(x) ,$$

y por lo tanto,

$$\rho^{-km} \left[\rho^{-|a|} \int_{[z]<\rho} |f(x+z) - P(x,z)|^q\, dz \right]^{1/q}$$

$$\leq C\, r^{-|a|/p} + C \sum_{\alpha\cdot a = km} K_\alpha^* b(x) \ .$$

Tomando el supremo en $\rho > 0$ resulta que si $|x| \leq 4r$, entonces

$$N(F,x) \leq C \left(r^{-|a|/p} + \sum_{\alpha\cdot a = km} K_\alpha^* b(x) \right) .$$

Elevando a la p e integrando esta desigualdad, obtenemos

$$\int_{|x|<4r} N(F,x)^p \, dx \leq C \int_{|x|<4r} r^{-|a|} dx + C \sum_{\alpha\cdot a = km} \int_{|x|<4r} (K_\alpha^* b(x))^p \, dx$$

$$\leq C + C \sum_{\alpha\cdot a = km} \int_{|x|<4r} (K_\alpha^* b(x))^p \, dx \ .$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $r = 2/p > 1$ al segundo sumando, se obtiene,

$$\int_{|x|<4r} (K_\alpha^* b(x))^p \, dx \leq \left(\int_{|x|<4r} (K_\alpha^* b(x))^2 \, dx \right)^{p/2} \left(\int_{|x|<4r} dx \right)^{1-p/2}$$

$$\leqslant C \left(\int_{|x|<r} |b(x)|^2 \, dx \right)^{p/2} r^{|a|(1-p/2)}$$

$$\leqslant C \, r^{-|a|} \, r^{|a|p/2} \, r^{|a|} \, r^{-|a|p/2} = C$$

Por lo tanto,

$$\int_{|x|<4r} N(F,x)^p \, dx \leqslant C \, ,$$

donde la constante C no depende del átomo b en cuestión.

(2.28) TEOREMA. Si $|a|/p < km + |a|/q$, el operador L^m es un isomorfismo entre $\mathcal{H}^p_{q,km}$ y H^p

Dempstración. Dada $F \in \mathcal{H}^p_{q,km}$, por el lema (2.19), si $\phi \in \mathcal{S}$ tenemos

$$(L^m F)^*(x) \leqslant C \; N(F,x)$$

donde C depende de ϕ solamente. Luego,

$$\int \left[(L^m F)^* \right]^p (x)\, dx \leq C \int N(F,x)^p\, dx$$

o sea que

$$\| L^m F \|_{H^p} \leq C \, \| F \|_{\mathcal{H}^p_{q,m}}$$

Además, por el lema (2.16), el operador L^m es inyectivo. Por otra parte, dada $f \in H^p$, sean $\{b_j\}$ una sucesión de p-átomos de orden $N \geq km + |a|/q$ y $\{\lambda_j\}$ una sucesión numérica tales que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \, b_j \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \leq C \, \| f \|^p_{H^p}$$

Sea $h_j(x) = (h * b_j)(x)$ la solución de la ecuación $L^m u = b_j$ y sea A_j la clase de h_j en E^q_{km}.

Por el lema (2.23), tenemos que $\int N(A_j,x)^p dx < C$, donde C es una constante que no depende de j. Luego, como $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$ en virtud del lema (1.13) tenemos que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j$ converge absolutamente en $\mathcal{H}^p_{q,km}$ y además, si $F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j$, por el lema (1.5),

$$\int N(F,x)^p dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \int N(A_j,x)^p dx$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p < C \, \|f\|^p_{H^p} .$$

Luego,

$$\|F\|_{\mathcal{H}^p_{q,m}} < C \, \|f\|_{H^p}$$

Por otra parte, por el lema (2.18) sabemos que L^m es continuo de $\mathcal{H}^p_{q,km}$ en S' y por lo tanto, $L^m F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j L^m A_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j = f$, con lo que hemos terminado la demostración del teorema.

Bibliografía

1- A. P. Calderón y A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Advances in Mathematics 16 (1975), 1-64.

2- A. B. E. Gatto, J. R. Jiménez y C. Segovia, On the solutions of the equation $\Delta^m F = f$ for $f \in H^p$, Actas de A Conference on harmonic analysis and a celebration of Professor Antoni Zygmund 80th. birthday.

3- R. A. Macías y C. Segovia, A descomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, Advances in Mathematics 33 (1979), 271-309.

4- A. P. Calderón, Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions, Studia Mathematica 44 (1972), 563-582.

5- A. P. Calderón y A. Zygmund, Local properties of solutions of elliptic partial differential equations, Studia Mathematica 20 (1961), 171-225.

6- R. R. Coifman y G. Weiss, Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenes, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, Berlín, 1971.

7- C. Sadosky, On some properties of a class of singular integrals, Studia Mathematica 27 (1966), 73-86.

8- A. B. E. Gatto, An atomic descomposition of distributions in parabolic H^p spaces, Revista de la Unión Matemática Argentina 29 (1980), 169-179.