

Tesis de Posgrado

Medidas tangenciales sobre cuerpos convexos en En

Molter, Ursula María

1983

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Molter, Ursula María. (1983). Medidas tangenciales sobre cuerpos convexos en En. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1788_Molter.pdf

Cita tipo Chicago:

Molter, Ursula María. "Medidas tangenciales sobre cuerpos convexos en En". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1983.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1788_Molter.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

MEDIDAS TANGENCIALES SOBRE CUERPOS CONVEXOS EN E_n

AUTOR

URSULA MARIA MOLTER

DIRECTOR DE TESIS

DR. LUIS A. SANTALO

LUGAR DE TRABAJO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA F.C.E.N.

TESIS PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

- 1983 -

1788
Ej. 2

AGRADECIMIENTOS

al Dr. Luis A. Santaló

sin cuya guía y ayuda no me hubiera sido posible la realización de este trabajo.

al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

que me dió el lugar físico y el apoyo económico indispensable para la concreción de esta Tesis.

al Dr. Ricardo J. Noriega

que me expresó su confianza en reiteradas oportunidades

a los amigos y compañeros

que me aconsejaron y alentaron a lo largo de estos años

a Silvia C. López

por la terminación mecanográfica.

INDICE

Introducción	1
I.- Cuerpos convexos en E_3	
1. Definiciones	5
2. Cálculo de las M_i	8
3. Ejemplos :	11
II.-Medida cinemática para conjuntos tangentes en E_3	
4. Introducción-Idea intuitiva	18
5. Medida sobre $G_3(K, K')$	21
6. Aplicaciones de la fórmula 5.22	31
III.-Medida cinemática para cilindros convexos en E_3	
7. Cilindros finitos	47
8. Cilindros infinitos	50
9. Medida tangencial para cilindros infinitos	53
9 ₁ . Franjas de espacio limitadas por planos	58
10. Aplicaciones de la fórmula obtenida en 9.8	61
IV.-Medida en E_n sobre cuerpos convexos y cilindros convexos	
11. Notación	67
12. Medidas tangenciales de cuerpos convexos en E_n	69
13. Cilindros convexos en E_n .Medida sobre cilindros	77
14. Medida tangencial sobre cilindros convexos en E_n	84
Bibliografía	

INTRODUCCION

Por medio de la geometría integral, se está en condiciones de calcular probabilidades del siguiente tipo:

En el espacio euclidiano de dimensión n , E_n , sean K , L y K' tres cuerpos convexos finitos tales que $K \subseteq L$. Suponiendo que movemos aleatoriamente y de manera uniforme el cuerpo K' de manera que corte a L ¿cuál es la probabilidad de que K' también corte a K ?

Este problema se resuelve usando la fórmula fundamental cinemática que expresa la medida sobre el grupo de movimientos G_n del conjunto

$$\{g \in G_n / K \cap gL \neq \emptyset\}$$

mediante los llamados "Quermassintegrale" W_i de K y de L .

En los últimos años, varios autores consideraron un problema similar, en el cual en lugar de probabilidades de intersección, se calculan probabilidades de tangencia.

Se consideran dos cuerpos convexos K y K' y se colorea una parte de cada uno de los respectivos contornos. Luego se mueve alguno de los cuerpos (o ambos) de manera que se toquen y entonces se pregunta ¿cuál es la probabilidad de que se toquen en las áreas coloreadas?

Firey [1], fue el primero que planteó este problema. Mc Mullen

[7], calculó la probabilidad en el caso en el que K y K' son poliedros convexos y Firey expresó la probabilidad para cuerpos convexos cualesquiera en términos de las integrales de superficie. Como estas integrales están definidas sobre la esfera unidad, las partes coloreadas no podían ser cualesquiera, sino imágenes inversas de Borelianos de esta esfera unidad. Schneider [10], eliminó esta restricción, utilizando, en vez de las integrales de superficie, los "Krümmungsmasse", que están definidos sobre el contorno de cualquier cuerpo convexo K . Finalmente Weil [14], probó que sobre el conjunto

$$G_n(K, K') = \{g \in G_n / K \text{ y } gK' \text{ son tangentes}\}$$

existe una medida natural, tal que los conjuntos

$$C_0(\beta, \beta') = \{g \in G_n(K, K') / \beta \cap g\beta' \neq \emptyset\}$$

resultan medibles si $\beta \subseteq \partial K$ y $\beta' \subseteq \partial K'$ y que esta medida se puede expresar en términos de los "Krümmungsmasse" de K y K' , obteniendo para poliedros el mismo resultado que Mc Mullen.

En este trabajo expresamos la medida encontrada por Weil explícitamente, en el caso de E_3 y vemos algunas aplicaciones, entre las cuales resulta como corolario la probabilidad calculada por Mc Mullen, o sea: dados dos cubos que se tocan, la probabilidad de que se toquen arista contra arista resulta 0,54 y que se toquen vértice contra cara resulta 0,46.

Luego, usando la definición de cilindros infinitos dada por Santaló en [8], consideramos un problema de tangencia similar. Tomamos un cuerpo convexo K y un cilindro infinito Z -de sección normal D - en E_3 y encontramos una medida sobre $Z(D)$ - el conjunto de todos aquellos cilindros cuya sección horizontal sea congruente a D - de forma tal que esta medida esté concentrada sobre el subconjunto de $Z(D)$, de todos aquellos cilindros que son tangentes a K .

Esta medida nos permite calcular, utilizando la fórmula 9.8, probabilidades del siguiente tipo: Si β es un subconjunto de ∂K y β' es un sector infinito de ∂Z , suponiendo que Z y K son tangentes ¿cuál es la probabilidad de que se toquen en β y β' ?

En el capítulo IV generalizamos este resultado al espacio euclidiano de dimensión n , E_n , y consideramos cilindros infinitos Z_q , cuya sección normal D esté incluida en un espacio de dimensión $n-q$ y que tengan como generatriz los q -planos ortogonales a D .

La medida que encontramos sobre

$$Z(D,K) = \{Z' / g \in G_n / Z' = gZ_q \text{ y } Z' \text{ y } K \text{ son tangentes}\}$$

nos permite medir las probabilidades antes mencionadas y además, en el caso en que D se reduce a un punto, nos da la medida sobre todos los q -planos tangentes a K .

Esta medida obtenida como caso particular de la medida sobre

$Z(D,K)$, coincide con la medida sobre q -planos tangentes a un cuerpo convexo K obtenida por Weil en [13].

I. CUERPOS CONVEXOS EN E_3

1. Definiciones

Para el estudio de los cuerpos convexos en E_3 , son fundamentales los llamados "Quermassintegrale" de H. Minkowski o valores medios de sus proyecciones sobre subespacios lineales. Vamos a recordar su definición y su vinculación con las integrales de curvatura media.

Consideremos el cuerpo convexo K . Sea K'_2 su proyección ortogonal sobre un plano E . Llamaremos $d\Omega$ al elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente al punto determinado por el radio paralelo a la normal al plano. El valor medio del área $F(K'_2)$ de K'_2 es:

$$1.1 \quad E(F(K'_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}\theta_2} F(K'_2) d\Omega$$

con la integración extendida a la semiesfera unidad.

En lo sucesivo representaremos por θ_h tanto a la esfera unidad, como a su área, o sea

$$1.2 \quad \theta_h = \frac{2\pi \left(\frac{h+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right)}$$

También necesitaremos el volumen de la esfera unidad en E_h , cuyo valor es

$$1.3 \quad \kappa(h) = \frac{\theta_{h-1}}{h} = \frac{2 \cdot \pi^{h/2}}{h \cdot \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)}$$

donde Γ es la función gamma, que para valores racionales positivos

de denominador 2 puede definirse recursivamente por las relaciones

$$1.4 \quad \Gamma(m+1) = m \Gamma(m) \quad m > 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Gamma(0) = 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\ \Gamma(m) = m! \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Entonces: el Quermassintegral $W_1(K)$ se define por

$$1.5 \quad W_1(K) = \frac{4}{3} E(F(K'_2))$$

y aplicando una clásica fórmula de Cauchy [8],

$$1.6 \quad F(K) = \frac{2}{\pi} \int_{1/2 \theta_2} F(K'_2) d\Omega$$

vale

$$1.7 \quad W_1(K) = \frac{1}{3} F(K) = \frac{1}{3} \text{ área de } K.$$

Si en vez de proyectar K sobre un plano E , se proyecta sobre una recta G , que tiene la dirección correspondiente a $d\Omega$, se obtiene un segmento K'_1 y el valor medio de su longitud es

$$1.8 \quad E(L(K'_1)) = \frac{1}{2\pi} \int_{1/2 \theta_2} L(K'_1) d\Omega$$

entonces el Quermassintegral $W_2(K)$ se define por

$$1.9 \quad W_2(K) = \frac{2\pi}{3} E(L(K'_1)).$$

Para completar, se definen los valores extremos

$$1.10 \quad W_0(K) = V(K) = \text{volumen de } K$$

$$W_3(K) = \kappa(3) = \frac{4}{3} \pi$$

Estos invariantes W_i ($i = 0, 1, 2, 3$) están definidos para *cualquier* cuerpo convexo K , independientemente de la regularidad de su contorno ∂K .

Si ∂K es una superficie de clase C^2 , se pueden definir también las "integrales de curvatura media", a saber:

$$M_0(\partial K) = \int_{\partial K} d\sigma = F(K) = \text{área de } \partial K$$

$$1.11 \quad M_1(\partial K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} (\kappa_1 + \kappa_2) d\sigma = M(K) =$$

= integral de curvatura media propiamente dicha.

$$M_2(\partial K) = \int_{\partial K} \kappa_1 \cdot \kappa_2 d\sigma = \theta_2 = 4\pi$$

siendo κ_1 y κ_2 las curvaturas principales en el punto cuyo elemento de área es $d\sigma$.

Por la definición vemos la siguiente relación

$$1.12 \quad M_i(\partial K) = 3 W_{i+1}(K) \quad i=0, 1, 2$$

la cual permite definir las integrales de curvatura media para cuerpos cuyo contorno no sea C^2 .

Para las definiciones anteriores ver; Hadwiger [3], Santaló [8]

2. Cálculo de las M_i

Queremos calcular las $M_i(K)$, o los $W_i(K)$ para algunos cuerpos especiales:

a) Si ∂K es de clase C^2 , existen las curvaturas principales y las M_i se calculan por las fórmulas dadas en 1.11.

b) Poliedros

Si K es un poliedro convexo cuyas aristas tienen longitud a_i y los ángulos diedros correspondientes valen α_i , la integral de curvatura media $M_1(\partial K)$ vale

$$2.1 \quad M_1(\partial K) = \frac{1}{2} \sum a_i (\pi - \alpha_i)$$

con la suma extendida a todas las aristas de K .

Para demostrar 2.1 se toma el cuerpo convexo K_ϵ , paralelo exterior a distancia ϵ de K y se calcula $M_1(K_\epsilon)$.

Luego, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, tendremos $M_1(\partial K)$ y por tanto $W_2(K)$, puesto que los W_i son funcionales continuos del espacio de los cuerpos convexos (Hadwiger [3], Schneider [8]).

La demostración de 2.1 es fácil:

La parte de K_ϵ correspondiente a las caras de K son caras planas para las cuales $M_1 = 0$.

A las aristas de K , corresponden franjas de cilindros de radio ϵ y ángulo $(\pi - \alpha_i)$. Para estas superficies las curvaturas principales son

$$2.2 \quad \kappa_1 = \frac{1}{\epsilon} \quad \text{y} \quad \kappa_2 = 0$$

El elemento de área vale

$$2.3 \quad d\sigma = dh \wedge \epsilon \cdot d\varphi$$

siendo dh el elemento de longitud. Por lo tanto, para las aristas de longitud a_i , será

$$2.4 \quad M(\text{arista } a_i) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\epsilon} \cdot \epsilon \cdot dh \wedge d\varphi = \frac{1}{2} \cdot a_i (\pi - \alpha_i)$$

Los vértices de K dan lugar en K_ϵ a casquetes de superficies esféricas, con las curvaturas principales

$$2.5 \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{\epsilon}$$

y elemento de área

$$2.6 \quad d\sigma = \epsilon^2 d\Omega$$

Por lo tanto

$$2.7 \quad M(\text{casquete}) = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\epsilon} \cdot \epsilon^2 d\Omega$$

con lo cual, si $\epsilon \rightarrow 0$, la curvatura media en los vértices será nula.

Entonces, sumando $M(\text{caras}) + M(\text{aristas}) + M(\text{casquetes})$, resulta 2.1

c) Cuerpos convexos limitados por caras curvas de clase C^2 .

Supongamos que K sea una superficie poliedral, pero de caras curvas. Al pasar a K_ϵ y luego $\epsilon \rightarrow 0$, la parte correspondiente a las caras, es la integral de curvatura media de las caras de K .

Los vértices de K , al pasar a K_ϵ son partes de esfera y, como en el caso de los poliedros, la integral de curvatura media es nula.

Queda la parte correspondiente a las "aristas", que en K_ϵ son franjas de cilindros curvos de radio ϵ y ángulo φ . Las curvaturas principales son:

$$2.8 \quad \kappa_1 = \frac{1}{\epsilon} \quad \text{y} \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho + \epsilon}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la arista de K .

El elemento de área es

$$2.9 \quad d\sigma = \epsilon \cdot d\varphi \wedge \frac{(\rho + \epsilon)}{\rho} \cdot ds$$

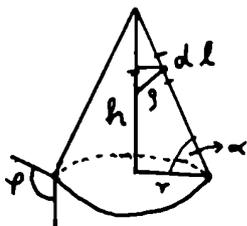
y por lo tanto, la contribución a $M_1(K)$ de las aristas es:

$$2.10 \quad M_1(\text{aristas}) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\rho + \epsilon} \right) \cdot \epsilon (\rho + \epsilon) \cdot \frac{ds}{\rho} d\varphi \\ + \frac{1}{2} \int_a \varphi ds \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Es decir, para poliedros convexos de caras curvas y aristas a_i , es

$$2.11 \quad M(\partial K) = \frac{1}{2} \int_{\text{caras de } \partial K} (\kappa_1 + \kappa_2) d\sigma + \sum_i \frac{1}{2} \int_{a_i} \varphi ds$$

Para aclarar esta fórmula, vamos a aplicarla al caso del cono recto de altura h y radio de la base r .

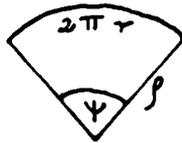


En la superficie lateral tenemos

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\rho} dl \rho d\psi = \frac{1}{2} \int dl d\psi$$

Pero

$$\int dl \wedge d\psi = \psi \cdot l = \frac{2\pi r}{\rho} \cdot l = 2\pi \operatorname{sen} \alpha \cdot l$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int dl \, d\psi = \pi l \operatorname{sen} \alpha = \pi \cdot h$$

La base es plana y entonces $M_1(\text{base}) = 0$.

