

Tesis de Posgrado

Teoría de eficiencia de redes de difracción

Depine, Ricardo Angel

1982

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Depine, Ricardo Angel. (1982). Teoría de eficiencia de redes de difracción. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1764_Depine.pdf

Cita tipo Chicago:

Depine, Ricardo Angel. "Teoría de eficiencia de redes de difracción". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1982.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1764_Depine.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Departamento de Física - Laboratorio de Óptica

TEORIA DE EFICIENCIA DE REDES DE DIFRACCION

por

RICARDO ANGEL DEPINE

Trabajo de Tesis presentado para optar al Título de
Doctor en Ciencias Físicas

Director de la Tesis: Prof. Dr. Juan M. Simon

1764
Ej. 2

A mi familia

Agradecimientos

A mi esposa y a mis padres, quienes me alentaron constantemente con su comprensión y cariño.

A todos aquellos integrantes del Departamento de Física que directa o indirectamente han contribuído a mi formación profesional, en especial al Dr. Juan Simon, director de este trabajo y al Dr. Rubén Contreras.

A mis amigos, Lic. Roberto Mancini, Lic. Alicia Bañuelos y Dr. Julio Facelli por su apreciable apoyo y útiles comentarios sobre diversos problemas computacionales.

A la Srta. Marta Pedernera por la preparación de los dibujos presentados en esta Tesis y su eficiente colaboración.

Finalmente mi agradecimiento a las autoridades y personal del Centro de Computación en Salud (UBA) en cuyo centro de cómputos se realizaron los cálculos que se presentan en este trabajo.

INDICE

	Página
CAPITULO I	
INTRODUCCION	1
I.1 Introducción histórica	1
I.2 Teorías electromagnéticas de redes de difracción	4
I.3 Objetivos y desarrollo del presente trabajo	5
CAPITULO II	
PROPIEDADES FISICAS Y MATEMATICAS DE LOS CAMPOS	8
II.1 Presentación del problema de la red	8
II.2 Ecuaciones de Maxwell y condiciones de contorno	9
II.3 Tratamiento de cada caso de polarización	12
II.4 Pseudoperiodicidad y desarrollo de Rayleigh de los campos difractados	14
II.5 Criterios de reciprocidad y conservación de la energía	19
II.6 Ondas superficiales guiadas y redes de difracción	21
CAPITULO III	
METODOS DIFERENCIALES	25
III.1 Método diferencial para $E//$	25
III.2 Método diferencial para $H//$	30
III.3 Dificultades encontradas al emplear los métodos presentados en III.1 y III.2	33

	Página	
III.4	Aproximación involucrada en el método diferencial para H//	43
III.5	Validez de los métodos diferenciales presentados en III.1 y III.2	45
CAPITULO IV		
	PRESENTACION DE UN NUEVO METODO DIFERENCIAL RIGUROSO EN AMBAS POLARIZACIONES Y VALIDO AUN PARA ALTAS CONDUCTIVIDADES	47
IV.1	Formulación del problema (Resumen)	47
IV.2	Tratamiento para la zona del aire usando transformaciones conformes	48
IV.3	Tratamiento para el interior de la red usando transformaciones no-conformes.	52
IV.4	Empalme de las soluciones en la superficie de la red	55
IV.5	Resolución usando un método diferencial	57
	IV.5.1 Reducción a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	58
	IV.5.2 Empalme de las soluciones en $\Upsilon = \pm \Upsilon_0$	60
	IV.5.3 Empalme de las soluciones en $\Upsilon = 0$	61
	IV.5.4 Resolución numérica truncando las series	62
IV.6	Conservación de la energía	64
IV.7	Ejemplificación de la teoría para red cicloidal	70
IV.8	Resultados obtenidos	74
	IV.8.1 Comparación con el método diferencial para E//	75
	IV.8.2 Comparación con el método diferencial para H//	75
	IV.8.3 Aplicación del método para metales de muy alta conductividad	80
IV.9	Validez y aplicabilidad del nuevo método diferencial	80

CAPITULO V

	LA IMPEDANCIA CONSTANTE USADA EN EL RANGO OPTICO:	88
	PRESENTACION DE UN FORMALISMO DIFERENCIAL APROXIMADO	
V.1	Impedancia superficial usada como condición de contorno	88
V.2	Aplicación en el rango óptico e infrarrojo	92
V.3	Formulación del problema de la red usando $\bar{Z} = \text{constante}$	95
	V.3.1 Caso E//	95
	V.3.2 Caso H//	96
V.4	Presentación de un nuevo formalismo diferencial aproximado	96
V.5	Conservación de la energía	98
V.6	Resultados obtenidos: comparación con el formalismo riguroso	99
V.7	Validez y aplicabilidad del formalismo aproximado	121

CAPITULO VI

	DISCUSION Y CONCLUSIONES	122
--	--------------------------	-----

	APENDICE	124
--	----------	-----

	TRATAMIENTO NUMERICO	124
--	----------------------	-----

	REFERENCIAS	135
--	-------------	-----

CAPITULO I

INTRODUCCION

I INTRODUCCION

1.1 Introducción histórica

Desde su invención en 1819 (Fraunhofer) hasta nuestros días las redes de difracción se han convertido en una herramienta imprescindible en diversas ramas de la física. Entre otras aplicaciones podemos citar desde su uso tradicional como elemento dispersivo en espectrómetros y espectrógrafos, hasta aquellas originadas en el campo de las comunicaciones mediante fibras ópticas^[1].

Cuando un haz luminoso incide sobre una red, la naturaleza periódica de la misma hace que la intensidad de la luz difractada esté distribuida según ciertas direcciones discretas llamadas órdenes espectrales^[2]. Wood^[3] observó rápidas variaciones de la intensidad difractada en un dado orden cuando variaba relativamente poco la longitud de onda de la luz incidente. Dado que la fuente de luz empleada poseía una distribución espectral de intensidad continua y lentamente variable, Wood esperaba encontrar un espectro también continuo y denominó anomalías a estos cambios pronunciados de intensidad observados solamente en polarización S (campo magnético paralelo a los surcos de la red).

El primer tratamiento teórico^{[4],[5]} se debe a Rayleigh (1907): el campo difractado se desarrolla en ondas planas que viajan o que se atenúan exponencialmente hacia afuera de la red. Su teoría relaciona las anomalías de Wood con singularidades que se producen en las amplitudes de un orden dado cuando aparece o desaparece otro orden. Dichas singularidades ocurren solamente cuando el campo magnético es paralelo a los surcos, lo que está de acuerdo con las experiencias de Wood. Sin embargo este tratamiento no permitía encontrar la forma de las anomalías. Trabajos experimentales posteriores sugirieron^{[6],[7]} o mostraron claramente^{[8],[9],[10]} la aparición de anomalías en polarización P (campo eléctrico paralelo a los surcos) cuando se usaban redes con surcos profundos; esto llevó a reconsiderar aquellas teorías que no permi-

ten anomalías P . Tal tarea fue llevada a cabo por Lippmann^[11] quien demostró que los desarrollos empleados por Rayleigh incluyendo solamente ondas que se alejan de la red, son válidos únicamente para redes con surcos poco profundos. Si la ecuación de la superficie de la red es $y = g(x)$ con $|g(x)| \leq b$ no hay duda que la suposición de Rayleigh es válida en la zona $y > b$ ya que en dicha zona los campos difractados deben satisfacer la condición de radiación. En cambio para un punto en la zona $g(x) < y < b$ existen corrientes elementales ubicadas tanto por encima como por debajo de él; por esta razón un desarrollo completo de los campos válido para puntos muy cercanos a la superficie de la red debería en principio contener ondas que se propaguen (o que se atenúen exponencialmente) tanto hacia el exterior como hacia el interior de la red.

Fano^[12] es el primero que trata de explicar los comportamientos "anómalos" como producto de la interacción de la luz incidente con ondas electromagnéticas superficiales (ondas de Sommerfeld). Aunque su tratamiento no es estrictamente correcto, representa una importante contribución para la comprensión de los procesos físicos que nos ocupan.

La teoría de Hessel y Oliner^[13] también utiliza un tratamiento con ondas superficiales (a las que ellos denominan ondas guiadas) e introduce en el estudio de las redes de difracción el concepto de impedancia superficial. Si afuera de una superficie cerrada Σ el campo puede ser desarrollado en una base de funciones conocidas, los coeficientes de este desarrollo quedan unívocamente determinados cuando se conoce el valor del cociente Z entre las componentes tangenciales de los campos sobre toda la superficie Σ ^[14]. Este cociente recibe el nombre de impedancia superficial y su determinación requiere la resolución completa del problema. Sin embargo, suponiendo algunas propiedades "razonables" para Z sobre un plano fuera de la red, Hessel y Oliner

resolvieron el problema clasificando las anomalías de Wood en dos grupos, las llamadas de Rayleigh relacionadas con la redistribución de energía cuando aparece o desaparece un nuevo orden y las anomalías resonantes relacionadas con la excitación de ondas superficiales u ondas guiadas que satisfacen por sí mismas las condiciones de contorno. Ambos comportamientos anómalos quedan evidenciados claramente cuando se mide no solo la intensidad de las ondas difractadas sino también la diferencia de fase $\Delta\psi$ entre las dos componentes fundamentales de polarización. El primer trabajo experimental en esta línea se debe a Simon y Simon ^[15] quienes midieron el valor absoluto de $\Delta\psi$. Posteriormente, la diferencia de fase con su signo fue medida por Depine, Simon y Simon ^[16] obteniendo resultados que muestran claramente el carácter resonante de ciertas anomalías. Hutley y Bird ^[17] estudiaron experimentalmente la relación entre las anomalías resonantes y las ondas de Sommerfeld, que ellos denominan oscilaciones superficiales de plasma o plasmones siguiendo una terminología usual en física del sólido. Iluminando la red con un laser excitaron las ondas superficiales y observaron que la luz emitida era especialmente intensa cuando el ángulo de incidencia del haz laser correspondía al de una anomalía resonante.

Tanto las teorías que emplean desarrollos de Rayleigh como la de Hessel y Oliner no podían reproducir cuantitativamente las curvas experimentales disponibles, ya sea debido a la suposición de surcos poco profundos involucrada en aquellas o al desconocimiento a priori de la impedancia superficial en la última. Esto provocó que a partir de mediados de la década del 60, muchos investigadores dedicaran su interés a resolver el problema mediante una teoría rigurosa, trabajando directamente con las ecuaciones de Maxwell y resolviendo el correspondiente problema de condiciones de contorno. Como resultado de estos trabajos, las investigaciones teóricas se desarrollan actualmente utilizando tres tipos de métodos: integrales, modales y diferenciales.

1.2 Teorías electromagnéticas de redes de difracción

Los métodos integrales han proporcionado la primera solución electromagnética rigurosa al problema de la difracción por una red y fueron propuestos casi simultáneamente por Petit y Cadillac [18], Wirgin [19] y Uretsky [20] para el modo P y por Pavageau [21],[22] para el modo S . Dichos formalismos suponen que la red posee conductividad infinita y son conocidos como métodos integrales pues en ellas el problema se reduce a resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones integrales lineales. Diversos formalismos integrales han sido desarrollados posteriormente para el caso de redes dieléctricas o metálicas con conductividad finita; entre ellos podemos citar el método propuesto por Van den Berg y Borburgh [23] que conduce a la resolución de dos ecuaciones integrales acopladas y el propuesto por Maystre [24] que requiere la resolución de una sola ecuación integral de primera especie con núcleo singular. Este método ha sido implementado computacionalmente por su autor empleando elaboradas técnicas numéricas para sumar e integrar los núcleos singulares [25]. Si bien diversas comparaciones [26],[27] han demostrado que el programa numérico elaborado por Maystre es capaz de predecir las eficiencias de las redes de difracción usadas en las distintas zonas del espectro electromagnético, este método integral tiene las desventajas de requerir grandes tiempos de cálculo y debido a las complejas técnicas matemáticas involucradas, de ser de difícil implementación.

En otra línea teórica podemos ubicar los llamados métodos modales o de ajuste de modos que conducen a empalmar un desarrollo de Rayleigh válido fuera de los surcos, con un desarrollo modal de los campos en el interior de los surcos. El tratamiento resulta muy simple para ciertas geometrías que permiten obtener analíticamente la base modal y fue usado en el caso de conductividad infinita para perfiles rectangulares [28], triangulares [29],[30] y semi-

circulares^[31]. El método modal se complica cuando se considera conductividad finita o forma de surco arbitraria como se demuestra en la teoría general desarrollada por Fox^[32] en 1980 aplicada hasta ahora solo a la red de perfil rectangular^{[33]-[35]}.

Desde el punto de vista matemático el cálculo riguroso de los campos electromagnéticos difractados por una red se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (las ecuaciones de Maxwell) sujetas a ciertas condiciones de contorno adecuadas. Los métodos que resuelven estas ecuaciones empleando diferencias finitas, ya sea directamente o bien transformándolas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, reciben el nombre de métodos diferenciales. Han dado buenas soluciones para conductividad baja^{[36]-[39]} y combinados con transformaciones conformes han resuelto el caso de conductor perfecto^{[40]-[43]}. Los métodos diferenciales no permitían tratar el caso de conductividad alta pero finita, situación de gran interés pues corresponde a los metales usados como reflectores en el rango óptico e infrarrojo (plata, aluminio y oro). En el caso de polarización S los resultados obtenidos coincidían con los predichos mediante otros métodos, sólo para redes con surcos poco profundos.

1.3 Objetivos y desarrollo del presente trabajo

Dado que los métodos diferenciales parecen representar un compromiso entre simplicidad de formulación, versatilidad, facilidad de implementación y rapidez, se encaró el estudio de estos métodos con el objeto de superar las dificultades mencionadas. En el Capítulo II de este trabajo se describen algunas propiedades físicas y matemáticas de los campos y en el Capítulo III los métodos diferenciales propuestos por Cerutti-Maori, Petit y Cadillac^[36] para polarización P y por Nevière, Vincent y Petit^[37] para polarización S . Se

demuestra que este último formalismo, considerado hasta ahora riguroso, es solo una aproximación válida para redes con surcos muy poco profundos^[44].

En el Capítulo IV se presenta un nuevo formalismo diferencial riguroso que resulta válido aún en las zonas de alta conductividad^[45] y se comparan los resultados obtenidos mediante programas computacionales basados en el nuevo método y en el método diferencial usual, para ambos modos y en las zonas donde el método usual no posee dificultades numéricas.

Con el fin de disminuir los tiempos de cómputo se pensó en combinar los métodos diferenciales con la condición de contorno de Leontovich^{[46],[47]}. El uso de esta condición de contorno también llamada de impedancia superficial constante, evita el cálculo de los campos en el interior de la red.

En el capítulo V se discute la validez de la condición de contorno aproximada (nunca usada anteriormente en el rango espectral que nos ocupa) y se presenta un nuevo formalismo diferencial aproximado que combina la mencionada condición de contorno con transformaciones conformes. Mediante comparaciones con las soluciones rigurosas se demuestra que el formalismo aproximado resulta particularmente adecuado para estudiar los campos difractados por una red metálica de conductividad grande pero finita como es el caso de interés en óptica^{[48],[49]}. Por último en el Capítulo VI se resumen y discuten los resultados presentados analizándose las conclusiones que pueden extraerse de este trabajo.

CAPITULO II

PROPIEDADES FISICAS Y MATEMATICAS DE LOS CAMPOS

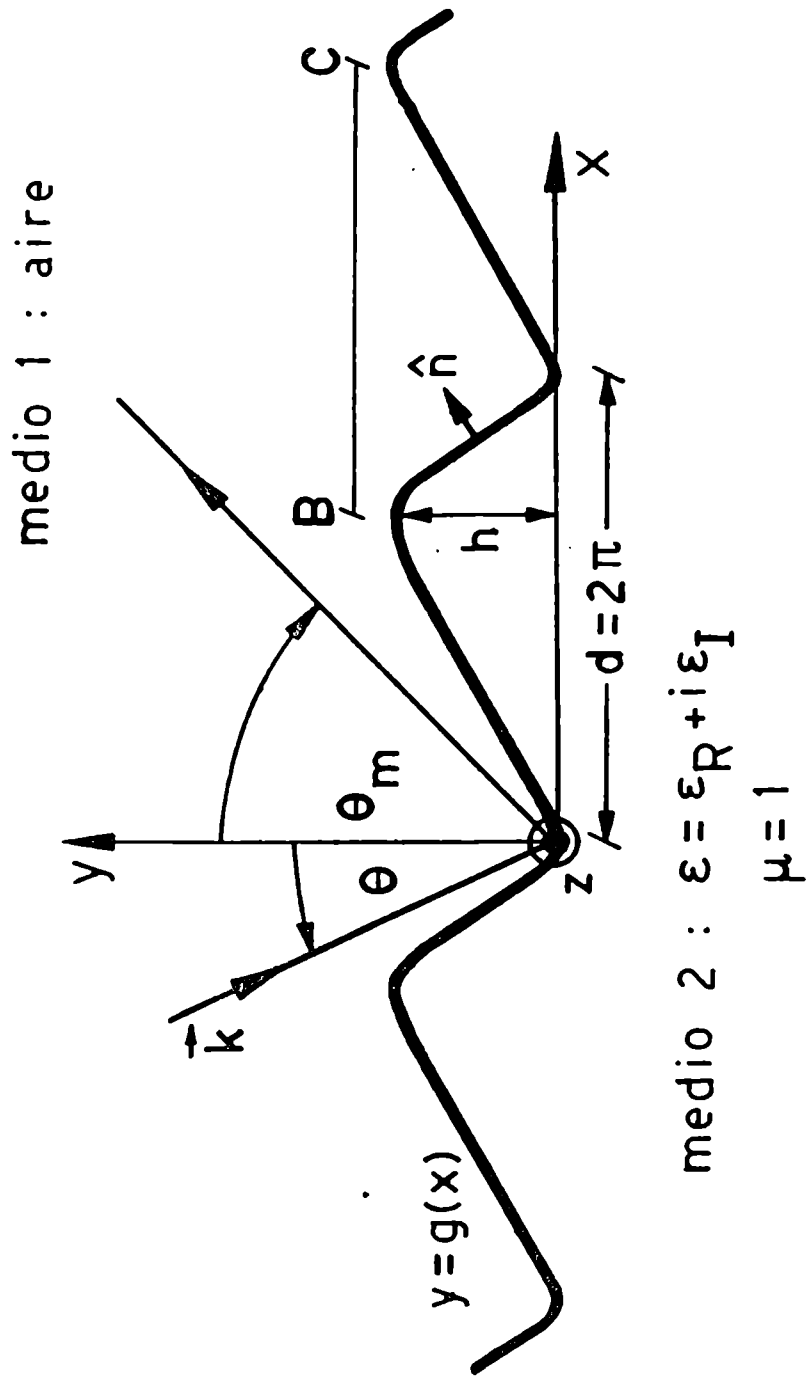


FIGURA 2.1 Presentación del problema de la onda, θ θ_m son positivos.

II. PROPIEDADES FÍSICAS Y MATEMÁTICAS DE LOS CAMPOS

II.1 Presentación del problema de la red

A lo largo del presente trabajo usaremos un sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son los versores en las direcciones Ox, Oy, Oz . Supondremos que la superficie de la red puede representarse por la superficie cilíndrica $y = g(x)$ con generatrices paralelas al eje z ; $g(x)$ es una función periódica de período d igual a la distancia entre dos surcos consecutivos, en los tratamientos teóricos elegiremos por comodidad una unidad de longitud tal que d sea igual a 2π . Llamaremos $\epsilon = \epsilon_R + i\epsilon_I$ a la constante dieléctrica del medio lineal, isótropo y homogéneo contenido en la región $y < g(x)$; ϵ será real para redes dieléctricas o complejo para redes metálicas o dieléctricas con pérdidas. Si el material con el que está construida la red es un metal perfectamente conductor diremos que las propiedades del medio están caracterizadas por un valor infinito de su conductividad abandonándose la descripción del medio mediante ϵ cuyo módulo se haría también infinito. En la región $y > g(x)$ supondremos que hay aire y aproximaremos la constante dieléctrica en esta zona y la permeabilidad en todo el espacio por las correspondientes al vacío. La red es iluminada desde la región $y > g(x)$ por una onda plana de amplitud unidad y frecuencia ω , cuyo vector de onda \vec{k} está contenido en el plano xy y forma un ángulo θ con el eje y ; de esta forma si la superficie de la red es infinita (suposición válida si no nos interesa el poder resolvente) los campos electromagnéticos no dependerán de la coordenada z .

El principio de superposición nos permite estudiar una polarización arbitraria; conocida la forma de los campos en los dos modos o casos fundamentales de polarización llamados P y S . En la polarización P el vector campo eléctrico es paralelo a los surcos de la red ($\vec{E} = E_z \hat{z}$) y suele llamarse "caso $E_{//}$ ". En la polarización S el vector que es paralelo a los

surcos es el campo magnético ($\vec{H} = H_z \hat{z}$) y suele hablarse del "caso $H_{//}$ ".

La dependencia temporal armónica elegida permite representar cualquier función $a(\vec{r}, t)$ del vector posición $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ y del tiempo t , mediante una función compleja asociada $\vec{A}(\vec{r})$ tal que

$$a(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[A(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right] \quad (2.1)$$

donde Re significa "parte real".

11.2 Ecuaciones de Maxwell y condiciones de contorno

En el sistema cgs de unidades, las ecuaciones de Maxwell que rigen el comportamiento de los campos en un medio lineal isótropo y homogéneo con constante dieléctrica ϵ y no magnético (permeabilidad $\mu = 1$) en ausencia de cargas y corrientes libres, y suponiendo una dependencia temporal armónica dada por (2.1) son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{c} \vec{H}(\vec{r}) \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 \quad (2.5)$$

donde c es una constante igual a la velocidad de la luz en el vacío.

Tomando rotor en ambos miembros de (2.2) y utilizando (2.3) y (2.4) se demuestra que \vec{E} satisface la ecuación de ondas de Helmholtz:

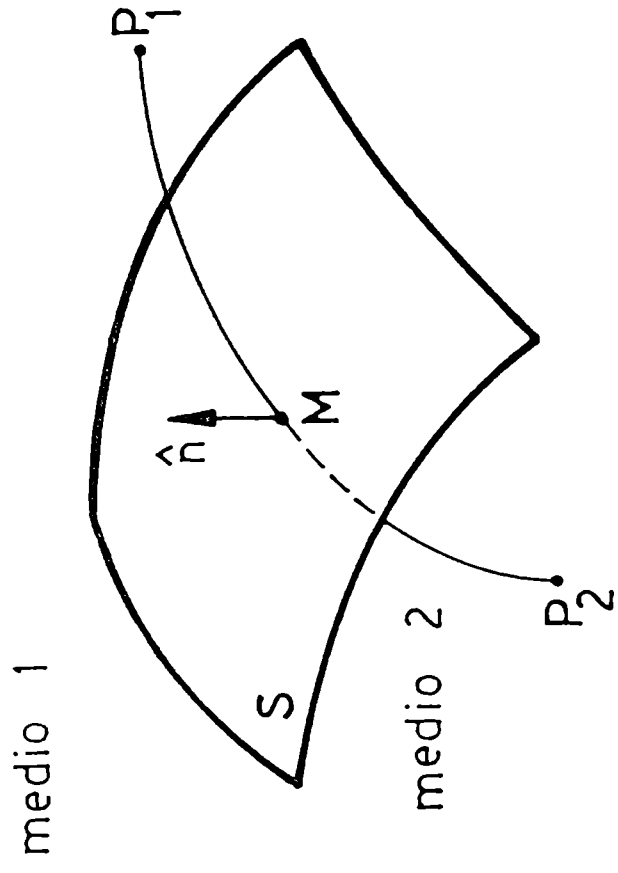


FIGURA 2.2: Condiciones de contorno

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right] \vec{E} = 0 \quad (2.6)$$

Partiendo de (2.3) y utilizando (2.2) y (2.5) se demuestra que \vec{H} verifica la misma ecuación:

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right] \vec{H} = 0 \quad (2.7)$$

Si la superficie S limita dos medios continuos las componentes de los campos a cada lado de S están relacionadas por las siguientes condiciones de contorno (Fig. 2.2):

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.8)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (2.9)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 4\pi\rho_S \quad (2.10)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (2.11)$$

$\vec{E}_j, \vec{H}_j, \vec{D}_j, \vec{B}_j$ representan los límites de $\vec{E}(P_j), \vec{H}(P_j), \vec{D}(P_j), \vec{B}(P_j)$ cuando P_j tiende a M ($j = 1, 2$). ρ_S y \vec{j}_S son las densidades superficiales de cargas y corrientes libres en la superficie S ; \vec{j}_S es distinta de cero sólo si uno de los medios (por ej. el 2) es perfectamente conductor: en este caso $\vec{E}(P_2)$ y $\vec{H}(P_2)$ son cero y entonces (2.9) resulta:

$$\hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{j}_S \quad (2.12)$$

11.3 Tratamiento de cada caso de polarización

Denotaremos con $f(x, y)$ a la componente según el eje z del campo eléctrico en el modo P ó a la componente según z del campo magnético total en el modo S . De acuerdo con (2.6) y (2.7) $f(x, y)$ debe ser solución de una ecuación de Helmholtz en cada zona:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \quad y > q(x) \quad (2.13.a)$$

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \quad y < q(x) \quad (2.13.b)$$

donde $k = \omega/c$.

Para expresar matemáticamente un hecho experimental bien conocido, agregaremos la siguiente condición de radiación: cuando nos alejamos mucho de la superficie de la red, el campo difractado debe estar acotado y debe representar ondas salientes. Es decir pediremos que:

$$\left[f(x, y) - f_{\text{incidente}} \right] \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \text{ondas salientes} \quad (2.14.a)$$

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \text{ondas salientes} \quad (2.14.b)$$

(la condición de radiación no puede imponerse al campo total cuando y tiende a mas infinito pues el campo incidente es una onda entrante).

Expresaremos ahora las condiciones de contorno para cada modo en términos de la función incógnita f . Utilizando (2.8) para el modo P o (2.9) para el S obtenemos la continuidad de f en la superficie de la red:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow g(x) \\ y < g(x)}} f(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow g(x) \\ y > g(x)}} f(x, y) \quad (2.15)$$

lo que implica la continuidad de la derivada de f según la dirección tangencial a la superficie. Para analizar el comportamiento de la derivada de f según la dirección normal a la superficie usamos la condición (2.9) junto con la ecuación (2.2) para el modo P o la condición (2.8) junto con la ecuación (2.3) para el modo S obteniendo:

$$\eta \left[\lim_{\substack{y \rightarrow g(x) \\ y < g(x)}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial \hat{m}} \right] = \lim_{\substack{y \rightarrow g(x) \\ y > g(x)}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial \hat{m}} \quad (2.16)$$

donde

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{modo P} \\ \epsilon^{-1} & \text{modo S} \end{cases} \quad (2.17)$$

Podemos escribir las condiciones de contorno (2.15), (2.16) con la notación más compacta de la sección anterior:

$$f_1 = f_2 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \hat{m}} = \eta \frac{\partial f_2}{\partial \hat{m}} \quad (2.19)$$

sin olvidar el proceso de límite explicitado en (2.15), (2.16).

El problema físico queda así reducido a hallar una función $f(x, y)$ que satisfaga las ecuaciones (2.13), las condiciones de radiación (2.14) y las condiciones de contorno (2.18) y (2.19). Supondremos que este problema, llamado problema de la red, es un problema matemáticamente bien planteado que tiene una única solución. Según Petit^[50] la existencia de una solución (obvia para un físico) nunca ha sido matemáticamente establecida. En cambio suponiendo la existencia puede probarse la unicidad de la solución, por lo menos en el caso $E_{//}$.^[51]

11.4 Pseudoperiodicidad y desarrollo de Rayleigh de los campos difractados

Admitiendo la existencia y la unicidad probaremos dos útiles propiedades de la solución al problema de la red.

Si $f^d(x, y)$ es el campo difractado primero mostraremos que la función

$$u(x, y) = f^d(x, y) e^{-ikx \sin \theta} \quad (2.20)$$

es una función periódica de período igual al de la red (2π) es decir (ver Figura 2.1):

$$f^d(x+2\pi, y) e^{-ik2\pi \sin \theta} = f^d(x, y) \quad (2.21)$$

Para ello notemos que el primer miembro de la igualdad (2.21) satisface la ecuación de ondas y las condiciones de radiación (pues f^d las satisface); si este primer miembro satisficiera las condiciones de contorno en la superficie entonces la igualdad (2.21) quedaría probada invocando la unicidad de la solución. Esto último puede ser demostrado usando las propiedades de f^d y la propiedad obvia del campo incidente $f^i(x, y) = e^{ik(x \sin \theta - y \cos \theta)}$

$$f^i(x+2\pi, y) = f^i(x, y) e^{ik2\pi \sin \theta} \quad (2.22)$$

La condición de contorno (2.18) asegura que:

$$\left[f^i(x+2\pi, y) + f_1^d(x+2\pi, y) \right] e^{-ik2\pi \sin \theta} = f_2^d(x+2\pi, y) e^{-ik2\pi \sin \theta}$$

y usando (2.22) esta igualdad se reescribe en la forma:

$$f^i(x, y) + f_1^d(x+2\pi, y) e^{-ik2\pi \sin \theta} = f_2^d(x+2\pi, y) e^{-ik2\pi \sin \theta}$$

lo que indica que el producto $f^d(x+2\pi, y) e^{-ik2\pi \sin \theta}$ satisface la condi-

ción de contorno (2.18). La condición de contorno (2.19) asegura que:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left\{ \left[f_1^i(x, y) + f_1^d(x+2\pi, y) \right] e^{-ik_2 \pi \text{sen } \theta} \right\} = \frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left\{ f_2^d(x+2\pi, y) e^{-ik_2 \pi \text{sen } \theta} \right\}$$

o usando (2.22):

$$\frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left\{ f_1^i(x, y) + f_1^d(x+2\pi, y) e^{-ik_2 \pi \text{sen } \theta} \right\} = \frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left\{ f_2^d(x+2\pi, y) e^{-ik_2 \pi \text{sen } \theta} \right\}$$

es decir que el primer miembro de (2.21) también satisface la condición (2.19) en la superficie $y=q(x)$, por lo cual debe ser solución del problema de la red. Aceptando la unicidad de la solución queda demostrada la igualdad (2.21) que expresa la periodicidad de $u(x, y)$ también conocida como pseudoperiodicidad de los campos difractados.

La periodicidad de la función $u(x, y)$ definida en (2.20) permite representarla mediante una serie de Fourier:

$$u(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(y) e^{imx} \quad (2.23)$$

y el campo difractado resulta:

$$f^d(x, y) = e^{ik_2 x \text{sen } \theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(y) e^{imx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(y) e^{i\sigma_m x} \quad (2.24)$$

donde hemos definido:

$$\sigma_m = k_2 \text{sen } \theta + m \quad (2.25)$$

Notemos que (2.24) vale cualquiera sea y

si $y > \max g(x)$, f^d verifica la ecuación de ondas (2.13a) para todo x ; introduciendo en esta ecuación la expresión (2.24) se obtiene una ecuación diferencial para cada $f_m(y)$

$$\frac{d^2 u_m}{dy^2} + (k^2 - \sigma_m^2) u_m = 0 \quad (2.26)$$

Definiendo:

$$\varphi_m^{(1)} = \begin{cases} (k^2 - \sigma_m^2)^{1/2} & k^2 > \sigma_m^2 \\ i(\sigma_m^2 - k^2)^{1/2} & k^2 < \sigma_m^2 \end{cases} \quad (2.27)$$

la solución general de (2.26) será una combinación lineal de las funciones $e^{-i\varphi_m^{(1)}y}$ y $e^{i\varphi_m^{(1)}y}$ pero la condición de radiación (2.14a) prohíbe la inclusión de las primeras pues representan ondas entrantes cuando $k^2 > \sigma_m^2$ y no están acotadas para $y \rightarrow \infty$ cuando $k^2 < \sigma_m^2$. Finalmente obtenemos el siguiente desarrollo de los campos difractados válido cuando $y > \max g(x)$:

$$f^d(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m e^{i(\sigma_m x + \varphi_m^{(1)} y)} \quad (2.28)$$

donde R_m son amplitudes complejas incógnitas.

Este desarrollo fue usado por Rayleigh en 1907^[4] y las exponenciales que aparecen en (2.28) reciben el nombre de órdenes o funciones de Rayleigh. Cada término de (2.28) representa ondas planas propagantes cuando $k^2 > \sigma_m^2$ y ondas evanescentes si $k^2 < \sigma_m^2$. Si el orden n -ésimo es propagante, $|\sigma_m/k|$ es menor que la unidad y podemos definir Θ_m tal que:

$$\frac{\sigma_m}{k} = \sin \theta_m = \sin \theta + \frac{m\lambda}{d} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.29)$$

así:

$$\varphi_m^{(1)} = (k^2 - \sigma_m^2)^{1/2} = k \cos \theta_m \quad (2.30)$$

y el orden propagante n-ésimo se escribe como

$$R_m e^{i(\sigma_m x + \varphi_m^{(1)} y)} = R_m e^{ik(x \sin \theta_m + y \cos \theta_m)} \quad (2.31)$$

lo que prueba que θ_m es el ángulo de difracción del orden n-ésimo (ver Figura 1.1). La ecuación (2.29) es la conocida ecuación de la red, deducible con la teoría escalar de la difracción (Huygens-Fresnel).

Procediendo de la misma forma que para la zona $y > \max q(x)$ podemos demostrar que en la zona $y < \min q(x)$ vale el siguiente desarrollo de Rayleigh:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m e^{i[\sigma_m x - \varphi_m^{(2)} y]} \quad (2.32)$$

T_m son las amplitudes de los órdenes transmitidos y:

$$\varphi_m^{(2)} = (k^2 \epsilon - \sigma_m^2)^{1/2}; \quad \text{Im} \varphi_m^{(2)} > 0 \quad (2.33)$$

Los campos difractados quedan determinados cuando se conocen las amplitudes complejas R_m y T_m . A partir de R_m podemos calcular los flujos de los vectores de Poynting (en valor medio temporal) asociados con la onda incidente (ϕ^i) y con el n-ésimo orden difractado (ϕ_m^d), a través de un rectángulo de lados BC , $B'C'$ (paralelos al eje x) y BB' , CC' (paralelos al eje z) (ver Figura 2.1). El cociente entre ϕ_m^d y ϕ^i recibe el nom-

bre de eficiencia del orden difractado n -ésimo y representa la fracción en valor medio temporal de la potencia incidente que transporta el orden reflejado n -ésimo:

$$e_m = \operatorname{Re} \left\{ |R_m|^2 \frac{\varphi_m^{(1)}}{\varphi_0^{(1)}} \right\} \quad (2.34)$$

de donde se ve que aquellos órdenes para los cuales $k^2 - \sigma_m^2$, ($\varphi_m^{(1)}$ es un número imaginario) no transportan energía en dirección normal a la red.

11.5 Criterios de reciprocidad y conservación de la energía

Antes de describir los métodos diferenciales empleados para calcular las eficiencias (2.34) mencionaremos dos relaciones generales que éstas deben satisfacer cualquiera sea el tipo de red o polarización empleada.

La primera, conocida como criterio de reciprocidad establece la igualdad de las eficiencias en las situaciones esquematizadas en la Figura 2.3. En la situación de la Figura 2.3.a la red es iluminada bajo el ángulo de incidencia θ y el p -ésimo orden difractado forma un ángulo θ_p con la normal a la red y tiene una amplitud R_p . En la Figura 2.3.b, el ángulo de incidencia es $\theta' = -\theta_p$, y el p -ésimo orden difractado se propaga en la dirección $\theta'_p = -\theta$ (según se demuestra a partir de la ecuación (2.29)) con una amplitud R'_p .

El criterio de reciprocidad establece que:

$$\frac{\cos \theta_p}{\cos \theta} |R_p|^2 = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_p} |R'_p|^2 \quad (2.35)$$

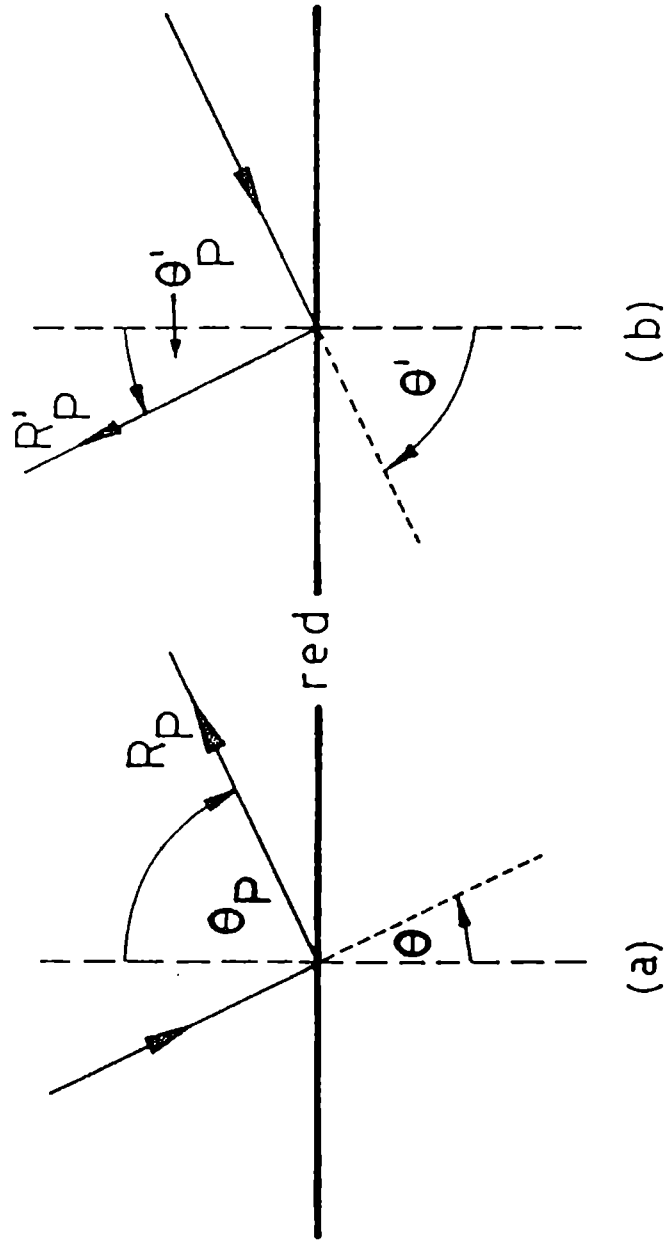


FIGURA 2.3: Teorema de reciprocidad.

es decir que la eficiencia del orden p -ésimo tiene el mismo valor en la situación a) y en la situación b). En particular para $p=0$, $\Theta_p=\theta$ con lo cual concluimos que la eficiencia del orden cero no cambia cuando la red se rota en 180° alrededor de un eje perpendicular a su superficie media. Debe notarse que este resultado vale aún para perfiles no simétricos.

La segunda propiedad que mencionaremos es conocida como criterio de conservación de la energía y establece que:

$$\sum_{m \in U_1} |R_m|^2 \frac{\psi_m^{(1)}}{\psi_0^{(1)}} + T = 1 \quad (2.36)$$

U_1 es el conjunto de números enteros para los cuales $k^2 > \gamma_m^2$ y T es la fracción de la potencia incidente en valor medio temporal que penetra hacia el interior de la red en la superficie correspondiente a un período. La igualdad (2.36) establece el hecho físico de que la energía incidente debe ser igual a la energía difractada. Para un dieléctrico sin pérdidas, ϵ es un número real y (2.36) toma la forma:

$$\sum_{m \in U_1} |R_m|^2 \frac{\psi_m^{(1)}}{\psi_0^{(1)}} + \sum_{m \in U_2} |T_m|^2 \frac{\psi_m^{(2)}}{\psi_0^{(1)}} = 1 \quad (2.37)$$

donde U_2 es el conjunto de números enteros para los cuales $\epsilon k^2 > \gamma_m^2$

Las propiedades (2.35) y (2.36) pueden ser útiles para constatar la exactitud de los resultados numéricos obtenidos con una teoría determinada o para detectar errores de programación en los casos en que la teoría en cuestión satisfaga automáticamente ambas relaciones.

