Implicaciones clásicas y cuánticas del principio de equivalencia fuerte

Chimento, L. P.

1981

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FISICA

" IMPLICACIONES CLASICAS Y CUANTICAS DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA FUERTE "

Lic. L.P. Chimento

Para optar al título de
Doctor en Ciencias Físicas

Director: Prof. Dr. M. Castagnino

- 1.981 -

1706

A mis padres.

INDICE

	Introducción..	1
1.	Teorías de la gravitación en el espacio-tiempo plano de la relatividad especial	7
1.1	Principio de mínima acción	7
1.2	La gravitación como campo escalar	8
1.3	La gravitación como campo vectorial.........................	10
1.4	La gravitación como campo tensorial.........................	11
1.5	Inconsistencias internas de la teoría tensorial..............	15
2.	Teorías de campo realizables en el espacio-tiempo plano......	21
2.1	Lagrangianos compatibles con el espacio-tiempo plano.........	21
2.2	Ecuación de movimiento	27
2.3	Principio de equivalencia fuerte y espacio-tiempo plano......	31
3.	Estructura de la ecuación de movimiento en el espacio-tiempo plano y el electromagnetismo como caso particular............	34
3.1	Desarrollo en serie de la fuerza en la ecuación de movimiento	34
3.2	La teoría electromagnética como caso particular..............	40
4.	Principio variacional y principio de equivalencia fuerte.....	43
4.1	La ecuación de movimiento en un espacio-tiempo general.......	43
4.2	Como el principio de equivalencia fuerte selecciona el Lagrangiano de interacción...	51
5.	Aspectos cuánticos del principio de equivalencia fuerte......	66

5.1 Influencias de la gravitación en la teoría de campos cuántica....... 66
5.2 Creación de partículas de spin- 0 por un universo en expansión....... 68
5.3 Ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo curvo........ 70
5.4 Solución de la ecuación de Klein-Gordon en un universo en expansión....... 72
5.5 Construcción del modelo de partícula y tranformación de Bogoliubov....... 79
5.6 Estimación de la densidad de partículas creadas............ 86

6. Creación de partículas de spin 1/2 por un universo en expansión....... 100
6.1 Introducción....... 100
6.2 Ecuación de Dirac en el espacio-tiempo curvo............... 102
6.3 Solución de la ecuación de Dirac en un universo en expansión espacialmente plano....... 106
6.4 Construcción del modelo de partícula, tranformación de Bogoliubov y conjugación de carga....... 121
6.5 Determinación de la densidad de partículas creadas......... 128
6.6 Solución para partículas de masa nula en reposo............ 134
Conclusiones....... 136
Apéndice (A-1)....... 137
Apéndice (A-2) 143
Apéndice (A-3) 148
Apéndice (A-4) 152
Agradecimientos....... 154
Bibliografía 155

INTRODUCCION

Para entender la naturaleza clásica del principio de equivalencia fuerte, comenzaremos estudiando las teorías de la gravitación en el espacio-tiempo plano de la Relatividad Especial. En particular, usando el principio variacional de mínima acción, desarrollaremos la teoría escalar, vectorial y tensorial del campo gravitatorio. En estas teorías,que por otra parte no resultan satisfactorias, el campo no tiene ningún significado geométrico. En cambio, en Relatividad General el campo gravitatorio es directamente el tensor métrico, el cual, tiene un significado geométrico bien conocido, puesto que nos indica como debemos medir distancias en el espacio-tiempo curvo. Por otra parte, con argumentos sencillos, mostraremos que estas teorías tienen serias dificultades internas y que además, fallan por no predecir correctamente las tres experiencias clásicas de la Relatividad General, es decir, la precesión del perihelio de mercurio, la deflexión de la luz por el sol y el corrimiento al rojo. En general, las teorías de la gravitación en el espacio-tiempo plano desarrolladas por Whitehead[1], Birkhoff[2], Belinfante y Swithart[3], Deser y Laurent[4], Thirring[5], Mavridés[6], etc. deben introducir hipótesis adicionales para explicar aquellas experiencias; en otras palabras, ninguna de ellas es capaz de predecirlas en forma natural como es el caso, en la teoría de Einstein. Mas aún, las teorías planas de la gravitación no pueden satisfacer el principio de equivalencia, pero en cambio, si pueden las teorías que se desarrollan en el espacio-tiempo curvo, como es el caso en la de Nordstrõn[7], Jordan[8], Thirry[9], Brans y Dicke[10], Yilmaz[11-12], etc.

Desde el punto de vista experimental[13] puede argumentarse que las mediciones del corrimiento al rojo gravitacional o la dilatación tempo ral gravitacional deben ser considerados como experimentos cruciales, los cuales, escencialmente deciden entre los dos tipos de teorías, es decir, entre teorías de la gravitación que se realizan en el marco del espacio-tiempo plano o curvo.

En este trabajo nos vamos a ocupar más por los argumentos teóricos (14-15-16) que experimentales para decidir entre ambos grupos de teorías. En efecto, estudiaremos con toda generalidad las teorías de campo que pueden desarrollarse en el espacio-tiempo plano, tal que, la ecuación de movimiento de una partícula en dicho campo se obtenga a partir del principio variacional de mínima acción. En ese caso, demostraremos que el Lagrangiano de interacción entre partícula y campo es homogéneo de grado 1 en las cuadrivelocidades. Además, un estudio de la ecuación de movimiento para Lagrangianos de interacción con estas características, nos conduce rapidamente a que las posibles teorías de la gravitación compatibles con el espacio-tiempo plano no pueden satisfacer el principio de equivalencia fuerte.

Vemos pues, que la introducción del principio de equivalencia fuerte tiene consecuencias muy importantes no solo desde el punto de vista experimental [13] sino también, desde el punto de vista teórico, puesto que en ambos casos, excluye las teorías planas de la gravitación y nos conduce sin más, a estudiar los efectos gravitacionales en el contexto del espacio-tiempo curvo.

Para estudiar más a fondo la naturaleza del campo gravitatorio,nos proponemos analizar cuales son las consecuencias de las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo arbitrario (obtenidas claro está, a través del principio variacional de mínima acción) y del principio de quivalencia fuerte. Por supuesto que no hacemos ninguna hipótesis sobre la geometría del espacio-tiempo. En otras palabras, queremos ver si el espacio-tiempo curvo resulta ser el lugar natural donde, el principio variacional de mínima acción y el principio de equivalencia fuerte no conducen a ninguna contradicción en la ecuación de movimiento.

Después de una demostración extensa probamos que efectivamente, estas dos hipótesis conducen de una manera totalmente natural, al Lagrangiano de la Relatividad General de Einstein para una partícula en prescencia de un campo gravitatorio. Además, se ve claramente que la existencia de dicho campo afecta la geometría del espacio-tiempo, transformándola en rimanniana.

Viendo que las teorías curvas de la gravitación, son las únicas capaces de satisfacer el principio de equivalencia fuerte, adoptaremos las ecuaciones de Einstein para describir el campo gravitatorio y analizaremos los aspectos cuánticos del principio de equivalencia fuerte.

Los estudios anteriores nos muestran claramente que la teoría de campos cuántica, que conocemos en el espacio-tiempo plano, debe generalizarse al espacio-tiempo curvo para contener al campo gravitatorio. Como en la actualidad no se observa una producción importante de partículas por efecto de la expansión del Universo, resulta entonces, que los efectos gravitatorios sólo tendrán un efecto importante en las cercanias de un Agujero Negro, o a nivel cosmológico. Nosotros nos ocuparemos de este segundo aspecto y escencialmente estudiaremos la creación de partículas debido a la expansión del Universo desde sus primeros instantes de vida hasta la actualidad. Para ello, tomaremos el modelo cosmológico más sencillo, es decir, el Universo en expansión de Robertson-Walker con superficie espacial plana. Además, si tenemos en cuenta que vamos a trabajar con la teoría de Campos Cuántica en el espacio-tiempo curvo, es evidente que el principio de equivalencia fuerte debe jugar un papel muy importante en el mecanismo de creación de partículas a expensas del campo gravitatorio, puesto que dicho principio, no solo caracteriza el campo gravitatorio sino que también, es posible hacerlo satisfacer en las teorías curvas de la gravitación[13].

Es importante destacar que en todo el siguiente desarrollo, el campo gravitatorio será tratado clásicamente, es decir que, en ningún momento será cuantificado, mas aún, lo consideraremos como un campo externo a partir del cual suponemos que se crean las partículas, de manera que, cuantificaremos sólo el campo escalar y spinorial con el propósito de calcular la densidad de partículas creadas de spin- 0 y $\frac{1}{2}$. Sin embargo, como mostró Hawking[17] por argumentos heurísticos, es importante resaltar que esta teoría semiclásica de campos, está limitada para tiempos de vida del Universo mayores que 10^{-43} seg. (es el llamado tiempo de Planck) ya que, para tiempos menores el campo gravitatorio debería cuantificarse.

Siguiendo el trabajo de Castagnino y Weder[18] en el cual se introduce el principio de equivalencia cuántico para demostrar la implementabilidad de la teoría escalar, aplicaremos dicho principio, el cual postula que "localmente la teoría de campos cuántica en el espacio-tiempo curvo se reduce a la teoría de campos en el espacio-tiempo plano" para estudiar sus consecuencias cosmológicas en un Universo en expansión, por efecto de la creación de partículas escalares neutras.

Exepto casos particulares (Universo estático de Einstein[19]) sucede que en general el núcleo G_1 para la ecuación de Klein-Gordon (generalización de núcleo Δ_1) no está bien definido, puesto que depende de la base que elegimos para desarrollar el campo[19], en consecuencia, tampoco lo estará el modelo de partícula[20], es por esta razón que se introduce el principio de equivalencia cuántico[18-21], dado que él permite seleccionar un único G_1 para cada superficie de Cauchy y por ende, un único modelo de partícula para cada superficie de Cauchy. En otras palabras, el principio de equivalencia cuántico nos permite elegir la base que define el modelo de partícula sobre cada superficie de Cauchy. Luego, existirá una transformación de Bogoliubov que relaciona ambas bases, la cual a su vez induce una mezcla de los operadores de creación y aniquilación, dando origen a una creación neta de partículas.

Dado que en general la solución de la ecuación de Klein-Gordon y la condiciones iniciales que determina el principio de equivalencia cuántico no pueden obtenerse en forma exacta, serán desarrolladas hasta segundo orden en serie de potencias de la cantidad H/ω, donde, H es la constante de Huble y ω es la energía de la partícula creada. Esta cantidad es un parámetro físico muy importante porque, representa la relación entre la longitud de onda asociada a la partícula creada con el radio del Universo en ese instante.

Se verá también que la densidad de partículas escalares creadas es proporcional a la curvatura del Universo. Además, mediante algunas aproximaciones sencillas mostraremos que el flujo de partículas creadas por unidad de energía cinética y por unidad de ángulo sólido, sigue una ley cuya dependencia con la energía cinética, coincide bastante bien con el espectro obtenido experimentalmente para los rayos cósmicos difusos X y γ de fondo[22].

En el último capítulo estudiaremos la creación de partículas de spin- $\frac{1}{2}$ por un Universo en expansión del tipo Robertson-Walker con super ficie espacial plana. Como en el caso escalar, nuevamente aplicaremos el principio de equivalencia cuántico para definir el modelo de partícula. Aunque vamos a trabajar con spinores de Dirac, veremos que es posible tratar el problema de una forma similar al caso escalar, pero, debemos destacar que los resultados obtenidos muestran claramente que la naturaleza de este proceso es totalmente diferente al caso escalar, ya que en concordancia con el caso escalar, se obtiene una creación nula de partículas a primer orden en H/ω, pero, a segundo orden resulta que el principio de equivalencia cuántica, conduce a un sistema algebraico incompatible para determinar el valor de los campos sobre la superficie de Cauchy, con lo cual, el modelo de partícula no puede definirse. Esta dificultad era de esperar ya que el principio de equivalencia fuerte impone sólo condiciones locales sobre los campos y por lo tanto, no es verdad que podamos extender a toda la superficie de Cauchy (como postula el principio de equivalencia cuántica) los valores que deben tomar dichos campos. Para superar estas dificultades, en estos momentos estamos estudiando algunas formas alternativas del principio de equivalencia cuántico. Por último estudiaremos el caso particular de partículas de spin $\frac{1}{2}$ y masa nula en resposo.

1. TEORIA DE LA GRAVITACION EN EL ESPACIO-TIEMPO PLANO DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

1.1 PRINCIPIO DE MINIMA ACCION

Para obtener las ecuaciones de movimiento de las partículas en un campo dado y las ecuaciones que determinan el campo, se parte del principio de mínima acción. Esto asegura(*) que las ecuaciones sean covariante Lorentz, además, garantiza la existencia de un tensor energía-impulso y su conservación.[23] La acción S para el sistema formado por las partículas y el campo ha de tener tres términos;[24]

$$S = S_p + S_{pc} + S_c \tag{1.1}$$

donde, Sp es la acción que corresponde a las partículas materiales exclusivamente y depende sólo de sus propiedades, de manera que, Sp es la acción de la partícula libre, Spc es la acción que depende de la interacción entre las partículas y el campo y por último Sc es la acción que depende únicamente del campo, vale decir: Sc es la acción que corresponde al campo cuando no existen partículas materiales.

Las teorías desarrolladas a partir del principio de mínima acción en el espacio-tiempo plano son de tres tipos,[5-25] según se considere que el potencial gravitacional es escalar, vectorial o tensorial. Cada una de éstas presentan sus propias dificultades y en consecuencia, todas ellas fallan al no concordar con las tres experiencias clásicas; precesión del perihelio de mercurio, deflexión de la luz, y corrimiento al rojo. De todas ellas la mejor es la teoría tensorial, la cual, sin

(*) Si el Lagrangiano es invariante de Lorentz embargo, es internamente inconsistente. A continuación haremos un breve comentario de las teorías escalar y vectorial, luego, estudiaremos en detalle las inconsistencias de la teoría tensorial. En este capítulo nos limitaremos a estudiar los Lagrangianos más sencillos y naturales dejando para mas adelante las generalizaciones.

1.2 LA GRAVITACION COMO CAMPO ESCALAR

Sea $x^i(s)$ la línea de universo de una partícula de prueba en un campo exterior, parametrizado mediante su tiempo propio S, entonces, la acción de la partícula libre es:

$$S_P = -\frac{m}{2}\int \dot{x}^i(s)\,\dot{x}^K(s)\,\eta_{iK}\,ds \qquad (1.2)$$

donde: $\dot{x}^i(s) = dx^i(s)/ds = U^i$; $ds = (\eta_{iK}\,dx^i dx^K)^{1/2}$ y m es la masa en reposo. Por la anterior elección del parámetro se ve que U^i satisface $\eta_{iK}U^iU^K = 1$. Los índices serán subidos y bajados con el tensor métrico η_{iK} cuya signatura es (1, -1, -1, -1).

El término de interacción Spc entre la partícula y el campo es en el caso más sencillo:[5]

$$S_{PC} = \frac{1}{2}\int \Phi\, T^{iK}\,\eta_{iK}\,d^4x \qquad (1.3)$$

donde, Φ es el campo escalar y T^{iK} es el tensor energía impulso de todos los campos no gravitacionales y la materia presentes. Para una partícula puntual :

$$T^{ik}(x^i) = \int m \frac{dx^i(s)}{ds} \frac{dx^k(s)}{ds} \delta^4(x^i - x^i(s))\,ds \qquad (1.4)$$

donde, m es la misma masa que aparece en (1.2). Esto nos asegura que se cumple el principio de equivalencia debil.

La acción del campo escalar S_c^e viene dada,en el caso más sencillo, por:(26)

$$S_c^e = \frac{1}{8\pi G} \int \eta^{ik}\, \Phi_{,i}\, \Phi_{,k}\, d^4x \qquad (1.5)$$

donde G es una constante y $\Phi_{,i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$. La ecuación de movimiento para la partícula, se obtiene variando en la acción S las coordenadas de las partículas, es decir que, para esa variación debe ser:

$$\delta S = 0 = \delta\left(S_p + S_{pc}\right) \qquad (1.6)$$

análogamente, las ecuaciones que determinan el campo, se obtienen variando las variables del propio campo, o sea que:

$$\delta S = 0 = \delta\left(S_{pc} + S_c\right) \qquad (1.7)$$

En el caso de que haya más de una partícula, la acción total del sistema se calcula sumando la acción (1.2) y (1.3), para todas las partículas.

Aplicando las ecuaciones que se deducen de (1.6) y (1.7) para el campo escalar a un rayo de luz que pasa cerca del sol, se encuentra que no se deflecta.[25] En consecuencia, esta teoría del campo gravitacional escalar debe ser descartada por no coincidir con los datos experimentales.

1.3 LA GRAVITACION COMO CAMPO VECTORIAL

Consideremos ahora que el campo gravitacional está descripto por un potencial vector Φ_i. Para construir la acción S^V del sistema partícula-vector, observamos que la acción de la partícula libre Sp viene dada por (1.2), pero, como ésta no depende del campo, sólo debemos modificar Spc y Sc. Sin embargo, estos términos son fáciles de escribir, porque, podemos usar como modelo la acción del campo electromagnético.[25]

$$S^V_{elec.} = \frac{1}{2} m \int \dot{x}^i(s)\dot{x}_i(s)\,ds + \int J^i_{elec.} A_i(x)\,d^4x - \frac{1}{16\pi}\int F_{ik}F^{ik} d^4x \qquad (1.8)$$

que también, responde a un potencial vector A_i. De manera que, para un campo gravitacional vectorial Φ_i se tiene la siguiente acción:[25]

$$S^V_g = \frac{1}{2} m \int \dot{x}^i(s)\dot{x}_i(s)\,ds + \int J^i_g \Phi_i\, d^4x + \frac{1}{16\pi}\int G_{ik}G^{ik} d^4x \qquad (1.9)$$

donde, en el caso electromagnético:

$$J^{i}_{elec.}(x^i) = e\int \dot{x}^i(s)\, \delta^4(x^i - x^i(s)) \quad ; \quad F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i} \qquad (1.10)$$

y en el caso gravitatorio:

$$J^{i}_{g}(x^i) = m\int \dot{x}^i(s)\, \delta^4(x^i - x^i(s)) \quad ; \quad G_{ik} = \Phi_{i,k} - \Phi_{k,i} \qquad (1.11)$$

Si ahora a partir de la acción:

$$\check{S}_c = \frac{1}{16\pi G}\int G^{ik} G_{ik}\, d^4x = \int \mathcal{L}\, d^4x$$

se calcula el tensor energía-impulso del campo:

$$T^{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\ell,k}} \Phi_{\ell,i} - \eta_{ik} \mathcal{L} \qquad (1.12)$$

Se puede ver que usando $T^{44} = \mathcal{H}$ (densidad de energía), la onda gravitacional vectorial transporte energía negativa.[25]

De lo expuesto en ambas teorías, escalar y vectorial, se concluye que no pueden ser aceptadas para describir el campo gravitatorio.

1.4 LA GRAVITACION COMO CAMPO TENSORIAL

A continuación vamos a estudiar en detalle la teoría tensorial, dado que ésta es la que arroja resultados más parecidos a los predichos por la teoría de la Relatividad General. Sus fallas escencialmente son de dos tipos, la primera, es que el valor de la precesión del perihelio de mercurio,[25] es 4/3 del valor predicho por la Relatividad General y la segunda, es que posee tres graves inconsistencias internas, dos de ellas bien conocidas; a) distinto grupo de Gauge para la ecuación de movimiento y la de campo[5-25] b) incompatibilidad entre ambos grupos de ecuaciones[25] y c) hemos hallado que el lagrangiano de interacción propuesto en esta teoría, no puede ser admitido en el espacio-tiempo plano donde se desarrolla la misma.

Para obtener la ecuación de movimiento de una partícula de prueba en un campo tensorial, partimos de la acción de la partícula libre(1.2) más la acción de interacción entre partícula y campo, esta última es:[5]

$$S^{T}_{pc} = \frac{1}{2}\int \varphi_{ik}\, T^{ik}\, d^4 x \qquad (1.13)$$

donde, el potencial φ_{ik} es un tensor simétrico y T^{ik} es el tensor energía impulso definido en (1.4), si ahora reemplazamos T^{ik} en (1.13), integramos en todo el espacio-tiempo y luego, le sumamos (1.2) resulta:

$$S^{T}_{p+pc} = S_p + S^{T}_{pc} = \frac{1}{2} m \int (\eta_{ik} + \varphi_{ik})\, \dot{x}^i \dot{x}^k\, ds \qquad (1.14)$$

aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \; ; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\eta_{ik} + \varphi_{ik})\, \dot{x}^i \dot{x}^k \qquad (1.15)$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$(\eta_{ik} + \varphi_{ik})\ddot{x}^{k} + \Gamma_{\ell s i}\,\dot{x}^{\ell}\dot{x}^{s} = 0 \qquad (1.16)$$

donde:

$$\Gamma_{\ell s i} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{\ell i,s} + \varphi_{si,\ell} - \varphi_{\ell s,i}\right) \qquad (1.17)$$

Las ecuaciones del campo se encuentran minimizando la acción de interacción S^{T}_{pc} más la del propio campo S^{T}_{c}, esta última es:

$$S_{c}^{T} = \int \mathcal{L}_{c}^{T}\, d^{4}x$$

donde; para hallar el mejor acuerdo con la experiencia, es:[26]

$$\mathcal{L}_{c}^{T} = \frac{1}{64\pi G}\left\{\varphi_{ik,\ell}\,\varphi^{ik\ell} - 2\varphi_{ik,\ell}\,\varphi^{\ell k,i} + 2\varphi_{ik,}{}^{i}\varphi_{s}^{s,k} - \varphi^{s}_{s,\ell}\,\varphi_{k}^{k,\ell}\right\} \qquad (1.18)$$

entonces:

$$S^{T}_{pc+c} = S^{T}_{pc} + S^{T}_{c} \qquad (1.19)$$

será mínima, para una variación arbitraria del campo φ_{ik} si y sólo si se cumplen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\ell}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}^{T}}{\partial \varphi_{ik,\ell}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}^{T}}{\partial \varphi_{ik}} = 0 \qquad (1.20)$$

donde:

$$\mathcal{L}^{T} = \frac{1}{2}\varphi_{ik}T^{ik} + \mathcal{L}_{c}^{T} \qquad (1.21)$$

Para calcular $\dfrac{\partial \mathcal{L}^T}{\partial \varphi_{ik,\ell}}$ hagamos una variación $\delta\varphi_{ik,\ell}$ en las derivadas del campo y veamos cual es el cambio en el Lagrangiano, es decir:

$$\delta \mathcal{L}^T = \frac{1}{32\pi G}\left\{ \varphi^{ik,\ell} - 2\varphi^{\ell k,i} + \varphi_s{}^{\ell,s}\eta^{ik} + \varphi_s{}^{s,k}\eta^{\ell i} - \varphi_s{}^{s,\ell}\eta^{ik} \right\} \delta\varphi_{ik,\ell}$$

por último, simetrizando en (ik) se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^T}{\partial \varphi_{ik,\ell}} = \frac{1}{32\pi G}\left\{ \varphi^{ik,\ell} - \varphi^{\ell k,i} - \varphi^{\ell i,k} + \frac{1}{2}\eta^{\ell i}\varphi_s{}^{s,k} + \frac{1}{2}\eta^{\ell k}\varphi_s{}^{s,i} + \eta^{ik}\left(\varphi_s{}^{\ell,s} - \varphi_s{}^{s,\ell}\right) \right\} \quad (1.22)$$

reemplazando esta derivada en (1.20), se obtiene la ecuación que determina el campo dada la fuente $T^{ik}(x)$, ésta es:

$$\varphi^{ik,\ell}{}_{\ell} - \varphi^{\ell k,i}{}_{\ell} - \varphi^{\ell i,k} + \varphi_s{}^{s,ik} + \eta^{ik}\left(\varphi^{s\ell}{}_{,s\ell} - \varphi_{s,\ell}^{s\ \ \ell}\right) = 16\pi G T^{ik} \quad (1.23)$$

Resumiendo, las ecuaciones fundamentales de la teoría tensorial, son las ecuaciones de movimiento (1.16) y la ecuación de campo (1.23)

$$(\eta_{ik} + \varphi_{ik})\ddot{x}^k + \Gamma_{\ell s i}\dot{x}^\ell \dot{x}^s = 0$$

$$(1.24)$$

$$G^{ik} = 16\pi G T^{ik}$$

donde, G^{ik} es el miembro izquierdo de (1.23). Como mencionamos anteriormente, esta teoría predice un corrimiento del perihelio de mercurio[25] que difiere en un 30 % del calculado en Relatividad General. El ángulo que se deflecta un rayo de luz que pasa cerca del sol, coincide con el calculado en Relatividad General. Con respecto a las ondas gravitacionales, las predicciones de esta teoría coinciden también con la Relatividad General, ya que las ecuaciones de campo de Einstein linearizadas son idénticas a las ecuaciones de campo (1.23)

1.5 INCONSISTENCIAS INTERNAS DE LA TEORIA TENSORIAL

De las consideraciones anteriores, se desprende que la teoría tensorial sería una buena candidata para describir la gravitación, sino fuera por sus inconsistencias internas. Estas dificultades las vamos a estudiar ahora en detalle.

a) Inconsistencia de Gauge: Dado que la ecuación de campo (1.23) es lineal en el potencial φ_{ik} (T^{ik} no depende del campo) admite entonces un grupo de gauge, es decir que, si hacemos la sustitución:

$$\varphi_{ik} \longrightarrow \varphi_{ik} + B_{i,k} + B_{k,i} \tag{1.25}$$

no cambia la ecuación de campo, por lo tanto podemos en principio exigir cuatro condiciones auxiliares sobre el potencial φ_{ik}, ya que Bi es un campo vectorial totalmente arbitrario, pero, la ecuación de movimiento (1.16) no es invariante frente al cambio Gauge (1.25), en consecuencia, el movimiento de la partícula dependería del Gauge que tomásemos para resolver la ecuación de campo, como esto es físicamente inadmisible (La línea de universo de una partícula es única), entonces para usar el grupo de ecuaciones (1.24) debemos explicitar en que gauge las estamos resolviendo.

b) Incompatibilidad entre la ecuación de movimiento y la ecuación de campo: Si se calcula la divergencia del tensor G^{ik} se encuentra que es nula, en consecuencia:

$$G^{ik}{}_{,k} = 0 = 16\pi G T^{ik}{}_{,k} \qquad (1.26)$$

se anula la divergencia del tensor energía-impulso, pero de (1.4) resulta que:

$$T^{ik}{}_{,k} = m\int \frac{dx^i(s)}{ds}\frac{dx^k(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta^4(x - x(s))\,ds$$

como $\delta^4(x-x(s))$ depende de la diferencia $x^i - x^i(s)$ podemos reemplazar $\frac{\partial}{\partial x^k}$ por $-\frac{\partial}{\partial x^k(s)}$ cuando está actuando sobre la función $-\delta$, notando que:

$$\frac{dx^k(s)}{ds}\,\frac{\partial}{\partial x^k(s)}\,\delta^4(x - x(s)) = \frac{d}{ds}\,\delta^4(x - x(s))$$

nos queda entonces que:

$$T^{ik}{}_{,k} = -m\int \dot{x}^i \frac{d}{ds}\delta^4(x-x(s))ds = m\int \ddot{x}^i \delta^4(x-x(s))ds \qquad (1.27)$$

el último paso se obtuvo integrando por partes.