La arista es la circunferencia de base y según 2.10 es

$$M_1(\text{arista}) = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot \varphi = \pi \cdot r(\pi - \alpha).$$

Por lo tanto

$$M_1(\text{cono}) = \pi h + \pi^2 r - \pi r \operatorname{arctg} \frac{h}{r}.$$

3. Ejemplos

Vamos a reunir aquí algunos resultados que se obtienen a partir de las fórmulas anteriores. Completamos así algunos valores dados por Hadwiger en [4]).

a) Cuerpos convexos K , tales que ∂K sea de clase C^2

i) Bola de radio r

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

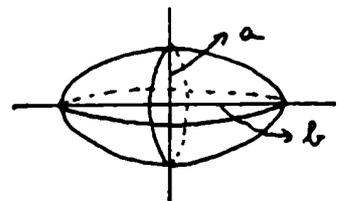
$$F = 4 \pi r^2$$

$$M = 4 \pi r$$

ii) Elipsoide de revolución de ejes de simetría a y b

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 \cdot b$$

$$F = 2\pi \left| a^2 + \frac{ab^2 \arccos \left(\frac{a}{b} \right)}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}} \right|$$



$$M = 2\pi \left| b + a \frac{\ln \left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right)}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}} \right|$$

b) Poliedros regulares inscritos en la bola de radio R

i) Tetraedro

$$V = \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3$$

$$F = \frac{8\sqrt{3}}{3} R^2$$

$$M = 2\sqrt{6} R \arccos \left(-\frac{1}{3} \right)$$

ii) Cubo

$$V = \frac{8\sqrt{3}}{9} R^3$$

$$F = 8 R^2$$

$$M = 2\sqrt{3} \pi R$$

iii) Octaedro

$$V = \frac{4}{3} R^3$$

$$F = 4\sqrt{3} R^2$$

$$M = 6\sqrt{2} R \arccos \left(\frac{1}{3} \right)$$

iv) Dodecaedro

$$V = \frac{2\sqrt{15}}{9} (\sqrt{5} + 1) R^3$$

$$F = \sqrt{200 - 40\sqrt{5}} R^2$$

$$M = 5\sqrt{3} (\sqrt{5} - 1) R \operatorname{arctg} (2)$$

v) Isocaedro

$$V = \frac{\sqrt{40 + 8\sqrt{5}}}{3} R^3$$

$$F = \sqrt{3} (10 - 2\sqrt{5}) R^2$$

$$M = \sqrt{450 - 90\sqrt{5}} R \operatorname{arcsen} \left(\frac{2}{3} \right)$$

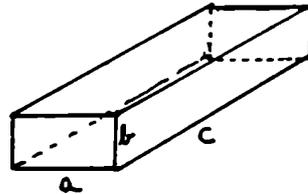
b₁) Poliedros cualesquiera

i) Paralelepípedo recto de lados a, b, c

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$F = 2(ab + bc + ac)$$

$$M = \pi(a + b + c)$$

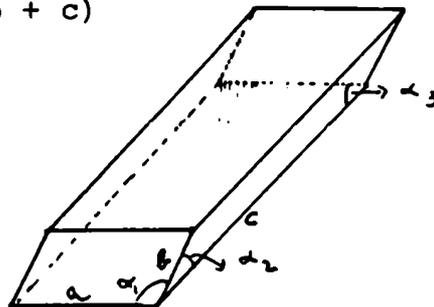


ii) Paralelepípedo oblicuo de lados a, b, c y ángulos $\alpha_1 = \sphericalangle(a, b)$

$$\alpha_2 = \sphericalangle(b, c) \quad \alpha_3 = \sphericalangle(a, c)$$

$$F = 2(a \cdot b \operatorname{sen} \alpha_1 + b \cdot c \operatorname{sen} \alpha_2 + a \cdot c \operatorname{sen} \alpha_3)$$

$$M = \pi(a + b + c)$$



Este último resultado es curioso, ya que prueba que la curvatura media de cualquier paralelepípedo *no* depende de los ángulos α_i .

Observemos que, para calcular el volumen, necesitaríamos calcular los ángulos diedros, pero para la curvatura media *no*, ya que a lados iguales corresponden ángulos complementarios. No

ponemos la fórmula del volumen, por ser complicada y no la necesitamos en el futuro.

c) Cuerpos convexos limitados por caras curvas de clase C^2

i) Cilindro convexo recto de base D y altura h tal que

$$F(D) = f = \text{área de D}$$

$$L(\partial D) = u = \text{longitud de } \partial D$$

$$V = f \cdot h$$

$$F = 2f + u \cdot h$$

$$M = \pi h + \frac{\pi}{2} u$$

ii) Segmento de longitud ℓ

$$V = 0$$

$$F = 0$$

$$M = \pi \ell$$

iii) Placa convexa de área f y longitud de contorno u

$$V = 0$$

$$F = f$$

$$M = \frac{\pi}{2} u$$

iv) Cono de revolución, de radio de base r y altura h

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

$$F = \pi r^2 + \pi r (r^2 + h^2)^{1/2}$$

$$M = \pi^2 r + \pi h - \pi r \arctan \left(\frac{h}{r} \right)$$

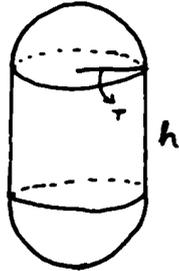
v) Semiesfera de radio r

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$F = 3 \pi r^2$$

$$M = \pi r \left(2 + \frac{1}{2} \pi \right)$$

vi) Cilindro terminado por semiesferas

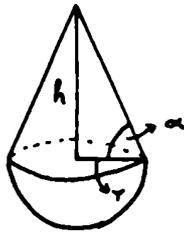


$$V = \pi r^2 \cdot h + \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$F = 2 \pi r h + 4 \pi r^2$$

$$M = \pi h + 4 \pi r$$

vii) Cono sobre una semiesfera

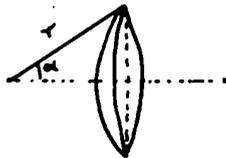


$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$F = \pi r (h^2 + r^2)^{1/2} + 2 \pi r^2$$

$$M = \pi h + \frac{\pi^2}{2} r - \pi r \arctan\left(\frac{h}{r}\right) + 2 \pi r$$

viii) Intersección de dos esferas

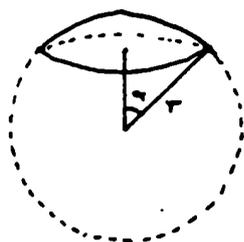


$$V = \frac{2\pi}{3} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) r^3$$

$$F = 4 \pi (1 - \cos \alpha) r^2$$

$$M = 2 \pi \left[2 - 2 \cos \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha \right] r$$

ix) Casquete esférico



$$V = \frac{\pi}{3} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) r^3$$

$$F = \pi r^2 (3 - 2 \cos \alpha)$$

$$M = 4\alpha \cdot r + \pi r \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot (\pi - \alpha)$$

x) Cilindro terminado por conos



$$V = \pi r^2 \left(\frac{2}{3} h_1 + h \right)$$

$$F = 2\pi r \left((r^2 + h_1^2)^{1/2} + h \right)$$

$$M = \pi (h + 2h_1 + r (\pi - 2\alpha))$$

xi) Cilindro terminado por un cono y una semiesfera

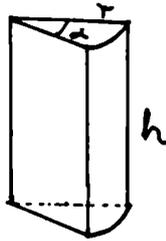


$$V = \pi r^2 \left(h + \frac{1}{3} h_1 + \frac{2}{3} r \right)$$

$$F = \pi r \left(2h + (r^2 + h_1^2)^{1/2} + 2r \right)$$

$$M = \pi \left(h + h_1 + 2r + r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)$$

xii) Sector cilíndrico

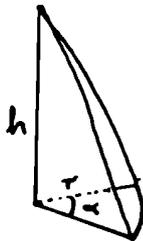


$$V = \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2 \cdot h$$

$$F = r(\alpha r + \alpha h + 2h)$$

$$M = \frac{1}{2} \alpha \cdot h + \pi(2r + \alpha r)$$

xiii) Sector de cono



$$V = \frac{1}{6} \alpha r^2 \cdot h$$

$$F = r \left(\frac{\alpha}{2} (h^2 + r^2)^{1/2} + h + \frac{\alpha}{2} \cdot r \right)$$

$$M = \frac{\alpha}{2} h + (\alpha \cdot r + 2r) \left(\pi - \arctg\left(\frac{h}{r}\right) \right)$$

II. MEDIDA CINEMATICA PARA CONJUNTOS CONVEXOS TANGENTES EN E_3 .

4. Introducción- Idea intuitiva

Sean K y K' dos cuerpos convexos en E_3 . Con G_3 denotamos al grupo de movimientos en E_3 . Se quieren medir conjuntos de la forma

$$4.1. \quad A = \{g \in G_3 / K \cap gK' \neq \emptyset\}.$$

Como G_3 es localmente compacto, según el teorema de Haar, existe sobre G_3 una única medida invariante. Esta medida se llama densidad cinemática, y se demuestra que puede escribirse en la forma

$$4.2 \quad dK = dP \wedge d\Omega \wedge dT \quad ([8], \text{pág.256})$$

Intuitivamente sería: para fijar la posición de K en el espacio, debo fijar un punto - dP -, una dirección por este punto - $d\Omega$ - y un giro alrededor de esta dirección dT

Se prueba que esta medida es invariante por movimientos ([11], pág. 95) y vale la fórmula fundamental cinemática

$$4.3 \quad \int_{K \cap K' \neq \emptyset} dK' = 8\pi^2 (V(K) + V(K')) + 2\pi (M(K)F(K') + M(K')F(K))$$

Notemos que, si μ es la única medida invariante sobre G_3 , se puede escribir también

$$4.4 \quad \int_{K \cap K' \neq \emptyset} dK' = \int_A d\mu(g),$$

donde A es el conjunto definido en 4.1

En términos de los "Quermassintegrale" $W_i(K)$, 4.3 resulta

$$4.5 \quad \int_{K \cap K' \neq \emptyset} dK' = 8\pi^2 (W_0(K) + W_0(K')) + 9.2\pi (W_2(K)W_1(K') + W_1(K)W_2(K'))$$

y en términos de los $M_i(K)$

$$4.6 \quad \int_{K \cap K' \neq \emptyset} dK' = 8\pi^2 (V(K) + V(K')) + 2\pi (M_0(K)M_1(K') + M_1(K)M_0(K'))$$

Ahora se nos plantea la siguiente pregunta: si definimos $G_3(K, K')$ para cuerpos convexos K y K' cualesquiera por

$$4.7 \quad G_3(K, K') = \{g \in G_3 / K \text{ y } gK' \text{ son tangentes}\}$$

¿habrá sobre $G_3(K, K')$ una medida "natural"?

W.Weil en [14] prueba que existe sobre $G_3(K, K')$ una medida ϕ que resulta natural en el siguiente sentido:

Sea K un cuerpo convexo en E_3 y sea B_3 la bola de radio 1 en E_3 si K_ϵ lo definimos como la suma de Minkowski (ver [8]) de $K + \epsilon B_3$ resultan

$$4.8 \quad K_\epsilon = \{x \in E_3 / d(K, x) < \epsilon\} = K + \epsilon B_3.$$

Por las fórmulas de Steiner para cuerpos convexos paralelos

([8], pág.220) se sabe que es

$$V(K_\epsilon) = V(K) + \epsilon F(K) + \epsilon^2 M(K) + \frac{4}{3} \pi \epsilon^3$$

$$4.9 \quad F(K_\epsilon) = F(K) + 2 \epsilon M(K) + 4 \pi \epsilon^2$$

$$M(K_\epsilon) = M(K) + 4 \pi \epsilon$$

Entonces, por 4.3 resulta

$$4.10 \quad \int_{K_\epsilon \cap K' \neq \phi} dK' = 8\pi^2 (V(K_\epsilon) + V(K')) + 2\pi (M(K_\epsilon) F(K') + F(K_\epsilon) M(K')) + \\ = 8\pi^2 (V(K) + \epsilon F(K) + \epsilon^2 M(K) + \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 + V(K')) + \\ + 2\pi [(M(K) + 4\pi\epsilon)F(K') + (F(K) + 2\epsilon M(K) + 4\pi\epsilon^2)M(K')]$$

entonces

$$\int_{K_\epsilon \cap K' \neq \phi} dK' = \int_{K \cap K' \neq \phi} dK' + 8\pi^2 \epsilon (F(K) + F(K') + \frac{1}{2\pi} M(K)M(K')) + \\ + 8\pi^2 \epsilon^2 (M(K) + M(K')) + \frac{32}{3} \pi^3 \epsilon^3$$

Entonces puedo calcular la medida de todas las posiciones de K' , tales que $K' \cap K_\epsilon \neq \phi$ y $K' \cap K = \phi$, ó, lo que es equivalente: la medida de las posiciones de K' tales que $(K' \cap (K_\epsilon - K)) \neq \phi$.

Será

$$4.11 \quad \int_{(K_\epsilon - K) \cap K' \neq \phi} dK' = 4\pi\epsilon (2\pi (F(K) + F(K')) + M(K) M(K')) + \\ + 8\pi^2 \epsilon^2 (M(K) + M(K')) + \frac{32}{3} \pi^3 \epsilon^3$$

Entonces existe el límite para $\epsilon \rightarrow 0$ del cociente de esta

expresión por ε y lo llamamos $\delta(K, K')$.

$$4.12 \quad \delta(K, K') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{(K_\varepsilon - K) \cap K' \neq \emptyset} dK' =$$

$$= 4\pi(2\pi(F(K) + F(K')) + M(K)M(K'))$$

y resulta que, si ϕ es la medida sobre $G_3(K, K')$ encontrada por Weil,

$$4.13 \quad \phi(K, K', G_3(K, K')) = c. \delta(K, K')$$

lo que explica la "naturalidad" de ϕ .

5. Medida sobre $G_3(K, K')$

En este párrafo, queremos explicitar la medida ϕ sobre $G_3(K, K')$ introducida en el párrafo anterior.

Dados K y K' cuerpos convexos en E_3 , sean β y β' tales que $\beta \subseteq \partial K$ y $\beta' \subseteq \partial K'$. Entonces nos interesa medir aquellas posiciones de K' , tales que K' es tangente a K y además que β' sea tangente a β . Si definimos

$$5.1 \quad C_0(\beta, \beta') = \{g \in G_3(K, K') / K \cap gK' \cap \beta \cap g\beta' \neq \emptyset\}$$

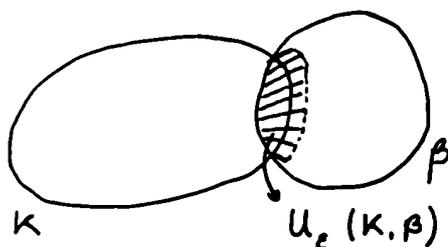
queremos conocer $\phi(K, K', C_0(\beta, \beta'))$

Para ello seguiremos principalmente a W. Weil ([14]),
y R. Schneider ([11]).

Sean en E_3 los siguientes conjuntos:

Dado un cuerpo convexo K , para cada boreliano β en R^3 , definimos.

$$5.2 \quad U_\epsilon(K, \beta) = \{x \in R^3 / d(x, K) = d(x, K \cap \beta) < \epsilon\}$$



Estos conjuntos U_ϵ no son en general convexos por lo tanto no existen los "Quermassintegrale". Entonces se define una generalización de los $W_i(K)$ con $\psi_i(K, \beta)$ de tal forma que $\psi_i(K, R^3) = W_i(K)$.

Para ello calcularemos $A(K, \beta) = V(U_\epsilon(K, \beta))$.

Pero

$$5.3 \quad U_\epsilon(K, \beta) = (K \cap \beta) + [(\beta \cap \partial K)_\epsilon - K]$$

donde la suma indica la suma de Minkowski y $(\beta \cap \partial K)_\epsilon$ es el cuerpo paralelo a distancia ϵ , definido en 4.8.

Entonces

$$5.4 \quad A_\epsilon(K, \beta) = V(K \cap \beta) + \int_0^\epsilon F[(\beta \cap \partial K)_\epsilon - K] d\epsilon$$

y

$$5.5 \quad F[(\beta \cap \partial K)_\epsilon - K] = \int_{\Omega_{\beta \cap \partial K}} (R_1 + \epsilon)(R_2 + \epsilon) d\mu_2$$

donde: $\Omega_{\beta \cap \partial K}$ es la imagen esférica de $\beta \cap \partial K$, o sea que a cada $x \in \beta \cap \partial K$ le asocia el extremo del vector normal unitario a K en x ; R_1, R_2 son los radios de curvatura principales de ∂K en x ; y $d\mu_2$ es el elemento de área sobre la esfera unidad.

