

Tesis de Posgrado

Microinestabilidades producidas por gradientes de corriente en plasmas magnetizados

Farengo, Ricardo

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Farengo, Ricardo. (1984). Microinestabilidades producidas por gradientes de corriente en plasmas magnetizados. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1849_Farengo.pdf

Cita tipo Chicago:

Farengo, Ricardo. "Microinestabilidades producidas por gradientes de corriente en plasmas magnetizados". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1849_Farengo.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TEMA DE TESIS

MICROINESTABILIDADES PRODUCIDAS POR
GRADIENTES DE CORRIENTE EN PLASMAS MAGNETIZADOS

AUTOR

Lic. Ricardo Farengo

DIRECTOR

Prof. Dr. Constantino Ferro Fontán

Tesis presentada para optar por el título de Doctor en Física

1984

1849
Ej. 2.

RESUMEN

Se estudian las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad y temperatura electrónica en un sustrato de plasma inmerso en un campo magnético con cizalladura. Utilizando diversos modelos para describir la dinámica de iones y electrones se muestra que ambos gradientes pueden excitar modos inestables de baja frecuencia, y se determinan la tasa de crecimiento y estructura espacial de estos modos dentro de un amplio rango de valores de los parámetros de interés. Dependiendo del modelo utilizado, la condición de cuasineutralidad conduce a una ecuación diferencial lineal de segundo orden o a una ecuación integral. En el límite de plasma frío la ecuación diferencial resultante puede ser resuelta analíticamente para perfiles sencillos de velocidad y campo magnético pero cuando se utiliza un modelo cinético para los electrones (y el de fluido frío para los iones) es necesario recurrir a métodos numéricos. En el caso de temperatura iónica finita la fuerte localización de los modos considerados hace que sea necesario recurrir a un formalismo que conduce a una ecuación integral (equivalente a la condición de cuasineutralidad en el espacio \underline{k}), que debe ser resuelta numéricamente. Se analiza finalmente la importancia de las inestabilidades estudiadas en el proceso de difusión de un perfil de corriente.

INDICE

LISTA DE FIGURAS	ii
I-INTRODUCCION	1
II-MODELO DE DOS FLUIDOS	8
A-Equilibrio	8
B-Ecuaciones Básicas	10
C-Ecuación de Estructura del Modo	12
D-Teoría Local	16
E-Teoría no Local	19
III-MODELO CINETICO PARA ELECTRONES	24
A-Ecuación de Estructura del Modo	24
B-Inestabilidades Producidas por Gradientes de Velocidad	28
C-Inestabilidades Producidas por Gradientes de Temperatura	38
D-Inestabilidades Producidas por Gradientes de Velocidad y Temperatura ...	45
IV-MODELO CON TEMPERATURA IONICA FINITA	56
A-Densidad Iónica Perturbada	57
B-Ecuación Integral	62
C-El Límite de Fluido Frío	63
D- Resultados Numéricos	64
V-DISCUSSION Y CONCLUSIONES	71
AGRADECIMIENTOS	76
APENDICE A: Cálculo de la Densidad Electrónica Perturbada a Partir de la Ecuación de Deriva Cinética	77
APENDICE B: Métodos Numéricos	83
A-Ecuación Diferencial	83
B-Ecuación Integral	86
REFERENCIAS	91

LISTA DE FIGURAS

Figura		página
1	Equilibrio considerado en esta tesis. El campo magnético tiene componentes \hat{y} y \hat{z} y la densidad, temperatura y densidad de corriente varían en dirección x	9
2	Perfiles de velocidad, temperatura y densidad utilizados en los cálculos numéricos	29
3	ϕ y Q en función de x con $k_y=1$, $L_J=2.5$, $u_o=-0.1$, $T_{eo}=40$ eV, y $z=(0.68+i 5.98)\times 10^{-3}$	31
4	z_r (curva 1) y z_i (curvas 2 y 3) vs. k_y con $L_J=2.5$ y $u_o=-0.1$. $T_{eo}=40$ eV en 1 y 2 y 100 eV en 3	34
5	z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. T_{eo} con $k_y=1$, $L_J=2.5$ y $u_o=-0.1$. Caso no colisionante en 1 y 2 y colisionante en 3 y 4	34
6	z_r (curvas 1 y 3) y z_i curvas (2 y 4) vs. L_J con $k_y=1$ y $u_o=-0.1$. $T_{eo}=40$ eV en 1 y 2 y 100 eV en 3 y 4	35
7	z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. $ u_o $ con $k_y=1$ y $L_J=2.5$. $T_{eo}=40$ eV en 1 y 2 y 100 eV en 3 y 4	35
8	z_r (curvas 1 y 2) y z_i (curvas 3 y 4) vs. L_N con $k_y=1$, $L_J=2.5$ y $u_o=-0.1$. $T_{eo}=40$ eV en 1 y 2 y 100 eV en 3 y 4	37
9	ϕ y Q en función de x con $k_y=1.5$, $L_T=4$, $T_{eo}=100$ eV, $u_o=-0.1$ y $z=(2.87+i 1.50)\times 10^{-2}$	40
10	z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. k_y con $L_T=4$ y $u_o=-0.1$. $T_{eo}=50$ eV en 1 y 2 y 100 eV en 3 y 4	42
11	z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. T_{eo} con $k_y=1.5$, $L_T=4$ y $u_o=-0.1$. Caso no colisionante en 1 y 2 y colisionante en 3 y 4	42

Figura	página
12 z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. L_T con $u_o = -0.1$. $k_y = 2$ y $T_{eo} = 50$ eV en 1 y 2 y $k_y = 1.5$ y $T_{eo} = 100$ eV en 3 y 4	44
13 z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. $ u_o $ con $L_T = 4$. $k_y = 2$ y $T_{eo} = 50$ eV en 1 y 2 y $k_y = 1.5$ y $T_{eo} = 100$ eV en 3 y 4	44
14 ϕ y Q en función de x para el caso colisionante con $k_y = 1.5$, $L_T = 4$, $T_{eo} = 100$ eV, $u_o = -0.1$, $L_N = 100$ y $z = (2.40 + i 1.14) \times 10^{-2}$	46
15 ϕ y Q en función de x para el modo V con $k_y = 1.5$, $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $T_{eo} = 70$ eV, $u_o = -0.1$, $L_N = 100$, $v \neq 0$ y $z = (1.03 + i 0.39) \times 10^{-2}$...	48
16 ϕ y Q en función de x para el modo T con $k_y = 1.5$, $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $T_{eo} = 70$ eV, $u_o = -0.1$, $L_N = 100$, $v \neq 0$ y $z = (1.30 + i 0.60) \times 10^{-2}$...	49
17 z_i vs. k_y para el modo V con $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $u_o = -0.1$, $L_N = 100$ y $v \neq 0$. $T_{eo} = 40$ eV en 1, 70 eV en 2 y 100 eV en 3.	51
18 z_i vs. k_y para el modo T con $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $u_o = -0.1$, $L_N = 100$ y $v \neq 0$. $T_{eo} = 50$ eV en 1, 70 eV en 2 y 100 eV en 3.	51
19 z_r (curvas 1 y 3) y z_i (curvas 2 y 4) vs. T_{eo} para ambos modos con $k_y = 1.5$, $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $L_N = 100$, $u_o = -0.1$ y $v \neq 0$. Las curvas 1 y 2 corresponden al modo V y las 3 y 4 al modo T.	52
20 z_i vs. L_J y L_T para ambos modos. Modo V en 1 y 2 ($k_y = 1$, $L_N =$ 100, $u_o = -0.1$, $v \neq 0$ y $T_{eo} = 40$ eV y 100 eV respectivamente) y modo T en 3 y 4 ($L_N = 100$, $u_o = -0.1$, $v \neq 0$ y $k_y = 2$, $T_{eo} = 50$ eV y $k_y = 1.5$, $T_{eo} = 100$ eV respectivamente).	55
21 z_i vs. $ u_o $ para ambos modos. Modo V en 1 y 2 ($k_y = 1$, $L_J = 2.5$ $L_T = 4$, $L_N = 100$, $v \neq 0$ y $T_{eo} = 40$ eV y 100 eV respectivamente) y modo T en 3 y 4 ($L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $L_N = 100$, $v \neq 0$ y $k_y = 2$, $T_{eo} = 50$ eV y $k_y = 1.5$, $T_{eo} = 100$ eV respectivamente).	55
22 ϕ en función de x para el modo V con $k_y = 1$, $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $L_N =$ 100, $T_{eo} = 40$ eV, $u_o = -0.1$ y $v \neq 0$. $\tau = 100$ y $z = (8.43 + i 3.82) \times 10^{-3}$ en a)	

Figura	página
	y $\tau=2$ y $z=(10.70+ i 6.08)\times 10^{-3}$ en b). 66
23	ϕ en función de x para el modo T con $k_y=1.5$, $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $T_{eo}=100$ eV, $u_o=-0.1$ y $v\neq 0$. $\tau=100$ y $z=(1.78+ i 0.98)\times$ 10^{-2} en a) y $\tau=2$ y $z=(2.20+ i 1.30)\times 10^{-2}$ en b). 67
24	z_r (fig. 24a) y z_i (fig. 24b) vs. τ para ambos modos con $L_J=$ 2.5 , $L_T=4$, $L_N=100$, $u_o=-0.1$ y $v\neq 0$. Las curvas 1 y 2 corresponden al modo V ($k_y=1$ y $T_{eo}=40$ eV y 100 eV respectivamente) y las 3 y 4 al modo T ($k_y=2$, $T_{eo}=50$ eV y $k_y=1.5$, $T_{eo}=100$ eV). 69
25	z_i vs. L_J y L_T ($L_T=1.6 L_J$) para ambos modos con $L_N=100$, $u_o=-0.1$ y $v\neq 0$. Las curvas 1 y 2 corresponden al modo V ($k_y=1$ y $T_{eo}=40$ eV y 100 eV respectivamente) y las 3 y 4 al modo T ($k_y=2$, $T_{eo}=$ 50 eV y $k_y=1.5$, $T_{eo}=100$ eV respectivamente). 70
26	Diagrama de flujo del programa utilizado para calcular autovalores y autofunciones de la ecuación diferencial. 89
27	Diagrama de flujo del programa utilizado para calcular autovalores y autofunciones de la ecuación integral. 90

I-INTRODUCCION

Existen numerosas situaciones de interés en astrofísica, geofísica y experiencias de laboratorio en las que una o ambas especies (iones y electrones) de un plasma magnetizado se mueven en dirección paralela al campo magnético. En muchos casos este movimiento no es uniforme, sino que las partículas poseen una velocidad que varía en dirección perpendicular a dicho campo. Esta situación se presenta, por ejemplo, en el viento solar¹, arcos aurales², erupciones solares³, haces de electrones⁴, dispositivos calentados por inyección de haces neutros⁵, plasmas con filamentos de corriente⁶ y en la fase inicial de descargas óhmicas, donde el efecto pelicular impide que la corriente difunda hacia el interior del plasma⁷. Es bien sabido, de la hidrodinámica clásica, que un flujo con un perfil de velocidad no uniforme es potencialmente inestable y está sujeto a inestabilidades de tipo Kelvin-Helmholtz⁸. Dentro de la física de plasmas las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad pueden presentarse en dos situaciones diferentes. En un caso ambas especies tienen el mismo perfil de velocidad, y por lo tanto no aparecen gradientes de densidad de corriente. Las inestabilidades relacionadas con este tipo de procesos han sido estudiadas por Dobrowolny⁹, Catto et al⁵ y Mikhailovskii y Klimenko¹⁰. La otra posibilidad es que exista un gradiente de velocidad electrónica, mientras los iones se encuentran en reposo o con movimiento uniforme. En este caso la corriente resultante calentará el plasma en forma no uniforme produciendo un gradiente de temperatura. El análisis de esta última situación es el objeto del presente trabajo.

El estudio de las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad y temperatura electrónica puede ser importante para explicar el proceso de difusión de un perfil de corriente en un plasma magnetizado. Düchs et al⁷ resolvieron numéricamente las ecuaciones de transporte para un tokamak y mos-

traron que, en ausencia de procesos anómalos, el efecto pelicular impide una rápida penetración del perfil de corriente. Los mismos autores observaron que para obtener una difusión más rápida (acorde con los resultados experimentales^{11,12}) es necesario incrementar la resistividad y viscosidad del plasma por encima de sus valores clásicos. Una posibilidad es considerar que este aumento de resistividad y viscosidad se debe a la existencia de un estado de turbulencia generado por las microinestabilidades producidas por el gradiente de densidad de corriente. Otros mecanismos, tales como modos de ruptura (tearing) dobles, también han sido propuestos¹³. Otra situación en la cual este tipo de inestabilidades puede desempeñar un papel importante se presenta en el caso de plasmas con filamentos de corriente. Haines y Marsh⁶ mostraron recientemente que la evolución no lineal de la inestabilidad electrotérmica puede conducir a la formación de filamentos de corriente con un ancho del orden de $\rho_e (m_i/m_e)^{1/2}$ (donde ρ_e es el radio de Larmor de los electrones, y (m_i/m_e) es el cociente de masa entre iones y electrones). En el trabajo mencionado se sugiere que en esas condiciones es posible la aparición de un estado de turbulencia, debido a inestabilidades ion-acústicas, que podría explicar el transporte anómalo de energía observado en los tokamaks. Las condiciones para la existencia de modos ion-acústicos puros son bastante restrictivas (temperatura electrónica mucho mayor que la iónica, plasma homogéneo, etc.), pero el análisis más detallado realizado en esta tesis muestra que los perfiles de densidad de corriente y temperatura obtenidos por Haines y Marsh pueden producir la excitación de modos inestables, y consecuentemente generar un estado de turbulencia que explique el transporte anómalo.

Las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad electrónica han sido estudiadas en numerosas publicaciones¹⁴⁻¹⁷. En esos trabajos se han utilizado diversos modelos físicos para estudiar varias situaciones de interés. Mikhailovskii y Ruskhadze¹⁴ obtuvieron una relación de dispersión local

(dependiente de la posición) utilizando un modelo de fluido frío para los electrones, considerando los iones como no magnetizados (la frecuencia de la perturbación mucho mayor que la frecuencia de ciclotrón de los iones, $\omega \gg \Omega_i$) y suponiendo que el plasma se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme (es decir se desprecia el campo producido por la corriente del plasma). Resolviendo esta relación de dispersión los autores determinaron las condiciones de inestabilidad y mostraron que la inclusión de gradientes de densidad tiene un efecto estabilizante. Hirose y Alexeff¹⁵ consideraron un campo magnético uniforme y utilizaron la aproximación local para obtener una relación de dispersión que incluye efectos cinéticos y es válida si $\omega \gg \Omega_i$. En el límite de fluido frío se recuperan los resultados de la ref. 14 mientras que considerando iones fríos y electrones calientes, y utilizando los desarrollos de la función de dispersión del plasma válidos en esos límites se obtiene una relación de dispersión semejante a la correspondiente a ondas ion-acústicas pero modificada por el gradiente de velocidad electrónica. Liu¹⁶ estudió el problema, en la aproximación local, considerando iones no magnetizados e incluyendo efectos cinéticos. En este trabajo se muestra por primera vez la importancia del gradiente de temperatura (intrínsecamente relacionado con el gradiente de corriente), pero no se incluyen los efectos asociados con gradientes de densidad, colisiones y cizalladura (shear) del campo magnético. Utilizando las mismas aproximaciones que en la ref. 15 para la función de dispersión del plasma, Liu obtuvo una relación de dispersión para modos ion-acústicos que muestra el efecto estabilizante del gradiente de temperatura en los modos asociados al gradiente de velocidad electrónica, y que se reduce a la calculada por Hirose y Alexeff¹⁵ en el caso de temperatura uniforme. Dentro de la misma aproximación se muestra también que, aún en el caso de velocidad uniforme, el gradiente de temperatura puede producir modos inestables y que la condición para que esto ocurra es menos restrictiva que para el gradiente de velocidad. Considerando que la velocidad de fase de

la perturbación es mucho mayor que la velocidad térmica de iones y electrones se obtiene una relación de dispersión cuyo análisis muestra que en este límite el gradiente de temperatura también puede excitar modos inestables y que la condición de inestabilidad se reduce, en el caso de temperatura uniforme, a la encontrada en la ref. 14. Finalmente puede mencionarse que los cálculos realizados utilizando la teoría cuasilineal muestran que el estado de turbulencia asociado con las inestabilidades consideradas puede generar procesos de transporte anómalo. Horton¹⁷ utilizó un modelo de fluido frío con iones no magnetizados y obtuvo, usando teoría no local, una ecuación diferencial de segundo orden para el potencial electrostático que incluye los efectos de cizalladura del campo magnético pero sin gradientes de densidad y temperatura. Considerando perturbaciones localizadas (el potencial va a cero al infinito) Horton obtuvo una relación de dispersión que muestra la existencia de modos inestables no oscilantes cuya tasa de crecimiento es proporcional a la magnitud del gradiente de velocidad y mostró la existencia de procesos anómalos calculando la magnitud del coeficiente de viscosidad resultante.

El estudio de las inestabilidades producidas por gradientes de temperatura también ha recibido considerable atención. Históricamente este problema fue analizado en primer término por Mikhailovskii¹⁸, quien, utilizando teoría local y considerando efectos cinéticos, mostró que un gradiente de temperatura opuesto al gradiente de densidad puede producir modos inestables en un plasma inmerso en un campo magnético sin cizalladura. Mahajan y Ross¹⁹ mostraron la existencia de modos localizados producidos por el gradiente de temperatura. Los estudios numéricos realizados por estos autores revelan, sin embargo, que en ausencia de otros mecanismos desestabilizantes (como por ejemplo partículas atrapadas) estos modos resultan estables. Antonsen y Mahajan²⁰ presentaron posteriormente una elegante demostración analítica de estos resultados. El procedimiento consiste en efectuar una rotación del sis-

tema de coordenadas en el plano complejo y construir una forma cuadrática a partir de la cual puede probarse la no existencia de modos inestables. Estos resultados fueron luego generalizados por Lee y Chen²¹ al caso de perturbaciones electromagnéticas. En los trabajos mencionados se supone que T_e'/T_e ($T_e \equiv$ temperatura electrónica, $' \equiv \partial/\partial x$) es uniforme; esta suposición puede ser razonable cuando el perfil de temperatura es suficientemente suave pero deja de ser válida en presencia de los fuertes gradientes que pueden resultar de una distribución de corriente muy localizada. En este sentido es importante destacar que se ha encontrado²² que el efecto estabilizante de la cizalladura del campo magnético en la inestabilidad universal (producida por el gradiente de densidad) puede ser anulado si se considera n'/n ($n \equiv$ densidad) dependiente de x . Como en este trabajo se utiliza un perfil de temperatura para el cual T_e'/T_e es función de x no resulta sorprendente que aparezcan modos inestables.

El análisis precedente muestra que, salvo el caso de Liu¹⁶, no existen estudios en los que se consideren simultáneamente los gradientes de velocidad y temperatura electrónica. Por otra parte los trabajos que cubren aspectos parciales del problema (gradientes de velocidad o temperatura) tampoco resultan satisfactorios ya que en todos los casos se utilizan aproximaciones que no son totalmente válidas en la situación física considerada en esta tesis. El objetivo de este trabajo es entonces presentar un estudio detallado de las inestabilidades electrostáticas de baja frecuencia ($\omega \ll \Omega_i$) producidas por gradientes de densidad de corriente en un sustrato (slab) de plasma inmerso en un campo magnético con cizalladura. Se estudian los modos producidos por gradientes de velocidad y temperatura electrónica y se incluyen además gradientes de densidad y colisiones. Partiendo de un caso sencillo (fluido frío) los modelos utilizados para describir la dinámica de iones y electrones se van mejorando progresivamente para permitir un mejor análisis del efecto de las distin-

tas contribuciones sobre la estructura y tasa de crecimiento de los modos inestables. Es importante mencionar que las aproximaciones utilizadas (perturbaciones electrostáticas y baja frecuencia) se encuentran plenamente justificadas. En particular, la aproximación electrostática es válida en el caso de plasmas de bajo β ($\beta \equiv$ cociente entre presión termodinámica y presión magnética) y por lo tanto resulta satisfactoria para los valores de densidad, temperatura y campo magnético utilizados ($\beta \approx 10^{-5}$). La aproximación de baja frecuencia queda justificada a posteriori ya que los resultados numéricos muestran que $\omega \ll \Omega_i$ en todos los casos considerados.

La estructura de esta tesis es la siguiente. En el capítulo II se utilizan las ecuaciones de dos fluidos (en el límite de plasma frío) para estudiar las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad electrónica. En el caso no local se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden (en donde la frecuencia del modo aparece como autovalor) que puede ser resuelta analíticamente para perfiles sencillos de velocidad y campo magnético y utilizando la aproximación local se obtiene una relación de dispersión algebraica que permite calcular la frecuencia del modo en función del gradiente de velocidad. En ambos casos se muestra que si $u' \neq 0$ ($u \equiv$ velocidad electrónica) pueden aparecer modos inestables. En el capítulo III se utiliza la ecuación de deriva cinética para los electrones (y el modelo de fluido frío para los iones) y se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden que es resuelta numéricamente para perfiles realistas de velocidad y temperatura. El uso de un modelo cinético para los electrones permite incluir los efectos relacionados con la interacción resonante entre ondas y partículas (amortiguamiento de Landau) y estudiar las inestabilidades producidas por gradientes de temperatura electrónica. Primero se muestra que tanto el gradiente de velocidad como el de temperatura (actuando separadamente) pueden producir modos inestables localizados en la vecindad de las superficies racionales y luego se

analiza el caso más general en que ambos gradientes se encuentran presentes simultáneamente (nuevamente aparecen modos inestables localizados). En todos los casos se presentan exhaustivos estudios numéricos de la variación de la tasa de crecimiento y estructura espacial de los modos inestables en función de diversos parámetros de interés. En el capítulo IV se utiliza la ecuación de deriva cinética para los electrones y se considera que la temperatura iónica es finita. Como el radio de Larmor de los iones resulta comparable con el ancho típico de la perturbación no puede utilizarse la aproximación diferencial (tradicionalmente usada en el estudio de ondas de deriva). Al integrar la ecuación de Vlasov linealizada se obtiene entonces una ecuación integral que es resuelta numéricamente. En particular resulta de interés el estudio de las modificaciones que se producen en la estructura espacial y frecuencia de los modos inestables al variar τ ($\tau = T_e/T_i$). En el capítulo V se resumen los resultados obtenidos y se discute un mecanismo para explicar la penetración de un perfil de corriente. Finalmente en el apéndice A se presenta la deducción de la densidad electrónica perturbada utilizando la ecuación de deriva cinética y en el apéndice B se discuten las técnicas numéricas utilizadas. A menos que se indique lo contrario en este trabajo se utilizará el sistema de unidades cgs Gaussiano y la temperatura se expresará en unidades de energía ($T \equiv KT$, K constante de Boltzman).

II-MODELO DE DOS FLUIDOS

En este capítulo se utilizan las ecuaciones de dos fluidos²³, en la aproximación de plasma frío ($T_{e,i} \rightarrow 0$), para estudiar las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad electrónica. Este modelo permite obtener soluciones analíticas de la ecuación de estructura del modo y la relación de dispersión resultante pero (debido a la aproximación de plasma frío), no puede ser utilizado para estudiar inestabilidades producidas por gradientes de temperatura.

A-Equilibrio

La situación física analizada en este trabajo se encuentra esquematizada en la fig. 1. Por simplicidad se considera un sustrato de plasma y un sistema de coordenadas cartesianas con versores $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. El campo magnético resulta de la superposición de un campo externo uniforme, $B_0 \hat{z}$, y el campo producido por la corriente, $B_y(x) \hat{y}$.

$$\underline{B} = B_0 (\hat{z} + \hat{y} B_y/B_0)$$

donde $B_y/B_0 = \epsilon \ll 1$ y se considerarán sólo términos de primer orden en ϵ . El origen del sistema de coordenadas se elige de modo que $\underline{k} \cdot \underline{B}(x=0) = 0$ (donde \underline{k} es el vector de onda de la perturbación) y por lo tanto el plano $x=0$ resulta una superficie racional. La densidad de ambas especies y la velocidad y temperatura electrónica se consideran dependientes de x y se supone que la longitud típica de variación de la densidad es mucho mayor que la correspondiente a la velocidad electrónica de modo que el gradiente de corriente se debe únicamente al gradiente de velocidad (notar que esta es

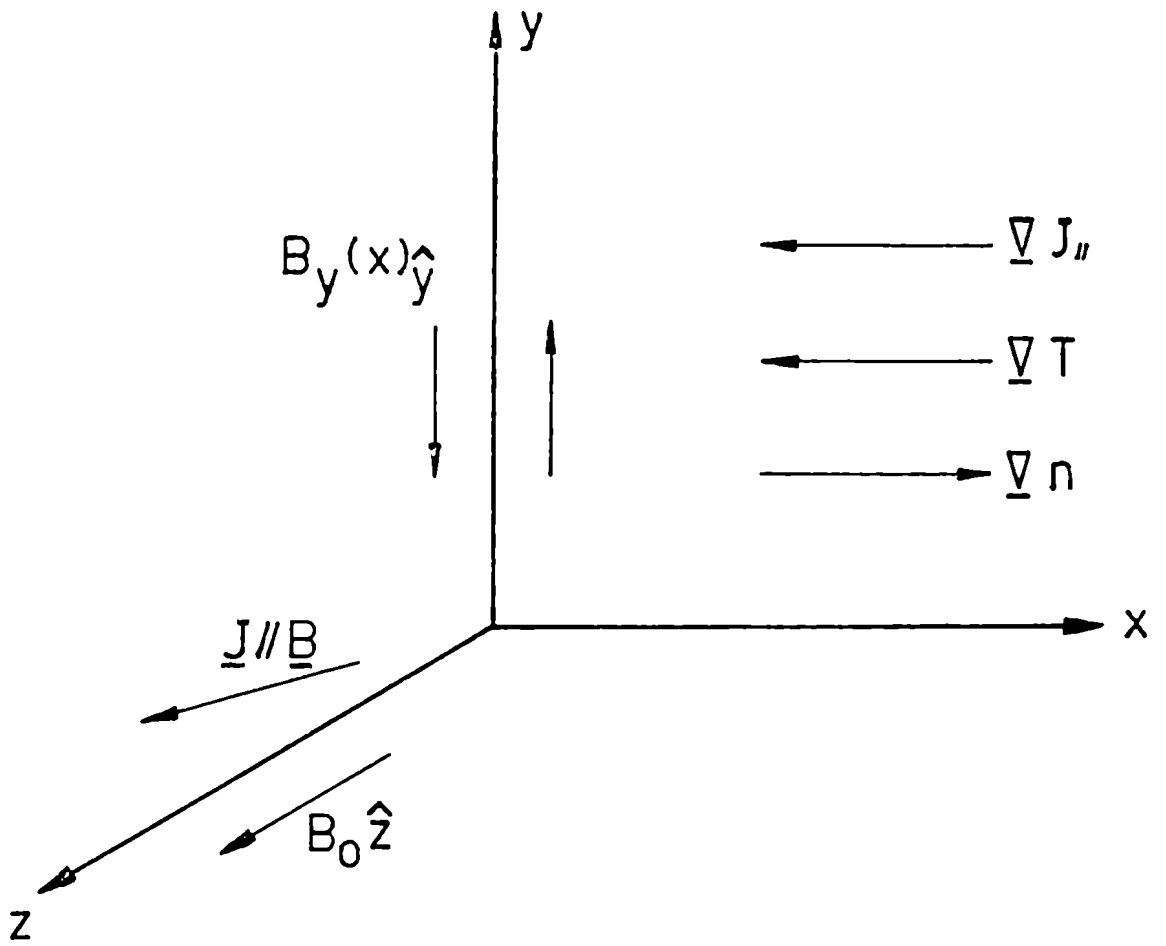


Figura 1

la situación durante la fase inicial de una descarga óhmica donde el perfil de corriente es mucho más abrupto que el de densidad). Se define entonces

$$J_{//}(x) = -en_0 u(x) \qquad J'_{//}(x) = -en_0 u'(x)$$

donde $J_{//}$ es la corriente en la dirección del campo magnético, $-e$ la carga del electrón y n_0 la densidad de equilibrio (igual para ambas especies).