11.6 Ondas superficiales guiadas y redes de difracción

Ya se ha mencionado en la introducción que los comportamientos

"anómalos" de las redes de difracción pueden ser explicados como producto de la interacción de la luz incidente con ondas electromagnéticas superficiales [12],[13],[17]. Estas ondas que se propagan en superficies planas atenuándose durante su propagación, son soluciones de las ecuaciones de Maxwell más condiciones de contorno por sí mismas es decir en ausencia de onda incidente y pueden ser consideradas como un modo guiado o modo propio. En estructuras periódicas puede haber un acoplamiento con el campo externo y el estudio de estos modos propios está íntimamente relacionado con el estudio del problema de la difracción en la red. Su conocimiento permite interpretar físicamente la respuesta de la estructura periódica frente a una dada excitación. Podríamos considerar que la situación es análoga a la que existe en un circuito resonante serie RLC cuando en los extremos del mismo se aplica una tensión $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Cuando ω varía desde cero hasta infinito, la intensidad de la corriente eléctrica que recorre el circuito presenta un valor máximo (más importante cuanto menor es R) para un valor particular $\omega = \omega_r$, fenómeno conocido como resonancia. La respuesta a la excitación $V(t)$ puede entenderse cuando se estudian las oscilaciones naturales del circuito (es decir las oscilaciones sin excitación exterior). Cuando $R = 0$, el circuito oscilará indefinidamente a la frecuencia ω_0 ; si $R \neq 0$ habrá pérdidas de energía y toda oscilación se amortiguará en el tiempo por lo cual la frecuencia propia será un número complejo cuya parte real tendrá valores muy próximos a ω_0 . Este valor $\omega = \omega_p$ corresponde a un cero de impedancia del circuito. Si fuera posible excitarlo con $\omega = \omega_p$ entonces la respuesta (corriente) sería infinita, pero como ω es real esto nunca ocurre. Para pequeños valores de R , ω_p es un número complejo con parte imaginaria muy chica, y cuando ω toma valores próximos a la parte real de ω_p la impedancia toma valores muy chicos dando lugar a grandes intensidades de corriente.

Para la red de difracción el análisis matemático será mucho más

complicado que en el caso del circuito LRC pero la idea básica es aún la misma: estudiando los modos propios u ondas guiadas que pueden ser soportados por la estructura periódica es posible predecir la respuesta de la red cuando sobre ella incide una onda plana. Esto se pone en evidencia cuando se calculan las constantes de propagación de dichos modos propios que como fue demostrado por Nevère^[71] coinciden con las singularidades de las amplitudes difractadas, en el plano complejo k_x . La onda superficial puede hallarse fácilmente para una interfase plana^[72]. Debido a que la velocidad de fase de dicha onda superficial es menor que c , no pueden ser excitadas por la luz incidente en una superficie plana. Sin embargo la introducción de una pequeña modulación, por pequeña que sea, permite el acoplamiento de la onda superficial con los campos que se establecen cuando incide luz sobre la superficie modulada (red). La resonancia de estas ondas superficiales con la luz incidente tendrá lugar cuando la diferencia de fase entre ambas oscilaciones sea igual a un número entero de veces 2π , a lo largo de un período; es decir:

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda} \mp \frac{d}{\lambda_s} = m \quad (2.38)$$

donde d es el período de la red, θ es el ángulo de incidencia, λ y λ_s son las longitudes de onda de la radiación incidente y de la oscilación superficial respectivamente, m es un número entero y el doble signo corresponde a ondas superficiales que se propagan en sentido positivo y negativo. La condición de resonancia (2.38) puede escribirse

$$\sin \theta = \frac{c}{v} \mp m \frac{\lambda}{d} \quad (2.39)$$

donde c y v son las velocidades de fase de la luz incidente y de la onda superficial. En el caso $c=v$, (2.39) da la condición de Rayleigh, es decir

el ángulo θ para el cual algún orden se propaga rasante a la superficie media de la red. Usando la relación de dispersión para una onda superficial en una interfase plana^[72], la velocidad de dicha oscilación resulta:

$$v = c \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{\epsilon}} \quad (2.40)$$

válida para interfase vacío-medio de constante ϵ . Para aquellos metales que satisfagan la relación $|\epsilon| \gg 1$ la diferencia relativa entre v y c será muy chica y es de esperar anomalías resonantes muy cercanas a aquellos ángulos donde se produce la aparición o desaparición de un orden de difracción. La expresión (2.40) vale para interfases planas, pero los experimentos de Teng y Stern^[73] han mostrado que la velocidad de fase de la onda superficial en una superficie ligeramente corrugada difiere muy poco del valor dado por (2.40).

CAPITULO III

METODOS DIFERENCIALES

III. METODOS DIFERENCIALES

En este Capítulo se describen los métodos diferenciales usualmente empleados para calcular las eficiencias de una red de difracción. La idea del método fue sugerida por Petit^[52] y el primer desarrollo teórico se debe a Cerutti-Maori, Petit y Cadillac^[36] quienes trataron sólo el modo $E_{//}$. (sección III.1). Trabajos posteriores^{[37],[38],[39]}, realizados principalmente por Cadillac, Naviere, Petit y Vincent del Laboratorio de Óptica Electromagnética de Marsella (Francia) emplearon este método con técnicas numéricas más poderosas y propusieron un tratamiento para el caso $H_{//}$ (sección III.2). En las secciones siguientes se señalan las dificultades que aparecen en ambos formalismos, se discute el rango de aplicación de cada uno de ellos y se demuestra que el tratamiento empleado para el caso $H_{//}$ no es rigurosamente válido^[44].

III.1 Método diferencial para $E_{//}$

Elegimos el sistema de coordenadas de la Figura 2.1 en forma tal que:

$$\min_{0 \leq x \leq 2\pi} g(x) = 0, \quad \max_{0 \leq x \leq 2\pi} g(x) = h \quad (3.1)$$

De acuerdo con lo discutido en el Capítulo II, sección 4, los campos difractados pueden representarse mediante desarrollos de Rayleigh fuera de la zona $0 \leq y \leq h$. Para $y \gg h$, el campo eléctrico total $f(x, y)$ (según \hat{z}) es la suma de los campos incidente y difractado:

$$f(x, y) = e^{i(\sigma_0 x - \varphi_0^{(1)} y)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m e^{i(\sigma_m x + \varphi_m^{(1)} y)} \quad (3.2)$$

y en la zona $y \leq 0$:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m e^{i(\sigma_m x - \varphi_m^{(2)} y)} \quad (3.3)$$

En la zona $0 \leq y \leq h$, en vez de tratar con las dos ecuaciones de onda (2.13.a) y (2.13.b), podemos considerar que $f(x, y)$ verifica la ecuación:

$$\nabla^2 f + \alpha(x, y) f = 0 \quad (3.4)$$

donde hemos definido:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon & y < g(x) \\ \frac{\omega^2}{c^2} & y > g(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

Ya que $\alpha(x, y)$ es una función periódica en x , de período 2π puede desarrollarse en serie de Fourier:

$$\alpha(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m(y) e^{imx} \quad (3.6)$$

donde

$$\alpha_m(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(x, y) e^{-imx} dx \quad (3.7)$$

Debido a la pseudoperiodicidad (2.24) del campo difractado y del campo incidente, el campo total es pseudoperiódico por lo cual admite un desarrollo del tipo:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(y) e^{i\sigma_m x} \quad (3.8)$$

Introduciendo los desarrollos (3.6) y (3.8) en la ecuación de propagación (3.4) obtenemos luego de hacer un cambio de subíndice y reagrupar términos:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ f_m''(y) - \gamma_m^2 f_m(y) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-m}(y) f_m(y) \right\} e^{imx} = 0 \quad (3.9)$$

donde $f_m''(y)$ indica la derivada segunda de la función $f_m(y)$. El miembro izquierdo de (3.9) puede considerarse como el desarrollo en serie de Fourier (con respecto a x) de la función idénticamente nula; en consecuencia para cualquier m debe cumplirse que:

$$f_m''(y) - \gamma_m^2 f_m(y) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-m}(y) f_m(y) = 0 \quad (3.10)$$

de donde vemos que las funciones $f_m(y)$ son solución de un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de segundo orden.

El campo eléctrico y su derivada normal deben ser continuos en las superficies $y=0$ e $y=h$. La continuidad de f y de su derivada según y en $y=0$ se expresa usando (3.3) y (3.8) mediante las igualdades:

$$\sum_m T_m e^{i\sigma_m x} = \sum_m f_m(0) e^{i\sigma_m x} \quad (3.11)$$

$$-i \sum_n \varphi_m^{(2)} T_m e^{i\sigma_m x} = \sum_n f'_m(0) e^{i\sigma_m x} \quad (3.12)$$

Multiplicando (3.11) y (3.12) miembro a miembro por $e^{-i\sigma_m x}$ e integrando las igualdades obtenidas en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ (procedimiento que equivale a proyectar (3.11) y (3.12) en la base de funciones de Rayleigh), se obtiene:

$$T_m = f_m(0) \quad (3.13)$$

$$-i\varphi_m^{(2)} T_m = f'_m(0) \quad (3.14)$$

y combinando (3.13) y (3.14) se llega a una relación entre f_m y f'_m en $y=0$:

$$f'_m(0) + i\varphi_m^{(2)} f_m(0) = 0 \quad (3.15)$$

La continuidad de f y su derivada normal en la superficie $y=h$ permite obtener mediante un tratamiento similar al hecho en $y=0$, las siguientes igualdades:

$$f_m(h) = e^{-i\varphi_0^{(1)} h} \delta_{m0} + R_m e^{i\varphi_m^{(1)} h} \quad (3.16)$$

$$f'_m(h) = -i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} h} \delta_{m0} + i\varphi_m^{(1)} R_m e^{i\varphi_m^{(1)} h} \quad (3.17)$$

δ_{mm} es el símbolo de Kronecker.

Combinando (3.16) y (3.17) se llega a la siguiente relación entre las funciones incógnitas y sus derivadas en $y=h$:

$$f_m'(h) - i\varphi_m^{(1)} f_m(h) = -2i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} h} \delta_{m0} \quad (3.18)$$

Los campos para el modo P quedan entonces perfectamente determinados cuando se conocen las funciones $f_m(y)$ en el intervalo $[0, h]$ pues conocido $f_m(0)$, (3.13) permite obtener las amplitudes T_m y (3.16) da R_m conocido $f_m(h)$. De esta manera el problema de la red en el modo P se ha reducido a la resolución del sistema diferencial (3.10) en el intervalo finito $[0, h]$ con las condiciones de contorno (3.15) y (3.18). El problema matemático se puede resumir empleando la notación matricial mas compacta:

$$\vec{F}''(y) = \mathbb{V}(y) \vec{F}(y) \quad (3.19)$$

$$\vec{F}'(0) + \mathbb{L}_0 \vec{F}(0) = 0 \quad (3.20)$$

$$\vec{F}'(h) + \mathbb{L}_h \vec{F}(h) = \vec{g} \quad (3.21)$$

donde hemos definido los vectores columna $\vec{F}(y)$, $\vec{F}'(y)$ y $\vec{F}''(y)$ cuyos elementos son las funciones $f_m(y)$, $f_m'(y)$ y $f_m''(y)$; el vector columna \vec{g} de elementos $g_m = -2i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} h} \delta_{m0}$, las matrices diagonales \mathbb{L}_0 y \mathbb{L}_h de elementos $(\mathbb{L}_0)_{mm} = i\varphi_m^{(2)} \delta_{mm}$, $(\mathbb{L}_h)_{mm} = -i\varphi_m^{(1)} \delta_{mm}$ y la matriz $\mathbb{V}(y)$ cuyos elementos son:

$$\mathbb{V}_{mm}(y) = \sigma_m^2 \delta_{mm} - \alpha_{m-m}(y) \quad (3.22)$$

En las aplicaciones numéricas, las series involucradas deben truncarse por ejemplo en $|m|=N$ con lo cual se convierten en sumas finitas con $P=2N+1$ términos y en consecuencia todas las matrices son matrices finitas con P filas y P columnas. La resolución del sistema (3.19) truncado con condiciones en ambos extremos del intervalo (y no dos condiciones en uno, como necesitan los

métodos numéricos estándar), requiere la integración de (3.19) P veces con el fin de obtener una base para el espacio de soluciones de dicho sistema de ecuaciones diferenciales. La implementación numérica de los métodos presentados en este trabajo puede verse en el Apéndice.

III.2 Método diferencial para H//

El método diferencial presentado por Neviere^[37] para el caso en que el campo magnético de la onda incidente es paralelo a los surcos de la red difiere del presentado en la sección anterior en el tratamiento de la ecuación de propagación en la zona $0 \leq y \leq h$. El campo magnético total es:

$$\vec{H} = f(x, y) e^{-i\omega t} \hat{z} \quad (3.23)$$

a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.2) y (2.3) se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\frac{\omega}{c} f \hat{z} \quad (3.24)$$

$$\hat{z} \times \vec{\nabla} f = i\frac{\omega}{c} \tilde{\epsilon} \vec{E} \quad (3.25)$$

donde $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(x, y)$ es una función de la posición que vale 1 cuando $y > g(x)$ y ϵ cuando $y < g(x)$. Combinando (3.24) y (3.25):

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{c^2}{\omega^2 \tilde{\epsilon}} \hat{z} \times \vec{\nabla} f \right] + f \hat{z} = 0 \quad (3.26)$$

y usando la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

se puede reescribir (3.26) identificando $\vec{A} = \hat{z}$ y $\vec{B} = \frac{c^2}{\omega^2 \tilde{\epsilon}} \vec{\nabla} f$ en la forma:

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\vec{\nabla} f}{\alpha(x,y)} \right] + f = 0 \quad (3.27)$$

con $\alpha(x,y)$ dado por la ecuación (3.5).

Proyectando (3.27) en las coordenadas cartesianas x, y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y} \right] + f = 0 \quad (3.28)$$

Neviere propone el siguiente tratamiento para la ecuación diferencial (3.28): define una función auxiliar \tilde{f}

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{\alpha(x,y)} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (3.29)$$

f y \tilde{f} deben ser pseudoperiódicas por lo cual vale el desarrollo (3.8) para f y uno similar para \tilde{f}

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_n \tilde{f}_m(y) e^{i\delta_m x} \quad (3.30)$$

como $\alpha(x,y)$ es periódica, $\beta(x,y) = \frac{1}{\alpha(x,y)}$ también lo es y entonces:

$$\beta(x,y) = \sum_m \beta_m(y) e^{imx} \quad (3.31)$$

Introduciendo los desarrollos (3.6), (3.8), (3.30) y (3.11) en la ecuación diferencial (3.28) y luego de reordenar términos y proyectar en la base de funciones de Rayleigh se logra obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas que relacionan la derivada \tilde{f}'_m con las funciones \tilde{f}_m :

$$\sum_m \beta_{m-m} \tau_m \sigma_m f_m - f_m = \tilde{f}'_m \quad (3.32)$$

Despejando $\frac{\partial f}{\partial y}$ de (3.29), reemplazando en la expresión obtenida los desarrollos (3.6) para α , (3.8) para f y (3.30) para \tilde{f} , reordenando términos y proyectando en la base de funciones de Rayleigh hallamos la siguiente relación entre las derivadas de f_m y las funciones \tilde{f}_m

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-m} \tilde{f}_m = f'_m \quad (3.33)$$

La función $\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y}$, proporcional a la componente \hat{x} del campo eléctrico y la función $f(x,y)$ que es el campo magnético según \hat{z} , deben ser continuas en $y=0$ y en $y=h$ (condiciones de contorno (2.8) y (2.9)). Empalmado estas funciones convenientemente con los desarrollos de Rayleigh (3.2) y (3.3) en $y=0$ y en $y=h$ y procediendo de la misma manera que para el empalme en el modo P se obtienen las siguientes relaciones, en $y=0$:

$$T_m = f_m(0) \quad (3.34)$$

$$\tilde{f}_m(0) = \frac{-i\varphi_m^{(2)}}{k^2} f'_m(0) \quad (3.35)$$

y en $y=h$:

$$f_m(h) = e^{-i\varphi_m^{(1)}h} \delta_{m0} + R_m e^{i\varphi_m^{(1)}h} \quad (3.36)$$

$$\tilde{f}_m(h) - \frac{i\psi_m^{(1)}}{k^2} \tilde{f}_m(h) = \frac{-2i\psi_0^{(1)}}{k^2} e^{-i\psi_0^{(1)}h} \delta_{m0} \quad (3.37)$$

De acuerdo con este formalismo los campos en el modo S quedan completamente determinados cuando se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden formado por las ecuaciones (3.32) y (3.33) con las condiciones de contorno (3.35) y (3.37). Al truncar las series en $|m|=N$, éstas se convierten en sumas finitas con $P=2N+1$ términos, con lo cual el sistema diferencial truncado tiene ahora $2P$ ecuaciones con $2P$ funciones incógnitas: $f_{-N}, \dots, f_N, \tilde{f}_{-N}, \dots, \tilde{f}_N$. El tratamiento numérico de las condiciones de contorno en ambos extremos del intervalo de integración se realiza según lo bosquejado para el modo $E_{//}$ y puede consultarse en el Apéndice de este trabajo.

III.3 Dificultades encontradas al emplear los métodos presentados en

III.1 III.2

Una condición necesaria para poder implementar computacionalmente los métodos diferenciales es que las magnitudes físicas involucradas estén suficientemente bien descritas por relativamente pocos términos de sus desarrollos en serie ya que los requerimientos de memoria, tiempo de cálculo y de precisión aumentan cuando dichos desarrollos convergen lentamente.

Cuando el campo eléctrico de la onda incidente es paralelo a los surcos de la red, el método descrito en III.1 da resultados coincidentes con la experiencia y con el método integral cuando la red estudiada es dieléctrica o metálica con un valor no muy alto de $|\epsilon|$. Para las redes metálicas usadas en la zona del espectro correspondiente a radiación visible e infrarroja aparecen serias dificultades numéricas relacionadas con el alto valor

		ORO $\delta = -5.28 + i 1.48$					ALUMINIO $\delta = -36. + i.96$				
Orden		9	9	11	9	9	9	9	11	13	15
	P	9	100	100	100	40	100	100	100	100	140
	J	40	100	100	100	40	100	100	100	100	140
-2		.1707483	.1717394	.1713106	.3982	.1505378	.3310895	.1316832	.3568892		
-1		.2403566	.2400777	.2411005	2.0876	.4267598	.1157152	.7019939	.1085674		
0		.1302610	.1294549	.1298245	1.0989	.1347370	.2205401	.2431896	.2437130		
1		.2894427	.2903711	.2909592	1.0404	.3348553	.3742919	.4179131	.406224		
	energía reflejada	.8308086	.8316431	.8331947	4.6254	1.046890	1.041637	1.49476	1.1115393		
	tiempo de ejecución aprox. en minutos	3	7	14	3	7	14	23	58		

Tabla 3.1 : Eficiencias obtenidas con el método diferencial $\vec{E} //$ para oro y aluminio en $\lambda = 550 \text{ nm}$.
(Estudio de convergencia para distintos δ).

de la conductividad en esta zona. Estas dificultades se ejemplifican en la Tabla III.1 donde se muestran resultados obtenidos empleando un código FORTRAN llamado DECA realizado para este trabajo y basado en el formalismo III.1. En dicha Tabla se han transcritto las eficiencias de una red de perfil cicloidal con una relación profundidad-período $h/d = .2$ calculadas para distintos valores del número de términos $P = 2N+1$ utilizado para evaluar las series y en los casos en que la red es de oro y de aluminio. Para estos metales cuando $\lambda = 550\text{nm}$, las constantes dieléctricas calculadas usando las tablas de índices de refracción compiladas por Hass^[53] son $\epsilon_{Au} = -8.23 + j 1.43$ y $\epsilon_{Al} = -25.01 + j 9.32$. El ángulo de incidencia es $\theta = 20^\circ$, la relación longitud de onda-período es $\lambda/d = .5$ y J indica en cuántas partes se dividió el intervalo $[0, \pi]$ para integrar el sistema diferencial. El tiempo de ejecución aproximado en un sistema IBM 4331 bajo DOS se da en minutos.

La convergencia de los resultados mostrados, muy buena en el caso del oro, no se observa para la red de aluminio para la cual tampoco se satisface el principio de conservación de la energía. Esto se debe a que a medida que se consideran valores mayores de $|\epsilon|$ es necesario retener más y más términos de la serie usada para describir a la función discontinua $\alpha(x, y)$ cuyas discontinuidades crecen con $|\epsilon|$.

La no convergencia del método en altas conductividades ha sido mencionada por varios autores^{[39],[48],[50]} y es común a ambas polarizaciones. Sin embargo aún en la zona de conductividades bajas pueden aparecer dificultades asociadas con grandes valores de h/d ^[54].

En Referencia [39], P. Vincent asegura que aunque el método diferencial para $H_{//}$ parece menos atractivo que el para $E_{//}$, se han obtenido buenos resultados para una red usada en el visible con entre 3 y 5 órdenes difractados y una relación $h/d = .07$. Mediante dos programas FORTRAN uno llamado DHCA basado en el método de la sección III.2 y otro llamado TNCRC basado en

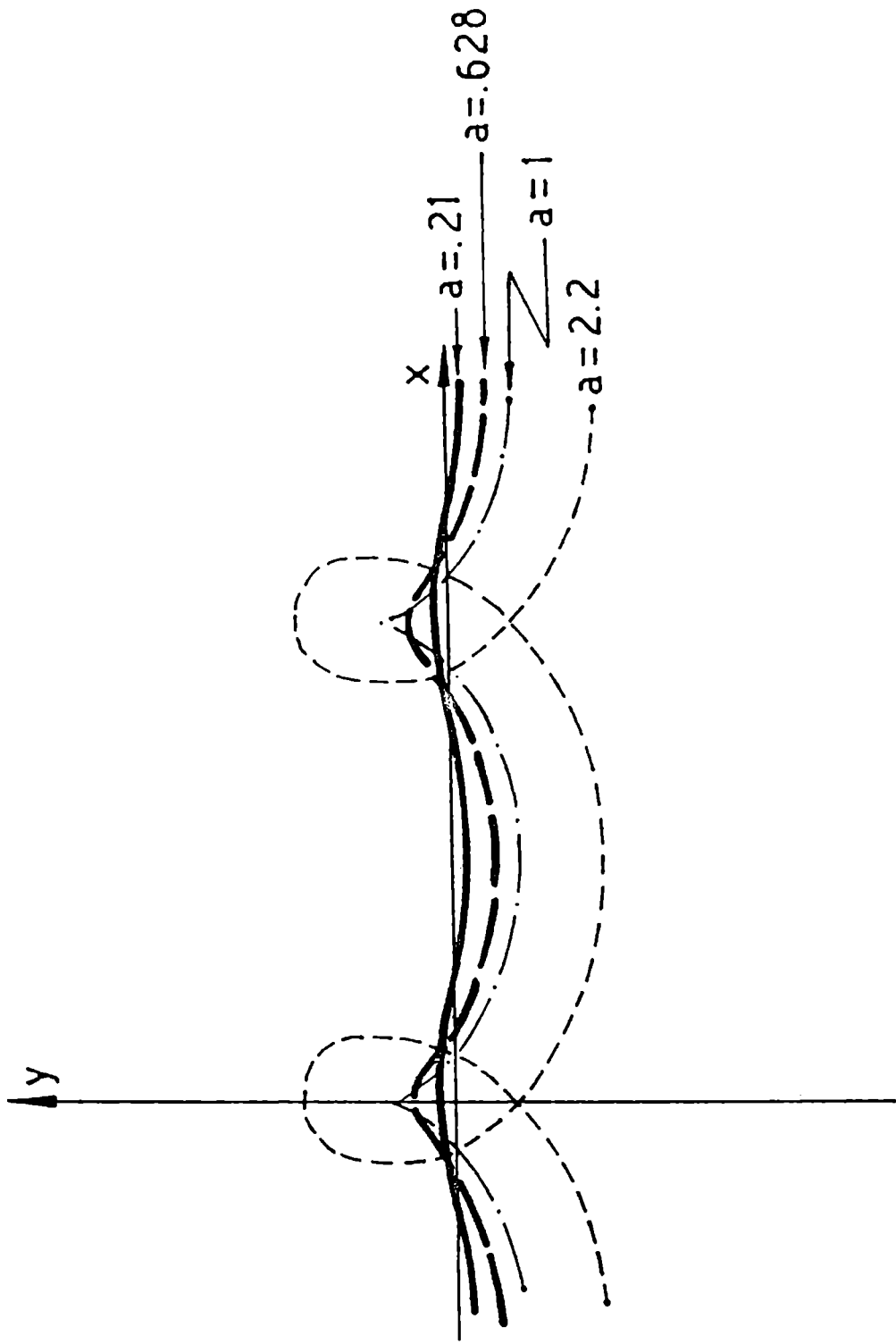


FIGURA 3.1: Perfiles ciclooidales usados para ejemplificar los métodos diferenciales. Las curvas empleadas tienen ecuaciones paramétricas $y = a \cos X$ con $\alpha/2\pi = .035$ y $\alpha/2\pi = .1$. A título de ejemplo se muestran las curvas con $\alpha/2\pi = .159$ y $\alpha/2\pi = .350$

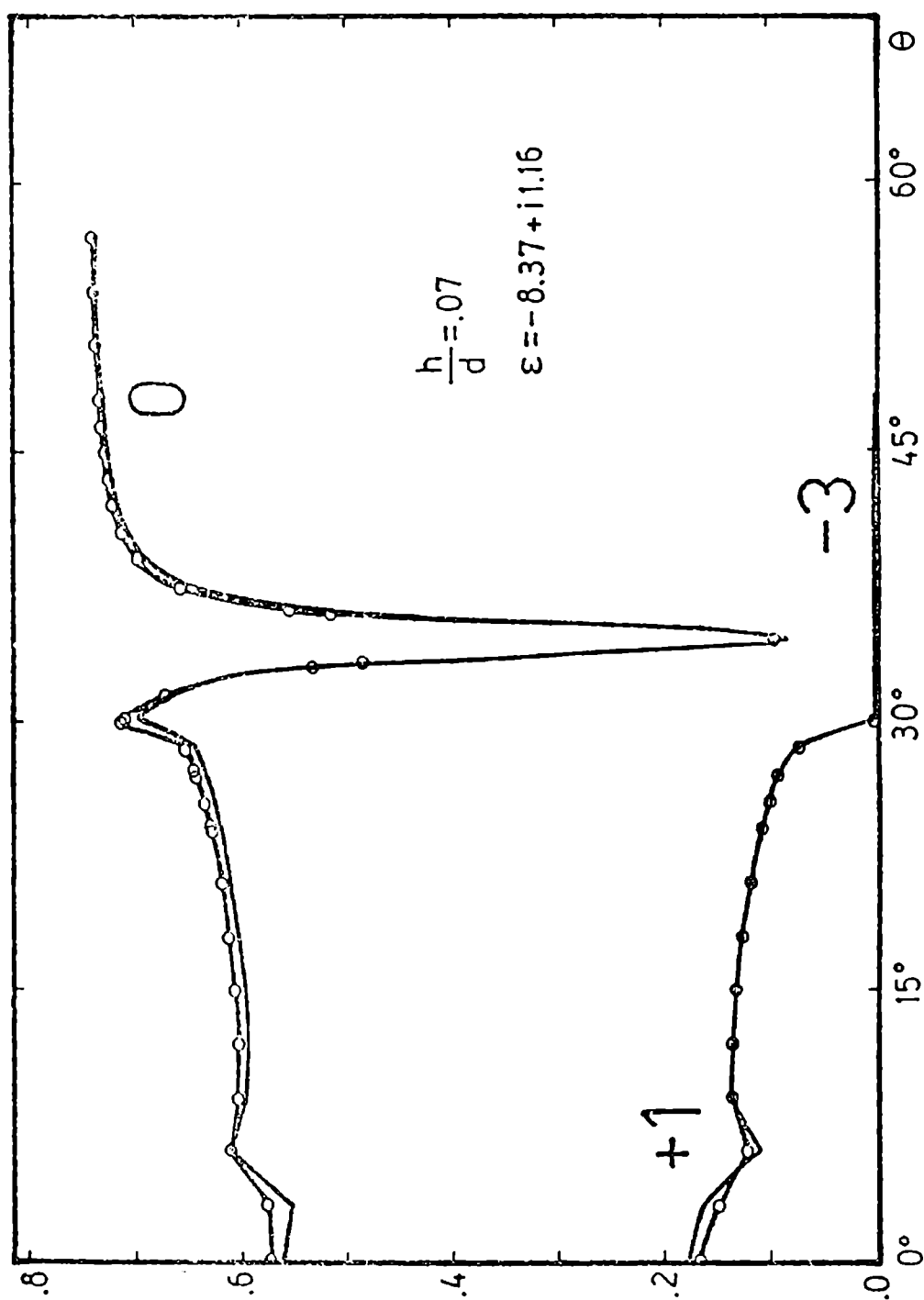


FIGURA 3.2 : Eficiencias en función del ángulo de incidencia para una red cicloidal con $h/d = .07$, $\lambda/d = .5$ y $\epsilon = -8.37 + i 1.16$. Ordenes 1,0 y -3, modo S. Curva contínua: formalismo riguroso; Círculos: método diferencial de

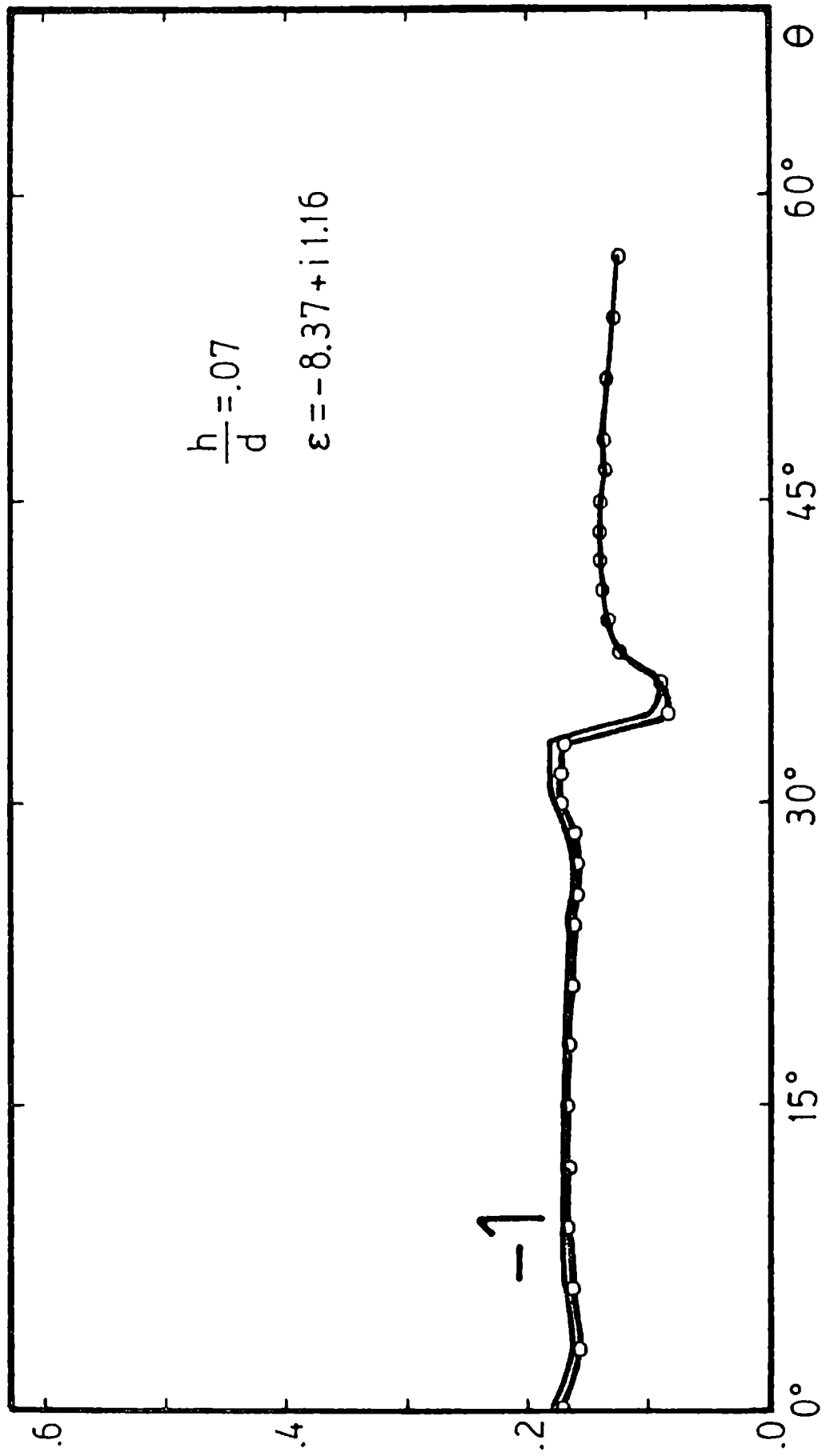


FIGURA 3.3 : Ídem: Figura 3.2, orden -1.

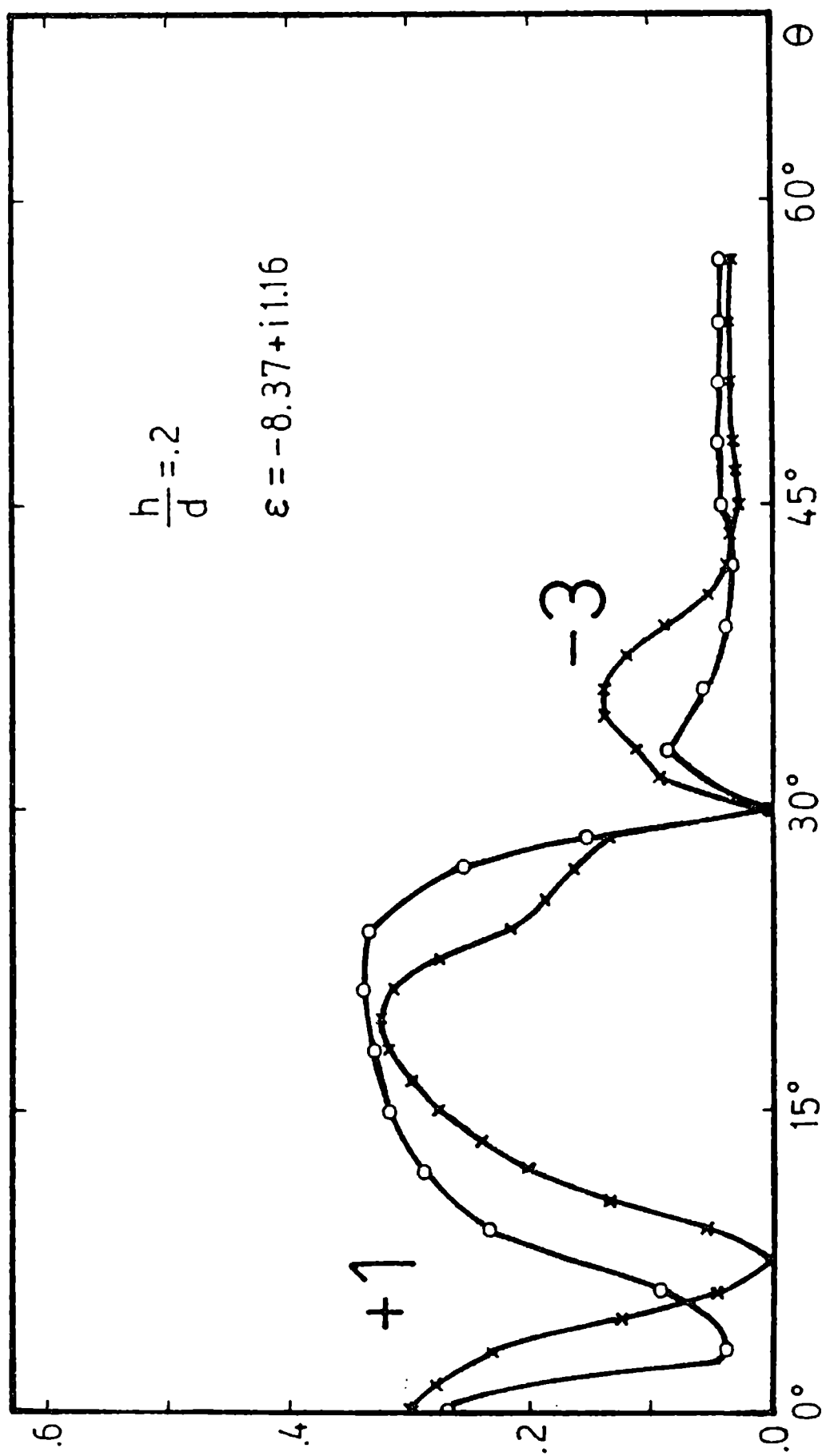


FIGURA 3.4 : Comparación entre las eficiencias del modo S en función del ángulo de incidencia para una red cicloidial con $h/d = .2$, $\epsilon = -8.37 + i 1.16$. Las cruces indican los valores obtenidos con el formalismo riguroso y los círculos los valores obtenidos con el método diferencial de Neviere. Ordenes +1 y -3.

