

Tesis de Posgrado

Un algoritmo no-iterativo en deconvolución por mínima entropía

Cabrelli, Carlos Alberto

1983

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Cabrelli, Carlos Alberto. (1983). Un algoritmo no-iterativo en deconvolución por mínima entropía. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1852_Cabrelli.pdf

Cita tipo Chicago:

Cabrelli, Carlos Alberto. "Un algoritmo no-iterativo en deconvolución por mínima entropía". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1983.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1852_Cabrelli.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UN ALGORITMO NO-ITERATIVO EN DECONVOLUCION
POR MINIMA ENTROPIA

por

Carlos Alberto Cabrelli

Director de Tesis

Miguel E. Herrera

- 1852 -

21 21

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

- 1983 -

Quisiera dejar expresado mi agradecimiento al Dr. Miguel Herrera por el permanente apoyo y estímulo que me ha brindado para la realización de este trabajo, al Dpto. de Estudios Especiales de YPF por el asesoramiento técnico y bibliografía facilitados así como también a las autoridades de la CNIE por haber permitido el uso del equipo de computación para la realización de las pruebas numéricas.

Deseo agradecer también a mis colegas Graciela Canziani y Jorge Fiora la colaboración brindada en la implementación computacional, y finalmente a María Angélica Tancredi quien tuvo a su cargo la tarea de mecanografiar este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION	1
--------------	---

CAPITULO I

I.1 <i>Metodología</i>	5
I.2 <i>Señales</i>	7
I.3 <i>Sistemas</i>	9
I.3.1 <i>Sistemas invariantes en el tiempo</i>	9
I.3.2 <i>Sistemas lineales e invariantes en el tiempo</i>	10
I.3.3 <i>Sistemas Causales</i>	11
I.3.4 <i>Sistemas Estables</i>	12
I.4 <i>Consideraciones Finales</i>	13

CAPITULO II

II.1 <i>Deconvolución</i>	14
II.2 <i>Deconvolución en Sísmica</i>	16
II.3 <i>Deconvolución Wiener</i>	19

CAPITULO III

III.1	<i>Deconvolución por Mínima Entropía (MED)</i>	24
III.2	<i>Planteo del modelo y resolución</i>	25
III.3	<i>Interpretación Geométrica del MED</i>	28
III.3.1	<i>Norma Varimax. (caso 1 muestra)</i>	28
III.3.2	<i>Norma Varimax y Deconvolución</i>	31
III.3.3	<i>Equivalencia de Criterios</i>	33
III.4	<i>Norma D</i>	35
III.4.1	<i>Norma D y Deconvolución</i>	38
III.4.2	<i>Caso N muestras</i>	41
III.4.2.1	<i>Ecuaciones Normales para la Norma D</i>	43

CAPITULO IV

IV.1	<i>Descripción de Algoritmos</i>	46
IV.2	<i>MEDD y Convergencia del MED</i>	47
IV.3	<i>Ejemplos Numéricos</i>	50
IV.3.1	<i>Ejemplos 1 a 5: Modelo $x = w * q$</i>	52
IV.3.2	<i>Ejemplos 6 a 8: Modelo $x = w * q + n$</i>	62

APENDICE I.	Representación de sistemas lineales e invariantes en el tiempo	69
APENDICE II.	La ecuación $y = \sum_k h_k v_k$ para la convolución	74
APENDICE III.	Norma \mathcal{D} y Spiking Filter	76
APENDICE IV.	Diferencias entre la norma \mathcal{V} y la norma \mathcal{D}	79
LISTADO DE PROGRAMAS		81
BIBLIOGRAFIA		97

INTRODUCCION

En áreas muy diversas de la ciencia y la tecnología, como Acústica, Restauración de Imágenes, Ingeniería Biomédica, sonar, radar, sismología, transmisión de datos y telecomunicaciones, las técnicas de procesamiento de señales digitales, constituyen una herramienta poderosa.

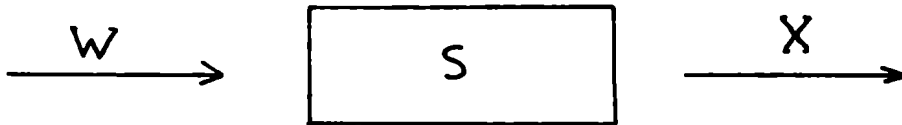
La evolución de estas técnicas estuvo acompañada en los últimos años, por un extraordinario desarrollo en la tecnología de los computadores.

La disponibilidad de veloces computadores, permitió la implementación de sofisticados y complejos algoritmos, produciendo un tremendo impacto, sobre todo en aquellos campos donde tradicionalmente se usaban técnicas, para señales analógicas.

Comunmente una señal es definida como una función, que contiene información acerca del estado o comportamiento de un sistema físico. Las señales deben ser procesadas, para facilitar la extracción de información.

El objetivo es generalmente, transformar una señal en otra, que en algún sentido es más deseable que la original. Por ejemplo, muchas veces, se desea diseñar transformaciones, para separar dos o más señales, que han sido combinadas de alguna forma; otras veces interesa resaltar, algunas componentes o parámetros, de una señal. Un caso de gran importancia y que aparece frecuentemente en procesamiento de señales es el problema de deconvolución:

Una gran variedad de procesos físicos pueden ser descriptos como un sistema donde una señal fuente es perturbada, para producir un output observable:



Ciertas hipótesis sobre el sistema, permiten representarlo, como un operador que actúa sobre la señal fuente, mediante la operación de convolución:

$$X = W * S$$

El proceso de deconvolución consiste entonces en separar las componentes W y S, de la señal observada X.

Un gran número de técnicas, han sido desarrolladas con este objeto, teniendo en cuenta en cada caso, las características del problema real, y usando diversas herramientas matemáticas, extraídas de diferentes campos como Teoría de Procesos Estocásticos, Análisis de Fourier y Algebra lineal.

Las técnicas que hacen el análisis de la señal a través de su transformada de Fourier, son agrupadas generalmente bajo el nombre de técnicas de 'dominio frecuencial', en contraposición a las de 'dominio temporal' que trabajan directamente, con los datos.

En 1978, Wiggings, presenta una nueva técnica de deconvolución en el dominio del tiempo, 'Deconvolución por Mínima Entropía' (MED), que ha representado un importante progreso en esta área.

Dos ventajas importantes pueden destacarse en el MED sobre los métodos tradicionales. Primero, que no supone fuertes hipótesis sobre el modelo físico, lo que aumenta su campo de aplicabilidad. Segundo, su estabilidad en presencia de ruido aditivo.

El operador de deconvolución producido por el MED se obtiene a través de un algoritmo iterativo, altamente no lineal.

En este trabajo, se propone un nuevo método de deconvolución, obtenido mediante una modificación del criterio de simplicidad Varimax (norma utilizada por el MED) que preserva las propiedades del MED.

Este nuevo criterio (norma D), se define para el caso de una sola señal de entrada y se generaliza al caso de múltiples señales.

Una extensa simulación realizada, muestra que la norma D resulta, una medida de simplicidad de mayor eficacia que la norma Varimax, para el modelo planteado, donde la señal deseada es una serie de pulsos de amplitud y ubicación arbitrarias.

Una de las más importantes ventajas del nuevo criterio propuesto, en contraposición con el MED, es que a partir de la norma D se deriva un algoritmo no iterativo para el cálculo del filtro de deconvolución. Este hecho es de una gran importancia, ya

que el algoritmo MED, supone en cada iteración la inversión de una matriz, cuyo orden equivale a la longitud del filtro, mientras que el algoritmo resultante a través de la norma D, solo requiere la inversión de una única matriz, del mismo orden.

Por otro lado, los resultados obtenidos muestran que, el filtro obtenido por el nuevo algoritmo produce un output de mayor simplicidad Varimax que el obtenido por el MED. Este hecho hace que el algoritmo D represente un nuevo método de cálculo para el MED tradicional de menor costo computacional y mayor eficiencia.

Se incluye un capítulo donde se exponen las pruebas numéricas realizadas, haciendose un análisis comparativo de ambos métodos.

CAPITULO I

1. Metodología

La forma más frecuente de trabajar en procesamiento de señales, consiste en el planteo de modelos matemáticos, para los problemas físicos considerados.

Varias son las condiciones que se deben requerir de estos modelos. En primer lugar, su resolución teórica, o sea el modelo debe ser planteado de tal forma, que haya existencia de soluciones.

Esta propiedad sin embargo, no es suficiente; las soluciones deben ser computables. O sea que deben darse algoritmos, que permitan a partir de los datos, obtener efectivamente, generalmente con el uso de computadores digitales, los resultados. Y por último, y esta condición, la mayoría de las veces es esencial, los algoritmos deberán ser suficientemente óptimos, de forma tal que el tiempo de proceso, no los haga impracticables.

En el planteo de un modelo, muchas veces, para que sea posible su resolución, es necesario imponer restricciones matemáticas, que luego resultarán en la interpretación, en hipótesis físicas sobre el problema. En la medida en que las hipótesis, se correspondan con la realidad, los resultados serán, más o menos satisfactorios.

Un claro ejemplo de esta situación lo constituye el problema de deconvolución, en el modelo $X = W * S$, donde X son los datos

y W y S son desconocidas y se las desea estimar.

En general, sin hipótesis sobre W y S , el problema no tiene unicidad y no podrá elegirse una solución adecuada.

En Deconvolución Predictiva, por ejemplo, (Robinson, 1967), fuertes hipótesis, son impuestas sobre W y S para llegar a una solución.

2. Señales

Una señal es representada matemáticamente, como una función de una o más variables. En el caso de una variable, es una convención referirse a ella, como una variable temporal, aunque en muchos casos no lo sea.

Según que la variable tome sus valores en un conjunto discreto, o en el continuo numérico, las señales se clasifican en discretas y continuas respectivamente.

Las señales discretas se obtienen muchas veces por 'muestreo' de una señal continua. Esto es, se elige un intervalo de tiempo Δt y se define:

$$x_n = f(n \Delta t)$$

donde f es la señal continua y la sucesión $\{x_n\}$ su muestra.

Este es un paso necesario para preparar una señal, para ser procesada, en un computador digital.

Un importante teorema conocido como 'The sampling theorem', debido a Shannon (1949) y más tarde generalizado a procesos estocásticos estacionarios (Balakrishnan, 1957) establece una relación entre la señal discreta y la continua, y da una cota superior para la elección del intervalo de muestreo, con objeto de que no se pierda información, para el caso de señales de banda limitada (soporte de la transformada de Fourier, compacto).

En lo que sigue se considerarán solo señales discretas. Una señal será representada en la forma:

$$X = X(t) \quad \text{ó} \quad X = X_t$$

o también

$$x = x(t) \quad \text{ó} \quad x = x_t, \quad t \in Z$$

Según que el modelo con que se trabaje sea, determinístico o estocástico, X_t , representará para cada $t \in Z$, un número real o una variable aleatoria.

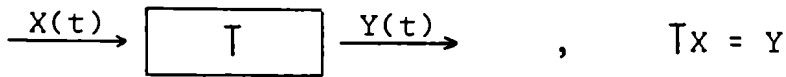
Llamaremos Energía de la señal X a

$$\epsilon(X) = \sum_k |X(k)|^2$$

que puede ser finita o infinita.

3. Sistemas

Un sistema es representado como una transformación T , que a cada señal X , le hace corresponder otra señal Y :



Un sistema se dirá lineal si verifica:

$$T(aX + bY) = a TX + b TY$$

para cada par de señales X, Y y cada par de números a, b . (Aquí las operaciones entre señales y números se entienden como operaciones coordenada a coordenada).

3.1. *Sistemas invariantes en el tiempo.*

Muchos sistemas físicos tienen la propiedad, de no modificarse mayormente, durante el transcurso de un cierto intervalo de tiempo.

Esta característica hace que, cuando el sistema es perturbado, por dos excitaciones iguales, pero en distinto tiempo, las respuestas sean las mismas, con el consiguiente desplazamiento en el tiempo.

Esta propiedad llamada, invariancia en el tiempo, se traduce matemáticamente, diciendo que si τ_k es el operador translación definido sobre las señales por

$$\tau_k X = Y \quad \text{con} \quad Y(t) = X(t+k)$$

entonces \mathbb{T} es invariante en el tiempo si y sólo si \mathbb{T} conmuta con τ_k para todo $k \in \mathbb{Z}$.

En símbolos

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) (\mathbb{T} \circ \tau_k = \tau_k \circ \mathbb{T})$$

3.2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Sea ahora δ la señal definida por:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

y sea para cada $k \in \mathbb{Z}$, δ_k la señal

$$\delta_k(t) = \delta(t-k) = \tau_{-k}(\delta)(t)$$

δ es llamada comunmente, señal de impulso unitario.

Si se restringe adecuadamente el conjunto de señales (ver Apéndice I) se puede probar que una señal X puede ser representada por:

$$X = \sum_k X(k) \delta_k$$

o sea

$$X(t) = \sum_k X(k) \delta_k(t) = \sum_k X(k) \delta(t-k)$$

Si \mathbb{T} es un sistema lineal

$$\mathbb{T}X = \mathbb{T}\left(\sum_k X(k) \delta_k\right) = \sum_k X(k) (\mathbb{T}(\delta_k))$$

si además \mathbb{T} es invariante en el tiempo

$$T(\delta_k) = T(\tau_{-k}(\delta)) = (\tau_{-k} \circ T)(\delta) = \tau_{-k}(T\delta)$$

llamando $h = T\delta$ resulta

$$Y = TX = \sum_k X(k) \tau_{-k}(h)$$

o sea

$$Y(t) = \sum_k X(k) h(t-k)$$

o también

$$Y = TX = X * h$$

Lo que muestra que los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, pueden ser representados, por medio de la convolución.

La sucesión $h = T\delta$ es llamada generalmente, respuesta al impulso unitario, o función de Green del sistema.

3.3. *Sistemas Causales*

Aquellos sistemas físicos, con la propiedad que la salida TX , en un instante t , sólo depende de los valores de la señal X anteriores o iguales a t son llamados causales.

O sea, T es causal si y sólo si cada vez que X e Y son dos señales que cumplen $X(s) = Y(s)$ para $s \leq t$ entonces $(TX)(s) = (TY)(s)$ para $s \leq t$.

Para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, es de esperar que la condición de causalidad se pueda expresar en términos de $h = T\delta$.

En efecto, vale que

\mathcal{T} es causal si y sólo si $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$

(Ver Apéndice I)

3.4. Sistemas Estables

Otra hipótesis que se hace sobre los sistemas es la de estabilidad, en el sentido que la respuesta a una señal acotada, debe ser acotada, o sea

$$\text{si } \|X\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |X(n)|$$

diremos que \mathcal{T} es estable si y sólo si para cada señal X que cumple

$$\|X\|_{\infty} < 1$$

se cumple también

$$\|\mathcal{T}X\|_{\infty} < M$$

donde M es una constante que no depende de X . ($M < +\infty$)

o sea \mathcal{T} es estable si

$$\sup_{\|X\|_{\infty} < 1} \|\mathcal{T}X\|_{\infty} < +\infty$$

Para sistemas lineales e invariantes en el tiempo la condición de estabilidad se traduce en:

$$\mathcal{T} \text{ es estable si y sólo si } \sum_k |h(k)| < +\infty$$

(Ver Apéndice I)

4. Consideraciones Finales

Debido al hecho que la operación de convolución es conmutativa:

$$(x * h)(n) = \sum_k x(k) h(n-k) = \sum_j h(j) x(n-j) = (h * x)(n)$$

el sistema representado por h , puede intercambiarse por el de la señal x , y considerarse que h es la señal que entra al sistema representado por x .

Por otro lado, teniendo en cuenta que los sistemas pueden ser representados por sucesiones, los conceptos de estabilidad y causalidad serán referidos también como propiedades de señales quedando claro, que son propiedades del sistema que representan.

Así una señal X , es causal si y sólo si

$$X(n) = 0 \quad (n < 0)$$

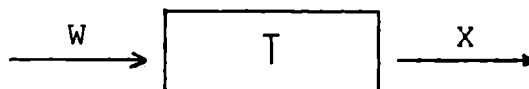
y estable si y sólo si

$$\sum_n |X(n)| < +\infty$$

CAPITULO II

1. Deconvolución

Nos interesa estudiar ahora el caso de un sistema lineal, invariante en el tiempo, causal y estable que es excitado por una señal causal, de energía finita, que ha sido obtenida por muestreo de una señal continua de banda limitada



Del hecho que la señal tenga energía finita se desprende inmediatamente que es amortiguada (Ver Apéndice I) y el sistema puede ser representado por una sucesión $\{q_u\}$ con las propiedades

$$q(u) = 0 \quad (u < 0) \quad (\text{causalidad})$$

$$\sum_{u>0} |q(u)| < \infty \quad (\text{estabilidad})$$

$$X = W * q$$

con $W(n) = 0 \quad (n < 0)$.

En el párrafo siguiente se describe un problema real, donde aparece la necesidad de aplicar este modelo. El ejemplo se ha simplificado convenientemente por razones de brevedad y claridad en la exposición. La situación real es bastante más

compleja y varios pasos anteriores deben ser realizados, como correcciones dinámicas y estáticas sobre los datos y eliminación de ruidos, antes de aplicar la deconvolución.

Una descripción detallada de esta aplicación, así como de otras, en distintas áreas puede encontrarse en Oppenheim (1978).

2. Deconvolución en Sísmica

En prospección geofísica se desea extraer información del subsuelo, con objeto de estudiar la naturaleza y conformación de los distintos estratos o capas sedimentarias.

Uno de los métodos comunmente empleados, consiste en producir una perturbación (generalmente una explosión) en la superficie, para luego recoger, mediante sensores apropiados (geófonos) la respuesta a esta excitación.

La ondícula producida por la explosión viaja a través de la tierra, produciendose reflexiones en las interfases entre las capas sedimentarias. La suma de estas reflexiones es registrada por los geófonos en la superficie.

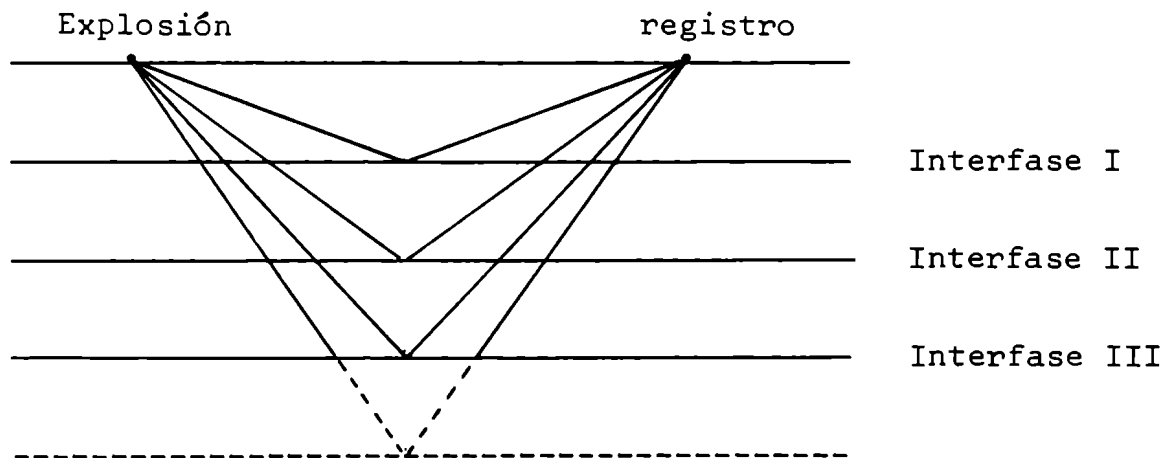


Fig. 1

La onda que llega a cada interfase se ha modificado, por un efecto de filtrado producido por la tierra. Se hace, sin embargo la hipótesis simplificatoria de que en cada interfase, arriba la misma excitación, que llamaremos W , diferente de la producida originalmente por la explosión en la superficie.

Al reflejarse la onda W en cada horizonte geológico, queda multiplicada por un coeficiente, llamado coeficiente de reflexión (q_n) que depende de las propiedades físicas de los medios que separa dicha interfase:

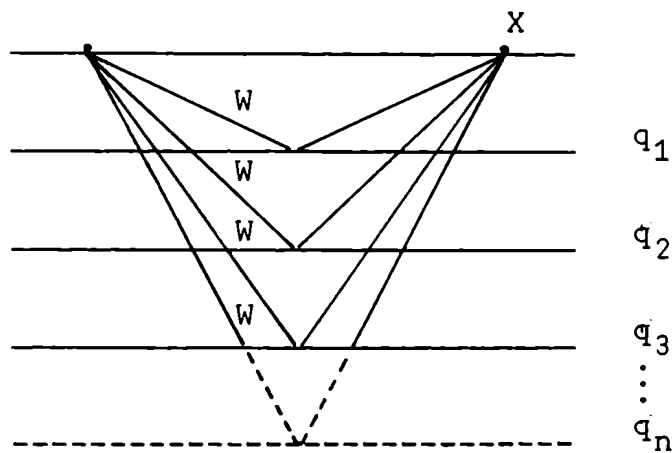


Fig. 2

Cuanto mayor sea la profundidad de la interfase, la reflexión correspondiente a ella $q_k \cdot W$ arribará a la superficie con más retraso. Como consecuencia de este hecho, finalmente el registro X que se hace en la superficie, estará compuesto por la suma de todas las reflexiones, cada una con un corrimiento en el tiempo, debido a la profundidad de la interfase.

O sea

$$X = \tau_{-1}(q_1 \cdot W) + \tau_{-2}(q_2 \cdot W) + \dots + \tau_{-N}(q_N \cdot W)$$

recordando que $\tau_k(W)(t) = W(t+k)$

resulta

$$X(t) = q_1 W(t-1) + q_2 W(t-2) + \dots + q_N W(t-N)$$

o sea $X = q * W$

Gráficamente

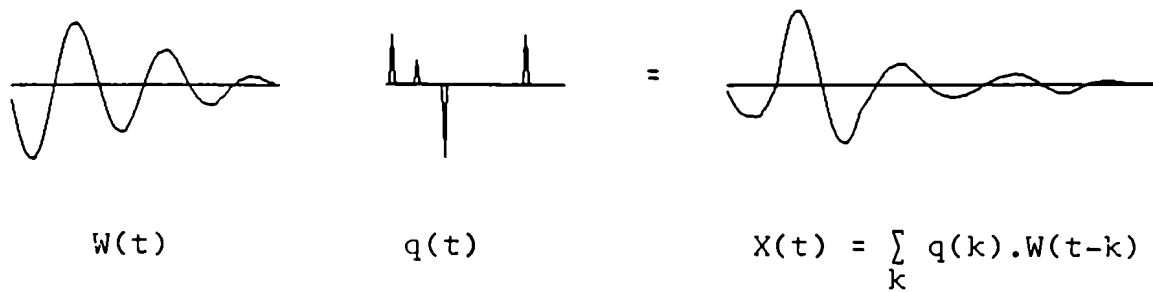


Fig. 3

La señal X obtenida es el único dato que se conoce. El objetivo es estimar W y q .