Por tanto, de (5.5) se deduce

$$5.6 \quad F[(\beta \cap \partial K)_\epsilon - K] = F(\beta \cap \partial K) + 2M(\beta \cap \partial K)\epsilon + \Omega_{\beta \cap \partial K}\epsilon^2$$

Pero entonces

$$5.7 \quad A_\epsilon(K, \beta) = V(K \cap \beta) + \epsilon F(\beta \cap \partial K) + \epsilon^2 M(\beta \cap \partial K) + \frac{\epsilon^3}{3} \Omega_{\beta \cap \partial K}$$

Recordemos que

$$5.8 \quad A_\epsilon(K, R^3) = V(K_\epsilon) = V(K) + \epsilon F(K) + \epsilon^2 M(K) + \frac{\epsilon^3}{3} \cdot \theta_2$$

o sea

$$5.9 \quad A_\epsilon(K, R^3) = W_0(K) + \epsilon \cdot 3W_1(K) + \epsilon^2 \cdot 3W_2(K) + \epsilon^3 W_3(K)$$

De aquí, si ϵ toma los valores 1, 2, 3, 4 puedo despejar $W_i(K)$ en función de $A_j(K, R^3)$. Resulta

$$W_0(K) = 4A_1(K, R^3) - 6A_2(K, R^3) + 4A_3(K, R^3) - A_4(K, R^3)$$

$$W_1(K) = -\frac{13}{9} A_1(K, R^3) + \frac{19}{6} A_2(K, R^3) - \frac{7}{3} A_3(K, R^3) + \frac{11}{18} A_4(K, R^3)$$

5.10

$$W_2(K) = \frac{1}{2} A_1(K, R^3) - \frac{4}{3} A_2(K, R^3) + \frac{7}{6} A_3(K, R^3) - \frac{1}{3} A_4(K, R^3)$$

$$W_3(K) = -\frac{1}{6} A_1(K, R^3) + \frac{1}{2} A_2(K, R^3) + \frac{1}{2} A_3(K, R^3) + \frac{1}{6} A_4(K, R^3)$$

Entonces se define ([11], pág. 124)

$$\psi_0(K, \beta) = 4 A_1(K, \beta) - 6A_2(K, \beta) + 4A_3(K, \beta) - A_4(K, \beta)$$

$$5.11 \quad \psi_1(K, \beta) = -\frac{13}{9} A_1(K, \beta) + \frac{19}{6} A_2(K, \beta) - \frac{7}{3} A_3(K, \beta) + \frac{11}{18} A_4(K, \beta)$$

$$\psi_2(K, \beta) = \frac{1}{2} A_1(K, \beta) - \frac{4}{3} A_2(K, \beta) + \frac{7}{6} A_3(K, \beta) - \frac{1}{3} A_4(K, \beta)$$

$$\psi_3(K, \beta) = -\frac{1}{6} A_1(K, \beta) + \frac{1}{2} A_2(K, \beta) - \frac{1}{2} A_3(K, \beta) + \frac{1}{6} A_4(K, \beta)$$

Resulta, sustituyendo los A_i por los valores obtenidos en 5.7, que:

$$\begin{aligned}\psi_0(K, \beta) &= V(K \cap \beta) \\ \psi_1(K, \beta) &= \frac{F(\beta \cap \partial K)}{3}\end{aligned}$$

5.12

$$\begin{aligned}\psi_2(K, \beta) &= \frac{M(\beta \cap \partial K)}{3} \\ \psi_3(K, \beta) &= \frac{\Omega_{\beta \cap \partial K}}{3}\end{aligned}$$

Notamos que $\psi_i(K, R^3) = W_i(K)$.

Estas funciones ψ_i , están definidas para cualquier cuerpo convexo K y cualquier boreliano β . Si considero K fijo, se demuestra que $\psi_i(K, \cdot)$ son medidas finitas sobre los borelianos en E_3 (ver [11] , pág. 124).

Notemos aquí que R.Schneider [11] usa otra definición de estas funciones. Él define $\phi_i(K, \beta)$ de tal forma que

$$\phi_i(K, \beta) = \frac{\binom{n}{i}}{\kappa(n-i)} \psi_{n-i}(K, \beta)$$

Estamos ahora en condiciones de definir una medida sobre $G_3(K, K')$ Si $C_0(\beta, \beta')$ es el conjunto definido en 5.1 definimos

$$5.13 \quad C_\varepsilon(C_0(\beta, \beta')) = \{g \in G_3 / 0 < d(K, gK') < \varepsilon \text{ y } T(K, gK') \circ g \in C_0(\beta, \beta')\}$$

donde $T_{K, K'}: R^3 \rightarrow R^3$

$$T_{K,K'}(x) = x + u(K,K')$$

si $u(K,K') = x - x'$, y $x \in K$, $x' \in K'$ son los puntos que "realizan" la distancia de K a K' .

Intuitivamente, sería el conjunto de todos los movimientos, tales que K y gK' estén a distancia menor que ϵ , y además que los puntos x y x' que realizan la distancia de K a gK' estén en β y β' respectivamente.

En general, si η es un subconjunto de G_3 , definiendo

$$C_\epsilon(\eta) = \{g \in G_3 / 0 < d(K, gK') < \epsilon \text{ y } T(K, gK') \text{ o } g \in \eta\}$$

se prueba ([11], pág 140) que $C_\epsilon(\eta)$ es un boreliano de G_3 y entonces existe $\mu(C_\epsilon(\eta))$. Además vale que $\mu(C_\epsilon(\cdot))$ es una medida sobre G_3 , concentrada en $G_3(K, K')$ ([11], pág. 140-141)

Queremos expresar ahora $\mu(C_\epsilon(\eta))$ como polinomio en ϵ , para luego definir la medida buscada como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\mu(C_\epsilon(\eta)))$.

Para ello usaremos la forma explícita de μ . ([11], pág.95) y que un movimiento g , queda determinado por la rotación ρ y la traslación t .

Entonces

$$5.14 \quad \mu(C_\varepsilon(\eta)) = \int_{SO_3} \int_{T(\rho)} d\lambda \, dv(\rho)$$

donde: $d\lambda$ es la medida Lebesgue de E_3

dv es la medida sobre SO_3 y

$$T(\rho) = \{t \in R^3 / g_{\rho,t} \in C_\varepsilon(\eta)\}$$

Mostraremos, siguiendo a W. Weil [14], que $T(\rho)$ es un conjunto de la forma $U_\varepsilon(L, \alpha)$ (ver 5.2) con $L = K - \rho K'$ y

$$\alpha = \{t \in E_3 / g_{\rho,t} \in \eta \cap G_3(K, K')\}$$

Lema

$$\alpha \subseteq \partial(K - \rho K')$$

Dem.:

$$t \in \alpha \Rightarrow K \cap g_{\rho,t} K' \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists x \in K \text{ y } x' \in K' / x = \rho x' + t$$

$$\Rightarrow t = x - \rho x' \Rightarrow t \in K - \rho K'$$

Pero como $g_{\rho,t} \in G_3(K, K') \Rightarrow t \notin (K - \rho K')^\circ$ o sea $t \in \partial(K - \rho K')$.

Entonces

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(K-\rho K', \alpha) &= \{x \in E_3 / d(x, K-\rho K') = d(x, (K-\rho K') \cap \alpha) < \varepsilon\} \\
&= \{x \in E_3 / d(x, K-\rho K') = \min_{y \in \alpha} \{d(x, y)\} < \varepsilon\} = \\
&= \{x \in E_3 / d(x, K-\rho K') = \min_y \{d(x, y) / g_{\rho, y} \in \eta \cap G_3(K, K')\} < \varepsilon\} \\
&= \{x \in E_3 / 0 < d(K, g_{\rho, x} K') < \varepsilon, T(K, g_{\rho, x} K') \circ g_{\rho, x} \in \eta\} = T(\rho)
\end{aligned}$$

donde por $T(K, g_{\rho, x} K')$ indicamos la traslación por el vector distancia entre K y $g_{\rho, x} K'$.

Pero entonces

$$5.15 \quad \int_{T(\rho)} d\lambda = A_\varepsilon(K-\rho K', \alpha)$$

y $A_\varepsilon(K-\rho K', \alpha)$ por 5.7, vale

$$A_\varepsilon(K-\rho K', \alpha) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \binom{3}{3-i} \psi_i(K-\rho K', \alpha)$$

Notemos que el término correspondiente a ψ_0 no aparece ya que $\alpha \subseteq \partial(K-\rho K')$ y entonces $V((K-\rho K') \cap \alpha) = 0$.

Pero

$$5.16 \quad \mu(C_\varepsilon(\eta)) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \binom{3}{3-i} \int_{SO_3} \psi_i(K-\rho K', \alpha)$$

Entonces definimos como medida ϕ sobre $G_3(K, K')$ al coeficiente de ε del polinomio anterior

$$5.17 \quad \phi(K, K', \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mu(C_\varepsilon(\eta)) = \int_{SO_3} \psi_1(K - \rho K', \alpha)$$

Entonces ϕ es una medida concentrada sobre $G_3(K, K')$.

Si ahora considero el conjunto $C_0(\beta, \beta')$, Weil, en [14] prueba que este conjunto es medible según ϕ y Schneider [11] prueba que

$$5.18 \quad \phi(K, K', C_0(\beta, \beta')) = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \frac{3}{\kappa(3)} \psi_{3-i}(K, \beta) \psi_{i+1}(K', \beta')$$

O sea,

$$5.19 \quad \phi(K, K', C_0(\beta, \beta')) = \frac{1}{4\pi} (\Omega_\beta F(\beta') + \Omega_{\beta'} F(\beta) + 2M(\beta) M(\beta'))$$

lo cual resulta de reemplazar en 5.18 los valores de ψ_i obtenidos en 5.12 observando que si $\beta \subset K \Rightarrow F(\beta \cap \partial K) = F(\beta)$.

Además, si $\beta = \beta' = R^3$, entonces $C_0(\beta, \beta') = G_3(K, K')$ y

$$5.20 \quad \phi(K, K', G_3(K, K')) = \frac{1}{4\pi} (4\pi (F(K) + F(K')) + 2M(K) \cdot M(K'))$$

Pero entonces

$$5.21 \quad \delta(K, K') = \theta_2 \cdot \theta_1 \phi(K, K', G_3(K, K'))$$

donde δ es la medida "intuitiva" encontrada en 4.12 y

$$\theta_2 = 4\pi \quad \text{y} \quad \theta_1 = 2\pi$$

Esta última igualdad explica la "naturalidad" de ϕ .

Con estos resultados, la fórmula (5.19) permite enunciar la siguiente

Proposición

Dado un movimiento $g \in G_3(K, K')$ tal que K y gK' son tangentes entonces:

dados $\beta \subseteq \partial K$ y $\beta' \subseteq \partial K'$, la probabilidad de que $g \in C_0(\beta, \beta')$ - o sea que $\beta \cap g\beta' \neq \emptyset$ - está dada por

$$5.22 \quad p(\beta, \beta') = \frac{\Omega_{\beta} F(\beta') + \Omega_{\beta'} F(\beta) + 2M(\beta) M(\beta')}{4\pi (F(K) + F(K')) + 2M(K) M(K')}$$

Como en toda la teoría de probabilidades geométricas, aquí la probabilidad se define simplemente como el cociente de la medida de los casos favorables y del total de los casos posibles.

6. Aplicaciones de la fórmula 5.22

6.1 Cuerpo convexo K_0 y poliedro K_1 .

Dados un cuerpo convexo K_0 , de área F_0 y curvatura media M_0 y un poliedro K_1 , de área F_1 y curvatura media M_1 dada por la fórmula 2.1, existen tres posibilidades de tangencia

a) K_1 toca a K_0 con un vértice.

Usando la notación del párrafo 5, sería

$$\beta_0 \subset K_0 / \beta_0 = \partial K_0 \quad \text{y} \quad \beta_1 \subset \partial K_1 / \beta_1 = \text{vértices}$$

$$p_a = \frac{4\pi F_0}{4\pi(F_0 + F_1) + 2M_0 M_1}$$

b) K_1 toca a K_0 con una cara

$$\beta_0 = \partial K_0 \quad \beta_1 = \text{caras}$$

$$p_b = \frac{4\pi F_1}{4\pi(F_0 + F_1) + 2M_0 M_1}$$

c) K_1 toca a K_0 con una arista

$$\beta_0 = \partial K_0 \quad \beta_1 = \text{aristas}$$

$$p_c = \frac{2 M_0 M_1}{4\pi(F_0 + F_1) + 2M_0 M_1}$$

Este resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

Dado un cuerpo convexo K_0 y un poliedro K_1 que se sabe que se tocan (tienen punto común sin tener puntos interiores comunes), la probabilidad de que el punto de contacto sea un vértice de K_1 , o un punto de una cara de K_1 o un punto de una arista de K_1 , son las anteriores p_a, p_b y p_c respectivamente.

Usando la desigualdad isoperimétrica ([4]), que dice que: si K es un cuerpo convexo de área F y curvatura media M , entonces $\frac{M^2}{F} \geq 4\pi$ probaremos que p_c está entre p_a y p_b o es mayor que ambas.

En efecto dados K_0 y K_1 entonces $\delta F_0 \leq F_1$ o $F_1 < F_0$. Supongamos que $F_0 \leq F_1$. En este caso es $p_a \leq p_b$ y quiero ver que $p_c \geq p_a$.

Supongamos que no, entonces:

$$\begin{aligned}
 2M_0 M_1 &< 4\pi F_0 \\
 M_1 &< 2\pi \frac{F_0}{M_0} \\
 M_1^2 &< 4\pi^2 \frac{F_0^2}{M_0^2} < 4\pi^2 \frac{F_0}{M_0^2} \cdot F_1 \\
 \frac{1}{F_1} &< 4\pi^2 \cdot \frac{F_0}{M_0^2} < \pi \text{ que es un absurdo.}
 \end{aligned}$$

Por tanto $p_c \geq p_a$.

Además, si $\frac{F_1}{F_0} \leq 4$, entonces $p_c \geq p_b$.

En efecto, supongamos que no.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2 M_0 M_1 &< 4 \pi F_1 \\ M_1 &< 2\pi \frac{F_1}{M_0} \\ \frac{M_1^2}{F_1} \cdot \left(\frac{F_0}{F_1} \right) &< 4\pi^2. \quad \frac{F_0}{M_0^2} \leq \pi \\ \frac{M_1^2}{F_1} &< \left(\frac{F_1}{F_0} \right) \pi \leq 4\pi \end{aligned}$$

lo que no es posible, ya que $M_1^2 \geq 4\pi F_1$.

De estas cuentas resulta que, dados K_0 y K_1 en las condiciones anteriores, entonces para ordenar las probabilidades p_a, p_b y p_c , me basta conocer las áreas de K_0 y K_1 respectivamente.

Además se ve otra cosa:

Dado un cuerpo convexo K_0 , no existe ningún poliedro tal que las tres probabilidades resulten iguales. Pues si $p_a = p_b$ o sea $F_0 = F_1$ entonces, para que $p_c = p_a \Rightarrow$

$$2M_0 M_1 = 4\pi F_0$$

$$M_1 = 2\pi \frac{F_0}{M_0}$$

$$\frac{M_1^2}{F_1} = 4\pi^2 \frac{F_0}{M_0^2} < \pi$$

lo cual no puede ser

6.2. Dos poliedros K_0 , K_1

Dados dos poliedros K_0 y K_1 , básicamente existen nueve probabilidades de tangencia de las cuales solamente tres son no nulas.

a) K_1 toca con un vértice alguna cara de K_0

$$\beta_0 = \text{caras} \quad \beta_1 = \text{vértices}$$

$$P_a = \frac{4\pi F_0}{4\pi(F_0 + F_1) + 2M_0 M_1}$$

b) K_0 toca con un vértice alguna cara de K_1

$$P_b = \frac{4\pi F_1}{4\pi(F_0 + F_1) + 2M_0 M_1}$$

c) K_0 y K_1 se tocan arista con arista

$$p_c = \frac{2M_0M_1}{4\pi(F_0 + F_1) + 2M_0M_1}$$

Notemos que estamos en el mismo caso que antes , o sea que la relación de orden entre las probabilidades dependerá exclusivamente de la relación de orden entre las áreas de los poliedros.