De (1.27) se ve entonces que, para que se cumpla $T^{ik}{}_{,k}=0$ debe ser $\ddot{x}=0$ Esto significa que el campo gravitatorio no afecta el movimiento de la partícula. Pero, esto contradice la ecuación de movimiento (1.16), la cual fue obtenida de un principio variacional. De aquí se concluye que la teoría tensorial de la gravitación es inconsistente, porque , la ecuación (1.23) requiere que $T^{ik}{}_{,k}=0$, mientras que la ecuación (1.16) la excluye.

c) El Lagrangiano de interacción propuesto no puede ser admitido en un espacio-tiempo plano: para hacer una primera demostración de esta afirmación, hallemos las ecuaciones de movimiento que se derivan del siguiente Lagrangiano, que no siendo totalmente general contiene sin embargo el caso estudiado:

$$\mathcal{L} = \eta_{ik}\,\dot{u}^i u^k + F(E) \tag{1.28}$$

donde, F es una función arbitraria que no depende del parámetro S y E es un escalar de Lorentz homogéneo de grado n en las cuadrivelocidades $\dot{u}^i$, es decir que:

$$\frac{\partial E}{\partial u^i}\,\dot{u}^i = n\,E \tag{1.29}$$

Es claro, entonces, que para $E=\varphi_{ik}u^i u^k$ y $F(E)=E$ el Lagrangiano (1.28) se reduce al (1.15) que hemos usado para obtener las ecuaciones de movimiento (1.16). Si aplicamos ahora las ecuaciones de Lagrange a (1.28), obtenemos:

$$\eta_{ik}\,\mathring{u}^k + \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dS}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\} = 0 \tag{1.30}$$

éstas, son las ecuaciones de movimiento para un Lagrangiano de interacción genérico F (E). Multiplicando (1.30) por $\dot{u}^i$ nos queda:

$$\eta_{ik}\,\mathring{u}^k u^i + \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\} u^i = 0$$

pero, como el espacio-tiempo es plano : $2\eta_{ik}\mathring{u}^k u^i = \frac{d}{ds}(\eta_{ik}u^i u^k) = 0$,

resulta que:

$$\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\} u^i = 0$$

Si llamamos ;

$$F' = \frac{dF}{dE} \quad ; \quad \dot{F} = \frac{dF}{ds} \tag{1.31}$$

entonces la expresión anterior puede escribirse como :

$$(F')^{\circ}\frac{\partial E}{\partial u^i}u^i + F'\left\{\frac{\partial^2 E}{\partial u^k \partial u^i}\mathring{u}^k u^i + \frac{\partial^2 E}{\partial x^k \partial u^i}u^i u^k\right\} - F'\frac{\partial E}{\partial x^i}u^i = 0 \tag{1.32}$$

Derivando (1.29) respecto de u^k resulta:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^k \partial u^i}u^i = (n-1)\frac{\partial E}{\partial u^k} \tag{1.33}$$

luego, reemplazando (1.29) y (1.33) en (1.32) nos queda que :

$$\frac{d}{ds}\left(nEF' - F\right) = 0$$

Un par de integraciones simples nos conduce a la siguiente función:

$$F(E) = n c_1 E^{1/n} + c_2 \qquad (1.34)$$

como el Lagrangiano (1.28) se le puede agregar cualquier constante sin que cambien las ecuaciones de movimiento, podemos tomar $c_2 = 0$ sin pérdida de generalidad, por último nos queda:

$$F(E) = n c_1 E^{1/n} \qquad (1.35)$$

Veamos ahora que F (E) es homogénea de grado 1 en las cuadrivelocidades; para ello, usamos las ecuaciones (1.29)y (1.35), de manera que:

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} u^i = \frac{dF}{dE}\frac{\partial E}{\partial u^i} u^i = n c_1 E^{1/n} = F(E) \qquad (1.36)$$

por lo tanto, si tomamos $E = \varphi_{ik} u^i u^k$ como en la teoría tensorial, resulta que el único Lagrangiano posible de interacción compatible con el espacio-tiempo plano (Una teoría de este tipo ha sido desarrollada por Mavridés[6]) es de la forma:

$$\mathcal{L}_{pc} = \frac{1}{2} m \sqrt{\varphi_{ik} u^i u^k} \qquad (1.37)$$

Si se hallan las ecuaciones de movimiento usando el Lagrangiano de interacción entre partículas y campo (*) (1.37) se encuentra que éstas difieren totalmente de las ecuaciones (1.16), que es la que se ajusta a los hechos experimentales, en consecuencia, concluimos que una teoría del campo gravitatorio de tipo tensorial no es posible en un espacio-tiempo plano, a menos que no se cumpla la hipótesis simplificatoria (1.28). En los dos próximos capítulos demostraremos el teorema precedente en forma mucho más general.

(*) En el capítulo 2 y 3 estudiaremos en detalle la estructura de la ecuación de movimientos para Lagrangianos de esta forma.

2. TEORIAS DE CAMPO REALIZABLES EN EL ESPACIO-TIEMPO PLANO

2.1 LAGRANGIANOS COMPATIBLES CON EL ESPACIO-TIEMPO PLANO

Al finalizar el capítulo anterior vimos que la teoría tensorial no es admisible en el espacio-tiempo plano, porque su Lagrangiano de interacción no es de la forma (1.37), por otra parte, el conjunto de Lagrangianos (1.28) quedó reducido a, aquellos en que la función F es homogénea de grado 1 en las cuadrivelocidades cuando exigimos que el espacio-tiempo fuese plano. De estas consideraciones se concluye que, en un espacio-tiempo plano el conjunto de teorías que derivan de un principio variacional están limitadas, ya que el Lagrangiano de interacción no puede ser totalmente arbitrario.

Nuestro objetivo en este capítulo es completar las afirmaciones anteriores de la siguiente manera: encontrar el conjunto de teorías que deriven de un principio variacional y que sean compatibles con el espacio-tiempo plano, luego, estudiar estas teorías y ver si ellas pueden describir el campo gravitatorio.

Para desarrollar estas ideas tomamos como modelo la acción del campo electromagnético (1.8) y la expresamos en su mayor generalidad, es decir que:

$$S = \int m\, g_{ik}(x)\, u^i u^k\, ds + \int m\, \mathcal{L}^{(I)}(x^i, u^i)\, ds + \int \mathcal{L}^{(c)}(x)\, d^4x \qquad (2.1)$$

donde, $\mathcal{L}^{(I)}$ es el Lagrangiano de interacción totalmente arbitrario, cuya única simetría es no depender explícitamente del parámetro S (como ocurre en electromagnetismo), los demás términos juegan el mismo papel que en (1.8). Suponemos también, que estamos en un espacio-tiempo curvo totalmente general con coordenadas x^i y tensor métrico g_{ik} , de manera que, el parámetro de integración S , es el tiempo propio o la longitud de arco, y $u^i = dx^i/ds$ es entonces, el vector tangente a la línea de Universo de la partícula.

Ahora bien, busquemos el conjunto de todas las teorías de campo que derivan de una sola hipótesis (con la cual estamos seguros de no tener inconsistencias internas), esto es, un único principio variacional aplicado a la acción (1.1), que además, sean compatibles con el espacio-tiempo plano, al respecto podemos establecer el siguiente teorema:[27]

<u>Teorema:</u>

Dado un Lagrangiano cuya única simetría es no depender explícitamente de la longitud de arco S, que además, satisface las condiciones mencionadas más arriba, entonces, la condición necesaria y suficiente para que el espacio-tiempo sea plano, es decir que existe algún sistema de coordenadas en el cual el tensor métrico g_{ik} sea constante en todo el espacio, es que, el Lagrangiano de la partícula más el de interacción sea de la forma:

$$\mathcal{L}^{(P+I)} = \mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i) + F(\eta_{ik} u^i u^k)$$

donde, $\mathcal{L}^{(1)}(x^i,\dot{u}^i)$ es una función homogénea de grado 1 en las cuadrivelocidades $\dot{u}^i$, la cual depende de x^i a través de algún campo tensorial y spinorial, mientras que F es una función arbitraria de $\eta_{ik} u^i u^k$, pero, distinta de $cte(\eta_{ik}u^i u^k)^{1/2}+cte$

Como queremos que las ecuaciones de movimiento de la partícula, se obtengan a partir del principio variacional de mínima acción $\delta\int \mathcal{L}\, ds=0$ aplicado a (2.1), éstas, resultan ser las ecuaciones de Lagrange (1.15) Si ahora multiplicamos (1.15) por $\dot{u}^i$ y tenemos en cuenta que $\mathcal{L}$ no depende de explícitamente del parámetro S, entonces resulta:

$$\frac{dH}{dS}=0 \quad ; \qquad H=\frac{\partial \mathcal{L}^{(P+I)}}{\partial u^i}u^i-\mathcal{L}^{(P+I)} \tag{2.2}$$

donde:

$$\mathcal{L}^{(P+I)}=g_{ik}u^i u^k+\mathcal{L}^{(I)} \tag{2.3}$$

en otras palabras, siempre que $\mathcal{L}$ no dependa explícitamente del parámetro de integración S, la cantidad H es una constante de movimiento a lo largo de la línea de Universo de la partícula. Además, por el teorema de Noether; se sabe que cada simetría conduce a una constante de movimiento y vice-versa, luego, como la única simetría del Lagrangiano es no depender explícitamente de S, entonces, H es la única constante de movimiento, o en forma más precisa, todas las constantes de movimiento son simplemente función de H .

Ahora bien, como nos interesa formular todas las teorías de campo que se derivan de la acción (2.1) en el espacio-tiempo plano, es decir, tal que existe algún sistema de coordenadas en el cual el tensor métrico $g_{ik} = \eta_{ik}$ es constante, podemos entonces, escribir el elemento de arco ds como sigue:

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i dx^k \tag{2.4}$$

luego:

$$\frac{d}{ds}\left(\eta_{ik} u^i u^k\right) = \frac{d}{ds}(1) = 0 = 2\eta_{ik}\, u^i \dot{u}^k \tag{2.5}$$

sobre todas las curvas del espacio-tiempo.

Veamos ahora que, si el lagrangiano de la partícula más el de interacción es de la forma:

$$\mathcal{L}^{(P+I)} = \mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i) + F\left(\eta_{ik} u^i u^k\right) \tag{2.6}$$

donde, $\mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i)$ es una función homogénea de grado 1 en las variables u^i y $F\left(\eta_{ik} u^i u^k\right)$ es una función arbitraria, pero distinta de $cte(\eta_{ik} u^i u^k)^{1/2} + cte$ y η_{ik} es un tensor constante en las coordenadas x^i, entonces, es suficiente para que satisfaga (2.4) y (2.5). Por lo tanto, el espacio-tiempo es plano. En efecto, como (2.6) no es función explícita de S, entonces, tenemos una única constante de movimiento, la cual, por (2.2) resulta ser:

$$H = 2zF'(z) - F(z) = cte. \tag{2.7}$$

donde:

$$z = \eta_{ik}\, u^i u^k \qquad (2.8)$$

además, hemos usado que $\mathcal{L}^{(1)}$ es homogéneo de grado 1 en u^i, es decir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i} u^i = \mathcal{L}^{(1)} \qquad (2.9)$$

Por simple inspección de la ecuación (2.7), se ve que, si $F(z) \neq z^{1/2} + cte$ entonces:

$$z = \eta_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = cte. \qquad (2.10)$$

sobre la línea de Universo de la partícula. Ahora bien, si fijamos la constante en (2.10) pidiendo que $z=1$ en el punto x_0 para todos los vectores tangentes dx^i/ds , entonces, podemos desplazarnos por medio de una geodésica a un punto cualquiera x^i de manera que, en el punto x^i tendremos nuevamente $z=1$. En consecuencia, es una constante absoluta y resulta que el elemento de arco viene dado por:

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i dx^k$$

con el tensor métrico η_{ik} constante, por lo tanto, el espacio-tiempo es plano.

Si ahora consideramos que el espacio-tiempo es plano, entonces por (2.5), resulta que z es constante de movimiento. Por otra parte, el Lagrangiano (2.6) tiene una sola simetría, esto es, no depende explícitamente del parámetro S, luego, por el teorema de Noether genera una única constante de movimiento H (o funciones de ella), la cual viene dada por (2.2). Esto nos permite afirmar que Z y H se relacionan entre si por medio de alguna función, en otras palabras por (2.2) resulta que:

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}^{(P+I)}}{\partial u^i} u^i - \mathcal{L}^{(P+I)} = h(z) \tag{2.11}$$

donde, la función $h(z)$ es arbitraria pero, distinta de cte.

Como (2.11) es una ecuación diferencial líneal no homogénea en el Lagrangiano $\mathcal{L}^{(P+I)}$ puede resolverse por los métodos usuales, obteniéndo_se:

$$\mathcal{L}^{(P+I)} = \mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i) + \frac{\sqrt{z}}{2} \int \frac{h(z)}{z^{3/2}}\, dz \tag{2.12}$$

donde, $\mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i)$ es la solución de la parte homogénea y el otro término es la solución particular. Notemos, que la única restricción para $\mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i)$ es que sea homogéneo de grado 1 en las cuadrivelocidades, en consecuencia, puede depender de cualquier campo tensorial y spinorial. Por otra parte, como $h(z)$ es una función totalmente arbitraria de Z, pero, $h(z) \neq cte$, entonces, el segundo término de(2.12) es distinta de $cte\; z^{1/2} + cte$, de manera que, podemos hacer la siguiente identificación

$$F(\eta_{ik} u^i u^k) = \frac{\sqrt{z}}{2} \int \frac{h(z)}{z^{3/2}}\, dz \tag{2.13}$$

con lo cual, se prueba que es necesario que $\mathcal{L}^{(P+I)}$ tenga la forma (2.6) en el espacio-tiempo plano. q. e. d.

De este teorema, se sigue entonces, que las posibles teorías de la gravitación realizables en el espacio-tiempo plano, deben provenir de un Lagrangiano que pueda escribirse, en la forma dada por la expresión (2.12). Otro aspecto interesante de remarcar, es que, en toda la demostración no fue necesario conocer la acción del propio campo.

2.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Demostrado el teorema anterior, podemos estudiar a continuación las ecuaciones de movimiento que corresponden a las teorías derivadas del Lagrangiano (2.6). Para ello, aplicamos las ecuaciones de Lagrange (1.15) al Lagrangiano (2.6), es decir:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(P+I)}}{\partial u^k \partial u^i}\dot{u}^k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(P+I)}}{\partial x^k \partial u^i} u^k - \frac{\partial \mathcal{L}^{(P+I)}}{\partial x^i} = 0 \tag{2.14}$$

donde, hemos tenido en cuanta que $\mathcal{L}^{(P+I)}$ no depende explícitamente de la longitud de arco S. De (2.14) se sigue entonces que:

$$\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial u^k \partial u^i} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i}\right\}\dot{u}^k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} u^k - \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i} = 0 \tag{2.15}$$

pero:

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial u^i \partial u^k} = 4F''(z)u_k u_i + 2F'(z)\gamma_{ik} \tag{2.16}$$

de manera que, al reemplazar (2.16) en la ecuación de movimiento (2.15) y recordando que estamos en el espacio-tiempo plano, es decir que se satisface (2.5), nos queda:

$$\left\{2F'(z)\gamma_{ik} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i}\right\}\dot{u}^k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} u^k - \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i} = 0 \tag{2.17}$$

como además, $F'(z)$ es simplemente un número, entonces, sin pérdida de generalidad podemos dividir todo por $2F'(1)$ y redefinir un nuevo Lagrangiano de interacción $\mathcal{L}^{(1)}/2F'(1)$, con lo cual, la ecuación de movimiento (2.17) se reduce a:

$$\left\{ \eta_{ik} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} \right\} \mathring{u}^k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} u^k - \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i} = 0 \qquad (2.18)$$

Notemos que si $F(z) = \frac{z}{2}$, entonces el Lagrangiano (2.6) es:

$$\mathcal{L}^{(P+I)} = \frac{1}{2} \eta_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k + \mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i) \qquad (2.19)$$

éste, conduce directamente a la ecuación de movimiento (2.18), luego, de aquí en más tomaremos siempre $F(z) = z/2$ y cada vez que nos referamos a $\mathcal{L}^{(P+I)}$ tendremos presente que se trata de (2.19). Antes de proseguir hablemos un poco del Lagrangiano de interacción $\mathcal{L}^{(1)}(\dot{x}^i, \dot{u}^i)$, el cual, como se recordará es homogéneo de grado 1 en la cuadrivelocidad, es decir que, satisface la condición (2.9), luego, en el apéndice A-1 se integra la ecuación (2.9) y se obtiene que el Lagrangiano más general, que siendo función de los campos tensoriales de orden $0, 1, \ldots, n$, y la cuadrivelocidad $\dot{u}^i$, es:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x^i, u^i) = f(x^i) \int_{y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1} C(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, z_1^{y_1} z_2^{y_2/2} \cdots z_n^{y_n/n}\, dy_1 dy_2 \cdots dy_n \qquad (2.20)$$

donde, las correspondientes cantidades están definidas en el apéndice A-1

Debemos aclarar que en lo que sigue no vamos a usar la forma explícita del Lagrangiano (2.20), sino que vamos a trabajar en general con la condición (2.9).

Derivando (2.9) y reemplazando en el último término de (2.18) nos queda que:

$$\left\{ \eta_{ik} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} \right\} \dot{u}^k + \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i \partial u^k} \right\} u^k = 0 \qquad (2.21)$$

Ahora bien, si suponemos que el determinante del coeficiente de $\dot{u}^k$ es distinto de cero, entonces, podemos definir un tensor A^{il} con la siguiente propiedad:

$$A^{il} \left\{ \eta_{ik} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} \right\} = \delta^l_k \qquad (2.22)$$

por lo tanto, usando el tensor A^{il} en la ecuación de movimiento(2.21), ésta, se puede escribir en la forma usual:

$$\dot{u}^l + A^{li} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i \partial u^k} \right\} u^k = 0 \qquad (2.23)$$

Para verificar que esta ecuación cumple con la condición (2.5), es decir que el espacio-tiempo es plano, debe ser:

$$A^{li} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i \partial u^k} \right\} u^k u_l = 0 \qquad (2.24)$$

como se ve, basta que:

$$A^{li} u^k u_l = A^{lk} u^i u_l \qquad (2.25)$$

en efecto, si multiplicamos (2.22) por u^k, resulta:

$$A^{\ell i} u_i = u^\ell \tag{2.26}$$

en efecto, si derivamos (2.9) con respecto a u^k se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} u^i = 0 \tag{2.27}$$

luego, usando la relación (2.26) vemos que se verifica (2.25), puesto que se obtiene una identidad. Por lo tanto, $\mathring{u}^\ell u_\ell = 0$.

Por otra parte, de (2.26) se concluye también que:

$$\eta_{ik} u^i u^k = u^i u_i = A^{ik} u_i u_k = 1 \tag{2.28}$$

lo cual indica, que el tensor A^{ik} se comporta como el tensor métrico η_{ik} al permitir subir y bajar los índices del vector u^i. Además, resulta que la cantidad $A^{ik} u_i u_k$ no solo es constante sobre la línea de Universo de la partícula, sino que también lo es en forma absoluta, es decir que, es constante en todo punto. Para verificar notemos que de (2.26) y(2.28) se tiene:

$$\frac{d}{ds}\left(A^{ik} u_i u_k\right) = 0 = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^\ell} u_i u_k u^\ell \tag{2.29}$$

pero, de (2.22) y (2.26) resulta:

$$\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^\ell} u_i u_k = - \frac{\partial^3 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^\ell \partial u^k \partial u^i} u^k u^i \tag{2.30}$$

en consecuencia, por (2.27) y (2.30) se verifica (2.29); puesto que se obtiene una identidad. Por otra parte, de (2.30) resulta también que la derivada de $A^{ik}u_i u_k$ con respecto a las coordenadas x^{ρ} es idénticamente cero, por lo tanto, dicha cantidad es una constante absoluta.

De estos resultados se concluye que se podría hacer el reemplazo

$$\eta_{ik} \longrightarrow A_{ik} \tag{2.31}$$

en el Lagrangiano de partida (2.19) y nada debería cambiar ya que, como hemos visto A^{ik} tiene las mismas propiedades de η_{ik} con respecto al vector $\dot{u}^i$, en efecto, así resulta; si se recalculan las ecuaciones de movimiento con este nuevo Lagrangiano se reencuentran las ecuaciones (2.23).

Con estas discusiones damos término a nuestro primer paso, es decir que hemos encontrado ya el conjunto de teorías (en realidad hemos hallado el cojunto de ecuaciones de movimiento que corresponden a dichas teorías) compatibles con el espacio-tiempo plano, las mismas son (2.23) junto con (2.9), (2.19) y (2.22).

2.3 PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA FUERTE Y ESPACIO-TIEMPO PLANO

Una vez conocido, el conjunto de teorías de campo compatibles con el espacio-tiempo plano, podemos ahora, estudiar el problema que nos interesa, o sea, ver si estas teorías son capaces de describir el campo gravitatorio, claro está, que para ello es necesario introducir los principios físicos que usualmente se atribuyen a dicho campo. Este principio guia, como es bien sabido, es el "Principio de Equivalencia Fuerte", es decir que, existe un sistema de coordenadas donde la fuerza que sien te la partícula de prueba es nula, o sea que $\dot{u}^{i'}=0$. Haciendo el cambio de coordenadas $x^i = x^i(x^{i'})$ se llega a que en cualquier sistema de coordenadas vale:

$$\dot{u}^i + \Gamma^i_{k\ell}\, u^k u^\ell = 0 \qquad (2.32)$$

donde, $\Gamma^i_{k\ell}$ representa la intensidad del campo gravitatorio y depende sólo del punto x^i.

Ahora bien, para que la ecuación de movimiento (2.23) tenga la forma que establece el principio de equivalencia fuerte (2.32) debe ser:

$$A^{i\ell}\left\{\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^\ell} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^\ell \partial u^k}\right\} u^k = \Gamma^i_{k\ell}\, u^k u^\ell \qquad (2.33)$$

como el segundo miembro de (2.33) es homogéneo de grado 2 en las cuadri velocidades, también debe serlo el primero, porque de lo contrario esto daría origen a una condición adicional para los vectores u^i y no hay ninguna razón física para que así suceda, por lo tanto, el miembro izquierdo de (2.33) debe ser bilineal en u^i. Por otra parte, de la expresión (2.27) se concluye que el paréntesis de (2.33) es homogéneo de grado cero en u^i, en consecuencia $A^{i\ell}u^k$ debe ser homogéneo de grado 2 en u^i, es decir que:

$$\frac{\partial}{\partial u^s}\left(A^{i\ell}u^k\right)u^s = 2\,A^{i\ell}u^k \qquad (2.34)$$

de aquí resulta que:

$$\frac{\partial A^{i\ell}}{\partial u^{s}} u^{\kappa} u^{s} = A^{i\ell} u^{\kappa} \tag{2.35}$$

pero, de (2.22) se tiene:

$$\frac{\partial A^{i\ell}}{\partial u^{s}} = - A^{im} A^{\ell p} \frac{\partial^{3} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^{s} \partial u^{m} \partial u^{p}} \tag{2.36}$$

luego, reemplazando en (2.35) y usando (2.27) resulta:

$$A^{im} A^{\ell p} \frac{\partial^{2} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^{m} \partial u^{p}} u^{\kappa} = A^{i\ell} u^{\kappa} \tag{2.37}$$

usando nuevamente (2.22) en la expresión anterior, ésta se puede reescribir como:

$$A^{\ell p} \frac{\partial^{2} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^{s} \partial u^{p}} u^{\kappa} = \delta^{\ell}_{s} u^{\kappa} \tag{2.38}$$

si ahora hacemos $s = \kappa$ y usamos (2.27) en (2.38) nos queda:

$$0 = u^{\ell} \tag{2.39}$$

pero, como (2.39) en general no es cierto, concluimos que las ecuaciones de movimiento derivadas de un principio variacional y compatibles con el espacio-tiempo plano (como ya hemos visto, ésto implica que el Lagrangiano de interacción es homogéneo de grado 1 en u^{i}) no son capaces de satisfacer el "principio de equivalencia fuerte" (2.32), en consecuencia, no pueden describir el campo gravitatorio, a menos que el campo gravitatorio no satisfaga el principio de equivalencia fuerte.

3. ESTRUCTURA DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO EN EL ESPACIO-TIEMPO PLANO Y EL ELECTROMAGNETISMO COMO CASO PARTICULAR

3.1 DESARROLLO EN SERIE DE LA FUERZA EN LA ECUACION DE MOVIMIENTO

En este capítulo vamos a estudiar en detalle la estructura de las ecuaciones de movimiento (2.23) en el espacio-tiempo plano, para el caso bastante general en que la fuerza admite un desarrollo en serie cuyos términos son funciones de homogeneidad definida en las cuadrivelocidades $\dot{u}^i$. Veremos luego, que las teorías así obtenidas se pueden clasificar en; el electromagnetismo y el grupo de teorías en que la fuerza necesariamente está representada por un desarrollo en serie.

Si partimos de las ecuaciones de movimiento (2.23) y las reescribimos de la siguiente forma:

$$\mathring{u}^{\ell} + B^{\ell} = 0 \tag{3.1}$$

donde:

$$B^{\ell} = A^{\ell i} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^{k} \partial u^{i}} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^{i} \partial u^{k}} \right\} u^{k} \tag{3.2}$$

entonces, por ser el espacio-tiempo plano $(\mathring{u}^{i} u_{i} = 0)$ de (2.24) se tiene que:

$$B^{\ell} u_{\ell} = 0 \tag{3.3}$$

Escribamos ahora la fuerza B^{ℓ} como un desarrollo en serie (que suponemos adecuadamente convergente):

$$B^{\ell} = \sum_{-\infty}^{\infty} B^{\ell}_{(n)} \qquad (3.4)$$

donde, $B^{\ell}_{(n)}$ es homogéneo de grado n en u^{i}, es decir que:

$$\frac{\partial B^{\ell}_{(n)}}{\partial u^{i}} u^{i} = n B^{\ell}_{(n)} \qquad (3.5)$$

en consecuencia:

$$\frac{\partial B^{\ell}}{\partial u^{i}} u^{i} = \sum_{-\infty}^{\infty} n B^{\ell}_{(n)} \qquad (3.6)$$

pero, por otra parte de (3.2) y (2.27) se deduce:

$$\frac{\partial B^{\ell}}{\partial u^{s}} u^{s} = B^{\ell} + \frac{\partial A^{\ell i}}{\partial u^{s}} u^{s} \left\{ \frac{\partial^{2} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^{k} \partial u^{i}} - \frac{\partial^{2} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^{i} \partial u^{k}} \right\} u^{k} \qquad (3.7)$$

multiplicando (2.36) por u^{s} y usando (2.27) resulta:

$$\frac{\partial A^{i\ell}}{\partial u^{s}} u^{s} = A^{im} A^{\ell p} \frac{\partial^{2} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^{m} \partial u^{p}} \qquad (3.8)$$

reemplazando en (3.7) nos queda:

$$\frac{\partial B^\ell}{\partial u^s} u^s = B^\ell + \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^p \partial u^m} A^{\ell p} A^{m i} \left\{ \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} - \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial x^i \partial u^k} \right\} u^k$$

pero, por (3.2) la última expresión se puede escribir como:

$$\frac{\partial B^\ell}{\partial u^s} u^s = B^\ell + A^{\ell s} \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^s \partial u^i} B^i \qquad (3.9)$$

si ahora sustituimos en (3.9) B^ℓ por su desarrollo en serie (3.4) y usamos la propiedad (3.6) se obtiene:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n B^\ell_{(n)} = \sum_{-\infty}^{\infty} B^\ell_{(n)} + A^{\ell s} \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^s \partial u^i} \sum_{-\infty}^{\infty} B^i_{(n)}$$

luego:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (n-1) B^\ell_{(n)} = A^{\ell s} \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^s \partial u^i} \sum_{-\infty}^{\infty} B^i_{(n)} \qquad (3.10)$$

multiplicando (3.10) por $\left\{ \delta_{\ell k} + \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^\ell \partial u^k} \right\}$ y teniendo en cuenta (2.22) resulta:

$$\left\{ \delta_{\ell k} + \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^\ell \partial u^k} \right\} \sum_{-\infty}^{\infty} (n-1) B^\ell_{(n)} = \frac{\partial^2 C^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} \sum_{-\infty}^{\infty} B^i_{(n)}$$

reordenando:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (n-1) B^i_{(n)} + \sum_{-\infty}^{\infty} (n-2)\, \eta_0^{i\kappa} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^\kappa \partial u^\ell} B^\ell_{(n)} = 0 \qquad \textbf{(3.11)}$$

para que cada sumando tenga homogeneidad definida, reemplazamos n por $(n+1)$ en la segunda sumatoria , por lo tanto:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (n-1) \left[B^i_{(n)} + \eta_0^{i\kappa} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^\kappa \partial u^\ell} B^\ell_{(n+1)} \right] \right\} \qquad \textbf{(3.12)}$$

de manera que, cada sumando se debe anular por separado, es decir:

$$(n-1) \left\{ B^i_{(n)} + \eta_0^{i\kappa} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^\kappa \partial u^\ell} B^\ell_{(n+1)} \right\} = 0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

una primer conclusión de estas identidades es la siguiente, supongamos que $n \neq 1$ y multiplicamos (3.13) por u^ℓ, entonces, por la aplicación de (2.27) se tiene que:

$$B^\ell_{(n)} u_\ell \qquad\qquad n \neq 1$$

pero, si ahora reemplazamos (3.4) y (3.3) y usamos el resultado anterior resulta que también $B^\ell_1 u_\ell = 0$, por lo tanto:

$$B^\ell_{(n)} u_\ell = 0 \qquad \textbf{(3.14)}$$

para cualquier valor de n. En otras palabras, podemos decir que todos los vectores b^i yacen en el hiperplano normal a u^i. Como además, el vector u^i es tangente a la línea de universo de la partícula, y en consecuencia es de tipo temporal, entonces, todos los vectores $b^i_{(n)}$ resultan ser de tipo espacial.