Todas las hipótesis presupuestas al modelo, como causalidad, invariancia, etc. son consistentes con la realidad física del problema.

3. Deconvolución Wiener

Se describirá ahora una solución ya clásica al problema planteado en §1 usando un enfoque estocástico. (Ver, por ejemplo Robinson y Treitel, 1980).

Supondremos el modelo

$$X = W * q$$

donde $\{q(t), t \geq 0\}$ es un ruido blanco

$\{W(t), t \geq 0\}$ es una sucesión numérica de fase mínima; de lo cual resulta el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ debilmente estacionario.

Por ruido blanco entendemos un proceso estocástico L^2 de media cero y ortogonal. (Ver Ash, 1975).

El concepto de fase mínima (Oppenheim y Shafer, 1975), para una sucesión $\{a_k\}_{k \geq 0}$ puede ser definido en términos de la transformada Z de \underline{a} :

Para cada sucesión $a = \{a_u\}_{u \geq 0}$ su transformada Z se define por

$$Z_a(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, \quad z \in C$$

entonces la sucesión $\{a_k\}_{k \geq 0}$ se dice de fase mínima si y sólo si

- 1) el radio de convergencia de Z_a es > 1
- 2) Z_a no tiene ceros en $D = \{z \in C / |z| < 1\}$

Por autocorrelación de una sucesión $\{a_k\}_{k \geq 0}$ entendemos, la sucesión

$$\psi_a(t) = \sum_{k \geq 0} a_k a_{k+t} \quad (t \in \mathbb{Z}) .$$

en caso que esta suma sea finita.

Sobre el proceso $\{X_u, u \geq 0\}$ se hacen ciertas hipótesis de ergodicidad:

Sea $\{x_n\}_{n \geq 0}$ una muestra obtenida del proceso $\{X_n, n \geq 0\}$.

1) Ergodicidad en la media:

Se supone que

$$\mu = E(X_n) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T x_k \quad \forall n$$

2) Ergodicidad en la autocorrelación:

Se supone que $\forall n$

$$\phi_x(t) = E(X_n \cdot X_{n+t}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T x_k \cdot x_{k+t}$$

Con estas hipótesis resulta que si se halla la autocorrelación del proceso X en

$$X = W * q$$

o sea

$$X_n = \sum_{k \geq 0} W_k q_{n-k}$$

es

$$\phi_x(t) = E(X_k \cdot X_{k+t}) = \psi_w(t) \sigma_q^2 = \left(\sum_{k \geq 0} W_k W_{k+t} \right) \sigma_q^2$$

donde σ_q^2 es la varianza del ruido blanco q , ψ_w es la autocorrelación de W y $\phi_x(t)$ la función de covarianza del proceso X .

Usando ahora la hipótesis de ergodicidad en la autocorrelación queda que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{k \geq 0} x_k x_{k+t} = \phi_w(t) \sigma_q^2 \quad \text{o sea}$$

que salvo un factor constante, se puede a partir de los datos $x = \{x_k\}_{k \geq 0}$ obtener la autocorrelación de W .

Una estimación de W puede ser obtenida, mediante una aplicación de la transformada de Hilbert, usando la hipótesis de fase mínima. (Ver Robinson y Treitel, 1980).

Nos interesa el caso en que se quiere estimar q .

Vimos hasta ahora que a partir de los datos $x = \{x_k\}$, se puede hallar la autocorrelación de W . Se verá ahora que a partir de esta autocorrelación puede calcularse q con una buena aproximación.

En la fórmula

$$x_t = \sum_{k \geq 0} W_k q_{t-k} \quad \text{o sea} \quad x = W * q$$

q podrá ser obtenida si se conoce la inversa de W por convolución.

La existencia de W^{-1} queda garantizada por ser de fase mínima W pues $Z_w(z) = \sum_{k \geq 0} W_k z^k$ no tiene ceros en D .

Luego $G(z) = \frac{1}{Z_w(z)}$ es analítica en una región que contiene a D y no se anula en D .

Luego su antitransformada g es W^{-1} ya que

$$Z_w * g = Z_w \cdot Z_g = Z_w \cdot \frac{1}{Z_w} = 1$$

Luego $w * g = \delta$.

Observese que además W^{-1} resulta de fase mínima.

El problema de hallar la inversa de W puede ser planteado en términos de hallar una inversa aproximada, o sea una sucesión $(b_0, b_1, \dots, b_N, 0, \dots)$ de forma que

$$I(b) = \|w * b - \delta\|_2^2 \text{ sea mínima.}$$

Derivando I respecto de los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_N se obtienen las ecuaciones normales, que son de la forma:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_N \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_N & \Gamma_{N-1} & \dots & \Gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

o sea $Rb = e_1$

donde $\Gamma_k = \psi_w(k)$

por tanto $b = R^{-1} e_1$

La no singularidad de R está garantizada por el hecho que W no es idénticamente nula.

Observese que la solución de este sistema viene dada en función solo de la autocorrelación de W.

Se prueba además que el error cometido por restringir la longitud de b a N+1 o sea

$$E_N = \|W * b^N - \delta\|_2$$

(donde b^N es la solución para long N+1)

tiene la propiedad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0 \quad \text{si y sólo si}$$

W es de fase mínima (Claerbout y Robinson, 1964)

CAPITULO III

1.. Deconvolución por Mínima Entropía (MED)

Un enfoque nuevo e interesante para el problema de deconvolución lo constituye la técnica desarrollada por Wiggings (1978).

Ooe y Ulrych (1979), Oldenberg, Levy y Whittall (1981) y Ulrych y Walker (1982) han considerado nuevamente este método en trabajos aparecidos recientemente.

Cabe destacar sobre todo el trabajo de Ooe y Ulrych (1979) quienes mediante una modificación en el MED, que consiste en la incorporación de una transformación exponencial en el algoritmo (MEDEX) han logrado una mejor definición en los resultados pero a un costo computacional bastante alto.

Las ventajas del MED sobre los métodos tradicionales, consiste en que no hace fuertes hipótesis sobre el modelo. Por ejemplo no se hace la hipótesis de fase mínima sobre la componente W ni la de ruido blanco para la sucesión q .

El MED solo supone la 'simplicidad' de la señal deseada, usando un concepto de Análisis Multivariado.

2. Planteo del modelo y resolución

El MED considera varios sistemas que ~~son~~ perturbados por la misma señal de entrada.

Todas las sucesiones, ya sea las que representan a la señal o a los sistemas se considerarán que son nulas a partir de un valor del índice en adelante. Si este valor se ha elegido suficientemente grande, el error por truncación, cometido no es significativo. A partir de esto, las señales y sistemas pueden ser pensados como vectores de finitas coordenadas.

Consideremos entonces X_1, \dots, X_N , N señales observadas.

Para cada i , ($i = 1, \dots, N$) representemos X_i por

$$X_i = W * q_i + \eta_i$$

o sea cada señal es la convolución de una señal fuente común W con una señal de disturbancia q_i , contaminada además con un ruido aditivo η_i . Aquí X_i, q_i, η_i ($i = 1, \dots, N$) y W representan vectores de longitud finita.

Supongamos ahora que se convolucionan cada señal X_i con una misma señal f , que a partir de ahora llamaremos filtro de deconvolución o simplemente filtro, para dar una salida Y_i :

$$Y_i = f * X_i = (f * W) * q_i + f * \eta_i \quad i = 1, \dots, N$$

Si q_i ($i = 1, \dots, N$), son las señales deseadas, el filtro debe tener la propiedad de que el término $(f * W) * q_i$ se aproxime a q_i en algún sentido, lo cual se lograría en el caso que f represente una inversa aproximada de W .

Además es deseable que el filtro tenga la característica de supresión de ruido, o sea eliminar el sumando $f * \eta_i$.

La suposición del MED es que la salida obtenida Y_i después de aplicar el filtro debe ser de estructura 'simple' o 'parsimoniosa'.

El concepto de simplicidad o parsimonia, para una matriz de datos $A = (a_{ij})$ es el punto central de Análisis de Factores en Análisis Multivariado.

Una descripción breve de una matriz de estructura simple, sería, que es una matriz en que 'la mayor parte' de sus coeficientes son cercanos a cero, salvo unos pocos de amplitud y ubicación arbitraria.

El problema de precisar este concepto en términos matemáticos rigurosos, llevó más de veinte años de intentos hasta que una solución satisfactoria fué hallada (Carrol, 1953).

La solución consistió en definir una 'norma' para la matriz, de forma tal que mida o defina su grado de simplicidad.

Después de esto una gran variedad de normas o criterios fueron considerados (Harman, 1960).

El problema de, dado un conjunto infinito de matrices, que varían con ciertos parámetros, elegir aquella de mayor simplicidad, se convierte ahora en maximizar o minimizar una norma sobre dicho conjunto. De aquí se deduce el hecho de que la norma seleccionada, deba tener la propiedad, que de ella se derive un algoritmo de computación satisfactorio.

Wiggings (1978) utiliza la norma o criterio Varimax, que es en realidad, una modificación de la norma Varimax propuesta por Kaiser (1958), definida para una matriz $A = (a_{ij})$ por:

$$V(A) = \sum_i V_i(A)$$

con

$$V_i(A) = \sum_j \left[\frac{a_{ij}^4}{(\sum_k a_{ik}^2)^2} \right]$$

En términos estadísticos, para cada i , $V_i(A)$ representa la varianza de los cuadrados de la fila i normalizada.

En el MED, el criterio Varimax se aplica al Output $Y = (y_{ij})$, donde y_{ij} representa la j -ésima coordenada del vector Y_i . O sea, se desea maximizar $V(Y)$ sobre todos los filtros $f = (f_1, \dots, f_\ell)$ de igual longitud.

Derivando $V(Y)$ respecto de los coeficientes del filtro e igualando a cero, se obtiene un conjunto de ecuaciones de forma:

$$R(f) \cdot f = g(f)$$

donde $R = R(f)$ es una matriz Toeplitz y $g = g(f)$ es un vector, cuyos coeficientes dependen de f .

Eligiendo una solución inicial

$$f^0 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

se genera un algoritmo iterativo

$$f^{n+1} = [R(f^n)]^{-1} \cdot g(f^n)$$

el cual permite obtener una solución satisfactoria.

3. Interpretación geométrica del MED

3.1. Norma Varimax (caso 1 muestra)

Sea $Y \in \mathbb{R}^m$, $Y \neq 0$ y considerese la norma Varimax

$$V(Y) = \sum_i \frac{y_i^4}{\left(\sum_k y_k^2\right)^2} \quad (*)$$

Si notamos por $\|Y\| = \left(\sum_k y_k^2\right)^{1/2}$, la norma euclídea de Y , la expresión (*) queda:

$$V(Y) = \sum_i \left(\frac{y_i}{\|Y\|}\right)^4$$

La norma V tiene la propiedad de Homogeneidad:

$$V(\lambda Y) = V(Y) \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0$$

Además V puede factorizarse como composición de las transformaciones

$$(y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{T_1} \left[\left(\frac{y_1}{\|Y\|}\right)^2, \dots, \left(\frac{y_m}{\|Y\|}\right)^2 \right]$$

$$(y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{T_2} \sum_i y_i^2 = \|Y\|^2$$

Analícemos el efecto de T_1 sobre un vector Y .

Considerese

$$H = \{(x_1, \dots, x_m) / \sum x_i = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \text{ } i = 1, \dots, m\}$$

Luego la transformación T_1 aplica cualquier vector de la recta generada por Y , en un único vector de la región H

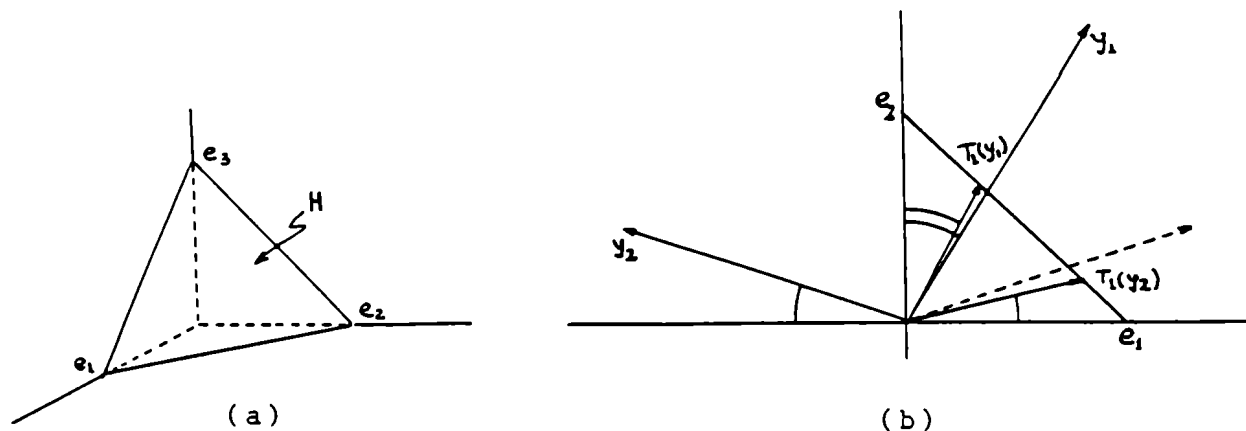


Fig. 4 (a) H para $m = 3$
 (b) Efecto de T_1 , $m = 2$

ya que
$$\sum_i \left(\frac{y_i}{\|Y\|}\right)^2 = \frac{1}{\|Y\|^2} \sum_i y_i^2 = \frac{\|Y\|^2}{\|Y\|^2} = 1$$

y además
$$\left(\frac{y_i}{\|Y\|}\right)^2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Observese que esta transformación modifica ligeramente los ángulos que forma el vector con los ejes coordenados, debido a que sus coordenadas estan elevadas al cuadrado.

La transformación T_2 definida sobre H, alcanza su mínimo en el baricentro $B = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$, y su máximo en los vértices de H, $\{e_1, \dots, e_m\}$ y crece cuando crece la distancia de Y al baricentro B. O sea que esta transformación mide para un vector y, su lejanía a B o equivalentemente su proximidad a alguno de los vértices.

Luego la simplicidad de un vector, según el criterio Varimax, aumenta, cuando mayor es su proximidad al conjunto de vértices.

Teniendo en cuenta la propiedad de Homogeneidad de V , la simplicidad para un vector cualquiera de R^m , no nulo está dada en función de los ángulos que forman, la recta definida por el vector, con los ejes coordenados, siendo mayor la simplicidad cuando menor es el ángulo con alguno de los ejes o mayor el valor absoluto de su coseno.

Resulta además la acotación

$$\frac{1}{m} < V(Y) < 1 \quad , \quad Y \in R^m \quad , \quad Y \neq 0 .$$

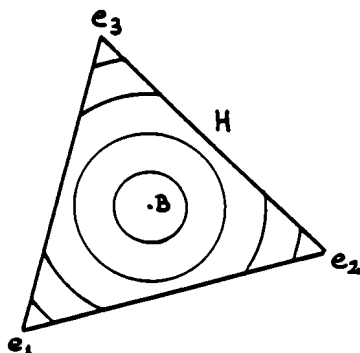


Fig. 5 Curvas de nivel de la transformación T_2 ($m = 3$)

3.2. Norma Varimax y Deconvolución

Sean ahora X, f e Y vectores de longitud n, l y m = n+l-1 respectivamente y supongamos que

$$Y = X * f$$

$$\text{o sea } y_k = \sum_{s=1}^l f_s x_{k+1-s} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (**)$$

donde $x_i = 0$ si $i \notin [1, n]$

La ecuación (**) escrita en notación matricial es

$$(y_1, \dots, y_m) = (f_1, \dots, f_l) \left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & \\ & & x_n & \text{cero} \\ & & & \\ \text{cero} & & & \\ & x_1 & x_2 & \\ & & & x_n \end{array} \right)$$

o sea $Y = f.X$ donde X es una matriz de $[l \times m]$.

Si V_k es la k-ésima fila de la matriz X resulta

$$Y = \sum_{k=1}^l f_k V_k \quad \text{con}$$

$$V_k = \underbrace{(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)}_m$$

con lo que Y resulta una combinación lineal de los vectores V_k donde los coeficientes son los elementos del filtro.

Los vectores V_k son linealmente independientes (Ver Apéndice II), luego generan un subespacio lineal W de dimensión l en R^m .

Por tanto cada filtro f no nulo genera un vector Y cuya simplicidad mide la norma V :

$$\begin{array}{ccccc} f & \xrightarrow{*} & Y & \xrightarrow{} & V(Y) \\ R^l - \{0\} & \rightarrow & W & \rightarrow & R. \end{array}$$

3.3. Equivalencia de Criterios

Un criterio de simplicidad para un conjunto de vectores $A \subset \mathbb{R}^m$ puede definirse como una función

$$C: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Diremos que dos criterios C_1 y C_2 son equivalentes sobre A si y sólo si

$$\forall x, y \in A \quad C_1 x \leq C_1 y \Leftrightarrow C_2 x \leq C_2 y$$

o también si

$$\forall x, y \in A \quad C_1 x \leq C_1 y \Leftrightarrow C_2 x \geq C_2 y$$

Es claro que dos criterios equivalentes deben tener sus máximos y sus mínimos en los mismos vectores, por lo que la elección de uno u otro dependerá de la complejidad algorítmica que de ellos se deriven.

En particular si

$$C_1 = aC_2 + b \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

C_1 y C_2 resultan equivalentes.

Por ejemplo, la norma Varimax y la norma $\|T_1(Y) - B\|^2$ (B baricentro de H) son equivalentes ya que

$$\|T_1(Y) - B\|^2 = \sum_i \left[\left(\frac{y_i}{\|Y\|} \right)^2 - \frac{1}{m} \right]^2 = \sum_i \left(\frac{y_i}{\|Y\|} \right)^4 - \frac{2}{m} \sum_i \left(\frac{y_i}{\|Y\|} \right)^2 + \sum_i \frac{1}{m^2}$$

o sea $\|T_1(Y) - B\|^2 = V(Y) - \frac{1}{m}$.

En el párrafo siguiente se definirá un nuevo criterio de simplicidad.

4. Norma D

El análisis hecho para la norma Varimax sugiere entonces medir la simplicidad de un vector Y en función de la distancia de Y a los puntos e_1, \dots, e_{2m} , donde

$$e_k = (0, \dots, \underset{k}{1}, \dots, 0) \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$e_{m+k} = (0, \dots, \underset{k}{-1}, \dots, 0)$$

Definimos entonces

$$D_1(Y) = \text{Mín}_{1 \leq i \leq 2m} \left\| \frac{Y}{\|Y\|} - e_i \right\|^2$$

donde la normalización del vector Y se ha puesto para conservar la homogeneidad.

Ahora

$$\left\| \frac{Y}{\|Y\|} - e_k \right\|^2 = 2 - 2\left(\frac{y_k}{\|Y\|}\right) \quad 1 \leq k \leq m$$

y

$$\left\| \frac{Y}{\|Y\|} - e_{m+k} \right\|^2 = 2 + 2\left(\frac{y_k}{\|Y\|}\right) \quad 1 \leq k \leq m$$

Luego

$$\text{Mín}_{1 \leq i \leq 2m} \left\| \frac{Y}{\|Y\|} - e_i \right\|^2 = 2\left(1 - \text{Máx}_{1 \leq k \leq m} \frac{|y_k|}{\|Y\|}\right)$$

por lo que si definimos

$$D(Y) = \text{Máx}_{1 \leq k \leq m} \frac{|y_k|}{\|Y\|} \quad \text{es}$$

$$D_1(Y) = 2 - 2D(Y)$$

y entonces D_1 y D resultan criterios equivalentes en el sentido definido anteriormente.

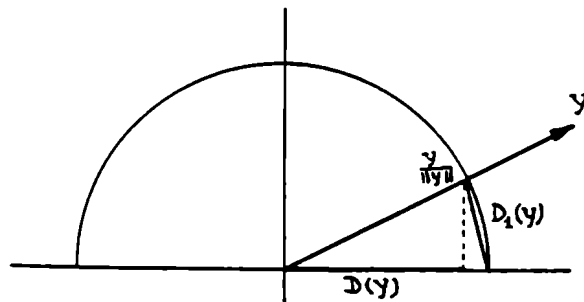


Fig. 6

Norma D y D_1 ($m = 2$)

Nótese que $D(Y)$ representa el máximo de los valores absolutos de los cosenos de los ángulos (Y, e_k) , ya que

$$|\cos(Y, e_k)| = \frac{|\langle Y, e_k \rangle|}{\|Y\| \|e_k\|} = \frac{|y_k|}{\|Y\|}$$

donde \langle , \rangle representa el producto escalar en el espacio euclídeo R^m .