6.2.1. Otra observación interesante es la siguiente:

Suponiendo que $F_0 \leq F_1$ ¿cuándo resultará máxima p_c ?

Se tiene

$$\frac{F_0 + F_1}{M_0M_1} \geq \frac{2F_0}{M_0M_1}$$

y se cumple la igualdad si y sólo si $F_0 = F_1$ y p_c es máxima, si

$\frac{F_0 + F_1}{M_0M_1}$ es mínima o sea si $F_0 = F_1$.

Por lo tanto, si dividiera a los poliedros en clases de equivalencias por sus áreas, resulta que: si elijo dos poliedros cualesquiera, p_c será máxima si ambos están en la misma clase de equivalencia.

6.3 Ejemplos del caso 6.2.

6.3.1. $K_0 = K_1 =$ cubo de arista a

$$P_a = P_b = \frac{4\pi \cdot 6 a^2}{4\pi(12 a^2) + 2.9\pi^2 a^2} = 0,23$$

$$P_c = \frac{2.9.\pi^2 a^2}{4\pi(12 a^2) + 2.9.\pi^2 a^2} = 0,54$$

Este ejemplo está considerado por Scheider en [11] , pág 152.

6.3.2. $K_0 = K_1$ = paralelepípedo recto de lados a, b, c

$$P_a = P_b = \frac{4\pi \cdot 2(ab + bc + ac)}{4\pi(4(ab + bc + ac)) + 2\pi^2(a + b + c)^2}$$

$$P_c = \frac{2\pi^2(a + b + c)^2}{4\pi(4(ab + bc + ac)) + 2\pi^2(a + b + c)^2}$$

Notemos que

$$P_a = P_b = \frac{4F}{8F + \pi M^2}$$

y

$$P_c = \frac{\pi M^2}{8F + \pi M^2}$$

6.3.3. $K_0 = K_1$ = paralelepípedo de lados a, b, c y ángulos $\alpha_1 = \sphericalangle(a, b)$
 $\alpha_2 = \sphericalangle(b, c)$ $\alpha_3 = \sphericalangle(a, c)$

$$p_a = p_b = \frac{4(ab \operatorname{sen} \alpha_1 + bc \operatorname{sen} \alpha_2 + ac \operatorname{sen} \alpha_3)}{8(ab \operatorname{sen} \alpha_1 + bc \operatorname{sen} \alpha_2 + ac \operatorname{sen} \alpha_3) + \pi(a+b+c)^2}$$

$$p_c = \frac{\pi(a+b+c)^2}{8(ab \operatorname{sen} \alpha_1 + bc \operatorname{sen} \alpha_2 + ac \operatorname{sen} \alpha_3) + \pi(a+b+c)^2}$$

Si ahora considero todos los paralelepípedos de lados a, b, c , fijos y α_i variando, entonces p_a, p_b y p_c dependen de α_i ; pero $M(K)$ es fijo como se probó en el párrafo 3-b₁; por lo tanto p_a resulta máxima si $F(K)$ es máxima. Pero $F(K)$ es máxima si el área de cada cara lo es.

Sea $F(\alpha_1)$ = área de una cara

$$\Rightarrow F(\alpha_1) = a \cdot b \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$F'(\alpha_1) = a \cdot b \cos \alpha_1$$

$$F'(\alpha_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

O sea:

$p_a = p_b$ máxima $\Leftrightarrow F(K)$ máxima $\Leftrightarrow K$ es un paralelepípedo recto.

Análogamente resulta: p_c mínima $\Leftrightarrow F(K)$ máxima

$\Leftrightarrow K$ es un paralelepípedo recto.

6.3.4. $K_0 = K_1$ = tetraedro regular de arista a

$$P_a = P_b = \frac{4\pi\sqrt{3} a^2}{4\pi(2\sqrt{3} a^2) + 2.9a^2(\arccos(-\frac{1}{3}))^2} = 0,20$$

$$P_c = \frac{2.9 a^2 [\arccos(-\frac{1}{3})]^2}{4\pi(2\sqrt{3} a^2) + 2.9.a^2(\arccos(-\frac{1}{3}))^2} = 0,60$$

6.3.5. K_0 = cubo de arista a y K_1 = tetraedro de arista b

p_i = probabilidad de que un vértice de K_1 toque una cara de K_0

$$p_i = \frac{4\pi 6a^2}{4\pi(6a^2 + \sqrt{3} b^2) + 2.9.\pi.a.b \arccos(-\frac{1}{3})}$$

p_{ii} = probabilidad de que un vértice de K_0 toque una cara de K_1

$$p_{ii} = \frac{4\pi\sqrt{3} b^2}{4\pi(6a^2 + \sqrt{3} b^2) + 2.9.\pi.a.b.\arccos(-\frac{1}{3})}$$

p_{iii} = probabilidad de que K_0 y K_1 se toquen arista contra arista.

$$p_{iii} = \frac{2.9.\pi. a.b. \arccos(-\frac{1}{3})}{4\pi(6a^2 + \sqrt{3} b^2) + 2.9.\pi. a.b.\arccos(-\frac{1}{3})}$$

Suponiendo ahora a fijo y b variable, usando 6.2.1. se sabe

que p_{iii} es máxima cuando $F(K_0) = F(K_1)$ o sea

$$6a^2 = \sqrt{3} b^2$$

$$b = a \cdot \sqrt{2 \sqrt{3}}$$

entonces: $p_i = p_{ii} = 0,214$

$$p_{iii} = 0,57$$

6.4. Otros ejemplos para la fórmula 5.22

6.4.1. Si K es un cubo de arista a y K' es un segmento de longitud l entonces - de las cuatro probabilidades posibles, solamente 2 resultan distintas de cero.

i) el segmento toca de punta una cara del cubo

$$p_i = \frac{4\pi \cdot 6 a^2}{4\pi \cdot 6a^2 + 2 \cdot 3\pi a \pi l} = \frac{4a^2}{4a^2 + \pi a l}$$

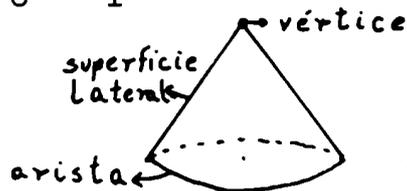
ii) el segmento toca una arista del cubo

$$p_{ii} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi a \pi l}{4\pi \cdot 6a^2 + 2 \cdot 3 \cdot \pi a \pi l} = \frac{\pi a l}{4a^2 + \pi a l}$$

En el caso en el que $l=a$, resulta

$$p_i = 0,56 \quad \text{y} \quad p_{ii} = 0,44$$

6.4.2. Sean ahora $K_0 = K_1 =$ cono de revolución de radio de base R y altura h .



Usaremos la nomenclatura de la figura.

Las distintas posibilidades para β_0 ó β_1 son:

$$\beta_j = \text{vértice}$$

$$F(\beta_j) = M(\beta_j) = 0$$

$$\Omega_{\beta_j} = 2\pi \left(1 - \cos\left(\arctg \frac{h}{R}\right)\right) \quad j=0,1$$

$$\beta_j = \text{superficie lateral}$$

$$F(\beta_j) = \pi R(R^2 + h^2)^{1/2}$$

$$M(\beta_j) = \pi h$$

$$\Omega_{\beta_j} = 0 \quad j = 0,1$$

$$\beta_j = \text{base}$$

$$F(\beta_j) = \pi R^2$$

$$\Omega_{\beta_j} = M(\beta_j) = 0 \quad j = 0,1$$

$$\beta_j = \text{arista}$$

$$F(\beta_j) = 0$$

$$M(\beta_j) = \pi \left(\pi R - R \arctg \left(\frac{h}{R}\right)\right)$$

$$\Omega_{\beta_j} = 2\pi \left(1 + \cos\left(\arctg \frac{h}{R}\right)\right) \quad j=0,1$$

De las dieciséis probabilidades posibles, resultan solamente diez distintas de cero:

- i) el vértice de K_0 toca a K_1 en la superficie lateral -o sea, $\beta_0 = \text{vértice}$ y $\beta_1 = \text{superficie lateral}$

$$P_i = \frac{2\pi \cdot (1 - \cos(\arctg \frac{h}{R})) \cdot \pi R (R^2 + h^2)^{1/2}}{4\pi(2\pi R(R + (R^2 + h^2)^{1/2})) + 2\pi^2(\pi R + h - R \arctg(\frac{h}{R}))^2}$$

- ii) el vértice de K_1 toca a K_0 en la superficie lateral $P_{ii} = P_i$

- iii) el vértice de K_0 toca a K_1 en la base o sea: $\beta_0 = \text{vértice}$
 $\beta_1 = \text{base}$

$$P_{iii} = \frac{2\pi(1 - \cos(\arctg \frac{h}{R})) \pi R^2}{M}$$

donde en lo sucesivo denotamos con M al denominador de p_i , o sea

$$M = 4\pi(2\pi R(R + (R^2 + h^2)^{1/2})) + 2\pi^2(\pi R + h - R \arctg(\frac{h}{R}))^2$$

- iv) el vértice de K_1 toca a K_0 en la base $P_{iv} = P_{iii}$.

- v) la superficie lateral de K_0 toca a K_1 en la arista - o sea $\beta_0 =$
 $= \text{superficie lateral}$ $\beta_1 = \text{arista}$

$$P_v = \frac{2\pi^2 R(R^2 + h^2)^{1/2} (1 + \cos(\arctg \frac{h}{R})) + 2\pi^2 h(\pi R - R \arctg(\frac{h}{R}))}{M}$$

vi) la superficie lateral de K_1 toca a K_0 en la arista

$$P_{vi} = P_v$$

vii) la superficie lateral de K_0 toca a la superficie lateral de K_1
o sea $\beta_0 = \beta_1$ superficie lateral

$$P_{vii} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot h^2}{M}$$

viii) la arista de K_0 toca a la base de K_1 o sea: $\beta_0 =$ arista y
 $\beta_1 =$ base

$$P_{viii} = \frac{2\pi^2 R^2 (1 + \cos(\arctg \frac{h}{R}))}{M}$$

ix) la arista de K_1 toca a la base de K_0

$$P_{ix} = P_{viii}$$

x) la arista de K_0 toca a la arista de K_1 , o sea $\beta_0 = \beta_1 =$ arista

$$P_x = \frac{2\pi^2 (\pi R - R \arctg(\frac{h}{R}))^2}{M}$$

Ahora bien, si $h=R$, p_j se pueden calcular numéricamente y resultan $p_i = p_{ii} = 0.02$

$$p_{iii} = p_{iv} = 0,01$$

$$p_v = p_{vi} = 0,23$$

$$p_{vii} = 0,05$$

$$p_{viii} = p_{ix} = 0,08$$

$$p_x = 0,27$$

6.4.3. Sea ahora K_0 una placa convexa de área f y longitud de contorno u y K_1 un segmento de longitud l .

Entonces hay solamente dos posibilidades de tangencia no nulas.

i) el segmento toca la "cara" de la placa con la punta - $\beta_0 = \text{cara}$ y $\beta_1 = \text{vértice}$.

$$p_i = \frac{4\pi f}{4\pi f + \pi^2 u l}$$

ii) la "arista" del segmento toca el borde de la placa

$$p_{ii} = \frac{\pi^2 u l}{4\pi f + \pi^2 u l}$$

De ahora en adelante, hasta finalizar los casos particulares de 5.22, K_0 será un cuerpo convexo cualquiera de área F_0 y curvatura media M_0 .

6.4.4. $K_1 =$ segmento de longitud ℓ .

Entonces el segmento puede tocar a K_0 de punta

$$P_i = \frac{4 \pi F_0}{4 \pi F_0 + 2 \pi \ell M_0}$$

o si no tocar a K_0 con la arista

$$P_{ii} = \frac{2 \pi \ell M_0}{2 \pi F_0 + 2 \pi \ell M}$$

Nuevamente, aplicando la desigualdad isoperimétrica $\frac{M^2}{F} > 4\pi$ se obtiene

$$P_i \leq \frac{1}{1 + \frac{2\pi\ell}{M_0}}$$

Pero si K_0 es una esfera, entonces $\frac{M_0^2}{F_0} = 4\pi$ o sea $P_i = \frac{1}{1 + \frac{2\pi\ell}{M_0}}$.

Entonces, la probabilidad de que un segmento tangente a un cuerpo M_0 convexo K toque a éste "de punta" , es máxima en el caso en el que K es una esfera. Pero entonces la probabilidad que lo toque con la arista será mínima, cuando K sea una esfera.

6.4.5. $K_1 =$ cilindro convexo recto de altura h , área de base f y longitud de contorno u .

En este caso existen tres probabilidades de tangencia:

i) el cilindro toca a K_0 con la base

$$P_i = \frac{8 \pi f}{4 \pi (2f + uh + F_0) + 2 \left(\pi h + \frac{\pi}{2} u \right) M_0}$$

ii) el cilindro toca a K_0 con alguna de las aristas

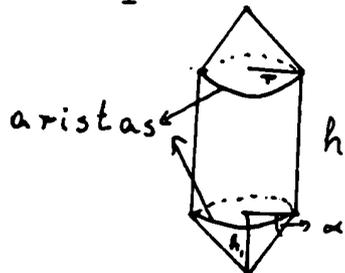
$$P_{ii} = \frac{2 M_0 \cdot \frac{\pi}{2} u + 4 \pi F_0}{4 \pi (2f + uh + F_0) + 2 \left(\pi h + \frac{\pi}{2} u \right) M_0}$$

$$P_{ii} = \frac{\pi M_0 u + 4 \pi F_0}{4 \pi (2f + uh + F_0) + (2 \pi h + \pi u) M_0}$$

iii) el cilindro toca a K_0 con la superficie lateral

$$P_{iii} = \frac{4 \pi u h + 2 M_0 \pi h}{4 \pi (2f + uh + F_0) + 2 \pi \left(\pi h + \frac{\pi}{2} u \right) M_0}$$

6.4.6. K_1 = cilindro terminado en conos



En este caso hay cuatro probabilidades nulas.

i) K_1 toca a K_0 con algún vértice $\beta_1 =$ vértices

$$P_i = \frac{4\pi (1 - \cos(\arctg \frac{h_1}{R}))}{4\pi(F_0 + 2\pi r(h + (r^2 + h_1^2)^{1/2})) + 2M_0 \pi(h + 2h_1 + r(\pi - 2\alpha))}$$

A lo largo de este caso llamaremos

$$D = 4\pi(F_0 + 2\pi r(h + (r^2 + h_1^2)^{1/2})) + 2M_0 \pi(h + 2h_1 + r(\pi - 2\alpha))$$

ii) K_1 toca a K_0 con una arista

$$P_{ii} = \frac{4\pi \cos \alpha F_0 + 2 M_0 \pi r(\pi - 2\alpha)}{D}$$

iii) K_1 toca a K_0 con la superficie lateral de un cono

$$P_{iii} = \frac{4\pi \cdot 2\pi r ((r^2 + h_1^2)^{1/2}) + 2M_0 \cdot 2\pi h_1}{D}$$

iv) K_1 toca a K_0 con la superficie lateral cilíndrica

$$P_{iv} = \frac{4\pi \cdot 2\pi r h + 2 M_0 \pi h}{D}$$

Nota: no hemos simplificado las expresiones, para que se vea más clara la procedencia de éstas.

III MEDIDA CINEMATICA PARA CILINDROS CONVEXOS EN E_3

7. Cilindros finitos

Sea en E_3 , $Z(h)$ un cilindro recto de altura h y base convexa D . Sea u la longitud del contorno de D y $F(D)$ el área de D y sea K un cuerpo convexo cualquiera en E_3 , de área F_0 e integral de curvatura media M_0 .