B-Ecuaciones Básicas

Las ecuaciones correspondientes al modelo de dos fluidos pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \underline{V}_\alpha) = 0 \qquad (11-1)$$

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{V}_\alpha \cdot \nabla \right) \underline{V}_\alpha = n_\alpha q_\alpha \left(\underline{E} + \frac{\underline{V}_\alpha \times \underline{B}}{c} \right) - \nabla \cdot \underline{P}_\alpha + \int m_\alpha \underline{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{col} d\underline{v} \qquad (11-2)$$

donde q_α, m_α y n_α son la carga, masa y densidad respectivamente de la especie α ($\alpha \equiv$ iones, electrones), \underline{E} es el campo eléctrico, c la velocidad de la luz, \underline{V}_α la velocidad del fluido, \underline{v} la velocidad de las partículas, \underline{P}_α el tensor de presiones y el último término en el miembro de la derecha de (11-2) representa el efecto de las colisiones (f_α es la función de distribución de la especie α). El tensor de presiones está dado por

$$\underline{P}_\alpha = m_\alpha \int (\underline{v} - \underline{V}_\alpha) (\underline{v} - \underline{V}_\alpha) f_\alpha d\underline{v}$$

y la aproximación de plasma frío consiste en despreciar el término $\nabla \cdot \underline{P}_\alpha$

frente a la fuerza de Lorentz en (11-2). En general²³ el término de colisiones puede aproximarse en la forma

$$C_{\alpha} = \int m_{\alpha} \underline{v} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{col} d\underline{v} \approx -\sum_{\gamma} (\underline{v}_{\alpha} - \underline{v}_{\gamma}) \nu_{\alpha\gamma}$$

donde $\nu_{\alpha\gamma}$ es la frecuencia de colisión para transferencia de momento entre la especie α y la γ . Como $\nu_{ei} \gg \nu_{ie}$ y se supone que $\underline{v}_e \gg \underline{v}_i$ sólo se consideran colisiones electrón-ion de modo que

$$C_e = -\nu \underline{v}_e \quad (\nu \equiv \nu_{ei}), \quad C_i = 0 \quad (11-3)$$

Utilizando estas aproximaciones la ecuación (11-2) resulta

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}_{\alpha} \cdot \nabla \right) \underline{v}_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\underline{E} + \frac{\underline{v}_{\alpha} \times \underline{B}}{c} \right) + C_{\alpha} \quad (11-4)$$

Para completar el sistema de ecuaciones es necesario considerar las ecuaciones que determinan los campos. En el límite electrostático es suficiente utilizar la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \quad (11-5)$$

Como en los casos de interés la longitud de onda de la perturbación es mucho mayor que la longitud de Debye ($\lambda_D^2 = T/4\pi n_0 e^2$) la ecuación (11-5) puede reemplazarse por la condición de cuasineutralidad

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \quad (11-6)$$

Las ecuaciones (11-1), (11-4) y (11-6), junto con la definición (11-3), forman el sistema de ecuaciones utilizado en este capítulo.

C-Ecuación de Estructura del Modo

Para obtener las ecuaciones que describen la evolución de perturbaciones de pequeña amplitud se linealiza el sistema de ecuaciones presentado en la sección anterior. Esto se consigue considerando que todas las magnitudes de interés pueden expresarse como la suma de un valor equilibrio más una perturbación

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_1$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1$$

$$\underline{V}_\alpha = \underline{V}_{\alpha 0} + \underline{V}_{\alpha 1}$$

$$n_\alpha = n_{\alpha 0} + n_{\alpha 1}$$

(11-7)

donde el subíndice 0 corresponde a las cantidades de equilibrio y el 1 a la perturbación (no confundir \underline{B}_0 , campo total de equilibrio, con B_0 , módulo del campo externo). Las cantidades de equilibrio se eligen de acuerdo con la situación física que se desea estudiar; en este caso se considerará

$$\underline{E}_0 = 0$$

$$\underline{B}_0 = B_0 (\hat{z} + \hat{y} B_y/B_0)$$

$$\underline{V}_{i0} = 0 \quad \underline{V}_{e0} = u(x) \underline{B}_0 / |\underline{B}_0|$$

$$n_{i0} = n_{e0}$$

y además se supondrá que $\underline{B}_1 = 0$ (aproximación electrostática). Reemplazando (11-7) en las ecuaciones básicas del modelo y linealizando respecto de la perturbación se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial n_{\alpha 1}}{\partial t} + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \underline{V}_{\alpha 1} + \underline{V}_{\alpha 0} \cdot \nabla n_{\alpha 1} + \underline{V}_{\alpha 1} \cdot \nabla n_{\alpha 0} = 0$$

$$\frac{\partial \underline{V}_{\alpha 1}}{\partial t} + (\underline{V}_{\alpha 0} \cdot \nabla) \underline{V}_{\alpha 1} + (\underline{V}_{\alpha 1} \cdot \nabla) \underline{V}_{\alpha 0} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\underline{E}_1 + \frac{\underline{V}_{\alpha 1} \times \underline{B}_0}{c} \right) + C_{\alpha 1} \quad (11-8)$$

$$Z n_{i 1} = n_{e 1}$$

donde Ze es la carga de los iones. Es importante notar que en la segunda ecuación del sistema (11-8) aparece el término convectivo $(\underline{V}_{\alpha 1} \cdot \nabla) \underline{V}_{\alpha 0}$. Este término (que se anula para perfiles uniformes de velocidad) es el que produce la inestabilidad y por lo tanto las inestabilidades de este tipo se conocen como inestabilidades convectivas.

La estabilidad del equilibrio considerado se determina utilizando el método de análisis de modos normales. Para ello se supone que las magnitudes perturbadas tienen una dependencia temporal del tipo $\exp(-i\omega t)$ y se calcula el signo de la parte imaginaria de la frecuencia. Si $\text{Im}(\omega) > 0$ el modo es linealmente inestable (la perturbación crecerá en el tiempo), si $\text{Im}(\omega) < 0$ el modo es estable (corresponde a una oscilación amortiguada) y si $\text{Im}(\omega) = 0$ se dice que la perturbación es marginalmente estable (amplitud constante). Como el equilibrio considerado es inhomogéneo en dirección x no es posible utilizar una única componente de Fourier, $\exp(ik_x x)$, para describir la dependencia espacial de la perturbación en esa dirección y por lo tanto se consideran perturbaciones de la forma

$$V_{\alpha 1}(\underline{r}, t) = \tilde{V}_{\alpha}(x) \exp(ik_y y - i\omega t)$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \tilde{\phi}(x) \exp(ik_y y - i\omega t) \quad (11-9)$$

$$n_{\alpha 1}(\underline{r}, t) = \tilde{n}_{\alpha}(x) \exp(ik_y y - i\omega t)$$

donde $\phi(\underline{r}, t)$ es el potencial electrostático ($\underline{E}(\underline{r}, t) = -\nabla\phi(\underline{r}, t)$) y k_z no aparece debido a las condiciones impuestas en la sección A. Reemplazando (11-9) en la ecuación de continuidad linealizada se obtiene

$$\tilde{n}_{\alpha} = \frac{1}{(\omega - k_{//} u_{\alpha})} \left[n_0 (k_y \tilde{V}_{\alpha y} - i \frac{\partial \tilde{V}_{\alpha x}}{\partial x}) - i \tilde{V}_{\alpha x} \frac{\partial n_0}{\partial x} \right] \quad (11-10)$$

donde $k_{//} = \underline{k} \cdot \underline{B} / |\underline{B}|$ (se elimina el subíndice 0 del campo de equilibrio porque $\underline{B}_1 = 0$). Las velocidades perturbadas se calculan a partir de las ecuaciones de momento linealizadas obteniéndose

$$\tilde{V}_{\alpha x} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} (\Omega_{\alpha}^2 - \omega_{d\alpha}^2)} \left(i\omega_{d\alpha} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - i\Omega_{\alpha} k_y \tilde{\phi} \right) \quad (11-11)$$

$$\tilde{V}_{\alpha y} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} (\Omega_{\alpha}^2 - \omega_{d\alpha}^2)} \left[\frac{k_y \Omega_{\alpha} \tilde{\phi}}{\omega_{d\alpha}} \left(\epsilon^2 \Omega_{\alpha} - \frac{\omega_{d\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}} - \epsilon u_{\alpha}' \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} (u' \epsilon + \Omega_{\alpha}') \right]$$

donde

$$\omega_{d\alpha} = \omega + i\nu_{\alpha} - k_{//} u_{\alpha} \quad (\nu_i = 0, u_i = 0) \quad \Omega_{\alpha} = \frac{q_{\alpha} B_0}{m_{\alpha} c} \quad (q_e = -e)$$

Reemplazando (II-11) en (II-10) y considerando $\Omega_\alpha^2 \gg \omega_{d\alpha}^2$ (aproximación de baja frecuencia) la condición de cuasineutralidad puede escribirse en la forma

$$\sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 \zeta_{\alpha}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \left(\frac{n'_{\alpha}}{n_0} - \frac{k_{//} u_{\alpha} B'_{\alpha}}{\omega_{d\alpha} B_Y} \right) + \tilde{\phi} \left(\frac{k_{//}^2 \Omega_{\alpha}^2}{\omega_{d\alpha}^2} - \frac{k_Y k_{//} \Omega_{\alpha} u'_{\alpha}}{\omega_{d\alpha}^2} - k_Y^2 - \frac{n'_{\alpha} k_Y \Omega_{\alpha}}{n_0 \omega_{d\alpha}} \right) \right] = 0 \quad (II-12)$$

dónde $\zeta_{\alpha} = 1 - i\nu_{\alpha}/(\omega + i\nu_{\alpha} - k_{//} u_{\alpha})$. Introduciendo las definiciones

$$\begin{aligned} \rho_s^2 &= \frac{2T_e}{m_i \Omega_i^2} & v_e^2 &= \frac{2T_e}{m_e} & \mu &= \frac{m_e}{m_i} & \phi &\equiv \frac{e\tilde{\phi}}{T_e} \\ z &= \frac{\omega}{\Omega_i} & z_e &= \frac{\omega_{de}}{\Omega_i} & u &\equiv \frac{u}{v_e} & n' &\equiv \frac{n'_{\alpha}}{n_0} \rho_s \\ u' &\equiv \frac{u'_{\alpha} \rho_s}{v_e} & B'_Y &\equiv \frac{B'_Y \rho_s}{B_Y} & v &\equiv \frac{v_e}{\Omega_i} & \zeta_e &= 1 - \frac{i\nu}{z_e} \end{aligned}$$

$$v_e = \frac{16}{6} \frac{\pi^{1/2} Z^2 e^4 n_{i0} \ln \Lambda}{\sqrt{2} m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \quad 24$$

y normalizando k_Y^{-1} y x con respecto a ρ_s se obtiene la siguiente ecuación en función de variables adimensionalizadas

$$\begin{aligned} & Z^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(n' - \frac{k_{//} u B'_Y \mu^{1/2}}{z_e \zeta_e Z^2} \right) - k_Y^2 \phi \right] + \\ & + \phi \left[\frac{k_{//}}{\zeta_e z_e^2 \mu^{1/2}} \left(\frac{k_{//}}{\mu^{1/2}} + k_Y u' \right) + k_Y n' \left(\frac{1}{z_e \zeta_e} - \frac{Z^2}{z} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (II-13)$$

donde se despreciaron términos de orden μ comparados con 1

D-Teoría Local

Si las longitudes características asociadas con los gradientes de las magnitudes de equilibrio son mucho mayores que la correspondiente a ϕ ($\phi'/\phi \gg 1/L_{n,u,B}$) la perturbación se comporta como si el plasma fuese homogéneo y por lo tanto puede utilizarse la aproximación local. Esto se consigue reemplazando $\partial/\partial x$ por ik_x en la ecuación diferencial (11-13) y considerando $k_x^2 L_{n,u,B}^2 \gg 1$. Se obtiene así la siguiente relación de dispersión

$$-z^2 k^2 + \frac{k_{//}^2}{\mu z_e^2 \zeta_e} + \frac{k_Y k_{//} u'}{z_e^2 \zeta_e \mu^{1/2}} + k_Y n' \left(\frac{1}{z_e \zeta_e} - \frac{z}{z} \right) = 0 \quad (11-14)$$

donde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Tomado $Z = 1$ y considerando que $z_e \zeta_e = z - k_{//} u \mu^{-1/2}$ la ecuación (11-14) puede reescribirse en la forma

$$z^2 + z(iv - 2k_{//} u \mu^{-1/2}) - iv k_{//} u \mu^{-1/2} + \frac{k_{//}^2}{\mu k^2} (k^2 u^2 - 1) - \frac{k_Y k_{//}}{\mu^{1/2} k^2} (u' + n' u) + \frac{k_Y n'}{z k^2} \left(\frac{k_{//}^2 u^2}{\mu} - \frac{iv k_{//} u}{\mu^{1/2}} \right) = 0 \quad (11-15)$$

Esta es una ecuación de tercer grado en z y por lo tanto la obtención, y posterior análisis, de una condición general para la existencia de modos inestables resulta bastante complicada. Se prefiere entonces considerar algunos casos particulares que permiten ilustrar las características bá-

sicas de la inestabilidad y los efectos asociados con colisiones y gradientes de densidad.

Despreciando las colisiones ($\nu = 0$), el gradiente de densidad ($n' = 0$) y el corrimiento Doppler ($k_{//}u/\mu^{1/2}z \ll 1$) se obtiene

$$z = \frac{1}{k} \left[\frac{k_{//}^2}{\mu} + \frac{k_y k_{//} u'}{\mu^{1/2}} \right]^{1/2} \quad (11-16)$$

La condición de inestabilidad resulta entonces

$$\frac{k_{//}^2}{\mu^{1/2}} + k_y k_{//} u' < 0 \quad (11-17)$$

Reemplazando $k_{//}$ por k_z esta condición resulta (a menos de factores de normalización) semejante a la obtenida en la ref.14. Como ejemplo se considera un perfil lineal de velocidad

$$u(x) = u_0 (1 - x/L_J) \text{ con } x/L_J \ll 1 \text{ y } u_0 < 0 \quad (|u_0| \ll 1)$$

Utilizando este perfil de velocidad la proyección del vector de onda en la dirección del campo resulta

$$k_{//} = -k_y x u_0 \beta / \mu^{1/2} \quad (\beta = 8\pi n_e / B_0^2)$$

Reemplazando $k_{//}$ y u' en la condición de inestabilidad se encuentra que el modo es inestable en la región definida por

$$-\frac{\mu}{\beta L_J} < x < 0$$

Tomando $x_0 = -u/23L_J$ se obtiene (para modos inestables)

$$z(x_0) = \frac{ik_y |u_0|}{2k L_J} \quad (11-18)$$

Como $R_e(z) = 0$ esta solución corresponde a perturbaciones crecientes en el tiempo pero sin componentes oscilatorias.

Incluyendo colisiones y el corrimiento Doppler (pero con $n' = 0$) se obtiene

$$z = \frac{k_{//} u}{\mu^{1/2}} - \frac{i\nu}{2} \pm \frac{1}{2} \left[-\nu^2 + \frac{4}{k^2} \left(\frac{k_{//}^2}{\mu} + \frac{k_y k_{//} u'}{\mu^{1/2}} \right) \right]^{1/2} \quad (11-19)$$

La condición para la existencia de modos inestables es la misma que antes y se observa que el corrimiento Doppler sólo contribuye a la parte real de la frecuencia (de modo que aparecerá una componente oscilatoria) mientras que las colisiones disminuyen la tasa de crecimiento de la inestabilidad ($\text{Im}(z) \rightarrow 0$ para $\nu \rightarrow \infty$).

Si se mantiene el gradiente de densidad pero sin colisiones ($\nu = 0$) y considerando $k_{//} u / \mu^{1/2} z \ll 1$ se obtiene

$$z = \frac{1}{k} \left[\frac{k_{//}^2}{\mu} + \frac{k_y k_{//}}{\mu^{1/2}} (u' + n' u) \right]^{1/2} \quad (11-20)$$

El carácter estabilizante o desestabilizante del gradiente de densidad dependerá de los signos relativos de u', n' y u . En el estudio de la penetración de un perfil de corriente puede considerarse $u' > 0, u < 0$ y $n' > 0$ y por lo tanto el gradiente de densidad tendrá un efecto estabilizante.

E-Teoría no Local

En esta sección se presentan soluciones analíticas de la ecuación (11-13) para perfiles sencillos de velocidad, densidad y campo magnético. Este método permite obtener tasas de crecimiento que no dependen de x y k_x (como sucede con la teoría local) y al mismo tiempo proporciona información sobre la estructura espacial de la perturbación.

Se verá más adelante que, dentro del rango de valores de los parámetros considerado, la longitud típica de variación de ϕ es mucho menor que las longitudes características de los gradientes de densidad y campo magnético. Esto permite despreciar el término proporcional a ϕ' (comparado con el de ϕ'') en la ecuación de estructura del modo y por lo tanto la ecuación resultante puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - P(x, z) \phi = 0 \quad (11-21)$$

donde

$$P(x, z) = - \frac{k_{\parallel}^2}{z^2 \zeta_e \mu} - \frac{k_y k_{\parallel} u'}{z^2 \zeta_e \mu^{1/2}} - k_y n' \left(\frac{1}{\zeta_e z_e} - \frac{1}{z} \right) + k_y^2$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de Schrödinger pero con un "potencial" complejo, $P(x, z)$, (notar que, por analogía con mecánica cuántica, se utiliza potencial para $P(x, z)$ y no para ϕ). Para poder resolver analíticamente el problema de autovalores planteado en la ecuación (11-21) es necesario que P sea una función relativamente simple de x . Un caso bastante sencillo, pero de todos modos interesante, se presenta cuando $P(x, z)$ es un polinomio de segundo grado

en x . Esto se consigue utilizando los mismos perfiles que en la sección anterior para $u(x)$ y $k_y(x)$, tomando $n' = L_N^{-1}$ y despreciando el corrimiento Doppler. Con estas hipótesis la ecuación (11-21) puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi \left\{ -k_y^2 + \frac{k_y^2 u^2 \beta^2}{\mu^2 z} x^2 \left(\frac{1}{z+iv} + \frac{\mu}{z L_N L_J \beta} \right) + \frac{x \mu}{\beta} \left(\frac{1}{L_J(z+iv)} - \frac{1}{L_N z} \right) \right\} = 0 \quad (11-22)$$

definiendo

$$z = iz_i \quad (z_i > 0) \quad S = \frac{4k_y^2 u^2 \beta}{\mu z_i} \left[\frac{1}{L_J(z+iv)} - \frac{1}{L_N z_i} \right]$$

$$A^2 = \frac{4k_y^2 u^2 \beta^2}{\mu^2 z_i} \left[\frac{1}{z_i v} + \frac{\mu}{L_N L_J z_i \beta} \right]$$

e introduciendo una nueva variable, y , definida como

$$y = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(Ax + \frac{S}{2A} \right)$$

se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \phi \left[\frac{S^2}{16A^3} - \frac{k_y^2}{A} - \frac{y^2}{4} \right] = 0 \quad (11-23)$$

Esta es una ecuación parabólica cilíndrica²⁵ y por lo tanto la condición de que los modos sean localizados ($\phi \rightarrow 0$ para $y \rightarrow \pm\infty$) proporciona la solución usual en base a funciones de Hermite (H_n).

$$\phi(y) = 2^{-n/2} H_n(y/\sqrt{2}) \exp(-y^2/4) \quad n = 1, 2, \dots \quad (11-24)$$

El ancho característico de la perturbación puede estimarse calculando la posición de los puntos de retorno. Estos puntos definen las posiciones en las que se igualan las energías potencial y cinética de un oscilador armónico clásico y son las soluciones de la ecuación

$$y^2 + \frac{4k^2}{A}y - \frac{S^2}{4A^3} = 0 \quad (11-25)$$

La relación de dispersión se obtiene a partir de la condición de cuantificación que puede escribirse en la forma

$$\frac{S^2}{8A^3} - \frac{2k^2}{A}y = 2n+1 \quad (11-26)$$

Debido a la complejidad de A y S esta ecuación resulta muy difícil de resolver en general y por lo tanto se consideran las mismas situaciones que en la sección precedente.

En ausencia de gradientes de densidad ($L_N \rightarrow \infty$) la ecuación (11-26) se reduce a

$$\frac{z_i(z_i + v) + (2n+1)|u_0|\beta z_i^{1/2}(z_i + v)^{1/2}}{k_y \mu} - \frac{u_0^2}{4L_J^2} = 0 \quad (11-27)$$

Definiendo $w = (z_i + z_i v)^{1/2}$ se obtiene una ecuación de segundo grado para w . Una vez calculada w se resuelve la ecuación

$$z_i^2 + z_i v - w^2 = 0$$

obteniéndose

$$z_i = -\frac{v}{2} + \frac{1}{2} \left\{ v^2 + \left[-\frac{(2n+1)|u_0|\beta}{k_y \mu} + \left(\frac{(2n+1)^2 u_0^2 \beta^2}{k_y^2 \mu^2} + \frac{u_0^2}{L_J^2} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (11-28)$$

Resulta claro que el estado fundamental ($n=0$) es el más inestable ($z_i \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$) y que las colisiones tienen un efecto estabilizante ($z_i \rightarrow 0$ para $v \rightarrow \infty$).

En el caso no colisionante pero con gradientes de densidad la condición de cuantificación resulta

$$\frac{k_y |u_0| \mu (L_N - L_J)^2}{4L_J^2 L_N^2 D^{3/2} z_i \beta} - \frac{k_y z_i \mu}{|u_0| D^{1/2} \beta} = 2n+1 \quad (11-29)$$

donde

$$D = 1 + \mu/L_N L_J \beta$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado para z_i se obtiene

$$z_i = -\frac{(2n+1)|u_0|\beta D^{1/2}}{2k_y \mu} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(2n+1)^2 u_0^2 \beta^2}{k_y^2 \mu^2} + \frac{u_0^2}{DL_J^2} \left[1 - \frac{L_J}{L_N} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (11-30)$$

Recordando que $L_N > L_J$ queda claro que un gradiente de densidad del mismo sentido que el de velocidad tiene un efecto estabilizante.

A fin de recobrar los resultados de la teoría local se considera ahora el caso de un perfil de velocidad suave ($L_J^{-1} \ll \beta/k_y \mu$) en el límite no colisionante, sin gradiente de densidad y con $n=0$. En este caso la tasa de crecimiento de la inestabilidad está dada por

$$z_i \approx \frac{k_y |u_0| \mu}{4L_J^2 \beta} \quad (11-31)$$

Utilizando este valor de z_i pueden calcularse los puntos de retorno

$$x_1 \approx -\frac{\mu}{L_J \beta} \quad x_2 \approx -\frac{k_y^2 \mu^3}{16L_J^3 \beta^3}$$

Como $|x_1| \gg |x_2|$ el ancho de la perturbación es aproximadamente $\mu/\beta L_J$ y por lo tanto es razonable considerar $k_x \approx 2\beta L_J/\mu$ (con $k_x^2 \gg k_y^2$). Reemplazando este valor de k_x en los resultados obtenidos utilizando teoría local se recupera el valor de z_i dado en (11-31).

III-MODELO CINETICO PARA ELECTRONES

Las ecuaciones de dos fluidos utilizadas en el capítulo anterior no incluyen los efectos asociados con la interacción resonante entre ondas y partículas (amortiguamiento de Landau) y por lo tanto son válidas sólo si la velocidad de fase de la perturbación en dirección paralela al campo magnético es mucho mayor que la velocidad térmica de las partículas ($\omega/k_{\parallel} \gg v_{e,i}$). Se verá más adelante que esta condición no se satisface en general para los electrones y que ρ_e es siempre mucho menor que cualesquiera de las longitudes de interés. Resulta claro entonces que un modelo que describa correctamente el movimiento de los electrones en dirección paralela al campo magnético y no incluya los efectos relacionados con la rotación de Larmor resulta más apropiado para estudiar el problema considerado. La utilización de un modelo cinético permite estudiar además las inestabilidades producidas por el gradiente de temperatura electrónica que aparece como consecuencia del gradiente de densidad de corriente. En este capítulo se utilizará la ecuación de deriva cinética para describir la dinámica electrónica y se mantendrá el modelo de fluido frío para los iones.