Resulta además

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \leq D(Y) \leq 1, \quad Y \in R^m, \quad Y \neq 0.$$

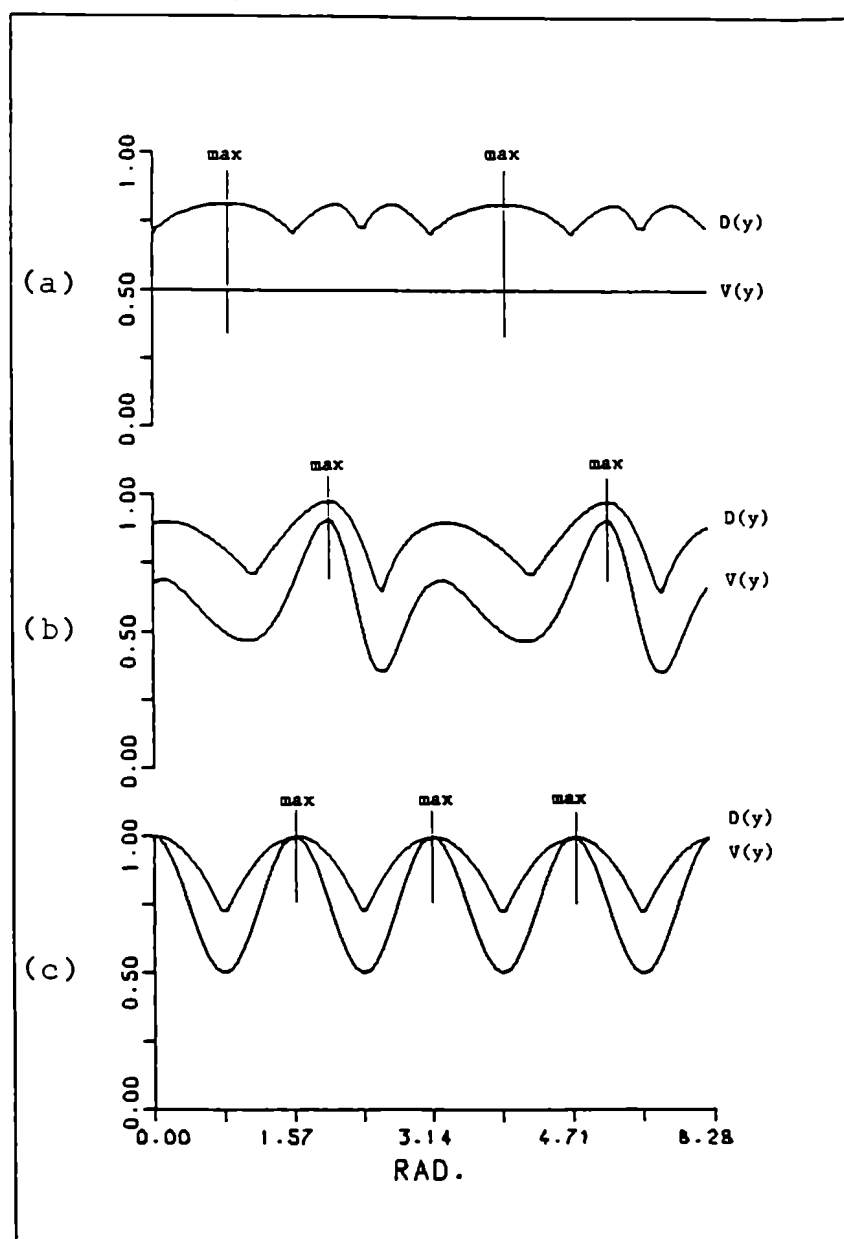


Fig. 7

Comportamiento de las normas D y V sobre los vectores $Y = f * X$ con $f = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $X \in \mathbb{R}^2$, tales que (a) $X = (1, 1)$, (b) $X = (-1, -2)$, (c) $X = (100, 1)$

4.1. Norma D y Deconvolución

Aplicando el criterio D al problema de deconvolución para el caso de una sola muestra; se trata de maximizar $D(Y)$ con

$$Y = f * X$$

sobre todos los filtros $f = (f_1, \dots, f_l)$, $f \neq 0$

Ahora

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathbb{R}_*^l} D(Y) &= \sup_{f \in \mathbb{R}_*^l} \left(\max_i \frac{|y_i|}{\|Y\|} \right) = \\ &= \max_i \left(\sup_{f \in \mathbb{R}_*^l} \frac{|y_i|}{\|Y\|} \right) \quad (***) \end{aligned}$$

Como además vale la propiedad que f es un máximo para $\frac{|y_i|}{\|Y\|}$ si y sólo si f es un extremo (máximo o mínimo) para $\frac{y_i}{\|Y\|}$, entonces la ecuación (***) es equivalente a hallar los extremos de $\frac{y_i}{\|Y\|}$, para cada i , y luego elegir el máximo sobre los i .

El cálculo de extremos se realiza entonces derivando respecto a los coeficientes f_k del filtro, para cada i fijo e igualando a cero.

O sea

$$\frac{\partial}{\partial f_k} \left(\frac{y_i}{\|Y\|} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

Teniendo en cuenta que

$$y_i = \sum_s f_s x_{i-s+1} \quad y \quad \|Y\| = \left(\sum_h y_h^2 \right)^{1/2}$$

entonces

$$\frac{\partial y_i}{\partial f_k} = x_{i-k+1} \quad y$$

$$\frac{\partial \|Y\|}{\partial f_k} = \|Y\|^{-1} \sum_h y_h \frac{\partial y_h}{\partial f_k} = \|Y\|^{-1} \sum_h y_h x_{h-k+1}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f_k} \left(\frac{y_i}{\|Y\|} \right) &= (x_{i-k+1} \|Y\| - \|Y\|^{-1} \left(\sum_h y_h x_{h-k+1} \right) y_i) \|Y\|^{-2} = \\ &= \|Y\|^{-1} (x_{i-k+1} + y_i \|Y\|^{-2} \left(\sum_h \sum_s f_s x_{h-s+1} x_{h-k+1} \right)) \end{aligned}$$

igualando a cero e intercambiando sumatorias

$$\frac{y_i}{\|Y\|^2} \sum_s f_s \sum_h (x_{h-s+1} x_{h-k+1}) = x_{i-k+1} \quad k = 1, \dots, \ell$$

llamando Γ_{s-k} a la segunda sumatoria queda

$$\frac{y_i}{\|Y\|^2} \sum_s f_s \Gamma_{s-k} = x_{i-k+1} \quad k = 1, \dots, \ell$$

que en notación matricial es

$$\frac{y_i}{\|Y\|} R f = X^i$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{\ell-1} \\ \Gamma_1 & \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{\ell-2} \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ \Gamma_{\ell-1} & \Gamma_{\ell-2} & \dots & \Gamma_0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de autocorrelación de la muestra, y X^i es el vector

$$X^i = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-(\ell-1)}) \quad \text{con}$$

$$x_k = 0 \quad \text{si} \quad k \notin [1, n]$$

4.2. Caso N-muestras

La Norma Varimax para el caso de múltiples inputs, maximiza la suma de las varimax de cada output.

Para el caso de la norma D esta generalización deriva en un algoritmo, no eficiente computacionalmente.

Sin embargo usando la idea implícita en la norma kurtosis, la norma D puede ser generalizada al caso de múltiples inputs, obteniéndose un algoritmo no iterativo de fácil computación.

Considerense entonces N señales $Y_i = (y_{ij})$, $i = 1, \dots, N$, de longitud m ($j = 1, \dots, m$) donde

$$y_{ij} = \sum_k f_k x_{i \ k-j+1}$$

La norma kurtosis de la matriz $Y = (y_{ij})$ se define por

$$K(Y) = \sum_i \sum_j \left(\frac{y_{ij}}{\|Y\|} \right)^4$$

donde $\|Y\| = \left(\sum_{i,j} y_{ij}^2 \right)^{1/2}$ (Ooe y Ulrych, 1979) o sea $K(Y)$ es la norma Varimax aplicada al vector cuyas componentes son las de las filas de la matriz Y colocadas consecutivamente, o sea

$$(y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{N1}, \dots, y_{Nm})$$

Si se aplica la norma D a este vector queda

$$D(Y) = \text{Máx}_{i,j} \frac{|y_{ij}|}{\|Y\|}$$

finalmente se trata de hallar:

$$\text{Máx}_{i,j} \left(\text{Sup}_{f \in \mathbb{R}_*^l} \frac{|y_{ij}|}{\|Y\|} \right)$$

4.2.1. Ecuaciones normales para la norma D

$$y_{ij} = \sum f_k x_{ij-k+1}$$

$$\|y\| = \left(\sum_{r,t} y_{rt}^2 \right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial f_s} = x_{ij-s+1}$$

$$\frac{\partial \|Y\|}{\partial f_s} = \frac{1}{2\|Y\|} \sum_{r,t} \frac{\partial y_{rt}^2}{\partial f_s} =$$

$$= \frac{1}{\|Y\|} \sum_{r,t} y_{rt} x_{rt-s+1} = \|Y\|^{-1} \sum_{rt} \sum_k f_k x_{rt-k+1} x_{rt-s+1} =$$

$$= \|Y\|^{-1} \sum_k f_k \sum_r \left(\sum_t x_{rt-k+1} x_{rt-s+1} \right) \quad (*)$$

llamando

$$\Gamma_{k-s}^r = \sum_t x_{rt-k+1} x_{rt-s+1}$$

(la autocorrelación de x_r en $k-s$) queda

$$(*) = \|Y\|^{-1} \sum_k f_k \sum_r \Gamma_{k-s}^r \quad \text{o sea}$$

$$= \|Y\|^{-1} \sum_k f_k \Gamma_{k-s} \quad \text{donde} \quad \Gamma_i = \sum_j \Gamma_i^j$$

finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f_s} \frac{y_{ij}}{\|Y\|} &= \left[\frac{\partial y_{ij}}{\partial f_s} \|Y\| - \frac{\partial \|Y\|}{\partial f_s} y_{ij} \right] \|Y\|^{-2} = \\ &= [x_{ij-s+1} \|Y\| - \|Y\|^{-1} \left(\sum_k f_k \Gamma_{k-s} \right) y_{ij}] \|Y\|^{-2} \end{aligned}$$

Igualando a cero

$$\frac{y_{ij}}{\|Y\|^2} \sum_k f_k \Gamma_{k-s} = x_{ij-s+1}, \quad s = 1, \dots, \ell$$

Matricialmente

$$\frac{y_{ij}}{\|Y\|^2} Rf = X^{ij} \quad (*)$$

Donde $R = \{ R^i, R^i$ es la matriz de autocorrelación de la i -ésima muestra y X^{ij} es el vector

$$X^{ij} = (x_{ij}, x_{ij-1}, \dots, x_{ij-(\ell-1)})$$

donde

$$x_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad k \notin [1, n]$$

De (*)

$$\frac{y_{ij}}{\|Y\|^2} f = R^{-1} X^{ij} \quad (**)$$

Si f^0 es solución de (**), λf^0 ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$) también es solución pues

$$\frac{y_{ij}(\lambda f^0)}{\|Y(\lambda f^0)\|^2} \cdot \lambda f^0 = \frac{\lambda y_{ij}(f^0)}{\lambda^2 \|Y(f^0)\|^2} \lambda f^0 = \frac{y_{ij}(f^0)}{\|Y(f^0)\|^2} f^0$$

donde $Y(f)$ es el output obtenido al aplicar el filtro f .

Luego si f^0 satisface (*), f^0 es un múltiplo del vector $R^{-1} X^{ij}$.

Entonces $f^0 = R^{-1} X^{ij}$ es solución.

Llamando f^{ij} al filtro

$$f^{ij} = R^{-1} X^{ij}$$

el algoritmo termina calculando

$$\text{Máx}_{i,j} \left(\frac{|y_{ij}^{(ij)}|}{\|Y^{(ij)}\|} \right) \text{ donde } Y^{(ij)} \text{ es el output obtenido}$$

al aplicar el filtro f^{ij} .

CAPITULO IV

1. Descripción de Algoritmos

Noteremos por MED al algoritmo obtenido por Wiggings (1978) a partir de la norma Varimax, y f_v al filtro correspondiente. Análogamente MEDD y f_D representarán el algoritmo y el filtro obtenidos a partir de la norma D.

Tanto el MED, como el MEDD, involucran la inversión de matrices de autocorrelación. Debido a que estas matrices son Toeplitz, permiten el uso del método recursivo de Levinson para su inversión, de complejidad notoriamente inferior al caso general. En este trabajo ha sido usada una versión mejorada (Robinson, 1967).

El algoritmo MED, requiere el cálculo de una matriz de autocorrelación y de su inversa en cada iteración. Teniendo en cuenta que el orden de estas matrices es igual a la longitud elegida para el filtro, dicha longitud y el número de iteraciones necesarias para obtener un resultado satisfactorio son dos parámetros que inciden en forma directa en el tiempo de computación.

Una de las ventajas del MEDD es que al ser no-iterativo, solo requiere el cálculo e inversión de una única matriz de autocorrelación, cuyo orden también es igual a la longitud elegida para el filtro.

Por otro lado en todas las pruebas realizadas, se ha encontrado, que la longitud óptima para el filtro es menor en el caso del algoritmo MEDD, que para el MED, lo que también redunda en un importante ahorro computacional.

Los algoritmos de convolución y correlación rápidos usando FFT (Fast Fourier Transform) son de uso esencial en procesamiento de señales y pueden ser incorporados tanto al MED como al MEDD para lograr mayor eficiencia.

2. MEDD y Convergencia del MED

Un aspecto importante en la convergencia del algoritmo MED es que, comenzando con un filtro inicial:

$f^0 = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$, el valor de la norma Varimax del output $y^{(n)} = f_V^{(n)} * x$ después de la n-ésima iteración aumenta significativamente para las primeras N iteraciones (donde N depende del input considerado y de la longitud elegida para el filtro) y luego se estabiliza, no pudiendo mejorarse la convergencia.

Se ha comprobado, en todas las pruebas realizadas, que el valor de la norma Varimax para el output del algoritmo MEDD supera al máximo valor alcanzado por la norma Varimax del output del algoritmo MED, cuando las longitudes elegidas para los filtros son óptimas o sea

$$V(y_{f_D}) \geq V(y_{f_V})$$

donde

$$y_{f_D} = x * f_D$$

$$y_{f_V} = x * f_V$$

Este hecho muestra que el MEDD, produce un output de mayor simplicidad que el MED, cuando la simplicidad se mide a través del criterio Varimax.

Más adelante, se muestra para los ejemplos comparativos de ambos métodos, un ploteo de convergencia que grafica esta situación.

Por otro lado, también se ha observado, la situación recíproca; los outputs obtenidos por ambos métodos están en la misma relación de orden con respecto al criterio D, o sea

$$D(y_{f_D}) \geq D(y_{f_V}).$$

TABLA I

	Cantidad de muestras	Norma Varimax		Norma D	
		Output MED	Output MEDD	Output MED	Output MEDD
Ejemplo 1	1	0.3535	0.3600	0.6532	0.6631
Ejemplo 2	10	1.6065	2.1078	0.2217	0.2356
Ejemplo 3	2	0.5763	1.1960	0.6069	0.7317
Ejemplo 4	2	0.6080	0.6498	0.4758	0.5106
Ejemplo 5	3	0.7992	0.8132	0.4609	0.5758

3. Ejemplos Numéricos

Una extensa simulación fue realizada con datos sintéticos, haciendo primero un estudio comparativo de ambos métodos y luego probando la eficiencia del MEDD en presencia de ruido.

Todos los programas fueron hechos en lenguaje FORTRAN e implementados en una VAX 11/750.

Para graficar los resultados se utilizó un ploter CALCOMP.

Se presentan ocho ejemplos. En los cinco primeros se comparan ambos métodos, considerando distintas señales fuentes, para los casos de un solo input, y múltiples inputs.

Para cada ejemplo se muestra además un gráfico de la convergencia del MED, comparada con el valor obtenido por la norma Varimax de los outputs del MEDD.

En los ejemplos 6-8 se analiza el comportamiento del MEDD al adicionar ruido al input en distintos porcentajes.

En todos los casos se ha recuperado la ondícula fuente, invirtiendo el filtro MEDD.

La inversión se realizó poniendo este filtro como input del mismo algoritmo MEDD y eligiendo para el filtro inverso, la misma longitud de la ondícula inicial.

En todos los ejemplos se han considerado ondículas que no son de fase mínima.

El ruido adicionado a las muestras fue obtenido utilizando un algoritmo de generación de números al azar, de tipo congruencial, que es una función standard del lenguaje FORTRAN.

Los porcentajes de ruido mencionados representan porcentajes respecto a las máximas amplitudes del ruido y de la señal.

En cada ejemplo se ha convolucionado el filtro obtenido por el MEDD con la señal inicial (Fig. 18). El resultado obtenido es una función que aproxima a una δ . El grado de ajuste de esta aproximación revela la inversibilidad del filtro respecto de la señal fuente.

Es interesante destacar que la polaridad y desplazamiento de los pulsos en el output, no afecta la maximización y por lo tanto no pueden ser predichos con exactitud.

3.1. Ejemplos 1 a 5: Modelo $x = w * q$

Ejemplo 1:

Para comenzar se eligió como ondícula fuente el caso más sencillo de una componente armónica $w(t) = a \sin \alpha t$, tomando tres ciclos discretizados en 100 puntos.

La serie de pulsos $q(t)$ de 40 puntos de longitud, constó de tres pulsos de distinta amplitud y polaridad, con separación de 20 y 10 puntos entre ellos. Se adicionó a esta serie un 1% de ruido respecto de la amplitud máxima de los pulsos. la convolución de $w(t)$ con $q(t)$ fué tomada como input para el MED y el MEDD. En la Fig. 8a se grafican $w(t)$, $q(t)$ y $x(t) = w(t) * q(t)$.

Para ambos algoritmos se probaron varias longitudes para el filtro, resultando que la longitud óptima para el filtro MED es de 16 puntos y para el filtro MEDD sólo de 5 puntos.

La convergencia del MED se estabilizó después de las doce primeras iteraciones, alcanzando un valor Varimax máximo cercano a 0.3535. El output obtenido por el MEDD tuvo un valor Varimax igual a 0.36. (Fig. 16. a).

Los outputs obtenidos, son mostrados en la Fig. 8.b y 8.c. Se observa una mejor deconvolución en el caso MEDD. La polaridad no se ha modificado y se ha conservado con exactiudud la separación entre los pulsos.

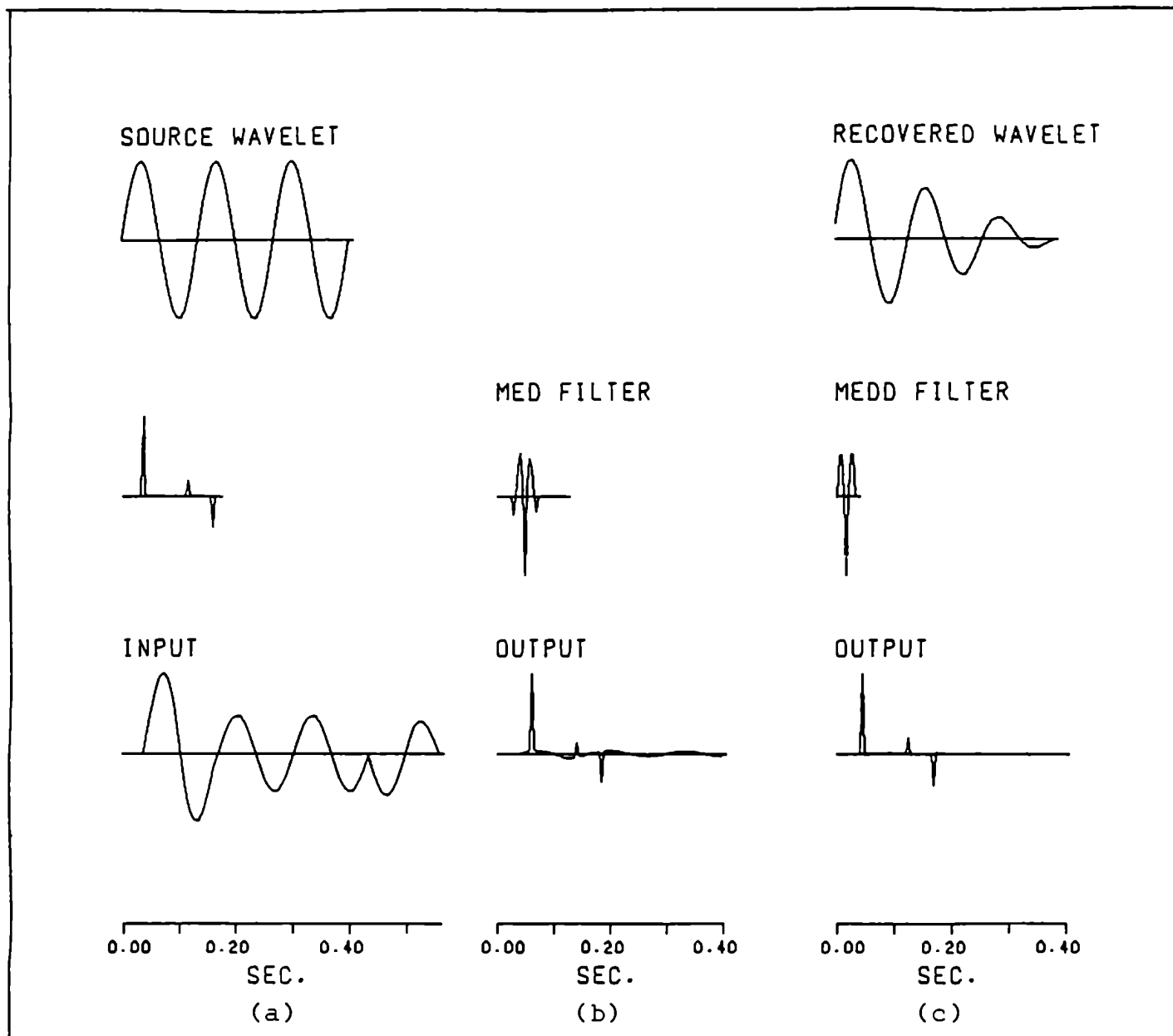


Fig. 8 Ejemplo 1

El ploteo de la ondícula recuperada invirtiendo el filtro f_D , (Fig. 8.c parte superior) muestra una amortiguación respecto de la ondícula original.

El resultado de convolucionar el filtro f_D con la ondícula original $w(t)$ muestra que este filtro produce una muy buena inversión de $w(t)$. (Fig. 18).

Ejemplo 2:

Este ejemplo muestra el comportamiento de ambos métodos en el caso de múltiples inputs. Se ha elegido la misma señal fuente del ejemplo anterior y se han considerado series de hasta cinco pulsos, de amplitud y polaridad arbitrarias cuya ubicación fue obtenido en forma aleatoria.

La serie de pulsos del ejemplo 1 se ha incorporado tambien, para una mejor comparación.

En este ejemplo los filtros óptimos conservaron la misma longitud que en el caso de un solo input.

El MED necesitó más de sesenta iteraciones antes de estabilizarse, alcanzando un valor Varimax considerablemente menor que el output para el MEDD (Fig. 16.b y Tabla 1). Esta diferencia redunda visiblemente en la calidad de los outputs obtenidos (Fig. 9.c y 9.d).

Se observa además una excelente resolución aún en el caso de pulsos muy cercanos o de pequeña amplitud. La polaridad y separación se ha conservado en ambos casos.

El filtro obtenido f_D , presenta un aspecto similar en los ejemplos 1 y 2, lo cual hace que las ondículas recuperadas y la convolución $f_D * w$ en ambos casos tengan similares características.