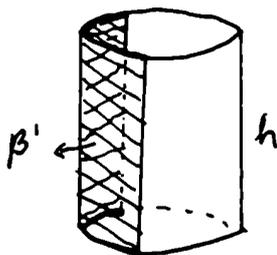
Recordando la definición de $G_3(K, Z(h))$ dada en 4.7 y considerando $\beta \subseteq \partial K$ y $\beta' \subseteq \partial Z(h)$, puedo calcular la medida del conjunto de todos aquellos movimientos $g \in G_3(K, Z(h))$, tales que $\beta \cap g\beta' \neq \emptyset$, aplicando directamente 5.19 al caso en que $K' = Z(h)$.

Resulta entonces

$$7.1 \quad \phi(K, Z(h), C_0(\beta, \beta')) = \frac{1}{4\pi} (\Omega_{\beta} \cdot F(\beta') + \Omega_{\beta'} \cdot F(\beta) + 2M(\beta) M(\beta'))$$

donde $C_0(\beta, \beta')$ es el definido en 5.1.

Consideremos ahora $\beta' \subseteq \partial Z(h)$ de la siguiente forma:



β' es una parte de la superficie lateral que tiene por base un arco de ∂D , y altura h , es decir, β' es un sector de la superficie lateral de $Z(h)$.

En este caso, resulta sencillo calcular explícitamente

$F(\beta')$, $M(\beta')$ y $\Omega_{\beta'}$.

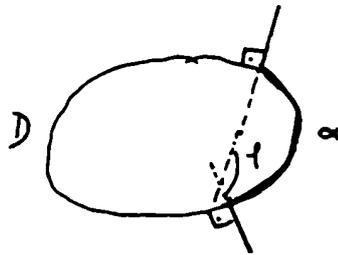
Sea $\alpha = \beta' \cap \partial D = \beta' \cap D$ - y sea l la longitud de α .

Pero entonces

$$7.2 \quad F(\beta') = l \cdot h$$

$$7.3 \quad \Omega_{\beta'} = 2 \cdot \varphi$$

donde φ es el ángulo que forman las normales exteriores en los extremos de α

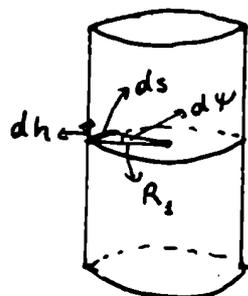


Para calcular la curvatura media de β' , tengo que calcular la curvatura media de la parte lateral y de las "aristas".

$$7.4. \quad M(\beta') = M(\text{parte lateral}) + M(\text{aristas})$$

Pero

$$7.5 \quad M(\text{parte lateral}) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{R_1} d\sigma = \frac{1}{2} \int \frac{d\psi}{ds} \cdot dh \cdot ds$$



$$= \frac{1}{2} \int_0^\varphi d\psi \int_0^h dh = \frac{h}{2} \cdot \varphi$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área de $\partial Z(h)$ y R_1 , $d\psi$, dh y ds son los indicados en la figura, o sea: $d\psi$ es el elemento de ángulo entre dos normales a ∂D , dh es el elemento de arco de la altura y ds es el elemento de arco de ∂D .

Para calcular la curvatura media de las aristas, aplico la fórmula obtenida en 2.10

O sea,

$$7.6 \quad M(\text{arista}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha} \gamma ds$$

donde ds es el elemento de arco de ∂D , α es la arista y γ es el ángulo diedro de α .

$$\text{En este caso } \gamma = \frac{\pi}{2} = \text{constante}$$

Entonces de 7.6 resulta

$$7.7 \quad M(\text{arista}) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \cdot \ell$$

Juntando 7.5 y 7.7 obtenemos

$$7.8 \quad M(\beta') = \frac{h}{2} \cdot \varphi + \frac{\pi}{2} \cdot \ell$$

Por lo tanto, reemplazando en 7.1 estos valores se obtienen

$$7.9 \quad \phi(K, Z(h), C_0(\beta, \beta')) = \frac{1}{4\pi} (\Omega_{\beta} \cdot h + 2 \cdot \varphi F(\beta) + \\ + M(\beta) \cdot (h \cdot \varphi + \pi \Pi))$$

y

$$7.10 \quad \phi(K, Z(h), G_3(K, Z(h))) = \frac{1}{4\pi} (4 (uh + F(D) + F(K)) + \\ + 2M(K) (\pi h + \frac{\pi}{2} u))$$

Estas son las medidas de los conjuntos de movimientos que llevan a $Z(h)$ a ser tangente a K , en un punto de $\beta y \beta'$, para $\phi(K, Z(h), C_0(\beta, \beta'))$, o en un punto cualquiera de ∂K y $\partial Z(h)$, para $\phi(K, Z(h), G_3(K, Z(h)))$.

8. Cilindros infinitos

Por un cilindro infinito, entendemos el límite, cuando h tiende a infinito de un cilindro de altura h . También se puede definir de la siguiente forma:

dado un plano E_2 , sea D un conjunto convexo, tal que $D \subseteq E_2$. Para cada x de E_2 , existe L_x , una recta ortogonal a E_2 que pasa por x . Entonces un cilindro infinito es la unión, sobre x en D de L_x .

O sea, si con Z denotamos un cilindro infinito

$$Z = \lim_{h \rightarrow \infty} Z(h) = \bigcup_{x \in D} L_x$$

De la segunda definición se ve que Z queda totalmente determinado por el conjunto de dimensión 2, D .

Entonces definimos

$$8.1 \quad Z(D) = \{Z' / \exists g \in G_3 / Z' = gZ\}$$

Schneider ([11], pág.106) prueba que existe sobre $Z(D)$ una medida invariante γ_D .

Aquí relacionaremos a γ_D con μ , recordando que μ es la medida sobre G_3 . Para ello necesitaremos las siguientes observaciones:

Sea E_2 un plano fijo en E_3 y sea L_1 una recta ortogonal a E_2 , también fija. Entonces

$$8.2 \quad E_3 = E_2 \oplus L_1$$

O sea, si $t \in E_3 \Rightarrow t = t_1 + t_2$ con $t_1 \in E_2$ y $t_2 \in L_1$.

Sea ahora A un subconjunto de $Z(D)$, donde el conjunto convexo D es tal que $D \subseteq E_2$. A A le puedo asociar un subconjunto de G_3 , sea:

$$8.3 \quad G_3(A) = \{g \in G_3 / gZ \in A\}$$

Ahora bien, si $g \in G_3$, entonces existen (θ, t) tales que $\theta \in SO_3$ (grupo de rotaciones en E_3) y $t \in E_3$ tales que $g(x) = \theta(x+t)$.

Pero, si $g \in G_3(A)$, entonces

$$8.4 \quad gZ = \theta(Z + t)$$

Considerando E_3 como en 8.2, 8.4 resulta

$$8.5 \quad gZ = (Z + t_1 + t_2)$$

Ahora bien, como $D \subseteq E_2$,

$$8.6 \quad \theta(Z + t_1 + t_2) = \theta(Z + t_1 + t)$$

con $t \in L_1$ cualquiera

De aquí se deduce que $G_3(A)$ es un conjunto de medida infinita, según μ . Entonces defino

$$8.7 \quad G_3(A, h) = \{g \in G_3 / gZ \in A \text{ y /si} \\ gZ = \theta(Z + t_1 + t_2) \Rightarrow |t_2| < h\}$$

Recordando la forma explícita de μ ([1], pág. 95) calculemos $\mu(G_3(A, h))$. Pero es

$$8.8 \quad \mu(G_3(A, h)) = \int_{G_3(A, h)} d\mu(g) = \int_{SO_3} \int_{T(\theta)} d\lambda \, d\nu(\theta)$$

donde

$$T(\theta) = \{t = t_1 + t_2 \in E_3 / (\theta, t) \in G_3(A, h)\}$$

$d\lambda$ es la medida de Lebesgue de E_3 .

y $d\nu$ es la medida sobre SO_3 .

Pero pensando $E_3 = E_2 \oplus L_1$, resulta que

8.9 $d\lambda = d\lambda_2 \wedge dt_2$ donde
 $d\lambda_2$ es la medida de Lebesgue sobre E_2 y
 dt_2 es la medida Lebesgue sobre L_1 ,

Entonces 8.8 resulta

$$8.10 \quad \mu(G_3(A, h)) = \int_{SO_3} \int_{\overline{T(\theta)}} \frac{dv(\theta) d\lambda_2(t_1)}{T(\theta)} \Bigg|_{-h}^h dt_2 =$$

$$= 2 \cdot h \int_{SO_3} \int_{\overline{T(\theta)}} dv(\theta) d\lambda_2(t_1)$$

siendo $\overline{T(\theta)} = \{t_1 \in E_2 / \theta(Z + t_1) \in A\}$ donde por " $Z + t_1$ " entenderemos al cilindro infinito que queda determinado por $D + t_1$.

Pero observando la forma explícita de γ_D ([11], pág.106) resulta que:

$$8.11 \quad \gamma_D(A) = \int_{SO_3} \int_{\overline{T(\theta)}} dv(\theta) d\lambda_2$$

y entonces :

$$8.12 \quad \gamma_D(A) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2h} \cdot \mu(G_3(A, h)).$$

9. Medida tangencial para cilindros infinitos

Sea :

$$9.1 \quad Z(D,K) = \{Z' / \exists g \in G_3(K,Z) / Z' = gZ\}$$

donde $G_3(K,Z) = \{g \in G_3 / K \text{ y } gZ \text{ son tangentes}\}$ (ver 4.7) y K es un cuerpo convexo en E_3 .

Usando la relación dada en 8.12 podemos ahora definir una medida $\phi_D(K, \cdot)$ sobre $Z(D)$, concentrada sobre $Z(D,K)$ definido en 9.1, para medir subconjuntos de $Z(D,K)$.

Definimos:

$$9.2 \quad \phi_D(K,A) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2h} \phi(K, Z(h), G_3(A,h))$$

siendo A un subconjunto de $Z(D)$, $Z(h)$ y $G_3(A,h)$ los definidos en 8.1 y 8.7 respectivamente.

Veamos cómo resulta ϕ_D explícitamente. Si $\beta \subseteq \partial K$ y $\beta' \subseteq \partial Z$, queremos medir el siguiente conjunto

$$9.3 \quad A(\beta, \beta') = \{Z' \in Z(D,K) / \text{si } Z' = gZ \Rightarrow \beta \cap g\beta' \neq \emptyset\}$$

Para poder medir $A(\beta, \beta')$ observemos, que elegir $\beta' \subseteq \partial Z$ es equivalente a elegir $\bar{\beta}'$ en ∂D y entonces es $\beta' = \bigcup_{x \in \bar{\beta}'} L_x$

Llamamos $\beta'(h) = \bar{\beta}' + t_2$ con $t_2 \in L_1$ tal que $|t_2| < h$ y "+" indica la suma de Minkowski.

Si $C_0(\beta, \beta'(h))$ es el conjunto definido en 5.1, observemos que:

$$9.4 \quad \phi(K, Z(h), G_3(A(\beta, \beta'), h)) = \phi(K, Z(h), C_0(\beta, \beta'(h))) - \theta(h)$$

$$\text{con } \lim_{h \rightarrow \infty} \theta(h) = 0$$

9.4 se deduce del hecho de que $\phi(K, K', \cdot)$ es una medida concentrada sobre $G_3(K, K')$ (o sea, si $\eta \in G_3$, $\phi(K, K', \eta) = \phi(K, K', \eta \cap G_3(K, K'))$) y que $A(\beta, \beta') \subseteq G_3(K, Z)$ y por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [G_3(A(\beta, \beta'), h) - G_3(K, Z(h))] = 0$$

que es lo mismo que decir que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [C_0(\beta, \beta'(h)) - G_3(A(\beta, \beta'), h)] = 0$$

Pero entonces 9.2 resulta

$$9.5 \quad \phi_D(K, A(\beta, \beta')) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2h} \cdot \phi(K, Z(h), C_0(\beta, \beta'(h)))$$

y reemplazando en 9.5 los valores de 7.9 y considerando que ahora $Z(h)$ tiene altura $2h$, se obtiene

$$9.6 \quad \phi_D(K, A(\beta, \beta')) = \frac{1}{4\pi} (\Omega_{\beta} \cdot \ell + M(\beta) \cdot \varphi)$$

siendo $\ell = \text{longitud de } \bar{\beta}'$

$\varphi = \text{ángulo entre las normales (ver figura de 7.3)}$

En el caso en el que $\beta = \beta' = E_3$, 9.5 resulta .

$$9.7 \quad \phi_D(K, Z(D, K)) = \frac{1}{4\pi} (4\pi \cdot u + M(K) \cdot 2\pi)$$

siendo u la longitud del contorno de D y $M(K)$ la curvatura media de K .

Estamos ahora en condiciones de enunciar el resultado equivalente a 5.22

Proposición

Sean en E_3 un cuerpo convexo K de curvatura media $M(K)$ y un cilindro infinito Z cuya sección recta es una figura convexa D de dimensión 2 y de perímetro u . Además sea $\beta \subseteq \partial K$, de imagen esférica Ω_β y curvatura media $M(\beta)$ y sea $\beta' \subseteq \partial Z / \beta' \cap D = \bar{\beta}' \subseteq \partial D$, $\bar{\beta}' \subseteq \partial D$ tal que $\text{long } \bar{\beta}' = l$ y el ángulo que forman las normales exteriores a $\bar{\beta}'$ es φ . Entonces: suponiendo que Z y K son tangentes, la probabilidad de que el punto de tangencia se encuentre en β y β' está dada por

$$9.8 \quad P_D(\beta, \beta') = \frac{\Omega_\beta \cdot l + M(\beta) \cdot \varphi}{4\pi u + 2\pi M(K)}$$

Como corolario de esta proposición se obtiene:

En el caso que D se reduzca a un punto p - o sea Z es una recta, de 9.6 y 9.7 resulta

$$9.9 \quad \phi_P(K, A(\beta)) = \frac{1}{8\pi} 2\pi M(\beta) \text{ y}$$

$$9.10 \quad \phi_P(K, Z) = \frac{1}{8\pi} 2\pi M(K)$$

siendo $M(K)$ la integral de curvatura media de ∂K .

o sea que: dados un cuerpo convexo K y $\beta \subseteq \partial K$, la probabilidad de que una recta tangente a K , sea tangente en β , está dada por

$$9.11 \quad p(\beta) = \frac{M(\beta)}{M(K)}$$

Nota: 9.10 coincide con la medida de todas las rectas que son tangentes a K y de 9.9 se ve que, recordando las funcionales ψ_i definidos en 5.10

$$\phi_P(K, A(\beta)) = \frac{4}{3} \psi_2(K, \beta)$$

o sea que $\psi_2(K, \cdot)$ sería una medida natural sobre las rectas que son tangentes a K (ver [13]).

Observación:

En este párrafo hemos encontrado una medida sobre $Z(D)$, que es el conjunto de todos aquellos cilindros, cuya sección horizontal es un conjunto congruente a D .

J.A.Wieacker [15], en su tesis no publicada, encuentra una medida sobre el conjunto de cilindros no congruentes según otra medida definida sobre el conjunto de los cuerpos convexos.

9₁.- Franjas de espacio limitadas por planos

En E_3 , hay otro caso de cilindros infinitos:

Se trata de la franja de espacio limitada por dos planos paralelos a distancia ℓ .