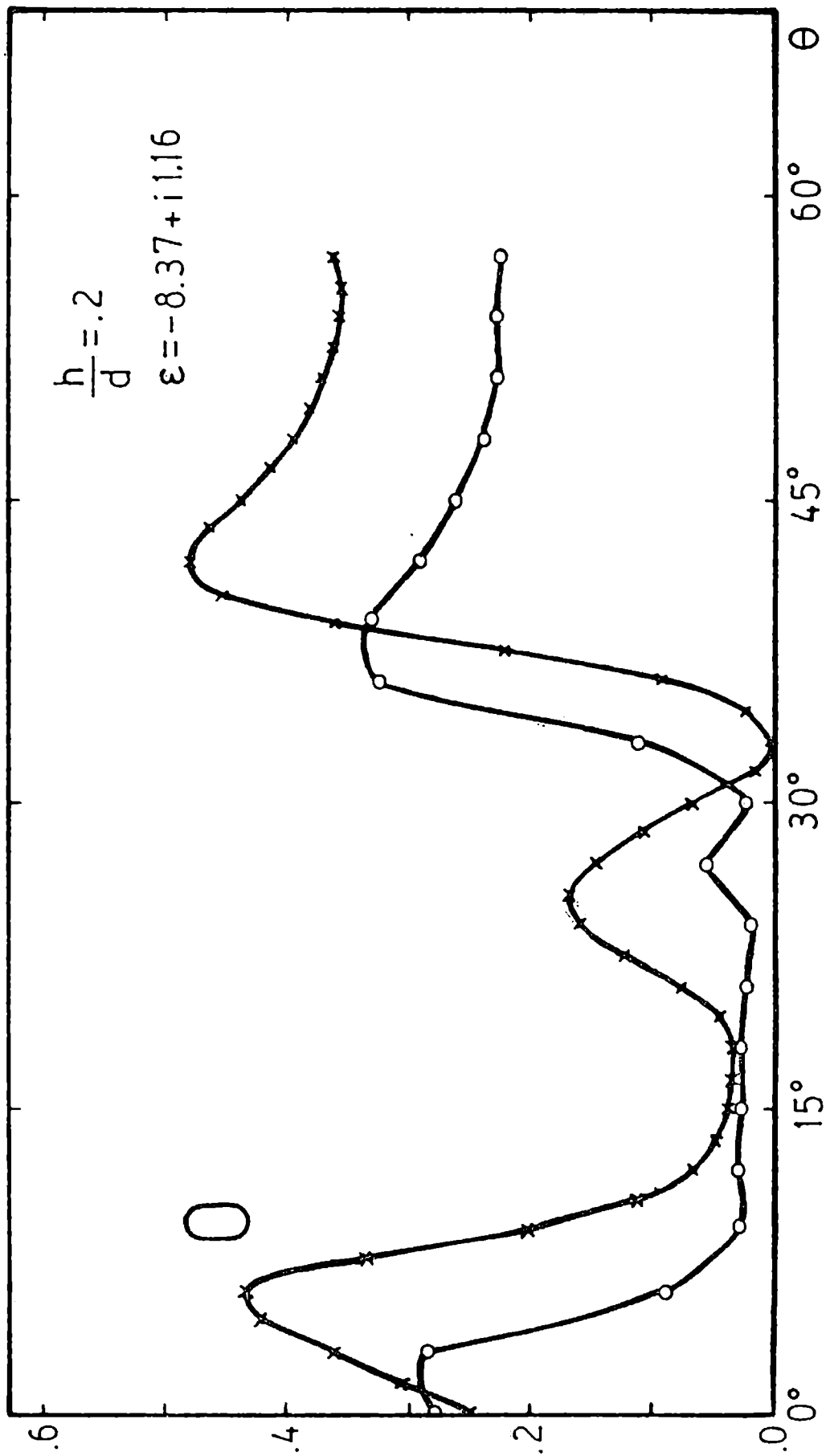


FIGURA 3.5 : ídem Figura 3.4, orden cero

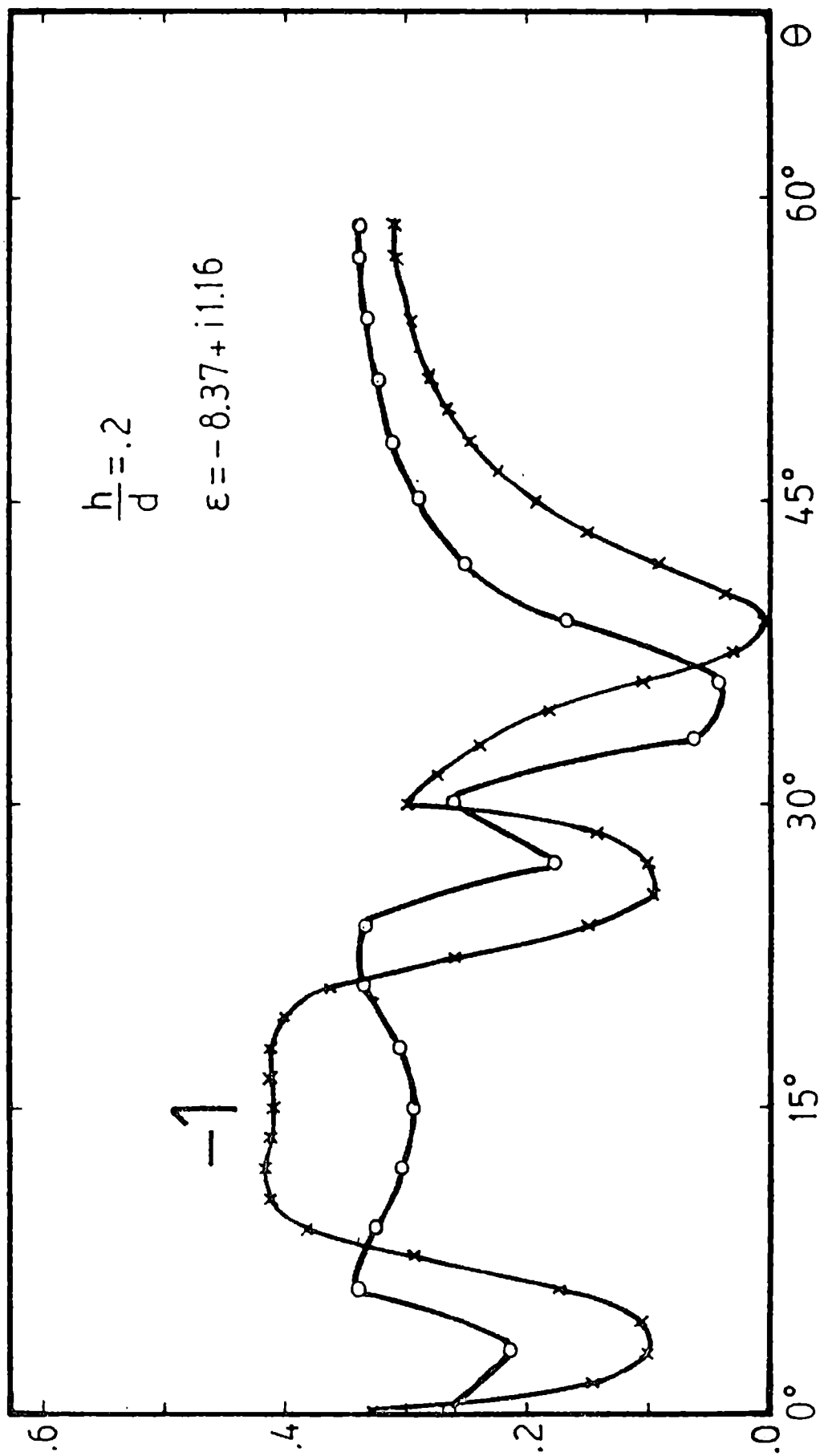


FIGURA 3.6 : Ídem Figura 3.4, orden -1.

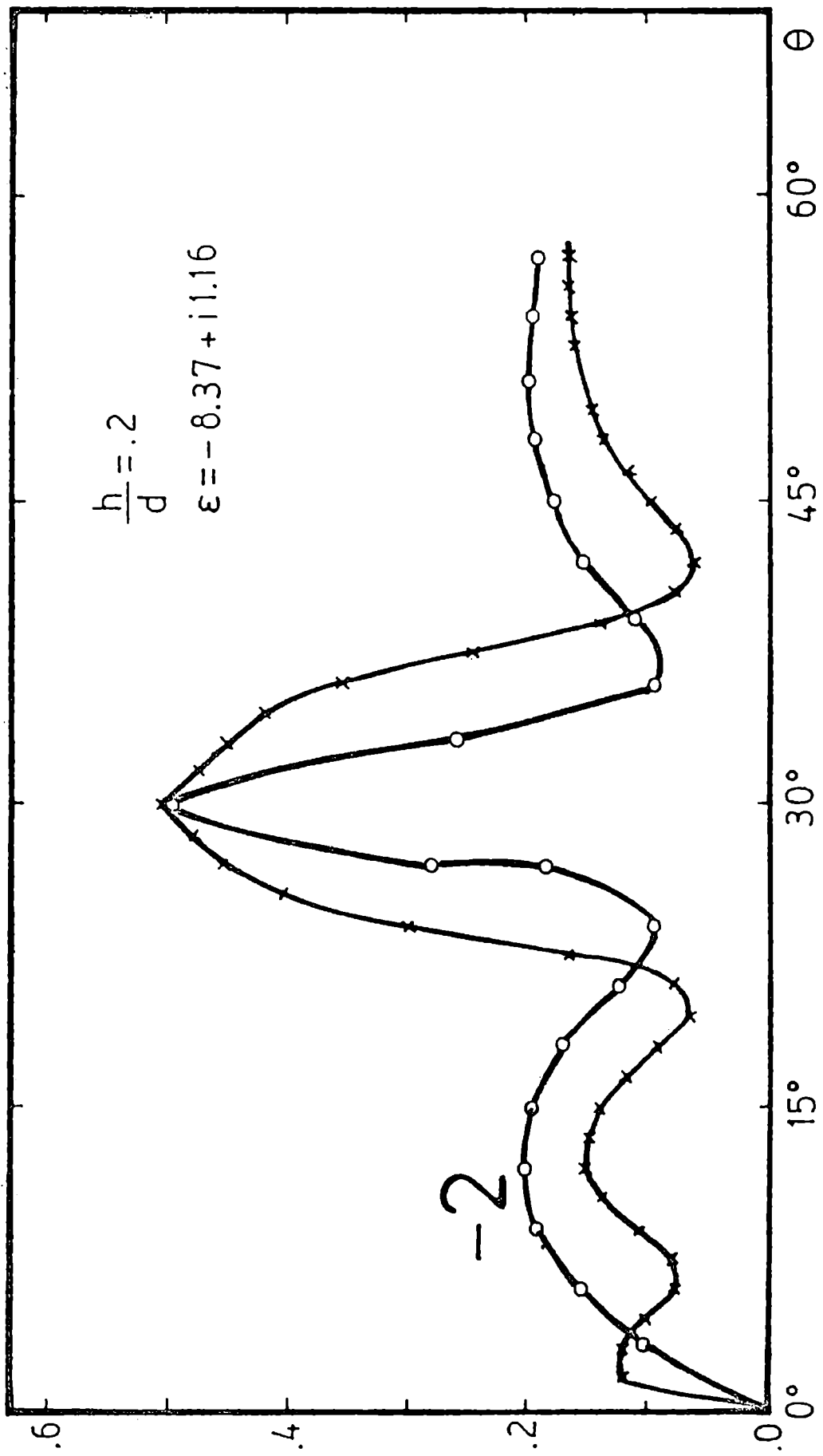


FIGURA 3.7 : ídem Figura 3.4, orden -2.

el método riguroso presentado en el Capítulo IV, se han obtenido las eficiencias en función del ángulo de incidencia para una red con perfil cicloidial (Figura 3.1) con $h/d = .07$, $\lambda/d = .5$ (cuatro órdenes difractados) y constante dieléctrica $\epsilon = -8.37 + i 1.16$ (oro en $\lambda = 600$ nm según Ref. [53]). Los resultados obtenidos usando ambos códigos se muestran en las Figuras 3.2 y 3.3. Puede verse que para esta relación profundidad-período la concordancia es excelente, ambas teorías dan curvas muy similares aún en la zona cercana a $\theta = 30^\circ$ donde se produce un pronunciado pico de absorción en el orden cero debido a la resonancia de ondas superficiales.

La concordancia mencionada no se observa cuando se estudian redes con surcos más profundos. En las Figuras 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7 se repite la comparación cambiando solamente la relación h/d que ahora vale .2. Puede verse que aunque las dos teorías comparadas conservan cualitativamente un cierto parecido, las eficiencias calculadas difieren bastante en todos los ángulos de incidencia considerados.

Esto se debe a que el formalismo de Nevère presentado en la sección III.2 y considerado hasta ahora riguroso, es solo una aproximación válida para redes con surcos muy poco profundos como se demostrará en la siguiente sección.

III.4 Aproximación involucrada en el método diferencial para $H//$

Para que la integración numérica sea posible, los métodos diferenciales requieren una ecuación de propagación en la que todas las derivaciones con respecto a y sean hechas sobre cantidades continuas en el intervalo de integración $[0, h]$. Así sucede en el caso de polarización P pues debido a las condiciones de contorno (2.18) y (2.19) tanto la componente \hat{z} del campo eléctrico como su derivada en la dirección normal son magnitudes continuas en la superficie de la red (y por ende en todo el intervalo de integración). En

cambio en la ecuación de propagación (3.28) para el modo S , aparece la derivada con respecto a y de la función definida en (3.29) $\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y}$. Aunque $\alpha(x,y)$ es discontinua en la superficie de la red las condiciones de contorno para este modo exigen la continuidad de $\frac{1}{\alpha(x,y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial \hat{m}}$ y de $f(x,y)$ a través de esta superficie, es decir:

$$f_1(x, g(x)) = f_2(x, g(x)) \quad (3.38)$$

y

$$\frac{\partial f_1(x, g(x))}{\partial \hat{m}} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_2(x, g(x))}{\partial \hat{m}} \quad (3.39)$$

donde $\hat{m} = m_x \hat{x} + m_y \hat{y}$ es el versor normal a la superficie de la red que apunta hacia la región 1.

La condición (3.38) implica que la derivada de $f(x,y)$ en la dirección tangencial a la curva $y = g(x)$, también debe ser continua a través de la superficie de la red. Dejando de lado la dependencia en x de las funciones y recordando que se evalúan en la superficie de la red podemos escribir las siguientes igualdades, consecuencias de (3.38) y (3.39):

$$m_y \frac{\partial f_1}{\partial x} - m_x \frac{\partial f_1}{\partial y} = m_y \frac{\partial f_2}{\partial x} - m_x \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (3.40)$$

$$m_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + m_y \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{\epsilon} \left[m_x \frac{\partial f_2}{\partial x} + m_y \frac{\partial f_2}{\partial y} \right] \quad (3.41)$$

Resolviendo el sistema (3.40) (3.41) para $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ obtenemos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] m_x m_y + \frac{\partial f_2}{\partial y} \left[m_x^2 + \frac{m_y^2}{\epsilon} \right] \quad (3.42)$$

La igualdad (3.42) nos muestra que la continuidad de la función \tilde{f} , que se traduciría usando la misma notación de (3.42) en:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (3.43)$$

resulta estrictamente válida solo en el caso en que $m_x = 0$ para todo x , lo que es imposible si existe modulación de la superficie. Sin embargo podría considerarse (3.43) como una aproximación válida para superficies poco moduladas, es decir aquellas para las que vale la relación $|m_x| \ll |m_y|$. Este hecho explica las discrepancias señaladas en la sección anterior entre la teoría de Nevère y el formalismo riguroso empleados, cuando se consideran surcos cada vez más profundos pues aunque las ecuaciones de Maxwell tomadas en el contexto de la teoría de distribuciones de Schwartz^{[50], [55]} tienen en cuenta las condiciones de contorno en una discontinuidad del medio, los algoritmos de diferencias finitas implementados en una computadora no pueden tener en cuenta los saltos de las cantidades a integrar, a menos que dichos saltos fueran introducidos de manera explícita en el algoritmo.

III.5 Validez de los métodos diferenciales presentados en III.1 y III.2

Los resultados mostrados en la Tabla III.1, ponen en evidencia la imposibilidad de estudiar mediante el método diferencial el comportamiento de los campos difractados por una red metálica de alta conductividad como los usados comúnmente en óptica. Fuera de esta zona para el caso $E_{//}$ el método no parece tener limitaciones teóricas; Petit^[56] y otros autores^[37] lo han com-

parado con el método integral y han observado que los resultados que arroja en la zona de segura convergencia son adecuados, recomendando la aplicación de este método en el ultravioleta.

El formalismo diferencial para $H//$ en cambio, involucra una aproximación válida para surcos poco profundos como fue demostrado en la sección III.4, lo que sumado a las dificultades numéricas asociadas con grandes valores de $|\epsilon|$ hace que este método sea adecuado solo en ciertas situaciones de interés particular y muestra el interés que tiene el desarrollo de un nuevo formalismo diferencial riguroso en ambas polarizaciones que sea capaz de tratar todo el rango de conductividades, en especial el que corresponde a oro, plata y aluminio en el visible y en el infrarrojo.

CAPITULO IV

PRESENTACION DE UN NUEVO METODO DIFERENCIAL RIGUROSO
EN AMBAS POLARIZACIONES Y VALIDO
AUN PARA ALTAS CONDUCTIVIDADES

IV PRESENTACION DE UN NUEVO FORMALISMO DIFERENCIAL RIGUROSO EN AMBAS
POLARIZACIONES Y VALIDO AUN PARA ALTAS CONDUCTIVIDADES

En este Capítulo se presenta un nuevo formalismo diferencial riguroso para el problema de la red. Dicho formalismo emplea una transformación conforme para el semiespacio ocupado por el aire y una transformación no-conforme que coincide con la anterior en la superficie de la red para el semiespacio interior de la red. Como ejemplificación de la teoría se estudian distintas redes metálicas de perfil cicloidal en ambos modos de polarización y se compara con los resultados obtenidos empleando los métodos diferenciales del Capítulo anterior en aquellas situaciones en que éstos dan resultados confiables.

IV.1 Formulación del problema (resumen)

La notación es la de la Figura 2.1, la incógnita de nuestro problema es $f(x, y)$ tal que $f(x, y)e^{-i\omega t}$ representa el campo eléctrico o el magnético total según se trate del caso $E_{//}$ o $H_{//}$. Llamaremos f^+ (f^-) a la función $f(x, y)$ cuando $y > q(x)$ ($y < q(x)$). Desde el punto de vista matemático y según lo visto en el Capítulo II, $f(x, y)$ debe satisfacer las condiciones (2.13), (2.14), (2.18) y (2.19) que para mayor comodidad transcribimos a continuación:

$$\left[\nabla^2 + k^2 \right] f^+(x, y) = 0 \quad (2.13.a)$$

$$\left[\nabla^2 + k^2 \epsilon \right] f^-(x, y) = 0 \quad (2.13.b)$$

$$\left(f^+(x, y) - f_{\text{incidente}} \right) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} \text{ondas salientes} \quad (2.14.a)$$

$$f^-(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{} \text{ondas salientes} \quad (2.14.b)$$

$$f^+(x, g(x)) = f^-(x, g(x)) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f^+(x, g(x))}{\partial \hat{m}} = \eta \frac{\partial f^-(x, g(x))}{\partial \hat{m}} \quad (2.19)$$

IV.2 Tratamiento para la zona del aire usando transformaciones conformes

Las condiciones de contorno (2.18) (2.19) dificultan un tratamiento matemático directo del problema. Por esta razón parece útil hacer transformaciones de las coordenadas en forma tal que la superficie de la red quede transformada en un plano lo que posiblemente facilitaría el manejo de las condiciones de contorno. Estas transformaciones deberían ser tales que no compliquen demasiado las condiciones restantes (2.13) y (2.14). Dado el carácter bidimensional del problema considerado parece natural estudiar un tipo de transformación empleada en diversas ramas de la física-matemática y acerca de las cuales se conocen muchas propiedades: las transformaciones conformes. Las transformaciones conformes fueron aplicadas al problema de la red por Nevière y Cadillac^{[40]-[43]} quienes resolvieron el caso de conductividad infinita en forma rigurosa. Para la zona del aire $y > g(x)$ propondremos un tratamiento similar al efectuado por estos autores. Consideremos las variables complejas:

$$u = x + iy \quad (4.1)$$

$$U = X + iY \quad (4.2)$$

y supongamos que existe una transformación conforme que lleva el perfil de la

red (en el plano u) a una línea recta (en el plano U). Sea $u(U)$ la transformación buscada tal que si $Y > 0$ entonces $y > g(x)$ y si $Y = 0$ entonces $y = g(x)$.

La familia de transformaciones conformes definida por:

$$u = U + \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{imU} \quad (4.3)$$

(donde b_m son constantes complejas a determinar en cada perfil particular) tiene las propiedades de:

- i. conservar la pseudoperiodicidad de los campos pues si $f(x, y)$ es pseudoperiódica entonces:

$$\begin{aligned} F(x+2\pi, Y) &= f(x(x+2\pi, Y), y(x+2\pi, Y)) = \\ &= f(x(x, Y) + 2\pi, y(x, Y)) = e^{ik2\pi \sin \theta} F(x, Y), \end{aligned}$$

- ii. conservar la condición de radiación debido a que en el límite $Y \rightarrow \infty$ las transformaciones (4.3) tienden a la identidad: $u = U$,

- iii. transformar la ecuación de ondas (2.13.a) en la siguiente ecuación para los campos transformados:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + k^2 \left| \frac{du}{dU} \right|^2 \right\} F^+(x, Y) = 0 \quad (4.4)$$

donde $F^+(x, Y) \equiv f^+(x(x, Y), y(x, Y))$. Para demostrarlo debemos aplicar la regla de la cadena a las derivadas primeras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (4.6)$$

y luego de volver a aplicarla a las derivadas segundas, reemplazar las expresiones obtenidas en la ecuación (2.13.a), obteniendo la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial X} \left[\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial F}{\partial Y} \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right] + \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 \right] + \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} \left[\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} \right] + R^2 F = 0$$

donde todavía no se ha usado la conformidad del cambio de coordenadas. Si la transformación es conforme, U es una función analítica de u y por lo tanto satisface las condiciones de Cauchy-Riemman:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (4.8.a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} \quad (4.8.b)$$

Empleando (4.8) es fácil demostrar que:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \quad (4.9.a.)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad (4.9.b)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad (4.9.c)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = \left|\frac{dU}{d\mu}\right|^2 \quad (4.9.d)$$

y reemplazando las expresiones (4.9) en (4.7) obtenemos (4.4).

Observando que μ tiende exponencialmente a U cuando $Y \rightarrow \infty$, podemos introducir en el formalismo un parámetro $Y_0 > 0$ a determinar numéricamente según la precisión deseada, tal que si $Y \gg Y_0$ entonces $\mu = U$. De esta forma, los campos en la zona $Y \gg Y_0$ pueden representarse mediante un desarrollo de Rayleigh del tipo (3.2) pues en esta zona el espacio transformado es idénticamente igual al espacio real. Este desarrollo de Rayleigh deberá empalmarse convenientemente en $Y = Y_0$ con aquellas soluciones obtenidas resolviendo numéricamente la ecuación diferencial (4.4) en el intervalo $0 \leq Y \leq Y_0$.

IV.3 Tratamiento para el interior de la red usando transformaciones no conformes

En la zona $y < q(x)$ podría efectuarse un tratamiento similar al de la sección IV.2, pero en general esto implica la búsqueda de una nueva transformación conforme para $y < q(x)$ desaprovechándose la información contenida en los coeficientes b_m de (4.3). Sólo en algunos casos de perfiles que pueden representarse por una función impar $q(x) = -q(-x)$, es posible usar la misma transformación conforme que la empleada en la zona $y > q(x)$, pero dos puntos que en el espacio real son vecinos, uno a cada lado de la superficie, en el espacio transformado pasan a ocupar posiciones completamente distantes lo que dificulta el empalme de las soluciones en el espacio transformado.

A partir de la transformación (4.3) puede encontrarse otra que tienda a la identidad cuando $Y \rightarrow -\infty$; que transforme $y = q(x)$ en $Y = 0$ y la zona $y < q(x)$ en $Y < 0$; y tal que a puntos próximos a ambos lados de la superficie de la red les corresponden puntos próximos en el plano transformado. Esta transformación, definida por:

$$u = U + \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{im\bar{U}} \quad (4.10)$$

válida para $Y \leq 0$, no es conforme pues en (4.10) aparece el conjugado de la variable compleja U y si

$$u = \tilde{\mathcal{Z}}(U, \bar{U})$$

define una transformación entre los planos complejos u y U para que sea conforme debe cumplirse que [74]:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \bar{U}} = 0.$$

Este hecho hace que la ecuación de propagación (2.13.b) no mantenga el aspecto de una ecuación de Helmholtz. Como veremos mas adelante, esto no complica demasiado el tratamiento numérico y tiene la ventaja de aprovechar la información contenida en los coeficientes b_m ya determinados numérica o analíticamente al tratar la zona del aire y de facilitar el empalme de las soluciones en la superficie de la red.

Además, resulta sencillo verificar que la transformación propuesta conserva la pseudoperiodicidad y la condición de ondas salientes de los campos transformados y si suponemos como en la sección anterior, que $\mu = U$ cuando $Y \leq -Y_0$, podemos representar los campos en la zona $Y \leq -Y_0$ mediante un desarrollo de Rayleigh del tipo (3.3), el que deberemos empalmar en $Y = -Y_0$ con aquellas soluciones obtenidas resolviendo numéricamente la ecuación de propagación en el plano transformado para la zona $-Y_0 \leq Y \leq 0$. Dicha ecuación, que se obtiene reemplazando en (4.7) k^2 por ϵk^2 y F^+ por F^- es:

$$\left\{ \nabla^2 X \frac{\partial}{\partial X} + \nabla^2 Y \frac{\partial}{\partial Y} + |\vec{\nabla} X|^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + |\vec{\nabla} Y|^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2(\vec{\nabla} X) \cdot (\vec{\nabla} Y) \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \epsilon k^2 \right\} F^- = 0 \quad (4.11)$$

donde el operador $\vec{\nabla}$ involucra derivadas con respecto a las variables sin transformar x e y . Como la transformación (4.10) da x e y en función de X e Y , es conveniente considerar (4.10) como un sistema de funciones implícitas. Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 las dos relaciones funcionales deducibles de (4.10) separando parte real e imaginaria y que relacionan las cuatro varia-

bles x, y, X, Y en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1(x, y, X, Y) &= 0 \\ \mathcal{E}_2(x, y, X, Y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Las variables transformadas podrán despejarse de (4.12) en la forma:

$$\left. \begin{aligned} X &= X(x, y) \\ Y &= Y(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

siempre que el jacobiano de la transformación cumpla:

$$J = \frac{\partial(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)}{\partial(x, Y)} \neq 0. \quad (4.14)$$

Los teoremas acerca de sistemas de funciones implícitas^[57] permiten calcular explícitamente las derivadas parciales que aparecen en (4.11) siempre que se de la condición (4.14).

Como hemos visto, la ecuación de propagación en el plano transformado es la (4.11). Para algunas aplicaciones numéricas es conveniente tener una ecuación con el coeficiente de $\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}$ igual a la unidad por lo que en estos casos usaremos la ecuación de propagación en la forma:

$$\left\{ A \frac{\partial}{\partial X} + B \frac{\partial}{\partial Y} + C \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2E \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + K \right\} F = 0 \quad (4.15)$$

donde A , B , C , E y K son las siguientes funciones de X e Y

$$A(x, Y) = \nabla^2 X / |\vec{\nabla} Y|^2 \quad (4.16.a)$$

$$B(x, Y) = \nabla^2 Y / |\vec{\nabla} Y|^2 \quad (4.16.b)$$

$$C(x, Y) = |\vec{\nabla} X|^2 / |\vec{\nabla} Y|^2 \quad (4.16.c)$$

$$E(x, Y) = (\vec{\nabla} X) \cdot (\vec{\nabla} Y) / |\vec{\nabla} Y|^2 \quad (4.16.d)$$

$$K(x, Y) = \epsilon R^2 / |\vec{\nabla} Y|^2 \quad (4.16.e)$$

IV.4 Empalme de las soluciones en la superficie de la red

Veamos como se transforman las condiciones de contorno (2.18) y (2.19) ante la transformación del plano x, y según (4.3) cuando $y \gg g(x)$ y según (4.10) cuando $y \leq g(x)$.

La continuidad de los campos (2.18) se traduce en la continuidad de los campos transformados a lo largo de $Y = 0$

$$F^+(x, 0) = F^-(x, 0) \quad (4.17)$$

Para transformar la condición de contorno (2.19) debemos estudiar cómo se transforma la derivada normal bajo las dos transformaciones. Teniendo en cuenta la definición de derivada normal:

$$\left. \frac{\partial f^\pm}{\partial \hat{m}} \right)_{y=g(x)} = \hat{m} \cdot \lim_{y \rightarrow g(x)} \vec{\nabla} f^\pm(x, y) ; \quad (4.18)$$

que el versor normal \hat{m} se puede escribir como:

$$\hat{m} = \left\{ \frac{\frac{\partial x}{\partial X} \hat{y} - \frac{\partial y}{\partial X} \hat{x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2}} \right\}_{Y=0} ; \quad (4.19)$$

y transformando las componentes del gradiente que aparece en (4.18) según lo obtenido al aplicar la regla de la cadena (ecuaciones (4.5) y (4.6)) se obtiene que bajo la transformación conforme, (4.18) se transforma en:

$$\frac{\partial f^+(x, g(x))}{\partial \hat{m}} = \frac{\frac{\partial F^+(x, 0)}{\partial Y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)_{Y=0}^2}} \quad (4.20)$$

y que para la transformación no conforme:

$$\frac{\partial f^-(x, g(x))}{\partial \hat{m}} = \frac{\left\{ G(x) \frac{\partial F^-(x, 0)}{\partial X} + H(x) \frac{\partial F^-(x, 0)}{\partial Y} \right\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)_{Y=0}^2}} \quad (4.21)$$

donde se han definido las funciones $G(X)$ y $H(X)$ como:

$$G(x) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right\}_{Y=0} \quad (4.22)$$

$$H(x) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} \right\}_{Y=0} \quad (4.23)$$

Con estos resultados podemos expresar la condición de contorno (2.19) como una condición de empalme para las derivadas de las funciones transformadas en $Y=0$

$$\frac{\partial F^+(x,0)}{\partial Y} = \eta \left\{ G(x) \frac{\partial F^-(x,0)}{\partial x} + H(x) \frac{\partial F^-(x,0)}{\partial Y} \right\} \quad (4.24)$$

Nuestro problema original se reduce ahora a resolver la ecuación diferencial (4.4) en el intervalo $[0, Y_0]$ y la ecuación diferencial (4.15) en el intervalo $[-Y_0, 0]$. La solución de (4.4) debe empalmarse en $Y = Y_0$ con un desarrollo de Rayleigh que represente la onda plana incidente más los campos difractados; la solución de (4.15) debe empalmarse en $Y = -Y_0$ con otro desarrollo de Rayleigh que represente los órdenes transmitidos, y ambas soluciones deben empalmarse en $Y = 0$ según las condiciones de contorno (4.17) y (4.24).

IV.5 Resolución usando un método diferencial

Según lo discutido en las secciones anteriores el campo total fuera del intervalo $0 \leq Y \leq Y_0$ (al que llamaremos zona modulada) puede representarse mediante desarrollos de Rayleigh:

$$F^-(x, Y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m e^{i(\tau_m x - \varphi_m^{(2)} Y)} \quad (4.25)$$

$$F^+(x, Y) = e^{i(\tau_0 x - \varphi_0^{(1)} Y)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m e^{i(\tau_m x + \varphi_m^{(1)} Y)} \quad (4.26)$$

Veremos ahora como resolver mediante un método diferencial, los campos en la zona modulada.

IV.5.1 Reducción a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

En la zona $0 \leq Y \leq Y_0$ la pseudoperiodicidad de los campos permite escribir:

$$F^+(x, Y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^+(Y) e^{i\tau_m x} \quad (4.27)$$

La periodicidad en x de la transformación (4.3) nos permite escribir el siguiente desarrollo de Fourier para el módulo al cuadrado de su jacobiano:

$$\left| \frac{du}{dU} \right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(Y) e^{imx} \quad (4.28)$$

con

$$a_m(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{du}{dU} \right|^2 e^{-imX} dX \quad (4.29)$$

Introduciendo los desarrollos (4.27) y (4.28) en la ecuación de propagación (4.4) y usando la ortogonalidad de las funciones de Rayleigh $e^{i\gamma_m X}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas cuyas soluciones son las funciones $F_m^+(Y)$:

$$\frac{d^2 F_m^+(Y)}{dY^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{mm}^+(Y) F_m^+(Y) \quad (4.30)$$

Los elementos de matriz V_{mm}^+ son:

$$V_{mm}^+(Y) = \gamma_m^2 \delta_{mm} - k^2 a_{m-m}(Y) \quad (4.31)$$

δ_{mm} es la delta de Kroneker.

Para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la ecuación (4.15) usaremos primero el hecho de que la transformación no conforme conserva la pseudoperiodicidad de los campos transformados, lo que permite escribir el siguiente desarrollo en la zona $-Y_0 \leq Y \leq 0$:

$$F^-(x, Y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^-(x, Y) e^{i\gamma_m X} \quad (4.32)$$

Los coeficientes de la ecuación (4.15) A , B , C , E y K definidos en (4.16) son funciones periódicas en X de período igual al de la red (2π); sean $A_m(Y)$, $B_m(Y)$, $C_m(Y)$, $E_m(Y)$ y $K_m(Y)$ los coeficientes de los desarrollos de Fourier de A , B , C , E y K usando la base exponencial e^{imX} . Introduciendo estos desarrollos y (4.32) en la ecuación de propagación (4.15) obtenemos:

$$\frac{d^2 F_m^+(Y)}{dY^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{mm}(Y) \frac{dF_m^-(Y)}{dY} + V_{mm}^-(Y) F_m^-(Y) \quad (4.33)$$

Los elementos de matriz V_{mm}^- y W_{mm} están dados por:

$$V_{mm}^-(Y) = \sigma_m^2 C_{m-m} - i\sigma_m A_{m-m} - K_{m-m} \quad (4.34)$$

$$W_{mm}(Y) = -2i\sigma_m E_{m-m} - B_{m-m} \quad (4.35)$$

IV.5.2 Empalme de las soluciones en $Y=0$

Para empalmar las funciones F_m^+ y F_m^- proyectemos las condiciones de contorno (4.17) y (4.24) en la base $\{e^{i\sigma_m X}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ con lo cual obtenemos:

$$F_m^+(0) = F_m^-(0) \quad (4.36)$$

y

$$\frac{dF_m^+(0)}{dY} = \eta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ i\gamma_m G_{m-n} F_m^-(0) + H_{m-n} \frac{dF_m^-(0)}{dY} \right\} \quad (4.37)$$

donde G_m y H_m son los coeficientes del desarrollo de Fourier de las funciones $G(x)$ y $H(x)$ definidas en (4.22) y (4.23):

$$G_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x) e^{-imx} dx \quad (4.38)$$

$$H_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(x) e^{-imx} dx \quad (4.39)$$

IV.5.3 Empalme de las soluciones en $Y = \pm Y_0$

La continuidad de los campos electromagnéticos en $Y = Y_0$ e $Y = -Y_0$ implica la continuidad de F y de su derivada con respecto a Y a través de estas superficies. Proyectando las condiciones en $Y = Y_0$ sobre la base de funciones de Rayleigh obtenemos:

$$F_m^+(Y_0) = e^{-i\varphi_0^{(1)} Y_0} \delta_{m0} + R_m e^{i\varphi_m^{(1)} Y_0} \quad (4.40)$$

$$\frac{dF_m^+(Y_0)}{dY} = -i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} Y_0} \delta_{m0} + i\varphi_m^{(1)} R_m e^{i\varphi_m^{(1)} Y_0} \quad (4.41)$$

Proyectando las condiciones en $Y = -Y_0$ sobre la misma base resulta:

$$F_m^-(Y_0) = T_m e^{i\varphi_m^{(2)} Y_0} \quad (4.42)$$

$$\frac{dF_m^-(Y_0)}{dY} = -i\varphi_m^{(2)} T_m e^{i\varphi_m^{(2)} Y_0} \quad (4.43)$$

Eliminando R_m de (4.40)-(4.41) y T_m de (4.42)-(4.43) quedan las siguientes condiciones para las funciones F_m en ambos extremos del intervalo de integración $[-Y_0, Y_0]$

$$\frac{dF_m^+(Y_0)}{dY} - i\varphi_m^{(1)} F_m^+(Y_0) = -2i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} Y_0} \delta_{m0} \quad (4.44)$$

$$\frac{dF_m^-(Y_0)}{dY} + i\varphi_m^{(2)} F_m^-(Y_0) = 0 \quad (4.45)$$

Una vez integradas las ecuaciones diferenciales (4.30) y (4.33) con las condiciones de contorno (4.44) y (4.45) y con los empalmes (4.36) y (4.37) podemos calcular los campos en todo el espacio ya que las amplitudes incógnitas R_m y T_m se obtienen despejando de (4.40) y (4.42):

$$R_m = F_m(Y_0) e^{-i\varphi_m^{(1)} Y_0} - e^{-2i\varphi_0^{(1)} Y_0} \delta_{m0} \quad (4.46)$$

$$T_m = F_m(-Y_0) e^{-i\varphi_m^{(2)} Y_0} \quad (4.47)$$

IV.5.4 Resolución numérica truncando las series

Si admitimos que son suficientes $2N+1$ términos de los desarrollos (4.25) y (4.26) para describir a $F(X, Y)$ el problema inicial se

reduce a calcular $2N+1$ funciones $F_m(Y)$, $-N \leq m \leq N$, definidas en el intervalo $[-Y_0, Y_0]$, las cuales son solución del siguiente sistema truncado, que reescribiremos empleando notación matricial:

$$\vec{F}''(Y) = \mathbb{W}(Y) \cdot \vec{F}'(Y) + \mathbb{V}^-(Y) \vec{F}(Y) \quad (4.48)$$

si $-Y_0 \leq Y \leq 0$

$$\vec{F}''(Y) = \mathbb{V}^+(Y) \vec{F}(Y) \quad (4.49)$$

si $0 \leq Y \leq Y_0$

\mathbb{V}^+ , \mathbb{V}^- y \mathbb{W} son las matrices de elementos V_{mn}^+ , V_{mn}^- y W_{mm} dados por (4.31), (4.34) y (4.35) y \vec{F} es un vector columna cuyos elementos son las funciones incógnitas $F_{-N}, \dots, F_0, \dots, F_N$. El comportamiento de $\vec{F}(Y)$ solución de (4.48), (4.49) con las condiciones de contorno (4.44) y (4.45) en cada extremo del intervalo y con los empalmes (4.36) y (4.37), queda completamente determinado si se conoce una base $\left\{ \vec{F}_m(Y) \right\}_{m=-N}^N$ formada por $2N+1$ soluciones independientes del sistema (4.45), (4.36), (4.37) (4.48) y (4.49). La independencia de las soluciones $\vec{F}_m(Y)$ queda asegurada eligiendo $2N+1$ vectores independientes $\vec{F}_m(-Y_0)$ (por ejemplo los vectores de la base canónica). Para cada uno de estos vectores, (4.45) da el vector derivado $\vec{F}_m'(-Y_0)$ con lo cual se puede iniciar la integración del sistema (4.48) (de segundo orden). Dicha integración permite obtener los vectores $\vec{F}_m(0^-)$ y $\vec{F}_m'(0^-)$ y (4.36) y (4.37) dan a partir de estos valores $\vec{F}_m(0^+)$ y $\vec{F}_m'(0^+)$, los cuales permiten iniciar la integración numérica del sistema (4.49) obteniéndose $\vec{F}_m(Y_0)$ y $\vec{F}_m'(Y_0)$ y conociendo así el comportamiento de cada vector de la base en todo el intervalo $[-Y_0, Y_0]$.

IV.6 Conservación de la energía

Se demostrará en esta sección una curiosa propiedad de los campos obtenidos resolviendo el sistema diferencial truncado (4.48, 4.49); veremos que dichos campos satisfacen automáticamente el principio de conservación de la energía cualquiera sea el número $2N+1$ de términos empleado para aproximar las series y aún cuando este número sea menor que el número total de órdenes reales difractados.