A-Ecuación de Estructura del Modo

El cálculo de la densidad electrónica perturbada se encuentra esquematizado en el apéndice A y por lo tanto aquí sólo se presenta el resultado final

$$\tilde{n}_e = \frac{en\tilde{\phi}}{T_e \zeta_e} \left\{ \frac{k_y v_e}{2|k_{\parallel}| \Omega_e} \left[\frac{n'}{n} Z(\eta_e) + \frac{T_e'}{T_e} (\bar{Z}(\eta_e) + \eta_e) \right] + \left(\frac{k_y u'}{k_{\parallel} \Omega_e} + 1 \right) [1 + \eta_e Z(\eta_e)] \right\} \quad (III-1)$$

donde

$$\eta_e = \frac{\omega + iv - k_{//} u}{|k_{//}| v_e} \quad \bar{Z}(\eta_e) = Z(\eta_e) (\eta_e^2 - 1/2) \quad \Omega_e = \frac{eB_0}{m_e c}$$

$$\zeta_e = 1 + \frac{iv}{|k_{//}| v_e} Z(\eta_e)$$

y $Z(\eta_e)$ es la conocida función de dispersión del plasma²⁶. La densidad iónica perturbada se obtiene a partir del modelo de fluido frío del capítulo anterior y resulta

$$\tilde{n}_i = \frac{en_0}{m_i \Omega_i^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{n_0'}{n_0} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \tilde{\phi} \left(\frac{k_{//}^2 \Omega_i^2}{\omega^2} - k_y^2 - \frac{n_0' k_y \Omega_i}{n_0 \omega} \right) \right] \quad (III-2)$$

Introduciendo las definiciones (notar que ahora T_e es función de x)

$$T_e(x) = T_{e0} t(x) \quad (t(x=0)=1) \quad v_{e0}^2 = \frac{2T_{e0}}{m_e} \quad \rho_s^2 = \frac{2T_{e0}}{m_i \Omega_i^2}$$

$$u \equiv \frac{u}{v_{e0}} \quad T_e' \equiv \frac{T_e'}{T_e} \rho_s \quad n_0' \equiv \frac{n_0'}{n_0} \rho_s \quad u' \equiv \frac{u'}{v_{e0}} \rho_s$$

$$\eta_e \equiv \frac{\mu^{1/2}}{t^{1/2}} \left[\left(\frac{z + iv - k_{//} u \mu^{1/2}}{|k_{//}|} \right) \right] \quad c = 1 + \frac{iv \mu^{1/2} Z(\eta_e)}{|k_{//}| t^{1/2}}$$

normalizando x , k_y^{-1} y $k_{//}^{-1}$ con respecto a ρ_s y utilizando las restantes variables adimensionales definidas en el capítulo anterior se obtiene, a partir

de la condición de cuasineutralidad, la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + n' \frac{\partial \phi}{\partial x} - Q(x, z) \phi = 0 \quad (III-3)$$

donde

$$Q(x, z) = - \left(\frac{k_{//}^2}{z^2} - k_y^2 - \frac{k_y n'}{z} \right) + \frac{1}{z^2 c t^{1/2}} \left\{ \frac{k_y \mu^{1/2}}{|k_{//}|} \left[n' Z(\eta_e) + T'_e \left(\bar{Z}(\eta_e) + \eta_e \right) \right] + \frac{2}{t^{1/2}} \left[1 + \eta_e Z(\eta_e) \right] \left(\frac{k_y u' \mu^{1/2}}{k_{//}} + 1 \right) \right\} \quad (III-4)$$

Las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior utilizando el modelo de fluido frío pueden recuperarse, a partir de (III-3), desarrollando la función de dispersión del plasma en el límite de argumento grande, despreciando el término proporcional a T'_e y tomando $t(x) = 1$. En efecto, para $|\eta_e| \gg 1$ se tiene

$$Z(\eta_e) \approx - \frac{1}{\eta_e} - \frac{1}{2\eta_e^3}$$

y en consecuencia

$$1 + \eta_e Z(\eta_e) \approx - \frac{k_{//}^2}{2z^2 \mu} \quad c \approx 1 - \frac{i\nu}{z_e}$$

Reemplazando estos resultados en $Q(x, z)$ se obtiene (II-13).

La ecuación (III-3) es extremadamente difícil de tratar analíticamente debido a la complicada dependencia espacial de $Q(x,z)$ y este problema no puede superarse considerando perfiles relativamente sencillos de velocidad, temperatura y densidad porque el argumento de la función de dispersión del plasma también depende de x . Podría pensarse en la posibilidad de utilizar los desarrollos asintóticos de $Z(\eta_e)$ pero esto no es posible debido a que en los casos de interés el valor absoluto de η_e , calculado en el punto en que la amplitud de la perturbación es máxima, resulta del orden de la unidad. Debido a lo expuesto anteriormente, en el resto de este capítulo se presentarán los resultados obtenidos a partir de la resolución numérica de la ecuación (III-3). Los métodos numéricos utilizados se discuten en detalle en el apéndice B por lo que aquí solamente se menciona que se usó un código de elementos finitos que permite obtener el valor de z y la autofunción correspondiente. La falta de soluciones analíticas puede compensarse en parte notando que, como se mencionó en el capítulo anterior, la ecuación de estructura del modo (sin el término proporcional a $\partial\phi/\partial x$) se asemeja a la ecuación de Schrödinger y por lo tanto el estudio de la forma de $Q(x,z)$ permite encontrar algunos argumentos cualitativos para explicar los cambios que se producen en la frecuencia y estructura espacial de las autofunciones al variar los parámetros de interés.

Antes de proceder a la resolución numérica de la ecuación (III-3) es necesario especificar los perfiles de velocidad, temperatura y densidad que serán utilizados. En este sentido es conveniente que los perfiles usados sean relativamente sencillos, pero al mismo tiempo proporcionen una buena descripción de la situación física considerada. En la fase inicial de una descarga óhmica la corriente (y en consecuencia la temperatura electrónica) disminuye hacia el interior del plasma mientras que la densidad aumenta. La utilización de perfiles lineales de velocidad y temperatura no resulta del todo aconsejable

ya que ambas magnitudes aumentarían indefinidamente con x . Los siguientes perfiles parecen una elección razonable para describir el proceso de penetración de una corriente en un plasma

$$u(x) = u_0 \left[1 - \tanh(x/L_J) \right] = 2u_0 / \left[1 + \exp(2x/L_J) \right]$$

$$T_e(x) = T_{e0} \left[1 - \tanh(x/L_T) \right] = 2T_{e0} / \left[1 + \exp(2x/L_T) \right] \quad (III-5)$$

$$n_0(x) = n_0(0) \exp(x/L_N)$$

donde L_J , L_T y L_N son las longitudes características de los gradientes de velocidad, temperatura y densidad respectivamente y u_0 y T_{e0} son la velocidad y temperatura electrónica en $x=0$. En general se considerará que la velocidad de los electrones es mucho menor que la velocidad térmica ($|u_0| \ll 1$) y que T_{e0} es del orden de algunas decenas de eV. Debe notarse que se ha utilizado la misma dependencia espacial para los perfiles de corriente y temperatura pero que, en principio, L_J y L_T pueden ser diferentes. En la fig.2 se presentan los gráficos de velocidad, temperatura y densidad en función de x . Una vez que se ha especificado el perfil de corriente puede calcularse el campo magnético resultante

$$\frac{B_y(x)}{B_0} = - \frac{\beta u_0 L_J}{\mu^{1/2}} \ln \left[\frac{2 \exp(2x/L_J)}{1 + \exp(2x/L_J)} \right]$$

Es posible verificar que para $x/L_J \ll 1$ se recupera la expresión aproximada utilizada en el capítulo anterior.

B-Inestabilidades Producidas por Gradientes de Velocidad

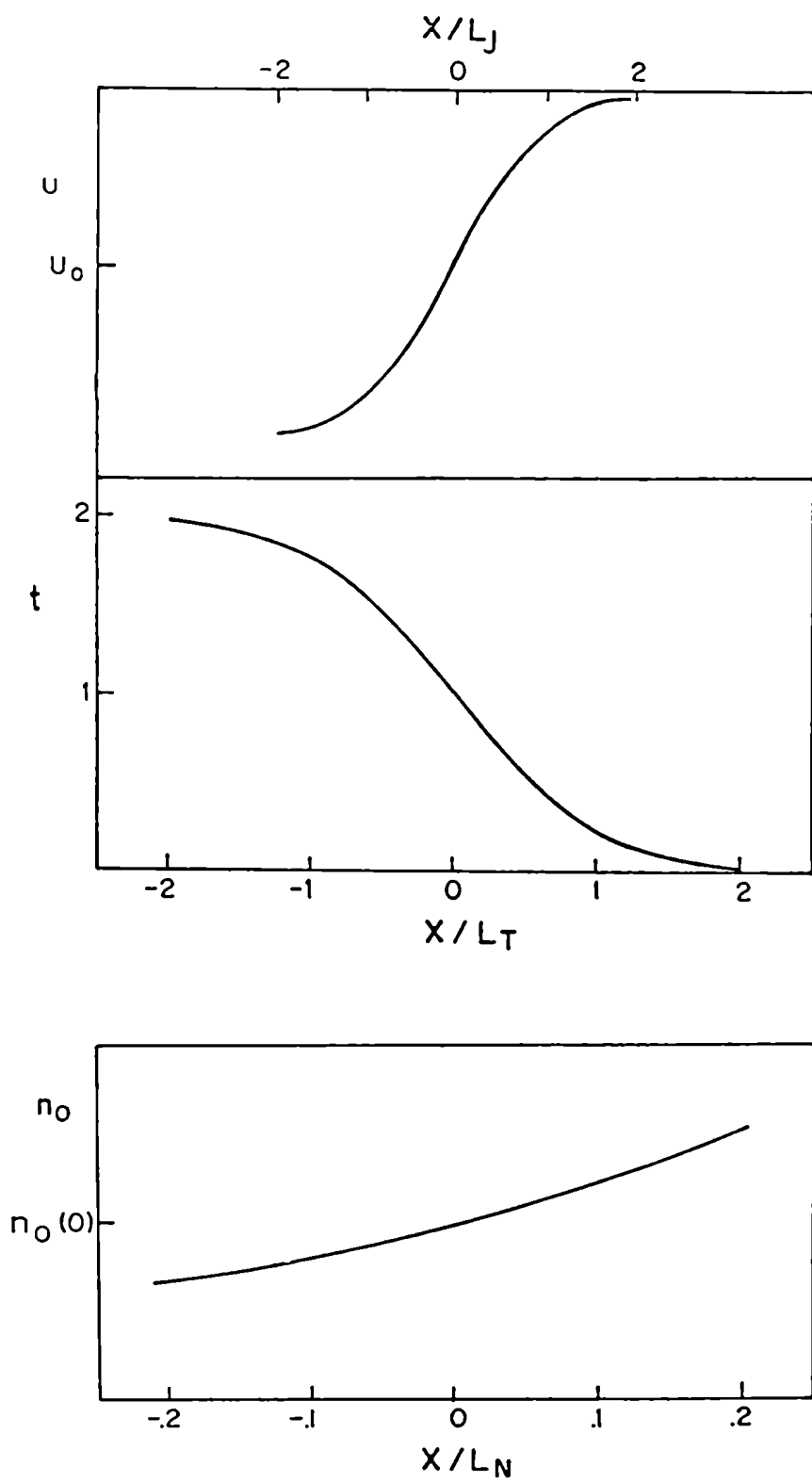


Figura 2

En esta sección se estudian las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad electrónica en un plasma con temperatura uniforme. Para ello se resuelve numéricamente la ecuación (III-3) en el límite $L_T \rightarrow \infty$ y se determina la dependencia de la frecuencia y estructura espacial de los modos inestables respecto de los parámetros de interés. Para facilitar el análisis de la situación considerada se comienza por el caso más sencillo (plasma no colisionante y con densidad uniforme) y se agregan posteriormente los efectos relacionados con gradientes de densidad y colisiones.

En la fig. 3 se graficaron ϕ (fig. 3a) y Q (fig. 3b) en función de x con $k_y=1$, $L_J=2.5$, $u_o=-0.1$, $T_{eo}=40$ eV, $n=5 \times 10^{12}$ cm⁻³, $B=2 \times 10^4$ G y $z=(0.68+i 5.98) \times 10^{-3}$. A menos que se indique lo contrario de aquí en adelante las líneas llenas corresponden a la parte real y las punteadas a la parte imaginaria. Los gráficos de ϕ y Q presentan dos características importantes. Primero, la parte real de Q es negativa para x entre -2.5 y -0.5 , presenta un mínimo en $x \approx -1$ y tiene una forma aproximadamente parabólica alrededor de este mínimo (la parte imaginaria es mucho menor que la real). Segundo, consistente con la forma de Q , la función de onda, ϕ , resulta una perturbación localizada, de forma semejante a una Gaussiana y centrada en $x \approx -1$. Conociendo la forma de ϕ es posible verificar la validez de las aproximaciones involucradas en el modelo de fluido frío del capítulo anterior. El módulo del argumento de la función de dispersión del plasma (calculado en la posición del máximo de ϕ) resultó aproximadamente igual a 1.5 y esto indica claramente que aun a temperaturas relativamente bajas los efectos cinéticos juegan un papel importante. Para poder comparar los resultados obtenidos utilizando el modelo cinético con los correspondientes al modelo de fluido frío se resolvió numéricamente la ecuación (II-13) utilizando los mismos perfiles de velocidad y campo magnético que en el caso cinético. Los resultados obtenidos se resumen a continuación

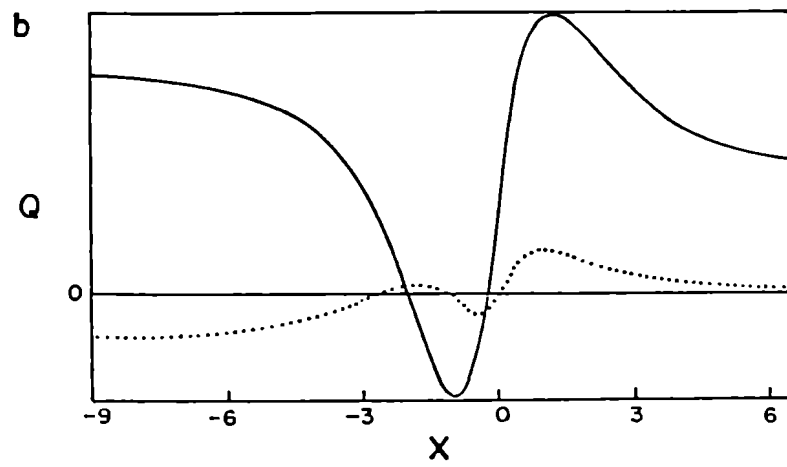
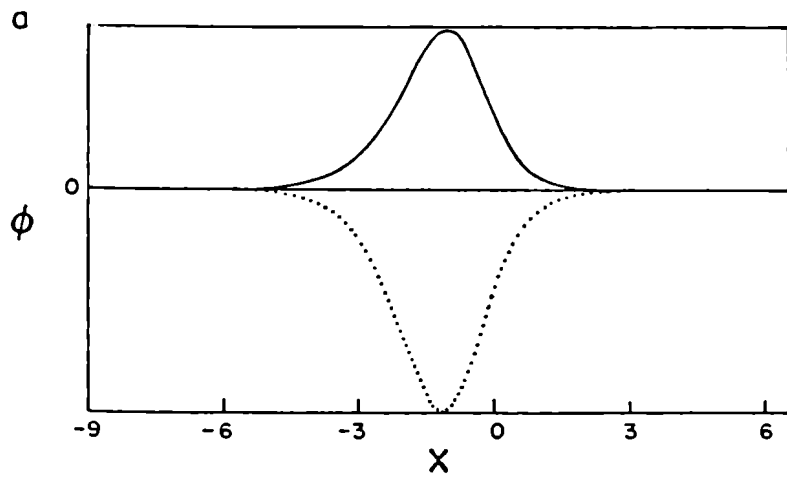


Figura 3

Temperatura	Modelo	z	Localización
40 eV	cinético	$(0.68+i5.98) \times 10^{-3}$	-1.1
40 eV	fluido	$(1.02+i8.46) \times 10^{-3}$	-1.5
100 eV	cinético	$(0.88+i4.91) \times 10^{-3}$	-0.7
100 eV	fluido	$(1.51+i9.54) \times 10^{-3}$	-1.0

La tabla precedente muestra que los resultados obtenidos con ambos modelos difieren apreciablemente y que esta diferencia se hace más importante al aumentar la temperatura. Puede notarse que la tasa de crecimiento obtenida con el modelo de fluido frío resulta mayor que la correspondiente al modelo cinético y esto se debe al efecto estabilizante del amortiguamiento de Landau de los electrones. En todos los casos la parte real de la frecuencia coincide casi exactamente con el valor del corrimiento Doppler ($k_{//} u_{\mu}^{-1/2}$) calculado en la posición del máximo de la perturbación; la diferencia entre los resultados correspondientes a ambos modelos se debe entonces al desplazamiento de dicho máximo.

En la fig.4 las curvas 1 y 2 corresponden (respectivamente) a las partes real (z_r) e imaginaria (z_i) de la frecuencia en función de k_y para $L_J=2.5$, $u_o=-0.1$ y $T_{eo}=40$ eV y la curva 3 corresponde a la parte imaginaria de z para los mismos valores de L_J y u_o pero con $T_{eo}=100$ eV. A menos que se indique lo contrario se utilizará $Z=1$, $n=5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ y $B=2 \times 10^4 \text{ G}$ en el resto de este trabajo. Estos valores resultan apropiados para describir, por ejemplo, el proceso de difusión de la corriente en un tokamak (la densidad es la correspondiente al borde del plasma) pero debe notarse, sin embargo, que en el caso no colisionante n , B y T_{eo} no aparecen separadamente en la ecuación de estructura del modo sino que se combinan para formar β y por lo tanto los resultados obtenidos serán válidos para cualquier otra combinación de n , B y T_{eo} que produzca el mismo valor de β . El gráfico muestra que el modo es inestable dentro de un amplio rango de valores de k_y y que la tasa de crecimiento de la inesta-

bilidad, z_i , es máxima en $k_y \approx 1$ para ambos valores de temperatura. La parte real es mucho menor que la imaginaria (para $k_y \approx 1$) y no cambia apreciablemente con la temperatura (por eso se graficó una sola curva). Como $k_{//} = k_y B_y / B_0$, y la parte real proviene principalmente del corrimiento Doppler, sería razonable esperar que z_r creciera al aumentar k_y . En el gráfico se ve claramente que esto no ocurre y eso se debe a que el aumento en k_y es compensado (y aun superado) por la disminución que se produce en u y B_y al desplazarse el máximo de la perturbación hacia el origen.

La fig.5 es un gráfico de las partes real (curva 1) e imaginaria (curva 2) de la frecuencia en función de T_{eo} con $k_y = 1$, $L_J = 2.5$ y $u_0 = -0.1$ (las curvas 3 y 4 corresponden al caso colisionante que será analizado más adelante). El modo resulta inestable en todo el rango de temperatura considerado y se observa que la tasa de crecimiento de la inestabilidad tiene un máximo en $T_{eo} \approx 40$ eV mientras que la parte real crece ligeramente con la temperatura. En la fig.6 se presentan las partes real e imaginaria de la frecuencia en función de L_J con $k_y = 1$, $u_0 = -0.1$ y dos valores de temperatura; $T_{eo} = 40$ eV (curvas 1 y 2 respectivamente) y $T_{eo} = 100$ eV (curvas 3 y 4 respectivamente). Al aumentar L_J la tasa de crecimiento disminuye rápidamente (y este efecto es más notable a altas temperaturas) mientras que la parte real toma el mismo valor para ambas temperaturas. Para valores grandes de L_J la teoría de fluidos del capítulo anterior indica que z_i debería ser proporcional a L_J (cf. ec. (III-31)); este comportamiento se observa en la curva 2 pero no en la 4 y eso se debe a que al aumentar la temperatura los efectos cinéticos hacen que los resultados del capítulo anterior pierdan validez. En la fig.7 se graficaron las partes real e imaginaria de la frecuencia en función de $|u_0|$ con $k_y = 1$, $L_J = 2.5$ y $T_{eo} = 40$ eV (curvas 1 y 2 respectivamente) y $T_{eo} = 100$ eV (curvas 3 y 4 respectivamente). El gráfico muestra claramente que la tasa de crecimiento de la inestabilidad aumenta en forma casi lineal con $|u_0|$ siendo este comportamiento se-