El sistema de ecuaciones (3.13) consiste en dos fórmulas de recurrencia, una hacia los n crecientes y otra hacia los n decrecientes con un corte en $n=1$. Por lo tanto, podemos estudiar por separado los casos en que n es mayor o menor que uno. Analicemos primero el caso en que n . En estas circunstancias:

$$b^i_{(n)} = -\eta^{ik} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^j} b^j_{(n+1)} \qquad n > 2 \tag{3.15}$$

Supongamos por un momento que $b^i_{(n)} = 0$, entonces, por (2.27) se ve que $b^i_{(n+1)}$ debe ser genéricamente de la forma:

$$b^i_{(n+1)} = F(x^k, u^k)\, u^i \tag{3.16}$$

pero, multiplicando por u^i y usando (2.28) y (3.14) resulta que:

$$b^i_{(n+1)} u_i = 0 = F(x^k, u^k)\, u^i u_i = F(x^k, u^k) \tag{3.17}$$

de aquí se concluye que basta que un término del desarrollo se anule ($n \geq 2$) para que se anule el resto. En realidad ocurre que la serie (3.4) es de la forma:

$$B^{\ell} = \sum_{(n)}^{1} B^{\ell}_{(n)} \tag{3.18}$$

Para ver que efectivamente así ocurre es suficiente demostrar que $B^{\ell}_{(2)}$ es cero. En efecto, observemos que el paréntesis de (3.2) es homogéneo de grado cero en u^{r}, por lo tanto $B^{\ell}_{(2)}$ va a existir si y sólo si A^{ik} contiene un término homogéneo de grado 1 en u^{i}, pero, de (2.22) tenemos que:

$$A(\eta + L) = 1 \tag{3.19}$$

donde, hemos escrito en notación matricial:

$$A = A^{ik} \qquad\qquad \delta^{\ell}_{k} = 1$$

$$\eta = \eta^{ik} \qquad\qquad L = \frac{\partial^{2} \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^{i} \partial u^{k}}$$

luego:

$$A \quad (\eta + L)^{-1} = \eta^{-1}(1 + L\eta^{-1})^{-1}$$

si ahora reemplazamos la última matriz por su desarrollo en serie nos queda:

$$A = \eta^{-1} - \eta^{-1} L \eta^{-1} + \eta^{-1} L \eta^{-1} L \eta^{-1} - \ldots \tag{3.20}$$

Volviendo a la notación inicial resulta que:

$$A^{i\ell} = -\eta_b^{ik}\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(2)}}{\partial u^k \partial u^m}\eta_b^{m\ell} + \eta_b^{is}\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(2)}}{\partial u^s \partial u^m}\eta_b^{mr}\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(2)}}{\partial u^r \partial u^k}\eta_b^{k\ell} - \cdots \qquad (3.21)$$

como [illegible] es homogénea de grado -1 en las cuadrivelocidades $\dot{u}^i$ (ver (2.27)), de (3.21) se concluye que $A^{i\ell}$ está compuesto por términos homogéneos de grado 0, -1, -2,.... en $\dot{u}^i$, en consecuencia, al no tener términos de grado 1 resulta que $B^\ell_{(2)} = 0$, luego por (3.15-16-17) se sigue (3.18). Para una demostración alternativa ver apéndice A-2.

3.2 LA TEORIA ELECTROMAGNETICA COMO CASO PARTICULAR

Concluido el caso $n \geq 2$ volvamos al sistema de ecuaciones (3.13) y analicémoslas para $n \leq 0$, en estas circunstancias se puede hallar una ley de recurrencia para todos los términos de la serie, donde cada uno de ellos es función de $B^\ell_{(1)}$ solamente, las mismas son:

$$B^\ell_{(0)} = -\eta_b^{\ell k}\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} B^i_{(1)}$$

$$B^\ell_{(-1)} = \eta_b^{\ell k}\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(2)}}{\partial u^k \partial u^m}\eta_b^{ms}\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^s \partial u^i} \dot{B}^i_{(1)} \qquad (3.22)$$

$$\vdots$$

o sea que la fuerza se escribe como:

$$B^{l} = B^{l}_{(1)} + B^{l}_{(0)} + B^{l}_{(-1)} + \cdots$$

luego:

$$B^{l} = B^{l}_{(1)} - \eta^{lk} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} B^{i}_{(1)} + \eta^{lk} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^m} \eta^{ms} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^s \partial u^i} B^{i}_{(1)} \cdots$$

de donde:

$$B^{l} = B_{(1)\rho} \left\{ \eta^{l\rho} - \eta^{lk} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} \eta^{i\rho} + \eta^{lk} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^m} \eta^{ms} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^s \partial u^i} \eta^{i\rho} \cdots \right\} \qquad (3.23)$$

pero, éste paréntesis coincide exactamente con el desarrollo de $A^{l\rho}$ (3.21), por lo tanto, para que (3.23) sea la fuerza (3.2) $B_{(1)\rho}$ debe ser:

$$B_{(1)\rho} = \left\{ \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^\rho} - \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial x^\rho \partial u^k} \right\} u^k \qquad (3.24)$$

Ahora bien, de (3.23) se ve que tenemos dos tipos de teorías según sea $\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i}$ distinto o igual a cero, ya que si es distinto de cero, entonces, caemos en un desarrollo en serie de infinitos términos para la fuerza B^l dado que por la ley de recurrencia (3.22) si existe un término existen todos los demás. En cambio, si $\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial u^k \partial u^i} = 0$ la ley de recurrencia se corta (este es el único caso) y sólo queda el primer término, es decir que la fuerza es:

$$b^{\ell} = \eta^{\ell\rho} b_{\rho} = \eta^{\ell\rho}\left\{\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^{\kappa}\partial u^{\rho}} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^{\rho}\partial u^{\kappa}}\right\} u^{\kappa} \qquad (3.25)$$

pero además, por otra parte la condición:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^{i}\,\partial u^{\kappa}} = 0$$

puede integrarse y da como resultado:

$$\mathcal{L}^{(1)} = A_i u^{i} + F(x^{\kappa}) \qquad (3.26)$$

donde, la función $F(x^{\kappa})$ debe tomarse igual a cero porque hemos supuesto que el Lagrangiano de interacción debe ser homogéneo de grado 1 en u^{i}, hecho lo cual se obtiene el Lagrangiano del electromagnetismo. De esta manera, queda probado que existen sólo dos tipos de teorías; correspondiendo una al Lagrangiano (3.26) (con $F(x^{\kappa}) = 0$) que conduce al electromagnetismo y el otro, a los demás Lagrangianos homogéneos de grado 1, que necesariamente conducen a fuerzas que se representan como desarrollo en serie.

4 PRINCIPIO VARIACIONAL Y PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA FUERTE

4.1 LA ECUACION DE MOVIMIENTO EN UN ESPACIO-TIEMPO GENERAL

En todos los desarrollos considerados anteriormente nos hemos ocupado de entender la estructura del espacio-tiempo plano, admitiendo que las ecuaciones de movimiento se derivan de un principio variacional. Como consecuencia de este estudio pudimos mostrar que es casi imposible hacer una teoría de la gravitación en el espacio-tiempo plano de la relatividad especial, ya que de ser así sus ecuaciones de movimiento tendrían que derivarse de un Lagrangiano de interacción homogéneo de grado uno en las cuadrivelocidades U^i , y por lo tanto no podría cumplirse el principio de equivalencia fuerte. Estos hechos nos fuerzan a descartar el marco del espacio-tiempo plano y nos obligan a reemplazarlo por una estructura más general.[28]

Para desarrollar esta nueva estructura vamos a derivar las ecuaciones de movimiento a partir del principio variacional de mínima acción[(*)] (1.6):

$$\delta S = 0 = \delta \left\{ \int \mathcal{L}_p \, ds + \int \mathcal{L}_{pc} \, ds \right\} = \delta \int \mathcal{L} \, ds \qquad (4.1)$$

sin hacer mención alguna sobre la geometría del espacio-tiempo. Por otra parte, además, como estas ecuaciones tienen que describir el movi-

(*) donde el Lagrangiano se tomó proporcional a la masa para que la línea de universo de la partícula no depende de la misma.

miento de una partícula de prueba en un campo gravitatorio, vamos a exigirle que satisfaga el principio de equivalencia fuerte en su forma (2.32):

$$\dot{u}^i + \Gamma^i_{k\ell}\, u^k u^\ell = 0 \tag{4.2}$$

donde:

$$u^i = \frac{dx^i}{dS} \quad ; \quad \dot{u}^i = \frac{du^i}{dS} \tag{4.3}$$

y S es el parámetro que vamos a usar para la curva que minimiza a la acción (4.1) (esta curva no es más que la línea de universo que ha de seguir la partícula de prueba).

El Lagrangiano $\mathcal{L}$ definido en (4.1) es una función escalar arbitraria de los campos tensoriales de orden (0,1,......n) y del vector tangente a la línea de universo u^i de la partícula. Pero, por sencillez vamos a restringir la generalidad del Lagrangiano, tomando sólo aquellos que no dependen explícitamente del parámetro y que además, pueden escribirse como suma de Lagrangianos homogéneos de grado n en u^i, es decir que:

$$\mathcal{L} = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^{(n)} \tag{4.4}$$

donde, cada $\mathcal{L}^{(n)}$ es una función escalar de los campos tensoriales de orden (0,1,....n) y que además, cumple con:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^\ell} u^\ell = n \mathcal{L}^{(n)} \tag{4.5}$$

Debemos destacar que las limitaciones anteriores (4.4)y (4.5) en realidad no quitan mucha generalidad ya que, todos los Lagrangianos conocidos (que dan origen a teorías físicamente admisibles) son de la forma (4.4). Por otra parte, la ecuación (4.5) puede ser integrada y se llega a que el Lagrangiano (4.4) más general se puede escribir como (ver apéndice A-1):

$$\mathcal{L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x^i) \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_m=n} C(\gamma_1,\gamma_2,\dots\gamma_m) z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \cdots z_m^{\gamma_m} d\gamma_2 \cdots d\gamma_{m-1} \tag{4.6}$$

donde, cada una de las variables están definidas en el apéndice (A-1). En lo que sigue no vamos a usar explícitamente la expresión (4-6) para el Lagrangiano de interacción, sino que usaremos directamente su definición (4.4) junto con (4.5).

Como las ecuaciones de movimiento tienen que derivarse del principio variacional (4.1) deben provenir entonces, de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^k \partial u^i} \dot{u}^k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^k \partial u^i} u^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \tag{4.7}$$

Para que las ecuaciones anteriores (4.7) satisfagan el principio de equivalencia fuerte, vamos a tener que expresarlas en la forma (4.2). Esto se puede llevar a cabo de la siguiente manera, derivando la expresión (4.5) respecto de $\dot{u}^i$ resulta:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^i \partial u^\ell} u^\ell = (n-1) \frac{\partial \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^i} \qquad (4.8)$$

multiplicando (4.8) por u^i y usando nuevamente (4.5) se tiene:

$$\mathcal{L}^{(n)} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^i \partial u^\ell} u^i u^\ell \qquad (4.9)$$

notemos, que (4.9) es válida para n distinto de cero y uno. Si ahora combinamos (4.9) con (4.4) podemos expresar el último término de (4.7) en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i} + \sum_{n \neq 0,1} \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^3 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} u^\ell u^k \qquad (4.10)$$

en forma análoga para el segundo término de (4.7) se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^k \partial u^i} u^k = \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^k \partial u^i} u^k + \sum_{n \neq 1} \frac{1}{(n-1)} \frac{\partial^3 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial x^k \partial u^i \partial u^\ell} u^k u^\ell \qquad (4.11)$$

Para simplificar el manejo de las expresiones anteriores vamos a definir las siguientes funciones:

$$B'_{ikl} \ldots B'_{ikl} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)} \frac{\partial^3 L^{(n)}}{\partial x^k \partial u^l \partial u^i} - \sum_{n \neq 2} \frac{1}{(n-1)n} \frac{\partial^3 L^{(n)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^l} \ldots \tag{4.12}$$

donde,los índices entre paréntesis indican que el primer término de B'_{ikl} debe ser simetrizado, en consecuencia, resulta que B'_{ikl} es simétrico con respecto a sus dos primeros índices.

En términos de (4.10),(4.11) y (4.12) las ecuaciones de movimiento (4.7) adoptan la forma:

$$[illegible] \Big\} + B'_{ikl} u^i u^k = 0 \tag{4.13}$$

Después de estas transformaciones vemos que (4.13) todavía no tiene la forma del principio de equivalencia fuerte (4.2), puesto que la llave contiene términos que no son proporcionales al tensor $u^i u^k$. Para hacer esto posible vamos a escribir $L^{(0)}$ y $L^{(1)}$ de la siguiente manera:

$$L^{(0)} = \frac{L^{(0)}}{L^{(2)}} L^{(2)} = L^{(-2)} L^{(2)} \tag{4.14}$$

$$L^{(1)} = \frac{L^{(1)}}{L^{(2)}} L^{(2)} = L^{(-1)} L^{(2)} \tag{4.15}$$

donde, $L^{(2)}$ es una función arbitraria pero, homogénea de grado 2 en las variables u^i, de esta manera podemos aplicar las propiedades (4.8) y (4.9) sobre $L^{(-1)}$, $L^{(2)}$ y $L^{(2)}$.

Derivando (4.14) y reemplazando en las derivadas $L^{(-2)}$ y $L^{(2)}$ mediante la fórmula (4.5) nos queda que:

$$[illegible] = \left\{ \frac{L^{(2)}}{6} \frac{\partial^3 L^{(-2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} + \frac{L^{(-2)}}{2} \frac{\partial^3 L^{(2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} \right\} u^\ell u^k \qquad (4.16)$$

Procediendo de manera totalmente análoga para $\mathcal{L}^{(1)}$ se tiene:

$$= \left\{ [illegible] \frac{\partial^3 L^{(1)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} + \frac{L^{(2)}}{2} \frac{\partial^3 L^{(2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} \right\} u^\ell u^k \qquad (4.17)$$

Con (4.16) y (4.17) ya quedan expresados los dos últimos términos de la llave (4.13) en la forma deseada. El primer término también es posible llevarlo a una expresión similar, para ello derivamos (4.15) con respecto a u^i y usamos (4.8), luego:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(2)}}{\partial x^i \partial u^i} u^k = \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ -\frac{L^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 L^{(-1)}}{\partial u^i \partial u^\ell} + L^{(-1)} \frac{\partial^2 L^{(2)}}{\partial u^i \partial u^\ell} \right\} u^\ell u^k \qquad (4.18)$$

En consecuencia, de (4.16) y (4.18) vemos que los términos dentro de la llave (4.13) pueden ponerse en la forma deseada:

$$\left\{ [illegible] u^k - \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial x^i} \right\} = \left(B^{\cdot\cdot}_{i \cdot k \ell} + B^{\cdot\cdot}_{i \cdot k \ell} \right) u^\ell u^k \qquad (4.19)$$

donde:

$$-\frac{\partial L^{(1)}}{\partial x^i} = B''_{\ell k i}\, u^\ell u^k \tag{4.20}$$

luego comparando con (4.16) resulta:

$$B''_{\ell k i} = \frac{L^{(2)}}{6}\frac{\partial^3 L^{(-2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} + \frac{L^{(-2)}}{2}\frac{\partial^3 L^{(2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} \tag{4.21}$$

además:

$$-\frac{\partial^2 L^{(1)}}{\partial x^i \partial u^\ell}\, u^k - \frac{\partial L^{(1)}}{\partial x^i} = B'''_{\ell k i}\, u^\ell u^k \tag{4.22}$$

de manera que, si comparamos (4.22) con (4.17) y (4.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} B'''_{\ell k i} = {} & \frac{1}{2}\frac{\partial L^{(2)}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 L^{(-1)}}{\partial u^\ell \partial u^i} - \frac{L^{(2)}}{2}\frac{\partial^3 L^{(-1)}}{\partial x^k \partial u^\ell \partial u^i} + \frac{\partial L^{(-1)}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 L^{(2)}}{\partial u^\ell \partial u^i} \\ & + L^{(-2)}\frac{\partial^3 L^{(2)}}{\partial x^k \partial u^\ell \partial u^i} - \frac{L^{(2)}}{2}\frac{\partial^3 L^{(-1)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} - \frac{L^{(-1)}}{2}\frac{\partial^3 L^{(2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Reemplazando ahora (4.22) y (4.20) en la ecuación de movimiento (4.13), ésta se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial \dot{u}^k}\, \dot{u}^k + B_{\ell k i}\, u^\ell u^k = 0 \qquad (4.24)$$

donde:

$$B_{\ell k i} = B'''_{\ell k i} + B''_{\ell k i} + B'_{\ell k i} \qquad (4.25)$$

Por la definición de $B_{\ell k i}$ en (4.24), resulta que es simétrica en sus dos primeros índices, o sea que:

$$B_{\ell k i} = B_{k \ell i} \qquad (4.26)$$

Finalmente para que la ecuación de movimiento (4.24) adopte la forma del principio de equivalencia fuerte (4.2) vamos a suponer que el coeficiente de $\dot{u}^k$ tiene inversa, es decir:

$$A^{i\ell}\, \frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial \dot{u}^k} = \delta^\ell_k \qquad (4.27)$$

luego, multiplicando la expresión (4.24) por $A^{i\ell}$, la ecuación de movimiento adopta su forma final:

$$\dot{u}^\ell + A^{\ell i} B_{s k i}\, u^s u^k = 0 \qquad (4.28)$$

4.2 COMO EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA FUERTE SELECCIONA EL LAGRANGIANO DE INTERACCION

Comparando ahora (4.28) con la ecuación (4.2) que define el principio de equivalencia fuerte se tiene que:

$$A^{\ell i} B_{sk i} = \Gamma^{\ell}_{sk} \tag{4.29}$$

Esta identificacion no nos asegura todavía que realmente la ecuación de movimiento (4.28) satisfaga el principio de equivalencia fuerte, porque , como hemos visto en (2.32) la intensidad del campo gravitatorio Γ^{i}_{sk}, debe ser función del punto y no del vector tangente u^i a la línea de universo de la partícula. Téngase en cuenta que la definición de A^{i} en (4.27) y de B_{ski} en (4.25) no excluyen en absoluto que su producto contraido no sea función de u^i. Por lo tanto, para que (4.29) esté bien definido en todos los puntos del espacio-tiempo, es necesario que las cantidades $A^{\ell i} B_{ski}$ no dependan explícitamente de u^i. En consecuencia, la derivada parcial de (4.29) con respecto a u^m debe ser nula para cualquier vector tangente u^i, de manera que:

$$\frac{\partial A^{\ell i}}{\partial u^m} B_{ski} + A^{\ell i} \frac{\partial B_{ski}}{\partial u^m} = 0 \tag{4.30}$$

multiplicando por $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^i \partial u^r}$ y usando luego (4.27) nos queda:

$$\frac{\partial A^{ki}}{\partial u^m}\frac{\partial x^l}{\partial u^r} B_{ski} + \frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} = 0 \tag{4.31}$$

Pero, si ahora derivamos (4.27) con respecto a u^m resulta que:

$$\frac{\partial A^{ki}}{\partial u^m}\frac{\partial x^l}{\partial u^r} + A^{ki}\frac{\partial^2 x^l}{\partial u^m \partial u^r} = 0 \tag{4.32}$$

reemplazando esta última en (4.31) se obtiene:

$$-A^{ki}\frac{\partial^2 x^l}{\partial u^m \partial u^r} B_{ski} + \frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} = 0 \tag{4.33}$$

Ahora bien, como el primer término de (4.33) es simétrico en los índices (m,r), el segundo también debe serlo. Luego, si escribimos este último en la forma:

$$\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} + \frac{\partial B_{skm}}{\partial u^r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} - \frac{\partial B_{skm}}{\partial u^r}\right) \tag{4.34}$$

resulta que, la parte antisimétrica de (4.34) debe anularse, por lo tanto:

$$\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} = \frac{\partial B_{skm}}{\partial u^r} \tag{4.35}$$

De esta última se concluye que B_{skr} no puede ser totalmente arbitrario, puesto que, sus 40 componentes se escriben en función de sólo 10 cantidades B_{sk}, éstas sí son funciones arbitrarias del punto y del vector tangente u^i. Como consecuencia de (4.35) vemos que (4.34) se tranforma en:

$$\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} = \frac{\partial^2 B_{sk}}{\partial u^r \partial u^m} \qquad (4.36)$$

de manera que la ecuación (4.33) puede desdoblarse en dos partes, una simétrica y otra antisimétrica, o sea que:

$$-A^{ie} \frac{\partial^3 L}{\partial u^m \partial u^k \partial u^r} B_{ski} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} + \frac{\partial B_{skm}}{\partial u^r}\right) = 0 \qquad (4.37)$$

$$\left(\frac{\partial B_{skr}}{\partial u^m} - \frac{\partial B_{skm}}{\partial u^r}\right) = 0 \qquad (4.38)$$

Como estas ecuaciones son las únicas consecuencias que podemos obtener de las ecuaciones de movimiento (4.28) y del principio de equivalencia fuerte (2.32), entonces, debemos estudiarlas en detalle para ver que restricciones imponen sobre nuestro Lagrangiano de partida (4.4). Para ello reemplazamos (4.25) y (4.12) en (4.38), con lo cual se tiene:

$$\left(\frac{\partial B'''_{skr}}{\partial u^m} - \frac{\partial B'''_{skm}}{\partial u^r}\right) + \left(\frac{\partial B''_{skr}}{\partial u^m} - \frac{\partial B''_{skm}}{\partial u^r}\right) +$$

(4.39)

$$+ \sum_{n \neq 0,1} \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{\partial^4 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^r \partial x^m \partial u^k \partial u^s} - \frac{\partial^4 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^m \partial x^r \partial u^k \partial u^s} \right\} = 0$$

donde, el primer paréntesis corresponde a $n = 1$, el segundo a $n = 0$ y la llave tiene en cuenta todos los demás valores de n. Por otra parte, de (4.23) se concluye que el primer paréntesis tiene homogeneidad -2 en $\dot{u}^i$, de (4.21) se tiene que el segundo paréntesis es homogéneo de grado -3 en $\dot{u}^i$ y la llave contiene los términos de homogeneidad.....$-4, -1, 0, 1, \ldots$ en $\dot{u}^i$. En consecuencia, como cada sumando tiene distinto grado de homogeneidad en $\dot{u}^i$, cada uno de ellos se debe anular por separado, es decir que:

$$\frac{\partial B'''_{skr}}{\partial u^m} - \frac{\partial B'''_{skm}}{\partial u^r} = 0 \qquad n = 1 \qquad (4.40)$$

$$\frac{\partial B''_{skr}}{\partial u^m} - \frac{\partial B''_{skm}}{\partial u^r} = 0 \qquad n = 0 \qquad (4.41)$$

$$\frac{\partial^4 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^r \partial x^m \partial u^k \partial \dot{u}^s} - \frac{\partial^4 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^m \partial x^r \partial u^k \partial \dot{u}^s} = 0 \qquad n \neq 0, 1 \qquad (4.42)$$

Comencemos por estudiar las ecuaciones (4.42). Las mismas se pueden escribir como:

$$\left. \frac{\partial^3 \xi^{(n)}}{\partial u^r \partial x^m \partial u^k} - \frac{\partial^3 \xi^{(n)}}{\partial u^m \partial x^r \partial u^k} \right\} = 0$$

integrando:

$$\frac{\partial^3 \xi^{(n)}}{\partial u^r \partial x^m \partial u^k} - \frac{\partial^3 \xi^{(n)}}{\partial u^m \partial x^r \partial u^k} = D_{rmk}(x^i) \qquad (4.43)$$

donde, $D_{rmk}(x^i)$ es función sólo del punto x^i y además, es antisimétrico en sus dos primeros índices.

Pero, (4.43) puede integrarse nuevamente resultando:

$$\frac{\partial^2 \xi^{(n)}}{\partial x^m \partial u^r} - \frac{\partial^2 \xi^{(n)}}{\partial x^r \partial u^m} = D_{rmk}\, u^k + F_{rm}(x^i) \qquad (4.44)$$

donde, $F_{rm}(x^i)$ es función sólo de x^i y además es antisimétrica.

Ahora bien, el miembro izquierdo de (4.44) tiene homogeneidad bien definida en u^i, pero el segundo miembro no, en consecuencia (4.44) se va a satisfacer si y sólo si se verifica que:

a) $D_{rmk} = 0 \quad ; \quad F_{rm} = 0$

b) $D_{rmk} \neq 0 \quad ; \quad F_{rm} = 0 \qquad (4.45)$

c) $D_{rmk} = 0 \quad ; \quad F_{rm} \neq 0$

a) Si $D_{rmk} = 0$ y $F_{rm} \neq 0$ entonces la ecuación diferencial (4.44) tiene como solución particular $\mathcal{L}^{(2)} = A_i \dot{u}^i$ (Las soluciones de la parte homogénea están contenidas en c). Pero, como ya vimos en (4.42) esta ecuación no es aplicable en el caso $n = 1$, luego, esta solución no puede tenerse en cuenta hasta que no se resuelva (4.40).

Como los casos b) y c) tienen $F_{rm} = 0$, resulta entonces, que la ecuación que debemos resolver es:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^m \partial u^r} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial x^r \partial u^m} = D_{rmk} u^k \qquad (4.46)$$

por lo tanto, ahora nos quedan 2 alternativas para la ecuación (4.45):

$$\begin{aligned} &1) \quad D_{rmk} \neq 0 \\ &2) \quad D_{rmk} = 0 \end{aligned} \qquad (4.47)$$

1) Si $D_{rmk} \neq 0$, entonces (4.46) tiene solución solamente para Lagrangianos homogéneos de grado 2 en $\dot{u}^i$, de manera que la solución más general será:

$$\mathcal{L}^{(2)} = g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k + \mathcal{L}_h^{(2)} \qquad (4.48)$$

donde, el primer sumando es la solución particular de (4.46), g_{ik} es función de punto y $\mathcal{L}_h^{(2)}$ es una función homogénea de grado 2 en $\dot{u}^i$, que es solución de la parte homogénea de (4.46), o sea que, $\mathcal{L}_h^{(2)}$ debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_h^{(2)}}{\partial x^m \partial u^r} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_h^{(2)}}{\partial x^r \partial u^m} = 0 \qquad (4.49)$$

pero, (4.49) no es más que el rotor del vector $\frac{\partial \mathcal{L}_h^{(2)}}{\partial u^r}$, luego admite una primer integral, es decir que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h^{(2)}}{\partial u^r} = \frac{\partial H}{\partial x^r} + F_r \qquad (4.50)$$

donde, H es una función arbitraria del punto x^i y del vector tangente u^i y F_r es un vector cualquiera que depende solamente del vector tangente u^i. Por otra parte, además, tanto H como F_r son homogéneos de grado 1 en u^i. Ahora bien, trabajando la expresión (4.50) vemos que puede escribirse como un gradiente, en efecto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h^{(2)}}{\partial u^r} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{ H + x^\ell F_\ell \right\} = \frac{\partial G}{\partial x^r} \qquad (4.51)$$

de manera que, si multiplicamos (4.51) por u^r, ésta se puede poner como:

$$\mathcal{L}_h^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x^r} u^r \qquad (4.52)$$

Recordando nuestra definición del Lagrangiano (4.4), notemos que habíamos pedido que cada $\alpha^{(n)}$ fuera un escalar, luego por (4.48) resulta que también $\mathcal{L}_h^{(i)}$ es un escalar, en consecuencia, de (4.52) se concluye que $\frac{\partial G}{\partial x^r}$ debe ser un vector covariante, es decir que:

$$\frac{\partial G}{\partial x'^i}\left(x^m(x'^r);\, u^m(u'^r, x'^s)\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial G}{\partial x^k}(x^m, u^m) \tag{4.53}$$

pero:

$$\frac{\partial G}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial G}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x'^i}\frac{\partial G}{\partial u^k}$$

luego, debe ser:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial G}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l}u'^l\frac{\partial G}{\partial u^k} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial G}{\partial x^k}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial G}{\partial u^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l}u'^l = 0$$

como esta ecuación vale para todo u'^l, entonces debe ser:

$$\frac{\partial G}{\partial u^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} = 0$$

esta expresión se convierte en una identidad si se toman cambios de coordenadas lineales, pero no ocurre así si admitimos transformaciones de coordenadas más generales, en consecuencia debe ser:

$$\frac{\partial G}{\partial u^{k}} = 0 \qquad (4.54)$$

De (4.54) se tiene entonces, que G no puede ser función del vector tangente u^{i}, de manera que si volvemos hacia (4.52) llegamos al absurdo de que una función homogénea de grado 2 en u^{i} es igual a otra de grado 1. Para salvar esta dificultad debemos tomar $\mathcal{L}^{(2)}_{h}=0$, con lo cual (4.48) se transforma en:

$$\mathcal{L}^{(2)} = g_{ik}\, u^{i} u^{k} \qquad (4.55)$$

En definitiva podemos decir que (4.55) es la única solución de (4.46) para el caso $D_{rmk} \neq 0$. Esta claro también que $\mathcal{L}^{(n)}=0$ para $n>2$ y $n<$ o 2) Si $D_{rmk}=0$ entonces (4.46) se transforma en (4.49), luego por (4.52) y (4.54) la única solución para este caso es:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{\partial G}{\partial x^{r}}\, u^{r} = \frac{dG}{ds} \qquad (4.56)$$

Esta solución debe descartarse por dos razones, primero, porque la ecuación (4.46) no es válida para $n=1$ y segundo, que (4.56) por ser una derivada total no agrega nada nuevo a las ecuaciones de movimiento derivadas del principio variacional de mínima acción (4.1)

Sintetizando, podemos decir que del estudio de las ecuaciones (4.42) se llega a que el Lagrangiano propuesto en (4.4) queda reducida a sólo tres términos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} \tag{4.57}$$

donde, todavía $\mathcal{L}^{(0)}$ y $\mathcal{L}^{(1)}$ deben satisfacer las ecuaciones (4.41) y (4.40) respectivamente y $\mathcal{L}^{(2)}$ viene dado por (4.55).