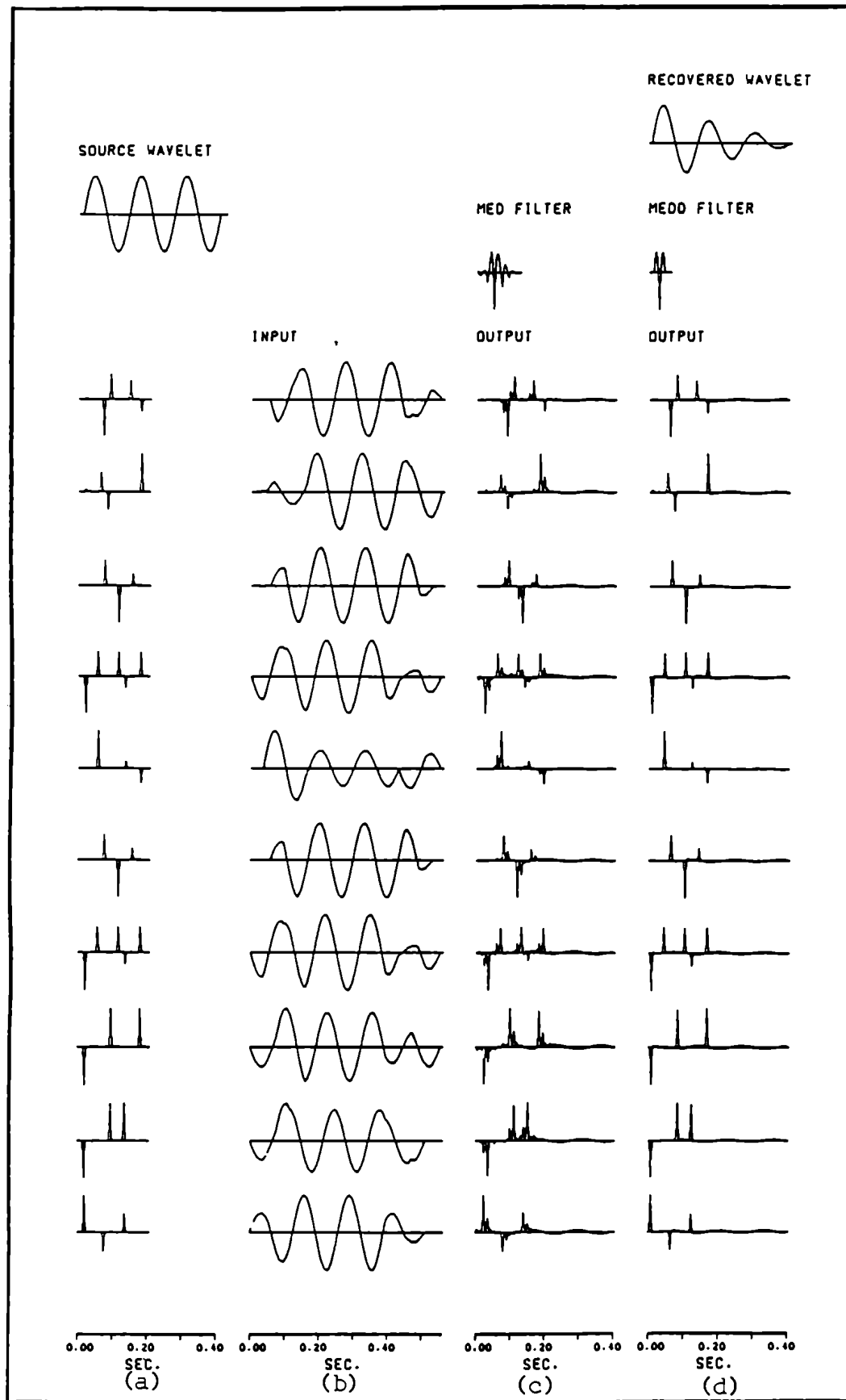


Fig. 9 Ejemplo 2

Ejemplo 3:

En este caso se ha elegido como señal fuente (40 puntos) la ondícula 'Ricker', considerada en la literatura en Geofísica, como una buena estimación de la señal fuente en problemas de prospección sísmica. Analíticamente representa la segunda derivada de la densidad Gaussiana. (Robinson and Treitel, 1980).

Se consideraron dos series de dos pulsos, donde la ubicación, amplitud y polaridad del segundo pulso en una de las muestras ha sido modificada con el objeto de analizar el efecto en la deconvolución.

En este caso debido a las características de la señal fuente, las longitudes de los filtros son considerablemente mayores que en los ejemplos anteriores, resultando de 40 puntos en ambos casos.

La convergencia del MED se estabilizó en la novena iteración. El valor Varimax para el output del MEDD superó en más del doble el valor para el MED.

El output del MED presenta en este caso una inversión en la polaridad, además de un alto porcentaje de ruido (Fig. 10. c).

La inversión del filtro f_D produjo una ondícula ampliamente satisfactoria (Fig. 10.d parte superior).

Se observa un desplazamiento de la δ -aproximada, obtenida como convolución de f_D con la ondícula fuente, debido a la mayor longitud del filtro (Fig. 10).

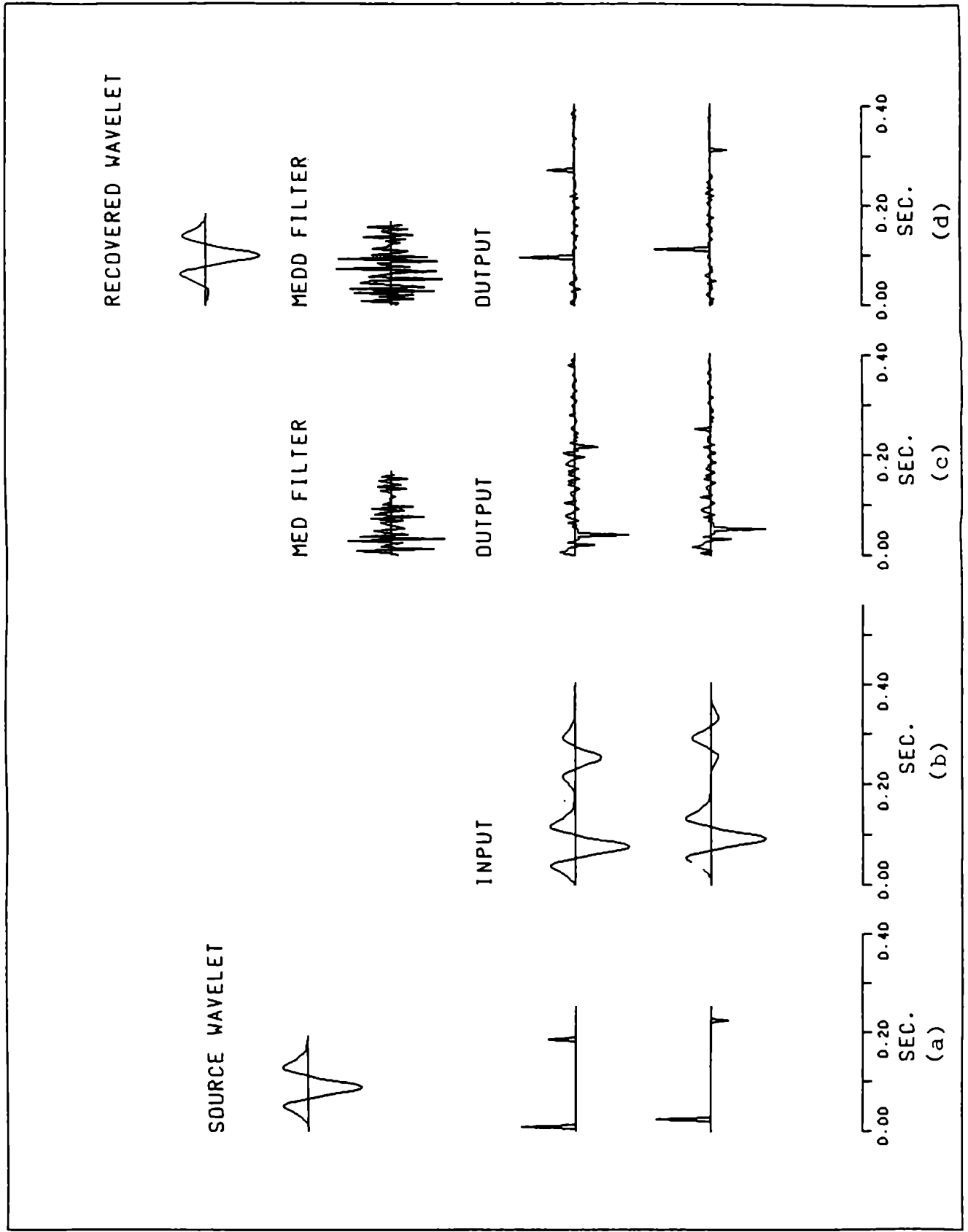


Fig. 10 Ejemplo 3

Ejemplo 4:

El objeto de este ejemplo es estudiar la deconvolución en un caso semejante al de los ejemplos 1 y 2, pero donde la señal fuente ha sido amortiguada.

Los resultados presentan características análogas a los de aquellos dos ejemplos (Figs. 11, 17.a y 18).

Ejemplo 5:

En este ejemplo se propone un severo problema de deconvolución. La señal fuente es una compleja ondícula de fase mixta de 60 puntos.

Se han elegido tres series de pulsos obtenidos aleatoriamente.

La longitud óptima de los filtros es del orden de 60 puntos en ambos casos.

Los valores Varimax de los outputs son cercanos, siendo levemente superior para el MEDD.

La convergencia se estabilizó a partir de la iteración doce (Fig. 17.b).

Los outputs de ambos filtros presentan un visible nivel de ruido. La polaridad se ha invertido en ambos casos.

En este particular ejemplo se observa como mejor recuperación en la amplitud de los pulsos para el MEDD.

La señal recuperada por inversión del filtro f_D se ajusta notoriamente a la forma de la señal fuente.

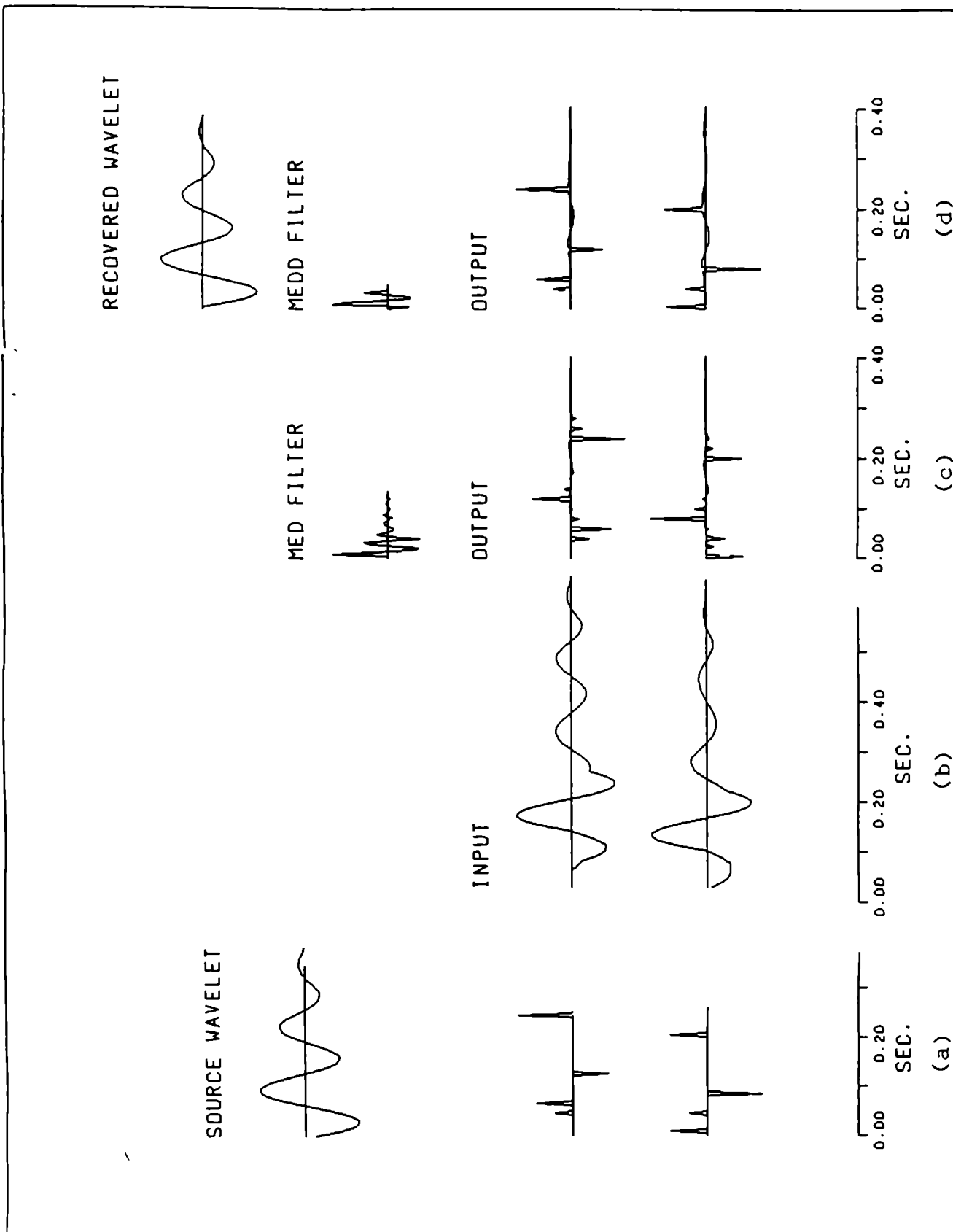


Fig. 11 Ejemplo 4

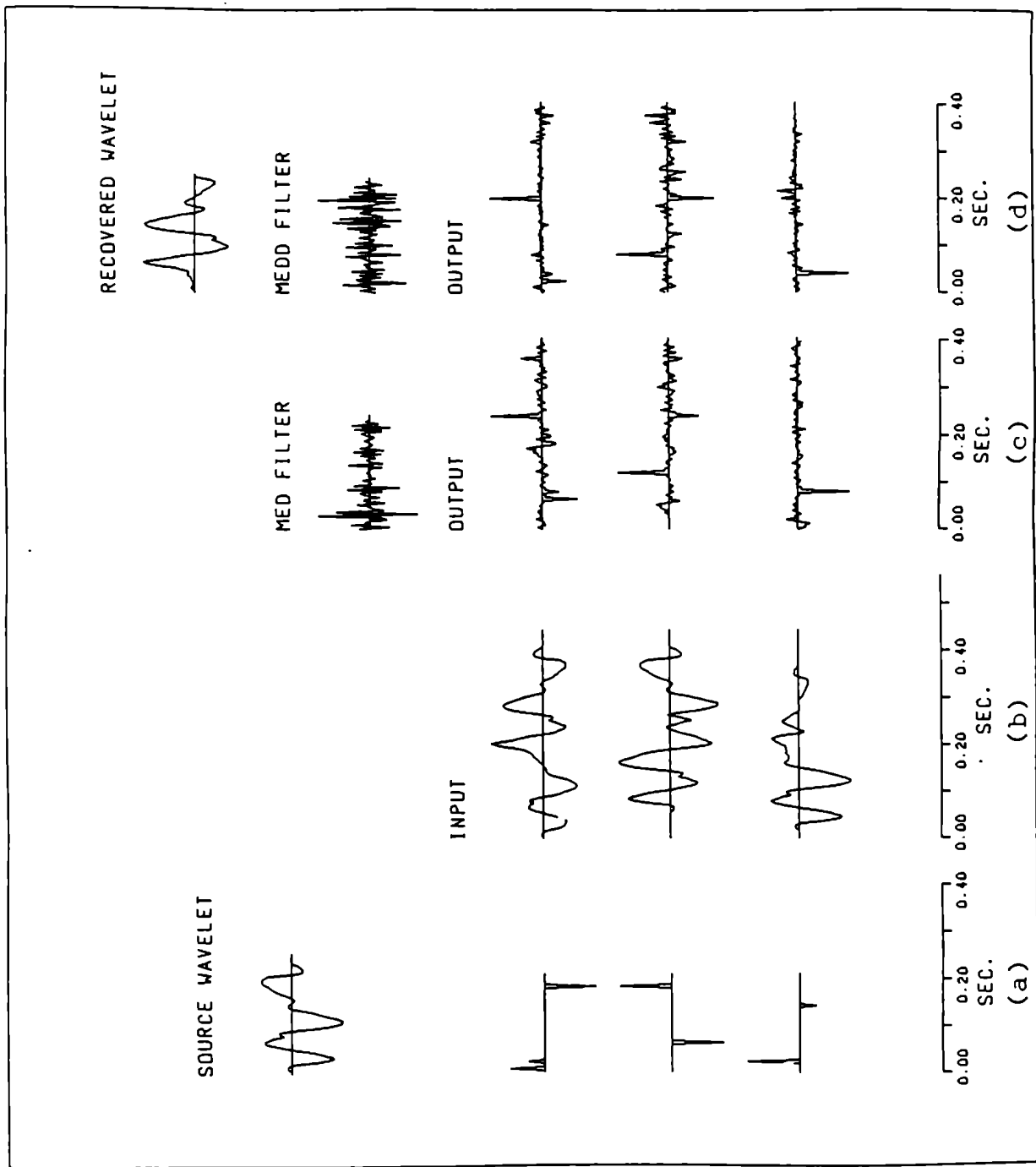


Fig. 12 Ejemplo 5

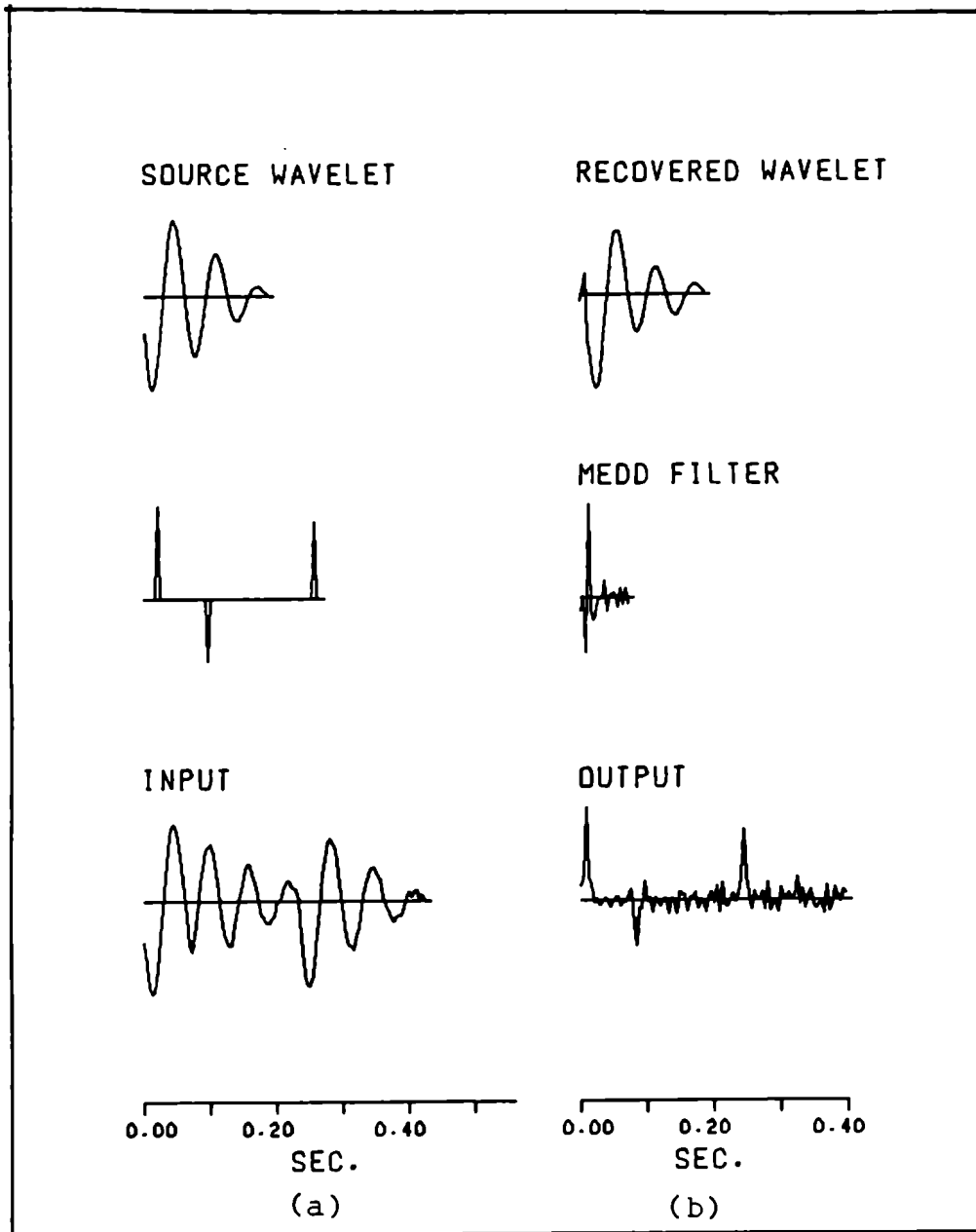


Fig. 13 Ejemplo 6

Nótese el cambio de polaridad, también reflejado en los outputs.

Como en el ejemplo 3, la extensa longitud del filtro produce un desplazamiento del mismo orden en la δ -aproximada

obtenido al convolucionar f_D y $w(t)$. Se refleja también aquí la inversión en la polaridad y una cierta perturbación (Fig. 18).

3.2. Ejemplos 6 a 8. Modelo $x = w * q + n$:

El objeto de estos ejemplos es estudiar la estabilidad del MEDD en presencia de ruido aditivo.

Ejemplos 6 y 7:

En estos dos ejemplos se considera la misma señal fuente que en el ejemplo 4, con 50 puntos de longitud.

En ambos casos se ha tomado un solo input, contaminado con 5% de ruido (Ejemplo 6) y con 25% de ruido (Ejemplo 7).

Se ha comprobado mediante las pruebas numéricas, que en presencia de ruido, la disminución de la longitud del filtro produce una mejor preservación de la amplitud de los pulsos, pero también un incremento en la amplitud del ruido. Filtros de mayor longitud disminuyen notablemente el porcentaje de ruido, pero alteran la amplitud de los pulsos, pudiendo hacerlos indistinguibles. Este hecho es de gran importancia en la elección de la longitud del filtro. En el ejemplo 8 esta situación es analizada con más detalle.