Consideremos el wronskiano del sistema de funciones $F_m(Y)$, $|m| \leq N$:

$$W(Y) = \text{Im} \sum_{m=-N}^N \bar{F}_m(Y) \frac{dF_m(Y)}{dY} \quad (4.50)$$

que también podemos escribir de la siguiente manera:

$$W(Y) = \frac{1}{2i} \sum_{m=-N}^N \left\{ \bar{F}_m F'_m - F_m \bar{F}'_m \right\} \quad (4.51)$$

$W(Y)$ tiene las siguientes propiedades:

i. W es constante para $Y \gg 0$; en efecto, calculando su derivada:

$$\frac{dW}{dY} = \frac{1}{2i} \sum_{m=-N}^N \left\{ \cancel{\bar{F}'_m F'_m} + \bar{F}_m F''_m - \cancel{F'_m \bar{F}'_m} - F_m \bar{F}''_m \right\}$$

y usando la ecuación diferencial que satisfacen los $F_m(Y)$ en esta zona:

$$F''_m = \sum_{m=-N}^N V_{mm}^+ F_m \quad |m| \leq N ,$$

obtenemos:

$$\frac{dW}{dY} = \frac{1}{2i} \sum_{m, m=-N}^N \left\{ \bar{F}_m V_{mm}^+ F_m - F_m \bar{V}_{mm}^+ \bar{F}_m \right\}$$

Intercambiando los índices mudos m y m en el segundo término de la sumatoria, la expresión anterior queda:

$$\frac{dW}{dY} = \frac{1}{2i} \sum_{m, m=-N}^N \bar{F}_m V_{mm}^+ F_m - \frac{1}{2i} \sum_{m, m=-N}^N F_m \bar{V}_{mm}^+ \bar{F}_m$$

Los coeficientes a_m definidos en (4.29) satisfacen que $\bar{a}_m = a_{-m}$ pues son los coeficientes del desarrollo de Fourier de una función real; entonces a partir de (4.31) es fácil ver que:

$$V_{mm}^+ = \overline{V_{mm}^+}$$

lo que implica que:

$$\frac{dW}{dY} = 0 \quad ; \quad (4.52)$$

es decir que:

$$W(Y) = \text{cte.}, \quad Y \geq 0 \quad (4.53)$$

ii.

$$W(0) = -\varphi_0^{(1)} T \quad , \quad (4.54)$$

donde T es la fracción de la potencia incidente en valor medio temporal que penetra hacia el interior de la red en la superficie correspondiente a un período (ver ec. (2.36)). Para demostrar esta igualdad calculemos el valor medio temporal de la potencia absorbida en la su-

perficie de la red por unidad de área que viene dada por la parte real del flujo del vector de Poynting complejo [58]:

$$\left\langle \frac{dP}{da} \right\rangle = \frac{-c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \hat{m} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right\}_{y=g(x)} \quad (4.55)$$

Suponiendo polarización P, $\vec{E} = f^+ \hat{z}$, usando la expresión matemática de la ley de Faraday y una conocida identidad vectorial obtenemos \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{-ic}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-ic}{\omega} \vec{\nabla} \times (f^+ \hat{z}) = \frac{-ic}{\omega} \vec{\nabla} f^+ \times \hat{z} \quad (4.56)$$

reemplazando (4.56) en (4.55) y desarrollando el triple producto vectorial:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{da} \right\rangle &= \frac{-c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ i \hat{m} \cdot \left[f^+ \hat{z} \times (\vec{\nabla} f^+ \times \hat{z}) \right] \right\}_{y=g(x)} = \\ &= \frac{-c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ i f^+ \hat{m} \cdot \left[\vec{\nabla} f^+ - \hat{z} (\hat{z} \cdot \vec{\nabla} f^+) \right] \right\}_{y=g(x)} \end{aligned}$$

Como el gradiente de f no tiene componente según \hat{z} , la potencia absorbida es:

$$\left\langle \frac{dP}{da} \right\rangle = \frac{-c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ i f^+(x, g(x)) \frac{\partial f^+(x, g(x))}{\partial \hat{m}} \right\} \quad (4.57)$$

La potencia absorbida en un período se obtiene integrando (4.57) sobre un elemento de arco dl de la curva $y = g(x)$ o lo que es lo mismo,

dada la conformidad de la transformación empleada en la zona considerada:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{dz} \right\rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{dP}{da} \right\rangle d\ell = \frac{-c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ i \int_0^{2\pi} F_m^+(x,0) \overline{\frac{\partial F_m^+(x,0)}{\partial Y}} dx \right\} \\ &= \frac{-c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m,m=-N}^N F_m^+(0) \frac{dF_m^+(0)}{dY} \int_0^{2\pi} e^{i(\gamma_m - \delta_m)x} dx \right\} = \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\frac{-c^2}{8\pi\omega} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{m,m=-N}^N F_m^+(0) \frac{dF_m^+(0)}{dY} 2\pi \delta_{m,m} \right\} ;$$

$$\left\langle \frac{dP}{dz} \right\rangle = \frac{-ci}{8k} \sum_{m=-N}^N \left\{ F_m^+(0) \frac{dF_m^+(0)}{dY} - \overline{F_m^+(0)} \frac{d\overline{F_m^+(0)}}{dY} \right\} .$$

El mismo resultado se obtiene para $\left\langle \frac{dP}{dz} \right\rangle$ cuando se considera el otro modo de polarización. Para una onda plana linealmente polarizada según uno de los modos fundamentales la potencia media incidente por cada período vale:

$$\left\langle \frac{dP}{dz} \right\rangle_{\text{inc}} = \frac{c \varphi_0^{(1)}}{4k} \quad (4.59)$$

T se obtiene dividiendo miembro a miembro las igualdades (4.58) y (4.59):

$$T = \frac{-1}{2i\varphi_0^{(1)}} \sum_{m=-N}^N \left\{ F_m^+(0) \overline{\frac{dF_m^+(0)}{dY}} - \overline{F_m^+(0)} \frac{dF_m^+(0)}{dY} \right\} \quad (4.60)$$

y comparando (4.60) con la expresión que se obtiene cuando se evalúa (4.51) en $Y=0$ queda demostrada la igualdad (4.54).

iii.

$$W(Y \rightarrow \infty) = \sum_{m \in \mathcal{U}} \left\{ |R_m|^2 \varphi_m^{(1)} - \varphi_0^{(1)} \delta_{m0} \right\} \quad (4.61)$$

donde

$$\mathcal{U} = \left\{ m \in \mathbb{Z} / |m| \leq N \wedge \varphi_m^{(1)} \in \mathbb{R} \right\}$$

Para demostrar (4.61) observemos que las funciones $F_m^+(Y)$ deben ajustarse al desarrollo de Rayleigh (4.25) cuando $Y \rightarrow \infty$ por lo cual:

$$F_m^+(Y \rightarrow \infty) = e^{-i\varphi_0^{(1)}Y} \delta_{m0} + R_m e^{i\varphi_m^{(1)}Y} \quad (4.62)$$

Reemplazando en (4.50):

$$W(Y) = \text{Im} \left\{ \sum_{m \in -N}^N \left[\overline{e^{-i\varphi_0^{(1)}Y} \delta_{m0} + R_m e^{i\varphi_m^{(1)}Y}} \right] \cdot \left[-i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)}Y} \delta_{m0} + i\varphi_m^{(1)} R_m e^{i\varphi_m^{(1)}Y} \right] \right\} \quad (4.63)$$

Aquellos términos de la sumatoria para los cuales $\varphi_m^{(1)}$ es un número imaginario puro (órdenes evanescentes), dan una contribución nula en (4.63) pues:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \sum_{m \notin \mathcal{U}} \left[\bar{R}_m e^{|\varphi_m^{(1)}|Y} \right] \left[-|\varphi_m^{(1)}| R_m e^{-|\varphi_m^{(1)}|Y} \right] = \\ & - \operatorname{Im} \sum_{m \notin \mathcal{U}} |R_m|^2 = 0, \end{aligned}$$

por esta razón:

$$\mathcal{W}(Y \rightarrow \infty) = -\varphi_0^{(1)} + \operatorname{Im} i \sum_{m \in \mathcal{U}} \varphi_m^{(1)} |R_m|^2 ;$$

$$\mathcal{W}(Y \rightarrow \infty) = -\varphi_0^{(1)} + \sum_{m \in \mathcal{U}} \varphi_m^{(1)} |R_m|^2$$

con lo que se demuestra (4.61).

Debido a (4.63) podemos igualar las expresiones de $\mathcal{W}(0)$ y de $\mathcal{W}(Y \rightarrow \infty)$ obteniendo luego de pocos pasos algebraicos que:

$$\sum_{m \in \mathcal{U}} |R_m|^2 \frac{\varphi_m^{(1)}}{\varphi_0^{(1)}} + T = 1 \quad (4.64)$$

La igualdad (4.64) indica que los campos electromagnéticos obtenidos con el nuevo formalismo propuesto en este Capítulo, verifican el criterio de conservación de la energía cualquiera sea el número de coeficientes de Fourier utilizados para describirlos y aún cuando este número sea inferior al número de órdenes reales difractados. Esta curiosa propiedad matemática nos lleva a descartar la utilización del principio de conservación de la energía como criterio independiente para determinar el carácter físico de los resultados numéricos obtenidos. Sin embargo (4.64) resulta útil en la etapa de puesta a punto

de los códigos computacionales, para detectar errores de programación.

IV.7 Ejemplificación de la teoría para red cicloidal

Para ejemplificar el nuevo método diferencial propuesto se tratará en esta sección el caso en que el perfil de la red está dado por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= X - a \operatorname{sen} X \\ y &= a \cos X \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

cuando el parámetro X recorre el intervalo $[0, 2\pi]$, x toma valores comprendidos entre 0 y 2π e y entre $-a$ y a . La función $y = q(x)$ es entonces periódica con período 2π y $h = 2a$ es la profundidad de los surcos de la red; la curva (4.65) recibe el nombre de cicloide reducida cuando $h < 2$, cuando $h = 2$ es una cicloide y cuando $h > 2$, (4.65) deja de describir un posible perfil para todo valor de X pues a distintos valores del parámetro le corresponde el mismo par (x, y) (ver Figura 3.1).

Dada la ecuación paramétrica de una curva, la transformación conforme que la lleva al plano $Y = 0$ se halla reemplazando el parámetro X por la variable compleja $U = X + iY$

$$u = x + iy = X + ia(\cos X + i \operatorname{sen} X) = X + ia e^{iX},$$

entonces la transformación conforme es:

$$u = U + ia e^{iU} \quad Y \geq 0 \quad (4.66)$$

y la transformación no conforme es:

$$u = U + ia e^{i\bar{U}} \quad Y \leq 0 \quad (4.67)$$

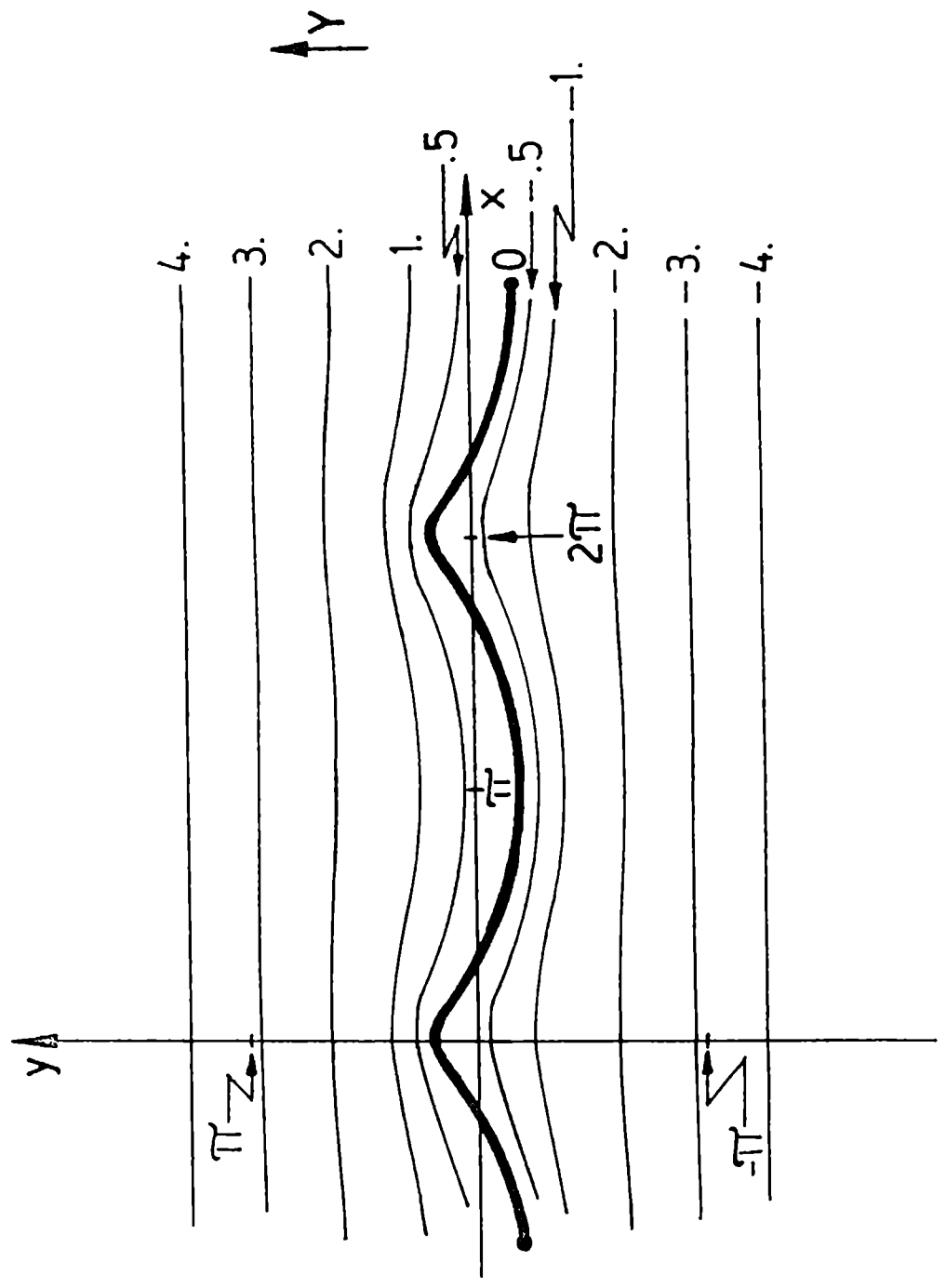


FIGURA 4.1 : Curvas de nivel $Y = cte$ para las transformaciones (4.68) y (4.69). Nótese la disminución de la modulación a medida que aumenta la distancia a la superficie de la red.

Separando parte real e imaginaria en (4.66) y (4.67):

$$\left. \begin{aligned} x &= X - a e^{-Y} \sin X \\ y &= Y + a e^{-Y} \cos X \end{aligned} \right\} Y \geq 0 \quad (4.68)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= X - a e^Y \sin X \\ y &= Y + a e^Y \cos X \end{aligned} \right\} Y \leq 0 \quad (4.69)$$

En la Figura 4.1 se muestran las curvas de nivel $Y = \text{cte}$ para las transformaciones (4.68) y (4.69), pudiéndose ver como disminuye la modulación del espacio a medida que aumenta la distancia a la superficie de la red.

El perfil cicloidal resulta muy adecuado para ejemplificar la teoría de transformación conforme más no conforme pues en este caso los desarrollos en serie (4.3) y (4.10) tienen solo el primer término de la serie distinto de cero. Dicho perfil fue estudiado por primera vez por Nevière^[41] al resolver en forma rigurosa el problema de una red con conductividad infinita y puede considerarse como una muy buena aproximación del perfil de ciertas redes holográficas^[59]:

Para nuestro ejemplo conviene tratar la ecuación de propagación válida en la zona $y < q(x)$ bajo la forma (4.11); esto hace que en la ecuación (4.15) la derivada parcial segunda con respecto a Y esté multiplicada por un coeficiente $D(x, Y) = |\vec{\nabla} Y|^2$ y tiene la ventaja de que permite hallar las transformadas de Fourier $A_m(Y)$, $B_m(Y)$, $C_m(Y)$, $D_m(Y)$, $E_m(Y)$, $K_m(Y)$ analíticamente:

$$A_m(Y) = \frac{-2ia^3 e^{3Y}}{Q^3} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (4.70.a)$$

$$B_m(Y) = \frac{-2ia^3 e^{3Y}}{Q^3} (\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) \quad (4.70.b)$$

$$C_m(Y) = \frac{(1+a^2 e^{2Y}) \delta_{m,0} + a e^Y (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})}{Q^2} \quad (4.70.c)$$

$$D_m(Y) = \frac{(1+a^2 e^{2Y}) \delta_{m,0} - a e^Y (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})}{Q^2} \quad (4.70.d)$$

$$E_m(Y) = \frac{-ia e^Y}{Q^2} \quad (4.70.e)$$

$$K_m(Y) = \epsilon k^2 \delta_{m,0} \quad (4.70.f)$$

$$Q = 1 - a^2 e^{2Y} \quad (4.70.g)$$

Las transformadas de Fourier de las funciones $G(X)$ y $H(X)$ también se hallan analíticamente:

$$G_m = \frac{-ia}{1-a^2} (\delta_{m,1} - \delta_{m,-1}) \quad (4.71.a)$$

$$H_m = \frac{(1+a^2) \delta_{m,0} - a (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})}{1-a^2} \quad (4.71.b)$$

El hecho de incluir el coeficiente $D(X, Y)$ hace que el vector columna de derivadas segundas que aparece a la izquierda en la ecuación de propagación proyectada (4.48) quede multiplicado por una matriz tridiagonal $M(Y)$ de elementos $M_{mm} = D_{m,m}(Y)$; M debe invertirse en cada paso de la integración numérica de (4.48) pero esto no aumenta apreciablemente el

tiempo de cómputo debido a que M además de ser tridiagonal es simétrica y tiene iguales entre sí los elementos de cada diagonal (ec. (4.70.d)). Para resolver (4.48) se ha utilizado el método predictor-corrector de Adam-Moulton (ver Apéndice).

El sistema (4.49) no involucra derivadas primeras por lo cual conviene hacer la integración numérica utilizando el poderoso algoritmo de Noumerov. Los elementos $a_m(Y)$ que aparecen en la definición de \mathbb{V}^+ también pueden hallarse analíticamente para la transformación (4.66):

$$a_m(Y) = (1+a^2 e^{-2Y}) \delta_{m,0} - a e^{-Y} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) \quad (4.72)$$

por lo cual la matriz \mathbb{V}^+ adopta una forma particularmente sencilla.

IV.8 Resultados obtenidos

En esta sección se presentan los resultados obtenidos empleando tres programas Fortran que realizan el cálculo numérico de los campos difractados por una red de difracción según: la teoría de transformación conforme más no conforme (TNCRC), el método diferencial usual caso $E //$ (DECA) y el método diferencial usual, caso $H //$ (DHCA).

En todos los ejemplos presentados, las constantes dieléctricas de las redes cicloidales consideradas, han sido calculadas a partir de las tablas de índices de refracción en función de la longitud de onda, compiladas por Hass^[53]. La relación entre la longitud de onda de la luz incidente y el período de la red es .5 en todos los cálculos. El número de órdenes difractados $2N+1$, el ancho de la zona modulada (Y_0) y el paso de integración se han elegido estudiando la convergencia de los resultados. Para el programa TNCRC las experiencias numéricas han mostrado que tomando $N=4$ ($P=9$), $Y_0 = 2\pi$ y dividiendo el intervalo de integración en 160 partes iguales, se obtiene

la convergencia de las eficiencias con un error menor al 1% y que en todos los casos se satisfacen los criterios de reciprocidad y conservación de la energía.

IV.8.1 Comparación con el método diferencial para E //

Se han comparado las curvas de eficiencia y de energía total reflejada en función del ángulo de incidencia θ , obtenidas con TNCRC y con DECA para una relación profundidad-período igual a .2 y para los siguientes valores de permitividad ϵ :

i. $\epsilon = -5.28 + j 1.48$ que corresponde a oro en $\lambda = 550$ nm
(Figuras 4.2 y 4.3)

ii. $\epsilon = -8.37 + j 1.16$ que corresponde a oro en $\lambda = 600$ nm
(Figuras 4.4 y 4.5)

Podemos observar que la coincidencia entre ambas teorías resulta excelente para este modo de polarización. Para valores más grandes de ϵ no se puede realizar la comparación debido a las dificultades mencionadas en el Capítulo III.

IV.8.2 Comparación con el método diferencial para H //

De acuerdo con lo discutido en el Capítulo III, el método diferencial para este modo, resulta válido solo para redes con surcos poco profundos. Como vimos en dicho Capítulo, la coincidencia de ambas teorías en esta zona es muy buena, dejando de serlo cuando la profundidad de la red considerada aumenta (ver curvas 3.2-3.7).

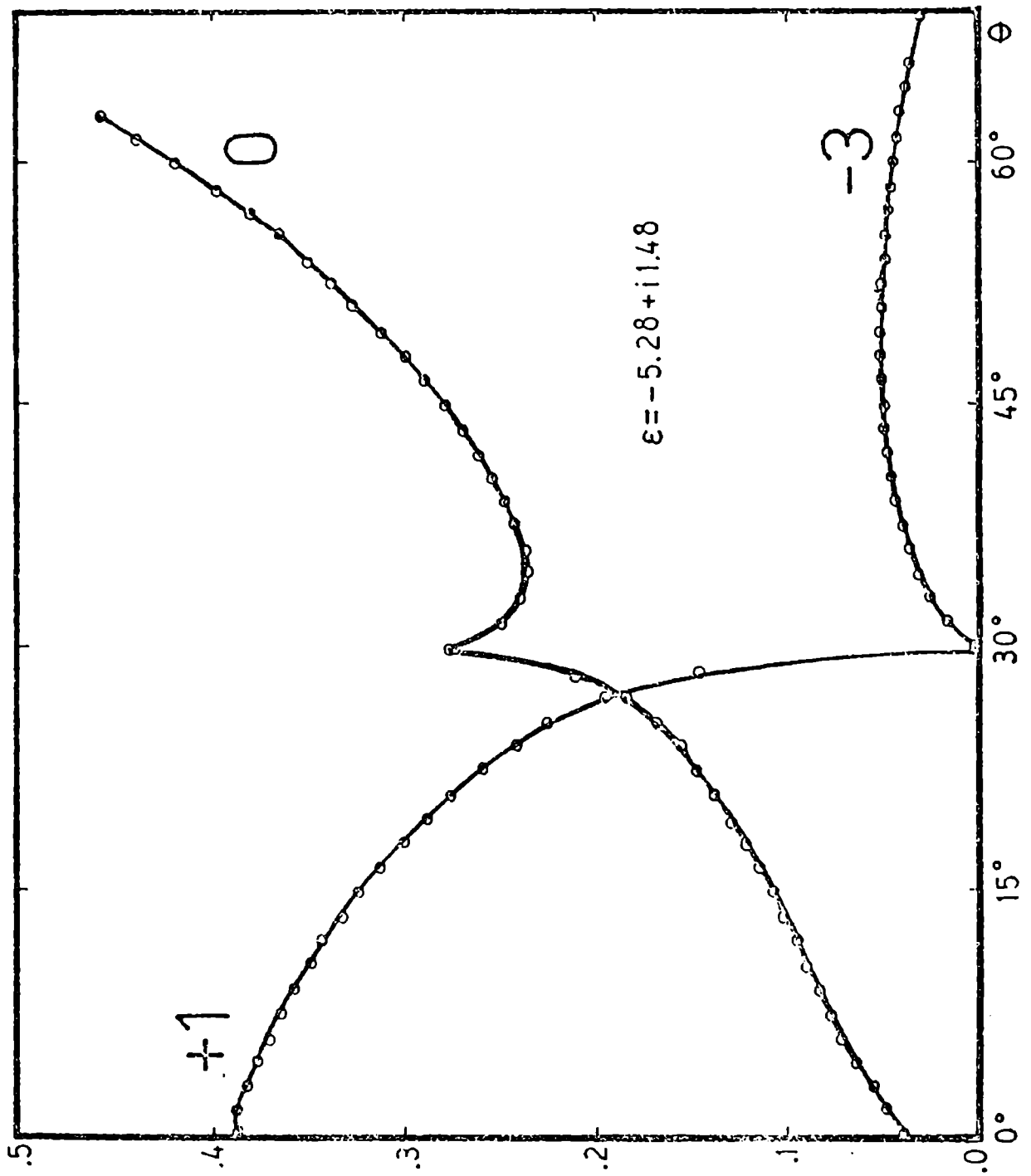


FIGURA 4.2 : Comparación entre las curvas de eficiencia, modo E_n , en función del ángulo de incidencia para una red cicloidal con $n/d = .2$, $\lambda/d = .5$ y $\epsilon = -5.28 + i 1.48$. La curva continua fue obtenida usando el método de Cerutti-

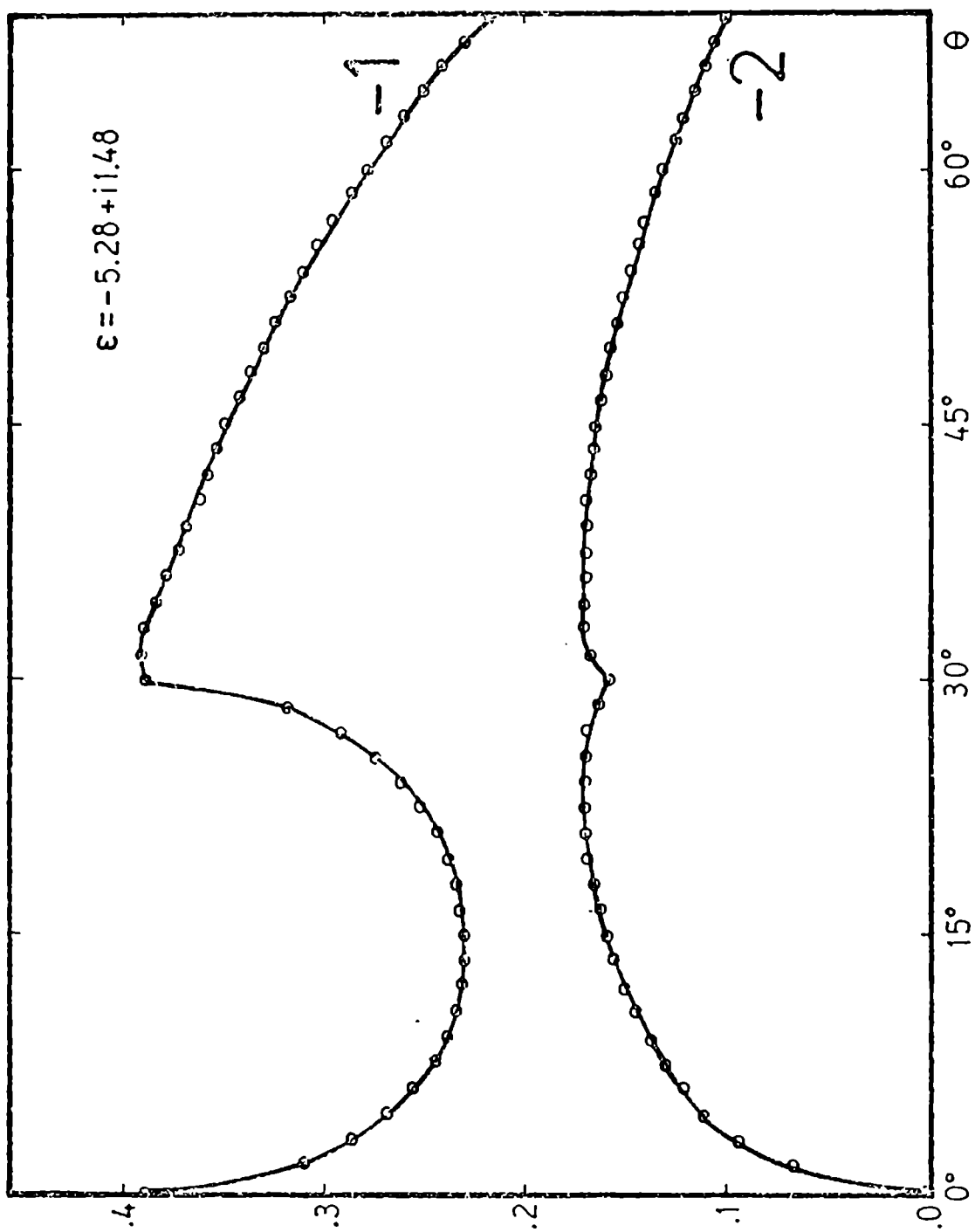


FIGURA 4.3 : ídem Figura 4.2, órdenes -1 y -2.

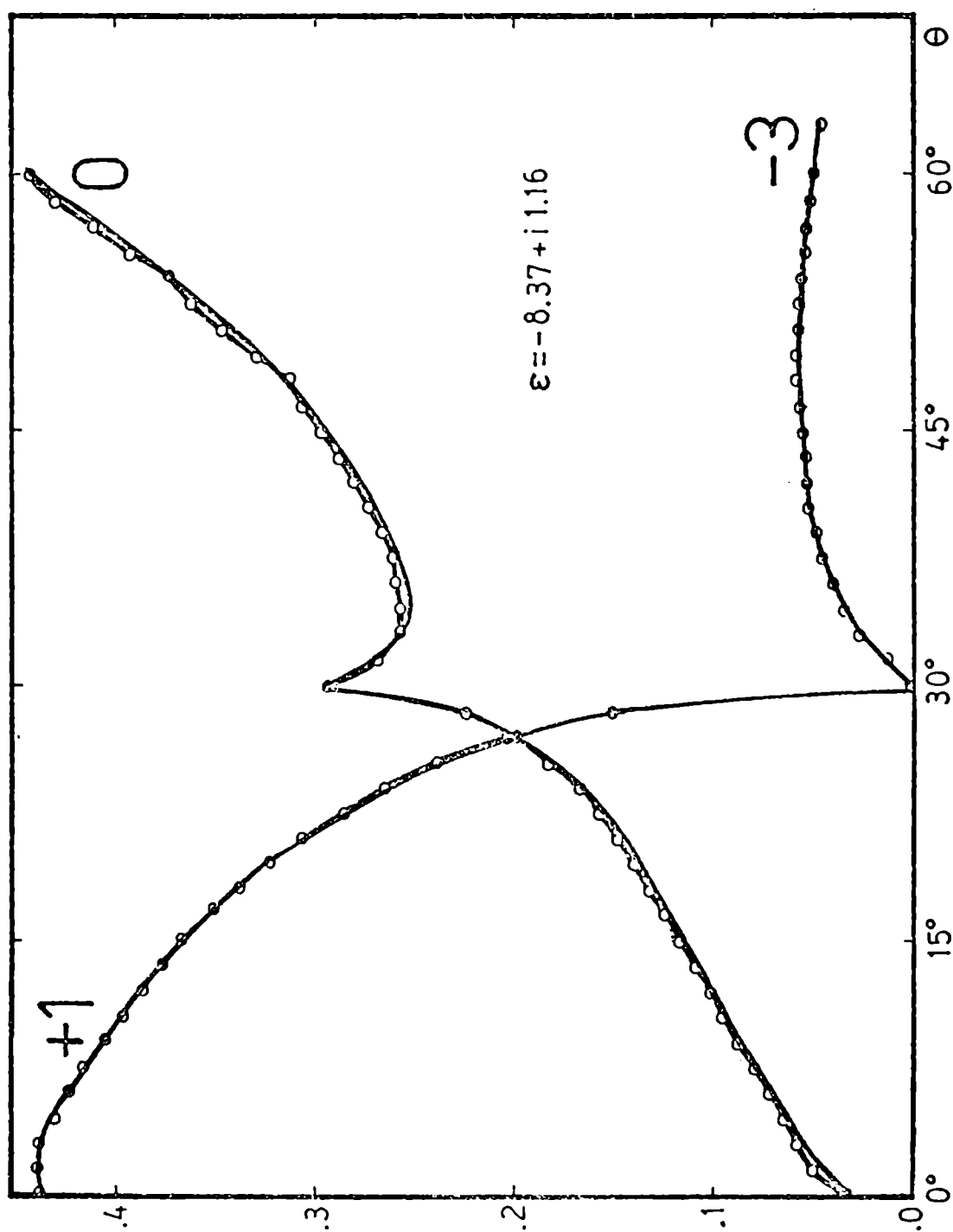


FIGURA 4.4 : Comparación entre las curvas de eficiencia modo $E//$, en función del ángulo de incidencia para una red cicloidial con $k_{i1} = .2$, $k_{i2} = .5$ y $\epsilon = -8.37 + i 1.16$. La curva continua fue obtenida usando el método de Cerutti-Macri. Los círculos indican los valores obtenidos analizando el ensayo.

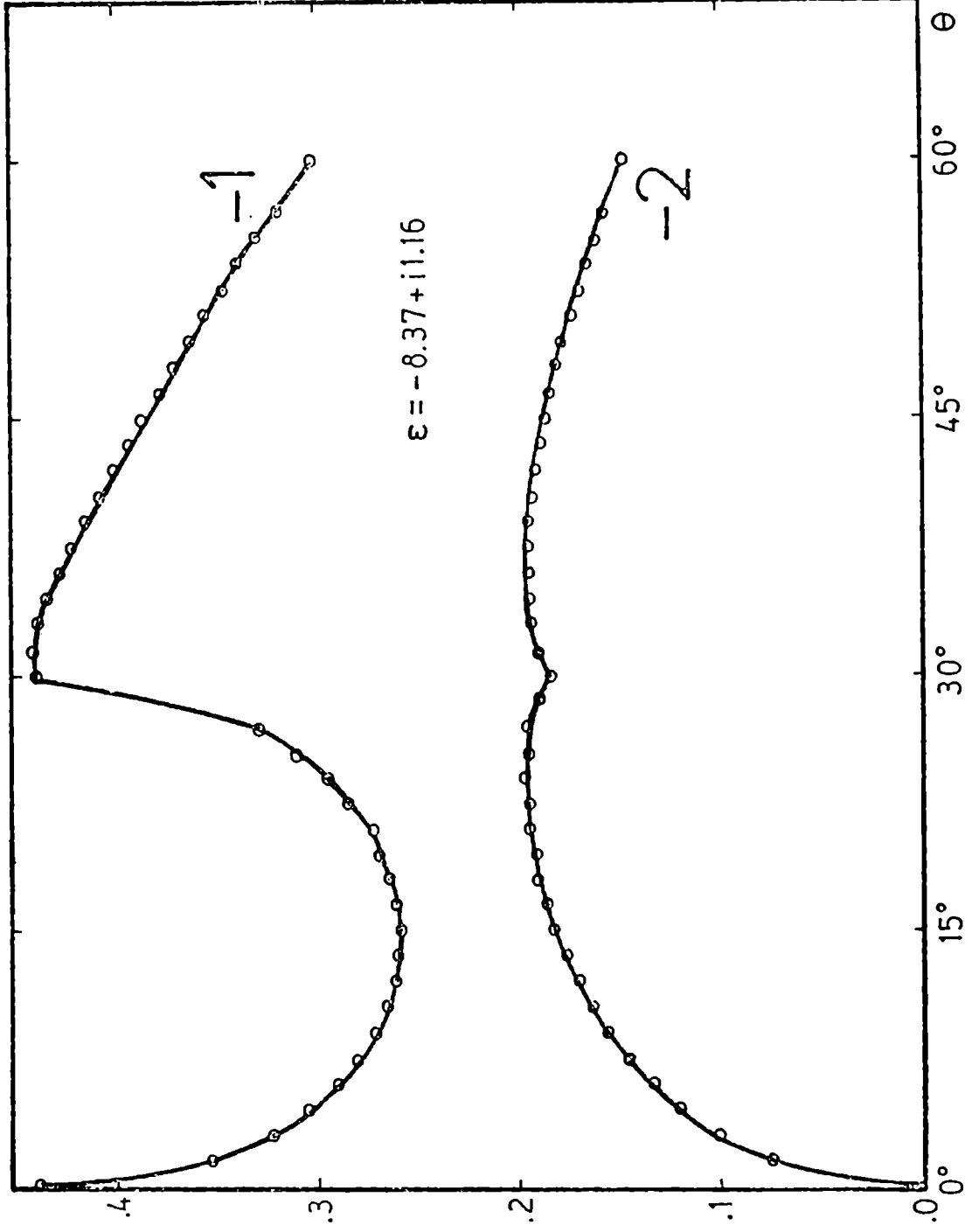


FIGURA 4.5 : Ídem Figura 4.4, órdenes -1 y -2.

IV.8.3 Aplicación del método para metales de muy alta conductividad

En la zona del espectro electromagnético correspondiente a radiación visible e infrarroja, el índice de refracción de los metales comúnmente usados como reflectores aumenta con λ , siendo la distancia de penetración de los campos dentro del metal menor que .01 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación incidente. De esta forma los campos crecen muy rápidamente desde $Y = -Y_0$ hasta $Y = Y_0$, lo que impone un límite de aplicabilidad de la teoría en altas conductividades debido al rango limitado de los números representables en una computadora. Sin embargo, se han obtenido buenos resultados con la teoría aquí desarrollada para $\epsilon = -109.74 + j 3.09$, valor correspondiente a plata en $1.47 \mu\text{m}$ y muy lejos del alcance del método diferencial usual. En las Figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 se muestran las curvas obtenidas para este valor de ϵ , siendo $h/d = .2$.

Con una programación Fortran más cuidadosa podría llegarse a valores aún más altos de $|\epsilon|$. Otro recurso para correr este límite es modificar la transformación correspondiente al espacio inferior en la forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= X - a e^{\alpha Y} \sin X \\ y &= Y + a e^{\alpha Y} \cos X \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

donde α es una constante real que permite variar el ancho de la zona modulada para $Y \leq 0$.

IV.9 Validez y aplicabilidad del nuevo método diferencial

En la forma presentada, el método de transformación conforme más no conforme da resultados rigurosos en ambos modos fundamentales de polarización y para redes dieléctricas o metálicas usadas desde el ultravioleta hasta el infrarrojo cercano, cubriendo la importante zona de los metales de interés en

óptica (aluminio, plata y oro).

Esta teoría permite tratar cualquier tipo de perfil conociendo la transformación conforme de la forma (4.3) que lleva dicho perfil a una recta. Para los perfiles echelette, o cualquier otro que sea composición de líneas rectas este es un problema muy conocido que se resuelve utilizando la transformación de Schwarz-Christoffel^{[43],[60]} que permite hallar $\frac{du}{dU}$ analíticamente. Si no se conoce la transformación conforme, es posible calcularla numéricamente; este interesante problema de matemática aplicada ha atraído recientemente la atención de investigadores provenientes de distintos campos (ver por ejemplo Referencia [61]).

Desde el punto de vista computacional, la teoría resulta ventajosa pues el tratamiento simultáneo de los dos casos de polarización permite ahorrar un gran volumen de cálculo y en consecuencia disminuir tiempos de cómputo.

La dificultad relacionada con la pequeña penetración de los campos en los metales considerados más allá de $2\mu\text{m}$ se puede solucionar mediante una transformación del tipo (4.73). Sin embargo esto no es necesario pues como veremos en el próximo Capítulo, el uso de una condición de contorno aproximada permite obtener excelentes resultados simplificando enormemente el problema aquí tratado.

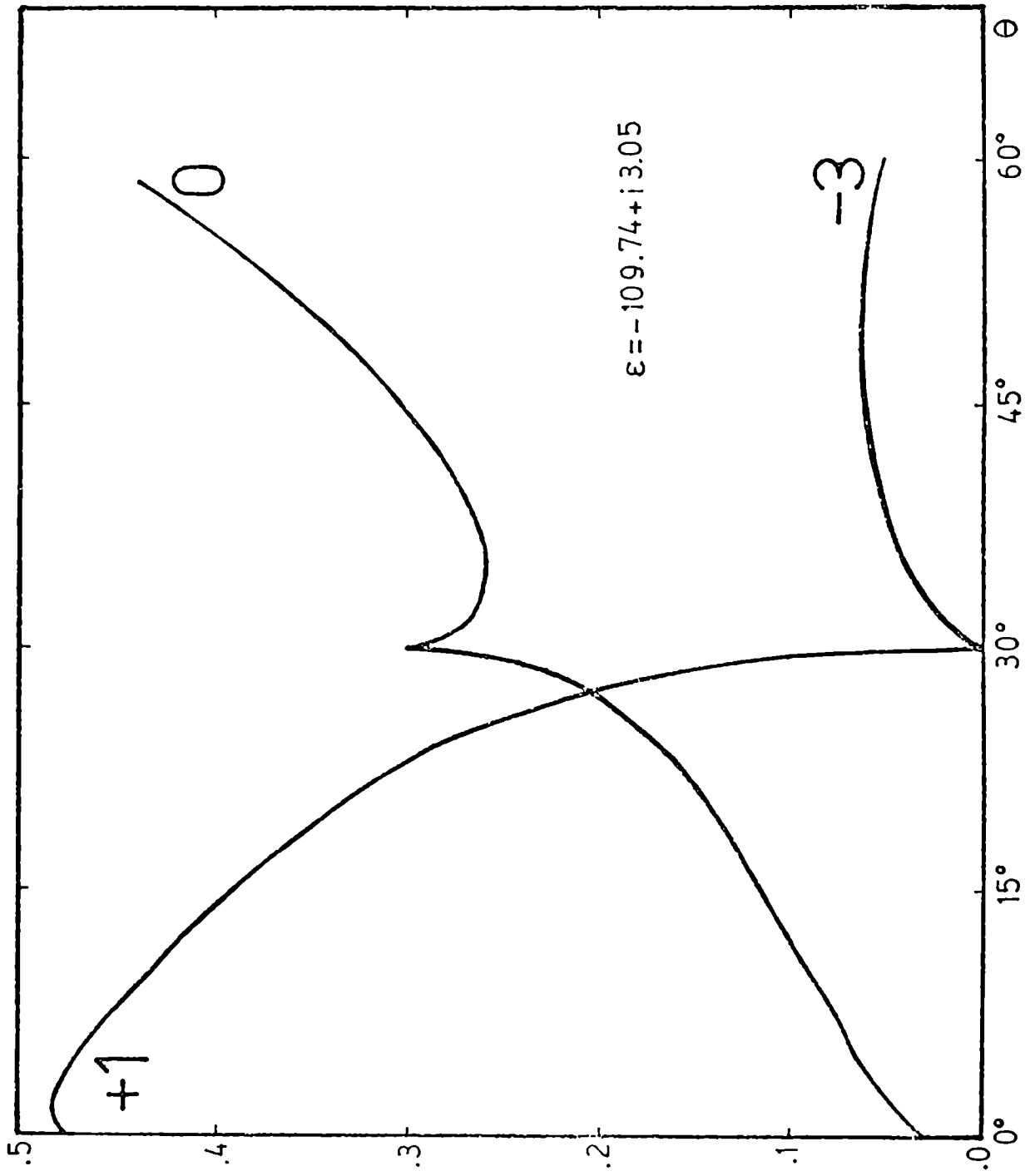


FIGURA 4.6 : Eficiencias de los órdenes +1, 0 y -3, modo E// para una red cicloidal con $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, $\epsilon = -109.74 + i 3.09$ (plata, $1,47 \mu\text{m}$), obtenidas usando el formalismo de transformación.