Pasemos ahora, a ver cuales son las restricciones que imponen las ecuaciones (4.41) sobre $\mathcal{L}^{(0)}$. Para ello vamos a necesitar la expresión (4.41), pero, aprovechando el hecho de que $L^{(2)}$ está condicionada solamente a que sea una función homogénea de grado 2 en $\dot{u}^i$, le podemos pedir como condición adicional que no dependa explícitamente del punto x^i, en consecuencia $B''_{\ell k i}$ se reduce a:

$$B''_{\ell k i} = \frac{L^{(2)}}{6} \frac{\partial^3 L^{(-2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} \tag{4.58}$$

reemplazando (4.58) en (4.41) nos queda:

$$\frac{1}{6} \frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^s} \frac{\partial^3 L^{(-2)}}{\partial x^i \partial u^k \partial u^\ell} + \frac{L^{(2)}}{6} \frac{\partial^4 L^{(-2)}}{\partial x^i \partial u^s \partial u^k \partial u^\ell} -$$

$$- \frac{1}{6} \frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^i} \frac{\partial^3 L^{(-2)}}{\partial x^s \partial u^k \partial u^\ell} - \frac{L^{(2)}}{6} \frac{\partial^4 L^{(-2)}}{\partial x^s \partial u^i \partial u^k \partial u^\ell} = 0 \tag{4.59}$$

si ahora multiplicamos (4.59) por $u^{\ell}u^{k}$ y usamos las propiedades:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^{\ell}\partial u^{k}} u^{\ell}u^{k} = (n-1)n\,\mathcal{L}^{(n)} \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^{i}\partial u^{\ell}\partial u^{k}} u^{\ell}u^{k} = (n-2)(n-1)\,\frac{\partial \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^{k}} \tag{4.61}$$

que se derivan de (4.5), resulta que (4.59) se reduce a:

$$\frac{1}{6}\,\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^{s}}\,6\,\frac{\partial L^{(-2)}}{\partial x^{i}} + \frac{L^{(2)}}{6}\,12\,\frac{\partial^2 L^{(-2)}}{\partial x^{i}\partial u^{s}} - \frac{1}{6}\,\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^{i}}\,6\,\frac{\partial L^{(-2)}}{\partial x^{s}} - \frac{L^{(2)}}{6}\,12\,\frac{\partial^2 L^{(-2)}}{\partial x^{s}\partial u^{i}} = 0 \tag{4.62}$$

como $L^{(2)}$ no depende de x^{i}, entonces (4.62) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left\{\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^{s}}\,L^{(-2)} + 2\,L^{(2)}\,\frac{\partial L^{(-2)}}{\partial u^{s}}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^{s}}\left\{\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^{i}}\,L^{(-2)} + 2\,L^{(2)}\,\frac{\partial L^{(-2)}}{\partial u^{i}}\right\} = 0 \tag{4.63}$$

pero, como (4.63) es una ecuación de la forma (4.49), entonces admite una primer integral, es decir que:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^i} L^{(-2)} + 2L^{(2)} \frac{\partial L^{(-2)}}{\partial u^i} = \frac{\partial G}{\partial x^i} \qquad (4.64)$$

donde, G es una función idéntica a la definida en (4.51). Luego si multiplicamos (4.64) por $\dot{u}^i$ nos queda:

$$2L^{(2)} L^{(-2)} + 2L^{(2)}(-2) L^{(-2)} = \frac{\partial G}{\partial x^i} u^i$$

de donde: (ver (4.14))

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^i} u^i \qquad (4.65)$$

Ahora bien, como $\mathcal{L}^{(0)}$ es un escalar por definición, entonces por (4.65) $\frac{\partial G}{\partial x^i}$ debe ser un vector covariante, pero, ya vimos en (4.54) que para ello G no tiene que depender de $\dot{u}^i$, de manera que, llegamos al absurdo de que una función homogénea de grado cero en $\dot{u}^i$ es igual a otra de grado 1. Se concluye entonces, que $\mathcal{L}^{(0)} = 0$

Vemos entonces, que las ecuaciones (4.41) han descartado el término $\mathcal{L}^{(0)}$, con lo cual nuestro Lagrangiano (4.57) se reduce a:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} \qquad (4.66)$$

donde, $\mathcal{L}^{(1)}$ no es totalmente arbitrario puesto que debe satisfacer la ecuación (4.40). Para estudiar estas restricciones sobre $\mathcal{L}^{(1)}$, partimos de

$B'''_{(\ell\kappa i)}$ dado por (4.23) y teniendo en cuenta que $L^{(2)}$ puede ser cualquier función homogénea de grado 2 en u^i, nuevamente la elegimos de manera tal que sólo depende de u^i y no del punto x^i, o sea que:

$$B'''_{\ell\kappa i} = -\frac{L^{(2)}}{2}\frac{\partial^3 L^{(-1)}}{\partial x^{(\kappa}\partial u^{\ell)}\partial u^i} + \frac{\partial L^{(-1)}}{\partial x^{(\kappa}}\frac{\partial^2 L^{(2)}}{\partial u^{\ell)}\partial u^i} - \frac{L^{(2)}}{2}\frac{\partial^3 L^{(-1)}}{\partial x^i\partial u^\kappa\partial u^\ell} \qquad (4.67)$$

si ahora sustituimos (4.67) en (4.40) y repetimos los cálculos anteriores, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^s}L^{(-1)} + 3L^{(2)}\frac{\partial L^{(-1)}}{\partial u^s}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^s}\left\{\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^i}L^{(-1)} + 3L^{(2)}\frac{\partial L^{(-1)}}{\partial u^i}\right\} = 0 \qquad (4.68)$$

pero, como (4.68) es también una ecuación de la forma (4.49), entonces, admite una primer integral, o sea:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial u^i}L^{(-1)} + 3L^{(2)}\frac{\partial L^{(-1)}}{\partial u^i} = \frac{\partial G}{\partial x^i} \qquad (4.69)$$

donde, G es una función idéntica a la definida en (4.51). Luego, si multiplicamos (4.71) por u^i nos queda:

$$2L^{(2)}L^{(-1)} + 3L^{(2)}(-1)L^{(-1)} = \frac{\partial G}{\partial x^i}u^i$$

de donde: (ver(4.15))

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{\partial G}{\partial x^i} u^i \qquad (4.70)$$

Pero, como $\mathcal{L}^{(1)}$ es un escalar por definición, entonces por (4.70) $\frac{\partial G}{\partial x^i}$ debe ser un vector covariante, pero ya vimos en (4.54) que para ello G debe ser función del punto x^i solamente, luego, resulta que (4.70) se puede escribir como:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{\partial G(x^i)}{\partial x^i} u^i = \frac{dG}{dS} \qquad (4.71)$$

pero, es bien sabido que si agregamos una derivada total al Lagrangiano, las ecuaciones de movimiento no cambian, en consecuencia, la clase de Lagrangiano con propiedades físicas interesantes será:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(2)} = g_{ik} u^i u^k \qquad (4.72)$$

Si tenemos en cuenta que durante el desarrollo de este capítulo, sólo hemos pedido que las ecuaciones de movimiento se deriven de un único principio variacional y que satisfagan además, el principio de equivalencia fuerte (notemos, que no fue necesario hacer ninguna hipótesis sobre la geometría del espacio-tiempo), entonces, podemos afirmar que el único Lagrangiano de la forma (4.4) capaz de cumplir con estos requisitos es de la forma (4.72). Pero observando que este Lagrangiano es homogéneo de grado 2 en las cantidades u^i , inmediatamente concluimos por el teorema del capítulo 2, que no es posible compatibilizar las siguientes hipótesis:

1) Principio variacional

2) Espacio-tiempo plano

3) Principio de equivalencia fuerte

puesto que, de 1)y 2) se sigue el teorema del capítulo 2, el cual conduce a un Lagrangiano de la forma (2.6), donde, el término de interacción viene representado por un Lagrangiano homogéneo de grado 1 en las cuadrivelocidades $\dot{u}^i$, mientras que de 1) y 3) junto con (4.4) se llega a que el Lagrangiano de interacción es homogéneo de grado 2 en las cantidades $\dot{u}^i$, luego, debemos concluir que la necesidad de introducir el principio de equivalencia fuerte para caracterizar el campo gravitatorio nos fuerza a estudiar dicho campo dentro de una geometría no Euclídea. Mas aún, si (4.72) no depende explícitamente del parámetro de integración S (en general casi siempre ocurre asi), entonces por (2.2) resulta que $g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$ es constante de movimiento a lo largo de la línea de Universo de la partícula, por lo tanto, podemos identificar ds con la distancia entre dos puntos muy próximos (generalizando el concepto de distancia $ds = \eta_{ik}\, dx^i dx^k$ que caracteriza el el espacio-tiempo plano) y de esta manera, se sigue sin más, la teoría de Einstein de la Relatividad General.

Sin embargo, podrían intentarse teorías gravitatorias en el espacio-tiempo plano con Lagrangiano de la forma $\sqrt{\varphi_{ik}\, \dot{u}^i \dot{u}^k}$, pero, tendríamos serias dificultades al expresar las ecuaciones de movimiento, puesto que el término que representa la fuerza resultará una función complicada del vector cuadrivelocidad, o, como vimos en el capítulo 3, estará representado por un desarrollo en serie. Por otra parte, es claro que estas teorías jamás podrían satisfacer el principio de equivalencia fuerte. Fundamentalmente quienes han trabajado con Lagrangianos similares al mencionado, son Belinfante[3] y Mavridés[6] .

5. ASPECTOS CUANTICOS DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA FUERTE

5.1 INFLUENCIAS DE LA GRAVITACION EN LA TEORIA DE CAMPOS CUANTICA

Durante el desarrollo de los capítulos anteriores hemos visto que no es posible construir una teoría del campo gravitatorio, que derive de un único principio variacional y que además satisfaga el principio de equivalencia fuerte en el espacio-tiempo plano. Estas consideraciones, nos muestran claramente que el estudio de la teoría de campos cuántica, debemos realizarlas en el espacio-tiempo curvo. Por otra parte, si tenemos presente que el modelo de Universo más aceptado hoy en día es el del big-bang, en otras palabras, el modelo de la gran explosión inicial, entonces, es posible conjeturar a cerca del origen de la materia en el Universo y admitir que por distintos procesos de tipo cuántico, la materia fue creándose a expensas del campo gravitatorio, mas aún, podemos suponer que en los primeros instantes de vida del Universo, toda la energía era de tipo gravitatorio y a medida que se enfriaba por efecto de la expansión, esta energía se materializa en las distintas partículas elementales que formaron a su vez, las galaxias y estrellas que observamos en la actualidad.

Es claro que hubiera sido mucho más sencillo estudiar el fenómeno de creación de partículas por el campo gravitatorio, si éste pudiera desarrollarse dentro del espacio-tiempo plano, puesto que, no tendríamos el problema del alto grado de no linealidad que introduce el espacio-tiempo curvo, en las ecuaciones de campo. La razón de los primeros capítulos fue justamente mostrar que no era posible, por lo menos dentro de las características que se le asignan al campo gravitatorio, es decir que, fundamentalmente debe satisfacer el principio de equivalencia fuerte.[29]

De ahora en más, siempre que nos referamos al espacio-tiempo, lo haremos pensando que es el espacio curvo de Riemann introducido por Einstein en la Relatividad General y adoptaremos sus ecuaciones para describir el campo gravitatorio.

Como estamos interesados en la creación de partículas por el campo gravitatorio, tomaremos el modelo de Universo en expansión más sencillo, es decir, el de Robertson-Walker con superficie espacial plana, cuyo radio es función sólo del tiempo. Sin embargo, no vamos a cuantificar el campo gravitatorio, sinó que lo trataremos clásicamente como un campo dado, a expensas del cual se crean las partículas, o sea que, cuantificaremos sólo el campo escalar y el spinorial, en otras palabras, nos preguntaremos cuantas partículas de spin-0 y spin $-\frac{1}{2}$ se han creado por la expansión del Universo.

Veremos más adelante que este modelo tiene sus limitaciones, puesto que el campo gravitatorio se lo puede tratar clásicamente sólo para tiempos que satisfagan la desigualdad:

$$t > t_P$$

donde, $t_P = 10^{-43}$ seg. es el llamado tiempo de Planck[17] . En general, se admite que para tiempos menores el campo gravitatorio debe cuantificarse. A pesar que el tiempo de Planck es extremadamente chico, resulta muy importante, ya que el fenómeno de creación de partículas es más significativo cuanto más pequeño es el tiempo de vida del Universo, efectivamente, veremos que la densidad de partículas creadas depende enteramente del instante inicial, mientras que el tiempo actual participa de las expresiones,sólo a traves de la edad del Universo.

Al haber mostrado en los capítulos anteriores, que no es consistente desarrollar la teoría de la gravitación en el espacio-tiempo plano, resulta que, nos conduce a generalizar las ecuaciones de campo conocidas para Spin -0 y Spin $-\frac{1}{2}$ en el espacio-tiempo plano, al curvo. Como es obvio este proceso de generalización no es único, puesto que el espacio-tiempo curvo no tiene grupos de invariancia. En consecuencia, para lo que sigue tomaremos siempre la generalización más sencilla.

5.2 CREACION DE PARTICULAS DE SPIN-0 POR UN UNIVERSO EN EXPANSION

Comenzaremos por hacer una primer aplicación del Principio de Equivalencia Cuántico[18] y estudiar sus consecuencias cosmológicas, en un Universo en expansión[30]. Para ello, vamos a estudiar la creación de partículas escalares neutras (es decir que, vendrán representadas por un campo escalar real), por la presencia de un campo gravitatorio, el cual, será considerado clásicamente.

Para llevar a cabo este programa, es necesario generalizar la ecuación de Klein-Gordon al espacio-tiempo curvo. Como esta generalización, nos va a conducir a una ecuación diferencial bastante complicada, que tiene solución elemental sólo para algunos evoluciones de Universo muy particular, nos veremos obligados a desarrollar la solución en potencias de H/ω, donde, H es la constante de Huble y ω es la energía de la partícula creada. De esta manera, obtendremos una solución muy satisfactoria a segundo orden en H/ω, puesto que en general para tiempos no muy próximos a la singularidad inicial la cantidad $H/\omega \ll 1$. Por otra parte, al generalizar la ecuación de Klein-Gordon al espacio-tiempo curvo, se pierde el concepto de partícula[20], dado que el campo ya no puede descomponerse unívocamente en términos de frecuencias positivas y negativas como en el espacio-tiempo plano, donde los núcleos Δ y Δ_1 están bien definidos, en otras palabras, cuando se pasa al espacio-tiempo curvo resulta que el núcleo G (generalización del Δ) está bien definido, mientras que G_1 (generalización del Δ_1) no lo está, luego, el concepto de partícula dependería de la base que elegimos para desarrollar el campo.[19]

Para salvar esta dificultad se introduce el Principio de Equivalencia Cuántico, exigiendo que localmente el núcleo G_1 y su derivado normal a una superficie de Cauchy, coincida con el núcleo $\Delta_1$del espacio-tiempo plano y su derivado normal, postulando que dichos valores, se extienden a toda la superficie de Cauchy considerada, pero, en coordenadas normales[21] (Generalización natural de las coordenadas cartesianas en el espacio-tiempo curvo), de esta manera, se logra una descomposición única del campo en términos de frecuencias positivas y negativas, sobre cada una de las superficies de Cauchy definidas por los tiempos t_1 y t_2.

Habiendo construido las bases que definen el modelo de partícula en los tiempos t_1 y t_2 , entonces, existirá una tranformación de Bogoliubov que vincula las mismas. Dicha tranformación mezclará los operadores de creación y aniquilación, dando origen a una creación importante de partí culas de spin-0 por efecto del campo gravitatorio.

Al aplicar el Principio de Equivalencia Cuántico para encontrar las condiciones iniciales que debe satisfacer el campo, sobre cada una de las superficies de Cauchy, definidas por los tiempos t_1 y t_2, puede verse, que para Universos en expansión (especialmente planos) que responden a una métrica de la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]$$

resulta que las condiciones iniciales, admiten un desarrollo en serie de potencias de H/ω, luego, por lo dicho anteriormente, tomaremos el desarrollo hasta segundo orden en H/ω.

Cuando calculemos el número de partículas creadas, se verá que es posible expresarlo mediante un desarrollo en serie de potencias que comienza en H^2/ω^2, resultado que era de esperar puesto que el escalar de curvatura depende de H^2. Es decir que, el número de partículas creadas es proporcional a la curvatura del Universo, lo cual nos permite afirmar que hoy en día, se crean muy pocas partículas en comparación con los instantes iniciales, cuando la curvatura era enorme.

Otro aspecto importante que analizaremos, es que el flujo de partículas creadas por unidad de energía cinética y por unidad de ángulo sólido, sigue una ley cuya dependencia con la energía cinética, coincide con el espectro obtenido experimentalmente para los rayos cósmicos difusos X y γ de fondo [22-30].

5.3 ECUACION DE KLEIN-GORDON EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

La generalización de la ecuación de Klein-Gordon del espacio-tiempo plano:

$$\left(-\eta^{ik}\partial_i\partial_k - m^2\right)\phi(x^i) = 0 \tag{5.1}$$

al espacio-tiempo curvo es inmediata, basta con pasar de derivada ordinaria a derivada covariante, con lo cual nos queda:

$$(\triangle - m^2 - bR)\,\phi(x) = 0 \qquad (5.2)$$

donde:

$$\triangle = -g^{ik}\,\nabla_i\,\partial_k$$

De ahora en más, tomaremos las unidades de manera que $\hbar = c = 1$
El término bR ha sido agregado, porque , en el espacio-tiempo plano el escalar de curvatura R es nulo, de manera que (5.2) se reduce a (5.1) si g_{ik} coincide con η_{ik}(*). El parámetro b en principio puede tomar cualquier valor, pero, usualmente se toma $b=0$, 1/6 y en cada caso se dice que hay acoplamiento mínimo o acoplamiento conforme.

Una propiedad muy importante que se desprende de la ecuación de campo (5.2) es que para cualquier par de soluciones u y v, se cumple que:

(*) Notemos que este agregado no es fácil de explicar si $b\neq 0$, puesto que en estos casos la ecuación (5.2) localmente no se reduce a (5.1) como era de esperar por el principio de equivalencia fuerte. Sin embargo, puede considerarse como un término de interacción.

$$\nabla^i \left\{ u^*_{;i} v - u^* v_{;i} \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial^i \left\{ \sqrt{|g|} \left(u^*_{;i} v - u^* v_{;i} \right) \right\} = 0 \tag{5.3}$$

por lo tanto, si en el espacio de soluciones de (5.2) definimos el siguiente producto interno:

$$\langle u, v \rangle = i \int_S \left\{ u^*_{;i} v - u^* v_{;i} \right\} d\sigma^i \tag{5.4}$$

(donde $d\sigma^i$ es el elemento de area) resulta ser hermítico, y además, por (5.3) es independiente de la superficie de Cauchy, sobre lo cual se efectua la integración.

5.4 SOLUCION DE LA ECUACION DE KLEIN-GORDON EN UN UNIVERSO EN EXPANSION

Para resolver la ecuación (5.2), conviene llevarla a otra forma usando una de las propiedades de la derivada covariante, con lo cual, la ecuación de campo puede escribirse como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g}\; g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right) + (m^2 + bR)\phi = 0 \tag{5.5}$$

En principio, estudiaremos la ecuación (5.5) para una métrica del tipo Robertson Walker en su forma general, es decir que:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,\gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \qquad (5.6)$$

donde:

$$g_{00} = 1 \quad ; \quad g_{\alpha\beta} = -a^2(t)\,\gamma_{\alpha\beta}$$
$$g^{00} = 1 \quad ; \quad g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2(t)}\,\gamma^{\alpha\beta} \qquad (5.7)$$

y $\gamma_{\alpha\beta}$ es la métrica espacial. Admitimos por el momento que $\gamma_{\alpha\beta}$, es sólo función de las coordenadas espaciales, y que la única dependencia temporal de la métrica, es a través del radio del Universo $a(t)$. De la métrica (5.7) se sigue:

$$g = -a^6\gamma \quad ; \quad \sqrt{-g} = a^3\sqrt{\gamma} \qquad (5.8)$$

donde, γ es el determinante del tensor métrico espacial $\gamma_{\alpha\beta}$, por lo tanto, reemplazando (5.7) y (5.8) en (5.5) nos queda:

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right) + (m^2 + bR)\phi = 0$$

Si ahora definimos el Laplaciano espacial como:

$$\Delta(\gamma) = -\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\partial_\beta = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right) \qquad (5.9)$$

entonces , la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{a^2}\Delta(\gamma)\phi+(m^2+bR)\phi=0 \tag{5.10}$$

para resolver esta ecuación proponemos la siguiente solución:

$$\phi_{K_i}(x^i)=f_{K_i}(t)\;Y_{K_i}(x^\alpha) \tag{5.11}$$

donde, $Y_{K_i}(\gamma^\alpha)$ son las autofunciones del operador (5.9) cuyo espectro de autovalores es positivo y con límites definido, es decir que:[31]

$$\Delta(\gamma)\,Y_{K_i}=\mathcal{E}^2(K_i)\,Y_{K_i} \tag{5.12}$$

Observemos además, que la ecuación (5.10) admite separación de variables sólo si, R es función del tiempo, por lo tanto, de ahora en más, nos reestringiremos a Universos cuya métrica conduce a un escalar de curvatura que es a lo sumo, constante o función del tiempo. Luego, sustituyendo (5.12) en (5.10) se llega a que $f_{K_i}(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\ddot{f}_{K_i}+3H\dot{f}_{K_i}+\left(\frac{\mathcal{E}^2}{a^2}+m^2+bR\right)f_{K_i}=0 \tag{5.13}$$

donde, $H=\dot{a}/a$ es la constante de Hubble y $\dot{f}_{K_i}=\frac{df_{K_i}}{dt}$.

Para continuar con la resolución de esta ecuación diferencial, es necesario calcular el escalar de curvatura correspondiente a la métrica (5.7), el mismo se obtiene a partir de:

$$R = g^{ik} R_{ik} \tag{5.14}$$

donde:

$$R_{ik} = \Gamma^{\ell}_{ik,\ell} - \Gamma^{\ell}_{i\ell,k} + \Gamma^{m}_{ik} \Gamma^{\ell}_{m\ell} - \Gamma^{m}_{i\ell} \Gamma^{\ell}_{km} \tag{5.15}$$

por otra parte, mediante un cálculo sencillo se puede ver que la conexión afín para la métrica (5.7) es:

$$\begin{aligned} &\Gamma^{o}_{oo} = \Gamma^{o}_{o\alpha} = 0 \quad ; \quad \Gamma^{o}_{\alpha\beta} = a\dot{a}\, \gamma_{\alpha\beta} \\ &\Gamma^{\sigma}_{oo} = 0 \quad ; \quad \Gamma^{\sigma}_{o\alpha} = H\, \delta^{\sigma}_{\alpha} \quad ; \quad \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde, $\gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$ es la conexión afín construida con la métrica espacial $\gamma_{\alpha\beta}$, de manera que, si reemplazamos (5.15) y (5.16) en (5.14) se llega a la siguiente expresión para el escalar de curvatura:

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{R(\gamma)}{a^2} \tag{5.17}$$

donde, $R(\gamma)$ es la curvatura espacial. Notemos, por lo dicho anteriormente, que $R(\gamma)$ debe ser constante, porque de lo contrario de (5.13) y (5.17), se ve que no es posible hacer separación de variables. Esta propiedad se verifica en los Universos espacialmente planos, esféricos o hiperbólicos, en consecuencia, para lo que sigue, aumentaremos más las restricciones y nos ponemos en el caso más sencillo, es decir, aquel que corresponde a un Universo en expansión espacialmente plano, en cuyo caso $R(\gamma)=0$ Ahora bien, para este tipo de Universo resulta que (5.9) se reduce al Laplaciano ordinario, por lo tanto de (5.12) se deduce que $Y_{K_i}(x^\alpha)$ es $exp(-i\overline{K}\,\overline{x})$, luego (5.11) se escribe como:

$$\phi_K(x^i)=f_K(t)\,e^{-i\overline{K}\cdot\overline{x}} \qquad (5.18)$$

Redefiniendo la función $f_K(t)$, con el propósito de que el campo mantenga la forma que tiene en el espacio-tiempo plano, nos queda:

$$\phi_K(x^i)=\frac{e^{i\int_{t_1}^{t}\Omega_K\,dt}}{(2\pi a)^{3/2}\,(2W_K)^{1/2}}\,e^{-i\overline{K}\cdot\overline{x}} \qquad (5.19)$$

donde, Ω_K y W_K son dos funciones del tiempo totalmente arbitrarias. Pero, deben ser tales que los campos $\phi_K(x^i)$, resulten ortonormales en el producto interno definido por (5.4) es decir que:

$$\langle \phi_{K'}\,;\,\phi_K\rangle=\delta(K-K') \qquad (5.20)$$

pero, por (5.18) resulta:

$$\langle \phi_{k'} ; \phi_k \rangle = i\left(\dot{f}^*_{k'} f_k - f^*_{k'} \dot{f}_k\right)(2\pi a)^3 \delta(k-k') \tag{5.21}$$

luego, comparando (5.20) y (5.21) para $K = K'$, debe ser:

$$i\left(\dot{f}^*_k f_k - f^*_k \dot{f}_k\right)(2\pi a)^3 = 1 \tag{5.22}$$

ahora bien, si reemplazamos (5.19) en (5.22), después de un cálculo sencillo, vemos que deben verificarse las siguientes condiciones:

$$\begin{gathered} I_m\, \Omega_K = I_m\, W_K = 0 \\ \Omega_K = W_K \end{gathered} \tag{5.23}$$

de manera que, reemplazando (5.23) en el campo (5.19), obtenemos una base ortonormal para el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon generalizada (5.5), dicha base es:

$$\begin{aligned} \phi_K &= \frac{e^{-i\int_{t_1}^{t} \Omega_K\, dt}}{(2\pi a)^{3/2}\,(2\,\Omega_K)^{1/2}}\, e^{-i\,\bar{K}\cdot\bar{x}} = f_K(t)\, e^{-i\,\bar{K}\cdot\bar{x}} \\ \phi^*_{-K} &= \frac{e^{i\int_{t_1}^{t} \Omega_K\, dt}}{(2\pi a)^{3/2}\,(2\,\Omega_K)^{1/2}}\, e^{-i\,\bar{K}\cdot\bar{x}} = f^*_{-K}(t)\, e^{-i\,\bar{K}\cdot\bar{x}} \end{aligned} \tag{5.24}$$

donde, ϕ_K y ϕ^*_{-K} representan las funciones de frecuencias negativas y positivas respectivamente. Ahora bien, para que los campos (5.24) sean realmente soluciones de la ecuación (5.13), es necesario que la función Ω_K satisfaga la siguiente ecuación diferencial:

$$\Omega_K^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right)^{\bullet} = \omega_K^2 - \frac{3}{2}\left(\dot{H} + \frac{3}{2}H^2\right) + bR$$

$$\omega_K^2 = \frac{K^2}{a^2} + m^2 \qquad (5.25)$$

Puede verse fácilmente que, para los modelos de Universo más aceptados, (es decir, aquellos en que domina la radiación o la materia) cuyos radio evolucionan según:

$$a = t^n \qquad (5.26)$$

la solución de la ecuación (5.25) a primer orden en potencias de H/ω es:

$$\Omega_K = \omega_K \qquad (5.27)$$

puesto que para evoluciones del tipo (5.26), el escalar de curvatura (5.17) es:

$$R \sim \dot{H} \sim H^2 \qquad (5.28)$$

Notemos, que no habría ocurrido lo mismo si se tratara de un Universo no plano espacialmente, puesto que en este caso de (5.17) se tendría que

$$R \sim \frac{R(\gamma)}{a^2} + O(H^2) \tag{5.29}$$

y en consecuencia la solución de primer orden sería:

$$\Omega_k^2 \quad \omega_k^2 + \frac{bR(\gamma)}{a^2} = \frac{k^2 + bR(\gamma)}{a^2} + m^2 \tag{5.30}$$

donde, $R(\gamma)$ es constante. Por otra parte, puede verse que las frecuencia negativas y positivas (5.24), que se obtienen con la solución aproximada (5.27), coincide con las soluciones que da la primera aproximación del método W.K.B., a primer orden en H/ω [18-32].