Veamos como podemos construir un cilindro de esa forma:

Sea S un segmento de longitud ℓ , $S \subseteq L_1$ recta en E_3 . Sea para cada $x \in L_1$, $E_2(x)$ el plano ortogonal a L_1 que pasa por x . Entonces definimos

$$9_{1.1.} \quad Z_S = \bigcup_{x \in S} E_2(x)$$

Ahora bien, llamemos $B_2(x, h)$ a la bola dos-dimensional de radio h y centro x , tal que $\forall x \in L_1$, $B_2(x, h) \subseteq E_2(x)$; resulta

$$9_{1.2} \quad Z_S = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\bigcup_{x \in S} B_2(x, h) \right)$$

y llamando $Z_S(h) = \bigcup_{x \in S} B_2(x, h)$

$$9_{1.3} \quad Z_S = \lim_{h \rightarrow \infty} Z_S(h)$$

Si consideramos

$$9_{1.4} \quad Z_1(S) = \{Z' / \exists g \in G_3 / Z' = gZ_S\}$$

nuevamente queremos encontrar una medida γ'_S sobre $Z_1(S)$. Para ello

procedemos igual que en 8. Tomemos $E_3 = L_1 \oplus E_2$ y entonces, si A es un subconjunto de $Z_1(S)$,

$$9_{1.5} \quad \gamma'_S(A) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi h^2} \mu(A(h))$$

donde $A(h) = \{g \in G_3 / \theta(Z + t) \in A \text{ y si}$
 $t = t_1 + t_2 \Rightarrow \|t_2\|_2 < h\}$

Si $Z_1(K, S) = \{Z' \in Z_1(S) / K \text{ y } Z' \text{ son tangentes}\}$ donde K es un cuerpo en E_3 , definimos sobre $G_3(K, Z_S)$ una medida, análogamente a lo hecho en 9.

Tomamos

$$9_{1.6} \quad \phi_S^1(K, A) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi h^2} \phi(K, Z_S(h), A(h))$$

siendo A un subconjunto de $Z_1(S)$ y $\phi(K, K', \cdot)$ la medida sobre G_3 concentrada sobre $G_3(K, K')$ definida en 5.17.

Análogamente a lo hecho en 9, si

$$9_{1.7} \quad A(\beta) = \{Z' \in Z_1(K, S) / Z' \text{ es tangente a } K \text{ en } \beta\}$$

β está incluido en ∂K . Notemos que no tiene sentido elegir β' en ∂Z_S .

Resulta

$$9_{1.8} \quad \phi_S^1(K, A(\phi)) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi h^2} \phi(K, Z_S(h), A(\beta)(h))$$

donde

$$9_{1.9} \quad A(\beta)(h) = C_O(\beta, \partial Z(h)) \text{ con}$$

$C_O(\beta, \partial Z(h))$ el conjunto definido en 5.1

Pero entonces

$$9_{1.10} \quad \phi_S^1(K, A(\beta)) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi h^2} \left[\frac{1}{4\pi} (\Omega_\beta \cdot (2\pi h \ell + 2\pi h^2)) \right. \\ \left. + 2M(\beta) \cdot (\pi \ell + \pi^2 h) \right]$$

$$\phi_S^1(K, A(\beta)) = \frac{\Omega_\beta}{2\pi}$$

Además, si $\beta = E_3$, entonces $9_{1.10}$ resulta

$$9_{1.11} \quad \phi_S^1(K, A(E_3)) = 2 = \frac{4\pi}{2\pi}$$

Entonces resulta:

Sea en E_3 un cuerpo convexo K , sea $\beta \subseteq \partial K$ de imagen esférica Ω_β y sea Z_S una franja de espacio limitada por dos planos a distancia $\ell = \text{long. (S)}$, entonces la probabilidad de que Z_S y K sean tangentes exactamente en β , suponiendo que Z_S y K son tangentes, está dada por

$$9_{1.12} \quad p_S(\beta) = \frac{\Omega_\beta}{4 \cdot \pi}$$

Nuevamente, como corolario se deduce: si S se reduce a un punto P , entonces $\phi_P^1(K, \cdot)$ da una medida sobre todos los planos tangentes a K en $\beta \subseteq \partial K$.

$$9_{1.13} \quad \phi_P^1(K, \beta) = \frac{\Omega_\beta}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} \cdot \psi_3(K, \beta)$$

lo que prueba que $\psi_3(K, \cdot)$ es una medida sobre los planos tangentes a K . Este resultado se puede obtener por otro método directamente ([13]) pero aquí resulta como corolario de que $\phi_P^1(K, \cdot)$ es una medida.

10. Aplicaciones de la fórmula obtenida en 9.8

10.1 Cuerpo convexo K y cilindro poliédrico Z_D .

Dados un cuerpo convexo K , de integral de curvatura media $M(K)$ y un cilindro Z_D , tal que su base D sea un polígono de aristas ℓ_i y ángulos A_i , y considerando las posibilidades de tangencia de Z_D con K , hay dos posibilidades.

- i) Z_D toca a K según una "cara" esto significa que $\beta' = \bigcup_{x \in \ell_i} L_x$ si L_x es la recta ortogonal a D que pasa por x (considerando ℓ_i sin los extremos), y $\beta = \partial K$, aplicando (9.8) y simplificando

$$p_i = \frac{2 \cdot \sum_i l_i}{2 \cdot \sum_i l_i + M(K)}$$

ii) Z_D toca a K según una "arista" o sea que $\beta' = \bigcup_{x \in \text{vértices de } D} L_x$
 y $\beta = \partial K$, aplicando (9.8) y simplificando

$$p_{ii} = \frac{M(K)}{2 \sum_i l_i + M(K)}$$

Consideremos ahora que K es un cuerpo fijo y hagamos variar D , obtenemos que:

$$p_i = p_{ii} \text{ si y sólo si } \text{long}(\partial D) = \sum_i l_i = \frac{M(K)}{2}$$

O sea: Suponiendo que un cilindro poliédrico sea tangente a un cuerpo K , la probabilidad de que el punto de tangencia sea un punto de una cara será igual a la probabilidad de que sea un punto de una arista, si y sólo si

$$2 \sum_i l_i = M(K)$$

10.2 Análogamente como en 10.1 sea K un cuerpo convexo pero sea ahora Z_D , tal que D es un segmento de anchura a . Resulta entonces que :

i) la probabilidad de que $Z_D = \text{cinta de anchura } a$; toque a K con el "interior" es

$$P_i = \frac{4a}{4a + M(K)}$$

ii) la probabilidad de que Z_D toque a K con alguno de los bordes es

$$P_{ii} = \frac{M(K)}{4a + M(K)}$$

O sea: si tengo un cuerpo convexo K de curvatura media $M(K)$ y una cinta de anchura $\frac{M(K)}{4}$ de las cuales sé que se tocan, entonces la probabilidad de que la cinta toque a K con un borde, es igual a la probabilidad de que lo toque con el interior.

10.3 Cilindro poliédrico Z_D y segmento de longitud h .

Nuevamente D es un polígono de aristas ℓ_i . Las probabilidades no nulas son:

i) el segmento toca de punta una "cara" de Z_D .

$$P_i = \frac{4\pi \cdot \sum_i \ell_i}{4\pi \sum_i \ell_i + 2\pi \cdot \pi h}$$

$$P_i = \frac{2 \sum_i \ell_i}{2 \sum_i \ell_i + \pi h}$$

ii) el segmento toca con la "arista", una "arista" del cilindro

$$P_{ii} = \frac{2\pi \cdot \pi h}{4\pi \sum_i l_i + 2\pi \pi h}$$

$$P_{ii} = \frac{\pi h}{2 \sum_i l_i + \pi h}$$

Nuevamente, si consideramos un cilindro Z_D y un segmento de longitud h , para que la probabilidad de que el segmento toque con la punta una cara de Z_D sea igual a la probabilidad de que toque a Z_D "arista contra arista", deberá ser:

$$\pi h = 2 \sum_i l_i$$

10.4 Cilindro cualquiera Z_D y poliedro K .

Tomemos un cilindro convexo Z_D , tal que la longitud del contorno de D es u , y K un poliedro de aristas a_i y ángulos diedros α_i , entonces

i) probabilidad de que K toque a Z_D con una arista

$$P_i = \frac{\frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \alpha_i) \cdot 2\pi}{4\pi u + 2\pi \frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

$$P_i = \frac{\sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}{4u + \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

ii) probabilidad de que K toque a Z_D con un vértice

$$P_{ii} = \frac{4\pi u}{4\pi u + 2\pi \frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

$$P_{ii} = \frac{4u}{4u + \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

10.5. Cilindro de base poligonal y poliedro K .

En este caso tenemos las probabilidades clásicas:

i) el cilindro y K se tocan arista contra arista

$$P_i = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}{4\pi \sum_j l_j + 2\pi \frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

$$P_i = \frac{\sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}{4 \sum_j l_j + \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

Si l_j son las longitudes de las aristas del polígono de base de Z .

ii) un vértice de K toca una "cara" del cilindro

$$P_{ii} = \frac{4\pi \sum_j l_j}{4\pi \sum_j l_j + 2\pi \frac{1}{2} \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

$$P_{ii} = \frac{4 \sum_j l_j}{4 \sum_j l_j + \sum_i a_i (\pi - \alpha_i)}$$

Sea por ejemplo K un cubo de arista a y Z el cilindro cuya sección recta es un cuadrado de lado a. Entonces

$$P_i = \frac{6\pi a}{16a + 3\pi a} = 0,54$$

$$P_{ii} = \frac{16a}{16a + 3a} = 0,46$$

Observación: Notemos que entonces, dado un cubo de arista a, la probabilidad de que un cilindro cuya sección recta es un cuadrado de lado a toque al cubo "arista con arista" es la misma que si, en vez de un cilindro, tomamos otro cubo de arista a.

IV. MEDIDA EN E_n SOBRE CUERPOS CONVEXOS Y CILINDROS CONVEXOS

Queremos generalizar ahora los resultados obtenidos, al espacio euclideo de dimensión n .

Para ello, en primer lugar, introducimos la notación y las definiciones necesarias.

11. Notación

Dado un cuerpo convexo K en E_n , notaremos por $W_i^n(K)$ al "Quermassintegral" i -ésimo de K ([8], pág.217) y por $M_i^n(\partial K)$ la integral de curvatura media i -ésima ([8], pág.223).

Para el caso en que el contorno de $K, \partial K$, es de clase C^2 , la definición de $M_i^n(\partial K)$ es la siguiente:

Si ∂K es la hipersuperficie de dimensión $n-1$ que limita al cuerpo K , se sabe que en cada punto de ∂K hay $n-1$ direcciones principales $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$. Si $d\sigma$ denota el elemento de área de ∂K , entonces la r -ésima integral de curvatura media $M_r^n(\partial K)$, está definida por

$$11.1 \quad M_r^n(\partial K) = \binom{n-1}{r}^{-1} \int_{\partial K} \{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_r}\} d\sigma$$

donde $\{\kappa_{i_1}, \dots, \kappa_{i_r}\}$ denota la r -ésima función simétrica elemental de las curvaturas principales.

Si K es un dominio, entonces resulta

$$11.2 \quad M_{n-1}^n(\partial K) = \theta_{n-1} \chi(K)$$

donde θ_{n-1} es el área de la bola unitaria de n -dimensiones (definida en 1.2) y $\chi(K)$ es la característica de Euler-Poincaré. Para ver una definición axiomática de esta característica, ver Hadwiger [3], [5], Groemer [2] y Lenz [6].

Además vale la siguiente relación entre $W_i^n(K)$ y $M_j^n(\partial K)$ ([8], pág.234).

$$11.3 \quad M_j^n(K) = n W_{j+1}^n(K)$$

De esta relación, podemos extender la definición de $M_i^n(\partial K)$ de aquellos cuerpos convexos cuyo borde es una superficie de clase C^2 , a cualquier cuerpo convexo K , dado que $W_i^n(K)$ está bien definido para todo cuerpo convexo K .

Con dL_p^n , denotaremos la densidad de los p -planos en E_n ([8], cap. 12) y con dK^n , la densidad cinemática en E_n .

Si G_n es el grupo de movimientos en E_n , dK^n es la medida de Haar sobre G_n , aplicada a posiciones de un cuerpo convexo K .

Por una cuestión de notación, llamemos μ la medida de Haar sobre G_n .

Sea además λ la medida de Lebesgue en E_n y ν la medida normalizada sobre SO_n , siendo SO_n el grupo de rotaciones en E_n . Entonces existe una identificación natural entre G_n y $E_n \times SO_n$:

$$11.4 \quad \begin{aligned} \gamma : E_n \times SO_n &\rightarrow G_n \\ (t, \rho) &\rightarrow g_{t, \rho} \end{aligned}$$

de modo que $g_{t, \rho}(x) = \rho x + t \quad \forall x \in E_n$

Entonces se toma μ , como la imagen por γ de la medida producto $\lambda \otimes \nu$. O sea

$$11.5 \quad \mu = \gamma(\lambda \otimes \nu)$$

μ así definida resulta invariante, y por unicidad de la medida de Haar, resulta "la medida de Haar sobre el grupo de movimientos G_n ". ([11], pág. 94-95).

12. Medidas tangenciales de cuerpos convexos en E_n .

Sean K y K' cuerpos convexos en E_n y sea G_n el grupo de movimientos en E_n . Dado $g \in G_n$, con gK' notaremos al cuerpo congruente a K' , resultado de aplicar a K' el movimiento g .

Si A es el conjunto

$$12.1 \quad A = \{g \in G_n / K \cap gK' \neq \emptyset\}$$

entonces, mediante la fórmula fundamental cinemática, se está en condiciones de expresar la medida de Haar μ sobre G_n del conjunto A , mediante los "Quermassintegrale" de K y K' por

$$12.2 \quad \mu(A) = \theta_{n-2} \cdots \theta_1 \sum_{h=0}^n n \binom{n}{h} W_h^n(K) W_{n-h}^n(K')$$

(Esta fórmula, sus aplicaciones y generalizaciones se encuentran en el libro de Santaló [8]).

Ultimamente se ha planteado otro problema similar:

Dados dos cuerpos convexos K y K' , queremos definir ahora una medida sobre todas las "posiciones" de K' , en las cuales es tangente a K , donde se entiende que K' es tangente a K , si $K \cap K' \neq \emptyset$, pero existe un hiperplano en $E_n - L_{n-1}^n$ que separa a K y K' , o sea, $K \cap K' \neq \emptyset$ pero K y K' no tienen puntos interiores comunes.

Intuitivamente encontramos una medida de la siguiente forma.

Dado K , un cuerpo convexo en E_n , sea K_ϵ el cuerpo paralelo a distancia ϵ ,

$$12.3 \quad K_\epsilon = \{x \in E_n / d(x, K) \leq \epsilon\}$$

o sea, K_ϵ es la unión de todas las esferas sólidas de radio ϵ , cuyos centros son puntos de K .

Si llamamos $V(K_\epsilon)$ al volumen de K_ϵ , por las fórmulas de Steiner ([8], pág.220) vale

$$12.4 \quad V(K_\epsilon) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_i^n(K) \epsilon^i$$

De esta fórmula se obtienen las relaciones

$$12.5 \quad W_i^n(K_\epsilon) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} W_{i+j}^n(K) \epsilon^j.$$

Entonces si defino

$$12.6 \quad A_\epsilon = \{g \in G_n / K_\epsilon \cap gK' \neq \phi\}$$

resulta, por 12.1

$$12.7 \quad \begin{aligned} \mu(A_\epsilon) &= \theta_{n-2} \dots \theta_1 \sum_{h=0}^n n \binom{n}{h} W_h^n(K_\epsilon) W_{n-h}^n(K') = \\ &= \theta_{n-2} \dots \theta_1 \sum_{h=0}^n n \binom{n}{h} \cdot \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} W_{h+j}^n(K) \cdot W_{n-h}^n(K') \cdot \epsilon^j \end{aligned}$$

Por tanto, si A es el conjunto definido en 12.1,

$$12.8 \quad \begin{aligned} \mu(A_\epsilon - A) &= \theta_{n-2} \dots \theta_1 \cdot \sum_{h=0}^{n-1} n \binom{n}{h} \sum_{j=1}^{n-h} \binom{n-h}{j} W_{h+j}^n(K) W_{n-h}^n(K') \epsilon^j \\ &= \epsilon [\theta_{n-2} \dots \theta_1 \sum_{h=0}^{n-1} n \binom{n}{h} (n-h) W_{h+1}^n(K) W_{n-h}^n(K')] + \theta(\epsilon) \end{aligned}$$

Pero entonces existe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mu(A_\epsilon - A) = \delta(K, K')$, y

$$12.9 \quad \delta(K, K') = \theta_{n-2} \cdots \theta_1 \cdot n \sum_{h=0}^{n-1} (n-h) \binom{n}{h} W_{h+1}^n(K) W_{n-h}^n(K')$$

es la medida deseada.