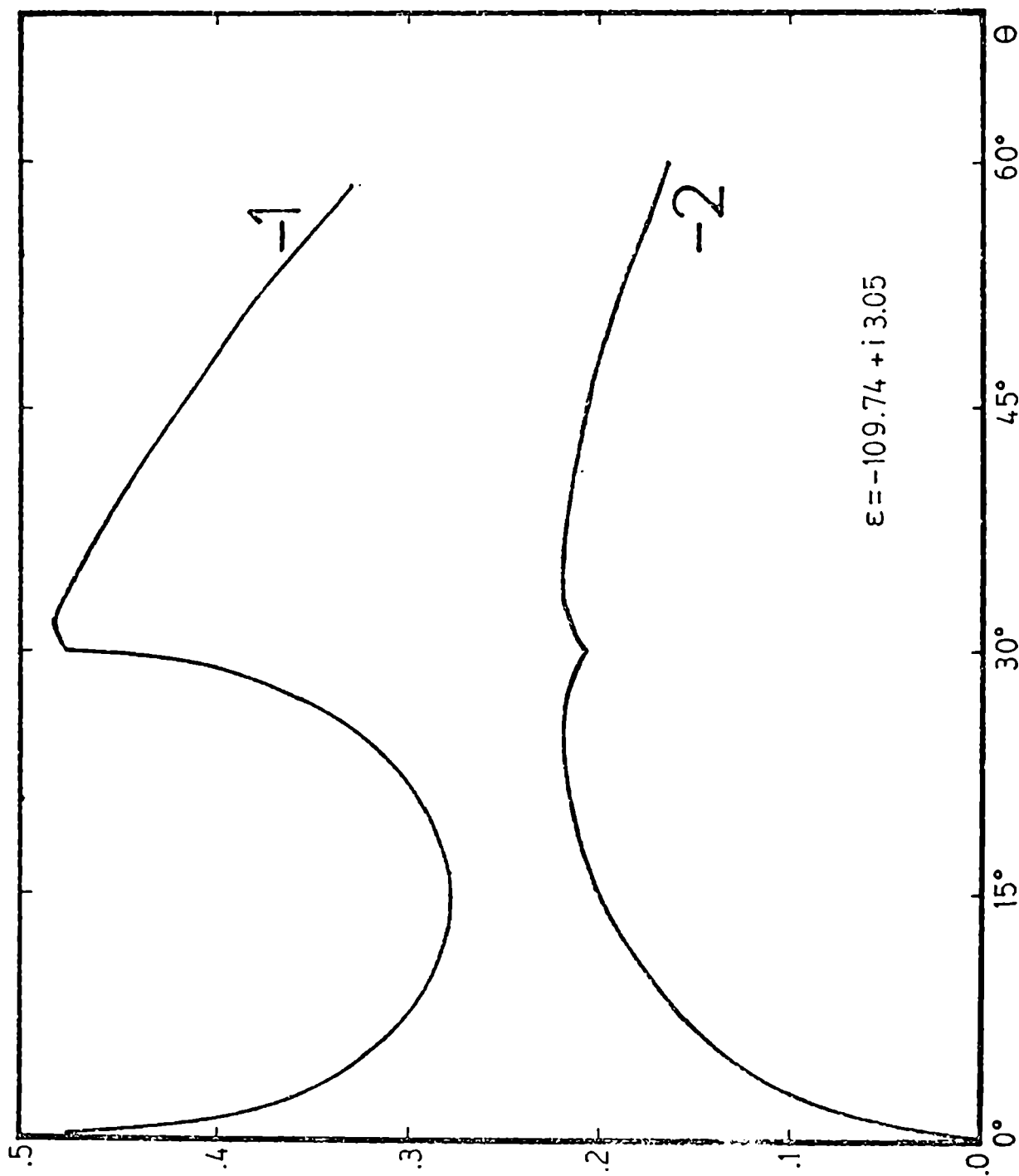


FIGURA 4.7: Ídem figura 4.7, órdenes -1 y -2.

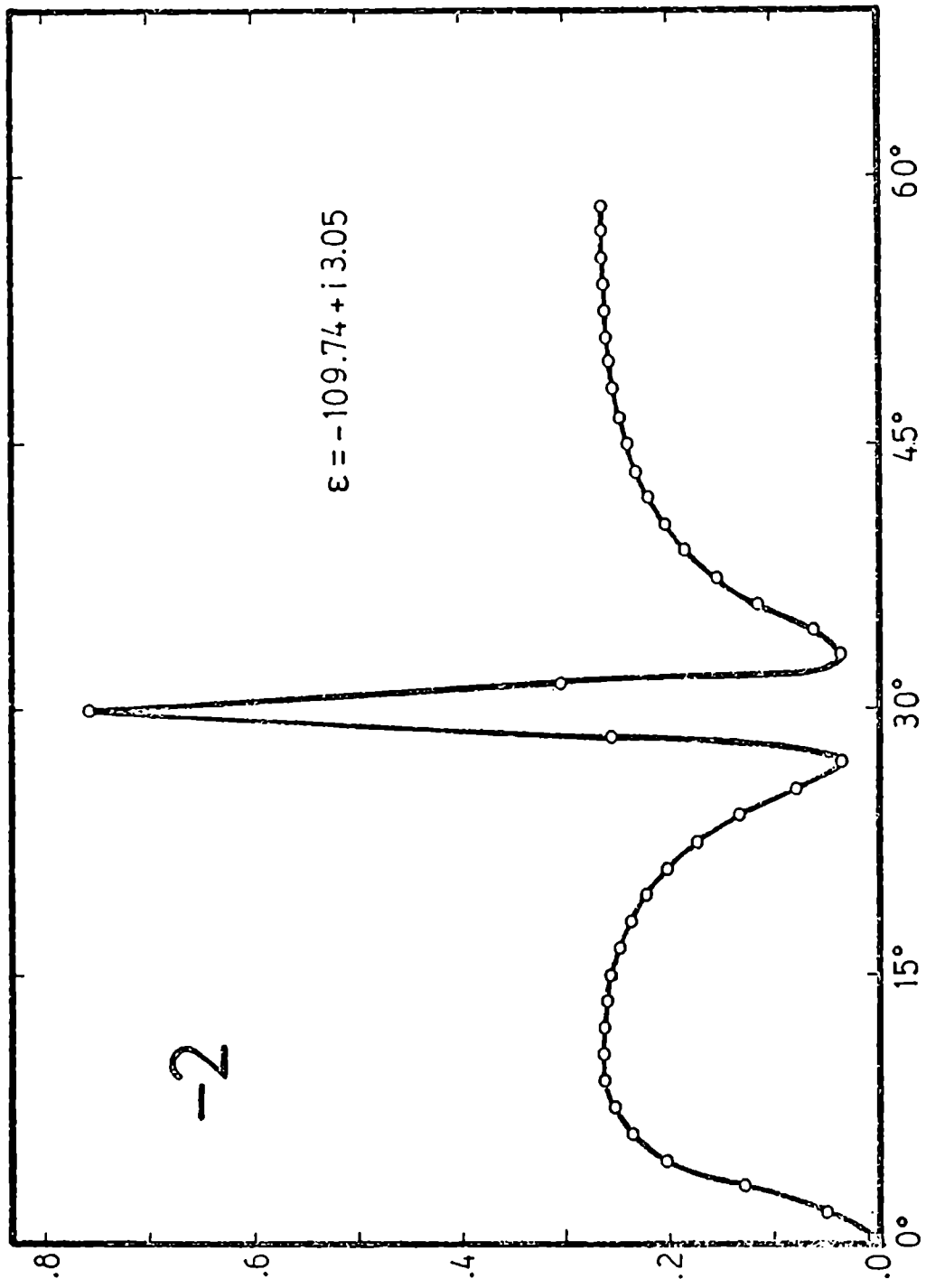


FIGURA 4.8: Eficiencia del orden -2, modo H_{11} para la red cicloidal de plata en $1,47 \mu m$ con $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, $\epsilon = -109.74 + i 3.09$, obtenidas usando el formalismo de transformación conforme y no conforme.

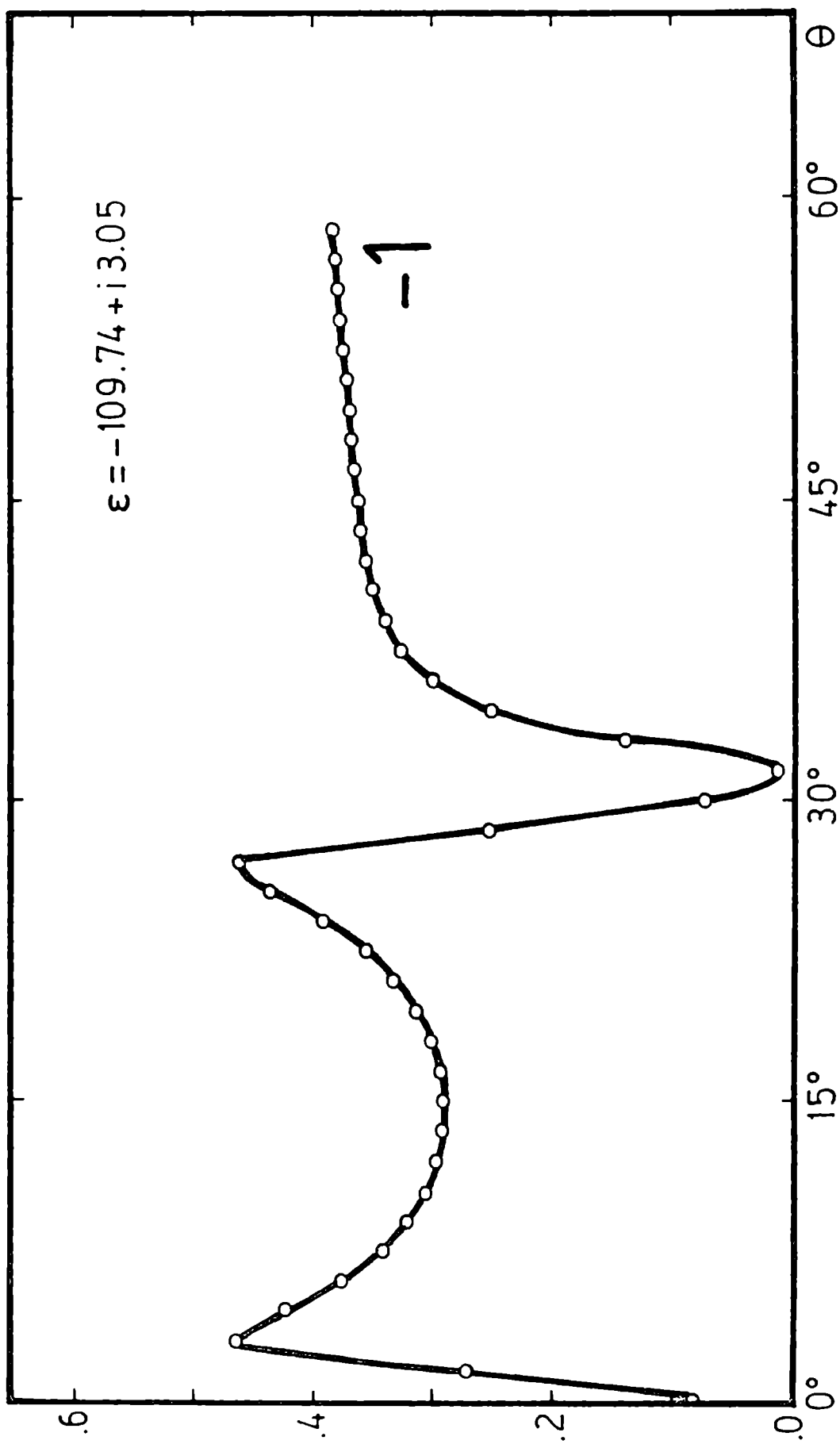


FIGURA 4.9: ídem figura 4.8, orden -1.

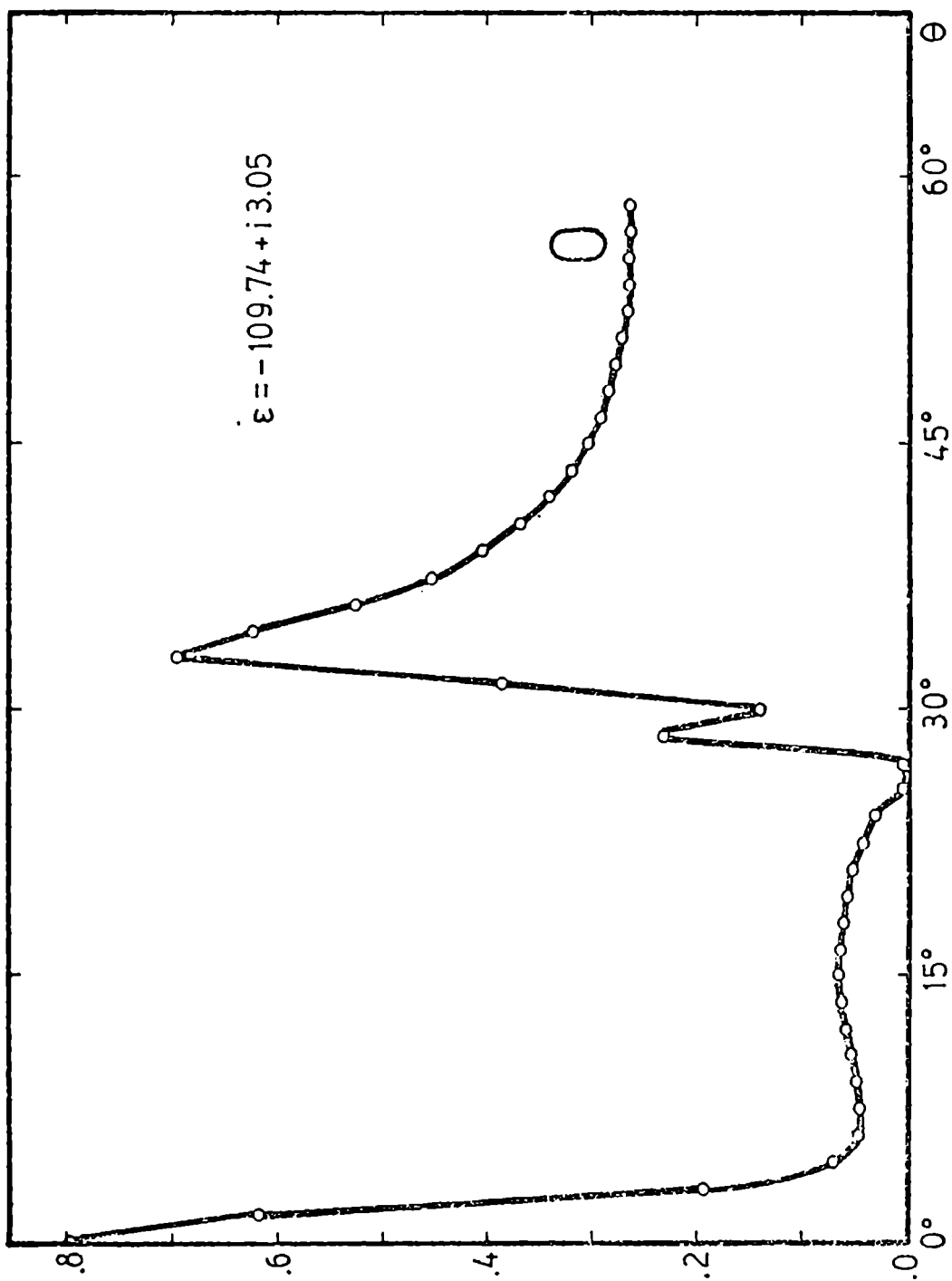


FIGURA 4.10; ídem figura 4.8, orden cero.

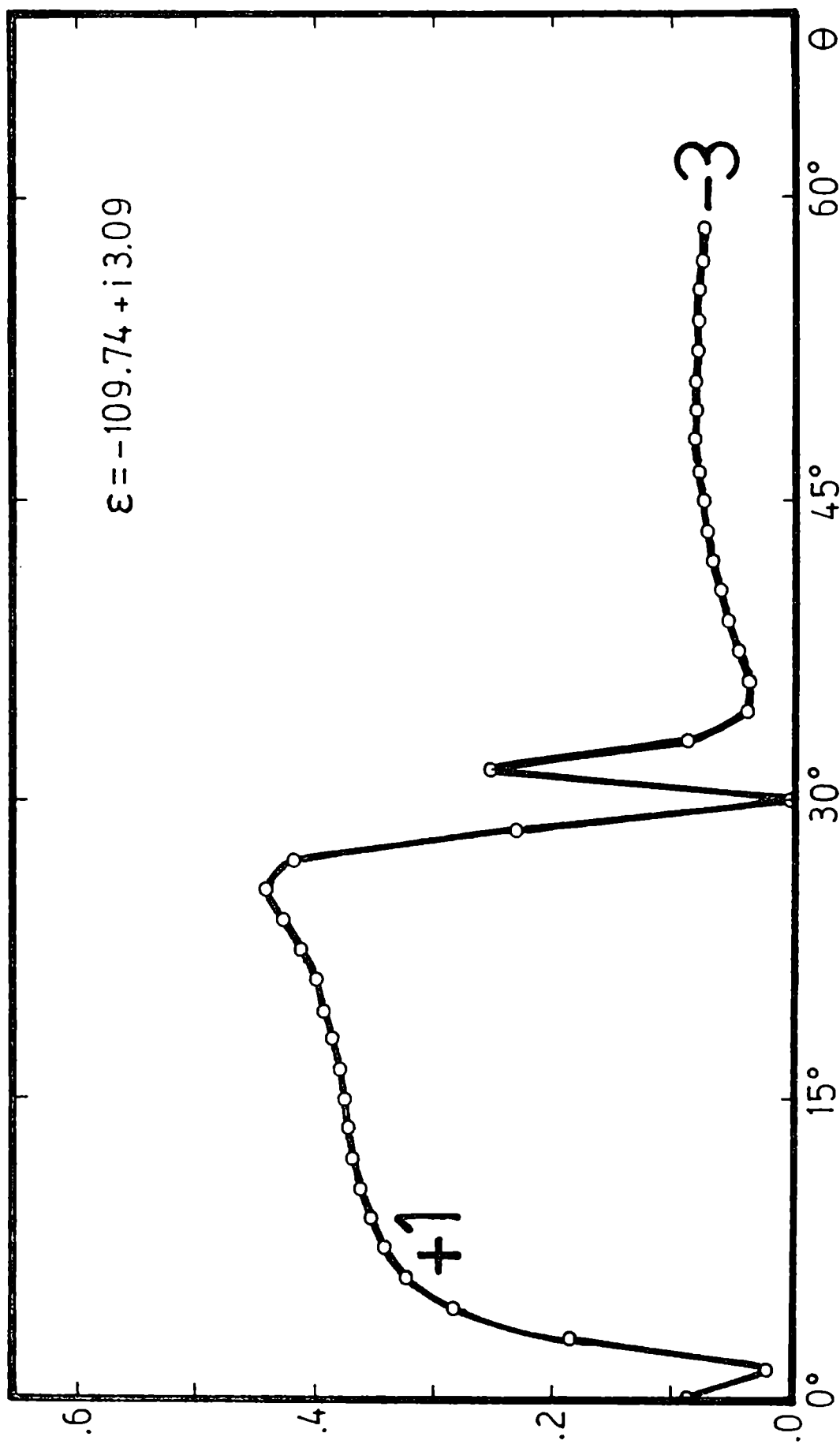


FIGURA 4.11; ídem figura 4.8, órdenes 1 y -3.

CAPITULO V

LA IMPEDANCIA CONSTANTE USADA EN EL RANGO OPTICO
PRESENTACION DE UN FORMALISMO DIFERENCIAL APROXIMADO

V. LA IMPEDANCIA USADA EN EL RANGO OPTICO: PRESENTACION DE UN FORMALISMO DIFERENCIAL APROXIMADO

Hemos visto en el Capítulo III que los métodos diferenciales usados hasta el presente poseen serios problemas numéricos relacionados con valores grandes de $|\epsilon|$, siendo incapaces de predecir el comportamiento de los campos difractados por las redes metálicas usadas en el rango óptico e infrarrojo. El nuevo método propuesto en el Capítulo IV permite tratar dichas redes hasta aproximadamente una longitud de onda de $2\mu\text{m}$; más allá de este valor aparecen problemas numéricos que se solucionan modificando la transformación empleada para el semiespacio inferior. En este Capítulo veremos que es posible emplear una condición de contorno aproximada que hace innecesaria esta modificación y que evita el cálculo de los campos dentro del metal. La aplicación de esta condición de contorno al problema de las redes da origen a un nuevo formalismo diferencial aproximado cuya validez se estudia mediante comparaciones con la teoría rigurosa.

V.1 Impedancia superficial usada como condición de contorno

Consideremos la superficie de separación entre un medio de constante dieléctrica compleja $\epsilon = \epsilon_R + i\epsilon_I$ y el vacío. Si los campos electromagnéticos en el exterior del medio son \vec{E} y \vec{H} , se suele definir como impedancia superficial del metal al número complejo $\bar{Z} = Z_R + iZ_I$ [62], [63], [64]

tal que:

$$\vec{E}_{||} = \bar{Z} \hat{m} \times \vec{H}_{||}, \quad (5.1)$$

$$Z_R \gg 0$$

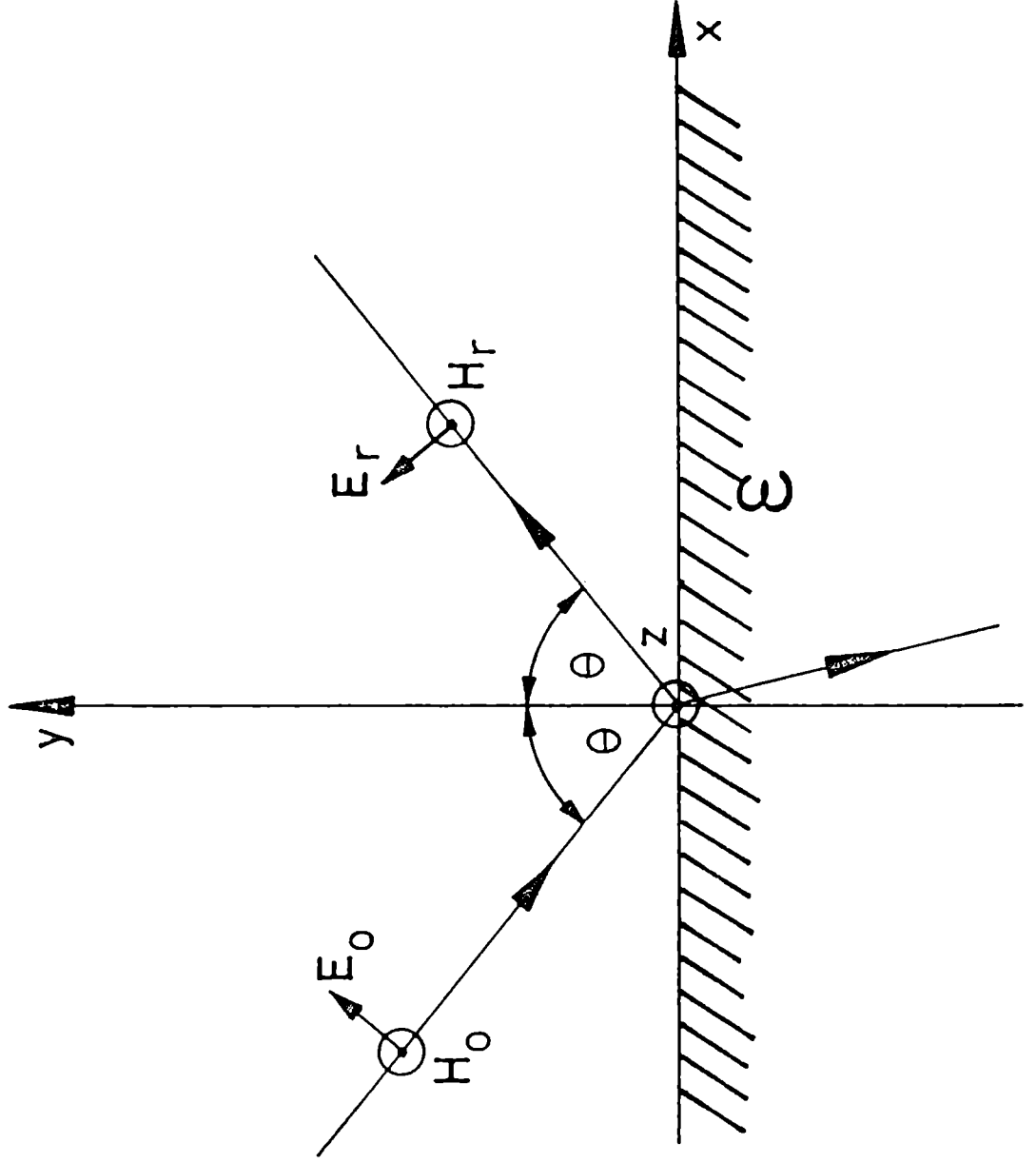


FIGURA 5.1: reflexión en una superficie plana.

donde \hat{m} es un versor en la dirección de la normal exterior al medio y $\vec{H}_{//}$ y $\vec{E}_{//}$ son las componentes paralelas a la superficie de los vectores \vec{H} y \vec{E} evaluadas sobre dicha superficie.

La impedancia así definida depende de las propiedades del medio y de la configuración de los campos. Para que resulte una condición de contorno útil es necesario que sea válido aproximar la impedancia superficial a un valor constante independiente de los campos. Con el fin de determinar las propiedades del medio que hacen válida dicha aproximación analicemos el bien conocido problema de la reflexión de una onda plana en una superficie metálica cuando el campo magnético de la onda incidente vibra en la dirección perpendicular al plano de incidencia con amplitud H_0 . La amplitud H_r de la onda reflejada viene dada por la siguiente ecuación de Fresnel:

$$\frac{H_r}{H_0} = \frac{m^2 \cos \theta - (m^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{m^2 \cos \theta + (m^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (5.2)$$

donde $m = \epsilon^{1/2} = m_R + i m_I$ es el índice de refracción complejo y θ es el ángulo de incidencia (ver Figura 5.1).

Los campos paralelos a la superficie obtenidos de las ecuaciones de Maxwell son:

$$\vec{H}_{//} = (H_0 + H_r) e^{ikx \sin \theta} e^{-i\omega t} \hat{z} \quad (5.3.a)$$

$$\vec{E}_{//} = (H_0 - H_r) \cos \theta e^{ikx \sin \theta} e^{-i\omega t} \hat{x} \quad (5.3.b)$$

La impedancia superficial calculada usando la definición (5.1) y las expresiones de los campos dadas por (5.2) y (5.3) es:

$$\bar{Z} = \frac{(m^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{m^2} = \frac{(m_R^2 - m_I^2 - \sin^2 \theta + 2im_R m_I)^{1/2}}{m_R^2 - m_I^2 + 2im_R m_I} \quad (5.4)$$

Para aquellos medios materiales cuyas constantes ópticas satisfacen la relación:

$$|\epsilon_R| = |m_R^2 - m_I^2|^2 \gg 1 \quad (5.5)$$

es posible despreciar $\sin^2 \theta$ en (5.4) por lo cual la impedancia superficial adopta la expresión aproximada:

$$\bar{Z} \approx \frac{1}{m} = \frac{m_R - im_I}{m_R^2 + m_I^2} \quad (5.6)$$

que no depende de la configuración de campos electromagnéticos y coincide con la expresión dada por Landau^[63]. Considerando la polarización \vec{E} perpendicular al plano de incidencia se obtiene la misma aproximación (5.6) para \bar{Z} . Resulta interesante comprobar que esto también es así para las ondas superficiales guiadas que se pueden propagar a lo largo de la interfase entre dos medios en ausencia de onda incidente. La impedancia superficial obtenida rigurosamente usando las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno para una superficie plana es:

$$\bar{Z} = \frac{1}{(\epsilon + 1)^{1/2}} = \frac{1}{(m^2 + 1)^{1/2}} \quad (5.7)$$

por lo cual si el medio es tal que $|m| \gg 1$, es válido suponer que dicha impedancia superficial viene dada por la expresión aproximada (5.6).

La ecuación (5.1) con Z constante puede usarse como condición de contorno; de esta forma es posible hallar los campos externos sin necesidad de considerar los campos en el interior del medio de constante ϵ . El uso de la condición de contorno con impedancia superficial constante fue sugerido por primera vez por M.A. Leontovich y ha sido aplicado exitosamente en problemas de radiopropagación^{[46],[47]} donde se satisface muy bien la desigualdad (5.5).

V.2 Aplicación en el rango óptico e infrarrojo

Los metales comúnmente usados en la zona del espectro correspondiente a radiación visible e infrarroja satisfacen con mayor o menor aproximación, la relación (5.5) como se muestra en la Figura 5.2 donde se ha graficado $|\epsilon_R|$ calculado a partir de las constantes ópticas dadas en las tablas compiladas por Hass^[53] para oro, aluminio y plata.

L.D. Landau afirma en Ref. [65] que el uso de (5.1) como condición de contorno deja de valer para frecuencias ópticas. Sin embargo de la Figura 5.2 se ve que en el rango óptico la condición de contorno $Z = cte.$ sigue siendo válida para algunos metales, justamente aquellos que resultan de interés para lograr buena reflectividad.

En la Figura 5.3 se muestra a título de ejemplo, la amplitud y fase de la onda reflejada en función del ángulo de incidencia para la plata, calculadas mediante la aproximación $Z = cte.$ y la fórmula de Fresnel (5.2) en $\lambda = 400 \text{ nm}$ ($n = .075 + i1.93$). A pesar que este valor de n es el más desfavorable en todo el rango visible podemos observar un buen acuerdo en amplitud y fase.

Estos hechos sugieren que la condición de impedancia superficial constante es una buena aproximación para resolver ciertos problemas de contorno en la zona del espectro visible infrarrojo, razón por la cual veremos

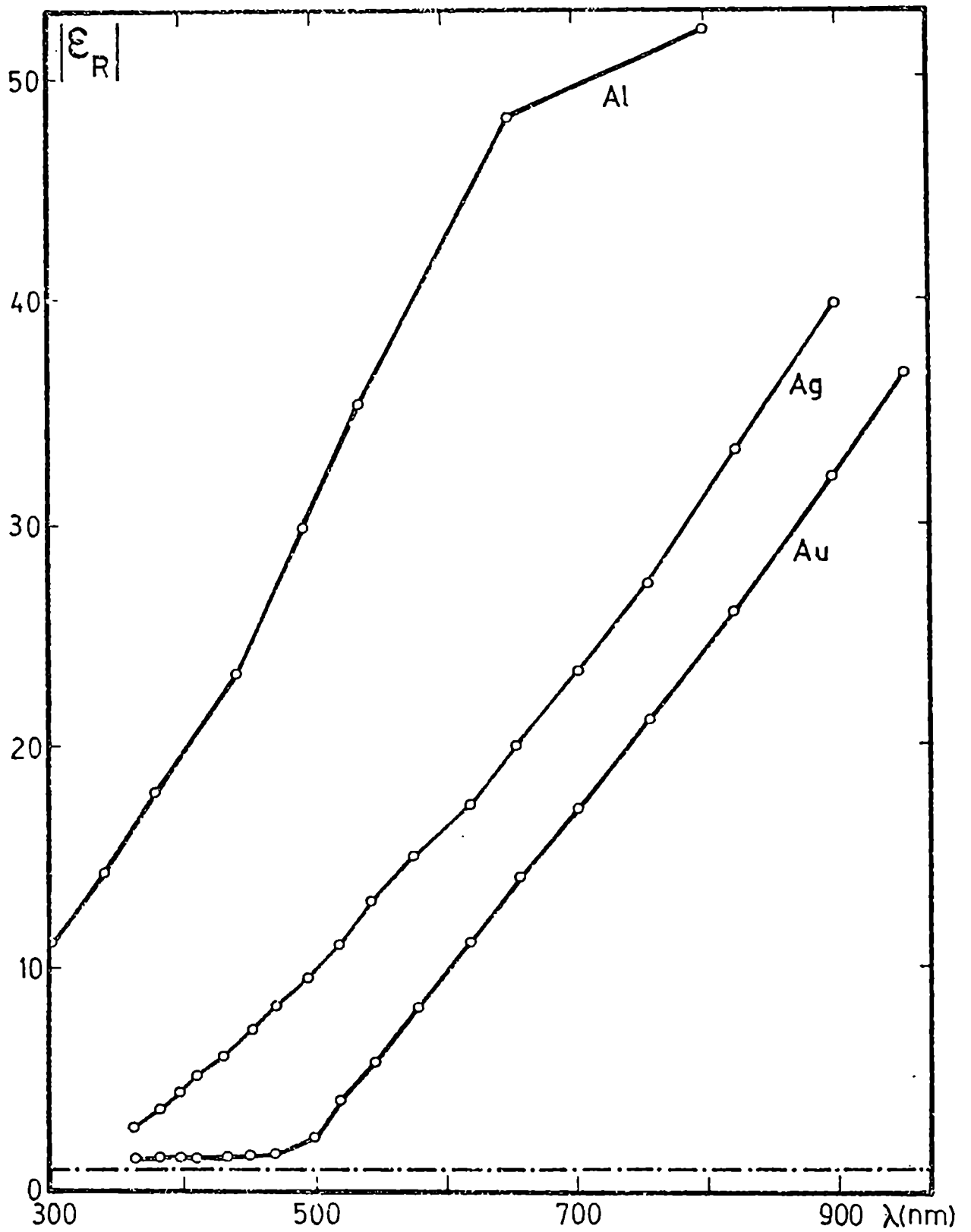


FIGURA 5.2 : Comportamiento del módulo de la parte real de la permitividad ϵ en la zona del espectro visible e infrarrojo para aluminio, oro y plata.

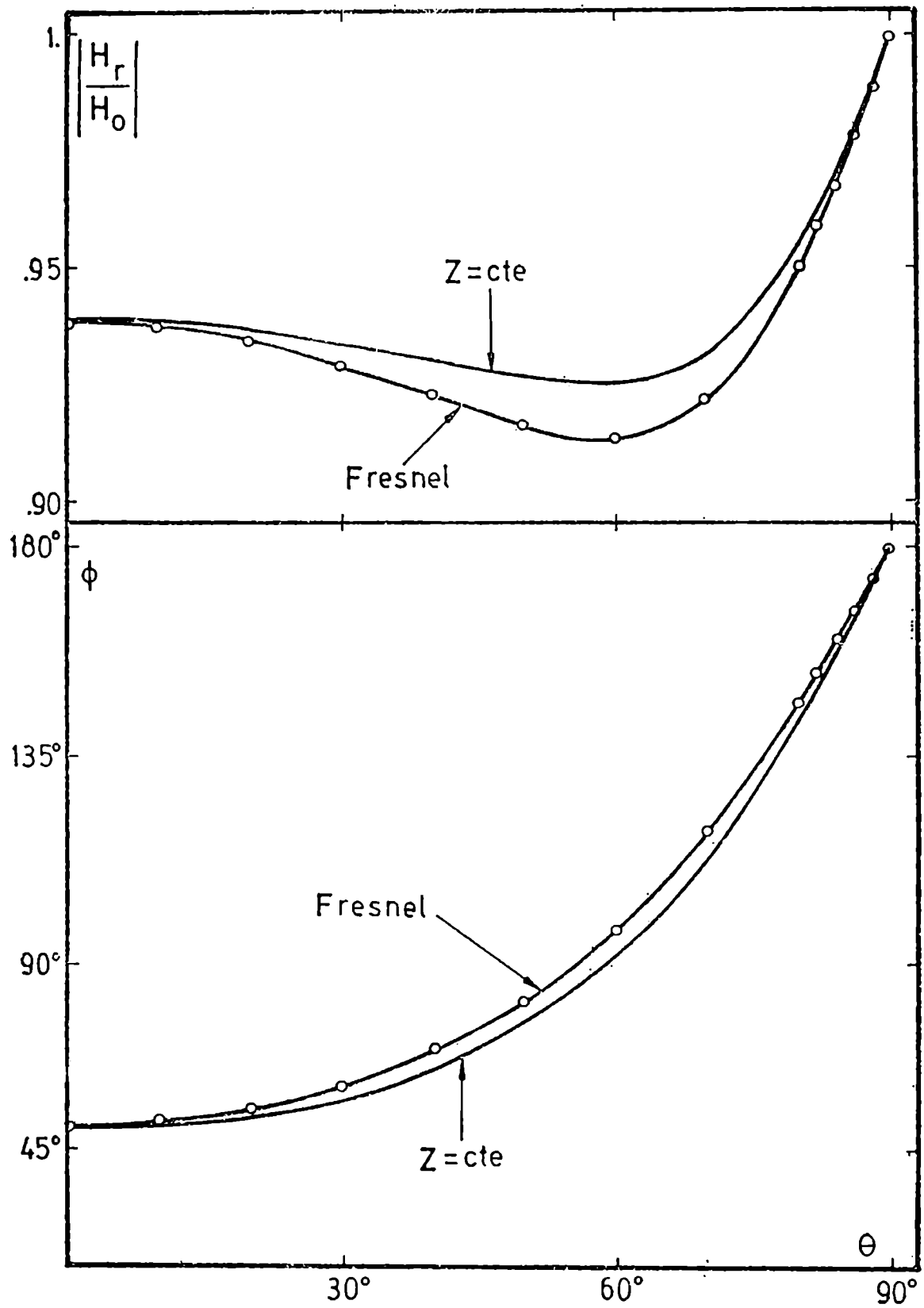


FIGURA 5.3 : Módulo y fase de la amplitud de la onda reflejada en función del ángulo de incidencia para una superficie plana y \vec{E} en el plano de incidencia, calculadas usando la aproximación de impedancia superficial constante y la fórmula de Fresnel. La interfase es aire-plata en $\lambda = 400 \text{ nm}$ ($\epsilon = .075 + j.1.93$).

a continuación cómo aplicarla al problema de la red de difracción metálica.

V.3 Formulación del problema de la red usando $Z = \text{cte}$

La propiedad más interesante de (5.1) usada como condición de contorno es que permite obviar el cálculo de los campos dentro del metal y así el problema de la red se reduce notablemente. Los campos deben satisfacer:

- a) la ecuación de ondas (2.13.a), b) la condición de ondas salientes (2.14.a),
- c) la condición de pseudoperiodicidad. El par de condiciones de contorno (2.18) (2.19) será reemplazado por una condición del tipo (5.1) que determinaremos para cada modo.

V.3.1 Caso $\vec{E} //$

En este modo $\vec{E} = f(x, y) \hat{z}$ y el campo magnético se obtiene de la ley de Faraday:

$$\vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}}{ik} = \frac{\vec{\nabla} f \times \hat{z}}{ik}$$

Definiendo un versor $\hat{t} = \hat{m} \times \hat{z}$ paralelo a la curva $y = g(x)$ podemos proyectar el gradiente en las direcciones \hat{m} , \hat{t} y \hat{z} y obtener:

$$\vec{H} = \frac{1}{ik} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \hat{m}} \hat{t} - \frac{\partial f}{\partial \hat{t}} \hat{m} \right\} \quad (5.8)$$

Con estas expresiones de \vec{E} y \vec{H} la condición de contorno (5.1) queda:

$$f(x, g(x)) = \frac{Zi}{k} \frac{\partial f(x, g(x))}{\partial \hat{m}} \quad (5.9)$$

V.3.2 Caso $H//$

Para este caso de polarización $\vec{H} = f(x, y) \hat{z}$, el campo eléctrico se obtiene de la ley de Ampère-Maxwell:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{\nabla} \times \vec{H}}{ik} = \frac{i}{k} \vec{\nabla} f \times \hat{z};$$

y proyectando en la base \hat{m} , \hat{t} , \hat{z} :

$$\vec{E} = \frac{i}{k} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \hat{m}} \hat{t} - \frac{\partial f}{\partial \hat{t}} \hat{m} \right\} \quad (5.10)$$

con lo cual la condición de contorno correspondiente es:

$$\frac{\partial f(x, q(x))}{\partial \hat{m}} = \frac{Z k}{i} f(x, q(x)) \quad (5.11)$$

Debe notarse que cuando $Z=0$ tanto (5.9) como (5.11) se reducen a las condiciones de contorno en una superficie perfectamente conductora.