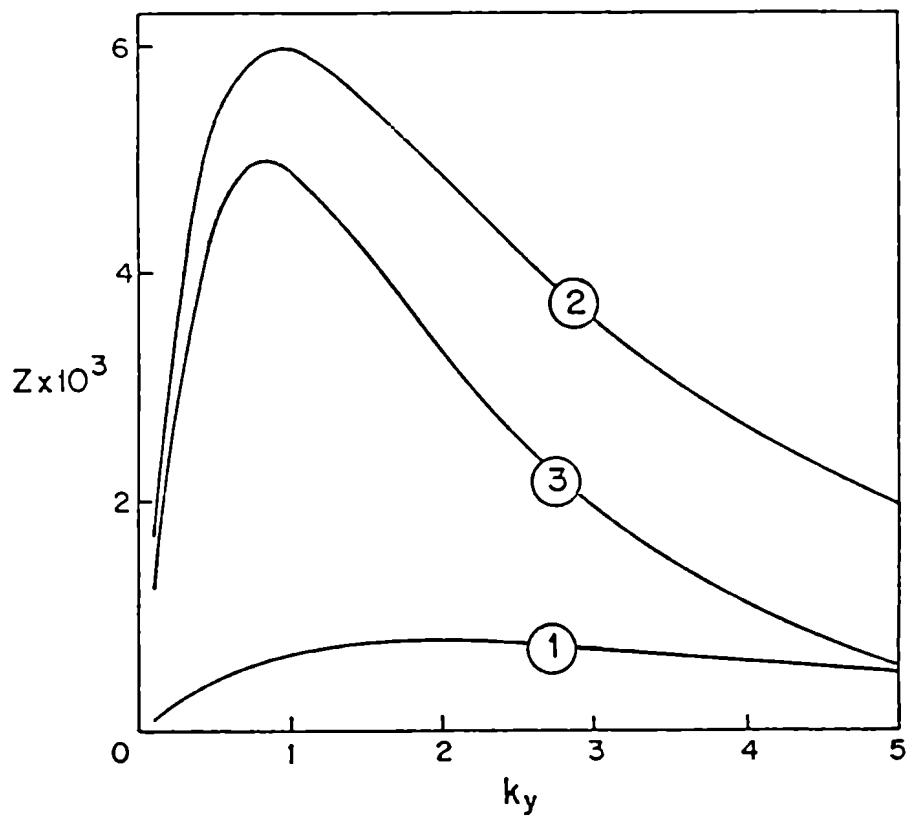


Figura 4

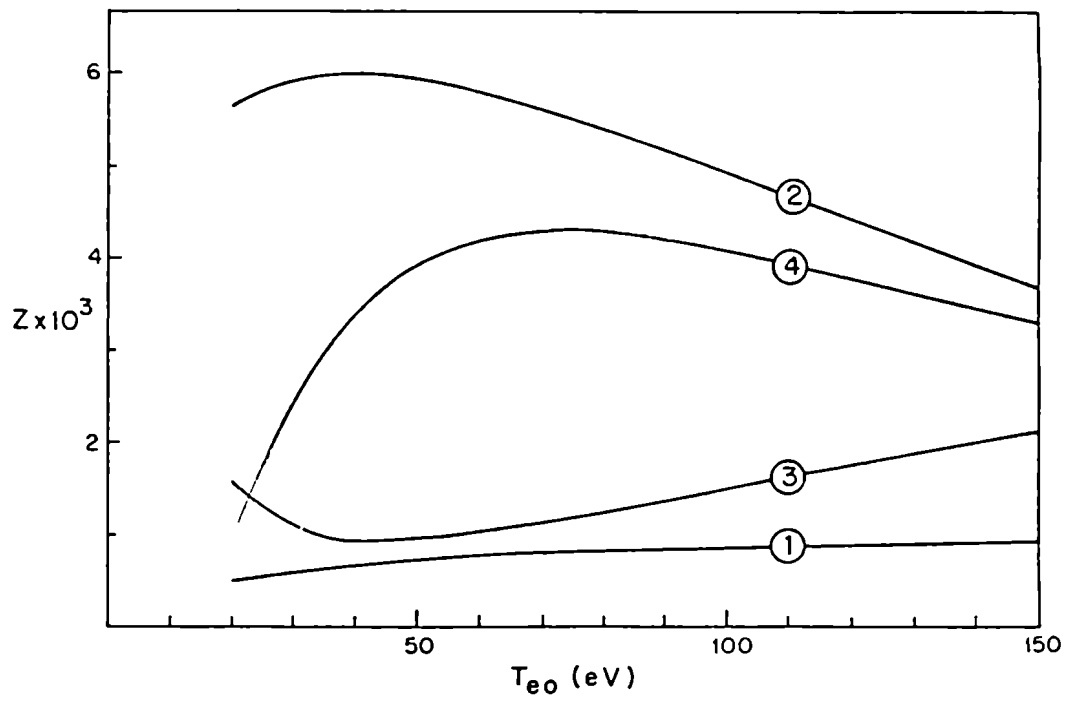


Figura 5

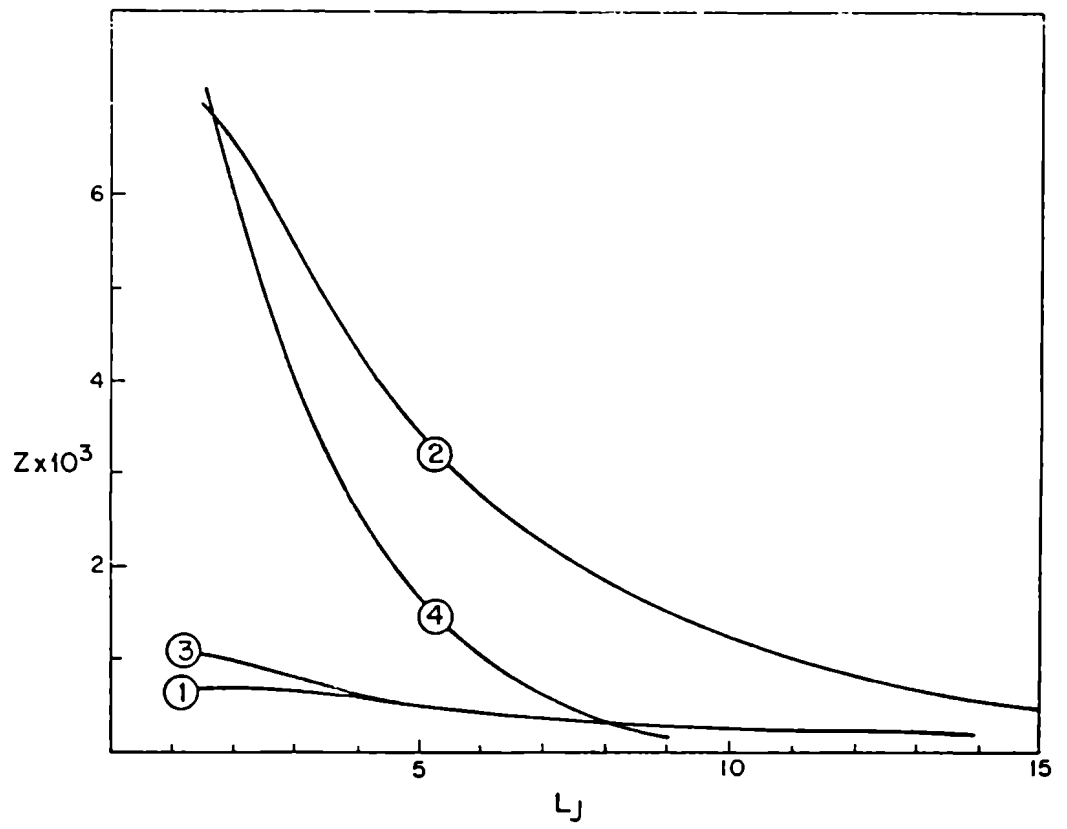


Figura 6

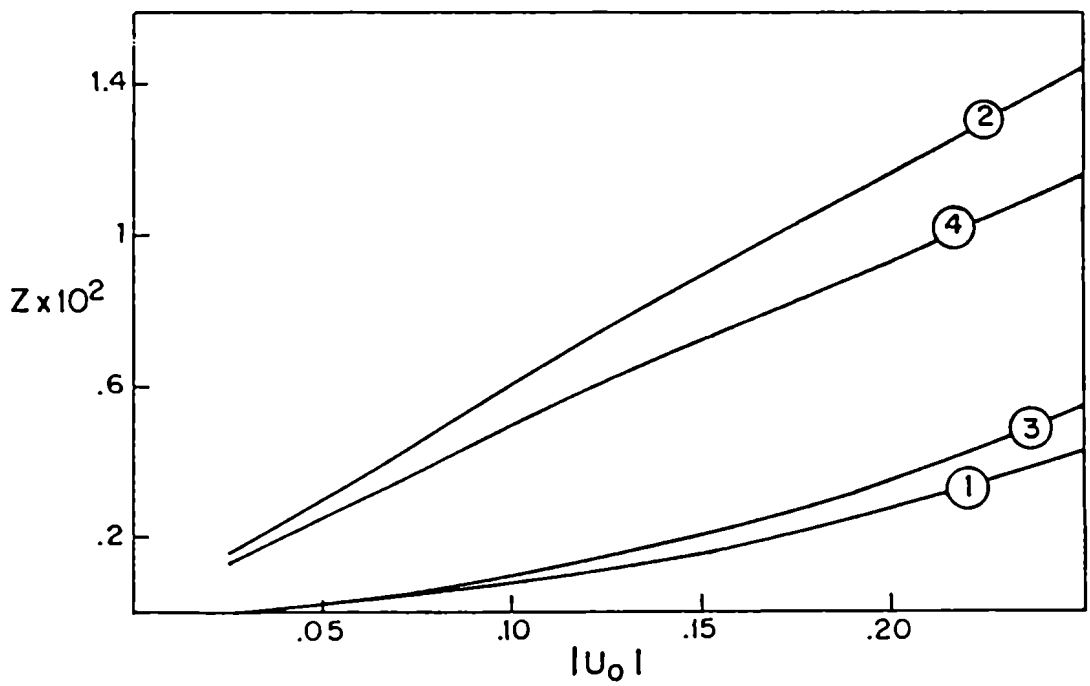


Figura 7

mejante al observado en el capítulo anterior. La parte real de la frecuencia se incrementa en forma casi cuadrática con $|u_o|$ y esto se debe a que el corrimiento Doppler es proporcional a u_o^2 .

Hasta ahora se han estudiado las inestabilidades producidas por la existencia de un gradiente de velocidad en un plasma no colisionante y con densidad uniforme. Como en toda situación experimental existen gradientes de densidad y colisiones es importante estudiar los cambios que se producen en la frecuencia y estructura espacial de los modos considerados cuando se incluyen ambos efectos. La fig. 8 es un gráfico de las partes real e imaginaria de la frecuencia en función de L_N con $k_y = 1$, $L_J = 2.5$, $u_o = -0.1$ y $T_{eo} = 40$ eV (curvas 1 y 2 respectivamente) y $T_{eo} = 100$ eV (curvas 3 y 4 respectivamente). En el gráfico puede verse que al disminuir L_N la parte real de la frecuencia cambia apreciablemente mientras que la parte imaginaria decrece levemente (o sea que el gradiente de densidad tiene un efecto estabilizante). Los resultados numéricos indican que $|z_r - \bar{z}_r|$ (donde \bar{z}_r es el valor de z_r para $L_N \rightarrow \infty$) aumenta en forma aproximadamente lineal con L_N^{-1} para pequeños valores de L_N y este comportamiento es semejante al de la frecuencia de deriva diamagnética asociada al gradiente de densidad. Puede decirse entonces que la parte real de la frecuencia se debe en este caso a dos contribuciones; el corrimiento Doppler y la frecuencia asociada al gradiente de densidad. Como para los valores de temperatura considerados la frecuencia de colisión (normalizada respecto de Ω_i) resulta aproximadamente del mismo orden que la frecuencia de la perturbación es lógico suponer que la inclusión de las colisiones modificará los resultados obtenidos y que estas modificaciones serán menos importantes a medida que la temperatura aumenta (recordar que $v \propto T_{eo}^{-3/2}$). En la fig. 5 se graficaron $-z_r$ (curva 3) y z_i (curva 4) en función de T_{eo} con $k_y = 1$, $L_J = 2.5$, $u_o = -0.1$, $L_N = 100$ y $v \neq 0$. Como podía esperarse las colisiones tienen un efecto estabilizante y este efecto

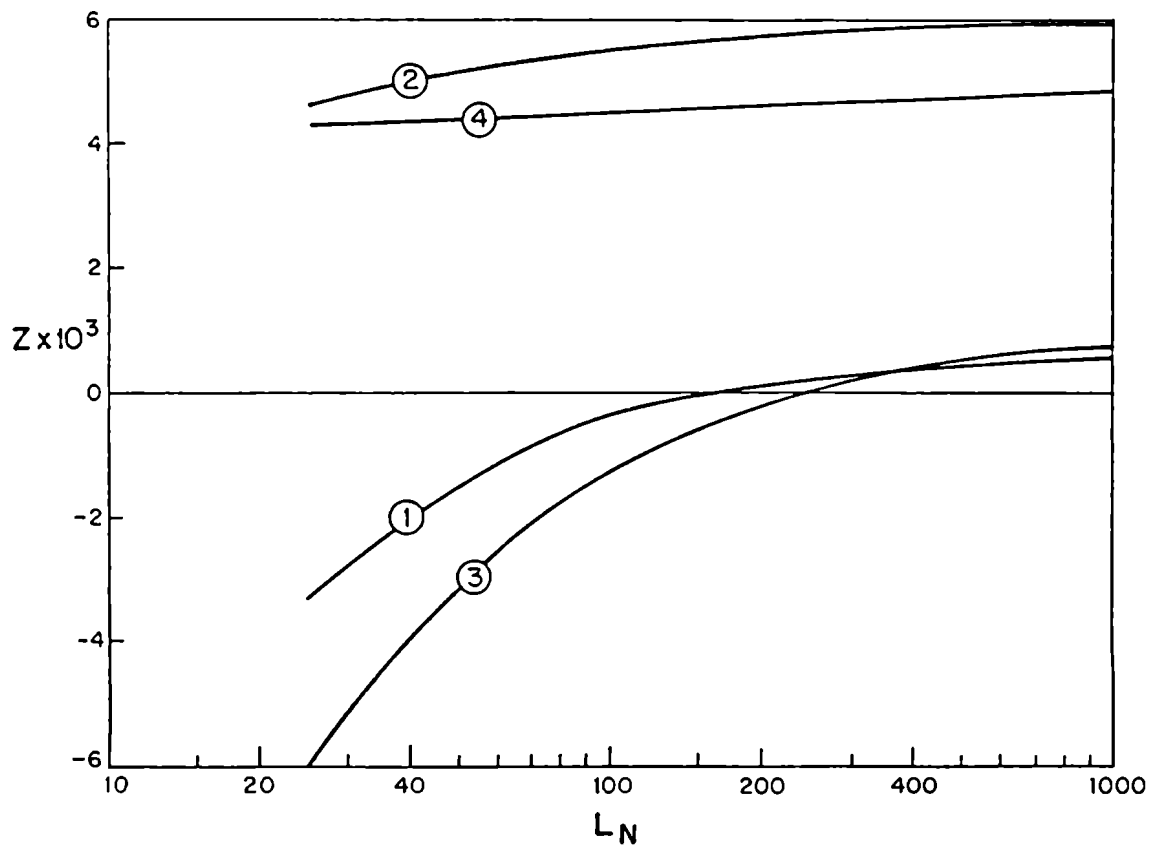


Figura 8

es más pronunciado a temperaturas más bajas. La estructura espacial de la perturbación es básicamente la misma que en el caso no colisionante y por lo tanto los cambios producidos en la parte real (aumento del valor absoluto y aparición de un mínimo en $-z_r$) no se deben a una modificación en la contribución proveniente del corrimiento Doppler sino que representan un aporte propio de las colisiones

C-Inestabilidades Producidas por Gradientes de Temperatura

En esta sección se estudian las inestabilidades producidas por gradientes de temperatura en un plasma por el que circula una corriente uniforme. Como en el caso anterior se comienza por la situación más sencilla y luego se introducen los efectos relacionados con gradientes de densidad y colisiones.

En el capítulo anterior se mostró que, en presencia de un gradiente de velocidad, la contribución proveniente del término convectivo es responsable por la aparición de modos inestables. Las inestabilidades producidas por gradientes de temperatura se deben, en cambio, al movimiento de deriva que se produce en todo plasma inhomogéneo y magnetizado. Esta deriva se debe al movimiento de ciclotrón de las partículas en un plasma inhomogéneo, y es perpendicular al campo magnético y a la dirección de los gradientes. En presencia de gradientes de densidad y temperatura y suponiendo una función de distribución localmente Maxwelliana la velocidad de deriva resulta.

$$\underline{V}_D = - \frac{cT}{qB^2} \left(\frac{\nabla n}{n} + \frac{\nabla T}{T} \right) \times \underline{B}$$

Las inestabilidades relacionadas con este movimiento se conocen con el nombre

de inestabilidades de deriva^{18,27} y proporcionan un mecanismo más eficiente (en un plasma de baja densidad) que los procesos ordinarios de relajación para disipar la energía libre asociada con las inhomogeneidades del plasma.

En la fig. 9 se graficaron ϕ (fig. 9a) y Q (fig. 9b) en función de x para $k_y=1.5$, $L_T=4$, $T_{e0}=100$ eV, $u_0=-0.1$ y $z=(2.87+i1.50) \times 10^{-2}$. La parte real de z presenta una diferencia importante respecto de los resultados obtenidos en la sección anterior y eso se debe a que en este caso la contribución principal no proviene del corrimiento Doppler sino de la frecuencia de deriva diamagnética asociada con el gradiente de temperatura. Resulta claro, además, que la parte real de $Q(x,z)$ es menor que cero para $x>0$ y sin embargo la función de onda se anula rápidamente. Esto se explica considerando que la parte imaginaria de $Q(x,z)$ es del mismo orden que la parte real y puede, por lo tanto, proporcionar un mecanismo alternativo para localizar la perturbación. En efecto, analizando la fig. 9 puede notarse que en este caso la forma de ϕ (para $x>0$) corresponde a una oscilación amortiguada y no a un decaimiento exponencial semejante al de la sección anterior. Se verá más adelante que no siempre ocurre lo mismo ya que para otros valores de los parámetros la perturbación queda localizada debido a la existencia de un pozo en la parte real de $Q(x,z)$. El valor absoluto del argumento de la función de dispersión del plasma resulta nuevamente del orden de la unidad (para los parámetros de la figura) y por lo tanto debe utilizarse la forma exacta de esta función.

En la sección III-A se consideraron perfiles semejantes de velocidad y temperatura electrónica pero introduciendo la posibilidad de que las longitudes características asociadas con cada uno de los gradientes (L_J y L_T) sean diferentes. Si bien no existen suficientes datos experimentales al respecto parece razonable considerar L_T algo mayor que L_J ya que, siendo el gradiente de temperatura consecuencia del gradiente de corriente, cualquier proceso de difusión térmica tendrá como resultado un perfil de temperatura más

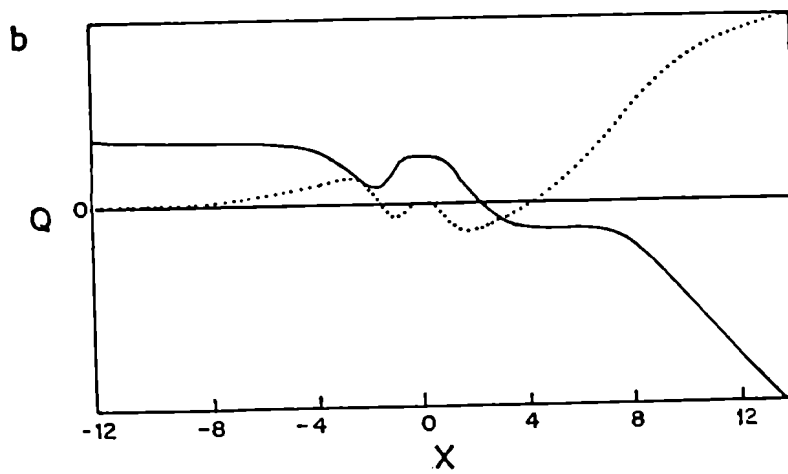
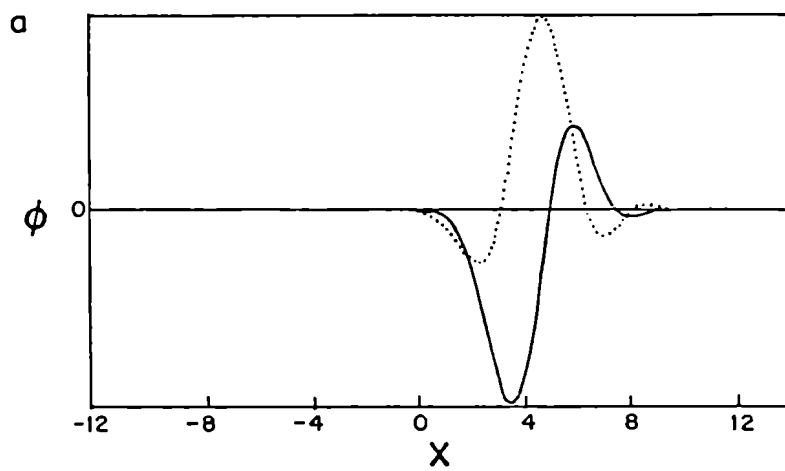


Figura 9

suave que el de velocidad. La verdadera relación entre L_J y L_T dependerá del balance entre las tasas de calentamiento y difusión pero de todos modos el comportamiento cualitativo de los modos producidos por la acción simultánea de ambos gradientes (estudiados en la próxima sección) no resulta afectado por pequeños cambios en la relación L_T/L_J .

En la fig. 10 se presentan las partes real e imaginaria de la frecuencia en función de k_y para $L_T=4$, $u_o=-0.1$ y dos valores de temperatura; $T_{eo}=50$ eV (curvas 1 y 2 respectivamente) y $T_{eo}=100$ eV (curvas 3 y 4 respectivamente). Puede verse que al aumentar la temperatura disminuye el ancho de la región en que el modo es inestable y al mismo tiempo el máximo de la tasa de crecimiento se desplaza hacia el origen. La parte real de la frecuencia resulta mayor que la imaginaria (notar las diferentes escalas utilizadas en el gráfico) y crece casi linealmente para $k_y \gg 1$ siendo este el comportamiento correspondiente a la frecuencia de deriva diamagnética asociada con el gradiente de temperatura. La fig. 11 muestra las partes real (curva 1) e imaginaria (curva 2) de la frecuencia en función de T_{eo} para $k_y=1.5$, $L_T=4$ y $u_o=-0.1$. La tasa de crecimiento alcanza su valor máximo en $T_{eo} \approx 70$ eV y la parte real crece casi linealmente con T_{eo} . El análisis de la estructura espacial de la perturbación muestra que a bajas temperaturas la localización se debe a la existencia de un pozo en la parte real de Q mientras que a altas temperaturas el comportamiento de la autofunción queda determinado por la parte imaginaria de $Q(x,z)$. En la fig. 12 se graficaron las partes real e imaginaria de la frecuencia en función de L_T para $T_{eo}=50$ eV, $k_y=2$ y $u_o=-0.1$ (curvas 1 y 2 respectivamente) y $T_{eo}=100$ eV, $k_y=1.5$ y $u_o=-0.1$ (curvas 3 y 4 respectivamente). Puede verse que la tasa de crecimiento no aumenta monótonamente al disminuir L_T y que la parte real de la frecuencia crece en forma aproximadamente lineal con L_T . La complicada dependencia de T_e y T'_e respecto de L_T hace muy difícil encontrar una explicación satisfactoria de este comportamiento. En la fig. 13 se presentan las partes

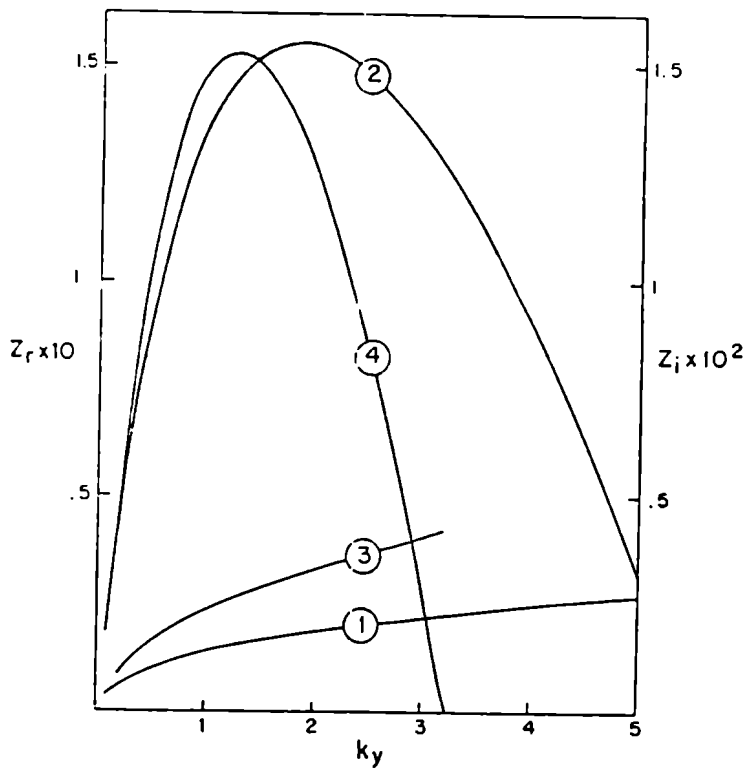


Figura 10

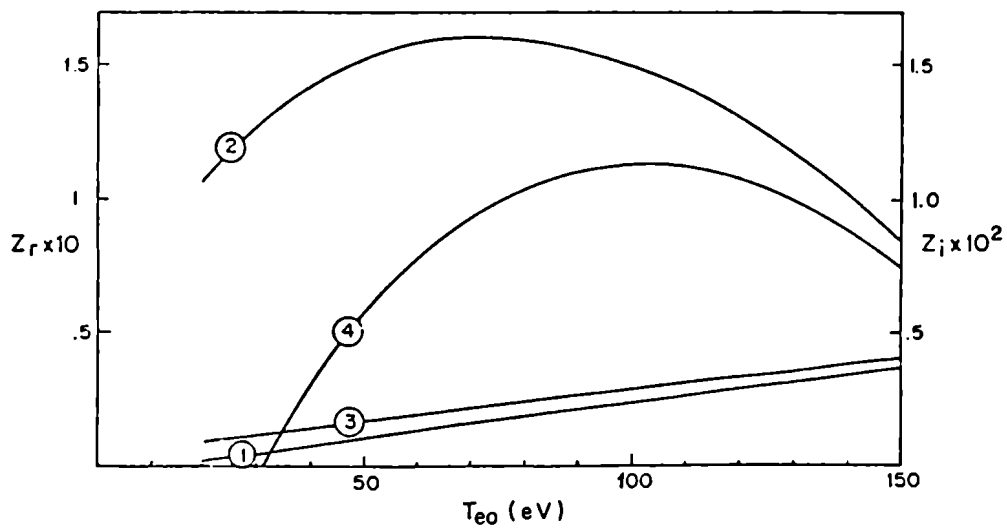


Figura 11

real e imaginaria de la frecuencia en función de $|u_0|$ para $T_{eo}=50$ eV, $k_y = 2$ y $L_T=4$ (curvas 1 y 2 respectivamente) y $T_{eo}=100$, $k_y=1.5$ y $L_T=4$ (curvas 3 y 4 respectivamente). Como en este caso no hay gradientes de velocidad el único resultado de aumentar $|u_0|$ es incrementar la cizalladura del campo magnético. En los estudios sobre la inestabilidad universal (donde se consideran gradientes de densidad relativamente suaves) se ha encontrado que la cizalladura del campo magnético tiene un efecto estabilizante²² y por lo tanto podría esperarse que al aumentar $|u_0|$ la tasa de crecimiento de la inestabilidad decreciera monótonamente. Los resultados numéricos muestran, sin embargo, que esto no ocurre ya que para ambos valores de temperatura el gráfico de z_i vs. $|u_0|$ presenta un máximo. Este comportamiento puede explicarse notando que al variar $|u_0|$ cambia el mecanismo responsable por la localización de la perturbación. Para pequeños valores de $|u_0|$ el modo se encuentra localizado debido a la existencia de un pozo en la parte real de $Q(x,z)$ mientras que para valores grandes de $|u_0|$ la parte imaginaria de $Q(x,z)$ es responsable de la localización. El máximo valor de la tasa de crecimiento corresponde aproximadamente al valor de $|u_0|$ para el cual se produce la transición entre uno y otro mecanismo.