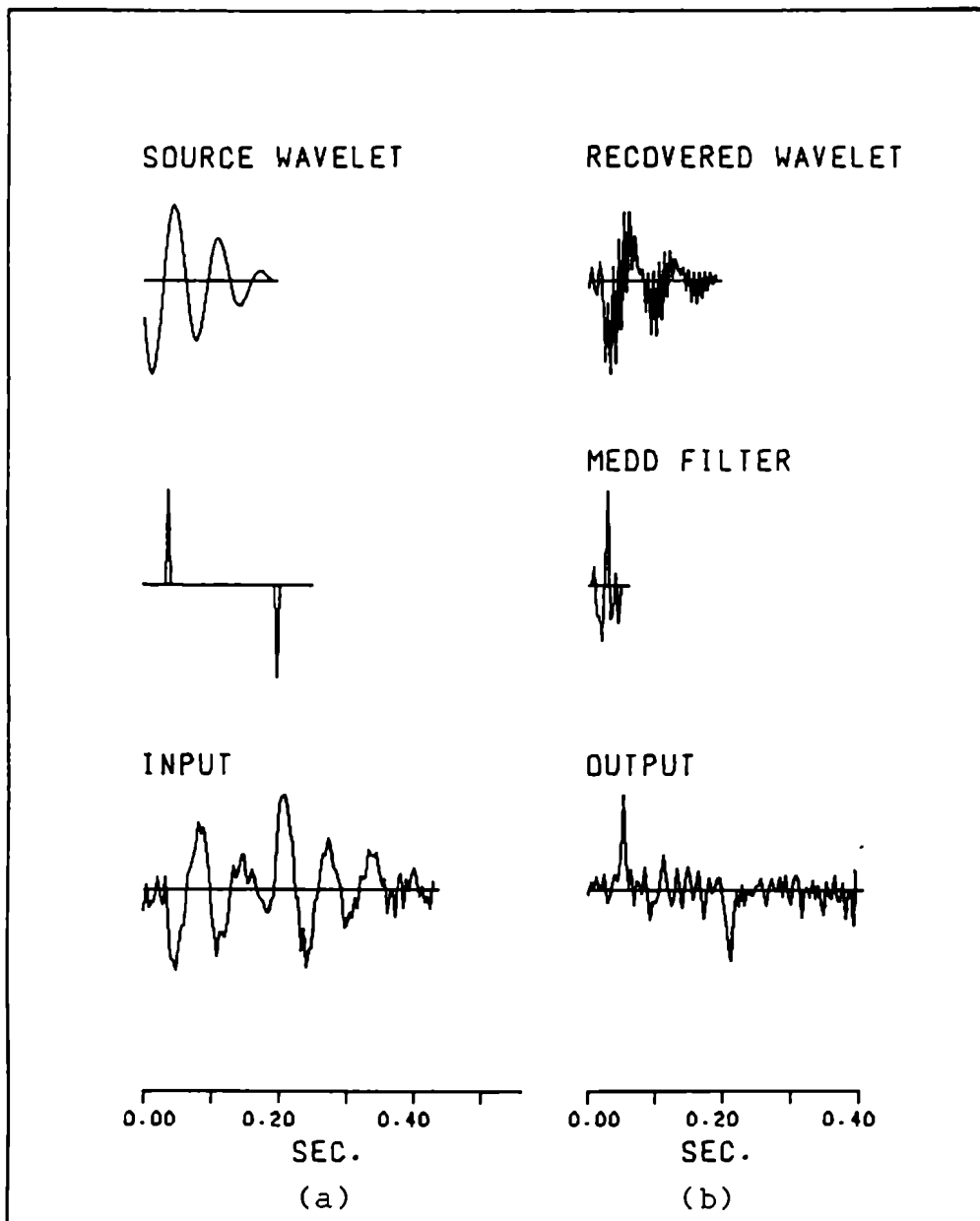


Fig. 14 Ejemplo 7

Las longitudes, óptimas en el sentido arriba mencionado, fueron de 20 puntos para el ejemplo 6 y de 10 puntos para el ejemplo 7.

En el output del ejemplo 6, los pulsos son perfectamente distinguibles, aunque hay una pequeña disminución en la amplitud del segundo. En el ejemplo 7, el output presenta un alto porcentaje de ruido pero los pulsos han mantenido sus amplitudes casi sin alteración.

Por inversión del filtro se obtiene en el ejemplo 6 una ondícula muy satisfactoria, de características iguales a las de la ondícula fuente, mientras que en el caso del ejemplo 7, si bien la inversión produce una ondícula contaminada con ruidos, ésta conserva las características que la hacen perfectamente reconocible. (Figs. 13 y 14, arriba).

Ejemplo 8:

En este último ejemplo se ha tomado una ondícula compuesta por senos de frecuencias variadas, con coeficientes y fases tomados en forma aleatoria, y luego amortiguada. Se la discretizó en 50 puntos. Se eligieron dos series de pulsos de amplitudes correspondientes iguales, pero de distinta separación entre ellos. Los inputs fueron contaminados con un 15% de ruido.

Se estudiaron los outputs producidos tomando toda una gama de longitudes para el filtro MEDD. Para longitudes

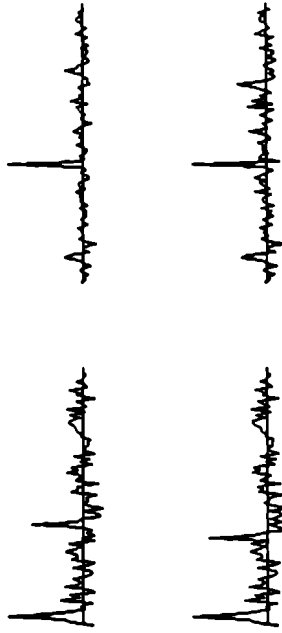
RECOVERED WAVELET RECOVERED WAVELET



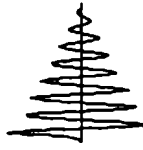
MEDD FILTER



OUTPUT



SOURCE WAVELET



INPUT

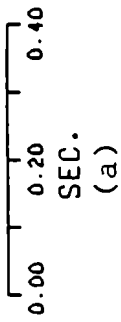
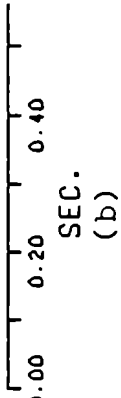
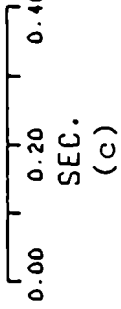
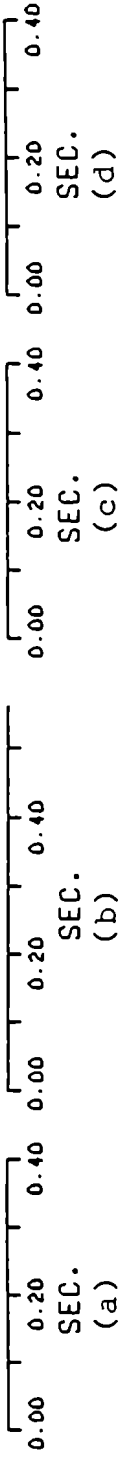
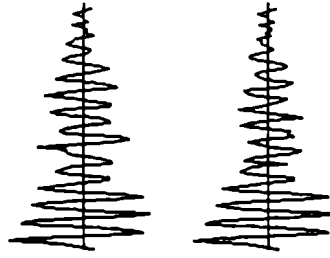
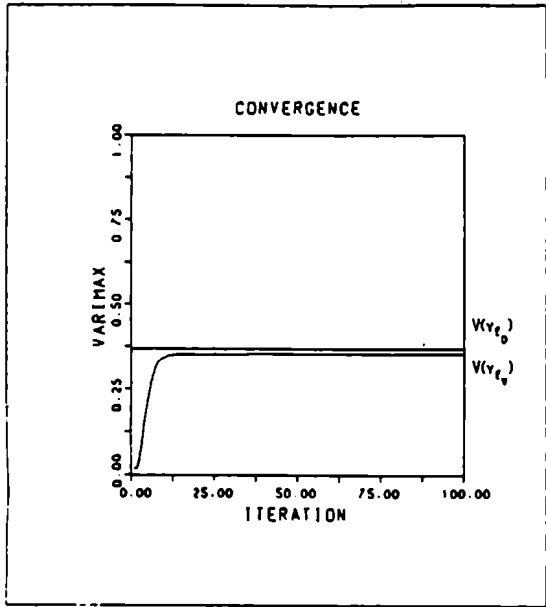
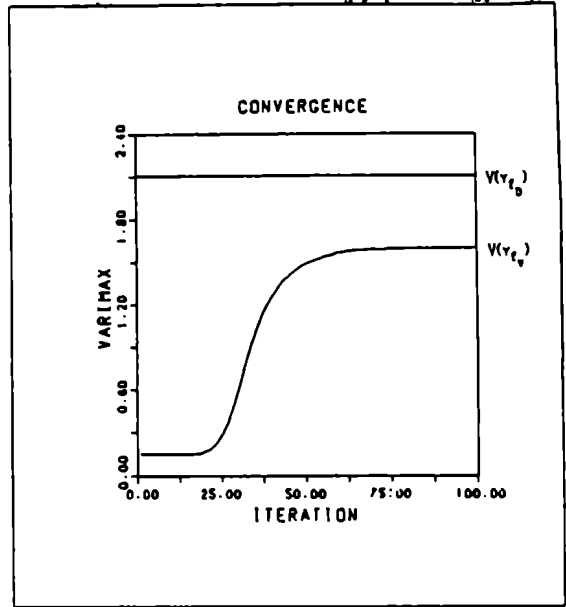


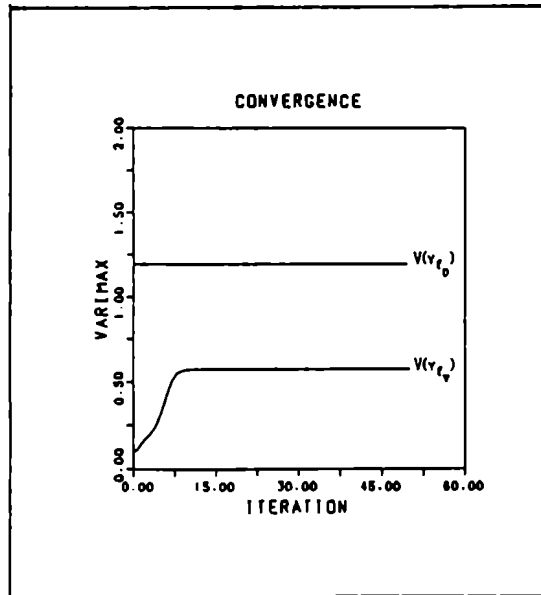
Fig. 15 Ejemplo 8



Ejemplo 1
(a)

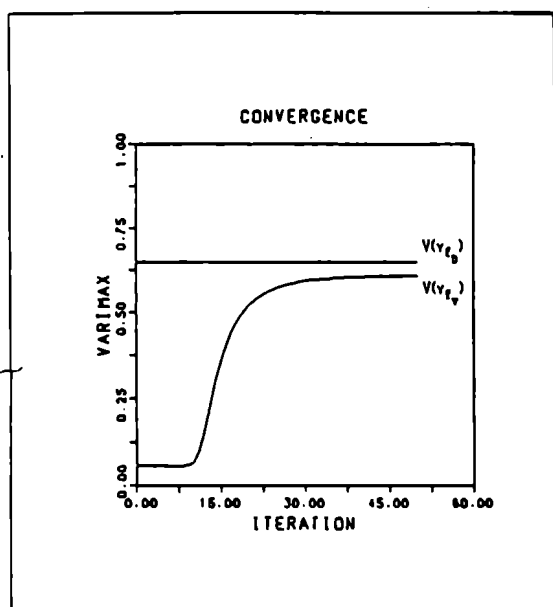


Ejemplo 2
(b)

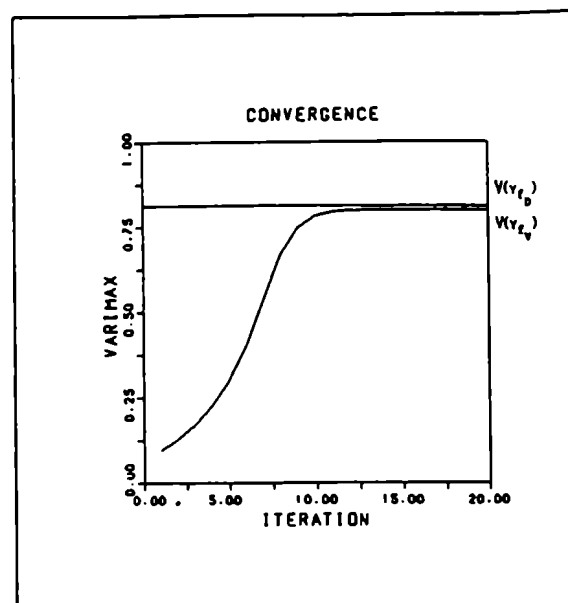


Ejemplo 3
(c)

Fig. 16



Ejemplo 4
(a)



Ejemplo 5
(b)

Fig. 17

menores que cinco, el filtro obtenido no logró una resolución en los outputs. Para longitudes mayores que sesenta, la amplitud del segundo pulso en ambos outputs disminuyó en forma tal que resultó imposible distinguirlo.

En la Fig. 15, se grafican los outputs del MEDD para un filtro de 5 puntos de longitud y para un filtro de 45 puntos.

Observesé que en el caso del filtro de menor longitud la deconvolución es más apropiada. También la inversa del filtro aproxima mejor la ondícula fuente.

En Fig. 18 se grafica la convolución de este filtro con la señal fuente.

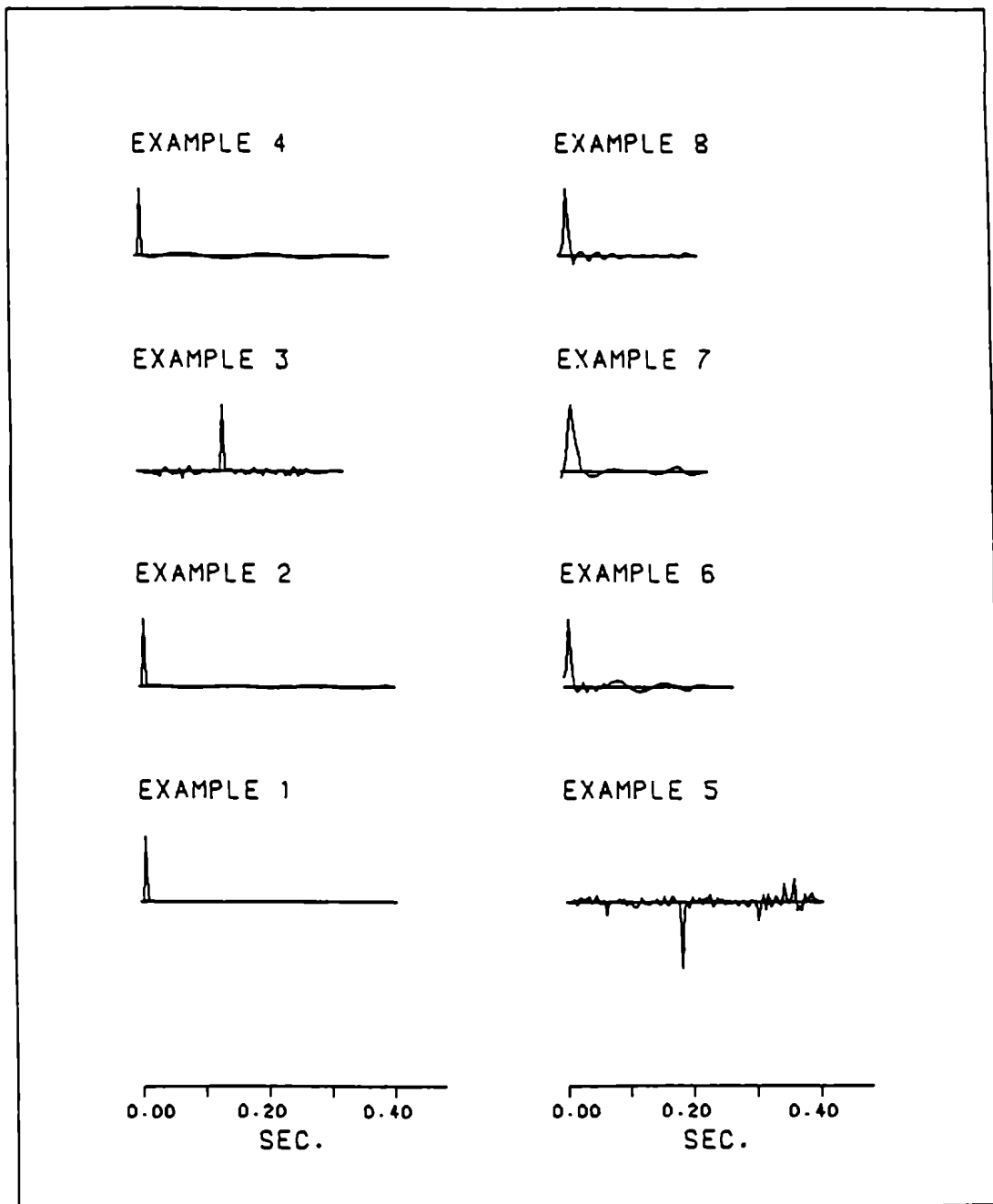


Fig. 18

Los ejemplos 6, 7 y 8 muestran claramente la estabilidad del MEDD en presencia de ruido aditivo.

Los outputs revelan una buena deconvolución con un cierto incremento de nivel de ruido.

APENDICE I

Representación de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

1. Señales de soporte finito.

Sea T un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Supongamos primero que se restringe el dominio de T a las señales de soporte finito, donde:

$$\text{Sop}(X) = \{k: X(k) \neq 0\}.$$

La familia $\{\delta_k / k \in Z\}$ es base (en el sentido algebraico) del conjunto de señales de soporte finito, pues

$$X = \sum_{k \in \text{Sop}(X)} X(k) \delta_k$$

en efecto

$$\left(\sum_{k \in \text{Sop}(X)} X(k) \delta_k \right)(n) = \sum_{k \in \text{Sop}(X)} X(k) \delta_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \text{Sop}(X) \\ X(n) & \text{si } n \in \text{Sop}(X) \end{cases}$$

Por una cuestión de simplicidad, escribiremos

$$X = \sum_k X(k) \delta_k \quad \text{entendiendo que dicha}$$

suma se hace sobre aquellos $k \in \text{Sop}(X)$.

Ahora por linealidad de T

$$TX = \sum_k X(k) T(\delta_k) \quad \text{y como } \delta_k = \tau_{-k}(\delta)$$

resulta usando la invariancia de T que

$$TX = \sum_k X(k) T(\tau_{-k}(\delta)) = \sum_k X(k) \tau_{-k}(T(\delta))$$

si llamamos $h = T\delta$ es $TX = \sum_k X(k) \tau_k(h)$

por lo que

$$Y(t) = (TX)(t) = \sum_k X(k) h(t-k) \quad (\forall t \in \mathbb{Z})$$

y resulta

$$Y = X * h$$

2. Condición de estabilidad para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Sea T lineal e invariante en el tiempo y sea $h = T\delta$

Luego

i) Si T es estable $\Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$

ii) Si $TX = h * X$ y $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \Rightarrow T$ es estable

Dem. i) Sea T estable, $N \in \mathbb{N}$

definimos

$$X(n) = \begin{cases} \frac{h(-n)}{|h(-n)|} & \text{si } h(-n) \neq 0 \text{ y } |n| \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego

$$(h * X)(0) = \sum_n X(-n) h(n) = \sum_{|n| \leq N} |h(n)|$$

como X es de soporte finito y $\|X\|_{\infty} \leq 1$

$$\sum_{|n| \leq N} |h(n)| = |(h * X)(0)| = |(TX)(0)| \leq \|TX\|_{\infty} \leq M$$

de donde $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leq M < +\infty$

ii) Si $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$ y $\mathcal{T}X = h * X$ se tiene

$$|(\mathcal{T}X)(n)| = \left| \sum_k h(k)X(n-k) \right| \leq \left(\sum_k |h(k)| \right) \cdot \|X\|_{\infty} \quad (\text{Desigualdad de Young})$$

Luego si $\|X\|_{\infty} \leq 1$

$$\sup_n |(\mathcal{T}X)(n)| \leq \sum_k |h(k)| < +\infty$$

es decir \mathcal{T} es estable.

. Propiedad

Sea \mathcal{T} estable, lineal e invariante en el tiempo.

Si $M = \sup_{\|X\|_{\infty} \leq 1} \|\mathcal{T}X\|_{\infty}$ entonces $\|\mathcal{T}X\|_{\infty} \leq M\|X\|_{\infty}$

En efecto, si $X = 0$ entonces $X(n) = 0 \quad \forall n$

y $\mathcal{T}X = \mathcal{T}(0 \cdot X) = 0 \cdot \mathcal{T}X = 0$

y de aquí $\|\mathcal{T}X\|_{\infty} = 0$ y la desigualdad vale

Si $\|X\|_{\infty} \neq 0$, sea $Y(n) = \frac{X(n)}{\|X\|_{\infty}} \quad n \in \mathbb{Z}$

Luego

$$\|Y\|_{\infty} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{T}X = \mathcal{T}(\|X\|_{\infty} Y) = \|X\|_{\infty} \mathcal{T}(Y)$$

Entonces

$$\|\mathcal{T}X\|_{\infty} = \|\|X\|_{\infty} \mathcal{T}(Y)\|_{\infty} = \|X\|_{\infty} \|\mathcal{T}(Y)\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty} M \quad (*)$$

3. Señales amortiguadas.

Supongamos nuevamente \mathcal{T} lineal, invariante en el tiempo y estable.

Diremos que una señal X es amortiguada si y sólo si

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} X(n) = 0$$

Para cada señal X consideremos la señal truncada

$$X^{(n)} = X^n(j) = \begin{cases} X(j) & \text{si } |j| \leq n \\ 0 & \text{si } |j| > n \end{cases}$$

Luego $X^{(n)}$ tiene soporte finito para todo n .