V.4 Presentación de un nuevo formalismo diferencial aproximado

Hemos visto que la transformación conforme (4.3) que lleva el perfil de la red a una recta conserva las condiciones de pseudoperiodicidad y de radiación, y que transforma la ecuación de ondas en la ecuación (4.4). Por estas razones el uso de dicha transformación para tratar el problema de la red con la condición de contorno aproximada conducirá a un tratamiento muy similar al presentado en el Capítulo III para la zona $y > q(x)$ debiendo sólo estudiar cómo se transforman bajo (4.3) las condiciones de contorno en $y = q(x)$. De acuerdo con (4.20):

$$\frac{\partial F(x,0)}{\partial Y} = \left. \frac{du}{dU} \right|_{Y=0} \frac{\partial f(x, g(x))}{\partial \hat{u}} \quad (5.12)$$

por lo cual las condiciones de contorno en $Y=0$ son:

$$\frac{\partial F(x,0)}{\partial Y} = \frac{kZ}{i} \left. \frac{du}{dU} \right|_{Y=0} F(x,0) \quad (\text{modo S}) \quad (5.13.a)$$

$$F(x,0) = \frac{Z}{ik} \left. \frac{du}{dU} \right|_{Y=0}^{-1} \frac{\partial F(x,0)}{\partial Y} \quad (\text{modo P}) \quad (5.13.b)$$

Estas condiciones pueden proyectarse sobre la base formada por las funciones de Rayleigh $\{e^{i\alpha_m x}\}$ obteniéndose:

$$F_m(0) = \frac{Z}{ik} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_{mm}^P \frac{dF_m(0)}{dY} \quad (\text{modo P}) \quad (5.14.a)$$

$$\frac{dF_m(0)}{dY} = \frac{kZ}{i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_{mm}^S F_m(0) \quad (\text{modo S}) \quad (5.14.b)$$

donde se han definido los siguientes elementos de matriz que solo dependen de la geometría de la red:

$$M_{mm}^P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left. \frac{du}{dU} \right|_{Y=0}^{-1} e^{i(m-m')x} dx \quad (5.15.a)$$

$$M_{mm}^S = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{du}{dU} \right|_{Y=0} e^{i(m-m)X} dX \quad (5.15.b)$$

Resumiendo: el problema de la red con la condición de contorno aproximada se reduce a calcular las funciones $F_m(Y)$ definidas ahora en el intervalo $[0, Y_0]$ y que son solución del sistema (4.30) de ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones en ambos extremos del intervalo de integración; en $Y=0$ deben satisfacer las condiciones de contorno aproximadas (5.14) y en $Y=Y_0$ deben satisfacer la condición (4.44) de empalme con los desarrollos de Rayleigh. Una vez obtenidos los valores de $F_m(Y_0)$ las amplitudes de los órdenes difractados se calculan mediante (4.46). Cuando el metal es ideal, la impedancia superficial es nula y las condiciones de contorno (5.14) hacen que este nuevo formalismo diferencial aproximado se reduzca al formalismo riguroso desarrollado por Nevier^[41] para conductividad infinita.

V.5 Conservación de la energía

Alterando levemente algunos detalles de la demostración realizada en la sección 6 del Capítulo IV es posible demostrar que los campos obtenidos mediante el nuevo formalismo aproximado satisfacen las siguientes igualdades: para el modo P :

$$\sum_{m \in \mathcal{U}} \frac{\varphi_m^{(1)}}{\varphi_0^{(1)}} |R_m|^2 - \frac{Z_R}{k \varphi_0^{(1)}} \sum_{m, m = -N}^N \overline{F_m'(0)} M_{mm}^P F_m'(0) = 1 \quad (5.16.a)$$

y para el modo S

$$\sum_{m \in \mathcal{U}} \frac{\varphi_m^{(1)}}{\varphi_0^{(1)}} |R_m|^2 + \frac{k Z_R}{\varphi_0^{(1)}} \sum_{m, m=-N}^N \overline{F_m(0)} M_{mm}^S F_m(0) = 1 \quad (5.16.b)$$

El primer término de (5.16) es la suma de las eficiencias de los órdenes difractados. Empleando el vector de Poynting como en IV.6 podemos identificar el segundo término de (5.16) como el cociente entre la potencia media absorbida en el metal y la potencia media incidente, por período. Vemos entonces que el método propuesto en este Capítulo verifica el principio de conservación de la energía cualquiera sea el número de términos empleados para describir los campos; aún cuando este número sea inferior al número de órdenes propagantes y a pesar de que la condición de contorno con impedancia es una condición aproximada.

V.6 Resultados obtenidos: comparación con el formalismo riguroso

Trataremos con el método de impedancia superficial constante el caso de redes cicloidalas cuyo perfil está dado por (4.65); la transformación conforme es:

$$\frac{du}{dU} = 1 - a e^{iU} \quad (5.17)$$

entonces:

$$\left| \frac{du}{dU} \right|^2 = 1 + a^2 e^{-2Y} - a e^{-Y} (e^{iX} + e^{-iX}) \quad (5.18)$$

Para implementar este método se han desarrollado dos programas Fortran: ZECA (para $E_{//}$) y ZHCA (para $H_{//}$). Los resultados numéricos obtenidos

mediante estos programas se comparan con aquellos obtenidos mediante la teoría rigurosa. En todos los casos $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, $N = 4$, $Y_0/d = 1$ y el número de pasos de integración es $J = 120$. Los valores de los parámetros N , Y_0 y J se determinaron estudiando la convergencia de los resultados ya que el formalismo satisface siempre los criterios de reciprocidad y conservación de la energía.

En las Figuras 5.4-5.9 se muestra la comparación para el modo $E//$ y para distintos valores de la constante compleja ϵ . Para el oro en $\lambda = 550$ nm $\epsilon_R = -5.28$, (Figuras 5.4 y 5.5) las curvas obtenidas usando las teorías aproximadas y exacta reproducen el mismo comportamiento cualitativo observándose una discrepancia relativa del 10% en el peor de los casos. Esta discrepancia disminuye cuando consideramos redes con mayor valor de $|\epsilon_R|$; por ejemplo, para oro en $\lambda = 700$ nm ($\epsilon_R = -14.73$) como se muestra en las Figuras 5.6 y 5.7. En las Figuras 5.8 y 5.9 se muestra una situación intermedia: oro en 600 nm con $\epsilon_R = -8.37$. Ambas teorías concuerdan mejor aún en el caso $\lambda = 1.47$ μm , $\epsilon_R = -109.74$ (plata) como se muestra en las Figuras 5.10 y 5.11.

En las Figuras 5.12-5.23 se muestran las comparaciones hechas para el modo $H//$ volviéndose a observar que las diferencias entre las teorías comparadas disminuye cuando más nos aproximamos a la zona de alta conductividad. En el caso $\epsilon_R = -109.74$ las diferencias relativas son siempre del orden del 1%, por esta razón en las Figuras 5.20-5.23 se han graficado solamente las curvas obtenidas con $Z = \text{cte}$, para dicho metal y para conductor perfecto ($Z=0$). Resulta interesante comprobar que a pesar de que la reflectividad de la plata en esta zona es muy alta (99.1%), la teoría de conductor perfecto no es adecuada para predecir el comportamiento de los campos difractados.

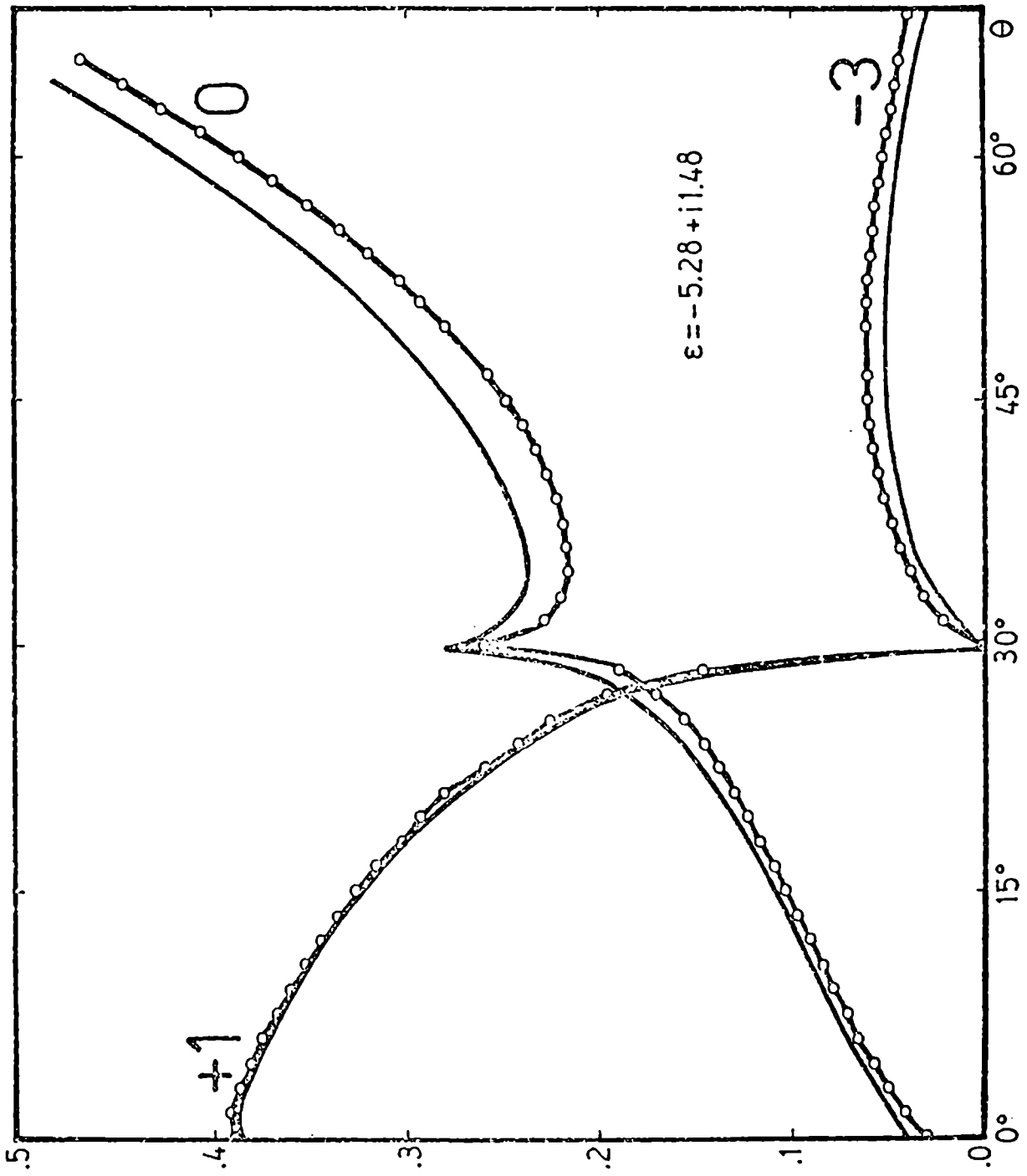


FIGURA 5.4 : Comparación entre las teorías aproximada ($Z = cte$, círculos) y rigurosa (transformación conforme y no conforme, curva continua) para $E//$, red cicloidial, $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, $E_k = -5.28$, órdenes +1, 0 y -3.

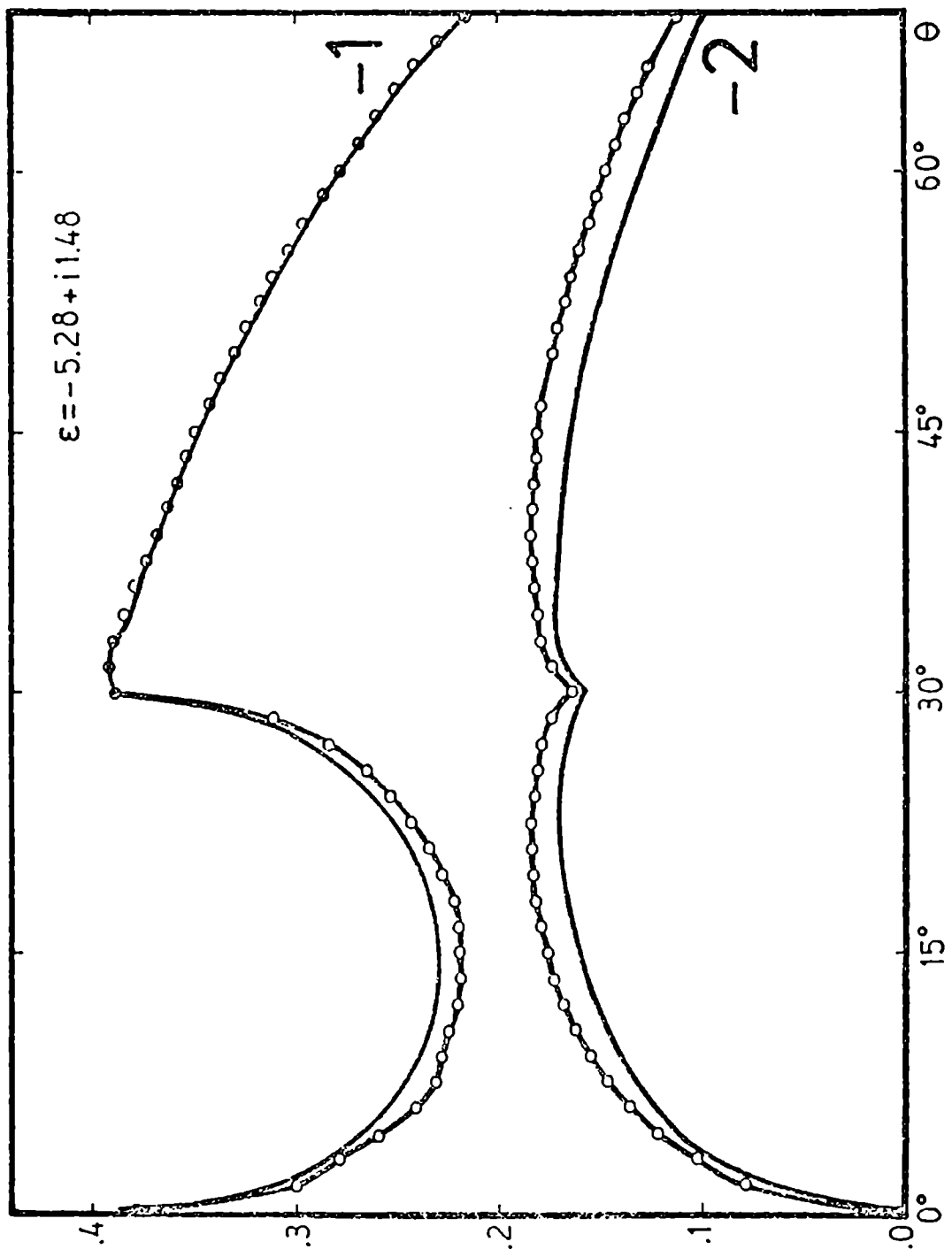


FIGURA 5.5: ídem figura 5.4, órdenes -1 y -2.

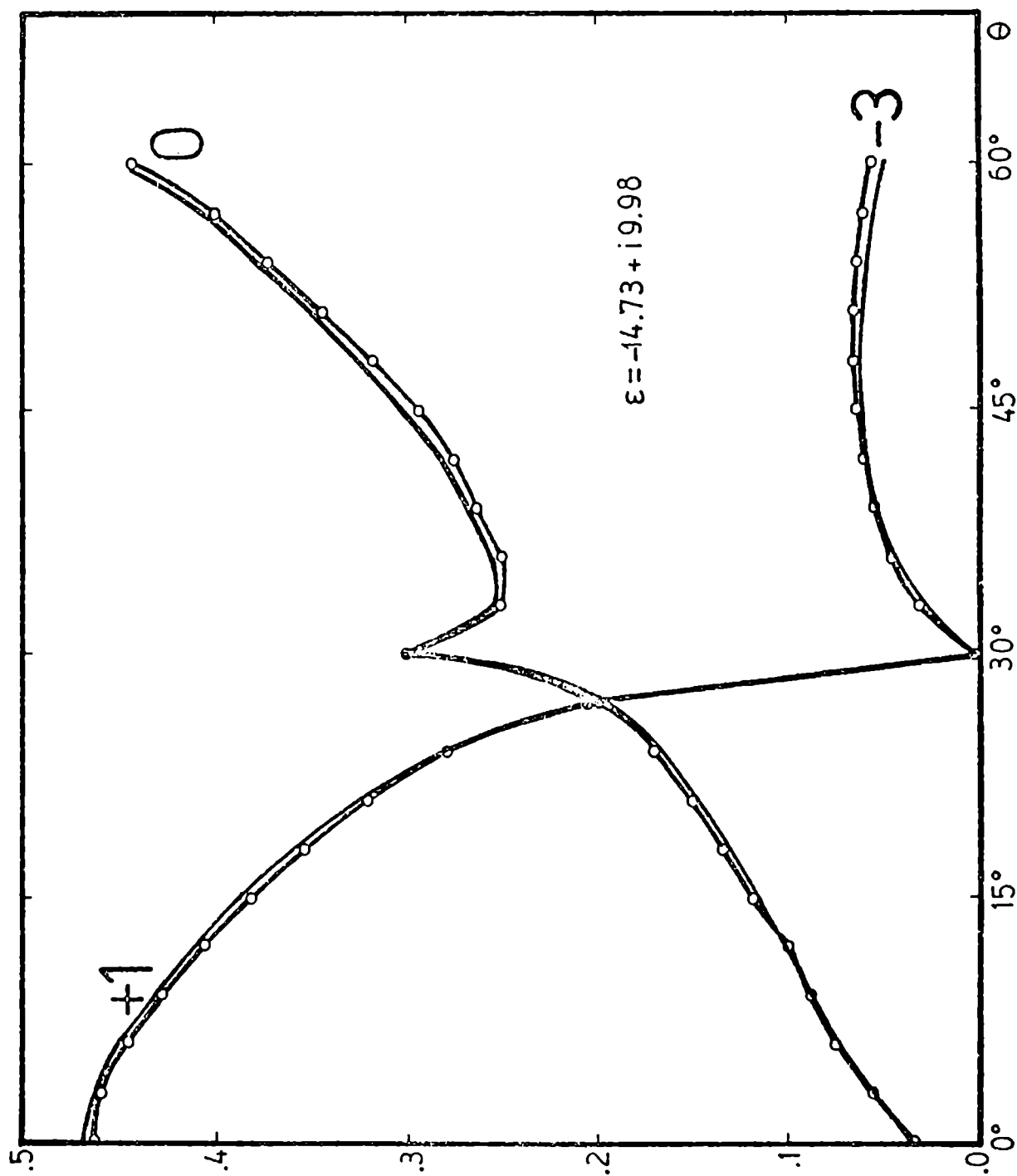


FIGURA 5.6 : Comparación entre las teorías aproximada ($\bar{z} = \text{cte}$, círculos) y rigurosa (transformación conforme y no conforme, curva continua) para $E//$, red ciclotoidal, $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, $\epsilon_R = -14.73$, órdenes +1, 0 y -3.

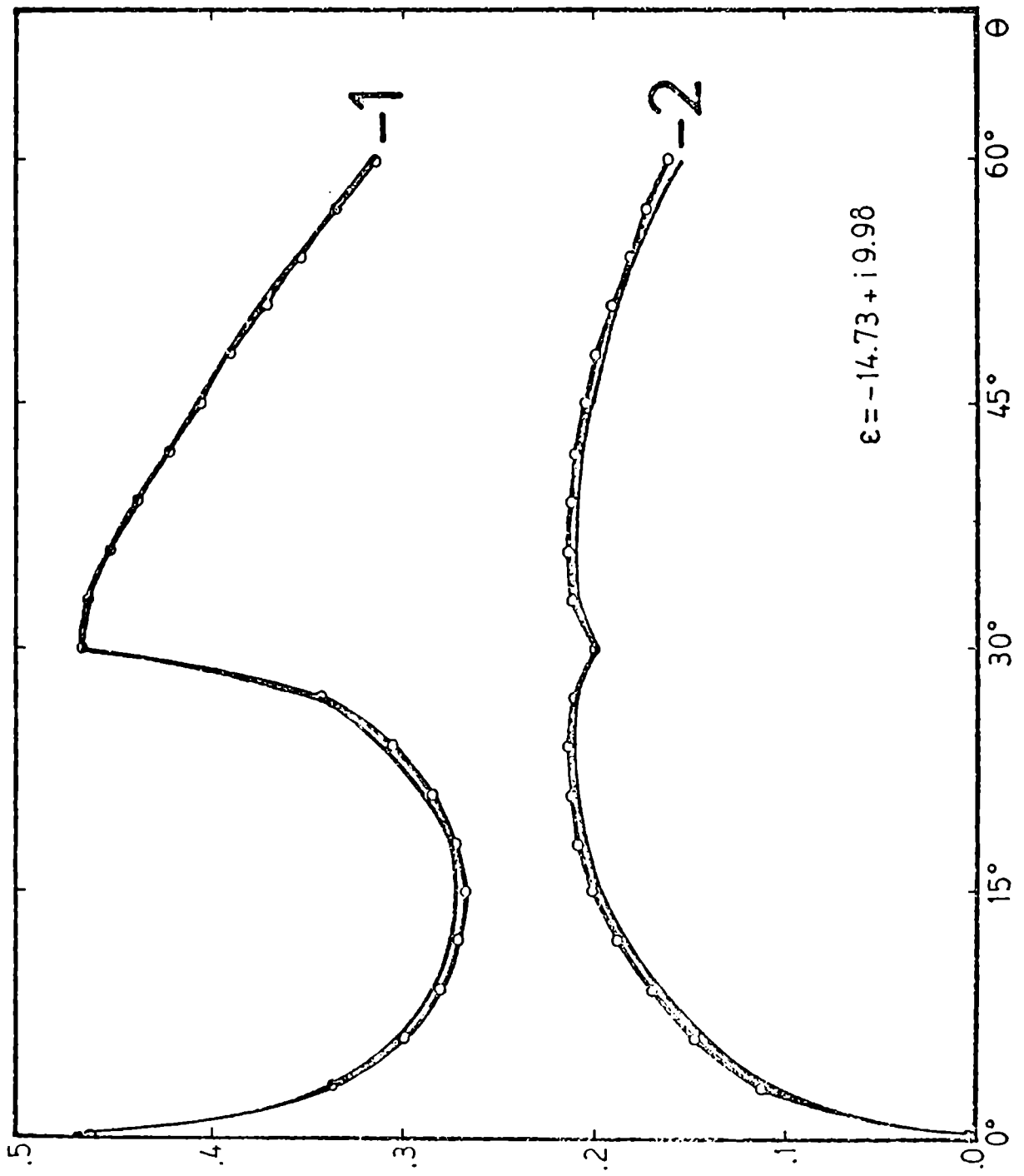


FIGURA 5.7: Ídem figura 5.6, órdenes -1 y -2.

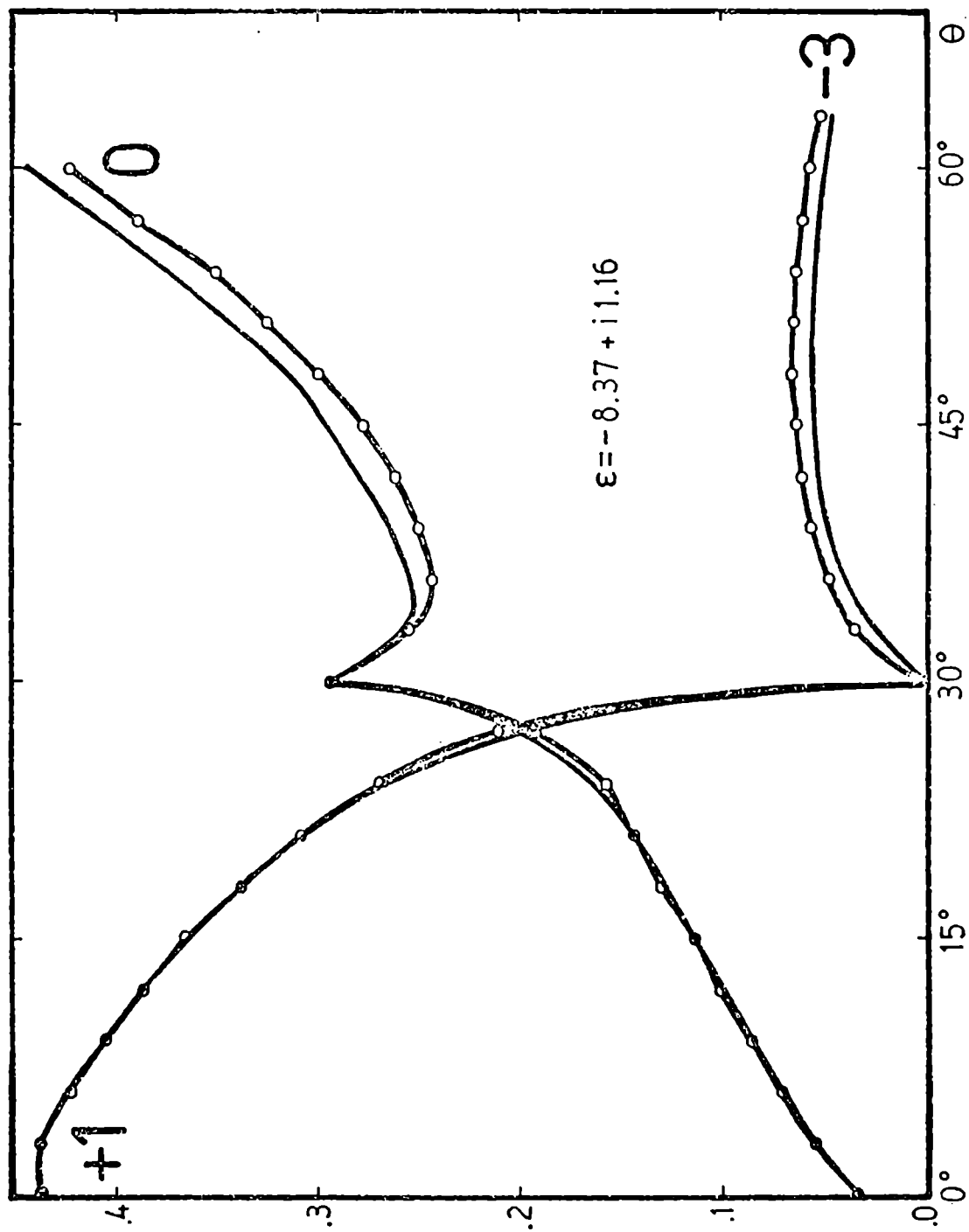


FIGURA 5.8 : Comparación $Z = cte$ (círculos) vs. transformación conforme más no conforme (curva continua), modo $E//$ para $\epsilon_R = -8.37$; órdenes $+1$, 0 y -3 , los parámetros restantes son los mismos que en Fig. 5.6.

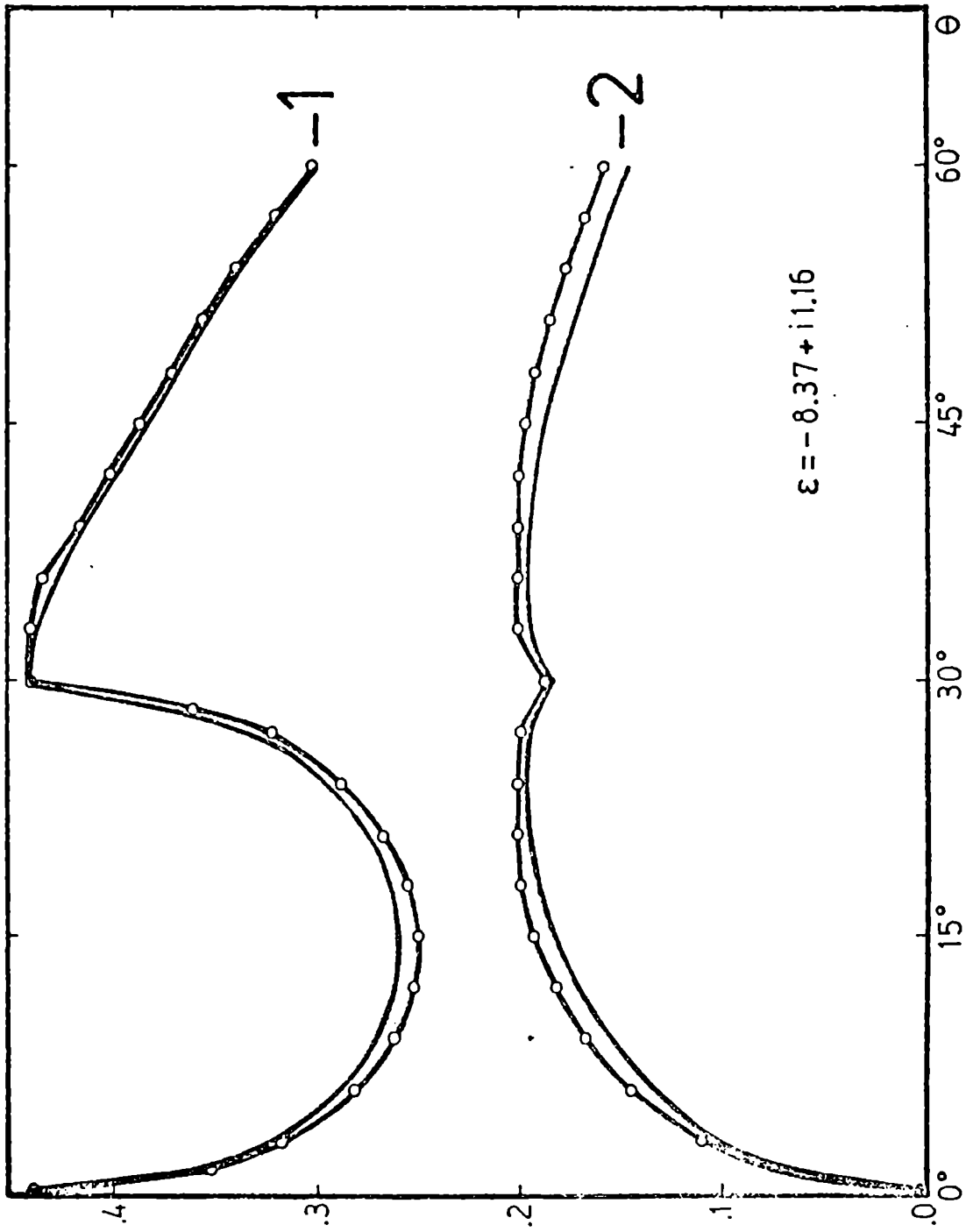


FIGURA 5.9: Ídem figura 5.8, órdenes -1 y -2.

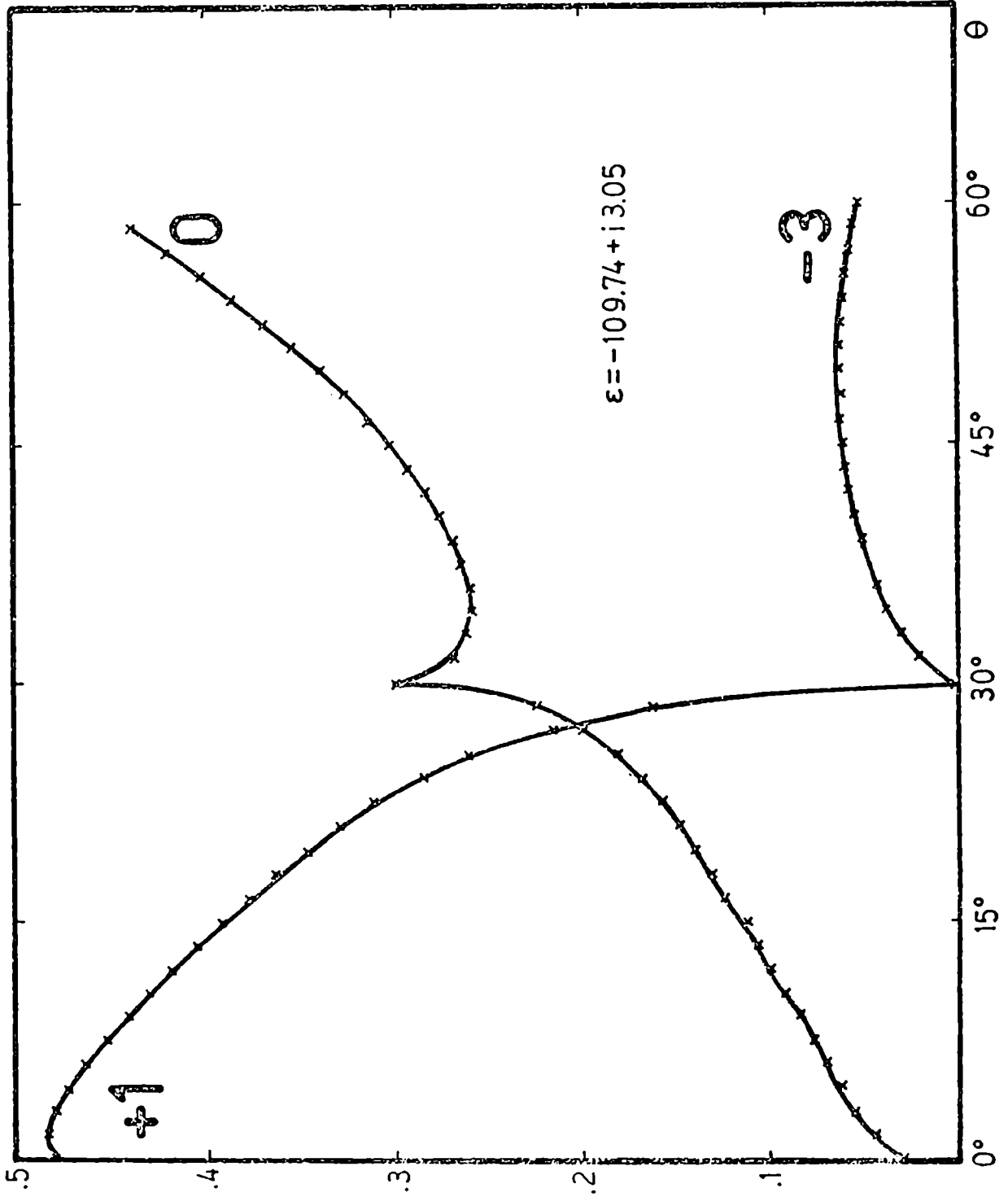


FIGURA 5.10: Comparación $Z = cte$ (curvas) vs. transformación conforme más no conforme, (curva continua) modo $E//$ para $\epsilon_R = -109.74$, $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, órdenes +1, 0 y -3.

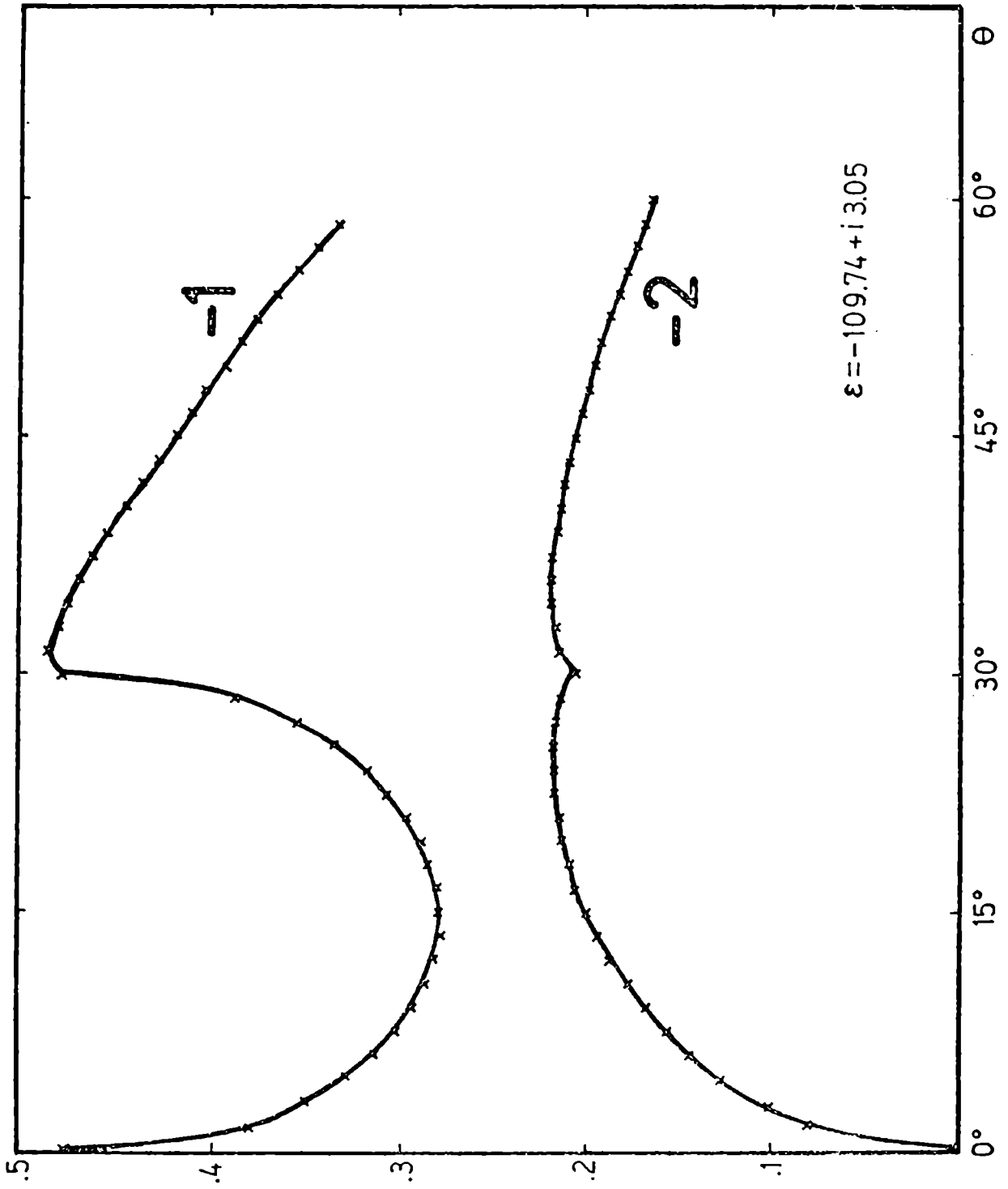


FIGURA 5.11: Idem figura 5.10, órdenes -1 y -2.

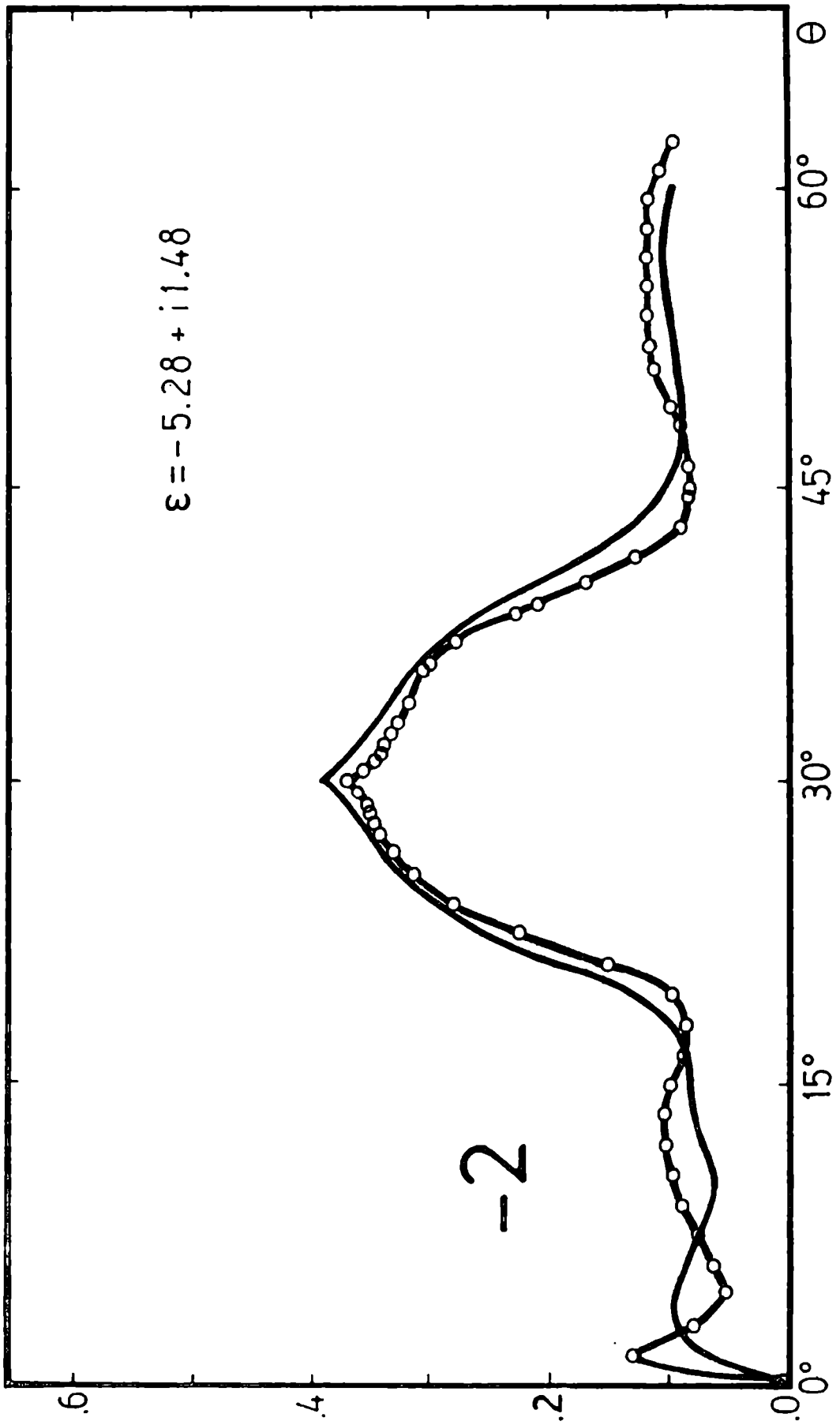


FIGURA 5.12: Comparación $Z = \text{cte}$ (círculos) vs. transformación conforme más no conforme (curva continua) modo $H//$, $\epsilon_R = -5.28$, $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, orden -2.