La inclusión de un gradiente de densidad suave no modifica apreciablemente la frecuencia y estructura espacial del modo. La tasa de crecimiento disminuye aproximadamente un 10% cuando se incluye un gradiente de densidad (con $L_N=25$) y los cambios en z_r son aún más pequeños. Para concluir con el estudio de las inestabilidades producidas por gradientes de temperatura se considera el efecto de las colisiones. En la fig. 11 las curvas 3 y 4 corresponden a las partes real e imaginaria de la frecuencia (respectivamente) para $k_y = 1.5$, $L_T=4$, $u_0=-0.1$, $L_N=100$ y $\nu \neq 0$. Resulta claro que la inclusión de las colisiones tiende a estabilizar el modo y que este efecto es más importante a bajas temperaturas (recordar que $\nu \propto T^{-3/2}$). La parte real de la frecuencia no

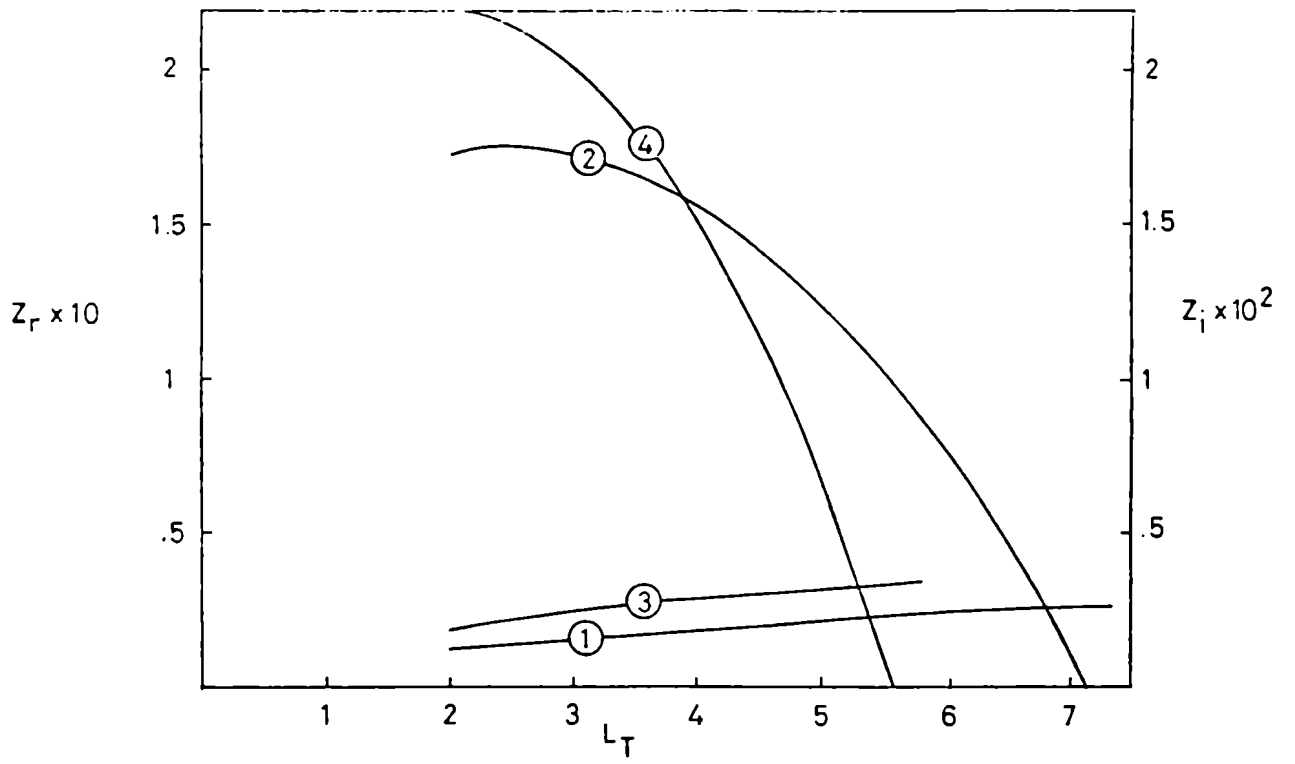


Figura 12

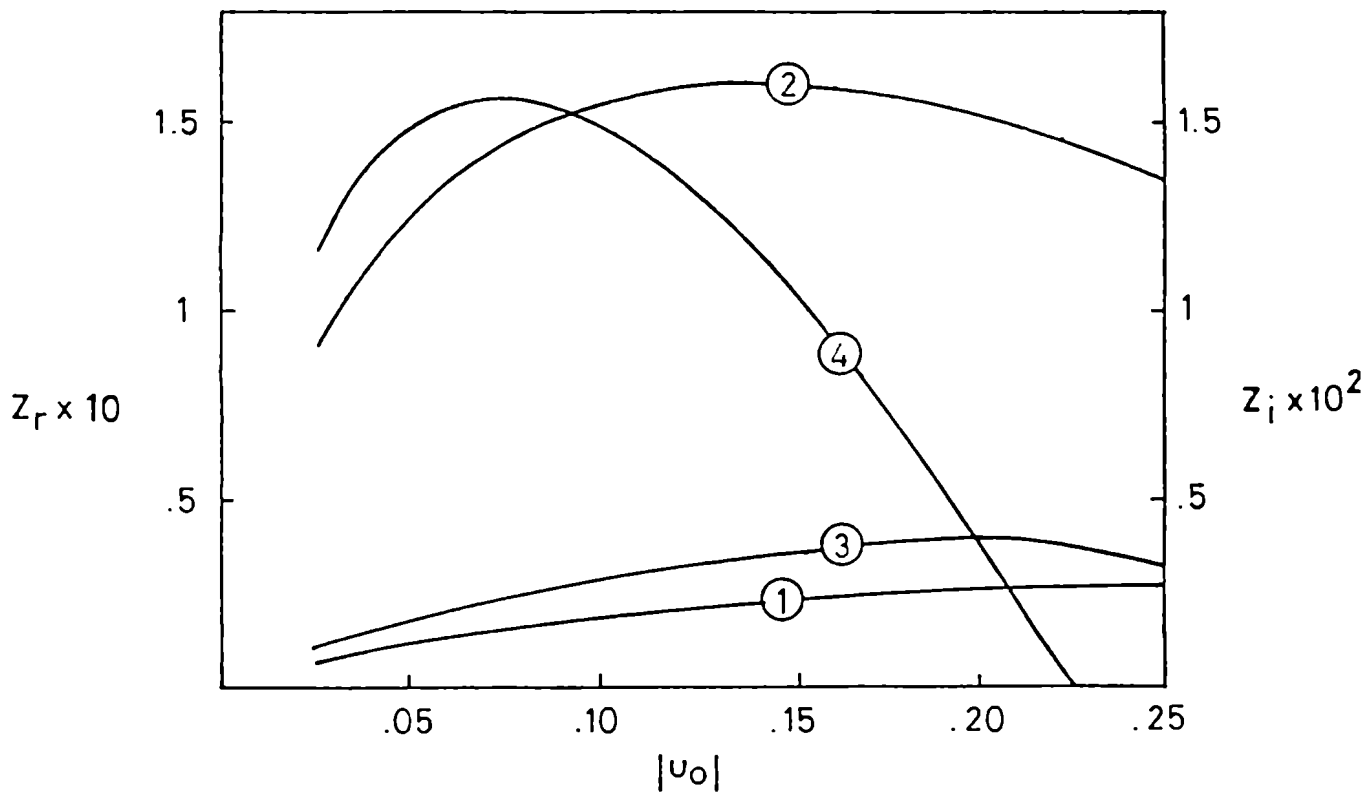


Figura 13

presenta modificaciones importantes. En la fig. 14 se presentan los gráficos de $\hat{\phi}$ (fig. 14a) y Q (fig. 14b) en función de x con $T_{e0} = 100$ eV, $k_y = 1.5$, $L_T = 4$, $u_0 = -0.1$, $L_N = 100$, $v \neq 0$ y $z = (2.40 + i 1.14) \times 10^{-2}$. Comparando estos gráficos con los que aparecen en la fig. 9 (con los mismos valores de los restantes parámetros) puede verse que al incluir las colisiones se modifican apreciablemente la forma de $Q(x,z)$ (aparecen pozos en la parte real) y la estructura espacial de la perturbación. Este cambio en la forma de $Q(x,z)$ se debe al hecho de que la dependencia espacial de la temperatura ha sido mantenida en la expresión de la frecuencia de colisión. En general la parte real de $Q(x,z)$ presenta dos pozos situados casi simétricamente respecto del origen y para algunos valores de los parámetros la "barrera" que los separa resulta suficientemente baja y angosta como para que la perturbación ocupe ambos pozos.

D-Inestabilidades Producidas por Gradientes de Velocidad y Temperatura

En las secciones precedentes se mostró que tanto el gradiente de velocidad como el de temperatura (actuando separadamente) pueden producir modos inestables y se estudió en detalle la dependencia paramétrica de la tasa de crecimiento y estructura espacial de la perturbación. Si bien los resultados obtenidos son importantes, el estudio de las inestabilidades producidas por gradientes de densidad de corriente no puede considerarse concluido ya que en cualquier situación experimental ambos gradientes estarán presentes simultáneamente. En esta sección se estudian entonces los modos inestables producidos por la acción simultánea de los gradientes de velocidad y temperatura. En este sentido resulta importante determinar si los modos estudiados en las secciones III B y C se transforman en un único modo o si por el contrario aparecen dos modos inestables. Los estudios muestran la existencia de dos modos inestables; uno de ellos se obtiene introduciendo un gradiente de temperatura en

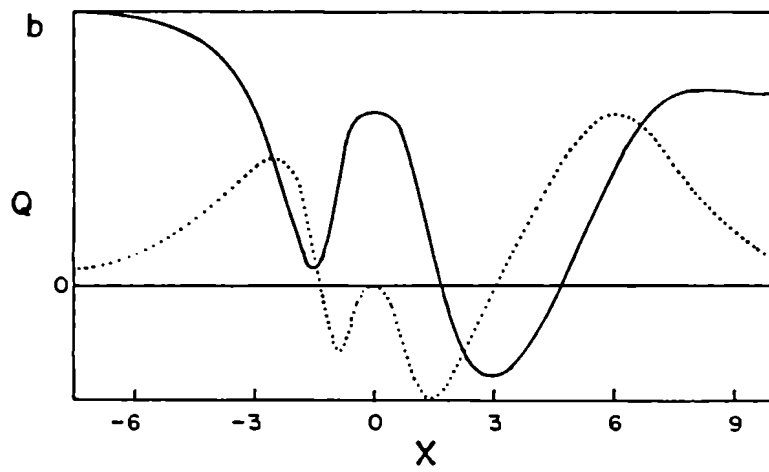
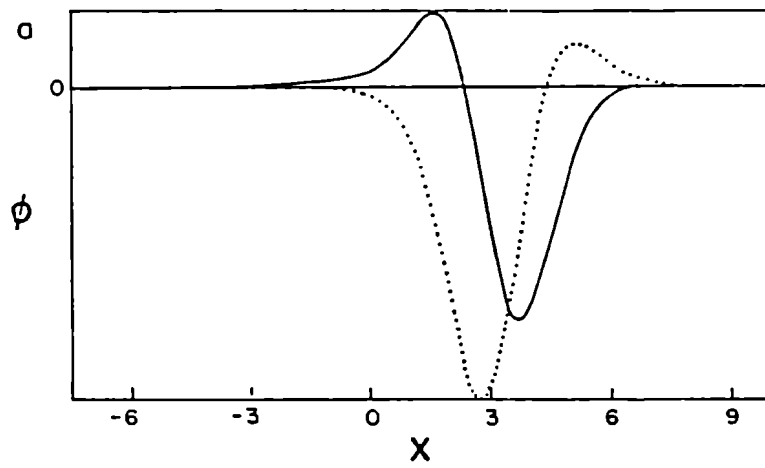


Figura 14

el modo estudiado en la sección III-B (se lo llamará "modo V") y el otro proviene de agregar un gradiente de velocidad al modo estudiado en la sección III-C (se lo llamará "modo T").

En la fig. 15 se graficaron ϕ (fig. 15a) y Q (fig. 15b) en función de x para el modo V con $k_y=1.5$, $T_{eo}=70$ eV, $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $u_o=-0.1$, $v \neq 0$ y $z=(1.03+i 0.39) \times 10^{-2}$. Puede notarse que, debido a la inclusión del gradiente de temperatura, la parte real de $Q(x,z)$ presenta ahora dos pozos. En este caso la perturbación ocupa ambos pozos y adquiere, en consecuencia, una complicada estructura espacial. En la fig. 16 se presentan ϕ (fig. 16a) y Q (fig. 16b) en función de x para el modo T con los mismos valores de los parámetros que en la figura anterior pero con $z=(1.30+i 0.60) \times 10^{-2}$. $Q(x,z)$ es básicamente el mismo que en la fig. 15 (y la pequeña diferencia se debe a la diferencia en los valores de la frecuencia) pero sin embargo la estructura espacial de la perturbación resulta totalmente diferente. Este ejemplo muestra entonces que, para un dado conjunto de valores de los parámetros, existen dos modos inestables con diferente estructura espacial y frecuencia.

En la fig. 17 se presenta un gráfico de la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función de k_y para el modo V con $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $u_o=-0.1$ y $v \neq 0$. Las curvas 1, 2 y 3 corresponden a $T_{eo}=40$ eV, $T_{eo}=70$ eV y $T_{eo}=100$ eV respectivamente. Resulta evidente que, para distintos valores de temperatura, se obtienen curvas cualitativamente diferentes. La curva 1 tiene básicamente la misma forma que la curva 2 de la fig. 4 (aunque la tasa de crecimiento sea menor debido a las colisiones y el gradiente de temperatura) y esto puede explicarse considerando que para $T_{eo}=40$ eV la parte principal de la perturbación se encuentra localizada en el pozo ubicado en $x < 0$ (recordar que este fue el comportamiento observado en la sección III-B). En otras palabras puede decirse que para el valor de temperatura correspondiente a la curva 1 la influencia más importante parece provenir del gradiente de veloci-

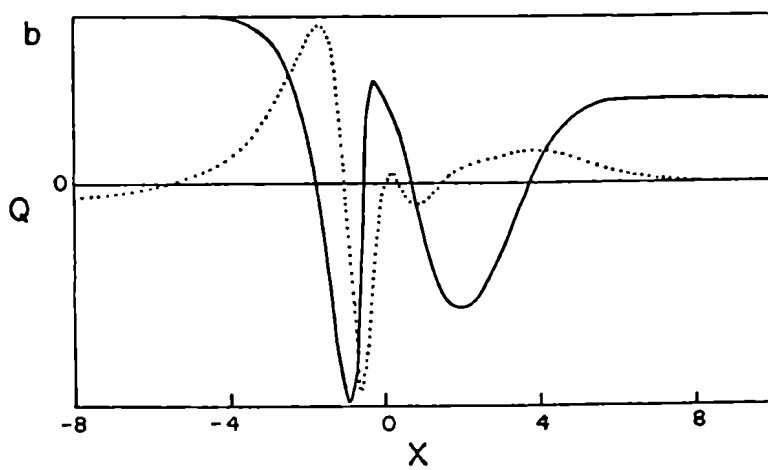
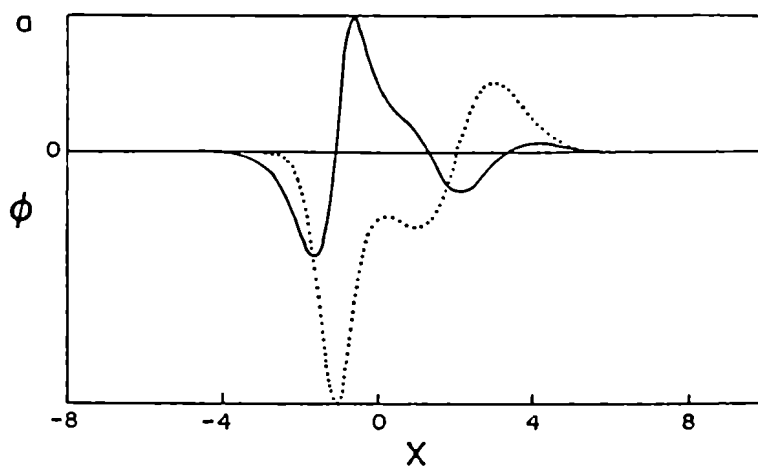


Figura 15

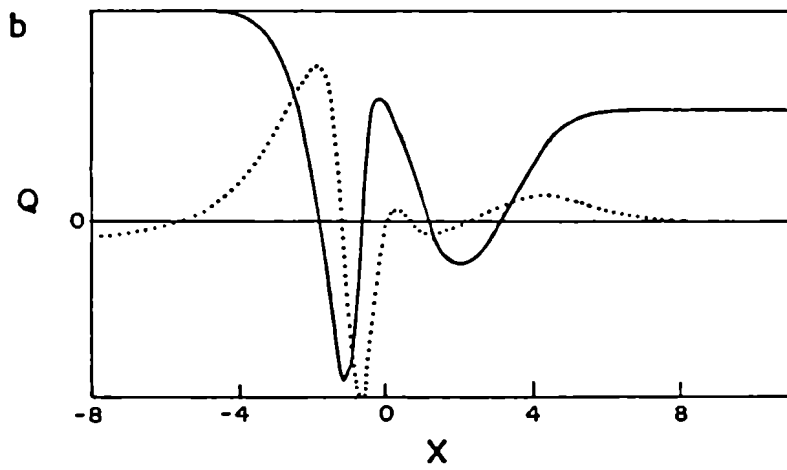
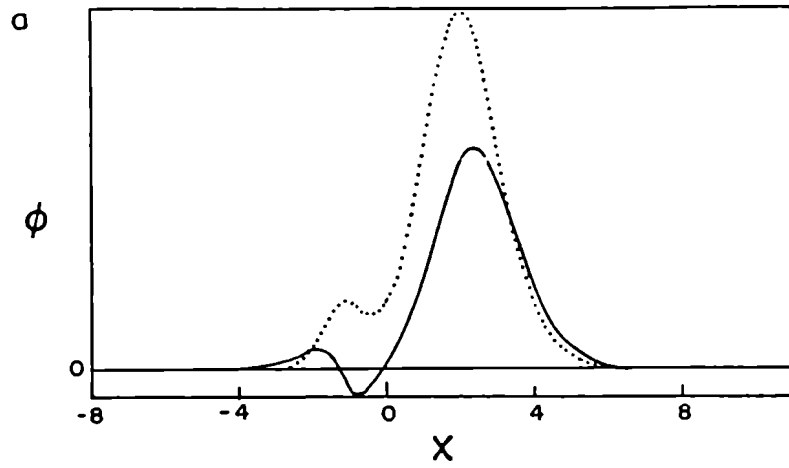


Figura 16

dad. La curva 2 resulta muy interesante ya que posee dos máximos y este comportamiento puede nuevamente explicarse a partir de un análisis de los gráficos de ϕ y Q . Para pequeños valores de k_y la parte principal de la perturbación está localizada en el pozo ubicado a la izquierda del origen pero al aumentar k_y se desplaza hacia el otro pozo. Uno de los máximos en la tasa de crecimiento se obtiene cuando el modo está localizado en el pozo de la izquierda y el otro cuando se encuentra en el pozo de la derecha. La curva 3 no tiene dos máximos, pero de todos modos la pendiente del gráfico de z_i vs. k_y cambia en $k_y \approx 0.75$ y esto se explica utilizando básicamente los mismos argumentos que antes, ya que el cambio de pendiente está relacionado con un cambio en la zona de localización de la perturbación. La fig. 18 es un gráfico de la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función de k_y para el modo T con los mismos valores de L_J , L_T , L_N y u_0 que en la figura anterior. Las curvas 1, 2 y 3 corresponden a $T_{e0} = 50$ eV, $T_{e0} = 70$ eV y $T_{e0} = 100$ eV respectivamente. Los gráficos de ϕ y Q presentan básicamente las mismas características que los correspondientes al modo V y por lo tanto la existencia de dos máximos en la curva 2 puede explicarse utilizando los mismos argumentos que en el caso anterior.

En la fig. 19 se presentan las partes real e imaginaria de la frecuencia en función de T_{e0} para ambos modos con $k_y = 1.5$, $L_J = 2.5$, $L_T = 4$, $L_N = 100$, $u_0 = -0.1$ y $v \neq 0$. Las curvas 1 y 2 corresponden a las partes real e imaginaria (respectivamente) del modo V y las 3 y 4 a las partes real e imaginaria del modo T. Comparando las tasas de crecimiento de ambos modos con las correspondientes a $v \neq 0$ en las figs. 5 y 11 puede notarse que, a diferencia de lo que ocurre en las figuras mencionadas, z_i no presenta máximos dentro del rango de temperatura considerado y que a bajas temperaturas ambos modos son menos inestables que los estudiados en las secciones III B y C de este capítulo. Resulta claro además que para $T_{e0} \geq 70$ eV las curvas correspondientes a ambos modos tienen

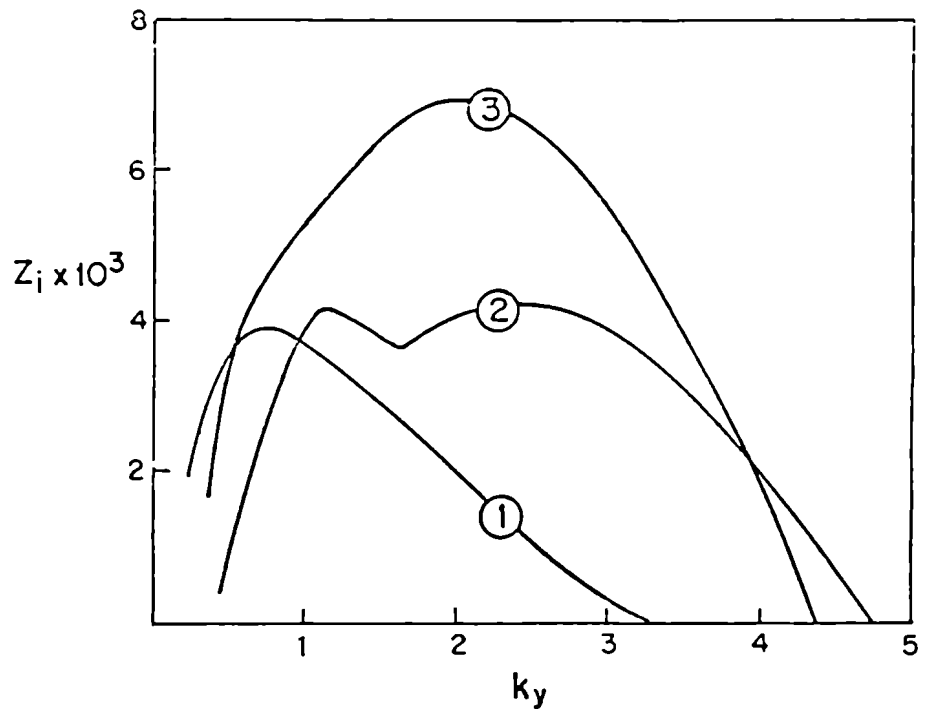


Figura 17

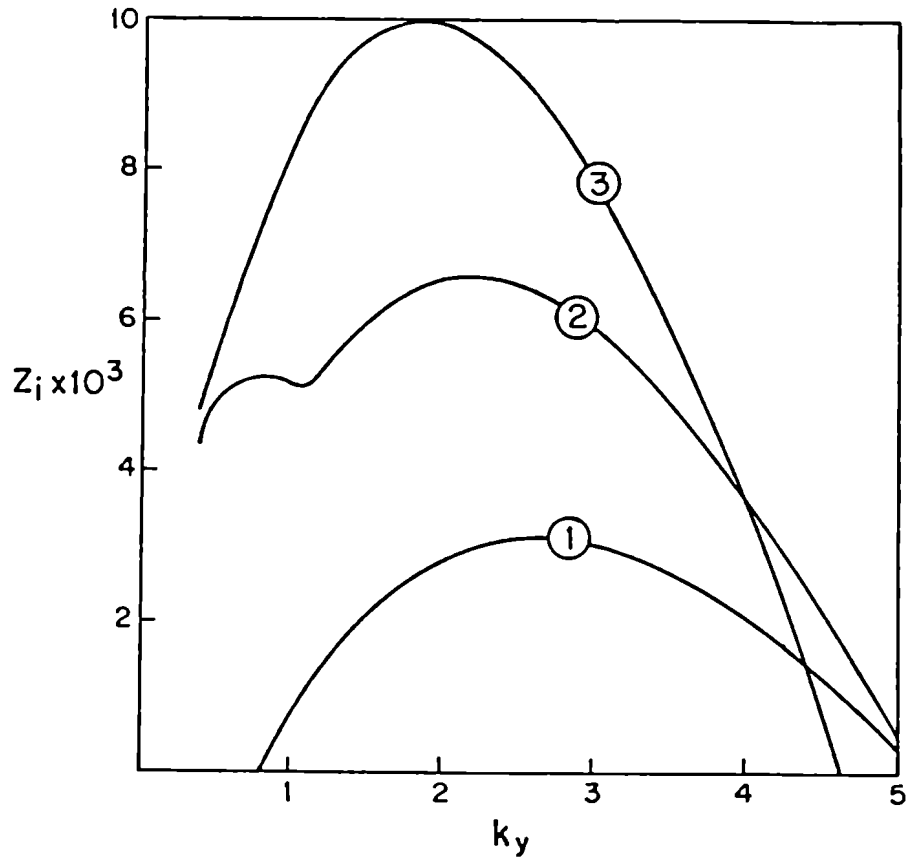


Figura 18

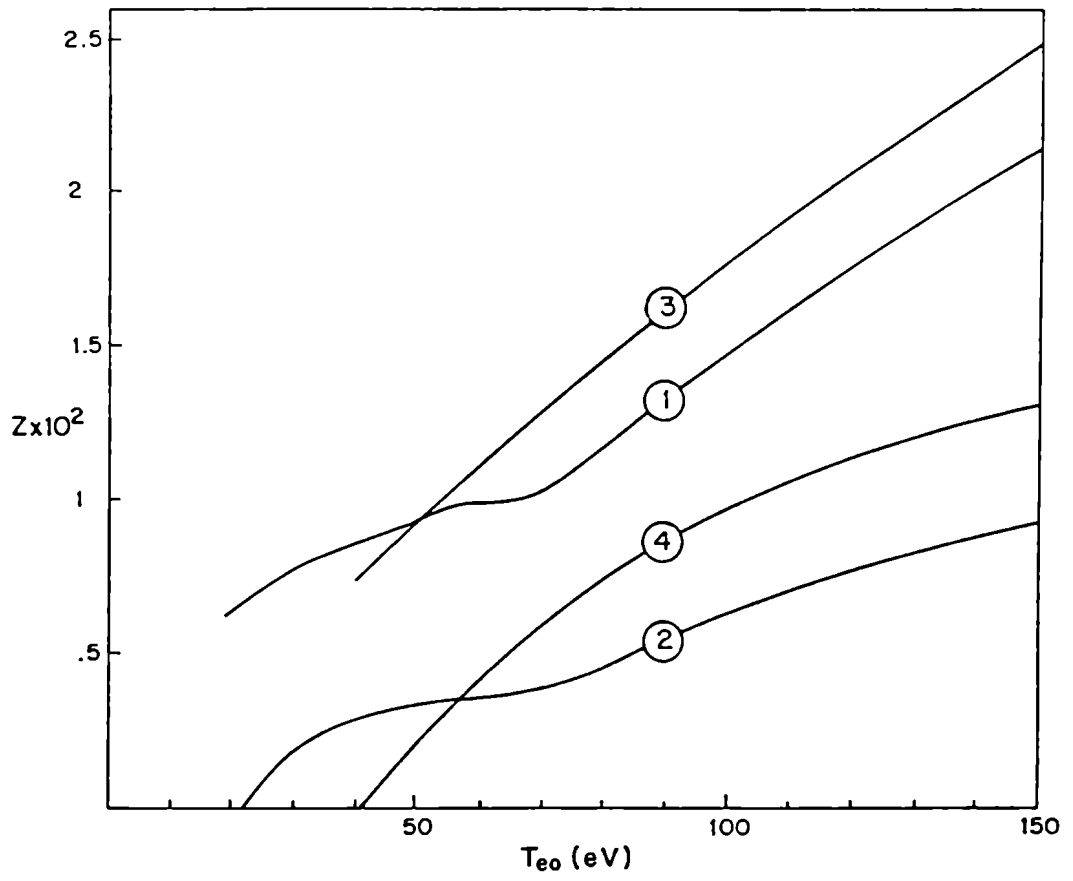


Figura 19

un comportamiento semejante pero para temperaturas más bajas la forma de las curvas correspondientes al modo V cambia apreciablemente. Como en otras ocasiones, el cambio en el comportamiento del modo V puede relacionarse con un cambio en la localización de la perturbación y en este sentido es importante mencionar que la existencia de dos regiones diferentes es una característica general del modo V, pero la temperatura a la cual se produce el cambio de un régimen a otro depende del valor de k_y , cuanto menor sea k_y mayor será la temperatura.