La solución a segundo orden en H de la ecuación (5.25), se obtendrá en el apéndice (A-3).

5.5 CONSTRUCCION DEL MODELO DE PARTICULA Y TRANSFORMACION DE BOGOLIUBOV

Volviendo a las soluciones (5.24), que definen frecuencias negativas y positivas, observamos que en realidad no hay unicidad en esta definición, ya que cualquier tranformación de Bogoliubov entre ellas generará una nueva base, que también, descompone el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, en espacios de frecuencias negativas y positivas. Esta falta de unicidad se traduce en un fenómeno de creación de partículas[18], para cualquier Universo en expansión, porque, en ca da superficie de Cauchy, definida por el tiempo t , es posible seleccionar un único nucleo $\mathcal{G}_1$, pero, diferente en cada superficie de Cauchy de manera que, tendremos un modelo de partícula distinto en cada tiempo. Luego, habrá una transformación de Bogoliubov que vincula ambas bases, dando origen a una mezcla de operadores de creación y aniquilación. En consecuencia, se crearán partículas al evolucionar el Universo desde el tiempo t_1 al tiempo t_2 .

Para seleccionar la base adecuada en cada superficie de Cauchy, exigimos que se satisfaga el Principio de Equivalencia Cuántico, es decir que localmente, la teoría de campos en un Universo en expansión, se reduzca a la teoría de campos del espacio plano, postulando además, la extensión de su valor a toda la superficie de Cauchy. Por lo tanto, el Principio de Equivalencia Cuántico define una condición inicial sobre cada superficie $t = cte$, condición ésta, que deben satisfacer las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, que van a representar las verdaderas frecuencias negativas y positivas.

Estas serán las bases en términos de los cuales, el campo podrá descomponerse unívocamente en una parte de frecuencia negativa y en otra positiva.

Pasemos ahora a contruir las bases que representan partículas en los tiempos t_1 y t_2 , según el Principio de Equivalencia Cuántico. Para ello, usaremos los campos (5.24) como base del espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, pero, si tenemos en cuenta que se trata de una ecuación diferencial de 2do. orden, necesitamos además, conocer el campo y su derivada sobre la superficie de Cauchy. Si llamamos

$$\Pi_K^{(t)} \quad y \quad \dot{\Pi}_K^{(t)} \tag{5.31}$$

a los valores iniciales que determina el Principio de Equivalencia Cuántico sobre cada superficie de Cauchy y definimos:

$$F_K(t) = -i\,\Omega_K - \frac{1}{2}\left(3H + \frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right) \tag{5.32}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \dot{f}_K(t) &= f_K(t)\,F_K(t) \\ \dot{f}^{*}_{-K}(t) &= f^{*}_{-K}(t)\;F^{*}_{-K}(t) \end{aligned} \tag{5.33}$$

de manera que, la base buscada se escribe como(*):

$$\phi_K^{(3)}(t) = A_K^{(3)} f_K(t) + B_K^{(3)} f^{*}_{-K}(t) \tag{5.34}$$

(*)Para lo que sigue, omitiremos el factor común $e^{i\bar{K}\cdot\bar{x}}$ en los campos y en las condiciones iniciales (5.31), puesto que en las combinaciones lineales de la forma (5.34) se simplifica.

donde, $A_K^{(3)}$ y $B_K^{(3)}$ para $\tau = t_1 = 1$ se determinan a partir del siguiente sistema algebraico:

$$A_K^{(1)} f_K(t_1) + B_K^{(1)} f_{-K}^*(t_1) = \pi^{(1)}$$

$$A_K^{(1)} \dot{f}_K(t_1) + B_K^{(1)} \dot{f}_{-K}^*(t_1) = \dot{\pi}_K^{(1)}$$

o usando (5.33):

$$\begin{aligned} A_K^{(1)} f_K(t_1) + B_K^{(1)} f_{-K}^*(t_1) &= \pi_K^{(1)} \\ A_K^{(1)} f_K(t_1)\, F_K(t_1) + B_K^{(1)} f_{-K}^*(t_1)\, F_{-K}^*(t_1) &= \dot{\pi}_K^{(1)} \end{aligned} \qquad (5.35)$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} A_K^{(1)} &= i\, \frac{(2\pi a^{(1)})^{3/2}}{(2\Omega_K^{(1)})^{1/2}} \left(\dot{\pi}_K^{(1)} - \pi_K^{(1)} F_{-K}^{(1)*} \right) \\ B_K^{(1)} &= i\, \frac{(2\pi a^{(1)})^{3/2}}{(2\Omega_K^{(1)})^{1/2}} \left(\pi_K^{(1)} F_K^{(1)} - \dot{\pi}_K^{(1)} \right) \end{aligned} \qquad (5.36)$$

notemos, que en (5.34) se pasa de una base ortonormal a otra, luego, es una tranformación de Bogoliubov, es decir que:

$$|A_K^{(1)}|^2 - |B_K^{(1)}|^2 = 1 \qquad (5.37)$$

Para $t = t_2$, se debe satisfacer un sistema algebraico similar a (5.36) de manera que, su solución conduce a:

$$A_K^{(2)} = i\,\frac{(2\pi a^{(2)})^{3/2}}{(2\Omega_K^{(2)})^{1/2}}\left(\dot{\pi}_K^{(2)} - \pi_K^{(2)} F_{-K}^{*(2)}\right) e^{i\int_{t_1}^{t_2}\Omega_K dt}$$

$$B_K^{(2)} = i\,\frac{(2\pi a^{(2)})^{3/2}}{(2\Omega_K^{(2)})^{1/2}}\left(\pi_K^{(2)} F_K^{(2)} - \dot{\pi}_K^{(2)}\right) e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\Omega_K dt} \qquad (5.38)$$

estos coeficientes también satisfacen una relación similar a (5.37), o sea que:

$$|A_K^{(2)}|^2 - |B_K^{(2)}|^2 = 1 \qquad (5.39)$$

luego, la parte de frecuencia negativa del campo definidas por el Principio de Equivalencia Cuántico para los tiempos t_1 y t_2 es:

$$\phi_K^{(1)}(t) = A_K^{(1)} f_K(t) + B_K^{(1)} f_{-K}^{*}(t)$$

$$\phi_K^{(2)}(t) = A_K^{(2)} f_K(t) + B_K^{(2)} f_{-K}^{*}(t) \qquad (5.40)$$

las frecuencias positivas vienen dadas, claro está, por la conjugada compleja de $-K$ de (5.40).

Como $\left(\phi_K^{(1)}(t)\,;\,\phi_{-K}^{*(1)}(t)\right)$ y $\left(\phi_K^{(2)}(t)\,;\,\phi_{-K}^{*(2)}(t)\right)$

son dos bases en el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon resulta que, entre ellas debe existir una tranformación de Bogoliubov, es decir que:

$$\phi_{k}^{(2)}(t) = \alpha_{k}\, \phi_{k}^{(1)}(t) + \beta_{k}\, \phi_{-k}^{*(1)}(t) \qquad (5.41)$$

ahora bien, si en (5.41) reemplazamos $\phi_{k}^{(1)}(t)$ y $\phi_{k}^{(2)}(t)$ por sus expresiones (5.40), en términos de la base única ($\phi_{k}(t)$ y $\phi_{-k}^{*}(t)$) se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{k}^{(2)} &= A_{k}^{(1)}\alpha_{k} + B_{k}^{(1)*}\beta_{k} \\ B_{k}^{(2)} &= B_{k}^{(1)}\alpha_{k} + A_{k}^{(1)*}\beta_{k} \end{aligned} \qquad (5.42)$$

de aquí resulta:

$$\begin{aligned} \alpha_{k} &= A_{k}^{(2)} A_{k}^{(1)*} - B_{k}^{(2)} B_{k}^{(1)*} \\ \beta_{k} &= A_{k}^{(1)} B_{k}^{(2)} - A_{k}^{(2)} B_{k}^{(1)} \end{aligned} \qquad (5.43)$$

además, puede verificarse por (5.37) y (5.39) que:

$$|\alpha_{k}|^{2} - |\beta_{k}|^{2} = 1 \qquad (5.44)$$

En lo que sigue, veremos que sólo nos va a interesar β_{k}, puesto que por (5.41) la mezcla de frecuencias negativas y positivas es debido a β_{k}, en otras palabras, la creación de partículas escalares por un Universo en expansión, se va poder expresar en términos de $|\beta_{k}|^{2}$. Reem plazando (5.36) y (5.38) en (5.43) nos queda:

$$\beta_K = \frac{(2\pi a^{(1)})^{3/2}(2\pi a^{(2)})^{3/2}}{(2\Omega_K^{(1)})^{1/2}(2\Omega_K^{(2)})^{1/2}} \left\{ e^{i\int_{t_1}^{t_2}\Omega_K dt} (\dot{\Pi}_K^{(2)} - \Pi_K^{(2)} F_K^{(2)*})(\Pi_K^{(1)} F_K^{(1)} - \dot{\Pi}_K^{(1)}) - \right.$$

$$\left. - e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\Omega_K dt} (\dot{\Pi}_K^{(1)} - \Pi_K^{(1)} F_K^{(1)*})(\Pi_K^{(2)} F_K^{(2)} - \dot{\Pi}_K^{(2)}) \right\} \qquad (5.45)$$

Para lo que sigue va a ser muy útil que estudiemos ahora, algunas propiedades sencillas de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. De (5.13) se deduce que la solución de la parte temporal depende del módulo de $\bar{K}$, luego:

$$f_K = f_{-K}$$
$$F_K = F_{-K} \qquad (5.46)$$

pero, como además, la parte temporal de las bases de frecuencias negativas y positivas $\phi_K^{(\tau)}(t)$ y $\phi_{-K}^{(\tau)*}(t)$ definidas por (5.34), son soluciones de la ecuación (5.13), resulta entonces, que también ellos dependen del módulo de $\bar{K}$, es decir:

$$\phi_K^{(\tau)}(t) = \phi_{-K}^{(\tau)}(t) \qquad (5.47)$$

Si ahora usamos (5.46) y (5.47) en (5.34) se llega también a que:

$$A_K^{(2)} = A_{-K}^{(2)}$$
$$B_K^{(2)} = B_{-K}^{(2)} \qquad (5.48)$$

y de forma totalmente análoga puede verse que de (5.41), resulta:

$$\alpha_K = \alpha_{-K}$$
$$\beta_K = \beta_{-K} \qquad (5.49)$$

5.6 ESTIMACION DE LA DENSIDAD DE PARTICULAS CREADAS

Para llevar a cabo este cálculo, es necesario cuantificar el campo escalar y tener presente que, el campo puede expresarse en términos de cualquier base, en particular, podemos escribirlo en la base (5.40) (que representa frecuencias negativas y positivas en los tiempos t_1 y t_2) puesto que, éstas satisfacen el Principio de Equivalencia Cuántico sobre las superficies de Cauchy definidas por esos tiempos, por lo tanto:

$$\Phi_K(t) = a_K^{(1)} \phi_K^{(1)}(t) + a_{-K}^{(1)+} \phi_{-K}^{(1)*}(t)$$
$$\Phi_K(t) = a_K^{(2)} \phi_K^{(2)}(t) + a_{-K}^{(2)+} \phi_{-K}^{(2)*}(t) \qquad (5.50)$$

donde, hemos tomado un campo real, es decir que, sólo estudiaremos partí culas escalares neutras. Ahora bien, como vimos en (5.41), existe una transformación de Bogoliubov que relaciona las bases definidas en los tiempos t_1 y t_2 , luego, si reemplazamos en (5.50), resulta que los operadores de creación y destrucción sobre cada superficie de Cauchy se mezclan entre si, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
a_K^{(1)} &= \alpha_K\, a_K^{(2)} + \beta_{-K}^{*}\, a_{-K}^{(2)+} \\
a_{-K}^{(1)+} &= \beta_K\, a_K^{(2)} + \alpha_{-K}^{*}\, a_{-K}^{(2)+}
\end{aligned}
\qquad (5.51)
$$

cuya inversa es:

$$
\begin{aligned}
a_K^{(2)} &= a_K^{(1)}\,\alpha_{-K}^{*} - a_{-K}^{(1)+}\,\beta_{-K}^{*} \\
a_{-K}^{(2)+} &= a_{-K}^{(1)+}\,\alpha_K - a_K^{(1)}\,\beta_K
\end{aligned}
\qquad (5.52)
$$

Si suponemos que $t_2 > t_1$ y definimos el estado de vacio en $t = t_1$, entonces, en $t = t_2$ se habrá creado un número de partículas (por la expansión del Universo), que puede calcularse usando las expresiones (5.52), o sea que:

$$
{}_1\langle 0|N_K^{(2)}|0\rangle_1 = {}_1\langle 0|\, a_K^{(2)+} a_K^{(2)}\,|0\rangle_1 = |\beta_{-K}|^2 = |\beta_K|^2 \qquad (5.53)
$$

este resultado muestra claramente que, sólo basta conocer β_K para calcular el número de partículas creadas con impulso $\bar{K}$,puesto que la mezcla de frecuencias en (5.41) es debido a este coeficiente. Como por otra parte, β_K depende del módulo de $\bar{K}$ entonces, se crean igual cantidad de partículas de impulso $\bar{K}$ y $-\bar{K}$.

Teniendo en cuenta, que la solución Ω_K a la parte temporal de la ecuación de Klein-Gordon (5.25), y el cálculo de las condiciones de contorno π_K y $\dot{\pi}_K$, que satisfacen el Principio de Equivalencia Cuántico sobre cada superficie de Cauchy, no pueden obtenerse en forma cerrada, nos vemos obligados a desarrollar todos los cálculos que siguen en potencias de H/ω, donde, H es la constante de Huble y ω es la energía de la partícula creada. Si usamos los desarrollos de Ω_K, π_K y $\dot{\pi}_K$ hasta segundo orden y además, para simplificar las cuentas tomamos aclopamiento mínimo, es decir que hacemos $b=0$, puede verse, que no se modifican en nada los resultados que obtendremos a continuación para $|\beta_K|^2$ con los obtenidos en el trabajo de Castagnino y colaboradores[30] para $b \neq 0$, en efecto; del apéndice (A-3) se tiene que las soluciones aproximadas de la ecuación diferencial (5.25) para $b=0$ son:

$$\Omega_K = \pm \left\{ \omega_K + \frac{5m^4}{8\omega_K^5} H^2 - \frac{m^2}{4\omega_K^3} H^2 - \frac{R}{12\omega_K^3} \left(\frac{m^2}{2} + \omega_K^2 \right) \right\} \qquad (5.54)$$

Por otra parte, como ya vimos anteriormente el núcleo G_1 no está bien definido, puesto que depende de la base de soluciones que elijamos para la ecuación de Klein-Gordon. Este hecho, nos conduce a que existen diferentes descomposiciones del campo, en términos de frecuencias positivas y negativas sobre cada superficie de Cauchy, definida por el tiempo t. En otras palabras, se ve que existe un núcleo G_1 diferente para cada superficie de Cauchy.

Para seleccionar un núcleo G_1, sobre cada superficie de Cauchy es necesario conocer G_1 y su derivada normal sobre dicha superficie. Estas condiciones iniciales sobre cada superficie de Cauchy se obtienen por medio del Principio de Equivalencia Cuántico:

" El nucleo $G_1^{(\tau)}(x,y)$ tiene los mismos datos de Cauchy sobre la superficie normal de Cauchy Σ que el $\Delta_1(x,y)$ escrito en coordenadas normales"

Notemos, que necesitamos una superficie normal por que el sistema de coordenadas normales, debe estar definido en toda la superficie, de manera que así, sea posible definir $\Delta_1(x,y)$ en toda la superficie de Cauchy. Con estas hipótesis resula que, las condiciones iniciales sobre cada superficie de Cauchy son:(21)

$$\Pi_k = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}(2\omega_k)^{1/2}}\left\{1 - \frac{5}{16}\frac{m^4}{\omega_k^6}H^2\right\} \tag{5.55}$$

$$\dot{\Pi}_k = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}(2\omega_k)^{1/2}}\left\{-i\omega_k - \frac{(2\omega_k^2+m^2)}{2\omega_k^2}H - i\frac{5}{16}\frac{m^4}{\omega_k^5}H^2\right\}$$

si ahora reemplazamos (5.54) y (5.55) en (5.45) se obtiene que:

$$\beta_k = \frac{e^{i\int_{t_1}^{t_2}\omega_k dt}}{2\omega_k^{(1)4}}\left\{\frac{m^2}{4}H^{(1)2} + \frac{R^{(1)}}{12}\left(\frac{m^2}{2}+\omega_k^{(1)2}\right)\right\} -$$

$$- \frac{e^{-i\int_{t_1}^{t_2}\omega_k dt}}{2\omega_k^{(2)4}}\left\{\frac{m^2}{4}H^{(2)2} + \frac{R^{(2)}}{12}\left(\frac{m^2}{2}+\omega_k^{(2)2}\right)\right\} \tag{5.56}$$

o también:

$$|\beta_K|^2 = \frac{G_K^{(1)2}}{4\omega_K^{(1)8}} + \frac{G_K^{(2)2}}{4\omega_K^{(2)8}} - \frac{G_K^{(1)}G_K^{(2)}}{2\omega_K^{(1)4}\omega_K^{(2)4}}\cos 2\int_{t_1}^{t_2}\omega_K\, dt \qquad (5.57)$$

donde:

$$G_K = \frac{m^2}{4}H^2 + \frac{R}{12}\left(\frac{m^2}{2} + \omega_K^2\right) \qquad (5.58)$$

Aunque en general la expresión (5.57) es difícil de manejar, veremos, sin embargo, que bajo ciertas hipótesis naturales, es posible simplificarla. Para ello, tengamos presente que en escala cosmológica, nos va a interesar el número de partículas creadas entre un tiempo t_1, próximo a la singularidad inicial, es decir, del orden del tiempo de Planck $t_P = 10^{-43}$ seg y el tiempo actual $t_2 \sim 10^{18}$ seg. Luego, para estos tiempos, se cumple que la relación entre el radio del Universo en los instantes iniciales y su radio actual, es mucho mayor que uno:

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(2)}} \gg 1 \qquad (5.59)$$

Una consecuencia inmediata de esta relación, es que la energía cinética de una partícula creada en los instantes iniciales, nos llega hoy en día con una energía cinética que está en la misma relación que (5.59), es decir que:

$$\frac{K}{a^{(1)}} \gg \frac{K}{a^{(2)}} \tag{5.60}$$

por lo tanto, a pesar que las partículas observadas en la actualidad, tienen una energía cinética muy inferior a su masa en reposo, han sido por (5.59) y (5.60) ultrarelativistas cuando fueron creadas. En otras palabras:

$$\begin{aligned} \frac{K}{a^{(1)}} \gg m \quad &\Rightarrow \quad \omega^{(1)} = \frac{K}{a^{(1)}} \\ \frac{K}{a^{(2)}} \ll m \quad &\Rightarrow \quad \omega^{(2)} = m \end{aligned} \tag{5.61}$$

ahora bien, si usamos (5.61_1) en el primer sumando de (5.57), nos queda:

$$\frac{G_K^{(1)^2}}{4\,\omega_K^{(1)^8}} \simeq \frac{\left\{ \frac{m^2}{4} H^2 + \frac{R}{12} \frac{K^2}{a^2} \right\}^{(1)^2}}{4 \, \frac{K^8}{a^{(1)^8}}} \tag{5.62}$$

pero, como además, las soluciones (5.54) son válidas para Universos cuyo radio evoluciona según la ley (ver A-3):

$$a(t) = t^{1/\gamma} \, [seg]^{(1-1/\gamma)} \tag{5.63}$$

resulta que:

$$R = 6(2-\gamma) H^2 \tag{5.64}$$

luego, reemplazando (5.64) en (5.62), se tiene:

$$\frac{G_K^{(1)^2}}{4\,\omega_K^{(1)^8}} \simeq \frac{\left\{\left(m^2 + 2(2-\gamma)\frac{K^2}{a^2}\right)\frac{H^2}{4}\right\}^{(1)^2}}{4\,\frac{K^8}{a^{(1)^8}}} \tag{5.65}$$

de manera que, si $\gamma \neq 2$, entonces, por (5.61) la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{G_K^{(1)^2}}{4\,\omega_K^{(1)^8}} \simeq \frac{1}{16}\left(\frac{R^{(1)}}{6}\right)^2 \frac{a^{(1)^4}}{K^4} \tag{5.66}$$

Volviendo nuevamente a la expresión (5.57) y reemplazando (5.61_2), en su segundo sumando, éste se reduce a:

$$\frac{G_K^{(2)^2}}{4\,\omega_K^{(2)^8}} \simeq \frac{(7-3\gamma)^2}{64}\,\frac{H^{(2)^4}}{m^4} \tag{5.67}$$

Una rápida determinación de (5.67), para la constante de Huble actual $H \sim 10^{-18}$ 1/seg. y la masa de un proton $m \sim 10^{24}$ 1/seg nos da:

$$\left(\frac{H^{(2)}}{m}\right)^4 \sim 10^{-168} \tag{5.68}$$

Para estimar (5.66), con evoluciones de la forma (5.63) notemos que:

$$\frac{G_K^{(1)^2}}{4\,\omega_K^{(1)^8}} \simeq \left(\frac{2-\gamma}{4\gamma^2}\right)^2 \frac{1}{t^{(1)^4} E^{(1)^4}} \tag{5.69}$$

Ahora bien, los tiempos de mayor interés son aquellos para los cuales se pueden crear partículas con masa en resposo del orden del protón, es decir que, $t_1 \lesssim 10^{-24}$ seg. Pero, como en estos primeros instantes la creación de partículas es muy abundante, entonces, la incerteza en el tiempo que dura el proceso de medición, debe ser menor o del orden de t_1, es decir que, $\Delta t \lesssim t_1$. Por otra parte, la incerteza en la energía de la partícula creada, debe ser menor o del orden de su propia energía, de manera que $\Delta E \lesssim E_1$. En consecuencia, por el principio de incerteza, resulta:

$$1 \lesssim \Delta t \, \Delta E \lesssim t_1 E_1 \tag{5.70}$$

Si tenemos en cuenta, que la creación ocurre casi totalmente cerca de la singularidad inicial, entonces, es en esos momentos, cuando se manifiesta en forma apreciable la naturaleza cuántica en el proceso de creación, luego, el producto $t_1 . E_1$ no difiere mucho de la unidad:

$$\Delta t \, \Delta E \sim t_1 E_1 \sim 1 \tag{5.71}$$

por lo tanto, de (5.68), (5.69) y (5.71), se concluye que:

$$\frac{{\mathcal{G}_K^{(1)}}^2}{4 {\omega_K^{(1)}}^8} \gg \frac{{\mathcal{G}_K^{(2)}}^2}{4 {\omega_K^{(2)}}^8} \tag{5.72}$$

además, si reemplazamos la evolución (5.63) en (5.72), ésta adopta la siguiente forma:

$$\left\{ \frac{2(2-\gamma)}{(7-3\gamma)} \right\}^{1/2} m t^{(2)} \gg \kappa \, {t^{(1)}}^{(1-1/\gamma)} \, seg^{(1/\gamma - 1)} \tag{5.73}$$

pero, como nos interesa la creación de partículas entre, un tiempo próximo a la singularidad inicial y el actual, es decir:

$$t^{(2)} \sim 10^{18} seg \gg t^{(1)} \gtrsim 10^{-43} seg \qquad (5.74)$$

entonces, la desigualdad (5.73) será válida para cualquier tiempo, si $(1 - 1/\gamma) > 0$. De esta manera, vemos reducida las posibles evoluciones temporales (5.63), sólo a aquellas, que:

$$1/\gamma < 1 \qquad (5.75)$$

los casos más importantes, es decir, $1/\gamma = 1/2$ y $2/3$ satisfacen esta relación.

Usando (5.72) en la expresión de $|\beta_\kappa|^2$, dado por (5.57), ésta, se puede aproximar por:

$$|\beta_\kappa|^2 \approx \frac{1}{16}\left(\frac{R^{(1)}}{6}\right)^2 \frac{a^{(1)^4}}{k^4} \qquad (5.76)$$

mostrando claramente que la creación de partículas,depende fundamentalmente de la curvatura inicial del Universo y no de su evolución futura, es decir que hoy en día, prácticamente no se crean partículas (a expensas del campo gravitatorio) por la expanción del Universo.

Para el caso particular en que las partículas creadas tengan masa nula en reposo, se puede repetir el razonamiento anterior y se llega nuevamente a la expresión (5.76).