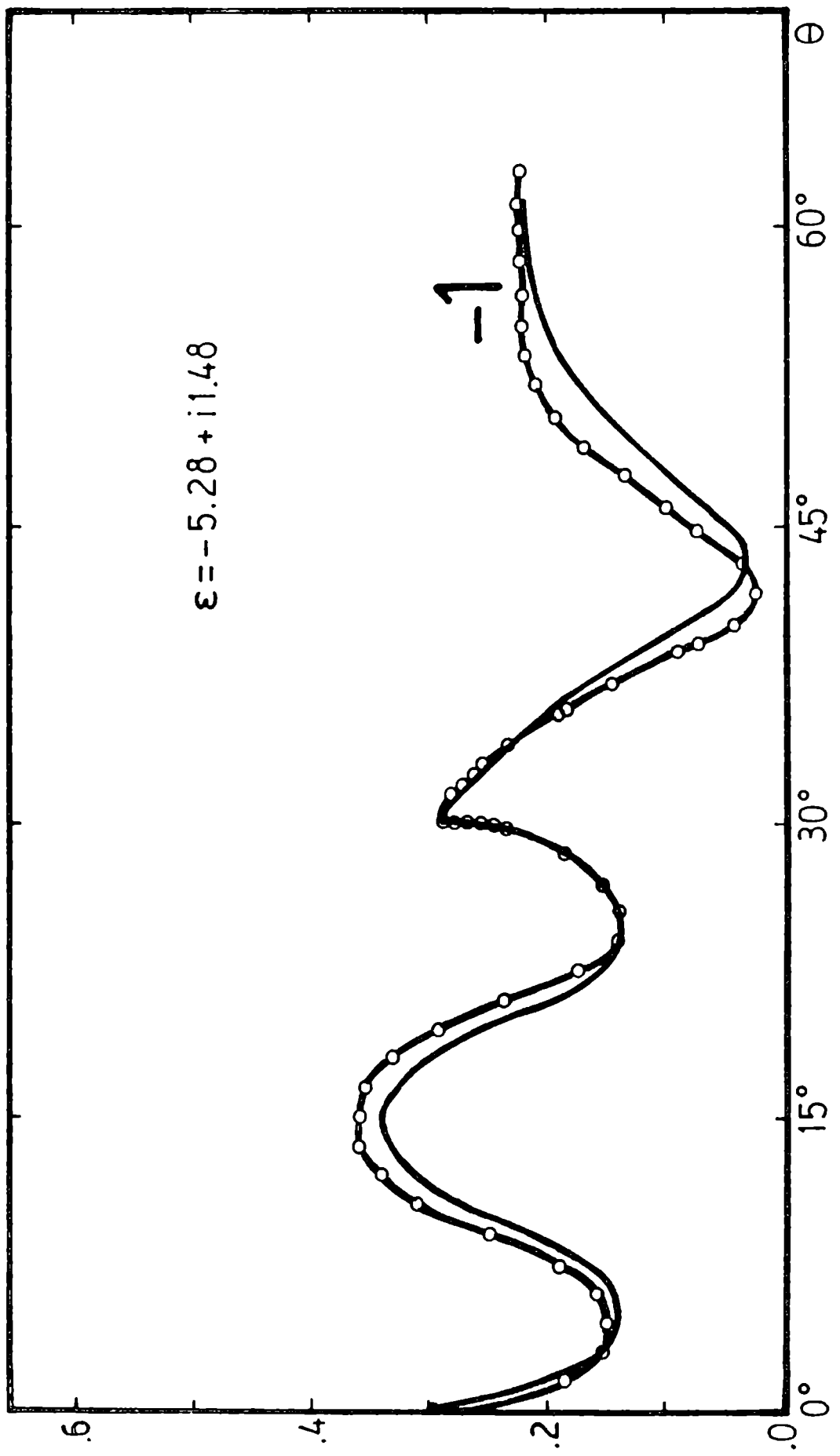


FIGURA 5.13: Idem Figura 5.12, orden -1.

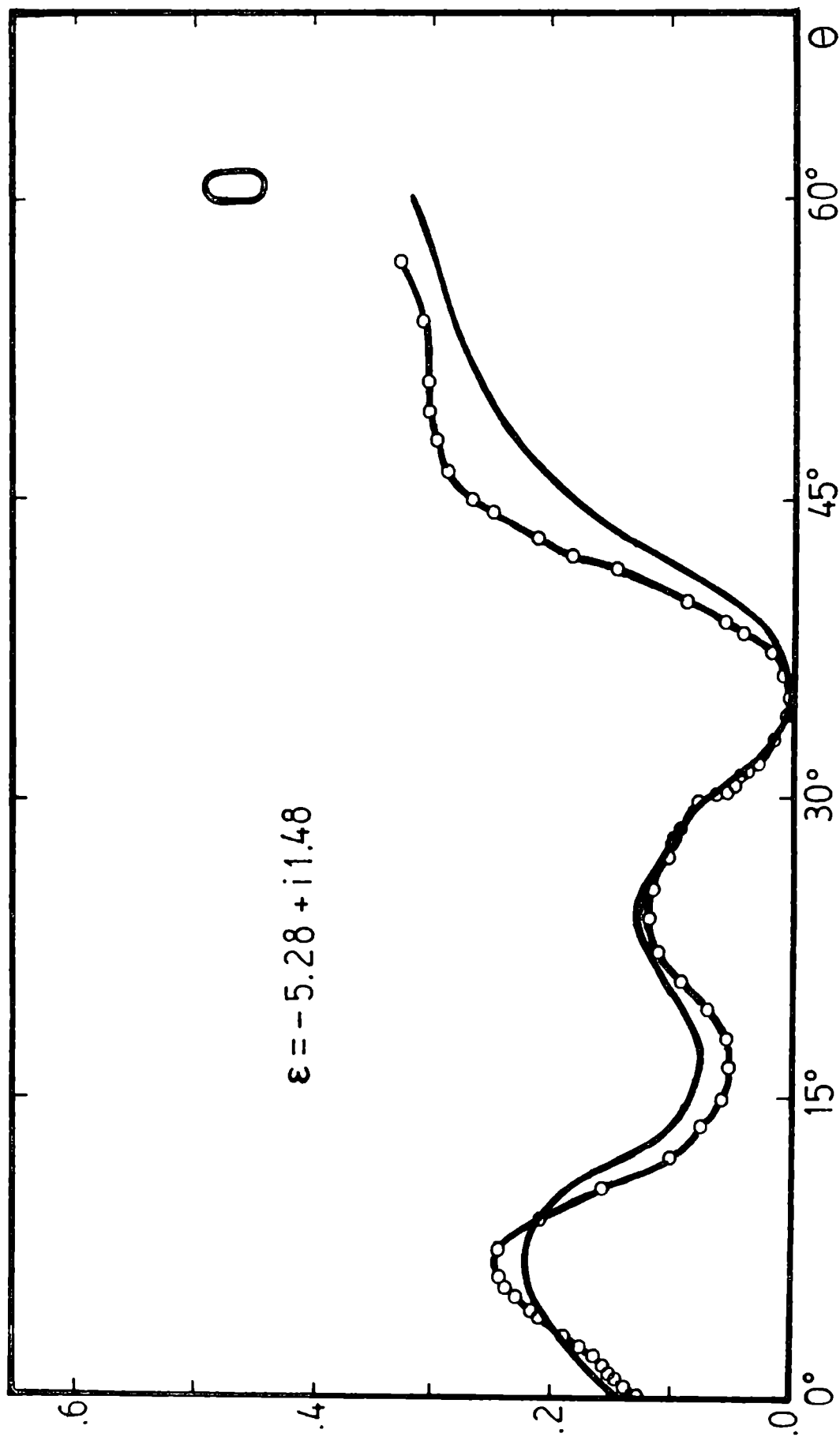


FIGURA 5.14: Idem Figura 5.12, orden cero.

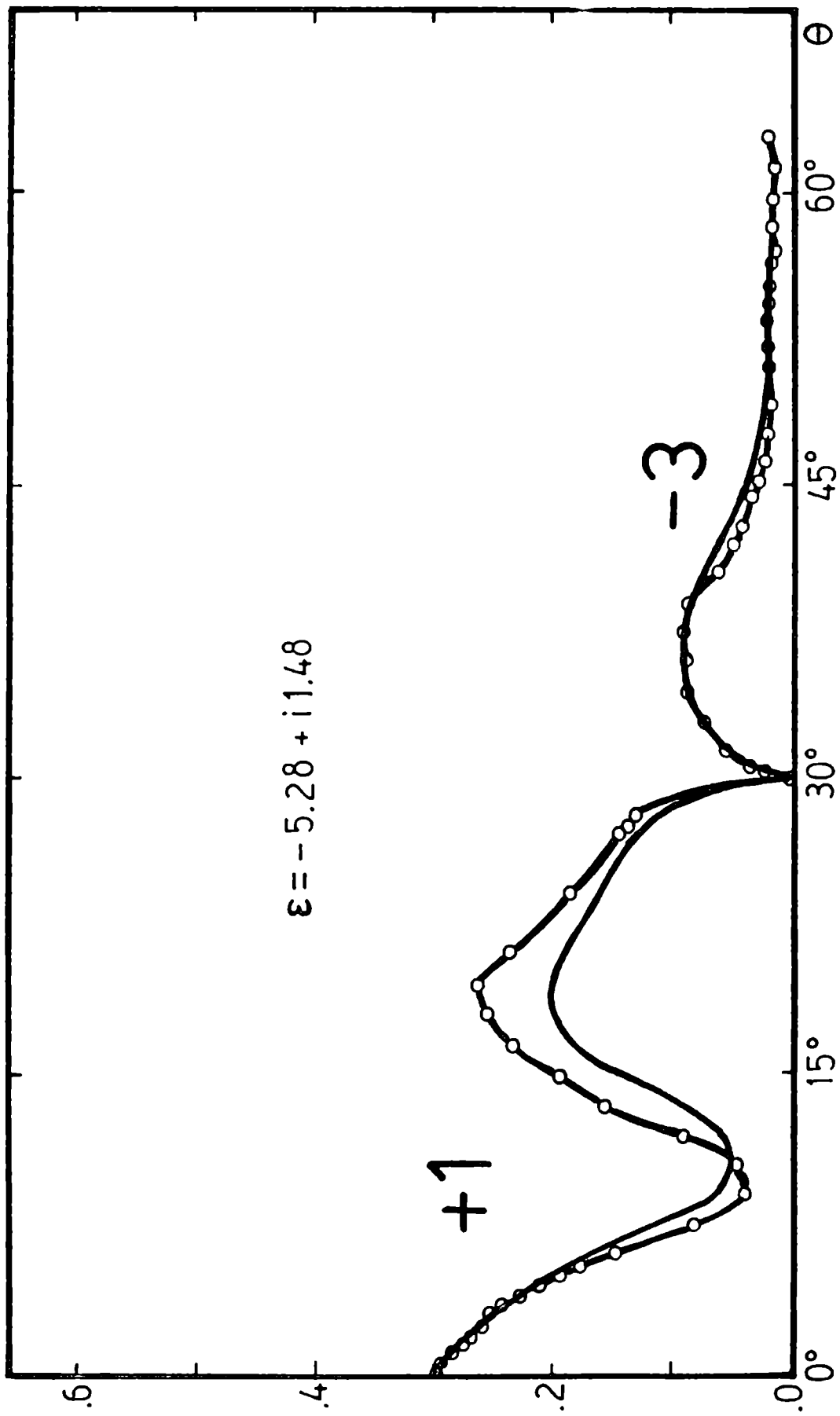


FIGURA 5.15: Idem Figura 5.12, órdenes +1 y -3.

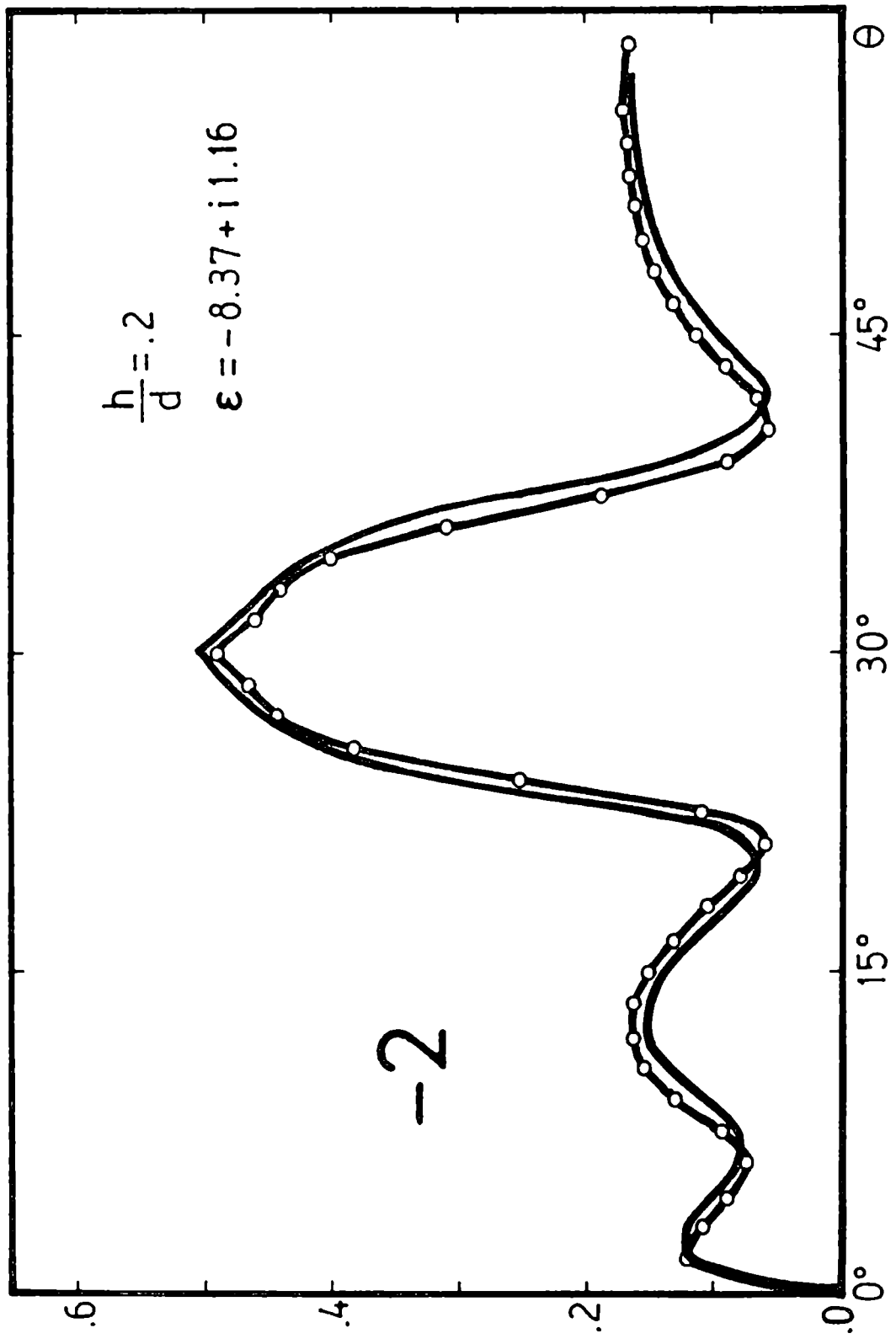


FIGURA 5.16: Comparación $\bar{Z} = cte$ (círculos) vs. transformación conforme más no conforme (curva continua) modo $H//$, $\epsilon_R = -8.37$, $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, orden -2.

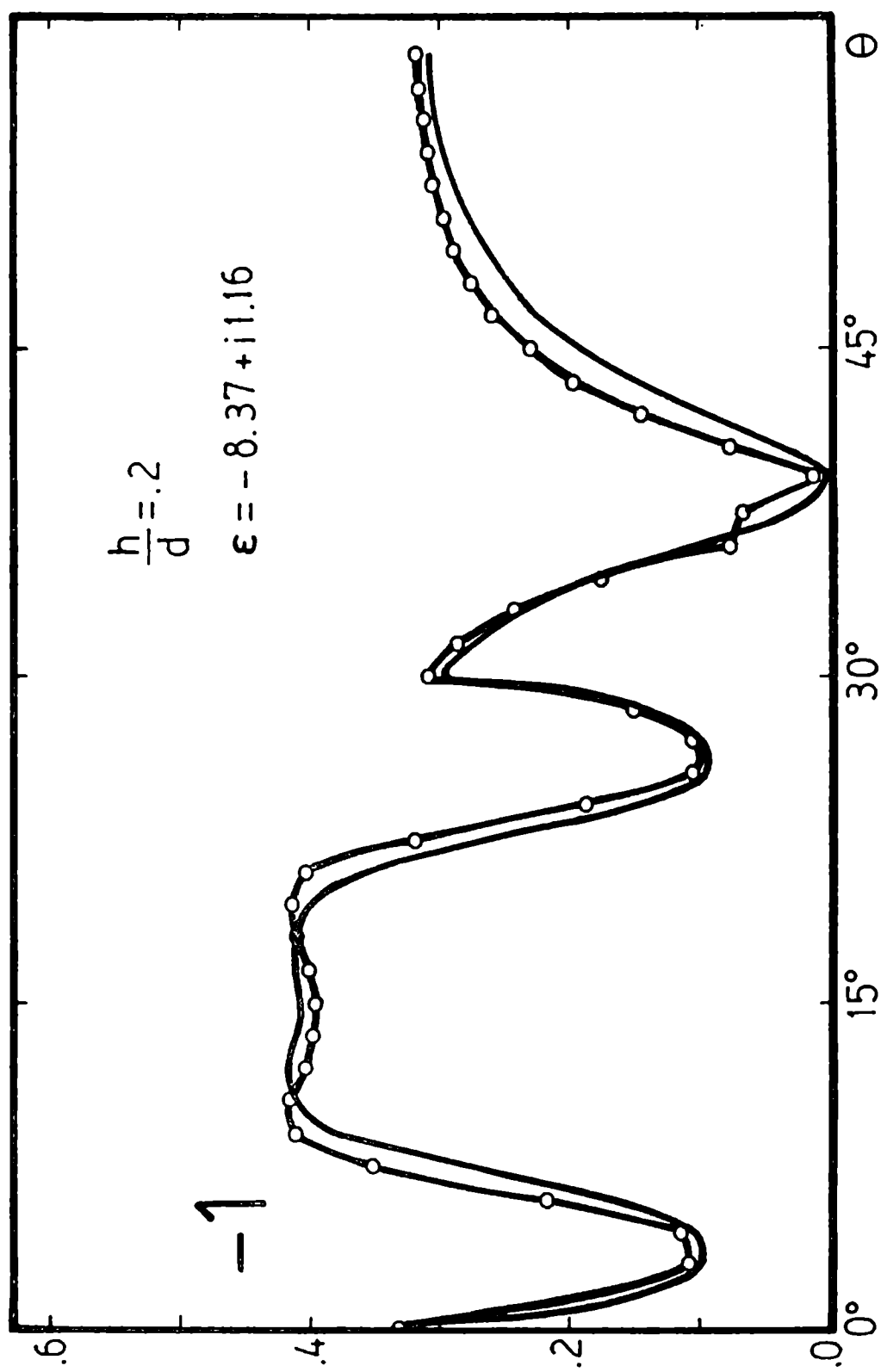


FIGURA 5.17: Idem Figura 5.16, orden -1.

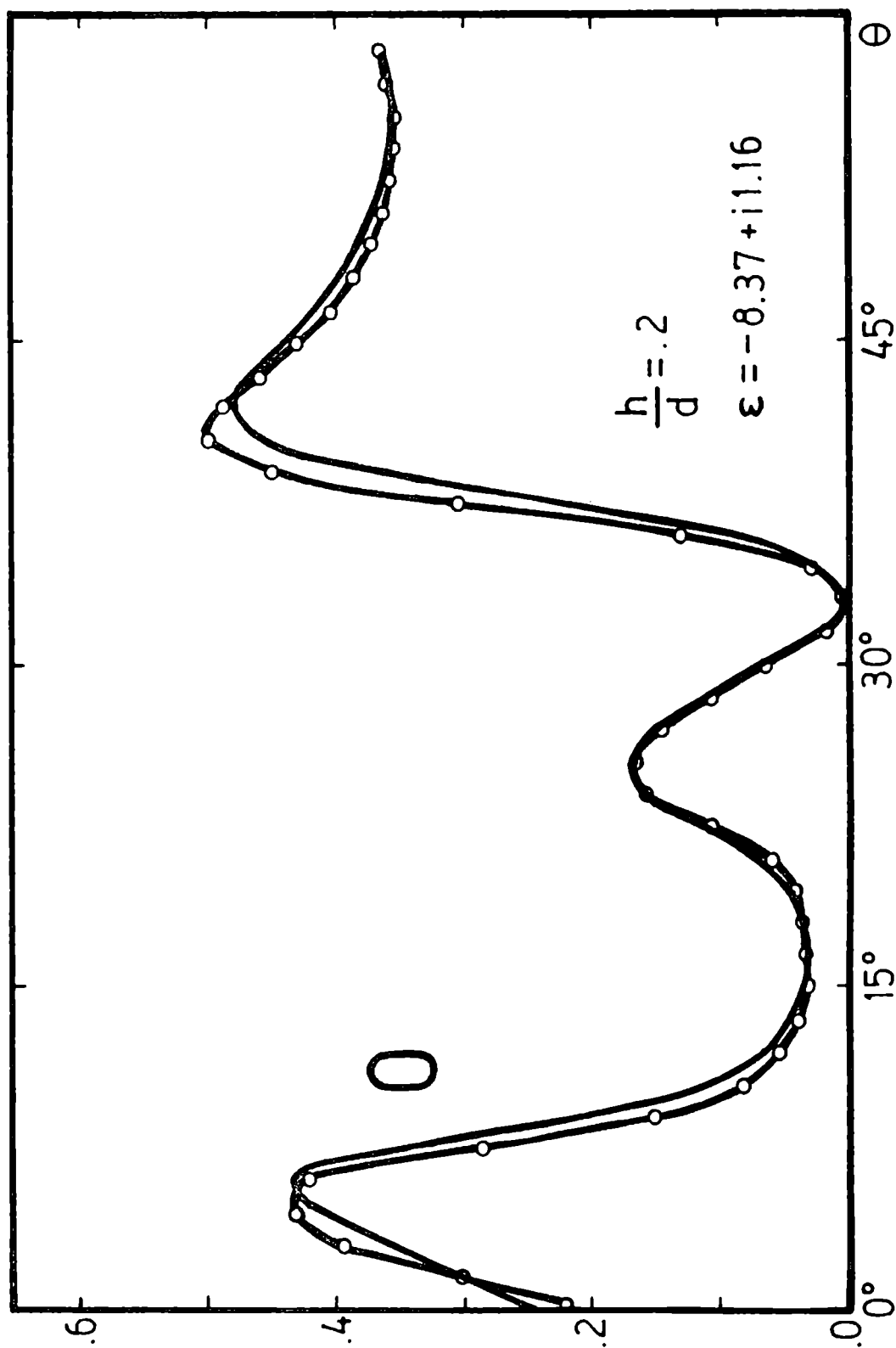


FIGURA 5.18: Idem Figura 5.16, orden cero.

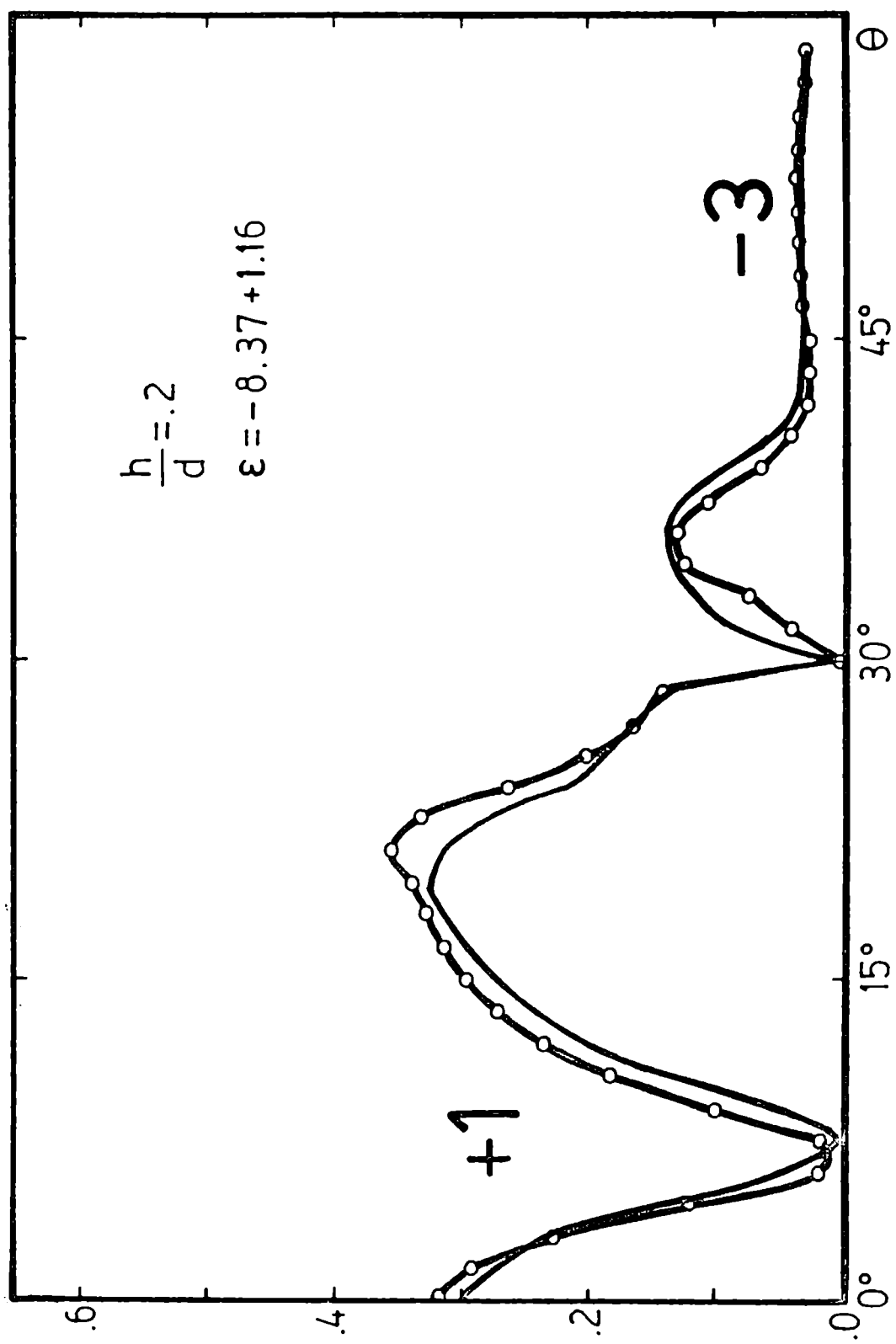


FIGURA 5.19: Idem Figura 5.16, órdenes +1 y -3.

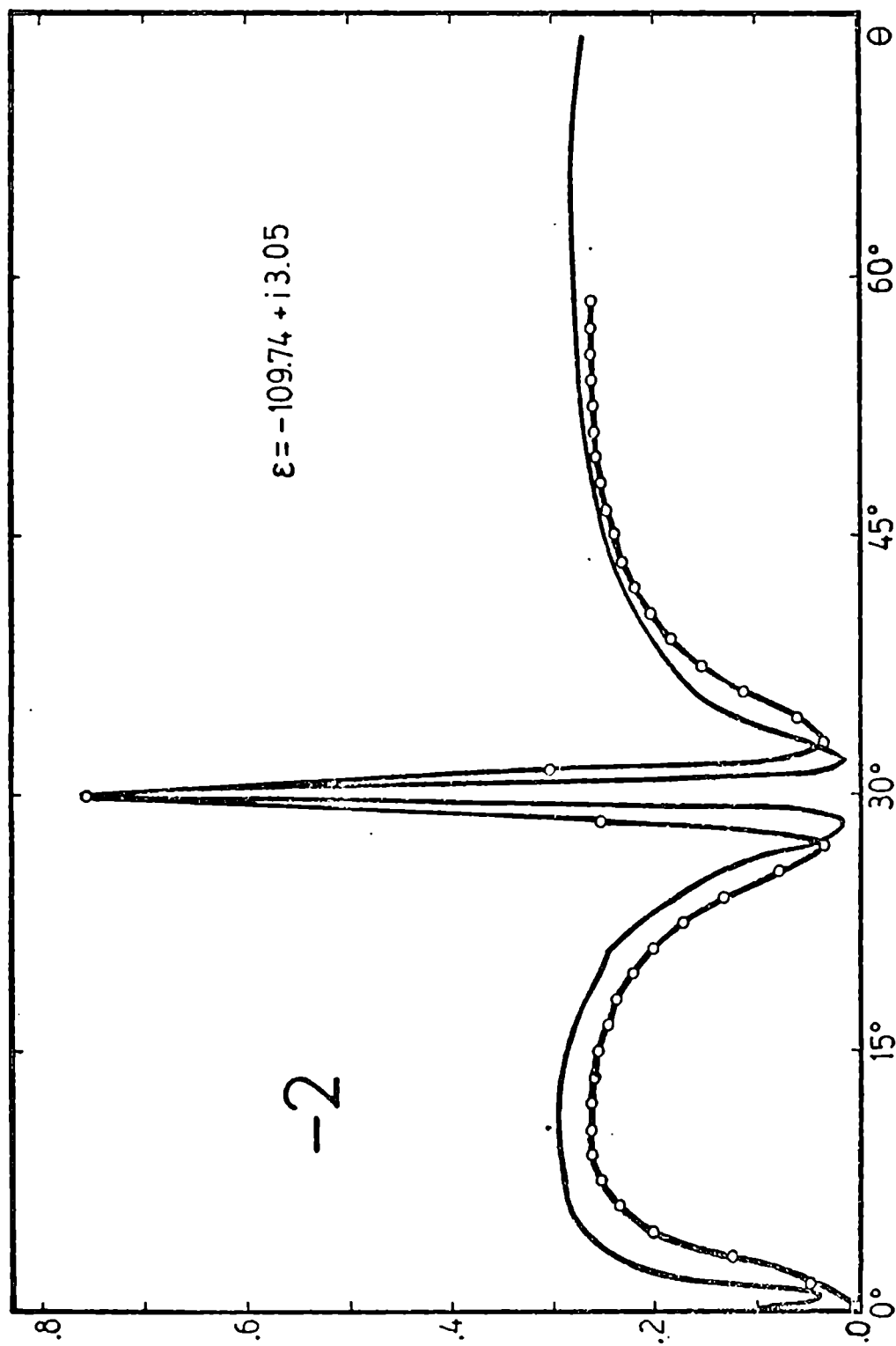


FIGURA 5.20: Curvas de eficiencia para el modo $H//$, obtenidas con la aproximación $\mathcal{Z} = \text{cte}$ (círculos) para la red cicloidal con $h/d = .2$, $\lambda/d = .5$, $\epsilon_R = -109.74$. En esta zona las diferencias entre las curvas exacta y aproximada no es apreciable en la escala elegida. Como comparación se muestra la curva correspondiente a conductividad infinita. (Curva continua) Orden -2.

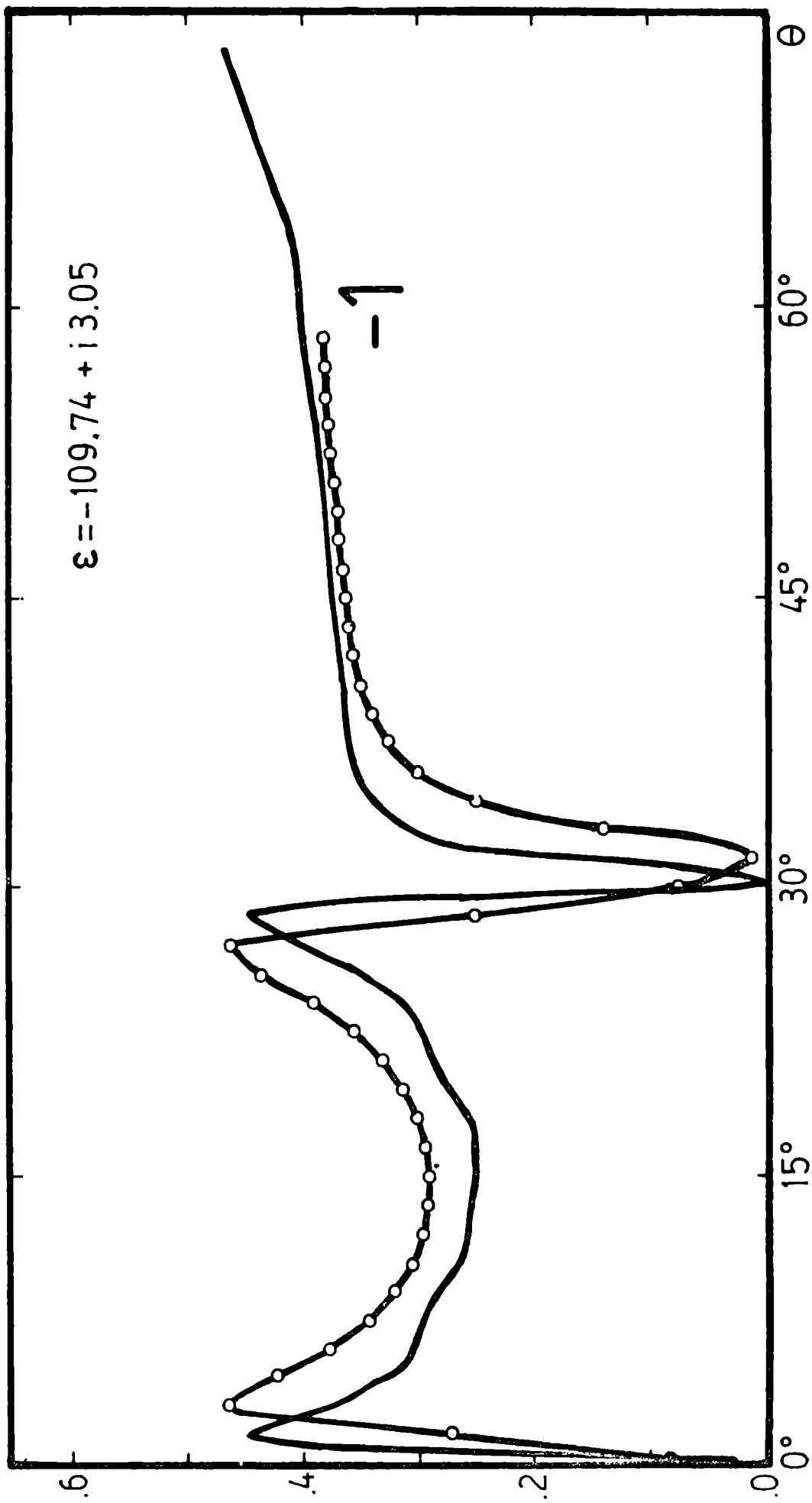


FIGURA 5.21: Idem Figura 5.20, orden - 1.

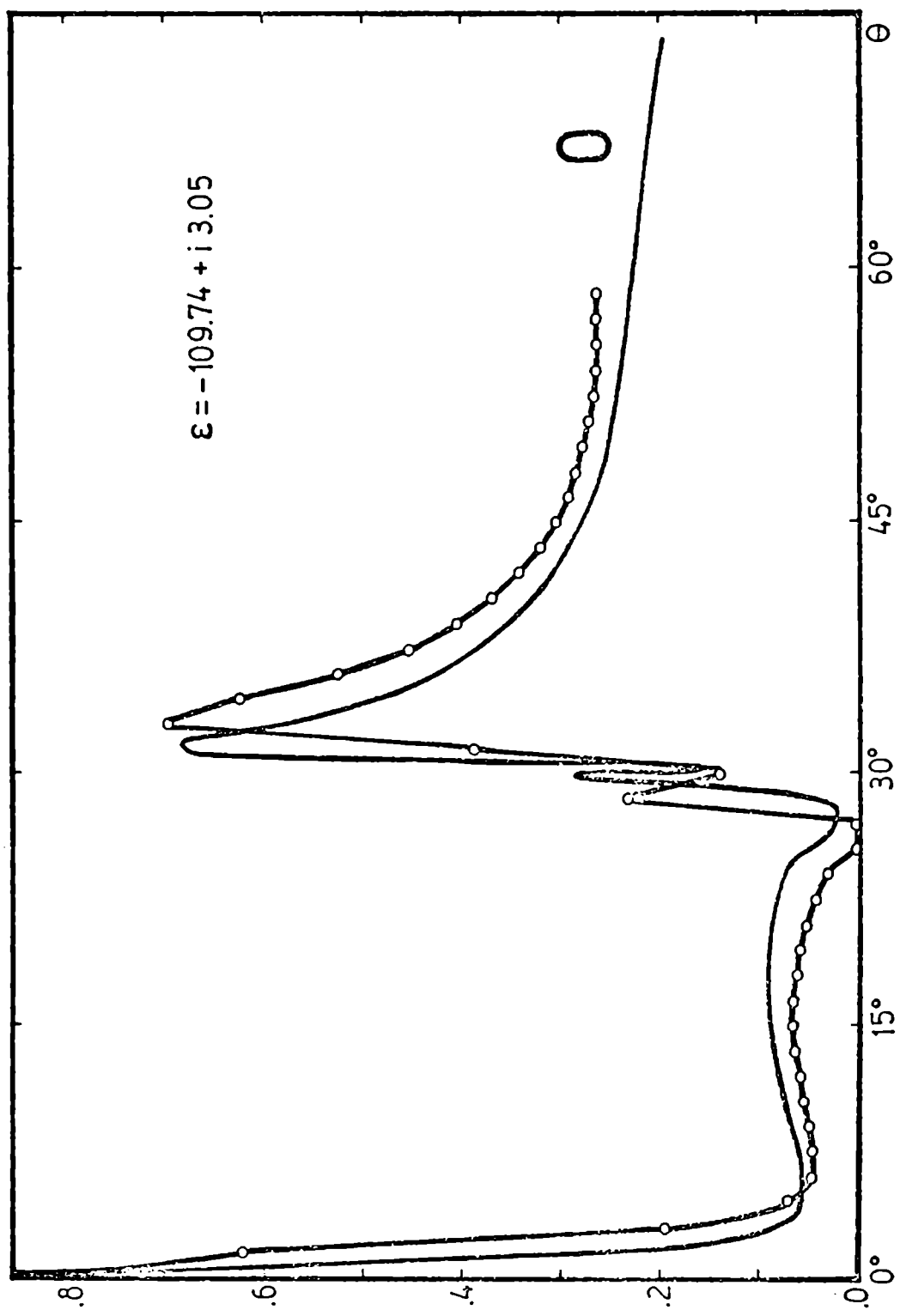


FIGURA 5.22: Idem. Figura 5.20, orden cero.