Como en esta sección se está considerando que el gradiente de temperatura aparece debido a la existencia de un gradiente de densidad de corriente en la fig. 20 se presenta un gráfico de la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función de L_J y L_T (es decir se varían simultáneamente L_J y L_T pero manteniendo constante la relación $L_T/L_J=1.6$). Las curvas 1 y 2 corresponden al modo V y tienen $k_y=1$, $L_N=100$, $u_o=-0.1$, $v \neq 0$ y $T_{eo}=40$ eV y 100 eV respectivamente mientras que las curvas 3 y 4 corresponden al modo T y tienen $L_N=100$, $u_o=-0.1$, $v \neq 0$ y $k_y=2$, $T_{eo}=50$ eV y $k_y=1.5$, $T_{eo}=100$ eV respectivamente. Resulta claro que nuevamente son necesarios perfiles de velocidad y temperatura bastante abruptos para producir modos inestables ya que en todos los casos la tasa de crecimiento se anula para $L_J \leq 6$. Comparando la curva 1 con la curva 2 de la fig. 6 se observa que la inclusión del gradiente de temperatura tiene un efecto estabilizante para valores grandes de L_J (la diferencia entre ambos gráficos no se debe a las colisiones que no fueron incluidas en la fig. 6). La curva 2 presenta una estructura más complicada ya que para valores grandes de L_J (y L_T) la tasa de crecimiento de la inestabilidad disminuye en forma similar a la observada en la fig. 12 pero para $L_J \approx 2$ ($L_T \approx 3.2$) aparece un mínimo relativo. Las curvas 3 y 4 muestran que la inclusión de un gradiente de velocidad tiene un efecto estabilizante en los modos asociados al gradiente de temperatura pero no cambia la forma cualitativa de la variación de z_i con

L_T . Finalmente, en la fig. 21, se graficó la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función de $|u_0|$ para ambos modos. Las curvas 1 y 2 corresponden al modo V y tienen $k_y=1$, $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $v \neq 0$ y $T_{eo}=40$ eV y 100 eV respectivamente mientras que las curvas 3 y 4 corresponden al modo T y tienen $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $v \neq 0$ y $k_y=2$, $T_{eo}=50$ eV y $k_y=1.5$, $T_{eo}=100$ eV respectivamente. Comparando la fig. 21 con las figs. 7 y 13 se nota que la curva 1 de la fig. 21 tiene el mismo comportamiento cualitativo que la curva 1 de la fig. 7 (es decir que en este caso la contribución predominante proviene del gradiente de velocidad) pero la curva 2 presenta una estructura muy complicada que se encuentra relacionada nuevamente con el desplazamiento del modo desde un pozo de $Re(Q)$ al otro. Las curvas 3 y 4 presentan el mismo comportamiento cualitativo que las curvas 2 y 4 de la fig. 13 pero la posición del máximo y el valor absoluto de la tasa de crecimiento cambian apreciablemente.

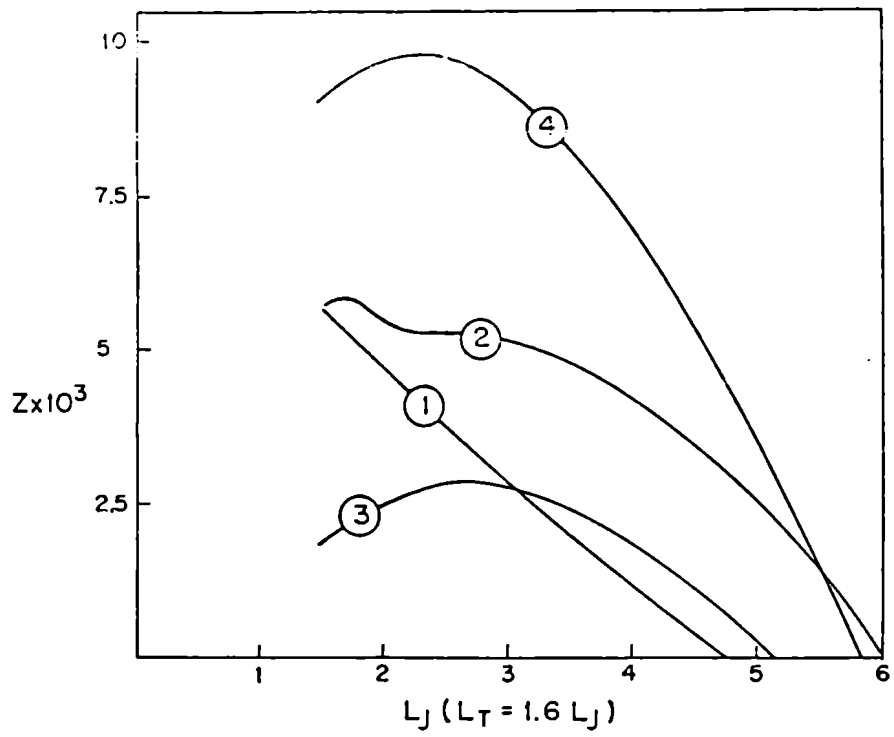


Figura 20

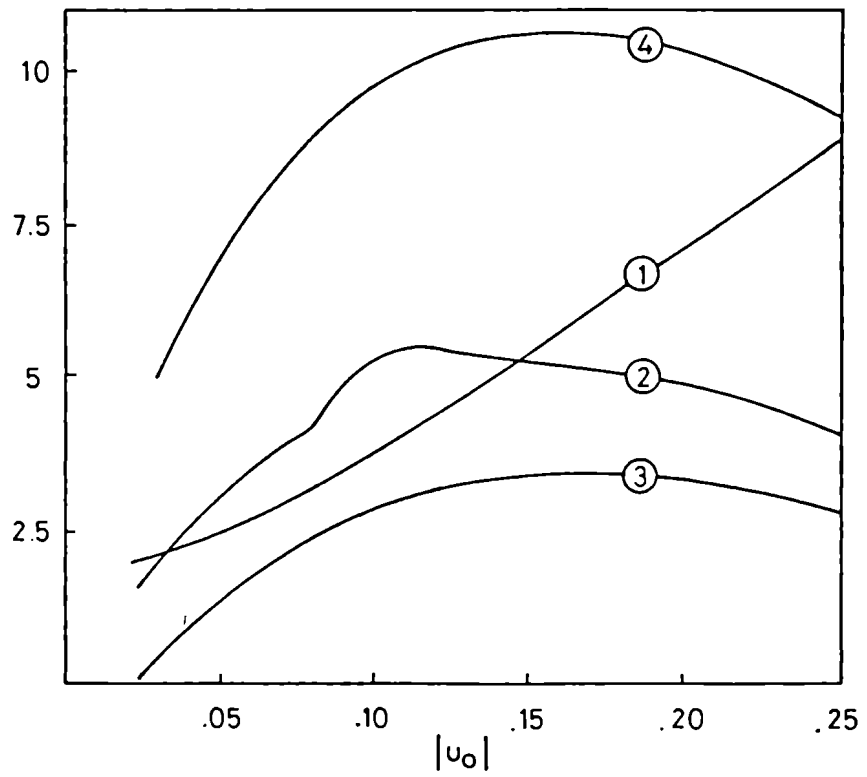


Figura 21

IV-MODELO CON TEMPERATURA IONICA FINITA

El modelo de fluido frío puede ser utilizado si la velocidad de fase de la perturbación en dirección paralela al campo magnético es mucho mayor que la velocidad térmica de los iones ($|\omega/k_{\parallel} v_i| \gg 1$) y si la variación de ϕ en la dirección de la inhomogeneidad es suficientemente suave comparada con el radio de Larmor de los iones (más adelante se presenta un criterio cuantitativo para esta condición). En el capítulo anterior se vió que el valor absoluto del argumento de la función de dispersión del plasma correspondiente a los electrones es del orden de la unidad y por lo tanto (como $T_i \ll T_e$) resulta evidente que la primer condición se satisface ampliamente. En otras palabras, la perturbación se encuentra localizada bien dentro de la zona en la cual el amortiguamiento de Landau de los iones comienza a ser importante. Esta fuerte localización, sin embargo, hace que la segunda condición no se satisfaga completamente y por lo tanto la utilización de un modelo en el que se incluyen todos los efectos relacionados con la rotación de Larmor de los iones produce importantes cambios en la frecuencia y estructura espacial de los modos inestables aun para valores de temperatura iónica bastante menores que los de temperatura electrónica.

La mayor parte de los trabajos anteriores dedicados al estudio de ondas de deriva y microinestabilidades utilizan el modelo de fluido frío a la "aproximación diferencial" para los iones. Este último método conduce a una ecuación diferencial de segundo orden en la que se incluyen los efectos cinéticos asociados al movimiento de los iones pero es válido sólo si $|\rho_i^2 \partial^2 / \partial x^2| \ll 1$ y por lo tanto no puede ser aplicado en este caso. Desde hace ya cierto tiempo²⁸ se sabe que un correcto tratamiento de la dinámica de los iones requiere la resolución de una complicada ecuación integral en la cual la frecuencia del modo aparece como autovalor. Recientemente han aparecido algunos trabajos,

tanto analíticos como numéricos, en los que se estudia la estabilidad de ondas de deriva electrostáticas resolviendo la ecuación integral correspondiente²⁹⁻³¹ y se ha presentado también una extensión del método al caso de perturbaciones electromagnéticas³². En este capítulo se utilizará el formalismo integral para analizar las modificaciones que se producen en los modos estudiados en los capítulos precedentes al incrementar la temperatura iónica.

A-Densidad Iónica Perturbada

Como el método utilizado para calcular la respuesta iónica no es muy conocido en esta sección se presenta el cálculo de la densidad iónica perturbada con cierto detalle.

El punto de partida es la ecuación de Vlasov linealizada en el límite electrostático

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla + \frac{q_i}{m_i c} \underline{v} \times \underline{B} \cdot \nabla_{\underline{v}} \right] f_i = \frac{q_i}{m_i} \nabla \phi \cdot \nabla_{\underline{v}} F_i \quad (IV-1)$$

donde F_i es la función de distribución de equilibrio (función de las constantes de movimiento) y f_i la perturbación. Las constantes de movimiento que se utilizarán en este caso son v^2 (energía) y la coordenada x del centro de giro de las partículas (X). Para demostrar que X es efectivamente una constante de movimiento se utiliza la definición de la posición del centro de giro de las partículas

$$\underline{R} = \underline{r} + \frac{\underline{v} \times \hat{b}}{\Omega_i} \quad (\hat{b} = \underline{B}/|\underline{B}|)$$

donde \underline{r} es la posición de la partícula y \underline{R} la del centro de giro. Resulta así

$$X = \underline{R} \cdot \hat{x} = x - \frac{v_{\perp} \operatorname{sen} \alpha}{\Omega_i}$$

donde v_{\perp} es la componente de la velocidad en dirección perpendicular al campo magnético y α es el ángulo de fase en el espacio de velocidades ($\alpha(t) = \alpha_0 + \Omega_i t$). Considerando que la longitud típica de variación del campo magnético es mucho menor que el radio de Larmor de los iones se tiene

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt} \left[\frac{v_{\perp}}{\Omega_i} \operatorname{sen}(\Omega_i t + \alpha_0) \right] = v_x - v_{\perp} \cos \alpha = 0$$

Otra forma de ver que X es una constante de movimiento consiste en considerar que el centro de giro se desplaza a lo largo de las líneas de campo magnético (además de la deriva, en dirección \hat{y} , debida al gradiente de \underline{B}) y que este tiene sólo componentes en las direcciones \hat{z} e \hat{y} .

Utilizando estas dos constantes de movimiento se define la siguiente función de distribución de equilibrio

$$F_i(v^2, X) = \frac{N(X)}{(\pi v_i^2)^{3/2}} \exp(-v^2/v_i^2) \quad (IV-2)$$

donde $v_i^2 = 2T_i/m_i$. Resulta claro que $N(X)$ debe elegirse de modo tal que la densidad iónica de equilibrio resulte igual a la electrónica. Utilizando un perfil exponencial

$$N(X) = N_0 \exp(X/L_N) \quad (IV-3)$$

se obtiene

$$n_o(x) = \int F_i(v^2, X) d^3\underline{v} = N_o \exp(x/L_N) \exp(\rho_i^2/8L_N^2) I_o(\rho_i^2/8L_N^2)$$

donde I_o es la función de Bessel modificada de orden cero. Comparando con (III-5) se obtiene

$$N_o = \exp(-\rho_i^2/8L_N^2) n_o(0) \left[I_o(\rho_i^2/8L_N^2) \right]^{-1} \quad (IV-4)$$

Debe notarse que $\rho_i^2/8L_N^2 \ll 1$ y en consecuencia tanto el factor exponencial como la función de Bessel serán aproximadamente iguales a la unidad.

La función de distribución perturbada se calcula utilizando el método de las características

$$f_i = \frac{q_i}{m_i} \int_{-\infty}^t \nabla_{\underline{r}'} \phi \cdot \nabla_{\underline{v}'} F_i dt' \quad (IV-5)$$

donde \underline{r}' y \underline{v}' corresponden a las trayectorias no perturbadas de las partículas y se consideró que $f_i(t \rightarrow -\infty) = 0$. Como

$$\nabla_{\underline{v}} F_i = \frac{\partial F_i}{\partial v^2} \frac{\partial v^2}{\partial \underline{v}} + \frac{\partial F_i}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \underline{v}}$$

y (despreciando términos de segundo orden en B_y/B_o)

$$\frac{\partial F_i}{\partial v^2} = -\frac{F_i}{v_i^2} \quad \frac{\partial v^2}{\partial \underline{v}} = 2\underline{v} \quad \frac{\partial F_i}{\partial X} = \frac{F_i}{L_N} \quad \frac{\partial X}{\partial \underline{v}} = \frac{\hat{y}}{\Omega_i}$$

la ecuación (IV-5) puede escribirse en la forma (recordar que $d\phi/dt = \partial\phi/\partial t + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{r}} \phi$).

$$f_i = \frac{q_i F_i}{T_i} \left[-\phi + \int_{-\infty}^t dt' \left(\frac{\partial \phi}{\partial t'} + \frac{c T_i}{q_i B_0 L_N} \nabla_{\underline{r}'} \phi \cdot \hat{y} \right) \right] \quad (IV-6)$$

Considerando que las magnitudes perturbadas tienen una dependencia temporal y espacial dada por

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}, t) &= \tilde{\phi}(x) \exp(ik_y y - i\omega t) \\ f(\underline{r}, \underline{v}, t) &= \tilde{f}(x, \underline{v}) \exp(ik_y y - i\omega t) \end{aligned} \quad (IV-7)$$

se obtiene la siguiente ecuación para $\tilde{f}(x, \underline{v})$

$$\tilde{f}(x, \underline{v}) = \frac{q_i F_i}{T_i} \left\{ -\tilde{\phi} + i \int_{-\infty}^0 d\tau \left(-\omega + \frac{k_y c T_i}{q_i B_0 L_N} \right) \tilde{\phi}(x') \exp\left[ik_y (y' - y) - i\omega \tau \right] \right\} \quad (IV-8)$$

donde $\tau = t' - t$. En este punto se presenta el problema de que dentro de la integral aparece $\tilde{\phi}$ evaluado a lo largo de las trayectorias no perturbadas. Una posibilidad es desarrollar $\tilde{\phi}(x')$ en serie de Taylor alrededor de x y retener los términos de hasta segundo orden en $x' - x$. Este procedimiento es válido sólo si $|\rho_i^2 \partial^2 / \partial x^2| \ll 1$ y conduce a una ecuación diferencial de segundo orden que incluye efectos cinéticos⁵ (a este método se lo conoce como aproximación diferencial). Como en los estudios realizados en el capítulo anterior la longitud típica de variación de $\tilde{\phi}$ es del orden del radio de Larmor de los iones (para $T_i = T_e$) este método no resulta muy apropiado. El método utilizado en este capítulo consiste en suponer que $\tilde{\phi}(x')$ cumple con las condiciones necesarias para la existencia de su transformada de Fourier y por lo tanto puede escribirse en la forma

$$\tilde{\phi}(x') = \int \frac{dk'}{(2\pi)^{1/2}} \hat{\phi}(k') e^{ik'x'} \quad (IV-9)$$

Reemplazando (IV-9) en (IV-8) se obtiene

$$\tilde{f}_i(x, \underline{v}) = \frac{q_i F}{T_i} \left\{ -\tilde{\phi} + i \int \frac{dk'}{(2\pi)^{3/2}} \hat{\phi}(k') \int_{-\infty}^0 d\tau \left(-\omega + \frac{k_y c T_i}{q_i B_0 L_N} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(i \left[k'_x x' + k'_y (y' - y) - \omega \tau \right] \right) \right\} \quad (IV-10)$$

Como se ha utilizado una representación de Fourier para $\tilde{\phi}$ la condición de cuasineutralidad debe plantearse en el espacio \underline{k} . La transformada de Fourier de la densidad perturbada está dada por

$$\hat{n}_i(k) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} e^{-ikx} \tilde{n}_i(x) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} e^{-ikx} \int \tilde{f}_i(x, \underline{v}) d^3 \underline{v} \quad (IV-11)$$

Para poder integrar en (IV-10) es necesario conocer x' e y' en función de τ . En un plasma de bajo β y donde la cizalladura del campo magnético es débil las órbitas de los iones pueden escribirse en la forma

$$x' - x = \frac{v_{\perp}}{\Omega_i} \left[\text{sen}(\Omega_i \tau + \alpha) - \text{sen} \alpha \right] \\ y' - y = \frac{v_{\perp}}{\Omega_i} \left[\text{cos}(\Omega_i \tau + \alpha) - \text{cos} \alpha \right] + \frac{B_y(x) v_{\parallel} \tau}{B_0} \quad (IV-12)$$

donde $v_{\parallel} = \underline{v} \cdot \underline{B} / |\underline{B}|$. Utilizando estas expresiones para las órbitas, efectuando el cambio de variables $x, v_x, v_y, v_z \rightarrow X, v_{\perp}, v_{\parallel}, \alpha$ y utilizando la relación

$$\exp(iu \text{sen} \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(u) e^{in\gamma}$$

donde J_n es la función de Bessel de orden n , se obtiene la siguiente expresión para $\hat{n}(k)$ en el límite de bajas frecuencias ($\omega \ll \Omega_i$)

$$\hat{n}_i(k) = \frac{q_i n_o(0)}{T_i} \int \frac{dk'}{(2\pi)^{1/2}} \hat{\phi}(k') \left\{ \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} \exp[-i(k-k')x] \exp(x/L_N) \times \right. \\ \left. \times \left[-1 + \left(\frac{k_y \rho_i^2 \Omega_i}{2\omega L_N} - 1 \right) \eta_i Z(\eta_i) \Gamma_o(k, k') A \right] \right\} \quad (IV-13)$$

donde

$$\eta_i = \frac{\omega}{|k_{//}| v_i} \quad \Gamma_o(k, k') = I_o(hh' \rho_i^2 / 2) \exp\left\{ -\frac{(h^2 + h'^2)}{4} \rho_i^2 \right\}$$

$$A = \exp(-\rho_i^2 / 8L_N^2) \left[I_o(\rho_i^2 / 8L_N^2) \right]^{-1} \quad h^2 = k^2 + k_y^2 \quad h'^2 = k'^2 + k_y^2$$

B-Ecuación Integral

Para los electrones se utiliza el mismo modelo que en el capítulo anterior y por lo tanto la transformada de Fourier de la densidad electrónica perturbada está dada por (cf. ecuación (III-1))

$$\hat{n}_e(k) = \frac{en_o(0)}{T_{eo}} \int \frac{dk'}{(2\pi)^{1/2}} \hat{\phi}(k') \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} \exp[-i(k-k')x] \exp(x/L_N) \zeta_e^{-1} t^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{k_y v_e}{2|k_{//}| \Omega_e} \left[\frac{n'}{n} Z(\eta_e) + \frac{T_e'}{T_e} \left(\bar{Z}(\eta_e) + \eta_e \right) \right] + \left(\frac{k_y u'}{k_{//} \Omega_e} + 1 \right) \left[1 + \eta_e Z(\eta_e) \right] \right\} \quad (IV-14)$$

La condición de cuasineutralidad, en el espacio \underline{k} ($\hat{n}_e(k) = \hat{n}_i(k)$), puede escribirse entonces en la forma

$$\int \frac{dk'}{(2\pi)^{1/2}} \hat{\zeta}(k') \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} \exp[-i(k-k')x] \exp(x/L_N) \left\{ Z^2 \tau \left[-1 + \left(\frac{k_y}{2L_N z \tau} - 1 \right) A \eta_i Z(\eta_i) \Gamma_0 \right] - \frac{1}{c\tau^{1/2}} \left[\frac{k_y \mu^{1/2}}{2k_{//}} \left(\eta_i Z(\eta_e) + T' [\bar{Z}(\eta_e) + \eta_e] \right) + [1 + \eta_e Z(\eta_e)] (1 + k_y \mu^{1/2} / k_{//}) \tau^{-1/2} \right] \right\} = 0 \quad (IV-15)$$

donde

$$\tau = \frac{T_{eo}}{T_i} \quad \Gamma_0 = I_0 \left[\frac{h'h}{2\tau} \right] \exp \left[- \left(\frac{h^2 + h'^2}{4\tau} \right) \right]$$

$$\eta_i \equiv \frac{z\tau^{1/2}}{|k_{//}|} \quad h'^2 \equiv (k'^2 + k_y^2) \rho_s^2 \quad h^2 \equiv (k^2 + k_y^2) \rho_s^2$$

y se utilizó la misma normalización que en el capítulo anterior para las restantes variables.

C-El Límite de Fluido Frío

En esta sección se muestra que las ecuaciones utilizadas en el capítulo anterior pueden recuperarse, a partir de (IV-15), considerando el límite $T_i \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow \infty$). Queda claro entonces que utilizando valores suficientemente grandes de τ deberían obtenerse los mismos resultados que con la ecuación diferencial del capítulo precedente y esta propiedad resulta muy útil para controlar el código numérico empleado para resolver la ecuación integral. En todos los casos considerados los resultados del capítulo anterior fueron recuperados (con dos o más cifras significativas) utilizando valores de τ cercanos a 10^3 .

Para valores grandes de τ , $\Gamma_0(h, h')$ y $Z(\eta_i)$ pueden desarrollarse a primer orden en τ^{-1} obteniéndose

$$\Gamma_0 \approx 1 - \frac{h^2 + h'^2}{4\tau} = 1 - \frac{k_y^2}{2\tau} - \frac{k^2 + k'^2}{4\tau}$$

$$\eta_i Z(\eta_i) \approx -1 - \frac{1}{2\eta_i^2} = -1 - \frac{k_{//}^2}{2z^2\tau}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (IV-15) se obtiene

$$\int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} e^{-ikx} \exp(x/L_N) \left\{ -z^2 \int \frac{dk'}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{k^2 + k'^2}{2} \right) e^{ik'x} \hat{\phi}(k') + \tilde{\phi}(x) \left[z^2 \left(\frac{k_{//}^2}{z^2} - k_y^2 - \frac{k_y}{zL_N} \right) - \frac{1}{ct^{1/2}} \left\{ \frac{k_y \mu^{1/2}}{|k_{//}|} \left(\frac{z(\eta_e)}{L_N} + T' [\bar{z}(\eta_e) + \eta_e] \right) + \frac{2}{t^{1/2}} (1 + k_y u' \mu^{1/2} / k_{//}) [1 + \eta_e Z(\eta_e)] \right\} \right] \right\} = 0 \quad (IV-16)$$

Comparando esta ecuación con la (III-3) puede comprobarse que la expresión (IV-16) es simplemente la transformada de Fourier (sin el término proporcional a $\partial\phi/\partial x$ que de todos modos no es importante) de la ecuación utilizada en el capítulo anterior. El término proporcional a $(k^2 + k'^2)\hat{\phi}(k')$ corresponde a la derivada segunda y resulta claro que si se utilizara el desarrollo completo de Γ_0 aparecerían potencias superiores de k^2 y k'^2 (y consecuentemente derivadas de órdenes más altos). En otras palabras, puede decirse que la ecuación integral exacta es equivalente a una ecuación diferencial de orden infinito. El análisis precedente permite predecir que las autofunciones obtenidas utilizando la ecuación diferencial (III-3) (que no incluye derivadas de órdenes superiores) resultarán más suaves que las obtenidas a partir de la ecuación integral. Esto se debe a que en la ecuación diferencial se pierden las componentes de $\hat{\phi}(k)$ correspondientes a valores grandes de k y en consecuencia desaparecen los detalles de estructura fina de $\phi(x)$.

D-Resultados Numéricos

La ecuación (IV-15) ha sido resuelta numéricamente empleando las técnicas discutidas en el apéndice B. En esta sección se presentan los resultados obtenidos utilizando los mismos perfiles de velocidad, temperatura y densidad que en el capítulo anterior y considerando la acción simultánea de los gradientes de velocidad y temperatura (es decir el caso considerado en III-D).

En la fig. 22 se graficó $\phi(x)$ para el modo V con $k_y=1$, $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $T_{e0}=40$ eV, $u_0=-0.1$, $v \neq 0$ y dos valores de τ ; $\tau=100$ (fig. 22a) y $\tau=2$ (fig. 22b). La frecuencia del modo resultó igual a $(8.43+i3.82) \times 10^{-3}$ para $\tau=100$ y $(10.70+i6.08) \times 10^{-3}$ para $\tau=2$ y por lo tanto puede decirse que la perturbación se vuelve más inestable al disminuir τ . Comparando ambos gráficos resulta claro que al disminuir τ se modifica también la estructura espacial de la perturbación ya que si bien la forma global de las autofunciones es básicamente la misma en ambos casos, las partes real e imaginaria de $\phi(x)$ se vuelven más agudas al disminuir τ (esto es consistente con el análisis realizado en la sección anterior). En la fig. 23 se graficó $\phi(x)$ para el modo T con $k_y=1.5$, $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $T_{e0}=100$ eV, $u_0=-0.1$, $v \neq 0$ y los mismos valores de τ que en la fig 22. La frecuencia del modo es $(1.78+i0.98) \times 10^{-2}$ para $\tau=100$ y $(2.20+i1.30) \times 10^{-2}$ para $\tau=2$ y la estructura espacial de la perturbación presenta cambios semejantes a los observados en el caso anterior. Como ejemplo de las modificaciones que se producen cuando las derivadas de órdenes superiores adquieren mayor importancia puede notarse que la estructura localizada alrededor de $x \approx -2$ cambia apreciablemente (volviéndose mucho más aguda) al disminuir τ .