La densidad de partículas creadas por la expansión del Universo, viene dada por:

$$\int d^3\bar{K}\,\rho(\bar{K}) = \int dK\, 4\pi K^2 \frac{|\beta_K|^2}{(2\pi c a)^3} \tag{5.77}$$

donde, hemos tomado las funciones de frecuencias positivas y negativas, normalizadas en una caja de volumen $(2\pi c a)^3$. Por lo tanto, de ahora en más pasamos a las unidades usuales donde, $a(t)$ tiene dimensiones de tiempo. Por otra parte, los datos experimentales vienen expresados en términos de la energía cinética de las partículas,

$$T = \hbar(\omega - m) \tag{5.78}$$

o

$$K = a\left(\frac{T^2}{\hbar^2} + \frac{2mT}{\hbar}\right)^{1/2}$$

además, lo que hoy en día se mide, es el flujo de partículas creadas por unidad de energía cinética y por unidad de ángulo sólido, de manera que, si llamamos Φ al flujo, se tiene que:

$$\int \Phi(K)\, dK = \int \rho(K)\, v_K\, dK \tag{5.79}$$

donde, v_K es la velocidad de la partícula que lleva impulso K/a. Como la energía de la partícula es:

$$E_K = \hbar\omega_K = \frac{m\hbar}{\left(1 - \frac{v_K^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.80}$$

resulta que reemplazando (5.78) y (5.80)en (5.79) nos queda:

$$\Phi(T)dT = \frac{1}{16(2\pi)^3 c^2}\left(\frac{R^{(1)}}{6}\right)^2\left(\frac{a^{(1)}}{a}\right)^4 \frac{dT}{T^2 + 2m\hbar T} \tag{5.81}$$

Argumentos heurísticos muestran que el tiempo de plank:

$$t_p = \left\{\frac{G\hbar}{c^5}\right\}^{1/2} \sim 10^{-43} seg. \tag{5.82}$$

define un límite, tal que, para tiempos menores el campo gravitatorio debe cuantificarse, mientras que, para tiempos mayores, es posible aplicar esta teoría semiclásica en la cual hemos tomado al campo gravitatorio como un campo externo sin cuantificar. Por lo tanto, si admitimos que a partir de $t_1 \sim 10^{-43}$ seg.comienza la creación de partículas (por el mecanismo propuesto) y que además, la edad actual del Universo es aproximadamente la inversa de la constante de Huble, o sea que $t_2 \sim 10^{13}$ seg. entonces, para calcular el flujo de partículas creadas se hace necesario adoptar un modelo de Universo puesto que de otra manera, no podriamos estimar la relación $a^{(1)}/a^{(2)}$. Actualmente, el modelo de Universo mas aceptado, es el del big-bang, cuyo radio evoluciona como $t^{1/2}$ para tiempos menores que $t_d = 10^{13} seg$, es decir que en esta era hay pleno dominio de la radiación frente a la materia. En otras palabras, la energía de las partículas es tan alta que no pueden ligarse para formar átomos. Por encina de t_d , comienza la formación de átomos y por ende, tenemos un dominio neto de la materia, en consecuencia, el radio del Universo comienza a evolucionar como $t^{2/3}$. Con estas hipótesis fundamentales, resulta muy razonable estimar la relación $a^{(1)}/a^{(2)}$ como sigue:

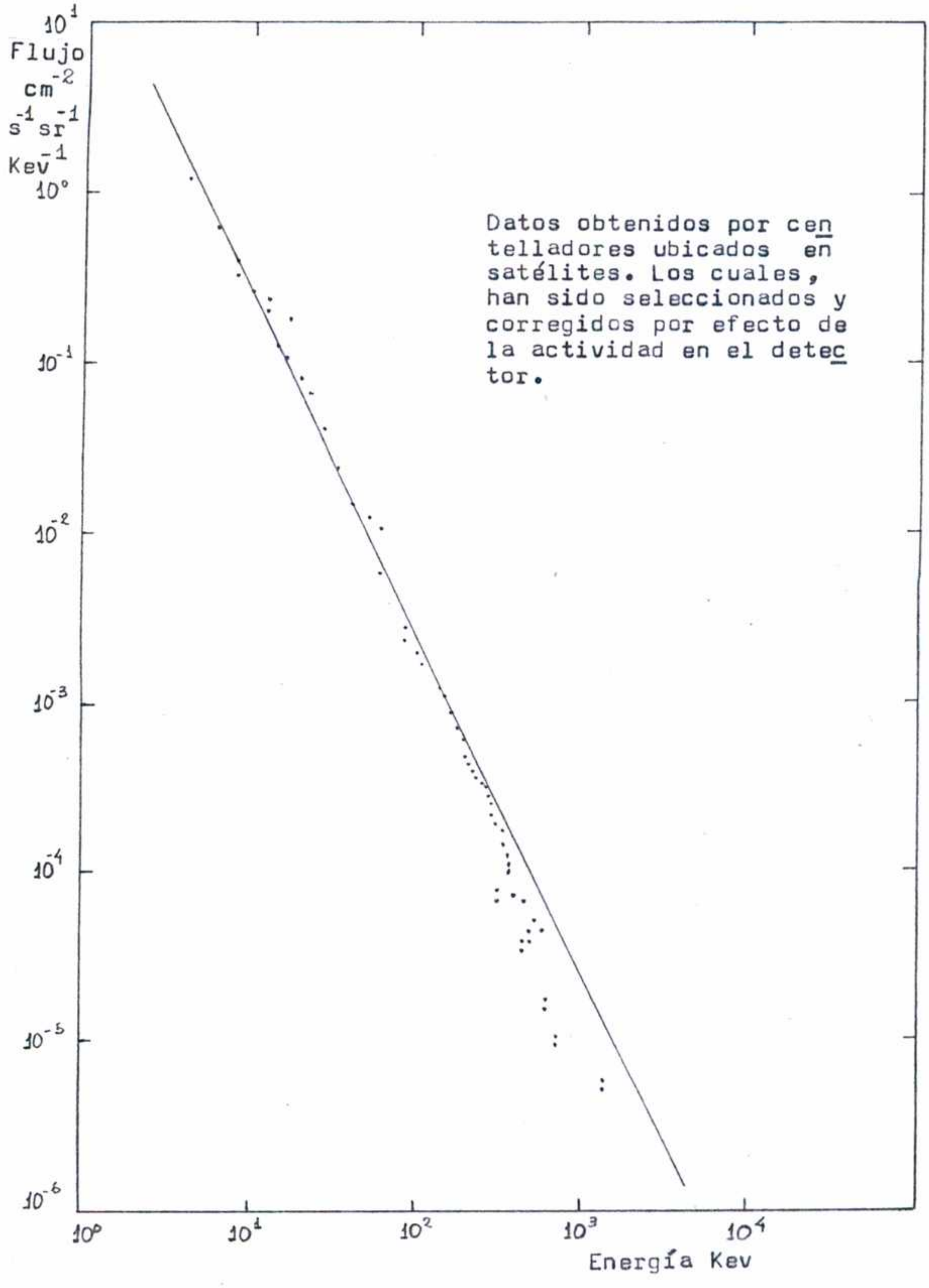
$$\frac{a^{(1)}}{a^{(2)}} \simeq \frac{t_1^{1/2}}{t_2^{2/3}} \frac{t_d^{2/3}}{t_d^{1/2}} \qquad (5.83)$$

Si por otra parte, tenemos en cuenta que todos los desarrollos anteriores son válidos para evoluciones de la forma $t^{1/\gamma}$, entonces, para éstas, resulta que el escalar de curvatura $R \sim 1/t^2$, de manera que, reemplazando en esta expresión el tiempo Plank (5.82) y usando la relación (5.83) en (5.81), se tiene que el flujo de partículas de spin- 0 con masa nula en reposo creadas por unidad de energía cinética y por ángulo sólido, viene dada por:

$$\Phi \simeq \frac{25}{T^2} \frac{Kev}{cm^2\,seg} \qquad (5.84)$$

esta expresión del flujo, se aproxima muy bien a la curva experimental[22] que se obtiene para la radiación cósmica difusa x y γ de fondo, como se ve en la figura;

ESPECTRO DE RAYOS COSMICOS DIFUSOS X DE FONDO



abservándose, una amplia coincidencia en un rango bastante grande de energía. Sin embargo, debemos notar que si las partículas se crearon antes que se desacoplara la radiación de la materia, hoy en día, estos fotones deberian estar termalizados y serían parte de la radiación de fondo de $3^{o}K$. De todas maneras, resulta bastante sugestivo, el hecho de haber obtenido el mismo valor de la pendiente de la curva experimental. Mas aún, no debemos olvidar, que hemos usado el flujo de partículas creadas de spin- 0 y masa nula en reposo para explicar los datos que se obtuvieron para los fotones.

6. CREACION DE PARTICULAS DE SPIN 1/2 POR UN UNIVERSO EN EXPANSION

6.1 INTRODUCCION

Como ya vimos en el capítulo anterior el Principio de Equivalencia Cuántico permite definir un único núcleo G_1 para cada superficie de Cauchy, pero distinto para cada una de ellas. Consecuentemente fue posible tener un modelo de partícula único para cada tiempo. De manera que la trnformación de Bogoliubov, entre las bases de partícula, definidas para los tiempos t_1 y t_2, daba origen a una mezcla de los operadores de creación y aniquilación. Por lo tanto, se encontraba que el campo gravitatorio era capaz de crear partículas de spin-0.

El caso que vamos a tratar ahora, es la creación de partículas de spin $-\frac{1}{2}$ por un Universo en expansión, espacialmente plano. Consideramos además, al campo gravitatorio clásicamente. Este estudio lo llevaremos a cabo, generalizando por un lado la ecuación de Dirac al espacio-tiempo curvo, según fue formulado en el trabajo de Castagnino[33] y por otra parte, aplicaremos nuevamente el Principio de Equivalencia Cuántico para definir un único núcleo S_1 en cada superficie del Cauchy y tener así, bien definido el modelo de partícula.

El tratamiento matemático de la ecuación de Dirac generalizada, resulta ser más complicado que el tratamiento de la ecuación de Klein-Gordon generalizada, puesto que la primera contiene un operador matricial aplicado sobre un campo spinorial, mientras que la segunda contiene un operador escalar aplicado sobre un campo escalar. Pero a pesar de esta dificultad, veremos que es posible expresar el campo spinorial solución, en términos de una sola función, que satisface cierta ecuación diferencial de primer orden, en un modo totalmente similar al que seguimos para el campo escalar, en el capítulo anterior. Luego, aplicaremos nuevamente el Principio de Equivalencia Cuántico, para determinar las condiciones iniciales que deben satisfacer los campos, sobre la superficie de Cauchy. Al llegar a este punto, veremos que si tomamos el campo de Dirac generalizado y el Principio de Equivalencia Cuántico a primer orden en potencias de H/ω , no tenemos creación de partículas, resultado que era de esperar, ya que tampoco teníamos creación de partículas de spin-0 a este orden, en otras palabras, a orden H/ω no se manifiestan aún fenómenos de creación de partículas atribuibles a la curvatura del espacio-tiempo R puesto que ésta depende de H^2 y potencias superiores. En cambio cuando se pasa a 2do. orden, resulta que las condiciones iniciales sobre la superficie de Cauchy que determina el Principio de Equivalencia Cuántico, son tales que, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas incompatibles para determinar los valores de los campos sobre la superficie de Cauchy, de manera que, no se puede definir el modelo de partícula, a segundo orden en potencias de H/ω. Este resultado negativo, nos muestra claramente que el Principio de Equivalencia Cuántico, no permite definir la descomposición del campo, en términos de frecuencias positivas y negativas para órdenes superiores de H/ω . Es claro, que esta dificultad está asociada al hecho que, el Principio de Equivalencia fuerte impone condiciones que deben satisfacer los campos sólo en un punto y en consecuencia, no es lícito hacer una extensión de los valores que debe tomar el campo, a toda la superficie de Cauchy como postula el Principio de equivalencia cuántico.

Para superar estas dificultades, se están estudiando dos formas alternativas del Principio de Equivalencia Cuántico, el geodésico y el iso cinético. Sin embargo, hasta el momento, estos trabajos no han sido aún terminados.

Por último se tratará el caso particular muy interesante de partículas de spin - $\frac{1}{2}$ y masa nula, dado que para ellas la ecuación de Dirac generalizada tiene solución exacta para cualquier Universo en expansión, con una métrica de la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]$$

6.2 ECUACION DE DIRAC EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

Siguiendo el trabajo de Castagnino,[33] haremos aquí una breve descripción, de la ecuación de Dirac generalizada y de los conceptos fundamentales, que necesitaremos en la sección siguiente.

Como es bien sabido, las ecuaciones de Dirac en el espacio-tiempo plano son:

$$(\gamma^i \partial_i - m)\,\Psi(x) = 0 \qquad (6.1)$$

donde, Ψ es un spinor de 4 componentes y las matrices γ^i son 4 matrices arbitrarias pero que, satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación:

$$\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i = -2\eta^{ik} \qquad (6.2)$$

además, como el tensor métrico η^{ik} tiene el mismo valor en todos los puntos del espacio-tiempo, resulta que las matrices γ^{i} no son funciones de punto, en consecuencia son constantes, es decir que:

$$\partial_i \gamma_k = 0 \tag{6.3}$$

En una representación particular, las matrices γ^{i} son:

$$\gamma_0 = \gamma^0 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_\alpha = -\gamma^\alpha = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

donde:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

son las matrices de Pauli. En lo sucesivo nos referiremos a esta representación de las matrices de Dirac.

La generalización inmediata de las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.3) al espacio-tiempo curvo es:

$$\left(\Gamma^i \nabla_i - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{6.6}$$

$$\Gamma^i \Gamma^k + \Gamma^k \Gamma^i = -2g^{ik} \tag{6.7}$$

$$\nabla_i \Gamma_k = 0 \tag{6.8}$$

donde, las matrices Γ^{i} son ahora funciones de punto, y ∇_i es el símbolo que representa la derivada covariante spinorial, lo cual está definida de la siguiente manera:

$$\nabla_i \Psi = \partial_i \Psi + \sigma_i \Psi \tag{6.9}$$

A las matrices σ_i, que llamaremos conexión spinorial, las determinaremos sencillamente pidiendo que, se satisfagan las ecuaciones (6.8), es decir:

$$\nabla_i \Gamma_k = \Gamma_{k//i} + \sigma_i \Gamma_k - \Gamma_k \sigma_i = 0 \tag{6.10}$$

donde, el símbolo $//$ significa derivada covariante de Γ_k , como si dichas matrices formaren simplemente un vector. Pero, por el trabajo de Loos[34] se sabe que (6.10) solo determina parcialmente a las matrices σ_i , luego, para definirlas completamente es necesario agregar la condición (ver Castagnino)[33]:

$$\nabla_i \Gamma = 0 \tag{6.11}$$

donde, Γ es la matriz que tiene la propiedad:

$$\Gamma^{ti} = -\Gamma \Gamma^i \Gamma^{-1} \tag{6.12}$$

Volviendo a la ecuación de Dirac (6.6), puede verse que el espacio de sus soluciones tiene una propiedad muy importante, puesto que:

$$\nabla_i(\bar{u}\,\Gamma^i v) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i(\sqrt{|g|}\,\bar{u}\,\Gamma^i v) = 0 \qquad (6.13)$$

donde, u y v son dos spinores cualquiera solución de la ecuación de Dirac y $\bar{u}$ es el adjunto de Dirac:

$$\bar{u} = u^{+}\beta \qquad (6.14)$$

en la representación (6.4) de las matrices de Dirac es:

$$\beta = -i\,\gamma_0 \qquad (6.15)$$

de manera que, si dentro del espacio de soluciones de la ecuación (6.6) definimos el siguiente producto interno:

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = -i\int_{\Sigma} \bar{u}\,\Gamma_i\, v\, d\sigma^i = \langle\langle v, u\rangle\rangle^{*} \qquad (6.16)$$

resulta ser hermítico, y además, de acuerdo a (6.13) es independiente de la superficie de Cauchy, sobre la cual se efectua la integración.

Una diferencia escencial, entre la ecuación de Dirac (6.1) y su generalización (6.6), es que, las soluciones de (6.1) satisfacen la ecuación de Klein-Gordon, en cambio las soluciones de (6.6) satisfacen:

$$(\Delta - m^2)\Psi = 0 \qquad (6.17)$$

donde:

$$\Delta = -\nabla_i \nabla^i + \frac{1}{4} R \tag{6.18}$$

pero, este operador difiere del operador de Klein-Gordon generalizado (5.2), justamente en el sumando que contiene la curvatura escalar.

Con la breve síntesis anterior, de la ecuación generalizada de Dirac, podemos ya, tratar el problema de un Universo en expansión espacialmente plano.

6.3 SOLUCION DE LA ECUACION DE DIRAC EN UN UNIVERSO EN EXPANSION ESPACIALMENTE PLANO

Un universo con estas características, viene representado por el siguiente elemento de arco:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz \right] \tag{6.19}$$

de manera que, las componentes no nulas del tensor métrico son:

$$g_{00} = 1 \quad ; \quad g_{(\alpha\alpha)} = -a^2(t) \tag{6.20}$$

Si ahora definimos las matrices Γ^i como:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \gamma_0 \quad , \quad & \Gamma_\alpha &= a(t)\,\gamma_\alpha \\ \Gamma^0 &= \gamma^0 \quad ; \quad & \Gamma^\alpha &= a^{-1}(t)\,\gamma^\alpha \end{aligned} \tag{6.21}$$

y teniendo en cuenta que las matrices γ^i satisfacen (6.2), entonces, re sulta que las reglas de conmutación de las Γ^i es la correcta, o sea que:

$$\Gamma^i \Gamma^k + \Gamma^k \Gamma^i = -2 g^{ik} \tag{6.22}$$

por otra parte, para el tensor métrico (6.20) se obtiene fácilmente que, los elementos no nulos de la conexión afín son:

$$\Gamma^0_{\alpha\alpha} = a\dot{a} \quad ; \quad \Gamma^{(\alpha)}_{0(\alpha)} = \Gamma^{(\alpha)}_{(\alpha)0} = \frac{\dot{a}}{a} = H \tag{6.23}$$

Luego, la conexión spinorial resulta:

$$\sigma_0 = 0 \quad ; \quad \sigma_\alpha = -\frac{1}{2}\dot{a}\gamma^0\gamma^\alpha = \frac{1}{2} H \Gamma^0 \Gamma_\alpha \tag{6.24}$$

en efecto, por cálculo directo puede verse que con (6.24) se satisface (6.8) y (6.11).

La ecuación de Dirac (6.6) para la métrica (6.20) se reduce a:

$$\left(\Gamma^i \partial_i + \frac{3}{2} H \Gamma^0 - m\right)\Psi = 0 \tag{6.25}$$

Esta ecuación puede resolverse por separación de variables, para ello proponemos:

$$\Psi_{\bar{K}}(\bar{x}, t) = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}} f_{\bar{K}}(t)\, e^{i\bar{K}\cdot\bar{x}} \tag{6.26}$$

luego, reemplazando (6.26) y (6.21) en (6.25) nos queda:

$$\gamma^0 \dot{f}_{\bar{K}} + i \frac{K_\alpha}{a} \gamma^\alpha f_{\bar{K}} - m f_{\bar{K}} = 0 \qquad (6.27)$$

multiplicando por γ^0 y usando la representación (6.4), nos queda que:

$$\left\{ \partial_0 - i \begin{pmatrix} -m & \frac{K_\alpha}{a}\sigma^\alpha \\ \frac{K_\alpha}{a}\sigma^\alpha & m \end{pmatrix} \right\} f_{\bar{K}} = 0 \qquad (6.28)$$

Ahora bien, como $f_{\bar{K}}$ es un spinor de 4 componentes que depende sólo del tiempo, proponemos:

$$f_{\bar{K}} = \begin{bmatrix} A_{\bar{K}} e^{i\int \Omega_K dt} \\ B_{\bar{K}} e^{i\int \Omega_K dt} \\ C_{\bar{K}} e^{i\int \Lambda_K dt} \\ D_{\bar{K}} e^{i\int \Lambda_K dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bar{K}} e^{i\int \Omega_K dt} \\ B_{\bar{K}} e^{i\int \Lambda_K dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1\bar{K}} \\ f_{2\bar{K}} \end{bmatrix} \qquad (6.29)$$

las últimas dos formas de escribir el spinor $f_{\bar{K}}$, es el llamado formalismo 2 x 2.

Como necesitamos $\dot{f}_{\bar{K}}$, de (6.29) resulta que:

$$\dot{f}_{\bar{K}} = \begin{bmatrix} i\Omega_K e^{i\int \Omega_K dt} \\ i\Lambda_K e^{i\int \Lambda_K dt} \end{bmatrix} = i \begin{pmatrix} \Omega_K & 0 \\ 0 & \Lambda_K \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_{1\bar{K}} \\ f_{2\bar{K}} \end{bmatrix} \qquad (6.30)$$

luego, reemplazando en (6.28) se tiene:

$$\begin{pmatrix} \Omega_K + m & -\frac{K\alpha}{a}\sigma^\alpha \\ -\frac{K\alpha}{a}\sigma^\alpha & \Lambda_K - m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_{1\bar{K}} \\ f_{2\bar{K}} \end{bmatrix} = 0 \tag{6.31}$$

como (6.31) es un sistema homogéneo de ecuaciones, tendrá solución no trivial sólo si su determinante se anula, entonces debe ser:

$$(\Omega_K + m)^2(\Lambda_K - m)^2 = \frac{K^4}{a^4}$$

o (6.32)

$$(\Omega_K + m)(\Lambda_K - m) = \pm \frac{K^2}{a^2}$$

La solución negativa de (6.32) debe descartarse, porque , en ese caso, las ecuaciones (6.31) tienen como solución única al spinor nulo. (De ahora en más, cada vez que nos referimos a la ecuación (6.32), la tomaremos siempre con signo positivo). Por un sencillo cálculo, reemplazando (6.32) en (6.31) se llega a que:

$$f_{1\bar{K}} = \frac{K\alpha\,\sigma^\alpha}{a(\Omega_K + m)}\, f_{2\bar{K}} \tag{6.33}$$

de manera que, haciendo uso de (6.29) resulta:

$$f_{\bar{K}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{K_\alpha \sigma^\alpha}{a(\Omega_K+m)} f_{2\bar{K}} \\ f_{2\bar{K}} \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Para determinar la función Ω_K que aparece en el spinor (6.34), reemplazando éste en una de las ecuaciones (6.28), de manera que:

$$(\partial_0 + im)\frac{K_\alpha \sigma^\alpha}{a(\Omega_K+m)} f_{2\bar{K}} - i\,\frac{K_\alpha \sigma^\alpha}{a} f_{2\bar{K}} = 0 \tag{6.35}$$

como $f_{2\bar{K}}$ depende de la funciòn Λ_K, usamos la ecuación (6.32) para escribirlo en términos de Ω_K, luego de lo cual la ecuación (6.35) se puede llevar a la forma:

$$K_\alpha \sigma^\alpha \left\{ i\,\dot{\Omega}_K - \Omega_K^2 + iH(\Omega_K+m) + \omega_K^2 \right\} f_{2\bar{K}} = 0$$

donde:

$$\omega_K^2 = \frac{K^2}{a^2} + m^2 \tag{6.36}$$

pero, como det. $\left(K_\alpha \sigma^\alpha\right) = -K^2 \neq 0$, resulta que:

$$i\dot{\Omega}_K - \Omega_K^2 + iH(\Omega_K + m) + \omega_K^2 = 0 \tag{6.37}$$

ésta es la ecuación diferencial que determina a Ω_K. Por otra parte, mediante un cálculo simple, de (6.32) y (6.37) se obtiene la ecuación diferencial que satisface la función Λ_K, ésta es:

$$i\dot{\Lambda}_K - \Lambda_K^2 + iH(\Lambda_K - m) + \omega_K^2 = 0 \tag{6.38}$$

Tanto la ecuación (6.37) como la (6.38) pueden escribirse en una sola ecuación diferencial:

$$i\dot{W}_K - W_K^2 + H(iW_K + m\gamma^0) + \omega_K^2 = 0 \tag{6.39}$$

donde, W_K es la matriz definida por (6.30), es decir que:

$$\dot{f}_{\bar{K}} = iW_K f_{\bar{K}}$$

$$\text{con} \qquad W_K = \begin{pmatrix} \Omega_K & 0 \\ 0 & \Lambda_K \end{pmatrix} \tag{6.40}$$

La ecuación (6.39),puede resolverse a segundo orden en potencias de H/ω_K siguiendo el método, que usamos anteriormente para resolver la ecuación diferencial (5.25). El resultado de estos cálculos pueden verse con detalle en el apéndice (A-4).

Para algunos casos particulares, puede verificarse por simple inspención, que las ecuaciones (6.37) y (6.38) admiten las siguientes soluciones exactas:

$$\text{a)} \quad \text{Si} \quad K=0 \Rightarrow \begin{cases} \Omega_0 = -m \\ \Lambda_0 = m \end{cases} \tag{6.41}$$

$$\text{b)} \quad \text{Si} \quad m=0 \Rightarrow \begin{cases} \Omega_K = \pm \dfrac{K}{a} \\ \Lambda_K = \pm \dfrac{K}{a} \end{cases} \tag{6.42}$$

Este último caso es muy importante, puesto que en la naturaleza existe una partícula de masa nula en reposo y spin-$\frac{1}{2}$, es el llamado neutrino, que será estudiado con más detalle al final de este capítulo.

Volviendo a la solución (6.34), observemos que en realidad contiene dos spinores independientes según se tome:

$$f_{2K} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\int \Lambda_K dt} \qquad \text{ó} \qquad f_{2K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\int \Lambda_K dt}$$

en cuyo caso por (6.26) resultan:

$$\Psi_{3\bar{K}} = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}} \begin{bmatrix} \dfrac{K_3}{a(\Omega_K+m)} \\ \dfrac{K^+}{a(\Omega_K+m)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\int \Lambda_K dt} \; e^{i\bar{K}\cdot\bar{x}}$$

$$\Psi_{4\bar{K}} = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}} \begin{bmatrix} \dfrac{K^-}{a(\Omega_K+m)} \\ \dfrac{-K_3}{a(\Omega_K+m)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\int \Lambda_K dt} \; e^{i\bar{K}\cdot\bar{x}} \qquad (6.43)$$

los subíndices 3 y 4, han sido colocados para que estos spinores, se reduzcan a los del espacio plano $\omega^3_{\bar{K}}$ y $\omega^4_{\bar{K}}$ usados por Bjorken [35] cuando a(t) es constante.

Como una base completa debe tener 4 spinores, nos falta hallar todavía dos más. Para encontrarlos notemos que $-\Omega^*_K$ satisface la ecuación (6.38) conjugada y que, Λ^*_K satisface la ecuación (6.37) conjugada. Además, frente al mismo cambio:

$$\Omega_{K} \longrightarrow -\Lambda_{K}^{*}$$
$$\Lambda_{K} \longrightarrow -\Omega_{K}^{*} \qquad (6.44)$$

el determinante (6.32) es invariante, luego, los dos spinores que faltan se obtienen a partir del sistema (6.31) haciendo el cambio (6.44), pero, teniendo en cuenta que frente a este cambio, el spinor (6.29) se transforma como:

$$\begin{bmatrix} f_{1\bar{K}} \\ f_{2\bar{K}} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} f_{2\bar{K}}^{*} \\ f_{1\bar{K}}^{*} \end{bmatrix} \qquad (6.45)$$

de manera que, el sistema de ecuaciones (6.31) se reescribe como:

$$\begin{pmatrix} -\Lambda_{K}^{*} + m & -\frac{K_\alpha}{a}\sigma^{\alpha} \\ -\frac{K_\alpha}{a}\sigma^{\alpha} & -(\Omega_{K}^{*} + m) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_{2\bar{K}}^{*} \\ f_{1\bar{K}}^{*} \end{bmatrix} = 0 \qquad (6.46)$$

ahora bien, si en este sistema de ecuaciones cambiamos $\vec{K} \rightarrow -\vec{K}$ (este cambio es sólo para que los spinores que se obtengan, se reduzcan a los spinores del espacio plano, cuando, el universo no se expande o en otras palabras, cuando $H = 0$) y resolvemos (6.46) resulta que:

$$f_{\bar{K}} = \begin{bmatrix} f^{*}_{2\bar{K}} \\ \dfrac{K_\alpha \sigma^\alpha f^{*}_{2\bar{K}}}{a(\Omega^{*}_{K} + m)} \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

Si ahora hacemos que $f^{*}_{2\bar{K}}$ valga:

$$f^{*}_{2\bar{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\int \Lambda^{*}_{K}\, dt} \qquad \text{ó} \qquad f^{*}_{2\bar{K}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\int \Lambda^{*}_{K}\, dt}$$

entonces, de (6.47) se obtienen las dos soluciones que faltan, ellas son:

$$\Psi_{1\bar{K}} = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{K_3}{a(\Omega^{*}_{K} + m)} \\ \dfrac{K^{+}}{a(\Omega^{*}_{K} + m)} \end{bmatrix} e^{-i\int \Lambda^{*}_{K}\, dt} \; e^{-i\bar{K}\cdot\bar{x}}$$

$$\Psi_{2\bar{K}} = \frac{1}{(2\pi a)^{3/2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{K^{-}}{a(\Omega^{*}_{K} + m)} \\ \dfrac{-K_3}{a(\Omega^{*}_{K} + m)} \end{bmatrix} e^{-i\int \Lambda^{*}_{K}\, dt} \; e^{-i\bar{K}\cdot\bar{x}} \tag{6.48}$$

Ahora bien, para que los spinores (6.43) y (6.48) sean una buena base del espacio de soluciones de la ecuación de Dirac, es necesario que sean ortonormales en el producto interno definido por (6.16). Procedamos primero a normalizar las soluciones (6.43) y (6.48), es decir que, para cada una de ellas debe ser:

$$\langle \Psi_{\bar{K}'} ; \Psi_{\bar{K}} \rangle = \delta(\bar{K}' - \bar{K}) \tag{6.49}$$

pero, por (6.16) y (6.26), se tiene:

$$\langle \Psi_{\bar{K}'} ; \Psi_{\bar{K}} \rangle = f^{+}_{\bar{K}'} f_{\bar{K}} \, \delta(\bar{K}' - \bar{K}) \tag{6.50}$$

luego, comparando (6.50) y (6.49) para $\bar{K} = \bar{K}'$, se tiene que:

$$f^{+}_{\bar{K}} f_{\bar{K}} = 1 \tag{6.51}$$

si imponemos esta condición a los spinores (6.34) se obtiene:

$$e^{-\int \mathrm{Im}\, \Lambda_K \, dt} = \sqrt{\frac{\Omega^{*}_{K} + m}{\Omega^{*}_{K} + \Lambda_K}} \tag{6.52}$$

se puede verificar también, que para los spinores (6.47) resulta el mismo factor de normalización (6.52). Si ahora escribimos:

$$\Lambda_K = \lambda_K + i N_K \tag{6.53}$$

con λ_K y N_K reales, resulta que:

$$\begin{aligned} i\Lambda_K &= i\lambda_K - N_K \\ -i\Lambda_K^* &= i\lambda_K - N_K \end{aligned} \tag{6.54}$$

por lo tanto, si combinamos las expresiones (6.54) y (6.52) con (6.43) y (6.48), vemos que los spinores normalizados son:

$$\Psi_{1,2K} = \sqrt{\frac{\Omega_K^* + m}{\Omega_K^* + \Lambda_K}} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{K_\alpha \sigma^\alpha}{a(\Omega_K^* + m)} \end{bmatrix} \frac{e^{-i\int \lambda_K dt}}{(2\pi a)^{3/2}} e^{-i\bar{K}\cdot\bar{x}}$$

$$(6.55)$$

$$\Psi_{3,4K} = \sqrt{\frac{\Omega_K^* + m}{\Omega_K^* + \Lambda_K}} \begin{bmatrix} -\dfrac{K_\alpha \sigma^\alpha}{a(\Omega_K + m)} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{e^{i\int \lambda_K dt}}{(2\pi a)^{3/2}} e^{iK\cdot\bar{x}}$$

Esta es una forma simbólica de escribir los 4 spinores, puesto que para explicitarlos, es necesario hacer las siguientes operaciones:

$$\Psi_{1\bar{K}} = \Psi_{1,2\bar{K}}\, u_1 \qquad ; \qquad \Psi_{2\bar{K}} = \Psi_{1,2\bar{K}}\, u_2$$

$$\Psi_{3\bar{K}} = \Psi_{3,4\bar{K}}\, u_3 \qquad ; \qquad \Psi_{4\bar{K}} = \Psi_{3,4\bar{K}}\, u_4 \tag{6.56}$$

donde:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

Para completar nos falta ver si los spinores (6.55) son ortogonales en el producto (6.16). Por simple cálculo directo se puede verificar que $\Psi_{1\bar{K}}$ y $\Psi_{2\bar{K}}$ son ortonormales, que $\Psi_{3\bar{K}}$ y $\Psi_{4\bar{K}}$ también son ortonormales, pero que $\Psi_{1,2\bar{K}}$ y $\Psi_{3,4\bar{K}}$ no son ortogonales, luego, para que si lo sean basta con hacer el cambio de signo $\bar{K} \to -\bar{K}$ en cualquiera de los spinores $\Psi_{1,2\bar{K}}$ o $\Psi_{3,4\bar{K}}$. De manera que, los spinores que debemos usar como base del espacio de soluciones de la ecuación de Dirac son:

$$\Psi_{1,2\bar{K}} = \sqrt{\frac{\Omega_K^* + m}{\Omega_K^* + \Lambda_K}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{K_\alpha \sigma^\alpha}{a(\Omega_K^* + m)} \end{bmatrix} \frac{e^{-i\int \lambda_K dt}}{(2\pi a)^{3/2}}\, e^{-i\bar{K}\cdot\bar{x}}$$

$$\Psi_{3,4\bar{K}} = \sqrt{\frac{\Omega_K^* + m}{\Omega_K^* + \Lambda_K}} \begin{bmatrix} \dfrac{-K_\alpha \sigma^\alpha}{a(\Omega_K + m)} \\ \\ 1 \end{bmatrix} \frac{e^{i\int \lambda_K dt}}{(2\pi a)^{3/2}}\, e^{-i\bar{K}\cdot\bar{x}} \tag{6.58}$$

en otras palabras, los spinores (6.58) satisfacen las siguientes rela ciones:

$$\langle \Psi_i(\bar{K}) ; \Psi_\ell(\bar{K}') \rangle = \delta_{i\ell}\, \delta(\bar{K}-\bar{K}') \tag{6.59}$$

De ahora en más, siempre que nos referamos a los spinores Ψ_i, serán los definidos en (6.58).