En términos de las curvaturas medias, obtenemos:

$$12.10 \quad \delta(K, K') = \theta_{n-2} \cdots \theta_1 \cdot \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} (n-h) \binom{n}{h} M_h^n(K) M_{n-h-1}^n(K') =$$

$$= \theta_{n-2} \cdots \theta_1 \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} M_h^n(K) M_{n-h-1}^n(K').$$

Para poder formalizar este resultado, debemos analizar varias cuestiones. Para ello nos basaremos principalmente en un artículo de W.Weil [14].

En el caso de la pregunta sobre todas aquellas posiciones de K' . tales que $K \cap K'$ es distinta del vacío, la palabra "movemos aleatoriamente" a K' , no trae problema, ya que dK^n es la medida natural sobre el grupo de los movimientos G_n .

Pero si definimos:

$$12.11 \quad G_n(K, K') = \{g \in G_n / K \text{ y } gK' \text{ son tangentes}\}$$

entonces la pregunta si sobre $G_n(K, K')$ hay una medida "natural" es distinta.

Consideremos β y β' subconjuntos de ∂K y $\partial K'$ respectivamente y sea

$$12.12 \quad C_0(\beta, \beta') = \{g \in G_n(K, K') / \beta \cap g\beta' \neq \emptyset\}$$

entonces nos interesa saber si estos conjuntos $C_0(\beta, \beta')$ son medibles.

Weil ([14]) construye una medida boreliana finita sobre $G_n(K, K')$ $\phi(K, K', \cdot)$ que puede mirarse como medida tangencial "natural" de K y K' y que, tras una normalización será la medida natural de probabilidad. Prueba que entonces los conjuntos $C_0(\beta, \beta')$ definidos en 12.12 pertenecen a la σ -álgebra de los borelianos sobre $G_n(K, K')$, completada con respecto a ϕ .

En este trabajo, solamente explicaremos la construcción de ϕ -cuya formalización puede verse en el trabajo de Weil- y veremos que, en el caso en el que $\beta = \beta' = E_n$, $\phi(K, K', C_0(E_n, E_n))$ coincide.- salvo un factor constante- con $\delta(K, K')$ definida en 12.9 -lo que prueba la naturalidad de ϕ .

Para ello mostraremos-siguiendo básicamente la notación de R. Schneider [11]- que a cada cuerpo convexo K en E_n , le están asociados $n+1$ funcionales ψ_i $i=0, 1, \dots, n$, tales que $\psi_i(K, \cdot)$ son medidas finitas sobre la σ -álgebra de borelianos en E_n .

Dado un cuerpo K en E_n , para cada boreliano β en E_n definimos

$$12.13 \quad U_\epsilon(K, \beta) = \{x \in E_n / d(x, K) = d(x, K \cap \beta) < \epsilon\}$$

y sea

$$12.14 \quad A_\epsilon(K, \beta) = \lambda(U_\epsilon(K, \beta)) = V(U_\epsilon(K, \beta))$$

donde λ es la medida Lebesgue en E_n .

Notemos que $A_\epsilon(K, E_n) = V(K_\epsilon)$ con K_ϵ definido como en 12.3. Pero entonces, usando 12.4 resulta

$$12.15 \quad A_\epsilon(K, E_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_i^n(K) \cdot \epsilon^i$$

y dando a ϵ los valores $0, 1, \dots, n$ puedo despejar-usando la regla de Cramer- $W_i^n(K)$.

$$12.16 \quad W_i^n(K) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} A_j(K, E_n)$$

donde a_{ij} sólo dependen de n, i y j .

Definimos entonces, como generalización de $W_i^n(K)$.

$$12.17 \quad \psi_i(K, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} A_j(K, \beta)$$

con a_{ij} los mismos que en 12.16, con lo que resulta

$$12.18 \quad \psi_i(K, E_n) = W_i^n(K) \quad 0 \leq i \leq n$$

Notemos además, que si $\beta = \partial K$, resulta

$$\psi_0(K, \partial K) = 0$$

$$12.19 \quad \psi_i(K, \partial K) = W_i^n(K) \quad 1 \leq i \leq n$$

ya que $\psi_0(K, \beta)$ es, por la definición dada en 12.17,

$\psi_0(K, \beta) = V(K \cap \beta) = \text{volumen de } K \cap \beta$, que en el caso en el que $\beta \subseteq \partial K$ es nulo.

Estos funcionales $\psi_i(K, \cdot)$ definidos como en 12.17, son medidas finitas sobre los borelianos en E_n . ([11]).

Por otro lado ([14]), para $\beta \subseteq \partial K$, vale la fórmula local de Steiner

$$12.20 \quad A_\varepsilon(K, \beta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \binom{n}{i} \psi_i(K, \beta)$$

por la cual quedan definidos los Krümmungsmasse $\psi_i(K, \cdot)$ de K , y son exactamente los definidos en 12.17.

Estamos ahora en condiciones de definir una medida sobre $G_n(K, K')$

Dado η un boreliano en G_n definimos.

$$12.21 \quad C_\varepsilon(\eta) = \{g \in G_n / 0 < d(K, gK') < \varepsilon \text{ y } T(K, gK') \cap g \in \eta\}$$

$$\text{donde } T(K, K') : E_n \rightarrow E_n \\ x \rightarrow x + u(K, K')$$

si $u(K, K') = x - x'$, si $x \in K$ y $x' \in K'$ son los que realizan la distancia de K a K' .

Weil ([14]), prueba que:

- i) $C_\epsilon(\eta)$ son borelianos (y por lo tanto medibles según μ)
- ii) $\mu(C_\epsilon(\cdot))$ es una medida boreliana finita sobre G_n , que está concentrada en $G_n(K, K')$.
- iii)
$$\mu(C_\epsilon(\eta)) = \sum_{j=1}^n \epsilon^j \binom{n}{j} \int_{SO_n} \psi_j(K - \rho K', \alpha(\rho)) d\nu(\rho)$$

siendo: SO_n el grupo de rotaciones

ν la medida sobre SO_n

ψ_j las definidas en 12.17 y

$$\alpha(\rho) = \{x \in E_n / g_{\theta, x} \in \eta \cap G_n(K, K')\}$$

Entonces se define

$$12.22 \quad \phi(K, K', \eta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mu(C_\epsilon(\eta))$$

o sea como el coeficiente de ϵ de la expresión dada en iii)

$$12.23 \quad \phi(K, K', \eta) = n \int_{SO_n} \psi_1(K - \rho K', \alpha(\rho)) d\nu(\rho)$$

Notemos que, por la definición de $\alpha(\rho)$,

$$\phi(K, K', \eta) = \phi(K, K', \eta \cap G_n(K, K'))$$

Sean ahora β y β' incluidos en ∂K y $\partial K'$ respectivamente. Si entonces $C_0(\beta, \beta')$ es el conjunto definido en 12.12, Weil prueba que

$C_0(\beta, \beta')$ son medibles según $\phi(K, K', \cdot)$ y que

$$12.24 \quad \phi(K, K', C_0(\beta, \beta')) = \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \psi_{i+1}(K, \beta) \psi_{n-i}(K', \beta')$$

O sea, si $\beta = \partial K$ y $\beta' = \partial K'$, $C_0(\beta, \beta') = G_n(K, K')$

$$12.25 \quad \phi(K, K', G_n(K, K')) = \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} W_{i+1}^n(K) W_{n-i}^n(K')$$

Pero recordando que $n \cdot \kappa(n) = \theta_{n-1}$ y la medida $\delta(K, K')$ encontrada en 12.9, se ve que

$$12.26 \quad \delta(K, K') = \theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2} \cdots \theta_1 \phi(K, K', G_n(K, K'))$$

lo que prueba la naturalidad de ϕ .

13. Cilindros convexos en E_n . Medida sobre cilindros

En el capítulo anterior, estudiamos las medidas tangenciales sobre cuerpos convexos K y K' en E_n . En este párrafo queremos analizar la situación en la que K' sea un cilindro infinito.

Para ello primero definiremos lo que significa un cilindro en E_n y luego buscaremos, análogamente como en los capítulos anteriores una medida *natural* para cilindros tangentes.

Definición

Sea en E_n , L_{n-q} una variedad fija de dimensión $n-q$. Y sea D un cuerpo convexo en L_{n-q} tal que $\partial D \subseteq L_{n-q}$ sea de clase C^2 . Ahora, para cada x de D , consideramos el q -plano L_q , que es ortogonal a L_{n-q} y pasa por x .

Al conjunto de todos los L_q así construidos, lo llamamos cilindro $Z_q = ([8], \text{pag.279})$.

Los q -planos L_q son los generadores de Z_q y D es la sección normal .

Cada cilindro Z_q queda bien determinado (salvo un movimiento rígido) por su sección normal D .

Entonces definimos ([8], pág.279) las integrales de curvatura media de Z_q como aquellas de ∂D , considerado como variedad de dimensión $(n-q-1)$ en L_{n-q} . O sea:

$$13.1 \quad M_i^n(Z_q) = M_i^{n-q}(\partial D) \quad i=0,1,\dots,n-q-1$$

$$M_i^n(Z_q) = 0 \quad i=n-q,\dots,n$$

notaremos con $V(Z_q)$ al volumen $(n-q)$ -dimensional de D .

Medida sobre cilindros

En el libro de Santaló ([8], pág.280) se define una medida

de cilindros dZ_q , que permite, por ejemplo, medir todas aquellas posiciones de Z_q tales que $K \cap gZ_q \neq \emptyset$, donde K es un cuerpo convexo cualquiera en E_n y g es un movimiento en G_n .

Esta medida, que aquí llamaremos $\bar{\delta}_D(K, Z_q)$ es (ver [8])

$$13.2 \quad \bar{\delta}_D(K, Z_q) = \theta_{n-1} \cdots \theta_q V(Z_q) + \\ + \theta_{n-2} \cdots \theta_q \sum_{i=q-1}^{n-2} \frac{1}{n-q} \binom{n-q}{i-q+1} M_i^n(K) M_{n-i-2}^n(Z_q)$$

Ahora, análogamente como en el capítulo 12, nos preguntamos ¿cuál será la medida de todas las posiciones de Z_q en las cuáles es tangente a K ?

Para resolver ésto, primero procederemos igual que antes. Sea K_ϵ igual que en 12.3, entonces

$$13.3 \quad \bar{\delta}_D(K_\epsilon, Z_q) = \theta_{n-1} \cdots \theta_q V(Z_q) + \\ + \theta_{n-2} \cdots \theta_q \sum_{i=q-1}^{n-2} \binom{n-q}{i-q+1} M_{n-i-2}^n(Z_q) M_i^n(K_\epsilon) \frac{1}{n-q}$$

y aplicando nuevamente las fórmulas de Steiner ([8], pág.220)

$$13.4 \quad \bar{\delta}_D(K_\epsilon, Z_q) = \theta_{n-1} \cdots \theta_q V(Z_q) + \\ + \theta_{n-2} \cdots \theta_q \sum_{i=q-1}^{n-2} \frac{1}{n-q} \binom{n-q}{i-q+1} M_{n-i-2}^n(Z_q) \sum_{j=0}^{n-i-1} \epsilon^j \binom{n-i-1}{j} M_{i+j}^n(K)$$

O sea que

$$13.5 \quad \bar{\delta}_D(K_\epsilon - K, Z_q) = \frac{\theta_{n-2} \cdots \theta_q}{n-q} \cdot \epsilon \cdot \sum_{i=q-1}^{n-2} \binom{n-q}{i-q+1} M_{n-i-2}^n(Z_q) (n-i-1) M_{i+1}^n(K) + \theta(\epsilon)$$

Entonces existe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \bar{\delta}_D(K_\epsilon - K, Z_q) = \delta_D$, siendo

$$13.6 \quad \delta_D = \theta_{n-2} \cdots \theta_q \sum_{i=q-1}^{n-2} \binom{n-q-1}{i-q+1} M_{i+1}^n(K) M_{n-i-2}^n(Z_q)$$

Queremos introducir ahora otra notación para la densidad de cilindros.

Para ello fijemos en el espacio E_n dos subespacios L_{n-q} y L_q , tales que L_q es ortogonal a L_{n-q} . O sea

$$13.7 \quad E_n = L_{n-q} \oplus L_q$$

Sea ahora D un cuerpo convexo en L_{n-q} , consideramos

$$13.8 \quad Z(D) = \{Z'_q / \} g \in G_n / Z' = gZ_q\}$$

siendo Z_q el cilindro cuya sección normal es D .

Notemos que dado $g \in G_n$, $\exists (\theta, t) \in SO_n \times E_n$, tales que

$$13.9 \quad g(x) = \theta(x + t)$$

Pero considerando 13.7, $t = t_1 + t_2$ con $t_1 \in L_{n-q}$ y $t_2 \in L_q$,

entonces resulta

$$13.10 \quad gZ_q = \bar{g} Z_q \quad \leftrightarrow \quad (\theta = \bar{\theta} \quad \text{y} \quad t_1 = \bar{t}_1)$$

$$\text{si} \quad g(x) = \theta(x + t_1 + t_2) \quad \text{y} \quad \bar{g}(x) = \bar{\theta}(x + \bar{t}_1 + \bar{t}_2)$$

De la misma manera que identificamos a G_n con $SO_n \times E_n$ en 11.4 (o sea $(\theta, t) \rightarrow g / g(x) = \theta(x+t)$) veamos aquí, que a $Z(D)$ definido en 13.8, lo podemos identificar con $SO_n \times L_{n-q}$ definiendo

$$13.11 \quad \alpha: SO_n \times L_{n-q} \rightarrow Z(D) \\ (\theta, t_1) \rightarrow Z' / Z' = \theta(Z_q + t_1)$$

Por la observación 13.10, está bien definida y resulta una biyección. Entonces definimos la medida sobre $Z(D)$, γ_D , análogamente como en 11.5.

$$13.12 \quad \gamma_D = \alpha(\nu \otimes \lambda)$$

siendo λ la medida Lebesgue en L_{n-q} y ν la medida normalizada sobre SO_n .

Fácilmente se verifica que γ_D y $\bar{\delta}_D$ coinciden salvo un factor constante.

Si ahora queremos medir un subconjunto A de $Z(D)$, resultará:

$$13.13 \quad \gamma_D(A) = \int_{SO_n} \int_{T(\theta)} d\lambda \, d\nu(\theta)$$

siendo $T(\theta) = \{t \in L_{n-q} / \alpha(\theta, t) \in A\}$

Si μ es la medida sobre G_n , queremos ahora hallar la relación entre γ_D y μ , para luego poder usar la medida tangencial ϕ , para encontrar una medida tangencial sobre $Z(D)$.