En la fig. 24 se graficaron las partes real (fig. 24a) e imaginaria (fig. 24b) de la frecuencia en función de τ para ambos modos. Las curvas 1 y 2 (en ambos gráficos) corresponden al modo V y tienen $k_y=1$, $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $u_0=-0.1$, $v \neq 0$ y $T_{e0}=40$ eV y 100 eV respectivamente mientras que las curvas 3 y 4 corresponden al modo T y tienen $L_J=2.5$, $L_T=4$, $L_N=100$, $u_0=-0.1$, $v \neq 0$ y $k_y=2$,

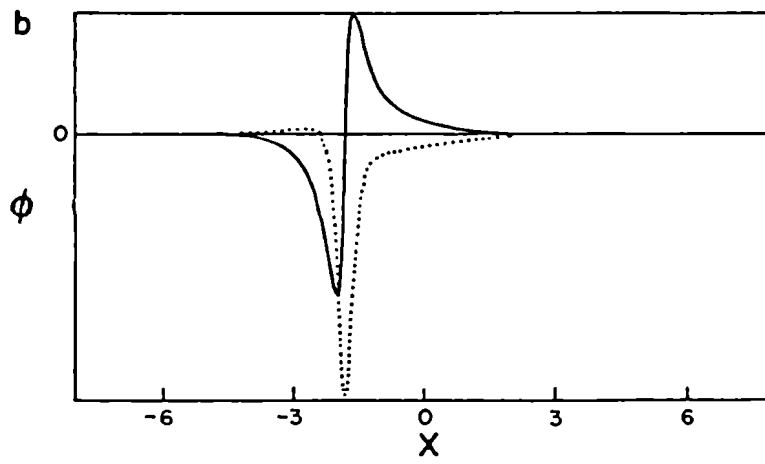
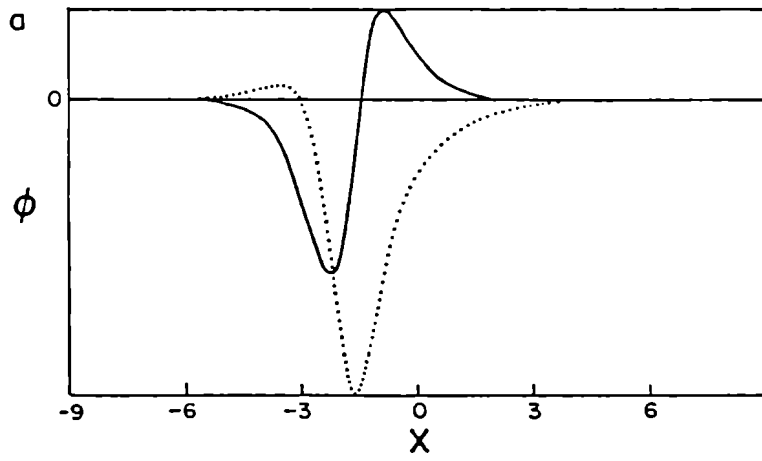


Figura 22

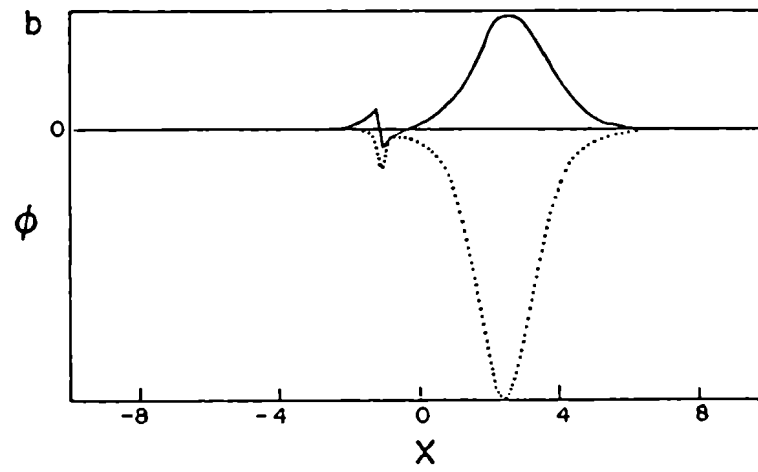
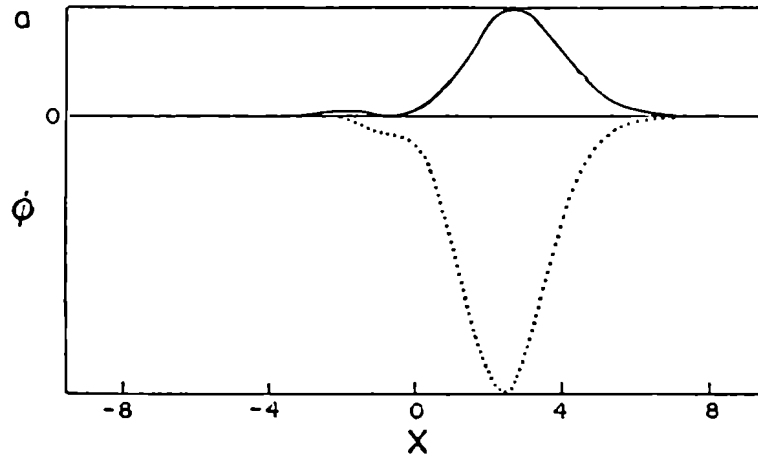


Figura 23

$T_{eo}=50$ eV y $k_y=1.5$, $T_{eo}=100$ eV respectivamente. Los resultados numéricos muestran claramente que $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ aumentan al disminuir τ pero la complejidad de la ecuación (IV-15) hace imposible encontrar una explicación satisfactoria de este fenómeno. Cuando τ disminuye $\phi(x)$ se vuelve más agudo y por lo tanto es necesario extenderse hasta mayores valores de k ($\hat{\phi}(k)$ va a cero más lentamente). Esto impone un límite en los valores de τ que pueden ser alcanzados, ya que la subrutina que calcula transformada rápida de Fourier opera de modo tal que para un dado valor de Δx (región en la que $\phi(x)$ es finito) el Δk (región en la que se calcula $\hat{\phi}(k)$) es proporcional al número de nodos utilizados para definir la malla. En algunos casos trabajando con matrices de hasta 256×256 se obtuvieron resultados confiables sólo para $\tau \geq 2$ y por lo tanto no se presentan resultados para valores más pequeños.

En el capítulo anterior se vió que se necesitan valores relativamente pequeños de L_J y L_T para que aparezcan modos inestables. Como la tasa de crecimiento de ambos modos aumenta al disminuir τ es natural preguntarse si para valores relativamente pequeños de τ es posible obtener modos inestables con perfiles más suaves de velocidad y temperatura (mayores valores de L_J y L_T). Para contestar a esta pregunta se ha graficado, en la fig. 25, la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función de L_J y L_T ($L_T=1.6L_J$) con $\tau=2$ para ambos modos. Las curvas 1 y 2 corresponden al modo V y tienen $k_y=1$, $L_N=100$, $u_o=-0.1$, $v \neq 0$ y $T_{eo}=40$ eV y 100 eV respectivamente. Las curvas 3 y 4 corresponden al modo T y tienen $L_N=100$, $u_o=-0.1$, $v \neq 0$ y $k_y=2$, $T_{eo}=50$ eV y $k_y=1.5$, $T_{eo}=100$ eV respectivamente. Comparando estas curvas con las que se presentan en la fig. 20 puede verse que los modos resultan inestables para valores ligeramente mayores de L_J y L_T pero no aparecen cambios cualitativos importantes. Esto indica que, independientemente del valor de τ , se necesitan perfiles de velocidad y temperatura bastante abruptos para producir inestabilidades.

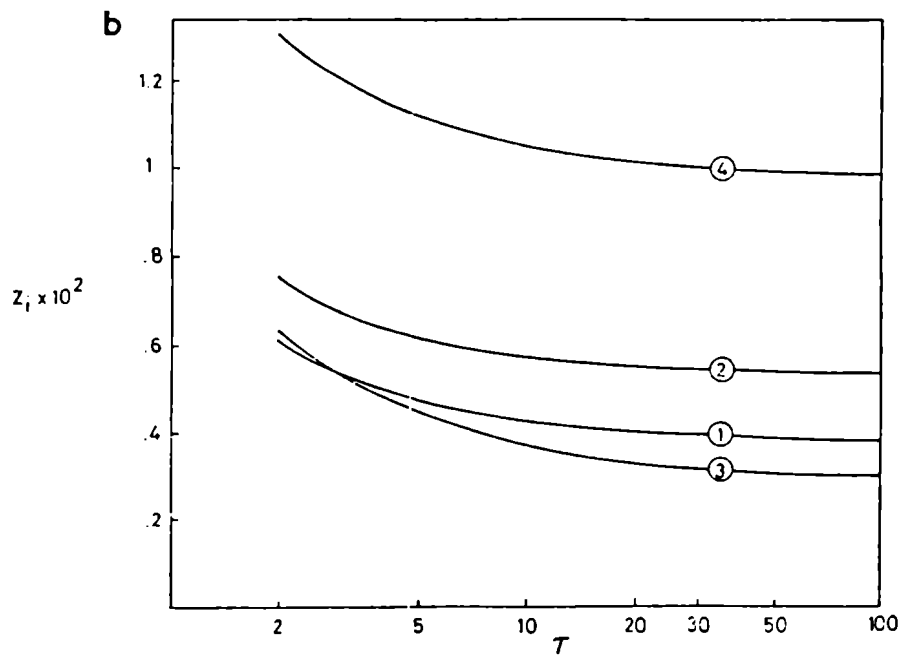
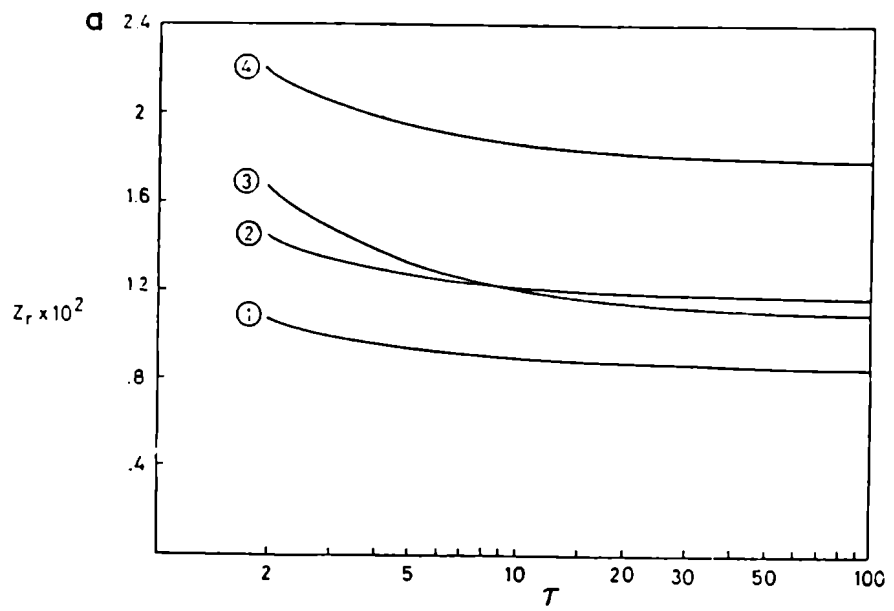


Figura 24

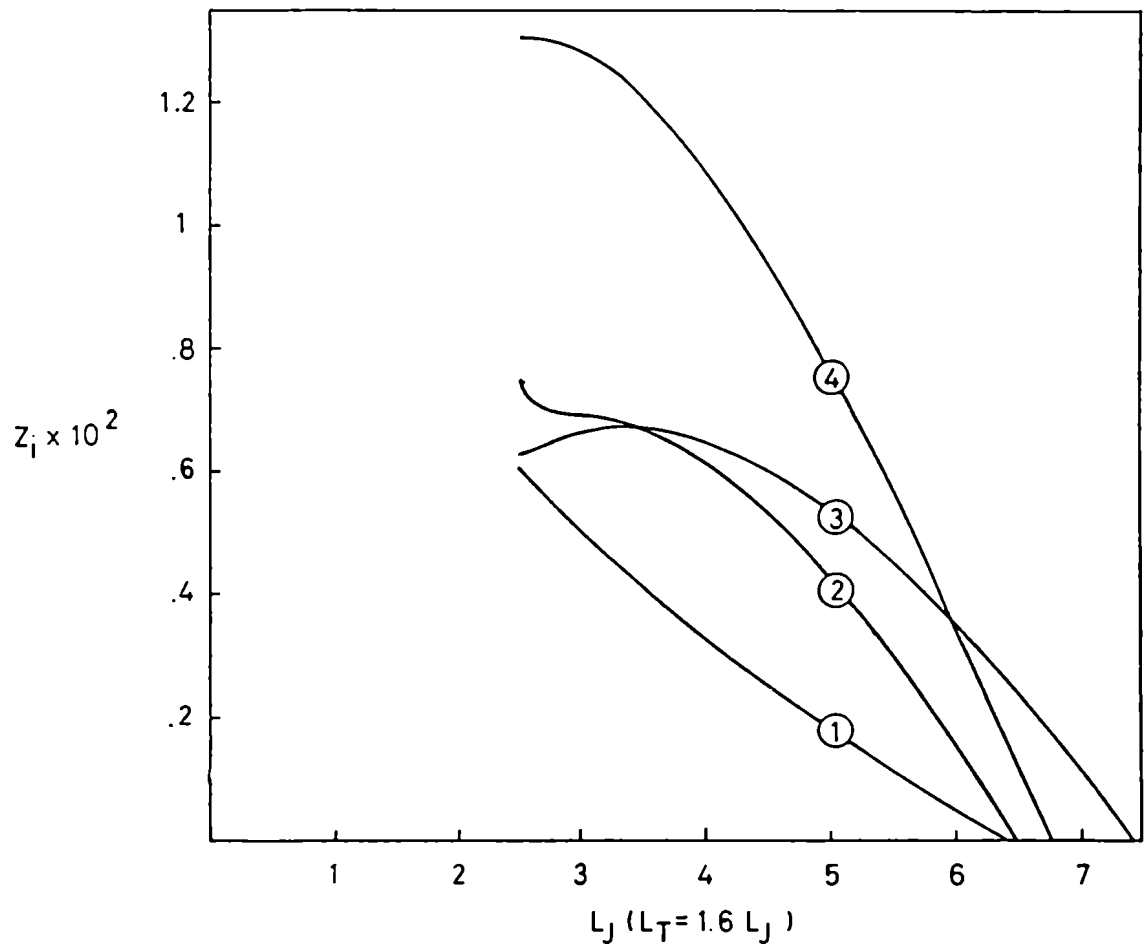


Figura 25

V-DISCUSSION Y CONCLUSIONES

En esta tesis se han estudiado en detalle las inestabilidades producidas por gradientes de densidad de corriente en plasmas inhomogéneos y magnetizados. Utilizando diversos modelos para describir la dinámica de iones y electrones se mostró que los gradientes de velocidad y temperatura electrónica pueden producir modos inestables localizados en la vecindad de las superficies racionales y se determinó la dependencia de la frecuencia y estructura espacial de estos modos respecto de los parámetros que definen el equilibrio.

En el capítulo II se utilizaron las ecuaciones de dos fluidos (en la aproximación de plasma frío) para estudiar las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad electrónica. Considerando que el ancho de la perturbación en la dirección de la inhomogeneidad es mucho menor que las longitudes características asociadas con los gradientes de las magnitudes de equilibrio (aproximación local) se obtuvo una relación de dispersión algebraica que muestra que la tasa de crecimiento de la inestabilidad es positiva (el modo inestable) en una región del plasma cuyo ancho es inversamente proporcional a la longitud típica del gradiente de velocidad y que la parte real de la frecuencia proviene del corrimiento Doppler. En el caso no local, la condición de cuasineutralidad condujo a una ecuación diferencial lineal de segundo orden que, fijadas las condiciones de contorno, admite solución sólo para determinados valores de frecuencia. Esta ecuación fue resuelta analíticamente considerando perturbaciones localizadas y perfiles relativamente sencillos de velocidad y campo magnético, obteniéndose una relación de dispersión que muestra la existencia de modos inestables. En ambos casos se mostró que las colisiones disminuyen la tasa de crecimiento de la inestabilidad y que, en las condiciones correspondientes al comienzo de una

descarga óhmica, el gradiente de densidad también resulta estabilizante.

En el capítulo III se utilizó el modelo de fluido frío para los iones y la ecuación de deriva cinética para los electrones, y se mostró que tanto el gradiente de velocidad como el de temperatura (actuando separadamente) pueden producir modos inestables localizados, y que cuando se consideran ambos gradientes simultáneamente aparecen dos modos inestables. En el caso de las inestabilidades producidas por gradientes de velocidad se compararon los resultados obtenidos utilizando el modelo cinético con los correspondientes al modelo de dos fluidos, encontrándose que los efectos cinéticos modifican apreciablemente la frecuencia y localización de la perturbación y que estas modificaciones se vuelven más importantes a medida que la temperatura aumenta. Los estudios numéricos mostraron además que estos modos son inestables dentro de un amplio rango de valores de los parámetros, que tanto las colisiones como el gradiente de densidad tienen un efecto estabilizante y que, en un plasma inhomogéneo y no colisionante, la parte real de la frecuencia proviene del corrimiento Doppler y de la frecuencia asociada al movimiento de deriva producido por el gradiente de densidad. Los estudios sobre inestabilidades producidas por gradientes de temperatura mostraron que la parte imaginaria de $Q(x,z)$ puede proporcionar un mecanismo alternativo para localizar la perturbación y que la parte real de la frecuencia se debe principalmente al movimiento de deriva producido por el gradiente de temperatura. La inclusión de colisiones modificó apreciablemente la forma de $Q(x,z)$ (aparecieron dos pozos en la parte real) y tuvo un efecto estabilizante mientras que la adición de un suave gradiente de densidad ($L_N \gg L_T$) no produjo cambios significativos. Se mostró también que cuando se consideran ambos gradientes simultáneamente la ecuación diferencial admite dos soluciones inestables para un dado conjunto de valores de los parámetros y que ambos modos poseen una estructura espacial bastante compleja. Los estudios numéricos mostraron además

que, aun para perfiles de temperatura más suaves que los de velocidad, la contribución del gradiente de temperatura es, en general, más importante que la correspondiente al gradiente de velocidad en la determinación de la frecuencia y estructura espacial de los modos inestables y que se necesitan perfiles de velocidad y temperatura bastante abruptos para producir inestabilidades.

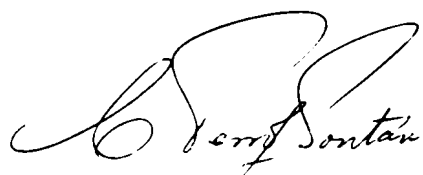
En el capítulo IV se mostró que cuando la temperatura iónica es del mismo orden que la electrónica (es decir ρ_i del mismo orden que ρ_s) las aproximaciones generalmente utilizadas para el estudio de ondas de deriva y microinestabilidades en plasmas inhomogéneos dejan de ser válidas y debe recurrirse a un formalismo integral. Utilizando una representación de Fourier para $\phi(x)$ y la condición de cuasineutralidad (en el espacio \underline{k}) se obtuvo una ecuación integral donde la frecuencia del modo interviene como autovalor y se mostró que en el límite $\tau \rightarrow \infty$ se recuperan las ecuaciones correspondientes al modelo de fluido frío. Resolviendo numéricamente la ecuación integral se mostró que al disminuir τ la forma de $\phi(x)$ cambia y el modo se hace más inestable (la parte real de la frecuencia también aumenta) y que con este modelo también se necesitan fuertes gradientes de velocidad y temperatura para producir modos inestables.

La utilización de varios modelos para estudiar una misma situación física permitió analizar exhaustivamente el problema considerado y determinar el rango de validez de las aproximaciones involucradas en cada uno de ellos. En este sentido resulta particularmente importante la comparación entre los resultados obtenidos en los capítulos III y IV ya que, salvo la ref. 32, no existían hasta el momento trabajos en los que se compare ambos métodos. Para concluir con el análisis de los modelos utilizados puede decirse que, dejando de lado algunas aproximaciones realizadas para simplificar los cálculos, el método usado en el capítulo IV permite estudiar inestabilidades electrostáticas en un sustrato de plasma sin imponer otras condiciones que limiten el ran-

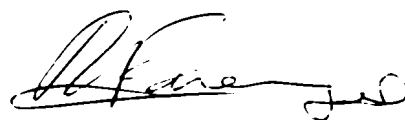
go de validez de los resultados obtenidos. Ya se ha mencionado que, debido a los bajos valores de β considerados, no parece probable que los efectos electromagnéticos, cuya inclusión dentro del formalismo integral se analiza en la ref. 32, puedan introducir modificaciones apreciables en los resultados obtenidos. Los efectos relacionados con la geometría toroidal (que es la utilizada en la mayoría de los dispositivos de confinamiento magnético) podrían probablemente incluirse dentro del método integral utilizando el formalismo "ballooning"³³ pero no existen hasta el momento trabajos en los que se considere este problema.

La fase inicial de una descarga óhmica constituye una situación experimental de interés en donde las inestabilidades consideradas en este trabajo pueden desempeñar un papel importante. La ausencia de un fuerte efecto pelicular (que debería aparecer de acuerdo con la teoría clásica) podría explicarse así como debida al transporte anómalo inducido por inestabilidades semejantes a las estudiadas en esta tesis. El mecanismo propuesto para explicar la penetración del perfil de corriente puede describirse en la siguiente forma. Partiendo de una situación de equilibrio (sin turbulencia) se efectúa la descarga óhmica; como inicialmente no existen modos inestables (y consecuentemente el transporte es clásico) la corriente generada no puede penetrar en el plasma y comienza a establecerse un fuerte gradiente. Cuando este gradiente alcanza un valor crítico el plasma se vuelve inestable (en la zona en que se localiza el gradiente) y la corriente difunde debido al transporte anómalo. Esta difusión continúa hasta que el perfil de corriente se vuelve suficientemente suave como para que no existan modos inestables. En esta situación el transporte será nuevamente clásico y todo el proceso podrá repetirse en una posición diferente. Este continuo cambio entre configuraciones estables e inestables (y consecuentemente entre transporte clásico y anómalo) puede explicar la rápida penetración del perfil de corriente en el plasma. Como no exis-

ten mediciones experimentales suficientemente precisas de los perfiles de corriente y temperatura durante la fase inicial de una descarga óhmica (aunque se conocen aproximadamente los tiempos de difusión) es imposible determinar si el mecanismo propuesto es efectivamente responsable de la difusión de la corriente. El mayor problema consiste en determinar si realmente se producen los fuertes gradientes necesarios para la excitación de modos inestables y en caso afirmativo calcular la magnitud del transporte anómalo inducido. Una forma de contestar a estas preguntas sería calcular los coeficientes de transporte anómalo asociados con los modos considerados, reemplazarlos en un código de transporte y comparar el tiempo de penetración obtenido a partir del código con el medido experimentalmente. Si se obtiene un buen acuerdo entre ambos valores podría concluirse que el mecanismo propuesto es básicamente correcto.



Handwritten signature of Jerry Sontag.



Handwritten signature of Alfonso.

AGRADECIMIENTOS

Parte de esta tesis ha sido realizada durante una visita a la Universidad de Maryland (EE.UU.) y por lo tanto quiero agradecer a las autoridades de la Comisión Nacional de Energía Atómica, y en especial al Dr. Adolfo B. Rodrigo, por hacer posible este viaje y a los Drs. Hans R. Griem, Yee C. Lee y Parvez N. Guzdar por toda la ayuda recibida durante mi permanencia en la mencionada Universidad.

Quiero agradecer también toda la ayuda recibida del Dr. Constantino Ferro Fontán, en su doble función de Director de Tesis y Consejero de Estudios, las útiles sugerencias realizadas por el Lic. Roberto A. Clemente durante la redacción de esta tesis, el eficiente trabajo de mecanografiado de la Srta. Graciela B. Dalaison, la colaboración del Sr. Ramiro E. Ferradas en la confección de las figuras y el apoyo y estímulo brindado por todos los miembros de la División Fusión Nuclear de la Comisión Nacional de Energía Atómica.