Para lo que sigue, va a ser muy útil que definamos una matriz, cuyas columnas estan formadas por los spinores $\Psi_{1\bar{K}}$; $\Psi_{2\bar{K}}$, $\Psi_{3\bar{K}}$; $\Psi_{4\bar{K}}$ sin el factor común $\frac{\exp(-i\bar{K}\cdot\bar{x})}{(2\pi a)^{3/2}}$, es decir que:

$$\Psi_{\bar{K}} = \left(\Psi_{1\bar{K}}\ \Psi_{2\bar{K}}\ \Psi_{3\bar{K}}\ \Psi_{4\bar{K}} \right) e^{i\bar{K}\cdot\bar{x}} (2\pi a)^{3/2} \tag{6.60}$$

Mediante un cálculo sencillo (6.60) se puede escribir como:

$$\Psi_K \quad \sqrt{\frac{-\Omega^*_K + m}{\Omega^*_K + \Lambda_K}} \left\{ 1 - i \frac{K_\alpha}{a} \gamma^\alpha M_K \right\} G_K \tag{6.61}$$

donde, M_K y G_K son dos matrices que están definidas de la siguiente forma:

$$M_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\Omega_K^{*}+m)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\Omega_K+m)} \end{pmatrix} \tag{6.62}$$

$$G_K = \begin{pmatrix} e^{-i\int_{t_0}^{t}\lambda_K dt} & 0 \\ 0 & e^{i\int_{t_0}^{t}\lambda_K dt} \end{pmatrix} = G_K(t_0,t) \tag{6.63}$$

pero, por (6.59), sabemos que los spinores que forman las columnas de (6.61) son ortonormales en el siguiente sentido:

$$\Psi_i^{+}(\bar{K})\ \Psi_\ell(\bar{K}) = \delta_{i\ell} \tag{6.64}$$

luego, de esta última, resulta que la inversa de la matriz (6.61) es su conjugada hermítica, es decir que:

$$\Psi_{\bar{K}}^{-1} = \Psi_{\bar{K}}^{+} = \sqrt{\frac{\Omega_K^{*}+m}{\Omega_K^{*}+\Lambda_K}}\ G_K^{+}\left\{1 - M_K^{+}\ \frac{K_\alpha}{a}(i\gamma^\alpha)^{+}\right\} \tag{6.65}$$

pero, por (6.4), (6.62) y (6.63) se tienen las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
G_K^{+} &= G_K^{*} \\
M_K^{+} &= M_K^{*} \\
(i\gamma^{\alpha})^{+} &= -i\gamma^{\alpha} \\
M_K^{*}\gamma^{\alpha} &= \gamma^{\alpha} M_K
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

entonces:

$$
\Psi_{\bar{K}}^{-1} = \sqrt{\frac{\Omega_K^{*} + m}{\Omega_K^{*} + \Lambda_K}}\; G_K^{*} \left\{ 1 + i\,\frac{K_\alpha \gamma^{\alpha} M_K}{\partial} \right\} \tag{6.67}
$$

en efecto, por cálculo directo puede verificarse que:

$$
\Psi_{\bar{K}}^{+}\, \Psi_{\bar{K}} = \Psi_{\bar{K}}^{-1}\, \Psi_{\bar{K}} = 1 \tag{6.68}
$$

6.4 CONSTRUCCION DEL MODELO DE PARTICULA, TRANSFORMACION DE BOGOLIUBOV Y CONJUGACION DE CARGA

Como las soluciones (6.58), no definen partículas y antipartículas en el sentido que exije el Principio de Equivalencia Cuántico, formamos una nueva base haciendo una combinación lineal de estos campos y obtenemos:

$$
\left(\varphi_{1\bar{K}} ; \varphi_{2\bar{K}} ; \varphi_{3\bar{K}} ; \varphi_{4\bar{K}} \right) = \left(\Psi_{\bar{K}} A_{1\bar{K}} ; \Psi_{\bar{K}} A_{2\bar{K}} ; \Psi_{\bar{K}} A_{3(-\bar{K})} ; \Psi_{\bar{K}} A_{4(-\bar{K})} \right) \tag{6.69}
$$

Si ahora, fijamos los coeficientes $(A_{1\bar{K}};A_{2\bar{K}};A_{3(-\bar{K})};A_{4(-\bar{K})})$ pidiendo que los nuevos campos $(\varphi_{1\bar{K}};\varphi_{2\bar{K}},\varphi_{3\bar{K}};\varphi_{4\bar{K}})$ satisfagan el Principio de Equivalencia Cuántico sobre las superficies de Cauchy, definidas por los tiempos t_1 y t_2 entonces, estos campos representarán las bases de partícula y antipartícula en los tiempos t_1 y t_2. Por simplicidad trabajaremos con (6.69) en forma matricial, o sea que:

$$\varphi_{\bar{K}} = \Psi_{\bar{K}} A_{\bar{K}} \tag{6.70}$$

Pero, para t_1 y t_2 el campo $\varphi_{\bar{K}}$ debe valer $\Pi_{\bar{K}}^{(1)}$ y $\Pi_{\bar{K}}^{(2)}$ respectivamente ya que éstas, son las condiciones iniciales que deben satisfacer las bases, que llamaremos $\varphi_{\bar{K}}^{(1)}$ y $\varphi_{\bar{K}}^{(2)}$ para que se cumpla el Principio de Equivalencia Cuántico. Debemos aclarar que las matrices $\Pi_{\bar{K}}^{(1)}$ y $\Pi_{\bar{K}}^{(2)}$ están formadas por los 4 spinores (encolumnados) que se obtienen del Principio de Equivalencia Cuántico para los tiempos t_1 y t_2, o sea que:

$$\begin{aligned} \Pi_{\bar{K}}^{(1)} &= \Psi_{\bar{K}}^{(1)} A_{\bar{K}}^{(1)} \\ \Pi_{K}^{(2)} &= \Psi_{\bar{K}}^{(2)} A_{\bar{K}}^{(2)} \end{aligned} \tag{6.71}$$

usando (6.68) en las ecuaciones anteriores, obtenemos los coeficientes $A_{\bar{K}}^{(1)}$ y $A_{\bar{K}}^{(2)}$ como función de las condiciones iniciales sobre la superficie de Cauchy, determinadas por el Principio de Equivalencia Cuántico, es decir que:

$$\begin{aligned} A_{\bar{K}}^{(1)} &= \Psi_{\bar{K}}^{(1)+} \Pi_{\bar{K}}^{(1)} \\ A_{\bar{K}}^{(2)} &= \Psi_{\bar{K}}^{(2)+} \Pi_{\bar{K}}^{(2)} \end{aligned} \tag{6.72}$$

luego, las partículas y antipartículas en los tiempos t_1 y t_2 vienen descriptas por:

$$\varphi_{\bar{K}}^{(1)} = \Psi_{\bar{K}} A_{\bar{K}}^{(1)}$$
$$\varphi_{\bar{K}}^{(2)} = \Psi_{\bar{K}} A_{\bar{K}}^{(2)} \qquad (6.73)$$

pero, tanto $\varphi_{\bar{K}}^{(1)}$ como $\varphi_{\bar{K}}^{(2)}$, son una base del espacio de soluciones de la ecuación de Dirac, en consecuencia, debe existir una tranformación de Bogoliubov entre ellas, lo cual puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left(\varphi_{1\bar{K}}^{(2)};\ \varphi_{2\bar{K}}^{(2)};\ \varphi_{3\bar{K}}^{(2)};\ \varphi_{4\bar{K}}^{(2)}\right) = \left(\varphi_{\bar{K}}^{(1)}\alpha_{1\bar{K}};\ \varphi_{\bar{K}}^{(1)}\alpha_{2\bar{K}};\ \varphi_{\bar{K}}^{(1)}\alpha_{3(-\bar{K})};\ \varphi_{\bar{K}}^{(1)}\alpha_{4(-\bar{K})}\right)$$

o

$$\varphi_{\bar{K}}^{(2)} = \varphi_{\bar{K}}^{(1)}\alpha_{\bar{K}} \qquad (6.74)$$

donde, $\alpha_{\bar{K}}$ es la matriz de la tranformación que vincula las dos bases. Reemplazando ahora (6.73) en (6.74) y usando (6.68) resulta que:

$$A_{\bar{K}}^{(2)} = A_{\bar{K}}^{(1)}\alpha_{\bar{K}} \qquad (6.75)$$

luego, por (6.72) se obtiene finalmente que:

$$\alpha_{\bar{K}} = \Pi_{\bar{K}}^{(1)+}\Psi_{\bar{K}}^{(1)}\Psi_{\bar{K}}^{(2)+}\Pi_{\bar{K}}^{(2)} \qquad (6.76)$$

Un aspecto importante que ya puede hacerce notar,es que de (6.74) se desprende que los términos fuera de la diagonal en la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ (pensándola como una matriz en bloque 2x2),son los que mezclan spinores de partícula con antipartícula, luego, ellos son los responsables de la creación de materia en un Universo en expansión. Pero, antes de calcular el número de partículas y antipartículas creadas, es conveniente estudiar las propiedades de la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ y las relaciones que existen entre sus elementos, con el propósito de obtener los resultados finales, en términos del menor número de parámetros posibles. A continuación veremos que la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ satisface las siguientes dos condiciones.

1) La matriz $\alpha_{\bar{K}}$ es unitaria

$$\alpha_{\bar{K}}^{+} = \alpha_{\bar{K}}^{-1} \Rightarrow \alpha_{\bar{K}}^{+}\alpha_{\bar{K}} = \alpha_{\bar{K}}^{-1}\alpha_{K} = 1 \qquad (6.77)$$

este resultado se desprende naturalmente de (6.76), puesto que la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ en (6.74) transforma la base ortonormal $\varphi_{\bar{K}}^{(1)}$ en otra base $\varphi_{\bar{K}}^{(2)}$ que también es ortonormal.

2) Veremos ahora, como la conjugación de carga nos conduce a cierta relaciones entre elementos de la matriz $\alpha_{\bar{K}}$. Para ello hagamos la si guiente observación, conjugando la ecuación de Dirac generalizada (6.27)

$$\left(\gamma^{o*}\partial_o - i\,\frac{K_\alpha}{a}\gamma^{\alpha*} - m\right)f_{\bar{K}}^{*} = 0 \qquad (6.78)$$

y teniendo en cuenta que de (6.22) y (6.21) se deduce la siguiente propiedad para las matrices de Dirac γ^{i} :

$$\gamma_2\,\gamma^{i}\,\gamma_2 = \gamma^{i*} \qquad (6.79)$$

resulta entonces, que reemplazando (6.79) en (6.78) y haciendo algunos cálculos sencillos:

$$\left(\gamma^{o}\partial_o + i\,\frac{K_\alpha}{a}\gamma^{\alpha} - m\right)\gamma_2 f_{-\bar{K}}^{*} = 0 \qquad (6.80)$$

pero, comparando esta última con (6.27), se ve que si $f_{\bar{K}}$ es solución de la ecuación de Dirac, entonces también lo es $\gamma_2 f^{*}_{-\bar{K}}$. Esto permite definir el operador C que representa la conjugación de carga, como:

$$\gamma_2 = C = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.81}$$

Ahora bien, para ver cual es el efecto de la conjugación de carga sobre los spinores (6.61), calculemos $C\Psi_{\bar{K}}C$. Para ello es necesario usar las siguientes propiedades; de (6.4) y (6.63) resulta:

$$G_K \gamma_\alpha = \gamma_\alpha G^{*}_K \tag{6.82}$$

de (6.4) y (6.62) se tiene que:

$$M_K \gamma_2 = \gamma_2 M^{*}_K \tag{6.83}$$

de manera que, aplicando (6.79), (6.82) y (6.83) obtenemos:

$$C\Psi_{\bar{K}}C = \Psi^{*}_{-\bar{K}} \tag{6.84}$$

ya que $M_{-K} = M_K$ y $G_{-K} = G_K$. Como además, $C^2 = 1$ de (6.84) se deduce una relación muy útil,

$$C\Psi_{\bar{K}} = \Psi^{*}_{-\bar{K}}\,C \tag{6.85}$$

si ahora aplicamos (6.85) a cada uno de los spinores (6.57), se obtiene de manera muy sencilla cual es el efecto de la conjugación de carga sobre cada uno de los spinores $\Psi_{1\bar{K}}$, $\Psi_{2\bar{K}}$, $\Psi_{3\bar{K}}$ y $\Psi_{4\bar{K}}$, en efecto:

$$\begin{aligned} C\Psi_{1\bar{K}} &= \Psi^{*}_{4(-\bar{K})} \\ C\Psi_{2\bar{K}} &= -\Psi^{*}_{3(-\bar{K})} \end{aligned} \tag{6.86}$$

Con el uso de los resultados (6.84) y (6.86), podemos estudiar las condiciones que impone la conjugación de carga sobre la matriz $\alpha_{\bar{K}}$, para ello recordemos que por (6.70):

$$\varphi_{\bar{K}} = \Psi_{\bar{K}}\,A_{\bar{K}}$$

luego:

$$\varphi^{*}_{-\bar{K}} = \Psi^{*}_{-\bar{K}}\,A^{*}_{-\bar{K}} \tag{6.87}$$

pero además:

$$C\varphi_{\bar{K}} = C\Psi_{\bar{K}}\,A_{\bar{K}}$$

de manera que, si usamos (6.85) sobre esta última, resulta que:

$$\varphi^{*}_{-\bar{K}}\,C = \Psi^{*}_{-\bar{K}}\,C A_{\bar{K}} \tag{6.88}$$

reemplazando en la anterior por (6.87), se deduce que:

$$C A_{\bar{K}} C = A^{*}_{-\bar{K}} \qquad (6.89)$$

Como esta relación es igual a la (6.84), se puede demostrar que si la aplicamos sucesivamente a los spinores (6.57), nos queda que:

$$\begin{aligned} C A_{1\bar{K}} &= A^{*}_{4(-\bar{K})} \\ C A_{2\bar{K}} &= -A^{*}_{3(-\bar{K})} \end{aligned} \qquad (6.90)$$

Si ahora repetimos el mismo cálculo para el cambio de base (6.74) se llega a que:

$$C \alpha_{\bar{K}} C = \alpha^{*}_{-\bar{K}} \qquad (6.91)$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{aligned} C \alpha_{1\bar{K}} &= \alpha^{*}_{4(-\bar{K})} \\ C \alpha_{2\bar{K}} &= -\alpha^{*}_{3(-\bar{K})} \end{aligned} \qquad (6.92)$$

en consecuencia, explicitando las relaciones (6.92) se obtiene la ley que vincula los elementos de la matriz $\alpha_{\bar{K}}$, en otras palabras:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{41\bar{k}} &= \alpha^{*}_{14(-\bar{k})} & \qquad \alpha_{42\bar{k}} &= -\alpha^{*}_{13(-\bar{k})} \\
\alpha_{31\bar{k}} &= -\alpha^{*}_{24(-\bar{k})} & \qquad \alpha_{32\bar{k}} &= \alpha^{*}_{23(-\bar{k})} \\
\alpha_{21\bar{k}} &= -\alpha^{*}_{34(-\bar{k})} & \qquad \alpha_{22\bar{k}} &= \alpha^{*}_{33(-\bar{k})} \\
\alpha_{11\bar{k}} &= \alpha^{*}_{44(-\bar{k})} & \qquad \alpha_{12\bar{k}} &= -\alpha^{*}_{43(-\bar{k})}
\end{aligned}
\tag{6.93}
$$

6.5 DETERMINACION DE LA DENSIDAD DE PARTICULAS CREADAS

Para calcular el número de partículas creadas por un universo en expansión, debemos cuantificar el campo de Dirac. Como vimos anteriormente, las bases que van a representar partículas y antipartículas en lo tiempos t_1 y t_2 , son $\varphi^{(1)}_{\bar{k}}$ y $\varphi^{(2)}_{\bar{k}}$, puesto que ellos satisfacen el Principio de Equivalencia Cuántico sobre las superficies de Cauchy definidas por t_1 y t_2 . Luego, el campo puede expresarse en términos de cualquiera de estas bases (con los correspondientes operadores de creación y aniquilación sobre cada una de las superficies de Cauchy), o sea que:

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \varphi^{(1)}_{1\bar{k}}\, a^{(1)}_{1\bar{k}} + \varphi^{(1)}_{2\bar{k}}\, a^{(1)}_{2\bar{k}} + \varphi^{(1)}_{3\bar{k}}\, a^{+(1)}_{3(-\bar{k})} + \varphi^{(1)}_{4\bar{k}}\, a^{+(1)}_{4(-\bar{k})} \\
\Psi &= \varphi^{(2)}_{1\bar{k}}\, a^{(2)}_{1\bar{k}} + \varphi^{(2)}_{2\bar{k}}\, a^{(2)}_{2\bar{k}} + \varphi^{(2)}_{3\bar{k}}\, a^{+(2)}_{3(-\bar{k})} + \varphi^{(2)}_{4\bar{k}}\, a^{+(2)}_{4(-\bar{k})}
\end{aligned}
\tag{6.94}
$$

para simplificar la notación introducimos el operador:

$$a_{\bar{k}} = \begin{bmatrix} a_{1\bar{k}} \\ a_{2\bar{k}} \\ a^{+}_{3(-\bar{k})} \\ a^{+}_{4(-\bar{k})} \end{bmatrix} \tag{6.95}$$

y condensando los cuatro spinores $\varphi_{1\bar{k}}, \ldots\ldots \varphi_{4\bar{k}}$ en una matriz como ya hicimos en (6.69), podemos reescribir (6.94) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Psi &= \varphi^{(1)}_{\bar{k}}\, a^{(1)}_{\bar{k}} \\ \Psi &= \varphi^{(2)}_{\bar{k}}\, a^{(2)}_{\bar{k}} \end{aligned} \tag{6.96}$$

pero, por lo visto en (6.74) las bases $\varphi^{(1)}_{\bar{k}}$ y $\varphi^{(2)}_{\bar{k}}$ están relacionadas por una transformación de Bogoliubov, de manera que, colocando en (6.96) una base en función de la otra, se deduce que los operadores de creación y aniquilación, se transforme de acuerdo a la siguiente ley:

$$a^{(2)}_{\bar{k}} = \alpha^{+}_{\bar{k}}\, a^{(1)}_{\bar{k}} \tag{6.97}$$

explicitando ésta última, para cada uno de los operadores de creación y aniquilación de partícula y anpartícula se tiene que:

$$\begin{aligned} a^{(2)}_{1\bar{k}} &= \alpha^{+}_{1\bar{k}}\, a^{(1)}_{\bar{k}} \\ a^{(2)}_{2\bar{k}} &= \alpha^{+}_{2\bar{k}}\, a^{(1)}_{\bar{k}} \\ a^{(2)}_{3\bar{k}} &= \alpha^{+}_{3\bar{k}}\, a^{(1)}_{\bar{k}} \\ a^{(2)}_{4\bar{k}} &= \alpha^{+}_{4\bar{k}}\, a^{(1)}_{\bar{k}} \end{aligned} \tag{6.98}$$

Usando (6.98), podemos calcular ahora el número de partículas creadas por un Universo en expansión, al pasar del estado 1 al 2, definidos por el tiempo que transcurre entre ellos. Si además, tomamos el estado 1 como el estado de vacio, resulta que:

$$
{}_1\langle 0|N^{(2)}_{1\bar{k}}|0\rangle_1 = {}_1\langle 0|a^{+(2)}_{1\bar{k}}\, a^{(2)}_{1\bar{k}}|0\rangle_1 =
$$

$$
= {}_1\langle 0|\left(\alpha_{11\bar{k}}\, a^{+(1)}_{1\bar{k}} + \alpha_{21\bar{k}}\, a^{+(1)}_{2\bar{k}} + \alpha_{31\bar{k}}\, a^{(1)}_{3(-\bar{k})} + \alpha_{41\bar{k}}\, a^{(1)}_{4(-\bar{k})}\right)\cdot
$$

$$
\cdot\left(\alpha^{*}_{11\bar{k}}\, a^{(1)}_{1\bar{k}} + \alpha^{*}_{21\bar{k}}\, a^{(1)}_{2\bar{k}} + \alpha^{*}_{31\bar{k}}\, a^{+(1)}_{3(-\bar{k})} + \alpha^{*}_{41\bar{k}}\, a^{+(1)}_{4(-\bar{k})}\right)|0\rangle_1
$$

$$
= |\alpha_{31\bar{k}}|^2 + |\alpha_{41\bar{k}}|^2
$$

repitiendo el cálculo para $N^{(2)}_{2\bar{k}}$, $N^{(2)}_{3\bar{k}}$ y $N^{(2)}_{4\bar{k}}$, se obtiene finalmente que

$$
\begin{aligned}
{}_1\langle 0|N^{(2)}_{1\bar{k}}|0\rangle_1 &= |\alpha_{31\bar{k}}|^2 + |\alpha_{41\bar{k}}|^2 \\
{}_1\langle 0|N^{(2)}_{2\bar{k}}|0\rangle_1 &= |\alpha_{32\bar{k}}|^2 + |\alpha_{42\bar{k}}|^2 \\
{}_1\langle 0|N^{(2)}_{3\bar{k}}|0\rangle_1 &= |\alpha_{42\bar{k}}|^2 + |\alpha_{32\bar{k}}|^2 \\
{}_1\langle 0|N^{(2)}_{4\bar{k}}|0\rangle_1 &= |\alpha_{41\bar{k}}|^2 + |\alpha_{31\bar{k}}|^2
\end{aligned}
\qquad (6.99)
$$

donde, en las dos últimas hemos usado las relaciones (6.93). Por otra parte (6.99) confirma lo dicho anteriormente, que la creación de partículas es debida totalmente al bloque de la matriz $\alpha_{\bar{k}}$ que está fuera de la diagonal, es decir que, éstos son los elementos que mezclan los términos de partíciulas y antipartículas.

Pasemos ahora, a demostrar que a primer orden en el coeficiente de Huble H, la matriz $\alpha_{\bar{k}}$ coincide con la identidad. Para ello, necesitamos desarrollar las soluciones de la ecuación de Dirac (6.61) a primer orden en H, ahora bien, del apéndice (A.4) se tiene que las soluciones aproximadas de la ecuación (6.39) son:

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \pm\omega_k + \frac{im}{2\omega_k}\left(\pm 1 + \frac{m}{\omega_k}\right)H + O(H^2) \\ &\pm\omega_k + \frac{im}{2\omega_k}\left(\pm 1 + \frac{m}{\omega_k}\right)H + O(H^2) \end{aligned} \tag{6.100}$$

es fácil ver que ambas soluciones deben tomarse con el signo superior o inferior. Reemplazando (6.100) en el factor de normalización (6.52) nos queda que:

$$\sqrt{\frac{\Omega_k^* + m}{\Omega_k^* + \Lambda_k}} = \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}} + O(H^2) \tag{6.101}$$

Por otra parte las matrices M_k y G_k definidas por (6.62) y (6.63) se escriben como:

$$M_k = \frac{1}{\omega_k + m}\left\{ 1 + \frac{m}{2\omega_k^2}\gamma^0 H \right\} + O(H^2) \tag{6.102}$$

$$G_k(t_1, t) = \begin{pmatrix} e^{-i\int_{t_1}^{t}\omega_k dt} & 0 \\ & e^{i\int_{t_1}^{t}\omega_k dt} \end{pmatrix} + O(H^2) \tag{6.103}$$

de manera que, si sustituimos (6.101), (6.102) y (6.103) en las soluciones de la ecuación de Dirac (6.61), éstas pueden expresarse de la siguiente forma:

$$[illegible] \quad \tilde{\Psi}_{0k} - \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}} \; i \; \frac{k_\alpha}{a} \frac{\gamma^\alpha m \gamma^0 G_k(t_1, t)}{2\omega_k^2 (\omega_k + m)} H \qquad (6.104)$$

donde:

$$[illegible] = \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}} \left\{ 1 - \frac{i k_\alpha \gamma^\alpha}{a(\omega_k + m)} \right\} G_k(t_1, t) \qquad (6.105)$$

es la solución que corresponde al espacio plano con el cambio $\bar{K} \longrightarrow \frac{K}{a}$

Tomando del trabajo de Castagnino[33] la base de spinores, que satisface el Principio de Equivalencia Cuántico en los tiempos t_1 y t_2 y que por lo tanto, representan el modelo de partícula para dichas superficies de Cauchy, en otras palabras, éstas son las condiciones iniciales que deben satisfacer los campos (6.104) en los tiempos t_1 y t_2:

$$[illegible] \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}} \left\{ 1 - \frac{m \gamma^0}{4\omega_k^2} H \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{k_\alpha \sigma^\alpha}{a(\omega_k + m)} \end{bmatrix} \qquad (6.106)$$

$$[illegible] = \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}} \left\{ 1 - \frac{m \gamma^0}{4\omega_k^2} H \right\} \begin{bmatrix} \dfrac{-k_\alpha \sigma^\alpha}{a(\omega_k + m)} \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde, u representa los dos spinores asociados a la partícula, mientras que los spinores v estan asociados a la antipartícula. Pasando los spinores (6.106) a forma matricial se tiene que:

$$\Pi_{\bar{K}} = \left\{ 1 - \frac{m\gamma^0}{4\omega_K^2} H \right\} \Psi_{o\bar{K}}\, G_K^*(t_1,t) \qquad (6.107)$$

luego, con (6.104) y (6.105) es posible calcular la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ puesto que:

$$\Pi_{\bar{K}}^{(1)+} \Psi_{\bar{K}}^{(1)} = \left\{ 1 + \frac{m\gamma^0 H}{4\omega_K^2} \right\}^{(1)} \qquad (6.108)$$

$$\Psi_{\bar{K}}^{(2)+} \Pi_{\bar{K}}^{(2)} = G_K^*(t_1,t_2) \left\{ 1 - \frac{m\gamma^0}{4\omega_K^2} \right\}^{(2)} \qquad (6.109)$$

luego, reemplazando (6.108) y (6.109) en (6.76) nos queda que:

$$\alpha_{\bar{K}} = \left\{ 1 + \frac{m\gamma^0}{4\omega_K^{(1)2}} H^{(1)} \right\} G_K^*(t_1,t_2) \left\{ 1 - \frac{m\gamma^0}{4\omega_K^{(2)2}} H^{(2)} \right\}$$

ó

$$\alpha_{\bar{K}} = G_K^*(t_1,t_2) \left\{ 1 + \frac{m\gamma^0}{4} \left(\frac{H^{(1)}}{\omega_K^{(1)2}} - \frac{H^{(2)}}{\omega_K^{(2)2}} \right) \right\} \qquad (6.110)$$

y de ésta última expresión, se ve claramente que la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ no tiene elementos fuera de la diagonal, luego, como dijimos anteriormente, no habrá creación de partículas a primer orden en H puesto que no hubo mezcla de los términos de partícula y antipartícula, en otras palabras, si reemplazamos en (6.99) resulta que:

$$
\begin{aligned}
{}_{1}\langle 0 | N_{1k}^{(2)} | 0 \rangle_{1} &= O(H^2) \\
{}_{1}\langle 0 | N_{2k}^{(2)} | 0 \rangle_{1} &= O(H^2) \\
{}_{1}\langle 0 | M_{1k}^{(2)} | 0 \rangle_{1} &= O(H^2) \\
{}_{1}\langle 0 | M_{2k}^{(2)} | 0 \rangle_{1} &= O(H^2)
\end{aligned}
\tag{6.111}
$$

en total acuerdo con lo que se esperaba, ya que el efecto de la curvatura del universo se manifiesta a orden H^2. En otros términos, por ser $\alpha_{\bar{k}}$ una matriz diagonal y teniendo en cuenta (6.77), resulta que $\alpha_{\bar{k}}$ tiene todos sus elementos de modulo 1.