Para ello definimos

$$13.14 \quad \begin{aligned} \pi: G_n &\rightarrow Z(D) \\ g &\rightarrow \alpha(\theta, t_1) \quad \text{si } g(x) = \theta(x + t_1 + t_2) \end{aligned}$$

Entonces, si A es un subconjunto de $Z(D)$, $\pi^{-1}(A)$ es un subconjunto de G_n .

$$13.15 \quad \pi^{-1}(A) = \{g \in G_n / \alpha(\theta, t_1) \in A \text{ si } g(x) = \theta(x + t_1 + t_2)\}$$

Pero entonces $\mu(\pi^{-1}(A))$ es infinito. Consideramos entonces:

$$13.16 \quad \begin{aligned} G_n(A, h) &= \{g \in \pi^{-1}(A) \mid \text{si } g(x) = \theta(x + t_1 + t_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|t_2\| < h\} \end{aligned}$$

Recordando que $t_1 \in L_{n-q}$ y $t_2 \in L_q$. Usando 11.5

$$13.17 \quad \mu(G_n(A, h)) = \int_{SO_n} \int_{T_n(\theta)} d\lambda \, dv(\theta)$$

siendo $T_n(\theta) = \{t \in E_n / \text{si } g(x) = \theta(x + t) \Rightarrow g \in G_n(A, h)\}$

Pero usando 13.17 y 13.16 resulta

$$13.18 \quad T_n(\theta) = T(\theta) \otimes B_q(0, h)$$

siendo $T(\theta) = \{t \in L_{n-q} / \alpha(\theta, t) \in A\}$ y $B_q(0, h)$ la bola de radio h en L_q .

Pero entonces 13.17 resulta

$$13.19 \quad \mu(G_n(A, h)) = \int_{SO_n} \int_{T(\theta)} \int_{B_q(0, h)} d\lambda_{n-q}(t_1) \, d\lambda_q(t_2) \, dv(\theta)$$

señalando con λ_i = medida Lebesgue en E_i .

$$13.20 \quad \mu(G_n(A, h)) = \frac{\theta_{q-1}}{q} \cdot h^q \cdot \int_{SO_n} \int_{T(\theta)} d\lambda_{n-q} \, dv(\theta)$$

O sea , recordando 13.13.

$$13.21 \quad \gamma_D(A) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_{q-1}}{q} \cdot h^q \right)^{-1} \cdot \mu(G_n(A, h))$$

14. Medida tangencial sobre cilindros convexos en E_n

Con la relación obtenida en 13.21, estamos ahora en condiciones de generalizar el resultado obtenido para cuerpos convexos, al conjunto de cilindros $Z(D)$.

Sea K un cuerpo convexo en E_n y sea Z_q un cilindro infinito cuya sección normal D es de dimensión $n-q$. Sea

$$14.1 \quad Z(D, K) = \{Z' / \exists g \in G_n(K, Z_q) / Z' = gZ_q\}$$

siendo $G_n(K, Z_q)$ aquellos movimientos de G_n tales que K y Z_q son tangentes - ver 9.7 .

Consideremos ahora, para cada $x \in D$, $B_q(x, h)$ la bola de centro x , radio h , y dimensión q , contenida en L_q , tal que L_q es ortogonal a $D \subset L_{n-q}$ en x . Sea

$$14.2 \quad Z_q(h) = \bigcup_{x \in D} \{B_q(x, h)\}$$

entonces

$$14.3 \quad Z_q = \lim_{h \rightarrow \infty} Z_q(h)$$

Pero ahora $Z_q(h)$ es un cuerpo convexo en E_n , entonces existe $\phi(K, Z_q(h), \dots)$ siendo ϕ la medida definida en 12.22 y 12.23.

Entonces definimos sobre $Z(D)$ una medida $\phi_D(K, \cdot)$ concentrada sobre $Z(D, K)$ de la siguiente manera:

Dado A un subconjunto de $Z(D)$, sea $G_n(A, h)$ igual que en 13.16, entonces

$$14.4 \quad \phi_D(K, A) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta^{q-1}}{q} h^q \right)^{-1} \cdot \phi(K, Z_q(h)), G_3(A, h)$$

Observemos que ϕ_D está concentrada sobre $Z(D, K)$, porque ϕ está concentrada sobre $G_n(K, Z_q(h))$ para cada h .

Lo que nos interesa en este trabajo es nuevamente: Dado β un subconjunto en ∂K y β' un subconjunto en ∂Z_q tal que β' es un "sector infinito", ¿cuál será la probabilidad que: dado $Z' = gZ_q$ tal que Z' es tangente a K , sea $\beta \cap g\beta'$ distinta del vacío?

Definamos primero lo que significa que β' en ∂Z_q es un "sector infinito". Sea $\bar{\beta}' \subseteq \partial D$ y sea, para cada $x \in \bar{\beta}'$, $L_q(x)$ el subespacio ortogonal a D de dimensión q que pasa por x , entonces

$$14.5 \quad \beta' = \bigcup_{x \in \bar{\beta}'} L_q(x)$$

Considerando para cada $x \in \bar{\beta}'$, $B_q(x, h)$ como en 14.2, definimos

$$14.6 \quad \beta'(h) = \bigcup_{x \in \bar{\beta}'} B_q(x, h)$$

Siguiendo la definición de los $W_i^n(Z_q)$ dada por Santaló ([8], pág. 270), defino los "Krümmungsmasse" de Z_q como

$$14.7 \quad \psi_i(Z_q, \beta') = \frac{n-q}{n} \psi_i^{n-q}(D, \bar{\beta}') \quad i=0, \dots, n-q-1$$

$$\psi_i(Z_q, \beta') = 0 \quad i=n-q, \dots, n$$

Además se ve que

$$14.8 \quad \psi_i(Z_q(h), \beta'(h)) = \begin{cases} o_i(h) \\ \frac{\binom{n-q-1}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} \psi_i(Z_q, \beta') \cdot \left(\frac{\theta_{q-1}}{q} h^q\right) + o_i(h) \end{cases}$$

donde $o_i(h)$ es tal que $\frac{o_i(h)}{h^q} \rightarrow 0$ si $h \rightarrow \infty$

Si llamamos

$$14.9 \quad A(\beta, \beta') = \{Z' \in Z(D, K) \mid \text{si } Z' = gZ_q \Rightarrow \beta \cap g\beta' \neq \emptyset\}$$

con $Z(D, K)$ y β' como en 14.1 y 14.5 respectivamente, queremos expresar $\phi_D(K, A(\beta, \beta'))$ en función de $\psi_i(K, \beta)$ y $\psi_j(Z_q, \beta')$.

Para ello calculemos $\phi(K, Z_q(h), G_n(A(\beta, \beta'), h))$.

Si $C_0(\beta, \beta'(h))$ es el conjunto de todos los movimientos tales que β y $g\beta'(h)$ sean tangentes (ver 5.1), por la fórmula obtenida en

12.24, podemos expresar $\phi(K, Z_Q(h), C_0(\beta, \beta'(h)))$ en función de $\psi_i(K, \beta)$ y $\psi_j(Z_Q(h), \beta'(h))$.

Ahora bien, como $A(\beta, \beta') \subseteq Z(D, K)$, con las identificaciones necesarias,

$$14.10 \quad G_n(A(\beta, \beta'), h) \rightarrow A(\beta, \beta') \quad \text{para } h \rightarrow \infty$$

y además

$$14.11 \quad C_0(\beta, \beta'(h)) \rightarrow A(\beta, \beta') \quad \text{para } h \rightarrow \infty.$$

Si $G_n(K, Z_Q(h))$ es el conjunto definido en 9.7, al ser ϕ una medida concentrada sobre $G_n(K, Z_Q(h))$, resulta que:

$$14.12 \quad \phi(K, Z_Q(h), G_n(A(\beta, \beta'), h)) = \phi(K, Z_Q(h), C_0(\beta, \beta'(h))) - \theta(h)$$

donde $\theta(h)$ es tal que $\lim_{h \rightarrow \infty} \theta(h) = 0$

Pero entonces

$$14.13 \quad \begin{aligned} \phi(K, Z_Q(h), G_n(A(\beta, \beta'), h)) &= \\ &= \frac{n}{\kappa(n)} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \psi_{i+1}(K, \beta) \psi_{n-i}(Z_Q(h), \beta'(h)) - \theta(h) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=0}^{q-1} \binom{n-1}{i} \psi_{i+1}(K, \beta) \sigma_{n-i}(h) + \\
&+ \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=q}^{n-1} \binom{n-q-1}{n-i-1} \left(\frac{\theta-1}{q} h^q\right) \psi_{n-i}(Z_q, \beta') \psi_{i+1}(K, \beta) + \\
&+ \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=q}^{n-1} \binom{n-1}{i} \psi_{i+1}(K, \beta) \sigma_{n-i}(h) - \theta(h)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de reemplazar $\psi_j(Z_q(h), \beta'(h))$ por los valores obtenidos en 14.8.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el resultado final:

14.14 Proposición

Dados en el espacio E_n, Z_q un cilindro convexo de dimensión q (o sea que su sección normal es un cuerpo convexo de dimensión $n-q$), y un cuerpo convexo K tales que Z_q y K son tangentes, y sea $\beta \subseteq \partial K$ y $\beta' \subseteq \partial Z_q$ un sector infinito entonces la medida del conjunto de posiciones en las que Z_q y K son tangentes exactamente en β y β' es:

$$\phi_D(K, A(\beta, \beta')) = \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=q}^{n-1} \binom{n-q-1}{n-i-1} \psi_{i+1}(K, \beta) \psi_{n-i}(Z_q, \beta')$$

En el caso en el que $\beta = \partial K$ y $\beta' = \partial Z_q$, resulta

$$14.15 \quad \phi_D(K, Z(K, D)) = \frac{n}{\kappa(n)} \sum_{i=q}^{n-1} \binom{n-q-1}{n-i-1} W_{i+1}(K) W_{n-i}(Z_q)$$

y recordando δ_D definido en 13.6, se ve que

$$14.16 \quad \delta_D = \theta_{n-1} \dots \theta_q \phi_D(K, Z(K, D))$$

Para ejemplificar el resultado final 14.14, vamos a considerar los casos $n=3$ y 4 .

Para $n=3$, caben dos posibilidades: $q=1$ ó $q=2$

a) $n=3$, $q=1$

Z , son los cilindros conexos de base D de dimensión 2, para los cuales, si $\bar{\beta}' \subseteq \partial D$, tal que $\text{long } \bar{\beta}' = \ell$ y el ángulo que forman las normales exteriores es φ , vale que:

$$\psi_2(Z_1, \beta') = \frac{2}{3} \quad \psi_2^2(D, \beta') = \frac{\varphi}{3}$$

$$\psi_1(Z_1, \beta') = \frac{2}{3} \quad \psi_2^2(D, \beta') = \frac{\ell}{3}$$

y recordando los valores de $\psi_i(K, \beta)$ dados en 5.12, 14.14 resulta:

$$14.17 \quad \phi_D(K, A(\beta, \beta')) = \frac{1}{4\pi} (M(\beta) \cdot \varphi + \Omega_\beta \cdot \ell)$$

que es igual a la fórmula obtenida en 9.6.

b) $n=3$, $q=2$

Se trata de una franja limitada por planos paralelos. En este caso no tiene sentido tomar β' en ∂Z , pues $W_1(Z) = \frac{2}{3}$ y entonces

14.14 resulta

$$14.18 \quad \phi_S(K, A(\beta, Z)) = \frac{1}{2\pi} \cdot \Omega_\beta$$

que coincide con 9.10.

Para $n=4$ y para fijar las ideas, vamos a limitarnos a los casos particulares siguientes :

a) $n=4$, $q=1$ y D es una esfera de radio r , sobre la cual está un dominio β' . Si K es un cuerpo convexo, supongo que $\beta = E_4$,

entonces $\psi_i(K, \beta) = W_i(K)$ y además: $\psi_1(Z_q, \beta') = \frac{F(\beta')}{4}$

$$\psi_2(Z_q, \beta') = \frac{M(\beta')}{4}$$

$$\psi_3(Z_q, \beta') = \frac{\Omega_{\beta'}}{4}$$

Entonces, aplicando estos valores a 14.14, resulta.

La medida de los cilindros de revolución en E_4 , cuya sección recta es una esfera de radio r , y que son tangentes a un cuerpo convexo dado K , según la franja correspondiente al dominio $\beta' \subset \partial D$ de área $F(\beta')$, integral de curvatura media $M(\beta')$ e imagen esférica $\Omega_{\beta'}$, es

$$14.19 \quad \phi_D(K, A(E_4, \beta')) = \frac{4}{\pi^2} (W_2(K) \cdot \Omega_{\beta'} + 2W_3(K) M(\beta') + W_4(K) \cdot F(\beta'))$$

En particular, si $\beta' = \partial D$, resulta

$$14.20 \quad \phi_D(K, Z(K, D)) = \frac{4}{\pi} (M_1(K) + 2M_2(K)r + M_3(K) \cdot r^2)$$

b) $n=4, q=2$

Sea D un círculo de radio r y supongamos nuevamente $\beta = E_4$.

Entonces la fórmula final 14.14 será

$$14.21 \quad \phi_D(K, A(E_4, \beta')) = \frac{4}{\pi^2} (W_3(K) \cdot \varphi + W_4(K) \cdot \ell)$$

siendo ℓ la longitud de β' en D y φ el ángulo que forman las normales exteriores.

En particular, si $\beta' = \partial D$ se tiene:

La medida de los cilindros en E_4 , cuya sección recta es un círculo de radio r y cuya generatriz son los planos ortogonales al mismo, que son tangentes a un cuerpo convexo K fijo, vale

$$14.22 \quad \phi_D(K, Z(K, D)) = \frac{2}{\pi} (M_2(K) + M_3(K) \cdot r)$$

Otro corolario de la proposición 14.14 es el siguiente: Si D se reduce a un punto, Z_q se identifica con un q -plano, entonces $\psi_j(Z_q, \beta') = 0$ salvo que $j=n-q$ y entonces $\psi_{n-q}(Z_q, \beta') = \frac{n-q}{n} \cdot \kappa(n-q)$.

Luego resulta:

Dado en E_n un cuerpo convexo K , la medida de todos los q -planos que son tangentes a K en $\beta, \beta \subseteq \partial K$, está dada por:

$$14.23 \quad \phi_D(K, \beta) = (n-q) \cdot \frac{\kappa(n-q)}{\kappa(n)} \cdot \psi_{q+1}(K, \beta)$$

o sea que $\psi_{q+1}(K, \beta)$ dan una medida natural del conjunto de todos los q -planos que tocan a K en β .

Nota: este resultado fue probado por Weil [13], de manera directa resultando aquí como corolario de un resultado más general.

A/antela

Molder

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Firey, W.J.: Kinematic measure for sets of support figures
Mathematika 21, 270-281 (1974).
- 2.- Groemer, H.: Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermassintegrale. Math. Ann. 198 23-56 (1972).
- 3.- Hadwiger, H.: Altes und Neues über konvexe Körper, Birkhauser Verlag, Basel (1953).
- 4.- Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, Berlin (1957).
- 5.- Hadwiger, H.: Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie, J. Reine Angew. Math. (Erelle) 194, 101-110 (1955).
- 6.- Lenz, H.: Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34, 135-147 (1969-1970).
- 7.- Mc Mullen, P.: A dice probability problem. Mathematika 21, 193-198 (1974).
- 8.- Santaló, L.A.: Integral geometry and geometric probability. Reading Mass.: Addison-Wesley (1976).
- 9.- Schneider, R.: Curvature measures of convex bodies, Ann. Mat. Pura Appl. 116, 101-134 (1978).
- 10.- Schneider, R.: Kinematic measures for sets of colliding convex bodies. Mathematika 25, 1-12.
- 11.- Schneider, R.: Integralgeometrie, Vorlesungen an der Universität Freiburg, 55, 1979.
- 12.- Schneider, R.: Kinematische Berührungsmasse für konvexe Körper und Integralrelationen für Oberflächenmasse- Math. Ann. 218 253-267 (1975).

- 13.- Weil, W.: Zufällige Berührung konvexer Körper durch
q-dimensionale Ebenen-Resultate der Mathematik 4,
84-101 (1981).
- 14.- Weil, W.: Berührungswahrscheinlichkeiten für konvexe Körper,
Zeitschr. Wahrsch, verw. Geb. 48, 327-338 (1979).
- 15.- Wieacker, J.A.: Translative Stochastische Geometrie der konvexen
Körper-Tesis no publicada de la Univ. de Freiburg. (1982).