Sea $h = T\delta$, luego $TX^{(n)} = h * X^{(n)}$

entonces

$$TX - h * X = TX - TX^{(n)} + TX^{(n)} - h * X$$

(observese que $\|h\|_1 < +\infty$ por la estabilidad de T y $\|X\|_\infty < +\infty$ pues X es amortiguada, luego usando la desigualdad de Young, $h * X$ existe)

ahora

$$\begin{aligned} \|TX - h * X\|_\infty &\leq \|TX - TX^{(n)}\|_\infty + \|TX^{(n)} - h * X\|_\infty = \\ &= \|T(X - X^{(n)})\|_\infty + \|h * (X - X^{(n)})\|_\infty \leq (\text{usando } (*) \text{ y} \end{aligned}$$

desigualdad de Young) $\leq M \|X - X^{(n)}\|_\infty + \|h\|_1 \|X - X^{(n)}\|_\infty$

ahora $\|X - X^{(n)}\|_\infty \leq \sup_{|j| > n} |X(j)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ por ser X amortiguada.

Luego

$$\|TX - h * X\|_\infty = 0 \quad \text{y} \quad TX = h * X$$

4. Condición de Causalidad para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Sea nuevamente T lineal e invariantes en el tiempo.

Para cada señal X consideremos la señal truncada

$$X^{(n)} = X^n(j) = \begin{cases} X(j) & \text{si } |j| \leq n \\ 0 & \text{si } |j| > n \end{cases}$$

Luego $X^{(n)}$ tiene soporte finito para todo n .

Sea $h = T\delta$, luego $TX^{(n)} = h * X^{(n)}$

entonces

$$TX - h * X = TX - TX^{(n)} + TX^{(n)} - h * X$$

(observese que $\|h\|_1 < +\infty$ por la estabilidad de T y $\|X\|_\infty < +\infty$ pues X es amortiguada, luego usando la desigualdad de Young, $h * X$ existe)

ahora

$$\begin{aligned} \|TX - h * X\|_\infty &\leq \|TX - TX^{(n)}\|_\infty + \|TX^{(n)} - h * X\|_\infty = \\ &= \|T(X - X^{(n)})\|_\infty + \|h * (X - X^{(n)})\|_\infty \leq (\text{usando (*) y} \end{aligned}$$

desigualdad de Young) $\leq M \|X - X^{(n)}\|_\infty + \|h\|_1 \|X - X^{(n)}\|_\infty$

ahora $\|X - X^{(n)}\|_\infty \leq \sup_{|j| > n} |X(j)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ por ser X amortiguada.

Luego

$$\|TX - h * X\|_\infty = 0 \quad \text{y} \quad TX = h * X$$

4. Condición de Causalidad para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Sea nuevamente T lineal e invariantes en el tiempo.

Si T es causal y $C = C(n)$ es la sucesión nula entonces

$$\delta(s) = 0 = C(s) \quad \text{si} \quad s < 0$$

y

$$(T\delta)(s) = (TC)(s) \quad \text{si} \quad s < 0, \quad \text{luego} \quad h(s) = 0$$

si $s < 0$

Recíprocamente si $h(s) = 0 \quad (s < 0)$

$$(TX)(n) = \sum_{s \geq 0} h(s) X(n-s) \quad \text{que sólo depende de } X(k)$$

para $k = n, n-1, \dots$, es decir de los valores de X anteriores a n .

APENDICE II

La ecuación $Y = \sum_k h_k V_k$ para la convolución

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ una señal de longitud n .

La convolución de x con un filtro f de longitud ℓ puede representarse matricialmente en la forma

$Y = f.X$ donde las filas de X son

$$V_k = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \quad k = 1, \dots, \ell$$

Veremos en lo que sigue que los vectores $\{V_1, \dots, V_\ell\}$ son linealmente independientes en $R^{n+\ell-1}$ bajo la suposición que la muestra no es idénticamente nula:

De acuerdo a nuestras hipótesis, existe un primer índice i con la propiedad $x_i \neq 0$. Sea v tal índice.

Considerese ahora la submatriz de X formada por todas las columnas que contienen al elemento x_v

$$X = \left(\begin{array}{cccc} x_1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & x_1 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} x_v & \dots & x_{v+\ell-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{v-\ell-1} & \dots & x_v \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \dots & x_n & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & x_n \end{array} \right)$$

Esta submatriz X^1 es triangular superior, ya que
 $x_i = 0, i = 1, \dots, v-1$.

Luego $\text{Det}(X^1) = (X_v)^{\ell} \neq 0$ entonces $\text{rango}(X^1) = \ell$.

De aquí $\text{rg col}(X) \geq \ell$

Por tanto, como $\ell \geq \text{rg fila}(X) = \text{rg col}(X) \geq \ell$ se deduce que $\text{rg}(X) = \ell$ y por tanto los vectores $\{V_1, \dots, V_{\ell}\}$ linealmente independientes y generan un subespacio W de dimensión ℓ .

Nótese que del hecho que X tiene rg máximo, resulta que

$$R = X^t X \text{ es inversible}$$

donde R es la matriz de autocorrelación de la señal x .

APENDICE III

Norma D y Spiking Filter

Se mostrará aquí una relación entre la norma D antes definida para el caso de una muestra y el método tradicional para inversión de una señal conocido como Spiking Filter (Robinson y Treitel, 1980).

En el proceso de Spiking Filter se minimiza la norma:

$$\|y - e_i\|^2 \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m$$

(donde m es la longitud de $y = x * f$) sobre el conjunto de filtros de longitud l .

Vimos ya que la norma D es equivalente a minimizar

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - e_i \right\|^2 \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m$$

o sea que ambos criterios difieren solo en el factor de homogeneidad $\|y\|$.

Probaremos que esta diferencia no incide en la elección del filtro.

Sea W el subespacio considerado en el apéndice II. El vector $w \in W$ que minimiza $\|w - e_i\|$ es la proyección ortogonal e_i sobre W (Suponemos aquí que $e_i \notin W$, o sea $\|w\| \neq 0$) luego

$$e_i - w \perp W$$

Probaremos que $w_0 = \frac{w}{\|w\|}$ minimiza $\left\| \frac{y}{\|y\|} - e_i \right\|^2$.

Sea y un vector cualquiera de W distinto de cero y notemos $y_0 = \frac{y}{\|y\|}$.

Luego

$$1 = \|y_0\| \leq \|y_0 - w\| + \|w\|$$

también

$$1 = \|w_0\| = \|w_0 - w\| + \|w\| \quad (\text{pues } \|w\| \leq \|w_0\| = 1)$$

o sea

$$\|w_0 - w\| \leq \|y_0 - w\|$$

luego

$$\|w_0 - w\|^2 \leq \|y_0 - w\|^2$$

Ahora

$$\|w_0 - e_i\|^2 = \|w_0 - w\|^2 + \|w - e_i\|^2 \leq \|y_0 - w\|^2 + \|w - e_i\|^2 = \|y_0 - e_i\|^2$$

con lo que resulta

$$\|w_0 - e_i\|^2 \leq \|y_0 - e_i\|^2 \quad \text{y por tanto}$$

w minimiza

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - e_i \right\|^2 \quad \blacksquare$$

3. Otro algoritmo para la norma D.

Las consideraciones hechas arriba sugieren otra forma de calcular el filtro.

Como los vectores $\{V_1, \dots, V_\ell\}$ son datos y forman una

base del subespacio W puede aplicarseles a estos vectores el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, para obtener una base ortogonal $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ de W . Las proyecciones de los vectores e_k sobre el subespacio W son ahora fácilmente calculables considerando los productos $\langle w_i, e_k \rangle$.

Luego basta elegir

$$\min_{1 \leq k \leq m} \| \text{pr}_W(e_k) - e_k \|^2.$$

APENDICE IV

Diferencias entre la norma V y la norma D

Al maximizar la norma D, se debía hallar

$$\max_f \frac{|y_i|}{\|y\|} \quad (*)$$

Es claro que la maximización de $\frac{|y_i|}{\|y\|}$ equivale a la maximización de su cuadrado $\frac{y_i^2}{\|y\|^2}$ o sea

$$\max_f \frac{y_i^2}{\|y\|^2} \quad (**)$$

Denotemos por $y^2 = (y_1^2, \dots, y_m^2)$.

Luego $\frac{y^2}{\|y\|^2}$ pertenece al conjunto H antes considerado, por lo que es claro que (**) equivale a minimizar la distancia de $\frac{y^2}{\|y\|^2}$ al conjunto de vértices de H.

Por otro lado se vió que la norma Varimax equivale a maximizar la distancia $\frac{y^2}{\|y\|^2}$ al baricentro B de H.

De aquí se concluye que el comportamiento de las normas V y D se puede describir como:

Para cada filtro f se obtiene Y mediante la convolución $\hat{y} = f * x$.

y ahora se transforma según $y \rightarrow \frac{y^2}{(\|y\|)^2} \in H$.

Llegado a este punto, las normas se diferencian en:

la norma D mide la distancia (al cuadrado) al conjunto de vértices de H. O sea

$$\text{Mín}_k \left\| \frac{y^2}{\|y\|^2} - e_k \right\|^2$$

y la norma V la distancia de $\frac{y^2}{\|y\|^2}$ al baricentro B. O sea

$$\left\| \frac{y^2}{\|y\|^2} - B \right\|^2$$

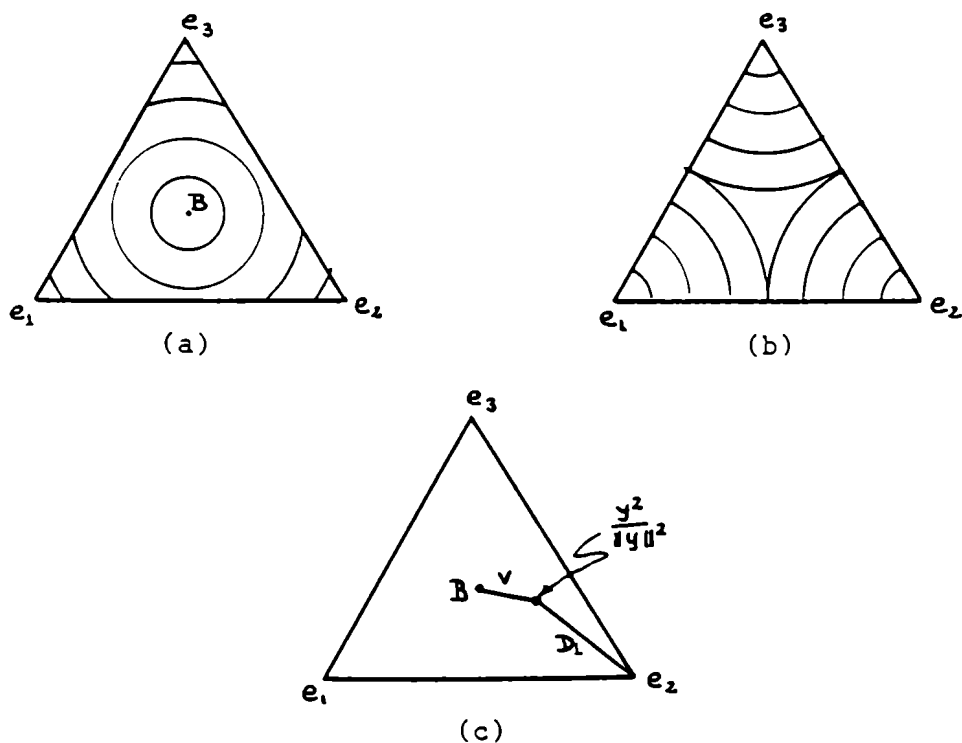


Fig. 19

Curvas de nivel ($m = 3$)

a) Norma Varimax

b) Norma D

c) Norma V y D para un vector $\frac{y^2}{\|y\|^2}$

LISTADO DE PROGRAMAS

A CONTINUACION SE DETALLAN LAS SUBROUTINAS UTILIZADAS

CONVOL(N, A, M, B, L, C)
A VECTOR DE N POSICIONES
B VECTOR DE M POSICIONES
C VECTOR DE L POSICIONES, L=N+M-1
INPUT: N, A, M, B, L
OUTPUT: C
*** REALIZA LA CONVOLUCION DE A Y B Y LA ENTREGA EN C.

COORD(N, M, L, F, N1, N2, SUP)
X(COMMON) MxN-MATRIZ DE MUESTRAS
F VECTOR DE L POSICIONES
N1 NUMERO DE MUESTRA
N2 COORDENADA DE LA MUESTRA CONVOLUCIONADA CON F
INPUT: N, M, L, F, N1, N2
OUTPUT: SUP
*** CONVOLUCIONA CADA COLUMNA DE X CON F CREANDO W
NORMALIZA W Y CALCULA |W(N1, N2)| COLOCANDOLO EN SUP.

CORREL(M, T, A)
T VECTOR DE DIM M
A VECTOR DE DIM M
INPUT: M, T
OUTPUT: A
*** HALLA LA AUTOCORRELACION DE T Y LA COLOCA EN A.

CORREL(G, A, N, B, L, C)
A VECTOR DE DIM G
B VECTOR DE DIM N
C VECTOR DE DIM L
INPUT: G, A, N, B, L
OUTPUT: C
*** CALCULA LA CORRELACION DE A Y DE B Y LA ENTREGA AN C.

EUREKA(LR, R, G, F, A)
R, G, F, A VECTORES DE DIM LR
INPUT: LR, R, G,
OUTPUT: F, A
*** ES UTILIZADA POR INVTOP PARA INVERTIR LA MATRIZ DE AUTO-
CORRELACION. CONTIENE EL ALGORITMO RECURSIVO DE LEVINSON.

IMPULS(LD, D, K)
D VECTOR DE DIM LD
K ENTERO, 1<=K<=LD
INPUT: LD, D, K
OUTPUT: D
*** COLOCA CEROS EN D Y 1 EN D(K).

INVTOP(LR, R, RI, SPACE)
LR ORDEN DE LA MATRIZ TOEPLITZ
R VECTOR DE DIM LR, QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DE LA
MATRIZ TOEPLITZ.
RI VECTOR DE DIM (LR**2), QUE CONTIENE LOS COEFICIENTES DE
LA MATRIZ INVERSA DADOS POR LINEAS.
SPACE VECTOR AUXILIAR
INPUT: LR, R
OUTPUT: RI, (SPACE)
*** INVIERTE LA MATRIZ TOEPLITZ

```

MEDIAN(M, K, L, F)
Y (COMMON) (NXM) MATRIX
N = NUMERO DE VECTORES
M = LONGITUD DE LOS VECTORES
K = NUMERO DE ITERACIONES
L = LONGITUD DEL FILTRO
F = FILTRO DE LONGITUD L
***** DECONVOLUCIONA LAS MUESTRAS QUE RECIBE EN CADA
COLUMNA DE LA MATRIZ X POR EL ALGORITMO DERIVADO POR
LA NORMA VARIMAX (WIGGINGS, 1977) Y DEVUELVE EL FILTRO
RESULTANTE , DESPUES DE K ITERACIONES EN EL VECTOR F **

```

```

MEDIAN2(R, M, L, F)
X (COMMON) MxN-MATRIZ DE MUESTRAS
F VECTOR DE L POSICIONES
INPUT: X, N, M, L
OUTPUT: F
*** 1) HALLA LA AUTOCORRELACION DE CADA COLUMNA DE X
2) SUMA LAS AUTOCORRELACIONES EN R
3) INVIERTE LA MATRIZ FORMADA A PARTIR DE R EN RI (INVTOP)
4) CONVOLUCIONA LOS ELEMENTOS COLUMNA DE RI CON CADA COLUMNA
DE X, Y LO COLOCA EN F UNA VEZ POR CADA COLUMNA, PARA
ENTREGARLO A COORD.
5) RECIBE SUP Y GUARDA EL FILTRO CORRESPONDIENTE AL MAYOR
VALOR DE SUP.

```

```

NORMA(N, A, C)
A, C VECTORES DE DIM. N
INPUT: A, N
OUTPUT: C
*** CALCULA LA NORMA 2 AL CUADRADO DEL VECTOR A Y LO ENTREGA EN C.

```

```

NORMALIZ(N, A)
A VECTOR DE DIM. N
INPUT: N, A
OUTPUT: A
*** NORMALIZA EL VECTOR A (NORMA2), Y LO ENTREGA EN A.

```

```

REVERSE(N, A)
A VECTOR DE DIM. N
INPUT: N, A
OUTPUT: A
*** CALCULA LA REVERSA DEL VECTOR A Y LA COLOCA EN A.

```

```

ZERO(L, F)
F VECTOR DE DIM. L
INPUT: L, F
OUTPUT: F
*** COLOCA EN CERO EN VECTOR F.

```

```

DIMENSION L3(3)
DOUBLE PRECISION L3, X1, X2, H, P, A1, A2, A3
DOUBLE PRECISION MOD1, MOD2, B1, B2, B3, D, C1, C2, C3, C
WRITE(6,*) 'ENTRE X1, X2, N'
READ(5,*) X1, X2, N
WRITE(4,*) X1, X2, N
I = 6.28318
H = H/N
DO 1=0, N
  F = I*H
  A1 = X1 * COS(P)
  A2 = X2 * COS(P) + X1 * SIN(F)
  A3 = X2 * SIN(P)
  CALCULO DE NORMA 1
  MOD1 = ABS(A1) + ABS(A2) + ABS(A3)
  B1 = (A1**2 + A2**2 + A3**2)/MOD1**2
  CALCULO DE NORMA 2
  MOD2 = A1**2 + A2**2 + A3**2
  B2 = (A1**4 + A2**4 + A3**4)/MOD2**2
  CALCULO DE NORMA 3
  D = SQRT(MOD2)
  DO J = 1, 3
    L3(J) = (A1 - (J-3)*(J-2)*D/2)**2 + (A2 - (1-J)*(J-3)*D)**2
    L3(J) = L3(J) + (A3 - (J-1)*(J-2)*D/2)**2
    L3(J) = L3(J)/MOD2
  END DO
  B3 = DMIN1(L3(1), L3(2), L3(3))
  B3 = (4 - B3)/4
  C1 = ABS(A1)/D
  C2 = ABS(A2)/D
  C3 = ABS(A3)/D
  C = DMAX1(C1, C2, C3)
  WRITE(4, 10) I, P, B1, B2, B3, C
  FORMAT(2X, I3, 2X, F4.2, 4(2X, F7.4))
  CALL GRAF(N, C, B2, B3) ! SUBR GRAF ESTA EN ARCH GRAF3
END DO
STOP
END

```

0
0
0
0

```

*****
* ESTE PROGRAMA GENERA UNA SERIE DE SPIKES
* 2 OPCIONES: 0 => CEROS + SERIE DE SPIKES
*              1 => RUIDO(1/50) + SERIE DE SPIKES
*****
DIMENSION A(3000),IP(3000)
INTEGER*4 IN
WRITE(6,*) 'ENTRE EL Nro. DE ORDEN DE LA SERIE DE SPK.'
READ(5,*) LEE
LEE = 10 + LEE
WRITE(6,*) 'ENTRE 0 O 1'
READ(5,*) IND
WRITE(6,*) 'ENTRE NNN LONGITUD DE Q'
READ(5,*) LONG
IF(IND)10,10,20
CALL ZERU(LONG,A)
GO TO 30
WRITE(6,*) 'ENTRE UN ENTERO DE CUATRO (4) CIFRAS'
READ(5,*) IN
DO I=1, LONG
  A(I)=(RAN(IN)- .5)/50
END DO
WRITE(6,*) 'ENTRE CANTIDAD DE SPIKES'
READ(5,*) KC
WRITE(6,*) 'ENTRE POSICIONES'
READ(5,*) (IP(J), J=1, KC)
WRITE(6,*) 'ENTRE LOS SPIKES'
READ(5,*) (A(IP(K)), K=1, KC)
WRITE(LEF,*) (A(K), K=1, LONG)
STOP
END

```

10
20

C
C
C
C

```

DIMENSION W(2000),Q(2000),C(4000)
*****
ESTE PROGRAMA CONVOLUCIONA LA SEÑAL FUENTE CON LA SERIE DE
SPIKES Y LA DEVUELVE EN C
*****
WRITE(6,*) 'ENTRE EL NUMERO DE MUESTRAS (N)'
READ(5,*) N
WRITE(6,*) 'ENTRE LW Y LQ (LONGITUDES DE W Y Q)'
READ(5,*) LW,LQ
READ(1,*) (W(K), K=1,LW)
LEE=10
LES=30
MQ=LW+LQ-1
DO I=1,N
  LEE=LEE+1
  LES=LES+1
  READ(LEE,*) (Q(K), K=1,LQ)
  CALL CONVOL(LW,W,LQ,Q,MQ,C)
  WRITE(LES,*) (C(K), K=1,MQ)
END DO
STOP
END

```

```

DIMENSION F(300), C(1000), QS(1000), F1(300)
WRITE(6,*) 'ENTRE L,M (LONG DEL FILTRO Y LA MUESTRA)'
READ(5,*) L,M
MQ=L+M-1
WRITE(6,*) 'ENTRE N, CANTIDAD DE MUESTRAS'
READ(5,*) N
READ(50,*) (F(K),K=1,L)
LEE=30
LES=50
DO I=1,N
    LEE=LEE+1
    LES=LES+1
    READ(LEE,*) (C(J),J=1,M)
    DO J=1,L
        F1(J) = F(J)
    END DO
    CALL CONVOL(M,C,L,F1,MQ,QS)
    CALL NORMALIZ(MQ,QS)
    WRITE(LES,*) (QS(K),K=1,MQ)
END DO
STOP
END

```

```

DIMENSION A(1000),B(1000)
*****
ESTE PROGRAMA GENERA RUIDO ALEATORIO Y LO ADICIONA A LA
MUESTRA QUE LEE EN A. EL PORCENTAJE DE RUIDO PUEDE SER
RESPECTO LA NORMA 2 DE LA SEÑAL O LA NORMA INFINITO DE
DE LA MISMA.
*****
WRITE(6,*) 'ENTRE NUMERO DE ARCHIVO DE ENTRADA'
READ(5,*) LEE
WRITE(6,*) 'ENTRE NUMERO DE ARCHIVO DE SALIDA'
READ(5,*) LES
WRITE(6,*) 'ENTRE LONGITUD DEL VECTOR'
READ(5,*) M
READ(LEE,*) (A(I), I=1,M)
WRITE(6,*) 'RUIDO 1 (ENERGIA) O RUIDO 2)'
READ(5,*) K
IF(K.EQ.2) GO TO 20
CALL RUIDO(M,A,B)
GO TO 30
20 CALL RUIDO2(M,A,B)
30 WRITE(LES,*) (A(I), I=1,M)
WRITE(6,10) LEE,LES
10 FORMAT(' ARCH',I3,' + RUIDO ---> ARCH',I3)
STOP
END