6.6 SOLUCION PARA PARTICULAS DE MASA NULA EN REPOSO

Para el caso particular de partículas de masa nula en reposo, la ecuación (6.39) tiene (como ya vimos en (6.42)) solución exacta. Dicha solución es:

$$\Omega_k = \Omega_k^* = \Lambda_k = \Lambda_k^* = \pm \frac{k}{a} \tag{6.112}$$

de manera que, si reemplazamos en (6.52), el factor de normalización resulta:

$$\sqrt{\frac{\Omega_k^* + m}{\Omega_k^* + \Lambda_k}} = \frac{1}{2} \tag{6.113}$$

además, las matrices M_K y G_K definidas por (6.62) y (6.63), adoptan la siguiente forma:

$$M_K = \frac{a}{K} I = M_K^* \tag{6.114}$$

$$G_K(t_1,t) = \begin{pmatrix} e^{-i\int_{t_1}^{t} \frac{K}{a} dt} & 0 \\ 0 & e^{i\int_{t_1}^{t} \frac{K}{a} dt} \end{pmatrix} \tag{6.115}$$

en concecuencia, por (6.61), (6.67) y (6.76) se tiene que la matriz $\alpha_{\bar{K}}$ es:

$$\alpha_{\bar{K}} = \Pi_{\bar{K}}^{(1)+} G_K(t_1,t_2)\, \Pi_{\bar{K}}^{(2)}$$

expresión que resulta bastante sensilla si se tiene en cuenta que la matriz G_K es diagonal. Como todavia no conocemos las condiciones iniciales $\Pi_{\bar{K}}^{(1)}$ y $\Pi_{\bar{K}}^{(2)}$ para masa nula no hemos podido calcular $\alpha_{\bar{K}}$.

CONCLUSIONES

Concluimos que el principio de equivalencia fuerte, puede satisfacerse solamente en las teorías de la gravitación que se desarrollan en el espacio-tiempo curvo, aceptando claro está, que las ecuaciones de movimiento de una partícula en dicho campo hayan sido obtenidas a partir del principio variacional de mínima acción. Por otra parte, además, si nos restringimos a tiempos no muy próximos a la singularidad inicial,es decir, por encima del tiempo de Planck donde es válida la teoría semiclásica de campos adoptada, resulta entonces, que el principio de equivalencia fuerte a través del principio de equivalencia cuántico, define un buen modelo de partícula si las partículas en cuestión son escalares. Mientras que para partículas de spin 1/2 el principio de equivalencia cuántico no da un modelo de partícula satisfactorio.

APENDICE (A-1)

Como el Lagrangiano de interacción $\mathcal{L}^{(I)}$ es un escalar de Lorentz que depende de los campos (no de sus derivadas) y las cuadrivelocidades, podemos afirmar entonces, que el Lagrangiano más general que responde a estos requisitos es de la forma:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \mathcal{L}^{(I)}(z_1, z_2, \ldots z_n) \qquad \text{(A1-1)}$$

donde, las cantidades $z_1, z_2, \ldots z_n$ son escalares formados por los campos tensoriales de orden 1,2,....n $A_i, A_{ik}, A_{ik\ell}, \ldots A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ y los vectores u^i, es decir que:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_i u^i \\ z_2 &= A_{i_1 i_2} u^{i_1} u^{i_2} \\ &\vdots \\ z_n &= A_{i_1 i_2 \ldots i_n} u^{i_1} u^{i_2} \ldots u^{i_n} \end{aligned} \qquad \text{(A1-2)}$$

reemplazando $\mathcal{L}^{(I)}$ en la ecuación (2.9):

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(I)}}{\partial u^i} u^i = \mathcal{L}^{(I)}$$

resulta que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(I)}}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial u^i}u^i + \cdots\cdots + \frac{\partial \mathcal{L}^{(I)}}{\partial Z_n}\frac{\partial Z_n}{\partial u^i}u^i = \mathcal{L}^{(I)}$$

pero, como cada variable $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ por su definición (A1-2) son homo géneas de grado 1,2,...n en las cuadrivelocidades u^i, nos queda que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(I)}}{\partial Z_1} Z_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \mathcal{L}^{(I)}}{\partial Z_n} n\, Z_n = \mathcal{L}^{(I)} \qquad \text{(A1-3)}$$

Si admitimos ahora, que $\mathcal{L}^{(I)}$ se puede escribir como el producto de n funcio nes, cada una de las cuales es sólo función de una de las variables Z_i, es decir:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \mathcal{L}_1(Z_1) \ldots \mathcal{L}_n(Z_n) f(x) \qquad \text{(A1-4)}$$

donde, $f(x)$ es una función escalar (depende sólo de x^i) totalmente arbi traria, reemplazando (A1-4) en (A1-3) y dividiendo luego por $\mathcal{L}^{(I)}$ la ecua ción en derivadas parciales (A1-3) se transforma en una sencilla ecua - ción en derivadas totales, ella es:

$$\frac{Z_1}{\mathcal{L}_1}\frac{d\mathcal{L}_1}{dZ_1} + \cdots\cdots\; n\,\frac{Z_n}{\mathcal{L}_n}\frac{d\mathcal{L}_n}{dZ_n} = 1 \qquad \text{(A1-5)}$$

como las variables se han separado, cada sumando debe ser una constante y_i (como no hay ninguna condición de contorno y_i puede tomar cualquier valor con continuidad), o sea que:

$$\frac{z_1}{\mathcal{L}_1}\frac{d\mathcal{L}_1}{dz_1}=y_1\;,\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,\quad n\frac{z_n}{\mathcal{L}_n}\frac{d\mathcal{L}_n}{dz_n}=y_n \tag{A1-6}$$

con la condición:

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=1 \tag{A1-7}$$

La integral de los sistemas (A1-6) conduce a:

$$\mathcal{L}_n=z_n^{\,y_n/n} \tag{A1-8}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{(I)}=f(x)\;z_1^{\,y_1}\,z_2^{\,y_2/2}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;z_n^{\,y_n/n} \tag{A1-9}$$

pero, ésta no es la solución más general, ya que la ecuación (2.9) por ser lineal, admite una superposición de soluciones del tipo (A1-9), superposición que sólo esta limitada por la condición (A1-7), es decir que:

$$\mathcal{L}^{(I)}=f(x)\int_{y_1+y_2+\cdots+y_n=1}C(y_1,\dots,y_n)\;z_1^{\,y_1}\cdots z_n^{\,y_n/n}\;dy_1\cdots dy_{n-1} \tag{A1-10}$$

es la solución más general de (2.9), donde, $C\,(y_1,\dots y_n)$ es una función arbitraria de las variables $y_1,\;\dots\;y_n$. Debe tenerse en cuenta que la integración en (A1-10) se efectua en toda la región definida por

(A1-7), es decir que se lleva a cabo sobre el hiperplano $y_1 + \cdots + y_n = 1$

Si el Lagrangiano de interacción fuera en general una serie de términos homogéneos de grado $(-n, \ldots 0, 1, \ldots n)$ en u^i, es decir:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \sum_{-n}^{n} \mathcal{L}^{(n)} \qquad \text{(A1-11)}$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(n)}}{\partial u^i} u^i = n \mathcal{L}^{(n)} \qquad \text{(A1-12)}$$

entonces, el método anterior puede generalizarse reemplazando la expresión (A1-3) por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(n)}}{\partial z_1} z_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \mathcal{L}^{(n)}}{\partial z_m} m\, z_m = n \mathcal{L}^{(n)} \qquad \text{(A1-13)}$$

notemos, que en realidad se trata de un conjunto infinito de ecuaciones de este tipo, ya que n es cualquier entero entre $(-\infty, \infty)$ y se tiene una ecuación para cada valor de n. Proponiendo como solución de (A1-13) un $\mathcal{L}^{(n)}$ de la forma (A1-4), y siguiendo los pasos anteriores se obtiene para cada n una ecuación de la forma (A1-5):

$$\frac{z_1}{\mathcal{L}_1} \frac{d\mathcal{L}_1}{dz_1} + \cdots\cdots + m \frac{z_m}{\mathcal{L}_m} \frac{d\mathcal{L}_m}{dz_m} = n \qquad \text{(A1-14)}$$

como cada sumando depende de una única variable, la ecuación (A1-14) se puede separar y se obtiene:

$$\mathcal{L}_m = Z_m^{\,j_m/m}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{(n)} = f(x)\, Z_1^{\,j_1} \cdot \,.\,.\,.\,.\, Z_m^{\,j_m/m} \qquad \text{(A1-15)}$$

donde:

$$j_1 + j_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + j_m = n \qquad \text{(A1-16)}$$

por lo tanto, la solución más general es una superposición de la forma

$$\mathcal{L}^{(n)} = f(x) \int_{j_1 + j_2 + \cdots + j_m = n} C(j_1, \ldots, j_m)\, Z_1^{\,j_1} \ldots Z_m^{\,j_m/m}\, dj_1 \ldots dj_{m-1} \qquad \text{(A1-17)}$$

de manera que, el Lagrangiano (A1-11) se escribe como:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \sum_{-n}^{n} f(x) \int_{j_1 + \cdots + j_m = n} C(j_1, \ldots, j_n)\, Z_1^{\,j_1} \ldots Z_m^{\,j_m/m}\, dj_1 \ldots dj_{m-1} \qquad \text{(A1-18)}$$

A pesar de las restricciones impuestas al Lagrangiano de interacción (A1-11) y (A1-12), se ve que en realidad es lo suficientemente gene-ral como para contener a todos los Lagrangianos que usualmente aparecen en física, ya que las funciones $f(x)$ y $C(j_1, \ldots j_m)$ son totalmente arbitrarias. Notemos, que la última sólo está limitada en el sentido de que converja la integral (A1-17)

Por último debemos mencionar aunque no va hacer usado en este trabajo, que el Lagrangiano (A1-11) puede generalizarse aún más pasando de la suma a una integral, donde, el integrando es una función homogéneo de grado real en $\mathcal{U}^{i}$, es decir que:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \int \mathcal{L}^{(n)} dn$$

donde, cada $\mathcal{L}^{(n)}$ puede expresarse en la forma (A1-17) y n es una variable real.

APENDICE (A-2)

En el capítulo 3 se demostró que el tensor $A^{i\ell}$ (3.21) admite un desarrollo en serie de la forma:

$$A^{i\ell} = \eta^{i\ell} - \eta^{is}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^s\partial u^m}\eta^{m\ell} + \eta^{is}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^s\partial u^m}\eta^{mp}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^p\partial u^k}\eta^{k\ell} - \dots \qquad \text{(A2-1)}$$

veremos a continuación, que se puede llegar a esta expresión por un camino distinto. Para ello, partimos de la igualdad (3.8), la misma es:

$$\frac{\partial A^{i\ell}}{\partial u^s}u^s = A^{im}A^{\ell s}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^m\partial u^s} \qquad \text{(A2-2)}$$

multiplicando ésta última por el inverso de A^{im} nos queda:

$$\left(\eta_{ik} + \frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i\partial u^k}\right)\frac{\partial A^{i\ell}}{\partial u^s}u^s = A^{\ell s}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k\partial u^s}$$

si ahora reemplazamos el segundo miembro por medio de (2.22) resulta que:

$$\left(\eta_{ik} + \frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i\partial u^k}\right)\frac{\partial A^{i\ell}}{\partial u^s}u^s = \delta^{\ell}_{k} - \eta_{ks}A^{s\ell} \qquad \text{(A2-3)}$$

esta expresión nos permite resolver $A^{i\ell}$ suponiendo que se puede escribir como un desarrollo en serie de términos homogéneos de grado n en las cuadrivelocidades u^i (esto es posible por que la ecuación (A2-3) es lineal en A^{il}), es decir que:

$$A^{il} = \sum_{-\infty}^{\infty} A^{il}_{(n)} \tag{A2-4}$$

donde:

$$\frac{\partial A^{il}_{(n)}}{\partial u^s} u^s = n A^{il} \tag{A2-5}$$

reemplazando (A2-4) y (A2-5) en (A2-3) y reordenando los términos se obtiene:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (n+1)\eta_{ik} A^{il}_{(n)} + (n+1) \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i \partial u^k} A^{il}_{(n+1)} \right\} = \delta^l_k \tag{A2-6}$$

como cada sumando tiene homogeneidad definida se debe sumplir que:

$$\vdots$$

$$\eta_{ik} A^{il}_{(-2)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i \partial u^k} A^{il}_{(-1)} = 0$$

Hay un corte

$$\eta_{ik} A^{il}_{(0)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i \partial u^k} A^{il}_{(1)} = \delta^l_k \tag{A2-7}$$

$$\eta_{ik} A^{il}_{(1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i \partial u^k} A^{il}_{(2)} = 0$$

$$\vdots$$

una primer conclusión que se obtiene de este sistema de ecuaciónes es que, si las multiplicamos por U^k y usamos (2.27) resulta:

$$A^{i\ell}_{(0)} U_i = U^\ell$$

$$A^{i\ell}_{(n)} U_i = 0 \qquad \text{para } n \neq 0 \; ; \; n \neq -1$$

Pero,si además tenemos en cuenta (2.26) se sigue también que $A^{i\ell}_{(-1)} U_i = 0$ en consecuencia:

$$A^{i\ell}_{(0)} U_i = U^\ell$$

$$A^{i\ell}_{(n)} U_i = 0 \qquad n \neq 0 \tag{A2-8}$$

Ahora bien, de la forma que fue definido el tensor $A^{i\ell}$ en (2.22), se ve que sólo puede ser función de los tensores $\eta_{i\ell}$ y $\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U^i \partial U^\ell}$, por lo tanto, cada uno de los términos $A^{i\ell}_{(n)}$, deben ser también funciones de estas cantidades, en consecuencia la forma más general de escribir $A^{i\ell}_{(0)}$ y que además, satisfaga la condición (A2-8) es:

$$A^{i\ell}_{(0)} = \eta^{i\ell} + a \, \frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U^i \partial U^\ell}}{F_{(-1)}} + b \, \frac{\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U^i \partial U^s} \; \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_s \partial U^\ell}}{F_{(-2)}} + \cdots \tag{A2-9}$$

donde, a,b,.... son constantes y $F(-1)$, $F(-2)$,.... son funciones escalares de las cantidades η_{ik} y $\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U^i \partial U^k}$, cuyo grado de homogeneidad en las cuadrivelocidades U^i es -1,-2,.... respectivamente, puesto que $A^{i\ell}_{(0)}$ debe ser homogéneo de grado cero en U^i. Por reemplazo directo de (A2-9) en (A2-7) se encuentra que ésta será satisfecha si y sólo si $A^{i\ell}_{(1)}$ es de la forma:

$$A^{il}_{(1)} = -a\frac{\eta^{il}}{F_{(-1)}} - b\frac{\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i \partial u^l}}{F_{(-2)}} - c\frac{\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^i \partial u^s}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u_s \partial u^l}}{F_{(-3)}} - \ldots \qquad \text{(A2-10)}$$

pero, para que ésta última cumpla con (A2-8) debe ser (a) igual a cero, de manera que, si seguimcs reemplazando sucesivamente en las próximas ecuaciones se encuentra que todos los coeficientes b,c,... se anulan. Esto nos lleva a que $A^{il}_{(0)}$ es:

$$A^{il}_{(0)} = \eta^{il} \qquad \text{(A2-11)}$$

y que:

$$A^{il}_{(n)} = 0 \qquad n \geq 1 \qquad \text{(A2-12)}$$

El resto de las ecuaciones (A2-7) se puede resolver sencillamente, dado que entre ellos se puede establecer una ley de recurrencia, de manera que el tensor A^{il} se escribe como:

$$A^{il} = A^{il}_{(0)} + A^{il}_{(-1)} + \ldots$$

luego:

$$A^{il} = \eta^{il} + A^{il}_{(-1)} - \eta^{ik}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^s} A^{sl}_{(-1)} + \eta^{ik}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^s}\eta^{sp}\frac{\partial^2\mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^p \partial u^m} A^{ml}_{(-1)} - \ldots$$

de donde:

$$A^{i\ell} = \eta^{i\ell} + A^{r\ell}_{(-1)} \left\{ \delta^i_r - \eta^{ik} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^r} + \eta^{ik} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^k \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial u^p \partial u^r} \cdots \right\} \quad \text{(A2-13)}$$

Para determinar $A^{r\ell}_{(-1)}$ se reemplaza (A2-13) en (2.22) y se encuentra que el desarrollo (A2-13) coincide con (3.21).

APENDICE (A-3)

Vamos a resolver la ecuación (5.25), bajo ciertas hipótesis restrictivas, puesto que nos interesan sólo aquellas soluciones que pueden desarrollarse en potencias de H/ω_K, donde, H es la constante de Huble y ω_K es la energía asociada a una partícula, que se crea con impulso K/a. La ecuación era:

$$\Omega_K^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\Omega}_K}{\Omega_K}\right)^{\cdot} = \omega_K^2 - \frac{3}{2}\left(\dot{H} + \frac{3}{2}H^2\right) + bR$$

$$\omega_K^2 = \frac{K^2}{a^2} + m^2 \qquad \text{(A3-1)}$$

por otra parte, vamos a suponer que el cambio en H es proporcional a H^2, es decir que:

$$\dot{H} = -\gamma H^2 \qquad \text{(A3-2)}$$

integrando esta última ecuación, vamos que nos limita a Universos cuyos radios evolucionan de la siguiente forma:

$$a(t) = (\gamma c)^{1/\gamma} (t - t_0)^{1/\gamma}$$

$$C > 0 \qquad \text{(A3-3)}$$

como además, queremos que $a(t)$ sea real para cualquier valor de γ, entonces, debe ser:

$$\gamma > 0 \qquad \text{(A3-4)}$$

Una adecuada elección de la constante C,

$$C = \frac{1}{\gamma}\,(seg)^{\gamma-1} \tag{A3-5}$$

nos define la dimensión de a(t) $([a(t)] = seg)$. Notemos, que la expresión (A3-3) coincide con la evolución (5.26) si hacemos $n = 1/\gamma$. Estas formas de evolución son muy importantes, ya que, para un Universo lleno de radiación (en los instantes iniciales) su radio es de la forma $t^{1/2}$, mientras que, para un Universo lleno de materia (como es en la actualidad) su radio va como $t^{2/3}$. Además, por (A3-2) y (A3-4), vemos que se trata de Universos que se expanden cada vez menos, esta característica es necesaria en el modelo de Universo que hemos adoptado, es decir, el Big-Bang.

De acuerdo con (A3-2), el escalar de curvatura (5.17) (para un Universo espacialmente plano) adopta la siguiente forma:

$$R = 6(2-\gamma)H^2 = \alpha H^2 \tag{A3-6}$$

luego, reemplazando (A3-2) y (A3-6) en (A3-1), ésta puede escribirse como:

$$\Omega_K^4 - \frac{3}{4}\dot{\Omega}_K^2 + \frac{1}{2}\Omega_K\ddot{\Omega}_K = \omega_K^2\,\Omega_K^2 - \lambda H^2\Omega_K^2 \tag{A3-7}$$

donde:

$$\lambda = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - \gamma\right) - b\,\alpha \tag{A3-8}$$

Si ahora admitimos que la función Ω_K, tiene un desarrollo en serie de la forma:

$$\Omega_K = \omega_K + \alpha_{1K} H + \alpha_{2K} H^2 \qquad \text{(A3-9)}$$

donde, α_{1K} y α_{2K} son funciones de ω_K, resulta entonces, que:

$$\dot{\alpha}_{1K} = \frac{d\alpha_{1K}}{dt} = \frac{(m^2-\omega_K^2)}{\omega_K} \frac{d\alpha_{1K}}{d\omega_K} \cdot H \qquad \text{(A3-10)}$$

por lo tanto:

$$\dot{\alpha}_{1K} \sim \dot{\alpha}_{2K} \sim \dot{\omega}_K \sim H \qquad \text{(A3-11)}$$

Reemplazando (A3-9) en (A3-7 y usando (A3-2) y (A3-11) para despreciar términos de orden superior a H^2, se obtiene una serie de potencias de H, de manera que, al igualar los coeficientes de H^0, H y H^2 resultan las siguientes ecuaciones:

$$\omega_K^4 = \omega_K^4$$

$$4\alpha_{1K}\omega_K^3 = 2\omega_K^3\alpha_{1K}$$

$$2\omega_K^2\left(2\alpha_{2K}\omega_K + 3\alpha_{1K}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{m^2-\omega_K^2}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{\omega_K^4 - m^4}{\omega_K^2} - \gamma(m^2-\omega_K^2)\right\} = \qquad \text{(A3-12)}$$

$$= \omega_K^2\left(\alpha_{1K}^2 + 2\omega_K\alpha_{2K}\right) - \lambda\omega_K^2$$

La solución a este sistema algebraico, conduce a que $\alpha_{1K} = 0$ y que

$$\Omega_K = \pm \omega_K \left\{ 1 + \left[\frac{5}{8}\frac{m^4}{\omega_K^4} - \frac{m^2}{2\omega_K^2} - \frac{(2-\gamma)}{2\omega_K^2}\left(\frac{m^2}{2} + (1-6b)\omega_K^2\right)\right]\frac{H^2}{\omega_K^2} \right\} \qquad \text{(A3-13)}$$

donde, el doble signo aparece porque la ecuación diferencial (A3-1) se satisface tanto para Ω_K como para $-\Omega_K$.

APENDICE (A-4)

Para resolver la ecuación (6.39), hacemos las mismas hipótesis que hicimos en el apéndice (A-3) para la ecuación (5.25), es decir que, vamos a estudiar sólo aquellas soluciones de (6.39) que admiten un desarrollo en serie de potencias de H/ω .

Reescribiendo la ecuación (6-39)

$$i\,\dot{W}_K - W_K^2 + H\left(i\,W_K + m\,\gamma^o\right) + \omega_K^2 = 0 \qquad \text{(A4-1)}$$

y suponiendo que la solución de esta ecuación puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$W_K = \pm\,\omega_K + \alpha_{1K}\,H + \alpha_{2K}\,H^2 \qquad \text{(A4-2)}$$

donde, las funciones α_{1K} y α_{2K} tienen las propiedades (A3-11), entonces, resulta que si reemplazamos (A4-2) en (A4-1) y conservamos sólo los términos de segundo orden en H , obtenemos tres ecuaciones algebraicas para determinar los coeficientes α_{1K} y α_{2K} , ellas son:

$$-\,\omega_K^2 + \omega_K^2 = 0$$

$$\pm\, i\,\frac{m^2 - \omega_K^2}{\omega_K} \mp 2\,\omega_K\,\alpha_{1K} + \left(m\,\gamma^o \pm i\,\omega_K\right) = 0 \qquad \text{(A4-3)}$$

$$i\,\frac{\dot{\alpha}_{1K}}{H} + i\,\alpha_{1K}\,(1-\gamma) - \alpha_{1K}^2 \pm 2\,\omega_o\,\alpha_{2K} = 0$$

cuya solución nos conduce al desarrollo de segundo orden para la función W_K, es decir que:

$$W_K = \omega_K \left\{ \pm 1 + \frac{m}{2\omega_K}\left(\pm \gamma^0 + i\,\frac{m}{\omega}\right)\frac{H}{\omega_K} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{5}{8}\frac{m^4}{\omega_K^4} \mp i\,\frac{m^3\gamma^0}{2\omega_K^3} - \frac{m^2}{8\omega_K^2} + \frac{i\,m\,(2-\gamma)}{4\,\omega_K}\left(\pm \gamma^0 + i\,\frac{m}{\omega_K}\right)\right]\frac{H^2}{\omega_K^2} \right\} \tag{A4-4}$$

donde, el doble signo significa que las funciones Ω_K y Λ_K deben tomarse simultáneamente con el signo superior o inferior.

AGRADECIMIENTOS

Es un placer agradecer al Dr. V. H. Hamity por su interés en este trabajo y al Lic. D. Harari por sus estimulantes discusiones. Además, reconozco los provechosos debates sostenidos con el Dr. O. Zandrón y colaboradores.

BIBLIOGRAFIA

1) Whitehead, A.N. The Principle of Relativity (Cambridge, 1.922). Un sumario de éstas teorías fué dado por, Synge, J.L. Proc. R. Soc. London Ser. A, 211, 303 (1.952); y por Schild, A. Proc. R. Soc. London Ser. A, 235,202 (1.956).

2) Birkhoff, G.R. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S, 29,231 (1.943)

3) Belinfante, F.J, and Swithard, J.C. Ann. Phys. (N.Y), 1,168 (1.957)

4) Deser, S and Laurent, B.E. Ann. Phys. (N.Y), 50,76 (1.968)

5) Thirring, W.E. Ann. Phys. (N.Y), 16, 96, (1.961)

6) Mavridés, S. Symposia Mathematica, Vol XII (1.973) (Academic, New York).

7) Nordströn, G. Ann. d. Phys. 42,533 (1.913)

8) Jordan, P. Astr. Nachr. 276,193 (1.948)

9)Thirry, Y.R. Compt. Rend. 226,216 (1.948)

10) Brans, C. and Dicke, R. H. Phys. Rev. 124,925 (1.961)

11) Yilmaz, H. Phys. Rev. 111, 1417, (1.958

12) Yilmaz, H. Il Nuovo Cimento 10,79 (1.972)

13) Schild, A. Am. Journ Phys. 28,778, (1.960)

14) Kraichnan, R. Phys. Rev. 98,1118 (1.955)

15) Gupta, S.N. Proc. Phys. Soc. of London, A65,608 (1.952)

16) Deser, S. Gen. Rel. and Grav. 1,9 (1.970)

17) Hawking, S.W. Comm. Math. Phys. 43,199 (1.975)

18) Castagnino, M. and Weder, R. Jour. of Math. Phys. 22,142 (1.981)

19) Castagnino, M. Gen Rel. Grav. 9,101 (1.978)

20) Parker, L. Phys. Rev. 183,1057 (1.69)

21) Castagnino, M. Foussats, A. Laura, R. and Zandrón, O. Nuovo Cimento 60A,138 (1.980)

22) Dyer, C.S. Engel, A.R. and Queenby, J.J. Astrophysics and Space Science, 19,359 (1.972)

23) Schrödinger, E. Space-Time Structure (Cambridge), p.91 (1.950)

24) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. Teoría Clásica de Campos,(Ed. Reverte- Buenos Aires), p.88 (1.966)

25) Misner, C.W, Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. Gravitation, Chap. 7 (San Francisco, Cal) (1.973)

26) Fierz, M. and Pauli, W. Proc. of. R.S. 211,173 (1.930)

27) Castagnino, M. and Chimento, L.P. lett. Nuovo Cim. V28,471 (1.980)

28) Castagnino, M. and Chimento, L.P. Gen. Rel. and Grav. V.12,825 (1.980)

29) Dicke, R.H. The Theoretical Significance of Experimental Relativity (Montroll,E.W and Vineyard, G.H.) (1.964)

30) Castagnino, M. Chimento,L.P. and Harari, D. Phys. Rev. 24, 290 (1.981)

31) Fisher, J. Niederle, J. and Raczka, R. Jour. of Math. Phys. 7, 816 (1.965)

32) Olver, F. W. J. Proc. Cambridge Philos. Soc. 57,790 (1.961)

33) Castagnino, M. Ann. Inst. H. Poincare 25,55 (1.981)

34) Loos, G. Il Nuovo Cimento 30,901 (1.963)

35) Bjorken, J.D and Drell, S.D. Relativistic Quantum Nechanics. Mc Graw-Hill Book Company (1.964)