APENDICE A

CALCULO DE LA DENSIDAD ELECTRONICA PERTURBADA A PARTIR DE LA ECUACION DE DERIVA CINETICA

El radio de Larmor de los electrones es mucho menor que todas las longitudes que intervienen en el problema y por lo tanto es conveniente reemplazar la ecuación de Boltzman por otra más sencilla que haga uso de esta propiedad. Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de deriva cinética y ha sido deducida rigurosamente por varios autores³⁴⁻³⁵. En este apéndice se presenta una deducción simplificada de la ecuación de deriva cinética y la densidad electrónica resultante. El punto de partida es la ecuación de Boltzman linealizada (como sólo se consideran electrones se omite el subíndice e)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla + \frac{q}{m} \left(\underline{E}_0 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\underline{v}} \right] f = - \frac{q}{m} \left(\underline{E}_1 + \frac{\underline{v} \times \underline{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\underline{v}} F_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c \quad (A-1)$$

donde el segundo término en el miembro de la derecha representa la variación de f debida a colisiones y se supuso que la función de distribución y los campos pueden escribirse como la suma de un valor de equilibrio más una perturbación

$$F = F_0 + f$$

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_1$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1$$

El efecto de las colisiones será modelado mediante un operador de Krook²³ que conserva el número de partículas

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c = -\nu \left(f - \frac{n_1}{n_0} F_0 \right) \quad (\text{A-2})$$

donde ν es la frecuencia de colisión electrón-ion, n_0 la densidad de equilibrio y n_1 la densidad perturbada

$$n_1(\underline{r}, t) = \int f(\underline{r}, \underline{v}, t) d^3\underline{v} \quad (\text{A-3})$$

En el caso de perturbaciones electrostáticas y suponiendo nulo el campo eléctrico de equilibrio la ecuación (A-1) puede reescribirse en la forma

$$\frac{df}{dt} = -\frac{e}{m} \nabla \phi \cdot \nabla_{\underline{v}} F_0 - \nu (f - n_1 F_0 / n_0) \quad (\text{A-4})$$

donde ϕ es el potencial electrostático ($\underline{E} = -\nabla \phi$) y la derivada total debe tomarse a lo largo de las trayectorias no perturbadas. La función de distribución de equilibrio debe ser función de las constantes de movimiento

$$F_0 = F_0(K_1, K_2, \dots) \quad \text{con} \quad dK_i/dt = 0$$

Las magnitudes de equilibrio dependen sólo de x y por lo tanto se conservan la energía y las componentes del impulso canónico en dirección \hat{y} y \hat{z}

$$E = \frac{mv^2}{2} \quad P_y = mv_y - \frac{eA_y}{c} \quad P_z = mv_z - \frac{eA_z}{c}$$

como $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ y $B_z = B_0 \hat{z}$ la componente \hat{y} del potencial vector está dada por

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = B_0 \Rightarrow A_y = B_0 x$$

y en consecuencia

$$\frac{P_y}{m\Omega} = \frac{v_y}{\Omega} - x \quad (\Omega = eB_0/mc)$$

es una constante de movimiento. La forma de B_y (y por consiguiente de A_z) depende del perfil de corriente elegido pero en todos los casos $B_y(x=0)=0$. Utilizando esta condición, el hecho de que P_y y P_z son constantes de movimiento y despreciando términos de orden ρ_e/L puede demostrarse que $v_{//}$ ($v_{//} = \underline{v} \cdot \underline{B}/|B|$) es una constante de movimiento. La función de distribución de equilibrio dependerá entonces de v^2 , $v_{//}$ y $v_y/\Omega-x$

$$F_0 = F_0(v^2, v_{//}, v_y/\Omega-x)$$

y consecuentemente

$$\underline{v} \cdot \nabla F_0 = \frac{\partial F_0}{\partial v^2} 2\underline{v} + \frac{\partial F_0}{\partial v_{//}} \hat{b} + \frac{\partial F_0}{\partial P} \frac{\hat{y}}{\Omega} \quad (A-5)$$

donde $\hat{b} = \underline{B}/|B|$ y $P = v_y/\Omega-x$. Reemplazando (A-5) en (A-4) se obtiene

$$\frac{df}{dt} = -\frac{e}{m} \nabla \phi \left[2\underline{v} \frac{\partial F_0}{\partial v^2} + \hat{b} \frac{\partial F_0}{\partial v_{//}} + \frac{\hat{y}}{\Omega} \frac{\partial F_0}{\partial P} \right] - v \left(f - \frac{n_1}{n_0} F_0 \right) \quad (A-6)$$

Utilizando la relación

$$\underline{v} \cdot \nabla \phi = \left(\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi$$

y considerando que la dependencia temporal y espacial de las magnitudes perturbadas está dada por

$$\rho(\underline{r}, t) = \tilde{\rho}(x) \exp(ik_y y - i\omega t)$$

resulta

$$\frac{d}{dt} \left[f + \frac{2e\phi}{m} \frac{\partial F_0}{\partial v^2} \right] + v f = - \frac{e}{m} \left[2i\omega \frac{\partial F_0}{\partial v^2} + ik_{//} \frac{\partial F_0}{\partial v_{//}} + \frac{k_y}{\Omega} \frac{\partial F_0}{\partial P} \right] \phi + \frac{n_1}{n_0} F_0 \quad (A-7)$$

El término v_y/Ω que aparece en la definición de P es del orden de ρ_e y por lo tanto puede despreciarse frente a x. El hecho de que x resulte aproximadamente constante puede entenderse fácilmente si se considera que el campo magnético tiene sólo componentes según \hat{y} y \hat{z} . Debe notarse, sin embargo, que esta aproximación puede efectuarse sólo después que $\partial P/\partial v$ ha sido calculada. Utilizando la relación

$$k_y (y' - y) = k_{//} v_{//} (t' - t)$$

(donde las magnitudes primadas corresponden a la trayectoria de la partícula) es posible integrar (A-7) obteniéndose

$$\tilde{f}(x, \underline{v}, t) = \frac{e}{m(\omega + i\nu - k_{//} v_{//})} \left\{ 2k_{//} v_{//} \frac{\partial F_0}{\partial v^2} + k_{//} \frac{\partial F_0}{\partial v_{//}} - \frac{k_y}{\Omega} \frac{\partial F_0}{\partial x} \right\} \tilde{\phi}(x) + \frac{i\nu F_0 \tilde{n}_1(x)}{n_0(\omega + i\nu - k_{//} v_{//})} \quad (A-8)$$

La ecuación (A-8) es la ecuación de deriva cinética y ha sido ampliamente utilizada en el estudio de ondas de deriva y microinestabilidades en plasmas no homogéneos. La densidad perturbada puede calcularse a partir de (A-3) y (A-8)

$$\tilde{n}_1 \left[1 - \frac{i\nu}{n_0} \int \frac{F_0}{(\omega + i\nu - k_{//} v_{//})} d^3 \underline{v} \right] = \frac{e \tilde{\phi}}{m} \int \frac{d^3 \underline{v}}{(\omega + i\nu - k_{//} v_{//})} \left[k_{//} \frac{\partial F_0}{\partial v_{//}} - \frac{k_y}{\Omega} \frac{\partial F_0}{\partial x} \right] \quad (A-9)$$

Para avanzar en el cálculo de \tilde{n}_1 es necesario especificar la forma de F_0 . En este caso interesa que tanto la densidad de corriente (de dirección paralela al campo magnético) como la densidad y temperatura sean funciones de x y en consecuencia F_0 puede definirse en la forma.

$$F_0 = n_0(x) \left[\frac{m}{2\pi T(x)} \right]^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m}{2T(x)} \left(v_{\perp}^2 + [v_{\parallel} - u(x)]^2 \right) \right\} \quad (A-10)$$

donde $T(x)$ es la temperatura (en unidades de energía) y $v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2$. Puede comprobarse que la corriente asociada a esta función de distribución es

$$J_{\parallel}(x) = -e \int F_0 v_{\parallel} d^3v = -en_0 u(x)$$

Utilizando la función de distribución definida en (A-10) se obtiene

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}} = - \frac{m}{T} (v_{\parallel} - u) F_0 \quad (A-11)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = F_0 \left\{ \frac{n'_0}{n_0} + \frac{T'}{T} \left[- \frac{3}{2} + \frac{m}{2T} (v_{\perp}^2 + (v_{\parallel} - u)^2) \right] + \frac{mu'}{T} (v_{\parallel} - u) \right\}$$

Reemplazando (A-11) en (A-9) se obtienen integrales que contienen la función de distribución de equilibrio, el denominador $(\omega + i\nu - k_{\parallel} v_{\parallel})$ y potencias de v_{\parallel} y v_{\perp} . Estas integrales pueden ser evaluadas convenientemente introduciendo la función de dispersión del plasma²⁶ que se define en la forma

$$Z(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x-\eta)} dx$$

resulta así

$$\tilde{n}_1(x) = \frac{n_0 e^{\tilde{\phi}}}{T\zeta} \left\{ \frac{k_y v}{2|k_{//}|\Omega} \left[\frac{n_0'}{n_0} Z(\eta) + \frac{T'}{T} (\bar{Z}(\eta) + \eta) \right] + \left(\frac{k_y u'}{k_{//}\Omega} + 1 \right) [1 + \eta Z(\eta)] \right\} \quad (A-12)$$

donde

$$v^2 = \frac{2T}{m}$$

$$\eta = \frac{\omega + i\nu - k_{//} u}{|k_{//}| v}$$

$$\zeta = 1 + \frac{i\nu Z(\eta)}{|k_{//}| v}$$

$$\bar{Z}(\eta) = Z(\eta) (\eta^2 - 1/2)$$

APENDICE B

METODOS NUMERICOS

A-Ecuación Diferencial

El programa utilizado ha sido discutido en detalle en la ref. 36 y por lo tanto aquí sólo se presenta una idea general del método empleado. Las ecuaciones diferenciales que interesa resolver son de la forma

$$A(z,x) \phi''(x) + B(z,x) \phi'(x) + C(z,x) \phi(x) = 0 \quad (B-1)$$

donde z es un autovalor (complejo) de la ecuación y x es la variable espacial (real). En general A , B , C y ϕ son funciones complejas y resulta claro que, fijadas las condiciones de contorno, la ecuación (B-1) tendrá solución sólo para determinados valores de z . El problema consiste entonces en determinar los valores de z y calcular las autofunciones correspondientes. El método de elementos finitos ³⁷ empleado consiste en seleccionar un espacio de funciones en donde se pueda aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante un desarrollo de la forma

$$\phi(x) \approx \sum_{i=1}^M \alpha_i \chi_i(x) \quad (B-2)$$

donde los $\chi_i(x)$ son funciones conocidas y los α_j coeficientes a determinar. En este caso el espacio de funciones utilizado es el de los "splines" cúbicos. Dada una partición \mathcal{T} ($\mathcal{T}: a=t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$) del intervalo $[a, b]$ los splines cúbicos son polinomios de tercer grado continuos por tramos y con primera y segunda derivada continua. En cada subintervalo de la partición un polinomio cúbico queda determinado por 4 coeficientes y como hay $N-1$

subintervalos se tiene un total de $4(N-1)$ coeficientes. Las tres condiciones de continuidad en los nodos interiores proporcionan $3(N-2)$ condiciones de vínculo y por lo tanto se necesitan $N+2$ parámetros para determinar el desarrollo de una función (en base a splines cúbicos) en el intervalo considerado. Dentro de los splines cúbicos los más convenientes son los splines básicos (o B-splines) ya que poseen las mejores propiedades de localización. Estos B-splines pueden definirse en la forma

$$\psi_i(x) = \sum_{j=i-3}^{i+1} \frac{4(x_j-x)_+^3}{w'(x_j)} \quad (\text{B-3})$$

donde

$$w(x) = (x-x_{i-3}) (x-x_{i-2}) (x-x_{i-1}) (x-x_i) (x-x_{i+1})$$

y

$$\alpha_+^3 = \begin{cases} \alpha^3 & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos numéricos es conveniente desarrollar también las funciones $A(x,z)$, $B(x,z)$ y $C(x,z)$ en base a splines cúbicos; se tiene entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{j=1}^{N+2} \gamma_j \psi_j(x) \\ A(z,x) &= \sum_{j=1}^{N+2} a_j(z) \psi_j(x) \\ B(z,x) &= \sum_{j=1}^{N+2} b_j(z) \psi_j(x) \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

$$c(z,x) = \sum_{j=1}^{N+2} c_j(z) \psi_j(x)$$

donde los $\psi_j(x)$ son B-splines y los γ_j coeficientes a determinar. Utilizando estos desarrollos la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$\sum_{j,k=1}^{N+2} (a_j \psi_j \psi_k'' + b_j \psi_j \psi_k' + c_j \psi_j \psi_k) \gamma_k = 0 \quad (B-5)$$

Multiplicando por ψ_i e integrando en $[a,b]$ se obtiene

$$\sum_{j,k=1}^{N+2} \left\{ a_j \left[\psi_k' \psi_i \psi_j \Big|_a^b - \int_a^b \psi_k' (\psi_j' \psi_i + \psi_i' \psi_j) dx \right] + \right. \\ \left. + b_j \int_a^b \psi_i \psi_j \psi_k' dx + c_j \int_a^b \psi_i \psi_j \psi_k dx \right\} \gamma_k = 0 \quad (B-6)$$

donde el término que contenía ψ_k en (B-5) fue integrado por partes. Es importante destacar que, debido a los desarrollos utilizados para A, B y C, las integrales resultantes involucran sólo splines cúbicos y son, por lo tanto, independientes de γ . Una vez que estas integrales han sido calculadas la ecuación (B-6) puede reescribirse en la forma

$$G_{ik}(z) \gamma_k = 0 \quad (B-7)$$

donde G_{ik} es una matriz de $(N+2) \times (N+2)$ (en general se utilizó $N=200$). Para que la ecuación (B-7) tenga solución distinta de la trivial el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero. Los valores de z quedan determinados entonces por las soluciones de la ecuación

$$\det[G_{ij}(z)] = 0 \quad (B-8)$$

Una vez calculado el autovalor es posible determinar los γ_k y construir las autofunciones correspondientes. El algoritmo numérico consta entonces de los siguientes pasos (el diagrama de flujo se encuentra en la fig. 26)

- i- Estimar el valor de z
- ii- Calcular los elementos de G_{ij}
- iii- Calcular $\det[G_{ij}(z)]$. Si $\det[G_{ij}(z)] = 0$ continuar; si $\det[G_{ij}(z)] \neq 0$ cambiar z y retornar a ii-
- iv- Calcular el autovector ($\underline{\gamma}$) correspondiente al valor de z encontrado
- v- Calcular ϕ

Para finalizar conviene mencionar que el uso de elementos finitos permite implementar con facilidad las condiciones de contorno requeridas. Como se buscan perturbaciones localizadas se pide que la función sea cero en un extremo del intervalo de integración y la derivada primera se anule en el otro. La primer condición se satisface definiendo $\gamma_1 = 0$ o $\gamma_{N+2} = 0$. La condición sobre la derivada se satisface anulando el término de superficie de (B-6) en el otro extremo. Como los extremos del intervalo de integración no quedan determinados por paredes materiales sino por la localización producida por la inhomogeneidad del plasma es necesario tomar a y b suficientemente grandes como para que el resultado final no dependa de su valor específico.

B-Ecuación Integral

En la ref. 38 puede encontrarse un tratamiento completo de los métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones integrales y en la ref. 32 la aplicación de estos métodos al caso de ecuaciones integrales semejantes a la que aparece en este trabajo. En esta sección se considerará sólo el método utilizado en esta tesis.

La ecuación integral (IV-15) puede escribirse en la forma

$$\int dk' K(k, k', z) \hat{\phi}(k') = 0 \quad (\text{B-9})$$

donde $K(k, k', z)$ es el "kernel" y z el autovalor. El método más simple para resolver esta ecuación consiste en reemplazar la integración en k' por una suma finita

$$\sum_{j=1}^N K(k_i, k_j, z) \hat{\phi}(k_j) = 0 \quad (\text{B-10})$$

y considerar N de estas ecuaciones ($i=1, \dots, N$). Por supuesto esto es posible sólo si $\hat{\phi}(k_j)$ va a cero suficientemente rápido como para que el valor de N necesario sea computacionalmente manejable. Escrita en forma matricial la ecuación (B-10) toma la forma

$$K_{ij}(z) \hat{\phi}_j = 0 \quad (\text{B-11})$$

y por lo tanto los valores de z se obtienen a partir de la condición $\det[K_{ij}(z)] = 0$. Una vez que el problema ha sido reducido a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas el método utilizado es totalmente análogo al empleado para la ecuación diferencial.

El kernel de la ecuación (B-9) puede escribirse en la forma

$$K(k, k', z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} e^{-i(k-k')x} F(x, k, k', z) \quad (\text{B-12})$$

La integral que aparece en la definición de K es una integral de Fourier definida entre $-\infty$ y $+\infty$ y ha sido evaluada utilizando subrutinas que calculan transformada rápida de Fourier. Esto significa, sin embargo, que se está considerando implícitamente que el integrando es una función periódica de período $2x_0$ (donde $[-x_0, x_0]$ es el intervalo de integración). El procedimiento es

válido si el resultado final no depende del valor de x_0 y esto se consigue tomando x_0 suficientemente grande como para que $\tilde{\phi}(x)$ vaya a cero cuando x se aproxima a x_0 . Los resultados presentados en este trabajo han sido obtenidos utilizando valores de N entre 64 y 256 y en este sentido merece mencionarse que, como se indica en la ref. 32, el uso de elementos finitos probablemente permitiría reducir el tamaño de las matrices.

El algoritmo numérico empleado consta de los siguientes pasos (el diagrama de flujo se encuentra en la fig. 27)

i- Estimar el valor de z

ii- Calcular $F(x,k,k',z)$

iii- Calcular $K(k,k',z)$ utilizando transformada rápida de Fourier

iv- Calcular $\det[K_{ij}(z)]$

v- Si $\det[K_{ij}(z)] = 0$ se calculan los autovectores correspondientes (ϕ). Si $\det[K_{ij}(z)] \neq 0$ se cambia el valor de z y se repite el procedimiento

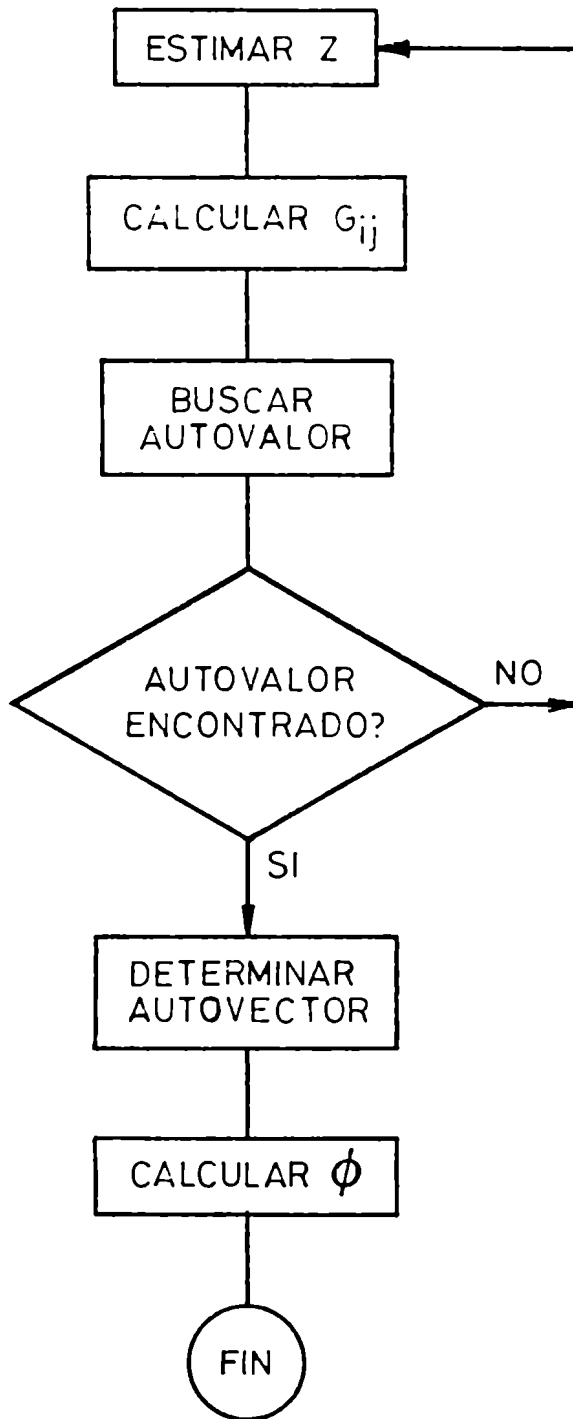


Figura 26

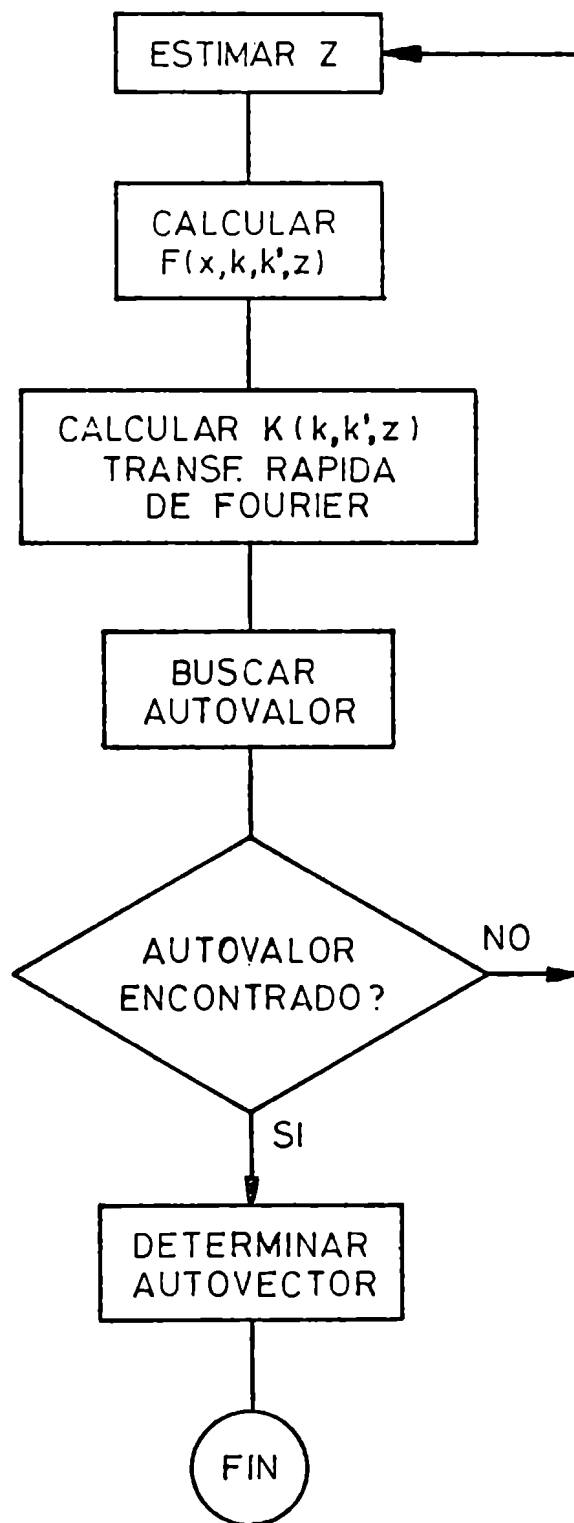


Figura 27

REFERENCIAS

1. C. W. Snyder, M. Neugebauer y U. R. Pao. J. Geophys. Res. 68, 6361 (1963).
2. M. J. Keskinen y J. D. Huba. J. Geophys. Res. 88, 5423 (1983).
3. P. A. Sturrock. Coronal Disturbances. Ed. G. Newkirk. (Dordrecht Reidel, 1974).
4. J. A. Rome y R. Briggs. Phys. Fluids 15, 796 (1972).
5. P. J. Catto, M. N. Rosebluth y C. S. Liu. Phys. Fluids 16, 1719 (1973).
6. M. G. Haines y F. Marsh. J. Plasma Phys. 27, 427 (1982).
7. D. F. Düchs, H. P. Furth y P. H. Rutherford. Nucl. Fusion 12, 341 (1972).
8. S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. (Clarendon Press, Oxford, 1961).
9. M. Dobrowolny. Phys. Fluids 15, 2263 (1972).
10. A. B. Mikhailovskii y V. A. Klimenko. J. Plasma Phys. 24, 385 (1980).
11. R. J. Hawryluk, N. Bretz, D. Dimock, E. Hinnov, D. Johnson, D. Monticello, D. Mc. Cune y S. Suckewer. Princeton PPPL - 1572 (1980).
12. R. S. Granetz, I. H. Hutchinson y D. O. Overskei. Nucl. Fusion 19, 1587 (1979).
13. B. Carreras, H. R. Hicks y B. V. Woddell. Nucl. Fusion 19, 583 (1979).
14. A. B. Mikhailovskii y A. A. Rukhadze. Soviet Phys. Tech. Phys. 10, 1644 (1966).
15. A. Hirose e I. Alexeff. Phys. Rev. Lett. 26, 949 (1971).
16. C. S. Liu. Phys. Rev. Lett 27, 1673 (1971).
17. W. Horton. Phys. Rev. Lett. 28, 1506 (1972).
18. A. B. Mikhailovskii. Review of Plasma Physics. Ed. M. A. Leontovich. Vol. 3 (Consultants Bureau, New York, 1966).
19. S. M. Mahajan y D. W. Ross. Phys. Fluids 22, 669 (1979).
20. T. M. Antonsen y S. M. Mahajan. Phys. Fluids 22, 1836 (1979).

21. Y. C. Lee y L. Chen. Phys. Rev. Lett. 42, 708 (1979).
22. L. Chen, P. N. Guzdar, J. Y. Hsu, P. K. Kaw, C. Oberman y P. White. Nucl. Fusion 19, 373 (1979).
23. N. A. Krall y A. W. Trivelpiece. Principles of Plasma Physics (Mc Graw Hill, New York, 1973).
24. S. I. Braginskii. Reviews of Plasma Physics. Ed. M. A. Leontovich, Vol. 1 (Consultants Bureau, New York, 1965).
25. J. C. P. Miller. Handbook of Mathematical Functions. Ed. M. Abramowitz y I. A. Stegun (Dover, New York, 1970).
26. B. D. Fried y S. D. Conte. The Plasma Dispersion Function (Academic Press, New York, 1961).
27. N. A. Krall. Advances in Plasma Physics, Vol. 1 Ed. A. Simon y W. Thompson (Wiley, New York, 1969).
28. B. Coppi, M. N. Rosenbluth y R. Z. Sagdeev, Phys Fluids 10, 582 (1967).
29. Y. C. Lee, L. Chen y W. M. Nevins. Nucl. Fusion 20, 482 (1980).
30. R. Linsker, Phys. Fluids 24, 1485 (1981).
31. R. Marchand, N. T. Gladd y Y. C. Lee. Phys. Fluids 25, 338 (1982).
32. R. Farengo, Y. C. Lee y P. N. Guzdar. Phys. Fluids 26, 3515 (1983).
33. J. W. Connor, R. J. Hastie y J. B. Taylor. Phys. Rev. Lett. 40, 396 (1978).
34. L. Cheung y W. Horton. Ann. of Phys. 81, 201 (1973).
35. R. D. Hazeltine. Plasma Phys, 15, 77 (1973).
36. W. H. Miner. University of Texas Report FRCR # 138 (1977).
37. G. Strang y G. J. Fix. An Analysis of the Finite Element Method (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973).
38. L. M. Delves y J. Walsh. Numerical Solution of Integral Equations (Clarendon, Oxford, 1974).