```

```

C      SUBROUTINE RUIDO(M, A, B)
C      *****
C      ESTA SUBROUTINA GENERA RUIDO Y LO ADICIONA A LA MUESTRA
C      SEGUN EL PORCENTAJE INDICADO, RESPECTO A LA NORMA 2
C      *****
      DIMENSION A(M), B(M)
      WRITE(6, *) 'ENTRE UN ENTERO DE CUATRO CIFRAS '
      READ(5, *) IN
      WRITE(6, *) 'ENTRE % DE RUIDO '
      READ(5, *) IP
      CALL NORMA(M, A, C)
      DO I=1, M
         B(I) = (RAN(IN) - .5)
      END DO
      CALL NORMA(M, B, D)
      D = SQRT(D)
      C = SQRT(C)
      X = C * IP / (D * 100)
      DO I=1, M
         A(I) = A(I) + B(I) * X
      END DO
      WRITE(6, 23) C, D * X
      FORMAT('  NORMA DE A = ', F7.4, '  NORMA DE B = ', F7.4)
      WRITE(6, 10) IP
      FORMAT(' SE ADICIONO', I3, '% DE RUIDO')
      RETURN
      END

```

```

C      SUBROUTINE RUIDO2(M, A, B)
C      *****
C      ESTA SUBROUTINA GENERA RUIDO Y LO ADICIONA A LA MUESTRA
C      SEGUN EL PORCENTAJE INDICADO, RESPECTO LA NORMA INFINITO.
C      *****
      DIMENSION A(M), B(M), C(400)
      WRITE(6, *) 'ENTRE UN ENTERO DE CUATRO CIFRAS '
      READ(5, *) IN
      WRITE(6, *) 'ENTRE % DE RUIDO '
      READ(5, *) IP
      DO I=1, M
         B(I) = (RAN(IN) - .5)
      END DO
      D = 0.
      DO J = 1, M
         C(J) = ABS(A(J))
         IF(D .GT. C(J)) GO TO 1
         D = C(J)
      CONTINUE
      END DO
      X = D * IP * 2 / 100
      DO I=1, M
         A(I) = A(I) + B(I) * X
      END DO
      WRITE(6, 10) IP
      FORMAT(' SE ADICIONO', I3, '% DE RUIDO')
      RETURN
      END

```

0
0
0
0
1
0

```

*****
ESTE PROGRAMA CALCULA LA NORMA VARIMAX Y LA NORMA D
DE N MUESTRAS.
*****
DIMENSION Y(1000)
WRITE(6,*) 'ENTRE N, M, Y ARCHIVO INICIAL'
READ(5,*) N, M, LEE
IP1 = 0.
IP2 = 0.
A = 0.
TNORMC = 0.
V = 0.
*****
DO I = 0, N-1
  V1 = 0.
  READ(LEE,*) (Y(K), K=1,M)
  LEE = LEE + 1
  CALL NORMA(M,Y,SNORC)
  TNORMC = TNORMC + SNORC
  DO J = 1, M
    V1 = V1 + Y(J) ** 4
  END DO
  SNOR4 = SNORC ** 2
  V1 = V1/SNOR4
  V = V1 + V
  DO J = 1, M
    Y(J) = ABS(Y(J))
    IF(A.GT.Y(J)) GO TO 1
    A = Y(J)
    IP2 = J
    IP1 = I+1
  CONTINUE
  END DO
END DO
*****
TNORM = SQRT(TNORMC)
D = A/TNORM
*****
WRITE(6,*) 'V =',V
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*) 'D =',D,'**',IP1,IP2
STOP
END

```

C
C
C
C
C
C
C

```

*****
DATOS = N x M - MATRIZ DE DATOS
N = NUMERO DE VECTORES
M = DIMENSION DE LOS VECTORES
L = LONGITUD DEL FILTRO
K = NUMERO DE ITERACIONES
F = FILTRO RESULTANTE
*****
DIMENSION F(150), VAR(1000)
COMMON DATOS(20, 1000)
WRITE(6, *) 'ENTRE CANTIDAD DE MUESTRAS'
READ(5, *) N
WRITE(6, *) 'ENTRE LONGITUD DEL FILTRO (<150)'
READ(5, *) L
WRITE(6, *) 'ENTRE LONGITUD DE LAS MUESTRAS (< 1000)'
READ(5, *) M
WRITE(6, *) 'ENTRE EL NUMERO DE ITERACIONES'
READ(5, *) K
DO I=1, N
  LEE = 30 + I
  READ(LEE, *) (DATOS(I, J), J=1, M)
END DO
CALL MED(N, M, K, L, F)
WRITE(50, *) (F(I), I=1, L)
WRITE(6, *) 'LF=', L, ' M=', M, 'L+M-1=', L+M-1
STOP
END

```

C

1

```

DIMENSION F(300)
COMMON X(1000, 15)
WRITE(6, *) 'VALOR DE N'
READ(5, *) N
WRITE(6, *) 'VALOR DE M'
READ(5, *) M
WRITE(6, *) 'VALOR DE L'
READ(5, *) L
WRITE(6, *) N, M, L
DO I = 1, N
  LEE = 30 + I
  READ(LEE, *) (X(J, I), J=1, M)
END DO
CALL MEDMOD(N, M, L, F)
CALL NORMALIZ(L, F)
WRITE(50, *) (F(K), K=1, L)
WRITE(6, 1) L, M, N, M+L-1
FORMAT(' L=', I3, ' M=', I3, ' N=', I3, ' M+L=', I3)
STOP
END

```


0000

```

SUBROUTINE CONVOL(N, A, M, B, L, C)
*****
REALIZA LA CONVOLUCION DE A Y B Y LA ENTREGA EN C.
*****
DIMENSION A(N), B(M), C(L)
CALL REVERSE(M, B)
CALL ZERO(L, C)
DO S=1, N
  DO J=1, M
    C(S+J-1)=A(S)*B(M+1-J) + C(S+J-1)
  END DO
END DO
RETURN
END

```

0000

```

SUBROUTINE COORD(N, M, L, F, N1, N2, SUP)
*****
CONVOLUCIONA CADA COLUMNA DE X CON F, CREAMDO W.
NORMALIZA W Y CALCULA W(N1, N2); COLOCANSOLO EN SUP.
*****
DIMENSION F(L)
DIMENSION A(1000), B(1300), W(1300, 15)
DIMENSION A(M), B(M+L-1), W(M+L-1, N)
COMMON X(1000, 15)
MQ = M+L-1
*****
CALCULO DE LA MATRIZ W (CONVOL. F*X)
*****
DO I = 1, N
  DO K = 1, M
    A(K) = X(K, I)
  END DO
  CALL CONVOL(L, F, M, A, MQ, B)
  DO K = 1, MQ
    W(K, I) = B(K)
  END DO
END DO
*****
CALCULO DE LA NORMA DE W
*****
TOT = 0
DO I = 1, N
  DO J = 1, MQ
    B(J) = W(J, I)
  END DO
  CALL NORMA(MQ, B, SNOR)
  TOT = SNOR + TOT
END DO
TOT = SQRT(TOT)
IF (TOT.EQ.0) GO TO 100
*****
CALCULO DE LA COORDENADA ((N1-1)*(M+L-1) + N2)
*****
IF (W(N2, N1)) 11, 11, 12
W(N2, N1) = -W(N2, N1)
SUP = W(N2, N1)/TOT
RETURN
WRITE(6, *) 'ERROR EN SUBROUTINA DIST - W = 0', N1, N2
STOP
END

```

0000

0000

11
12

100

C
C
C

```
SUBROUTINE CORREL(M, T, A)
*****
CALCULA LA AUTOCORRELACION DE T Y LA COLOCA EN A.
*****
DIMENSION T(M), A(M)
DO I=1, M
  A(I)=0.
  DO J=I, M
    A(I)=T(J)*T(J-I+1)+A(I)
  END DO
END DO
RETURN
END
```

C
C
C

```
SUBROUTINE CORREL2(G, A, N, B, L, C)
*****
CALCULA LA CORRELACION DE A Y B , Y LA COLOCA EN C.
*****
DIMENSION A(2), B(2), C(2)
DO I=1, L
  C(I)=0.
  DO J=1, N
    C(I)=A(I+J-1)*B(J) + C(I)
  END DO
END DO
RETURN
END
```

C
C
C

```
SUBROUTINE INVTOP(LR, R, RI, SPACE)
DIMENSION R(5), RI(25), SPACE(10)
*****
INVIERTE MATRICES TOEPLITZ. ROBINSON 1967.
*****
DO K=1, LR
  CALL IMPULS(LR, SPACE, K)
  J=LR*(K-1)+1
  I=LR+1
  CALL EUREKA(LR, R, SPACE, RI(J), SPACE(L))
END DO
RETURN
END
```

C
C
C
C

```
SUBROUTINE IMPULS(LD, D, K)
*****
ESTE PROGRAMA COLOCA CEROS EN EL VECTOR D Y UN 1 EN EL
LUGAR K.
*****
DIMENSION D(2)
DO I=1, LD
  D(I)=0.
  D(K)=1.
END DO
RETURN
END
```

C
C
C
C

```
SUBROUTINE EUREKA(LR, R, G, F, A)
*****
ESTA SUBROUTINA ES UCADA POR EL PROGRAMA INVTOP
ALGORITMO RECURSIVO DE LEVINSON.
*****
DIMENSION R(LR), G(LR), F(LR), A(LR)
V=R(1)
A(1)=1
F(1)=G(1)/V
IF (LR.EQ.1) RETURN
DO L=2, LR
  D=0.
  Q=0.
  L3=L-1
  DO J=1, L3
    K= -J+1
    D=D+A(J)*R(K)
    Q=Q+F(J)*R(K)
  FND DO
  C=D/V
  IF (L.EQ.2) GO TO 4
  L1=(L-2)/2
  L2=L1+1
  IF (L2.LT.2) GO TO 3
  DO J=2, L2
    HOLD=A(J)
    K= -J+1
    A(J)=A(J)-C*A(K)
    A(K)=A(K)-C*HOLD
  FND DO
  IF (2*L1.EQ.L-2) GO TO 4
  LT3=L2+1
  A(LT3)=A(LT3)-C*A(LT3)
  A(L)=-C
  V=V-C*D
  S=(G-G(L))/V
  DO J=1, L3
    K= -J+1
    F(J)=F(J)-S*A(K)
  FND DO
  F(L)=-S
END DO
RETURN
END
```

3
4


```

CALCULO DE V
DO I=1,N
  V(I)=0
  D(I)=0
  DO J=1,MQ
    V(I)=Y(I,J)**4 + V(I)
    D(I)=Y(I,J)**2 + D(I)
  END DO
  IF (D(I).EQ.0) GO TO 100
  V(I)=V(I)/(D(I)**2)
END DO
VARIMAX=0
DO LLL=1,N
  VARIMAX=V(LLL)+VARIMAX
END DO
WRITE(6,*) (VARIMAX=,VARIMAX)
VAR(IT) = VARIMAX
*****

```

```

CALCULO DE R
CALL ZERO(L,R)
DO I=1,N
  P(I)=V(I)/D(I)
  DO J=1,L
    R(J)=P(I)*W(I,J) + R(J)
  END DO
END DO
*****

```

```

C
C
C
C
CALCULO DE RIM (INVERSA DE R)
CALL INVTOP(L,R,RI,SPACE)
*****

```

```

CALCULO DE G
DO I=1,N
  DO J=1,L
    Y3(I,J)=Y(I,J)**3
  END DO
END DO
CALL ZERO(I,G)
DO I=1,N
  CALL ZERO(MQ,B)
  DO J=1,MQ
    B(J)=Y3(I,J)
  END DO
  CALL ZERO(M,T)
  DO J=1,M
    T(J)=X(I,J)
  END DO
  CALL CORREL2(MQ,R,M,T,L,G)
  DO K=1,L
    G1(K)=G(K)/(D(I)**2)
    G(K)=G1(K)+G(K)
  END DO
END DO
*****

```

```

C
C
CALCULO DE F
DO I=1,L
  DO J=1,L
    F(I)=RI((I-1)*L+J)*G(J)+F(I)
  END DO
END DO

```

```

C
CALL NORM(L,F)
*****

```

```

END DO
WRITE(90,*) (VAR(LLL), LLL=1,C-1)
RETURN
100
30
WRITE(6,30) I
FORMAT(' ERROR1          Y( ',I3, ') = 0')
STOP
END

```



```

C
C
C
SUBROUTINE NORMA(N)
*****
CALCULA LA NORMA 2 DEL VECTOR B Y LO DE-
VUELVE NORMALIZADO
*****
DIMENSION B(N)
A=0
DO I=1,N
    A = B(I) ** 2 + A
END DO
IF (A) 10,10,20
WRITE (6,*) 'ERROR'      FILTRO = 0'
A = SQRT(A)
DO I=1,N
    B(I) = B(I)/A
END DO
WRITE(6,*) 'NORM'
RETURN
END

```

```

C
C
SUBROUTINE NORMA(N, A, C)
*****
ESTA SUB CALCULA LA NORMA 2 AL CUADRADO DEL VECTOR A
*****
DIMENSION A(N)
C=0
DO I=1,N
    C = A(I)**2 + C
END DO
IF (C.EQ 0) WRITE(6,*) 'NORMA=0 EN SUBR. "NORMA"'
RETURN
END

```

```

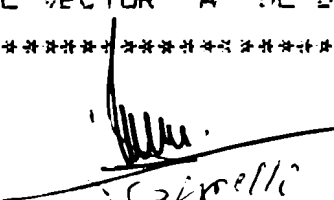
C
C
C
SUBROUTINE REVERSE (N, A)
*****
ESTA SUBROUTINA HACE LA REVERSA DEL VECTOR "A" Y LA
COLOCA EN EL VECTOR "A".
*****
DIMENSION A(N) , B(5000)
DO I = 1, N
    B(I) = A(N + 1 - I)
END DO
DO K = 1, N
    A(K) = B(K)
END DO
RETURN
END


```

```

C
C
C
SUBROUTINE ZERO (N, A)
*****
ESTA SUBROUTINA COLOCA EN CERO EL VECTOR "A" DE DIMEN-
SION N
*****
DIMENSION A(2)
DO I = 1, N
    A(I) = 0
END DO
RETURN
END

```





M. HERRERA

BIBLIOGRAFIA

- [1] ASH, R.B. y GARDNER, M.F., (1975): Topics in Stochastic Processes; New York, Academic Press.
- [2] BALAKRISHNAA, A., (1957): A note on the sampling principle for continuous signals; IRE Trans. on Information Theory, IT-3, 143-146.
- [3] BEUTLER, F.J., (1961): Sampling Theorems and Bases in a Hilbert Space; Information and Control 4, 97-117.
- [4] CARROL, J.B., (1953): An analytical solution for approximating simple structure in factor analysis, Psychometrika 18, 23-38.
- [5] CLAERBOUT, J.F. and ROBINSON, E.A., (1964): The error in least-squares inverse filtering; Geophysics 19, 118-120.
- [6] DOOB, J.L., (1953): Stochastic Processes; Canada, John Wiley & Sons, Inc.
- [7] HARMAN, H.H., (1960): Modern Factor Analysis; Univ. Chicago. Press.
- [8] KAISER, H.F., (1958): The Varimax criterion for analytic rotation in factor analysis, Psychometrika 23, 187-200.
- [9] MARCIA, K.V., KENT, J.T. and BIBBY, J.M., (1979): Multivariate Analysis; London, Academic Press.
- [10] OLDEMBURG, D.W., LEVY, S. and WHITTALL, K.P., (1981): Wavelet estimation and Deconvolution; Geophysics, 46, 1528-1542.
- [11] OPPENHEIM, A.V. and SCHAFER, R.W., (1975): Digital Signal Processing; London, Prentice-Hall International, Inc.
- [12] OPPENHEIM, A.V., editor (1978): Applications of Digital Signal Processing; Prentice-Hall, Ind.



- [13] OOE, M. and ULRYCH, T.J., (1979): Minimum Entropy Deconvolution with an Exponential Transformation; Geophysical Prospecting, 27, 458-473.
- [14] ROBINSON, E.A., (1954): Predictive Decomposition of Time Series with applications to Seismic Exploration; Ph. D Thesis, MIT, Cambridge, Mass. [Also in Geophysics, 1967, 32, 418-484].
- [15] ROBINSON, E.A. and TREITEL, S., (1980): Geophysical Signal Analysis; Prentice Hall, Inc.
- [16] SHANNON, C., (1949): Communication in the presence of noise; Proc. IRE, 37, 10-21.
- [17] SILVIA, M.T. and ROBINSON, E.A., (1979): Deconvolution of geophysical time series in the exploration for oil and natural gas; Elsevier Scientific Publishing Company.
- [18] ULRYCH, T.J. and WALKER, C., (1982): Analytic minimum entropy deconvolution; Geophysics, 47, 1295-1302.
- [19] WIGGINGS, R.A., (1978): Minimum Entropy Deconvolution; Geoprospection 16, 21-35.

ANÁLISIS DEL ERROR EN
SHAPING FILTER
Y
DECONVOLUCIÓN POR MÍNIMA ENTROPÍA
CON NORMA D (MEDD)

por

Carlos Alberto Cabrelli

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Introducción	1
1. El error en Deconvolución por Mínima Entropía con norma D (MEDD)	2
1.1. Notación	2
1.2. Shaping y Spiking Filter	3
1.3. El error en Spiking filter	5
1.4. El error en Shaping filter	6
1.4.1. Acotación del error en función de la longitud del filtro	7
1.4.2. Acotación del error en Shaping filter en función de la simplicidad del output	11
1.5. Deconvolución por mínima entropía con norma D	12
1.5.1. Reducción del caso de N -inputs a simple input	12
1.5.2. Análisis del error	13
1.5.3. Criterio de elección y error del MEDD filter	20
Apéndice	25
Convergencia del algoritmo MED con norma Varimax	26
Conclusiones	28

Introducción

En esta sección se hace un análisis del error en el algoritmo MEDD, bajo cierta hipótesis sobre la autocorrelación de la serie de impulsos.

El estudio realizado involucra los conceptos de "Spiking filter" y "Shaping filter", por lo que se hace una breve exposición de los resultados conocidos en este tema.

En el caso de "Shaping filter" se obtiene un resultado nuevo que muestra que el error tiende a cero cuando la longitud del filtro tiende a infinito, para un desplazamiento conveniente del output deseado.

Se agregan también las conclusiones de las pruebas numéricas en el análisis de la convergencia del algoritmo MED con la norma Varimax, al variar el filtro inicial.

1. El error en Deconvolución por Mínima Entropía con norma D (MEDD)

1.1. Notación

Si $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ definimos.

$A_\ell \in \mathbb{R}^{(\ell+1) \times (n+\ell+1)}$ como

$$A_\ell = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

En particular

A_0 se identifica con a

y si $a \in \mathbb{R}$ entonces $A_\ell = a \cdot I$ (I matriz identidad)

Convolución

Sean ahora $a = (a_0, \dots, a_n)$

$b = (b_0, \dots, b_m)$

Si definimos $c = a * b = (c_0, \dots, c_{n+m})$

con

$$c_t = \sum_k a_k b_{t-k} \quad (\text{donde la suma se hace sobre los } \text{índices para los que tenga sentido}) \quad (2)$$

resulta $c = a \cdot B_n$

y también $c = b \cdot A_m$

Correlación

Sea $a = (a_0, \dots, a_n)$ y $d = (d_0, \dots, d_{n+\ell})$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$)

$$\text{si } c_s = \sum_j d_{j+s} a_j \quad (s = 0, 1, \dots, \ell)$$

resulta

$$c = d {}^t A_\ell \quad (3)$$

Si $a = (a_0, \dots, a_n)$, la matriz de las ℓ primeras autocorrelaciones de a se define como la matriz

$$R = (r_{i-j}), \quad i, j = 0, \dots, \ell$$

donde

$$r_{i-j} = c_{ij} = \sum_k a_{k+i} a_{k+j} = \sum_k a_k a_{k+(i-j)}$$

Entonces resulta

$$R = A_\ell {}^t A_\ell \quad (4)$$

R es simétrica y si $a \neq 0$ no singular (Ver apéndice II de parte I)

Vale además que si

$$a = (a_0, \dots, a_n), \quad b = (b_0, \dots, b_m), \quad c = (c_0, \dots, c_h)$$

$$\text{entonces } (a * b)_\ell = [a B_n]_\ell = A_\ell B_{n+\ell} \quad (5)$$

y por lo tanto

$$a*(b*c) = a(b*c)_n = a(b C_m)_n = a B_n C_{m+n} \quad (6)$$

1.2. Shaping y Spiking Filter

Sea $w = (w_0, \dots, w_n)$ una ondícula fuente

y $d = (d_0, \dots, d_{n+\ell})$ el output deseado.

el Shaping filter de longitud $\ell+1$ se define como el filtro

$f = (f_0, f_1, \dots, f_\ell)$ que minimiza

$$\|w * f - d\|_2^2 \quad \text{sobre} \quad f \in \mathbb{R}^{\ell+1} \quad (7)$$

se sabe que f^0 satisface la ecuación

$$f^0 W_\ell^t = d \quad (8)$$

Si en particular

$$d = e_k = (\overbrace{0, \dots, 0}^k, 1, 0, \dots, 0)$$

$$e_k \in \mathbb{R}^{n+\ell+1}, \quad k = 0, \dots, n+\ell$$

el filtro $a^k = (a_{k0}, \dots, a_{k\ell})$ que minimiza

$$\|w * a - e_k\|_2^2 \quad \text{sobre} \quad a \in \mathbb{R}^{\ell+1} \quad (9)$$

se denomina el Spiking filter de desplazamiento, delay o retardo k

$$a^k \text{ satisface } a^k W_\ell^t = e_k \quad (10)$$

donde $e_k^t W_\ell$ es la $(k+1)$ -ésima fila de la matriz W_ℓ^t

o sea $e_k^t W_\ell = (w_k, w_{k-1}, \dots, w_{k-\ell})$

con $w_i = 0$ si $i \notin [0, n]$

Si A es ahora la $(n+\ell+1) \times (\ell+1)$ matriz, cuyas filas son los vectores $a^0, \dots, a^{n+\ell}$, se sabe que el Shaping filter f^0 para el input w y el output d es

$$f^0 = dA \quad (11)$$

$$\text{o sea } f^0 = \sum_{k=0}^{n+\ell} d_k a^k \quad (12)$$

(Robinson y Treitel, 1980)

Resulta entonces que el Shaping filter es combinación lineal de los Spiking filter donde los coeficientes son las coordenadas del output d

1.3. El error en Spiking filter

Sean w , a^k y e_k ($k = 0, \dots, n+l$) como en (9) y llamemos

$$J_k = \|w * a^k - e_k\|_2^2$$

al error del spiking filter de retraso k

Claerbout y Robinson, (1963) han probado que

$$J_0 + J_1 + \dots + J_{n+l} = n, \quad 0 \leq J_k \leq 1 \quad (13)$$

o sea, la suma de los errores de los Spiking filter es igual a la longitud de la ondícula disminuida en una unidad, y por tanto independiente de la longitud del filtro.