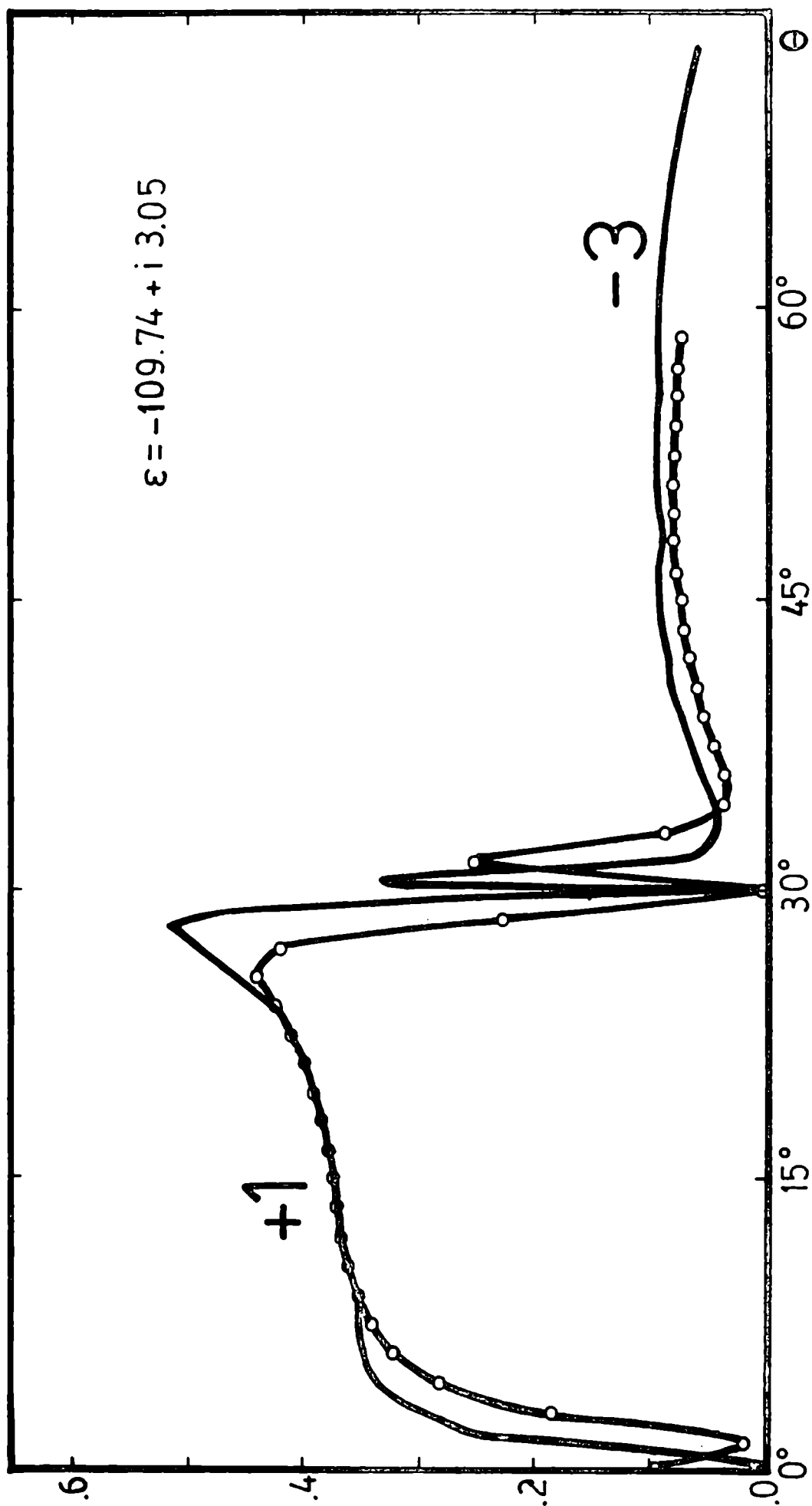


FIGURA 5.23: Idem Figura 5.20, órdenes +1 y -3.

V.7 Validez y aplicabilidad del formalismo aproximado

La comparación entre los resultados obtenidos usando los formalismos diferenciales aproximado y exacto muestran que el método con $Z = \text{cte}$ da muy buenos resultados para metales con grandes valores de $|\epsilon|$. De esta forma el método aproximado resulta especialmente útil ya que: evita los problemas numéricos que aparecen cuando se programa directamente la teoría del Capítulo IV, simplifica el tratamiento teórico y reduce notablemente los tiempos de cómputo.

CAPITULO VI

DISCUSION Y CONCLUSIONES

VI. DISCUSION Y CONCLUSIONES

Las teorías de eficiencia de redes de difracción que emplean métodos diferenciales representan un compromiso entre simplicidad de formulación, versatilidad, facilidad de implementación y rapidez. Sin embargo, presentaban serios problemas numéricos que no permitían emplearlas para tratar los casos de mayor interés en óptica y en el modo S de polarización solo arrojaban resultados coincidentes con otras teorías cuando el cociente profundidad de surco-período h/d era muy chico.


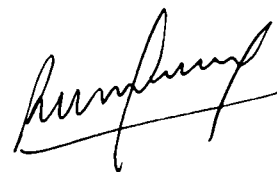
En el presente trabajo se encaró el estudio de los métodos diferenciales con el fin de extender su aplicación, prestando especial atención al caso de las redes metálicas empleadas en el visible e infrarrojo.

Primeramente se analizaron los métodos diferenciales usuales, demostrándose que las discrepancias observadas en el modo S , atribuidas en la literatura a problemas de programación se deben a un tratamiento inadecuado de las ecuaciones que rigen el comportamiento de los campos, mostrándose que dicho método involucra una aproximación que lo hace válido solamente para redes con surcos poco profundos (Capítulo III). Esta aproximación, sumada a las dificultades numéricas en la zona de alta conductividad hace que el método diferencial para $H_{//}$ presentado por Nevière, sea útil sólo en ciertas situaciones de interés particular. En cambio el método diferencial para $E_{//}$ presentado por Cerutti-Maori no involucra aproximaciones por lo que puede en principio aplicarse a cualquier tipo de red fuera de la zona de alta conductividad.

En el Capítulo IV se presenta el primer formalismo diferencial riguroso en ambas polarizaciones y válido aún en la zona de altas conductividades. El empleo de transformaciones de coordenadas posibilita un fácil manejo de las condiciones de contorno en la superficie de la red y hace que el método tenga explícitamente en cuenta los saltos de los campos en dicha superfi-

cie. Las comparaciones de los resultados obtenidos con esta teoría y aquellos obtenidos usando los métodos diferenciales del Capítulo III en las situaciones confiables, evidencian una excelente coincidencia y muestran que el método de transformación conforme más no conforme da resultados rigurosos en ambos modos de polarización cubriendo la importante zona de los metales de interés en óptica. Desde el punto de vista computacional la teoría en la forma presentada resulta ventajosa pues el tratamiento simultáneo de los dos casos de polarización permite aprovechar un gran volumen de cálculo en común disminuyendo tiempos de cómputo a costa de un no muy grande incremento de memoria. La programación directa del nuevo formalismo diferencial permite llegar a tratar valores de $|\epsilon| = 110$ pero una programación más cuidadosa o una modificación de la escala en la zona del metal permitiría llegar a valores aún más altos de $|\epsilon|$. Sin embargo es posible simplificar el tratamiento del problema de la red metálica en el rango de altas conductividades mediante el empleo de una condición de contorno aproximada que evita el cálculo de los campos dentro del metal.

En el Capítulo V se estudia la aplicabilidad de la condición de contorno de Leontovich a problemas en el rango óptico e infrarrojo y se muestra cómo se modifica el tratamiento del problema de la red cuando se utiliza dicha condición aproximada. La comparación con el método exacto muestra que el formalismo diferencial aproximado da muy buenos resultados para metales con grandes valores de $|\epsilon|$, simplificando el tratamiento teórico, reduciendo los tiempos de cómputo y resultando especialmente adecuado para estudiar los campos difractados por redes metálicas de alta conductividad, permitiendo así resolver el problema de la red en cualquier zona del espectro electromagnético mediante métodos diferenciales.

APENDICE

TRATAMIENTO NUMERICO

APENDICE

TRATAMIENTO NUMERICO

A.1 Implementación del método diferencial de la sección III.1
(igual a la implementación de los métodos aproximados del
Capítulo V)

El método diferencial propuesto por Cerutti-Maori para $E_{//}$ requiere la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.19) con condiciones de contorno (3.20) y (3.21) en ambos extremos del intervalo de integración $[0, h]$:

$$\vec{\mathcal{F}}''(y) = \mathbb{V}(y) \vec{\mathcal{F}}(y) \quad (3.19)$$

$$\vec{\mathcal{F}}'(0) + \mathbb{L}_0 \vec{\mathcal{F}}(0) = 0 \quad (3.20)$$

$$\vec{\mathcal{F}}'(h) + \mathbb{L}_h \vec{\mathcal{F}}(h) = 0 \quad (3.21)$$

$\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{\mathcal{F}}'$ y $\vec{\mathcal{F}}''$ son los vectores cuyos elementos son las funciones f_m , f'_m y f''_m ; $|m| \leq N$ (sistema truncado); \mathbb{V} , \mathbb{L}_0 , \mathbb{L}_h son matrices conocidas y \vec{q} es un vector también conocido.

Debido a que (3.19) no contiene derivadas primeras, se ha empleado el algoritmo de Noumerov. Sea Δ el paso de integración, constante en todo el intervalo $[0, h]$. Definiendo el vector $\vec{\xi}$

$$\vec{\xi}(y) = \vec{\mathcal{F}}(y) - \frac{\Delta^2}{12} \vec{\mathcal{F}}''(y) \quad (A.1)$$

el algoritmo de Noumerov se basa en la siguiente relación o fórmula de Noumerov^[66] :

$$\vec{\xi}(y+\Delta) = \left[2\mathbb{I} + \Delta^2 \mathbb{V}(y) + \frac{\Delta^4}{12} \mathbb{V}^2(y) \right] \vec{\xi}(y) - \vec{\xi}(y-\Delta) + O(\Delta^6) \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad y $O(\Delta^6)$ representa términos que contienen factores Δ^m con $m \geq 6$. Esta fórmula resulta útil para calcular $\vec{\xi}$ conociendo este vector en dos puntos anteriores. Supongamos conocidos $\vec{\mathcal{F}}(0)$ y $\vec{\mathcal{F}}'(0)$, postergando el problema de tratar (3.20) y (3.21). El vector $\vec{\xi}(0)$ se calcula según (A.1):

$$\vec{\xi}(0) = \left[\mathbb{I} - \frac{\Delta^2}{12} \mathbb{V}(y) \right] \vec{\mathcal{F}}(0) \quad (\text{A.3})$$

Todavía no se puede iterar en (A.2); para hacerlo se necesita $\vec{\xi}(\Delta)$. El cálculo de $\vec{\xi}(\Delta)$ se ha hecho de la siguiente manera: mediante un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden [67], se calcula primero $\vec{\mathcal{F}}(\Delta)$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}(\Delta) = & \left[\mathbb{I} + \frac{\Delta^2}{6} \mathbb{V}(0) + \frac{\Delta^2}{3} \mathbb{V}(\Delta) + \frac{\Delta^4}{24} \mathbb{V}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \mathbb{V}(0) \right] \vec{\mathcal{F}}(0) \\ & + \Delta \left[\mathbb{I} + \frac{\Delta^2}{6} \mathbb{V}(\Delta) \right] \vec{\mathcal{F}}'(0) + O(\Delta^5); \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

y luego la fórmula (A.1) permite obtener $\vec{\xi}(\Delta)$:

$$\vec{\xi}(\Delta) = \left[\mathbb{I} - \frac{\Delta^2}{12} \mathbb{V}(\Delta) \right] \vec{\mathcal{F}}(\Delta) \quad (\text{A.5})$$

Con los vectores $\vec{\xi}(0)$ y $\vec{\xi}(\Delta)$ se puede iterar ahora en la fórmula (A.2) obteniéndose así los vectores $\vec{\xi}(2\Delta)$, $\vec{\xi}(3\Delta)$, ..., $\vec{\xi}(h-\Delta)$

y $\vec{\xi}(h)$. Como (3.21) requiere el conocimiento de $\vec{F}(h)$ y de $\vec{F}'(h)$, aparece un problema en el extremo superior del intervalo donde solo se conoce $\vec{\xi}$. $\vec{F}(h)$ ha sido calculado invirtiendo la ecuación:

$$\vec{\xi}(h) = \vec{F}(h) - \frac{\Delta^2}{12} \vec{F}''(h) = \left[\mathbb{I} - \frac{\Delta^2}{12} \mathbb{V}(h) \right] \vec{F}(h) \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{F}(h) = \left[\mathbb{I} - \frac{\Delta^2}{12} \mathbb{V}(h) \right]^{-1} \vec{\xi}(h) \quad (\text{A.7})$$

y desarrollando en serie (A.7):

$$\vec{F}(h) = \left[\mathbb{I} + \frac{\Delta^2}{12} \mathbb{V}(h) + \frac{\Delta^4}{144} \mathbb{V}^2(h) \right] \vec{\xi}(h) + O(\Delta^6) \quad (\text{A.8})$$

Las derivadas $\vec{F}'(h)$ han sido calculadas empleando la fórmula citada en [68]:

$$\begin{aligned} \vec{F}'(h) = \frac{1}{720} \left[10 \vec{\xi}(h-7\Delta) + 28 \vec{\xi}(h-6\Delta) - 485 \vec{\xi}(h-5\Delta) + \right. \\ \left. 1778 \vec{\xi}(h-4\Delta) - 3225 \vec{\xi}(h-3\Delta) + 3740 \vec{\xi}(h-2\Delta) - \right. \\ \left. 3150 \vec{\xi}(h-\Delta) - 360 \vec{\xi}(h) \right] + \frac{147}{60\Delta} \vec{F}(h) + O(\Delta^6) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Con estos elementos se dispone de un algoritmo numérico que permite conocer $\vec{F}(h)$ y $\vec{F}'(h)$, solución de (3.19), conocidos $\vec{F}(0)$ y $\vec{F}'(0)$. Pero en el problema de la red las condiciones de contorno están dadas por las relaciones (3.20) y (3.21) por lo cual se debe proceder de la siguiente manera: dada la linealidad del sistema (3.19), todas sus soluciones forman un espacio vectorial y en consecuencia, el comportamiento de cualquier solución queda determinado si se conoce una base de este espacio vectorial. Eligiendo arbitrariamente $P = 2N + 1$ vectores linealmente independientes $\vec{F}_j(0)$, el uso de

(3.20) permite obtener P vectores $\vec{F}'_j(0)$ ($|j| \leq N$):

$$\vec{F}'_j(0) = -\mathbb{L}_0 \vec{F}_j(0) \quad (\text{A.10})$$

Para cada $\vec{F}_j(0)$, el algoritmo numérico descrito da los vectores $\vec{F}_j(h)$ y $\vec{F}'_j(h)$ que pueden usarse para construir un vector \vec{q}_j definido por:

$$\vec{q}_j = \vec{F}'_j(h) + \mathbb{L}_h \vec{F}_j(h) \neq \vec{q} \quad (\text{A.11})$$

Los $\vec{F}_j(y)$ así hallados forman parte de un subespacio vectorial de dimensión P , pues el espacio de soluciones de (3.19) tiene dimensión $2P$ y el hecho de imponer (A.10) reduce este número a la mitad. Por esta razón, la solución $\vec{F}(y)$ de (3.19), (3.20) y (3.21) se podrá escribir como una combinación lineal de las P funciones $\vec{F}_j(y)$ ($|j| \leq N$):

$$\vec{F}(y) = \sum_{j=-N}^N S_j \vec{F}_j(y) \quad (\text{A.12})$$

Los coeficientes S_j se determinan imponiendo la condición de contorno (3.21):

$$\vec{F}'(h) + \mathbb{L}_h \vec{F}(h) = \vec{q}$$

$$\sum_{j=-N}^N S_j \left\{ \vec{F}'_j(h) + \mathbb{L}_h \vec{F}_j(h) \right\} = \vec{q} ;$$

y usando (A.11):

$$\sum_{j=-N}^N \vec{q}_j S_j = \vec{q} \quad (\text{A.13})$$

queda un sistema de P ecuaciones lineales con P incógnitas (los coeficientes S_j). El elemento situado en la fila m y en la columna j de la matriz

de este sistema de ecuaciones es la componente n -ésima del vector \vec{q}_j ; invirtiendo esta matriz se hallan los coeficientes S_j , lo que permite calcular \vec{F} en todo punto del intervalo de integración. Las amplitudes de los campos difractados se calculan mediante (3.13) y (3.16).

A.2 Implementación del método diferencial de la sección III.2

El método diferencial propuesto por Nevère para $H//$ requiere la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.32) y (3.33) con las condiciones (3.35) y (3.37) en los extremos del intervalo de integración $[0, h]$. Truncando las series, estas ecuaciones son:

$$\tilde{f}'_m(y) = \sum_{m=-N}^N \beta_{m-m}(y) \gamma_m \gamma_m f_m(y) - f_m(y) \quad (\text{A.14})$$

$$f'_m(y) = \sum_{m=-N}^N \alpha_{m-m}(y) \tilde{f}_m \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{f}_m(0) = \frac{-i\varphi_m^{(2)}}{k^2} f_m(0) \quad (\text{A.16})$$

$$\tilde{f}_m(h) - \frac{i\varphi_m^{(1)}}{k^2} f_m(h) = \frac{-2i\varphi_0^{(1)}}{k^2} e^{-i\varphi_0^{(1)}h} \delta_{m0} \quad (\text{A.17})$$

En notación matricial el sistema a resolver tiene la forma:

$$\vec{F}'(y) = V(y) \vec{F}(y) \quad (\text{A.18})$$

$$\vec{\Psi}(0) = \mathbb{L}_0 \vec{\Phi}(0) \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{\Psi}(h) + \mathbb{L}_h \vec{\Phi}(h) = \vec{q} \quad (\text{A.20})$$

donde $\vec{\Psi}(y)$ y $\vec{\Phi}(y)$ son vectores columna de dimensión $P=2N+1$ y de elementos $\tilde{f}_m(y)$ y $f_m(y)$, \vec{q} es un vector columna de elementos $q_m = \frac{-2i}{\hbar^2} \varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} h} \delta_{m0}$, \mathbb{L}_0 y \mathbb{L}_h son matrices de $P \times P$ con elementos $(\mathbb{L}_0)_{mm} = -\frac{i\varphi_m^{(2)}}{\hbar^2} \delta_{mm}$ y $(\mathbb{L}_h)_{mm} = -\frac{i\varphi_m^{(1)}}{\hbar^2} \delta_{mm}$, $\vec{F}(y)$ y $\vec{F}'(y)$ son vectores columna de dimensión $2P$

$$\vec{F}(y) = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}(y) \\ \vec{\Psi}(y) \end{bmatrix}, \quad \vec{F}'(y) = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}'(y) \\ \vec{\Psi}'(y) \end{bmatrix}$$

y $\mathbb{V}(y)$ es una matriz de $2P \times 2P$

$$\mathbb{V}(y) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{m-m} \\ \sigma_m \sigma_m \beta_{m-m} - \delta_{mm} & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema (A.18) es un sistema lineal de primer orden con funciones incógnitas representadas por el vector incógnita $\vec{F}(y)$. Suponiendo conocido $\vec{F}(0)$ el sistema (A.18) puede integrarse por el método de Runge-Kutta^[67] pero las experiencias numéricas indican que la utilización del método de Adams-Moulton^[69] con paso fijo permite disminuir el tiempo de cómputo. El esquema de integración de Adams-Moulton puede resumirse en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{pred}}(y+\Delta) = & \vec{F}(y) + \Delta \left\{ \beta_0 \mathbb{V}(y) \vec{F}(y) + \right. \\ & \beta_1 \mathbb{V}(y-\Delta) \vec{F}(y-\Delta) + \beta_2 \mathbb{V}(y-2\Delta) \vec{F}(y-2\Delta) + \\ & \left. \beta_3 \mathbb{V}(y-3\Delta) \vec{F}(y-3\Delta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(y+\Delta) = & \vec{F}(y) + \Delta \left\{ \alpha_1 \nabla(y) \vec{F}(y) + \alpha_2 \nabla(y-\Delta) \vec{F}(y-\Delta) \right. \\ & \left. \alpha_3 \nabla(y-2\Delta) \vec{F}(y-2\Delta) \right\} + \Delta \alpha_0 \nabla(y+\Delta) \vec{F}_{\text{pred}}(y+\Delta) \quad (\text{A.22}) \\ & + O(\Delta^6) \end{aligned}$$

donde $\alpha_0 = 9/24$, $\alpha_1 = 19/24$, $\alpha_2 = -5/24$, $\alpha_3 = 1/24$, $\beta_0 = 55/24$,
 $\beta_1 = -59/24$, $\beta_2 = 37/24$, $\beta_3 = -9/24$. Para avanzar un paso de integración es necesario conocer el vector de incógnitas \vec{F} en cuatro puntos anteriores; por esta razón el método de Runge-Kutta se utiliza en el extremo inferior del intervalo de integración. Se dispone así de un algoritmo que provee $\vec{F}(h)$ dado $\vec{F}(0)$. Como $\vec{F}(0)$ no se conoce, el procedimiento seguido es el siguiente: 1°) se eligen arbitrariamente P vectores independientes $\vec{\phi}_j(0)$, $|j| \leq N$, 2°) mediante (A.19) se calcula $\vec{\psi}_j(0)$ para cada $\vec{\phi}_j(0)$ con lo cual queda determinado el vector $\vec{F}_j(0)$, 3°) se integra (A.18) en el intervalo $[0, h]$ con el esquema (A.21), (A.22), 4°) se define un vector $\vec{q}_j = \vec{\psi}_j(h) + \mathbb{L}_h \vec{\phi}_j(h)$ y 5°) observando que el subespacio de soluciones de (A.18) que satisface (A.19) tiene dimensión P , resulta que los vectores $\vec{\phi}_j(y)$ son una base de dicho subespacio, por lo cual la solución buscada puede escribirse como:

$$\vec{\phi}(y) = \sum_{j=-N}^N S_j \vec{\phi}_j(y) \quad (\text{A.23})$$

Debido a que $\vec{f} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $y=h$, $\vec{\psi}_j(h) = \vec{\phi}'_j(h)$ y la condición (A.20) es:

$$\sum_{j=-N}^N S_j \left\{ \vec{\phi}'_j(h) + \mathbb{L}_h \vec{\phi}_j(h) \right\} = \vec{q} \quad (\text{A.24})$$

$$\sum_{j=-N}^N S_j \vec{q}_j = \vec{q}$$

(A.24) es un sistema de P ecuaciones lineales con P incógnitas (S_j). Invertiendo este sistema se hallan los coeficientes S_j , lo que permite calcular las funciones incógnitas y a partir de ellas los campos en todo el espacio.

A.3 Implementación del método diferencial del Capítulo IV

El sistema truncado correspondiente a la ejemplificación de este método diferencial es:

$$M(Y) \vec{\mathcal{F}}''(Y) = \mathbb{W}(Y) \vec{\mathcal{F}}'(Y) + \mathbb{V}^-(Y) \vec{\mathcal{F}}(Y) \quad (\text{A.25})$$

si $-Y_0 \leq Y \leq 0$

$$\vec{\mathcal{F}}''(Y) = \mathbb{V}^+(Y) \vec{\mathcal{F}}(Y) \quad \text{si } 0 \leq Y \leq Y_0 \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{\mathcal{F}}(0^+) = \vec{\mathcal{F}}(0^-) \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{\mathcal{F}}'(0^+) = \eta \left\{ \mathbb{G} \vec{\mathcal{F}}(0^-) + \mathbb{H} \vec{\mathcal{F}}'(0^-) \right\} \quad (\text{A.28})$$

$$\vec{\mathcal{F}}'(Y_0) + \mathbb{L}^+ \vec{\mathcal{F}}(Y_0) = \vec{q} \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{\mathcal{F}}'(-Y_0) + \mathbb{L}^- \vec{\mathcal{F}}(-Y_0) = 0 \quad (\text{A.30})$$

donde $\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{\mathcal{F}}'$ y $\vec{\mathcal{F}}''$ son vectores de dimensión $P=2N+1$ cuyos elementos son las funciones $F_m(Y)$ y sus derivadas primeras y segundas con respecto a Y ; G , H , \mathbb{L}^+ , \mathbb{L}^- y M son matrices de $P \times P$:

$$G_{mm} = i\gamma_m G_{m-m} \quad ; \quad H_{mm} = H_{m-m} \quad ;$$

$$\mathbb{L}_{mm}^+ = i\varphi_m^{(1)} \delta_{mm} \quad ; \quad \mathbb{L}_{mm}^- = i\varphi_m^{(2)} \delta_{mm} \quad ; \quad M_{mm} = D_{m-m} \quad ;$$

y \vec{q} es un vector de dimensión P : $q_m = -2i\varphi_0^{(1)} e^{-i\varphi_0^{(1)} Y_0} \delta_{mm}$.

El procedimiento para encontrar el vector $\vec{\mathcal{F}}(Y)$ con Y en el intervalo $[-Y_0, Y_0]$ se puede resumir en los siguientes pasos:

- 1.- Elegir arbitrariamente P vectores linealmente independientes $\vec{\mathcal{F}}_j(-Y_0)$
- 2.- Usando la condición (A.30) determinar los vectores derivados $\vec{\mathcal{F}}'_j(-Y_0)$
- 3.- Considerando el sistema (A.25) de P ecuaciones diferenciales de segundo orden y P incógnitas como un sistema de $2P$ ecuaciones de primer orden con $2P$ funciones incógnitas (las P funciones y sus P derivadas), realizar la integración numérica de (A.25) mediante el método de Adams-Moulton con paso fijo descrito en la sección anterior. Dicha integración provee los valores de $\vec{\mathcal{F}}_j(0^-)$ y $\vec{\mathcal{F}}'_j(0^-)$ donde el símbolo 0^- se utiliza para indicar que estos valores fueron obtenidos avanzando hacia $Y=0$ desde la zona $Y < 0$. En cada paso de la integración numérica en esta zona

se debe invertir la matriz tridiagonal $\mathbb{M}(Y)$ lo que se ha hecho utilizando un método basado en el algoritmo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales descrito en [70].

- 4.- Empalmar los vectores de funciones en $Y=0$, mediante las expresiones (A.27) y (A.28) que tienen en cuenta las discontinuidades en la superficie $Y=0$. Se obtienen $\vec{\mathcal{F}}_j(0^+)$ y $\vec{\mathcal{F}}_j'(0^+)$ donde el símbolo 0^+ indica que las funciones están evaluadas en un valor de Y que tiende a cero manteniéndose positivo.
- 5.- Realizar la integración numérica de (A.26) mediante el algoritmo de Noumerov descrito en la sección A.1 obteniéndose $\vec{\mathcal{F}}_j'(Y_0)$ y $\vec{\mathcal{F}}_j(Y_0)$.
- 6.- Con estos valores se calculan los vectores \vec{q}_j ;

$$\vec{q}_j = \vec{\mathcal{F}}_j'(Y_0) + \mathbb{L}^+ \vec{\mathcal{F}}_j(Y_0) \quad (\text{A.31})$$

- 7.- El subespacio de soluciones del sistema (A.25), (A.26), (A.27), (A.28) y (A.30) tiene dimensión P y como los $\vec{\mathcal{F}}_j(Y)$ son vectores linealmente independientes forman una base de este subespacio. Entonces la solución más general puede escribirse en términos de esta base:

$$\vec{\mathcal{F}}(Y) = \sum_{j=-N}^N S_j \vec{\mathcal{F}}_j(Y) \quad (\text{A.32})$$

Imponiendo la condición (A.29) resulta:

$$\sum_{j=-N}^N S_j \vec{\mathcal{F}}_j'(Y_0) + \sum_{j=-N}^N S_j \mathbb{L}^+ \vec{\mathcal{F}}_j(Y_0) =$$

$$\sum_{j=-N}^N S_j \left\{ \vec{\mathcal{F}}_j'(Y_0) + \mathbb{L}^+ \vec{\mathcal{F}}_j(Y_0) \right\} = \vec{q}$$

es decir:

$$\sum_{j=-N}^N S_j \vec{q}_j = \vec{q} \quad (\text{A.33})$$

que es un sistema de P ecuaciones lineales con P incógnitas (los S_j). Inviertiendo este sistema, se obtienen los coeficientes

S_j , conociéndose así las funciones incógnitas en todo punto del intervalo $[-Y_0, Y_0]$ (según A.32)), lo que permite determinar los campos en todo punto del espacio.

[Handwritten signature]

[Handwritten signature]

REFERENCIAS

Referencias

- [1] D.MARCUSE, Integrated Optics (IEEE Press, New York 1973).
- [2] C.ECKART, Phys.Rev. 44, 12 (1933); "A general derivation of the formula for the diffraction by a perfect grating".
- [3] R.W.WOOD, Phil.Mag., 4, 396 (1902); "On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum".
- [4] J.W.S.RAYLEIGH, Proc. Roy. Soc. A79, 399 (1907); "On the dynamical theory of gratings".
- [5] J.W.S.RAYLEIGH, Phil. Mag. 14, 60 (1907); "Note on the remarkable case of diffraction spectra described by Prof. Wood".
- [6] R.W.WOOD, Phil.Mag. 23, 310 (1912); "Diffraction gratings with controlled groove form and abnormal distribution of intensity".
- [7] R.W.WOOD, Phys.Rev. 48, 934 (1935); "Anomalous diffraction gratings".
- [8] C.H.PALMER, J.Opt.Soc.Am., 42, 269 (1952); "Parallel diffraction grating anomalies".
- [9] C.H.PALMER, J.Opt.Soc.Am. 46, 50 (1956); "Diffraction grating anomalies II. coarse gratings".
- [10] C.H.PALMER, J.Opt.Soc.Am., 51, 1438 (1961); "Comment on the article by Yakovlev and Gerasimov on the intensity distribution in the spectrum of diffraction gratings".
- [11] B.A.LIPPMANN, J.Opt.Soc.Am., 43, 408 (1953); "Note on the theory of gratings".
- [12] U.FANO, J.Opt.Soc.Am., 31, 213 (1941); "The theory of anomalous diffraction gratings and of quasi-stationary waves on metallic surfaces (Sommerfeld's waves)".

- [13] A.HESSEL , A.A.OLINER, Appl.Optics 4 (10), 1275 (1965); "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings",
- [14] M.NEVIÈRE, P.VINCENT, R.PETIT; Optics Communic. 21 (3), 369 (1977); "Some studies on the behaviour of surface impedance in the vicinity of gratings".
- [15] J.M.SIMON, M.C.SIMON; Appl.Optics 12, 153 (1973), "Elliptic polarization in grating spectrographs".
- [16] R.A.DEPINE, J.M.SIMON, M.C.SIMON; Optica Acta 25 (9), 895 (1978); "Diffraction grating efficiencies:an experimental study of phase shifts and resonances".
- [17] M.C.HUTLEY, V.M.BIRD; Optica Acta 20, 771 (1973); "A detailed experimental study of the anomalies of a sinusoidal diffraction grating".
- [18] R.PETIT, M.CADILHAC, C.R.Acad.Sci., Paris 259, 2077 (1964), "Etude theorique de la diffraction par un reseau".
- [19] A.WIRGIN, Rev.Opt. 9, 449 (1964); trabajo citado en [50].
- [20] J.L.URETSKY, Annals of Physics 33, 400 (1965); "The scattering of plane waves from periodic surfaces".
- [21] J.PAVAGEAU, R.EIDO, H.KOBEISSE, C.R.Acad.Sci. Paris 264, 424 (1967); "Equation integrale pour la diffraction electromagnetique par des conducteurs parfaits dans les problemes a deux dimensions; applications aux reseaux".
- [22] J.PAVAGEAU, J.BOUSQUET; Optica Acta 17, 469 (1970); "Diffraction par un reseau conducteur, nouvelle methode de resolution".

- [23] R.M. VAN DEN BERG, J.C.BORBURGH, *Appl.Phys.* 3, 55 (1971); "Dispersion of surface plasmons on In-Sb gratings".
- [24] D.MAYSTRE, *J.Opt.Soc.Am.*, 68, 490 (1978); "A new general integral theory for dielectric coated gratings".
- [25] D.MAYSTRE, "Integral methods", en *Topics in current physics* 22, 63 (Springer-Verlag, Berlin 1980).
- [26] E.LOEWEN, M.NEVIERE, D.MAYSTRE; *Appl.Optics* 16, 2711 (1977).
- [27] D.MAYSTRE, M.NEVIERE, R.PETIT; "Experimental verifications of the theory", en *Topics current physics* 22, 159 (Springer-Verlag, Berlin 1980).
- [28] A.WIRGIN, R.DELEUIL, *J.Opt.Soc.Am.*, 59, 1348 (1969); "Theoretical and experimental investigations of a new type of blazed gratings".
- [29] S.JOVICEVIC, S.SESNIC; *J.Opt.Soc.Am.*, 62, 865 (1972); "Diffraction of a parallel-and perpendicular-polarized wave from an echelette grating".
- [30] S.JOVICEVIC, S.SESNIC; *Optica Acta* 22 (5), 461 (1975); "Diffraction anomalies and backscattering resonance from an echelette grating".
- [31] J.R.ANDREWARTHA, G.H.DERRICK, R.C.McPHERAN; *Optica Acta* 28 (9), 1177 (1981); "A modal theory solution to diffraction from a grating with semi-circular grooves".
- [32] J.R.FOX, *Optica Acta* 27 (3), 289 (1980); "General modal theory of scalar wave scattering by periodic surfaces".
- [33] J.C.BOTTEN, M.S.CRAIG, R.C.McPHERAN, J.L.ADAMS, J.R.ANDREWARTHA; *Optica Acta* 28 (3), 413-428 (1981); "The dielectric lamellar diffraction grating".

- [34] L.C.BOTTEN, M.S.CRAIG, R.C.McPHERAN, J.L.ADAMS, J.R.ANDREWARTHA;
Optica Acta 28 (8), 1087 (1981); "The finitely conducting lamellar
diffraction grating".
- [35] L.C.BOTTEN, M.S.CRAIG, R.C.McPHERAN; Optica Acta 28 (8), 1103 (1981);
"Highly conducting lamellar diffraction grating".
- [36] G.CERUTTI-MAORI, R.PETIT, M.CADILHAC; C.R.Acad.Sci.Paris 268B, 1060
(1969); "Etude numerique du champ diffracte par un reseau".
- [37] M.NEVIERE, P.VINCENT, R.PETIT; Nouv.Rev. Optique 5,65 (1974); "Sur
la theorie du reseau conducteur et ses applications a l'optique".
- [38] M.NEVIERE, R.PETIT, M.CADILHAC; Optics Communic. 8, (2), 113 (1973);
"About the theory of optical grating coupler-waveguide systems".
- [39] P.VINCENT; "Differential methods" en Topics in current physics 22,
101 (Springer-Verlag, Berlin 1980).
- [40] M.NEVIERE, M.CADILHAC; Optics Communic. 2 (5), 235 (1970); "Sur la
validite du developpement de Rayleigh".
- [41] M.NEVIERE, G.CERUTTI-MAORI, M.CADILHAC, Optics Communic. 3, 48 (1971);
"Sur une nouvelle methode de resolution du probleme de la diffraction
d'une onde plane par un reseau infiniment conducteur".
- [42] M.NEVIERE, M.CADILHAC; Optics Communic. 3, 379 (1971); "Sur une
nouvelle formulation du probleme de la diffraction d'une onde plane
par un reseau infiniment conducteur - cas general".
- [43] M.NEVIERE, M.CADILHAC, R.PETIT; IEEE Trans. AP-21, 37 (1973);
"Applications of conformal mappings to the diffraction of electromag-
netic waves by a grating".
- [44] J.M.SIMON, R.DEPINF; "Diffraction grating efficiencies; differential
methods for HII case". (enviado para su publicación)

- [45] R.DEPINE, J.M.SIMON; "Diffraction grating efficiencies: an exact differential algorithm valid for high conductivities".
(Enviado para su publicación).
- [46] M.A.LEONTOVICH; Izvest.Akad.Nauk SSSR, Ser Fiz 8, 16 (1944); "A method for the solution of the problem of the propagation of electromagnetic waves along the surface of the earth".
- [47] M.A.LEONTOVICH, V.A.FOK; J.Exptl.Theoret.Phys.(USSR) 16, 557 (1946); "A solution of the problem of the propagation of electromagnetic waves along the surface of the earth, using the method of parabolic equations".
- [48] R.A.DEPINE, J.M.SIMON; "Diffraction grating efficiencies: conformal mapping method for a good real conductor". (Optica Acta, en prensa)
- [49] R.A.DEPINE, J.M.SIMON: "Surface impedance boundary condition for metallic diffraction gratings in the optical and infrared range".
(Enviado para su publicación).
- [50] R.PETIT; "A tutorial introduction" en Topics en current physics 22, 1 (Springer-Verlag, Berlin 1980).
- [51] M.CADILHAC; "Some mathematical aspects of the grating theory" en Topics in current physics 22, 53 (Springer-Verlag, Berlin 1980).
- [52] R.PETIT; Rev.Optique 45, 353 (1966).
Trabajo citado en Ref. [50].
- [53] G.HASS; "Mirror coatings" en Applied Optics and optical engineering 3, 309, editado por R.Kingslake (Academic Press, New York 1966).
- [54] D.MAYSTRE, M.NEVIERE, R.PETIT;
Trabajo citado en [27] pág. 221.

- [55] L.SCHWARTZ; Métodos matemáticos para las ciencias físicas, p.75. (Selecciones científicas, Madrid 1969).
- [56] R.PETIT; Nouv.Rev.Optique 6, 129 (1975); "Electromagnetic grating theories: limitations and successes".
- [57] R.CREIGHTON BUCK; Cálculo superior, 2da. edición, p.249, (Mc Graw-Hill, Panamá 1968).
- [58] J.D.JACKSON; Electrodinámica clásica (Alhambra, Madrid 1966).
- [59] D.MAYSTRE, R.PETIT; Optics Communic. 2 (7), 309 (1970); "Sur la détermination du champ diffracté par un réseau holographique".
- [60] P.MORSE, H.FESHBACH; Methods of theoretical physics, p.445 (McGraw-Hill, New York 1953).
- [61] J.GILEWICZ; Lecture Notes in Mathematics 667, 440 (Springer-Verlag, Berlin 1978).
- [62] F.BORGNIS, C.PAPAS; Handbuch der Physik, 16, 289 (Springer-Verlag, Berlin 1958).
- [63] L.D.LANDAU, F.M.LIFSHITZ; "Electrodynamics of continuous media" (Pergamon, Oxford 1960).
- [64] L.M.BREKHOVSKIKH; Waves in layered media, p.14 (Academic Press, New York 1960).
- [65] L.D.LANDAU, F.M.LIFSHITZ; Op.cit. en [63], nota en pág. 281.
- [66] D.R.HARTREE, "The calculation of atomic structures" (Wiley, New York, 1957).
- [67] M.ABRAMOWITZ, I.STEGUN; "Handbook of mathematical functions", p.897, (Dover, New York 1970).
- [68] Ref. [39] pág.107.

- [69] P.HENRICI, "Elements of numerical analysis", p.280 (Wiley, New York 1964).
- [70] R.RICHTMYER, K.W.MORTON, "Difference methods for initial-value problems", pag.199 (Interscience, New York 1967).
- [71] M.NEVIERE, "The homogeneous problem", en Topics in current physics 22, 126 (Springer-Verlag, Berlín 1980).
- [72] A.OTTO, Z.Physik 216, 398 (1968), "Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustated total reflection"
- [73] Y.TENG, E.STERN, Phys.Rev.Lett., 19, 511 (1967) "Plasma radiation from metal grating surfaces".
- [74] M.SPIEGEL, "Complex variables", p.230 (Schawn, New York 1964).