Luego existe k_0 con la propiedad

$$J_{k_0} \leq \frac{n}{n+l+1} \quad (14)$$

Si V_ℓ es el error mínimo entre todos los spiking filter de longitud $\ell+1$

$$0 \leq V_\ell \leq \frac{n}{n+l+1} \rightarrow 0 \quad (\ell \rightarrow +\infty)$$

y por tanto

$$V_\ell \rightarrow 0 \quad (\ell \rightarrow +\infty) \quad (15)$$

Un valor de k con la propiedad de ser J_k mínimo se denomina delay o retardo óptimo para longitud de filtro $\ell+1$ y ondícula w, a^k se denomina filtro óptimo.

Para el caso que w es de fase mínima se sabe que

$$J_0 \rightarrow 0 \quad (\ell \rightarrow +\infty) \quad (16)$$

(Claerbout y Robinson, 1963)

1.4. El error en Shaping filter

Expresión del error

Sea a^k el spiking filter de longitud $\ell+1$ y $c^k = a^k * w$ es el output al aplicar a^k

$$\text{luego} \quad c^k = a^k \cdot W \quad \text{y} \quad C = A W \quad (17)$$

donde C es la $(n+\ell+1) \times (n+\ell+1)$ matriz con filas c^k y A es la matriz de los spiking filter.

Como a^k satisface (10)

$$a^k W_\ell {}^t W_\ell = e_k {}^t W_\ell$$

resulta

$$A W_\ell {}^t W_\ell = {}^t W_\ell$$

y multiplicando por ${}^t A$ a derecha

$$A W_\ell {}^t W_\ell {}^t A = {}^t W_\ell {}^t A$$

$$\text{o sea} \quad C {}^t C = {}^t C \quad (18)$$

Si ahora f^0 es el Shaping filter para el output d de (11) $f^0 = dA$ y de (8) $f^0 W_\ell {}^t W_\ell = d {}^t W_\ell$

El error

$$J = \|w * f^0 - d\|_2^2$$

es

$$\begin{aligned} (w * f^0 - d) \text{ }^t (w * f^0 - d) &= \\ &= (dA * w - d) \text{ }^t (dA * w - d) \\ &= (dA W_\ell - d) \text{ }^t (dA W_\ell - d) \end{aligned}$$

y usando (18) y que $C = AW_\ell$

$$J = d(I-C) \text{ }^t d \tag{19}$$

(Robinson y Treitel, 1980)

lo que da una expresión simplificada para el error en Shaping filter.

1.4.1. Acotación del error en función de la longitud del filtro

En esta sección se prueba un resultado nuevo para la acotación del error en Shaping filter, que generaliza el resultado expuesto anteriormente para Spiking filter.

Consideremos nuevamente la entrada

$$w = (w_0, \dots, w_n)$$

$$d = (d_0, \dots, d_{n+\ell})$$

y sea ahora $e_k \in \mathbb{R}^{m+1}$ $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)$
 $k = 0, \dots, m$

y sea f^k el Shaping filter correspondiente al input w y al output $d * e_k$ de longitud igual a $n+\ell+m+1$

$$f^k = (f_{k0}, f_{k1}, \dots, f_{k\ell+m})$$

$$\text{Sea } \epsilon_k = \|w * f^k - d * e_k\|_2 \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Se trata de hallar

$$\epsilon = \sum_{k=0}^m \epsilon_k \quad (20)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{k=0}^m \|w * f^k - d * e_k\|_2 = \\ &= \sum_{k=0}^m \|w * (\sum_{j=0}^{n+l} d_j a^{j+k}) - \sum_{j=0}^{n+l} d_j \delta_{k+j}\|_2 = \end{aligned}$$

$$\delta_h : [0, n+l+m] \rightarrow [0, 1], \quad \delta_h(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = h \\ 0 & \text{si } i \neq h \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^m \left\| \sum_{j=0}^{n+l} d_j (w * a^{j+k}) - \sum_{j=0}^{n+l} d_j \delta_{j+k} \right\|_2 = \\ &= \sum_{k=0}^m \left\| \sum_{j=0}^{n+l} d_j (w * a^{j+k} - \delta_{j+k}) \right\|_2 \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=0}^{n+l} |d_j| \|w * a^{j+k} - \delta_{j+k}\|_2 \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n+l} |d_j| \left(\sum_{k=0}^m \|w * a^{j+k} - \delta_{j+k}\|_2 \right) \leq \end{aligned}$$

aplicando Cauchy-Schwartz a la expresión entre paréntesis

$$\leq \sum_{j=0}^{n+l} |d_j| (m+1)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^m \|w * a^{j+k} - \delta_{j+k}\|_2^2 \right)^{1/2} \quad (*)$$

Ahora

$$\sum_{k=0}^m \|w * a^{j+k} - \delta_{j+k}\|_2^2 \leq \sum_{h=0}^{n+l+m} \|w * a^h - \delta_h\|_2^2 = n$$

(la última igualdad es por (13))

Luego

$$(*) \quad \leq \sum_{j=0}^{n+l} |d_j| (m+1)^{1/2} n^{1/2} = \\ = \|d\|_1 (m+1)^{1/2} n^{1/2}$$

Luego

$$\epsilon = \sum_{k=0}^m \epsilon_k \leq \|d\|_1 (m+1)^{1/2} n^{1/2} \quad (21)$$

Entonces existe $k_0 \in [0, m]$ con la propiedad

$$\epsilon_{k_0} = \|w * f^{k_0} - d * e_{k_0}\|_2 \leq \|d\|_1 \frac{(m+1)^{1/2} n^{1/2}}{m+1}$$

o sea

$$\epsilon_{k_0} \leq \|d\|_1 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+1}} \quad (22)$$

Si $\epsilon_{\min}(m)$ es el mínimo error del Shaping filter de longitud $l+m+1$ para el input

$$w = (w_0, \dots, w_n)$$

y el output

$$d * e_k = (0, \dots, 0, d_0, \dots, d_{n+l}, 0, \dots, 0)$$

$$\text{resulta } \epsilon_{\min}(m) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow +\infty) \quad (23)$$

Este resultado puede ser obtenido también de la siguiente forma:

Sea a^k el spiking filter de óptimo retardo de longitud $l+1$ para el input w

$$\text{Luego } \|w*a^k - e_k\|_2^2 \leq \frac{n}{n+l+1}$$

Sea ahora $d = (d_0, \dots, d_m)$ el output deseado

Entonces

$$\begin{aligned} \|w*(a^k*d) - d*e_k\|_2 &= \|d*(w*a^k - e_k)\|_2 < \\ &\leq \|d\|_1 \|w*a^k - e_k\|_2 < \|d\|_1 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+l+1}} \end{aligned}$$

entonces si $f = a^k*d$ y f^k es el Shaping filter para el output $d*e_k$ resulta

$$\epsilon_k = \|w*f^k - d*e_k\|_2 < \|w*f - d*e_k\|_2 < \|d\|_1 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+l+1}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\min}(l) \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow +\infty)$$

En el caso que w sea de fase mínima

$$J_0(l) \rightarrow 0, \quad (l \rightarrow +\infty)$$

$$\text{con } J_0 = \|w*a^0 - e_0\|_2^2 \quad (\text{ver 16})$$

luego

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \|w*f^0 - d*e_0\|_2 < \|w*(a^0*d) - d*e_0\|_2 = \\ &= \|d*(w*a^0 - e_0)\|_2 < \|d\|_1 J_0^{1/2} \end{aligned}$$

Luego

$$\epsilon_0 \rightarrow 0 \quad (l \rightarrow +\infty) \quad (24)$$

Para cada longitud del filtro, el valor de k que realiza el error mínimo se llamará el optimun delay para el Shaping filter de output d .

1.4.2. Acotación del error en Shaping filter en función de la simplicidad del output.

Sea

$$E = \|w * f - d\|_1 \quad (\text{f el shaping filter})$$

en $w = (w_0, \dots, w_n)$, $d = (d_0, \dots, d_{n+l})$ y $f = (f_0, \dots, f_l)$

Luego

$$\begin{aligned} E &= \|w * (\sum_{j=0}^{n+l} d_j a^j) - \sum_{j=0}^{n+l} d_j e_j\|_2 = \\ &= \|\sum_{j=0}^{n+l} d_j (w * a^j - e_j)\|_2 \leq \sum_{j=0}^{n+l} |d_j| \|w * a^j - e_j\|_2 \\ &= \sum_{j=0}^{n+l} |d_j| (J_j)^{1/2} \quad (*) \end{aligned}$$

Supongamos que el optimun delay k_0 para la ondícula w coincida con $k(d)$ donde $k(d)$ cumple

$$|d_{k(d)}| \geq |d_k| \quad 0 \leq k \leq n+l$$

Luego

$$(*) = |d_{k_0}| (J_{k_0})^{1/2} + \sum_{i \neq k_0} |d_i| (J_i)^{1/2}$$

Si consideramos $E_N = \frac{E}{\|d\|_2}$ resulta aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la acotación del error en Spiking filter $E_N \leq D(d) J_{k_0}^{1/2} + \frac{\|\bar{d}\|_2}{\|d\|_2} \sqrt{n}$ donde

$$\bar{d} = (d_0, \dots, d_{k_0-1}, d_{k_0+1}, \dots, d_{n+l})$$

Por ser k_0 optimun delay

$$J_{k_0} \leq \frac{n}{n+l+1}$$

o sea

$$E_n \leq D(d) \sqrt{\frac{n}{n+l+1}} + \sqrt{1-D^2(d)} \sqrt{n}.$$

1.5. Deconvolución por mínima entropía con norma D

1.5.1. Reducción del caso de N-inputs a simple input

Sean

$$x^i = (x_{i0}, \dots, x_{in+m}), \quad i = 1, \dots, N, \quad \begin{array}{l} N \text{ muestras de longitud} \\ n+m+1 \end{array}$$

$$w = (w_0, \dots, w_n) \quad \text{la ondícula fuente}$$

$$q^i = (q_{i0}, \dots, q_{im}), \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{las series de impulsos}$$

con
$$x^i = w * q^i, \quad i = 1, \dots, N$$

Si
$$x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^{N \cdot (n+m+1)}$$

entonces

$$x = w * q$$

con
$$q = (q^1, a, q^2, a, \dots, q^{N-1}, a, q^N) \quad (*)$$

y
$$a = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Luego el caso de múltiples entradas puede ser considerado un caso particular de el de simple entrada, con q construido como en (*).

1.5.2. Análisis del errorModelo:

Sea

 $w = (w_0, \dots, w_n)$ la ondícula fuente $q = (q_0, \dots, q_m)$ la serie de impulsosy $x = (x_0, \dots, x_{n+m})$, $x = w * q$, la entrada al algoritmoAlgoritmo:

El algoritmo consiste en hallar un filtro

$$f^k = (f_{k0}, \dots, f_{k\ell}) \text{ que maximice } \frac{|y_k|}{\|y\|_2}$$

(o equivalentemente que minimice $\| \frac{y}{\|y\|_2} - e_k \|_2$)

con

$$y = x * f \quad f \in \mathbb{R}^{\ell+1} - \{0\}.$$

para cada k . ($k = 0, \dots, n+m+\ell$)Si $f^0, \dots, f^{n+m+\ell}$ son tales filtros, se elige entonces

$$k_1 \in [0, n+m+\ell] \text{ tal que } \frac{|(x * f^{k_1})(k_1)|}{\|x * f^{k_1}\|_2} \geq \frac{|(x * f^k)(k)|}{\|x * f^k\|_2} \quad \forall k \in [0, n+m+\ell]$$

$$\text{(o equivalentemente } \| \frac{x * f^{k_1}}{\|x * f^{k_1}\|_2} - e_{k_1} \|_2 \leq \| \frac{x * f^k}{\|x * f^k\|_2} - e_k \|_2$$

$$\forall k \in [0, n+m+\ell])$$

f^{k_1} se denomina filtro óptimo de longitud $\ell+1$ para la norma D y los datos iniciales (25)

La ecuación de los filtros f^k en la notación aquí adoptada resulta

$$f^k X_\ell \quad {}^t X_\ell = e_k \quad {}^t X_\ell \quad (26)$$

(Observación: f^k resulta ser el k-ésimo spiking filter para la entrada x)

Se hace ahora la hipótesis de que las $n+\ell$ primeras autocorrelaciones de la serie de impulsos q son cero.

O sea

$$\text{si} \quad r_i = \sum_j q_j q_{j+i}$$

entonces

$$r_i = 0, \quad i = 1, \dots, n+\ell \quad (27)$$

donde $n+1$ y $\ell+1$ son respectivamente las longitudes de la ondícula y el filtro.

Llamemos

$$o^2 = r_0 = \|q\|_2^2$$

Luego resulta

$$Q_{n+\ell} \quad {}^t Q_{n+\ell} = o^2 \quad I \quad (28)$$

(ver (4))

Teniendo en cuenta que $x = w*q$, resulta

$$x = w Q_n \quad \text{y} \quad X_\ell = [w Q_n]_\ell = W_\ell Q_{n+\ell} \quad (29)$$

Luego

$$X_{\ell}^t X_{\ell} = W_{\ell} Q_{n+\ell}^t Q_{n+\ell}^t W_{\ell}^t \quad (30)$$

por lo que la ecuación (26) queda

$$f^k W_{\ell} Q_{n+\ell}^t Q_{n+\ell}^t W_{\ell}^t = e_k^t Q_{n+\ell}^t W_{\ell}^t \quad (31)$$

y usando la hipótesis (28)

$$o^2 f^k W_{\ell}^t W_{\ell} = e_k^t Q_{n+\ell}^t W_{\ell}^t \quad (32)$$

Si llamamos

$$q^k = e_k^t Q_{n+\ell} = (q_k, q_{k-1}, \dots, q_{k-(n-\ell)})$$

es

$$o^2 f^k W_{\ell}^t W_{\ell} = q^k W_{\ell}^t \quad (33)$$

finalmente

$$f^k W_{\ell}^t W_{\ell} = \frac{1}{o^2} q^k W_{\ell}^t \quad (34)$$

La ecuación (34) muestra que f^k es el Shaping filter para el input w

y el output $\frac{1}{o^2} q^k$

$$o \text{ sea } f^k \text{ minimiza } \|w * f - \frac{1}{o^2} q^k\|_2 \text{ sobre } f \in R^{\ell+1} \quad (35)$$

Sea ahora

$$\epsilon_{k,j}(q, \ell) = \|x * f^k - \frac{q}{\|q\|_2} * e_j\|_2 \quad (e_j \in R^{n+\ell+1}, \\ j = 0, \dots, n+1) \quad (36)$$

el error que comete el filtro f^k con respecto al vector q normalizado y con un delay j .

Se desea acotar

$$\epsilon_{\min}(q, \ell) = \text{Min}_{k,j} \epsilon_{kj}(q, \ell) \quad (k = 0, \dots, n+\ell+m)$$

$$(j = 0, \dots, n+\ell)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{k,j}(q, \ell) &= \|x * f^k - \frac{q}{\|q\|_2} * e_j\|_2 = \|w * q * f^k - \frac{q}{\|q\|_2} * e_j\|_2 = \\ &= \|w * \frac{q}{\|q\|_2} * (f^k \cdot \|q\|_2) - \frac{q}{\|q\|_2} * e_j\|_2 = \\ &= \|\frac{q}{\|q\|_2} * (w * (f^k \cdot \|q\|_2) - e_j)\|_2 = \\ &= \|w * (f^k \cdot \|q\|_2) - e_j\|_2 < \\ &< (\|w * (f^k \cdot \|q\|_2) - \frac{q^k}{\|q\|_2^2}\|_2 + \|\frac{q^k}{\|q\|_2} - e_j\|_2) = \\ &= \|q\|_2 \|w * f^k - \frac{q^k}{\|q\|_2^2}\|_2 + \|\frac{q^k}{\|q\|_2} - e_j\|_2 = \\ &= \|q\|_2 \epsilon_k^{(1)}(q, \ell) + \epsilon_{kj}^{(2)}(q, \ell) \end{aligned} \quad (37)$$

Consideremos primero ℓ constante

Elijamos

k_0 un delay óptimo, para longitud de filtro $\ell+1$ y ondícula w . ($0 \leq k_0 \leq n+\ell$) (ver 1.3)

(O sea si a^k es el k -ésimo spiking filter para longitud de filtro $\ell+1$ y ondícula w , entonces

$$\|w * a^{k_0} - e_{k_0}\|_2 \leq \|w * a^k - a_k\|_2 \quad y$$

$$\|w * a^{k_0} - e_{k_0}\|_2^2 \leq \frac{n}{n+\ell+1}.$$

$k(q)$ el índice correspondiente a la coordenada de q de máximo valor absoluto.

(si para más de un valor de k , $|q_k|$ es máximo se elige cualquiera de ellos, por ejemplo el primer k con tal propiedad).

$$y \quad \varphi = \varphi(q) = k(q) + k_0$$

Luego si en (36) hacemos

$$k = \varphi(q) \quad y \quad j = k_0$$

y sin pérdida de generalidad suponemos $q_{k(q)} > 0$

(para el caso general basta considerar

$$\text{sg}(q_{k(q)}) \cdot q^\varphi \quad \text{en lugar de } q^\varphi)$$

Resulta

$$\epsilon_\varphi^{(1)}(q) = \|w * f^\varphi - \frac{q^\varphi}{\|q\|_2} \|_2 =$$

Como f^φ es shaping filter (por 35), luego usando (12)

resulta

$$\begin{aligned}
& \|w * (\sum_{i=0}^{n+l} \frac{q_{\varphi-i}}{\|q\|_2^2} a^i) - \sum_{i=0}^{n+l} \frac{q_{\varphi-i}}{\|q\|_2^2} e_i\|_2 = \\
& \quad (\text{con } a^i/a^i W_\ell \text{ } {}^t W_\ell = e_i \text{ } {}^t W_\ell) \\
& = \| \sum_{i=0}^{n+l} \frac{q_{\varphi-i}}{\|q\|_2^2} (w * a^i - e_i) \|_2 \leq \\
& \leq \sum_{i=0}^{n+l} \frac{|q_{\varphi-i}|}{\|q\|_2^2} \|w * a^i - e_i\|_2 = \\
& = \sum_{i=0}^{n+l} \frac{|q_{k(q)+k_0-i}|}{\|q\|_2^2} \|w * a^i - e_i\|_2 \quad (38)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\epsilon_{\varphi, k_0}^{(2)}(q) = \| \frac{q^\varphi}{\|q\|_2} - e_{k_0} \|_2 \quad (39)$$

De Parte I, III.4 pag. 35 se deduce facilmente que

$$D(q) > 1 - \epsilon \Leftrightarrow D_1(q) < 2\epsilon \quad (40)$$

Lo que se expresará diciendo

$$D(q) \rightarrow 1 \Leftrightarrow D_1(q) \rightarrow 0 \quad (41)$$

Ahora se ve facilmente que

si $D(q) \rightarrow 1$ entonces

$$\frac{|q_{k(q)}|}{\|q\|_2} \rightarrow 1$$

y $\frac{|q_j(q)|}{\|q\|_2} \rightarrow 0 \quad (\forall j \quad j: \mathbb{R}_*^{m+1} \rightarrow [0, m] / (\forall q), j(q) \neq k(q))$

De acuerdo a esto y usando (37) y (38)

$$\begin{aligned} \|q\|_2 \epsilon_{\varphi}^{(1)}(q) &\leq \frac{\|q\|_2}{\|q\|_2} \sum_{i=0}^{n+l} \frac{|q_{k(q)+k_0-i}|}{\|q\|_2} \|w * a^i - e_i\|_2 \rightarrow \\ &\rightarrow \|w * a^{k_0} - e_{k_0}\|_2 \leq \sqrt{\frac{n}{n+l+1}} \end{aligned} \quad (42)$$

$D(q) \rightarrow 1$

y

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi, k_0}^{(2)}(q) &= \left\| \frac{q^{\varphi}}{\|q\|_2} - e_{k_0} \right\|_2 = \\ &= \left(\sum_{i \neq k_0} \left(\frac{q_{k(q)+k_0-i}}{\|q\|_2} \right)^2 + \left(\frac{q_{k(q)}}{\|q\|_2} - 1 \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $D(q) \rightarrow 1$ (43)

Luego de (42) y (43)

si

$$a = \|w * a^{k_0} - e_{k_0}\|_2 \quad \text{entonces}$$

$$\epsilon_{\varphi, k_0}(q) = \|x * f^{\varphi} - \frac{q}{\|q\|_2} * e_{k_0}\|_2 \rightarrow a \leq \left(\frac{n}{n+l+1} \right)^{1/2} \quad (44)$$

para

$D(q) \rightarrow 1$

Como $0 \leq \epsilon_{\min}(q) \leq \epsilon_{\varphi, k_0}(q)$

Resulta

$$\lim_{D(q) \rightarrow 1} \epsilon_{\min}(q) \leq a \leq \left(\frac{n}{n+l+1}\right)^{1/2} \quad (45)$$

(en caso que este último limite no exista se deberá entender límite superior)

1.5.3. Criterio de elección y error del MEDD filter

En el párrafo anterior se encontró una acotación del error para un delay φ que depende de la fase (k_0) de la señal fuente w y de la simplicidad de la serie reflectiva q .

En esta sección se estudiará el error para el delay k_1 , que es el seleccionado por el MEDD (Ver 25).

Consideremos entonces para $0 \leq k \leq n+l+m$

$$D_k = \|f^k * x - f * e_j \cdot \alpha\|_2$$

donde f^k es el k -ésimo MEDD filter, $e_j \in R^{n+l+1}$, $\alpha \in [-1, 1]$

D_k mide el error cometido respecto de $q * e_j \cdot \alpha$ donde j indica el desplazamiento o delay de la salida

$|\alpha|$ la amplitud de la salida

y $\text{sg}(\alpha)$ la polaridad.

El caso óptimo es aquel en que $j = 0$ y $\alpha = 1$ puesto que la amplitud, el delay y la polaridad coinciden con los de la señal original.

Observese primero que

$$\begin{aligned} D_k &= \|q * f^k * w - q * e_j \cdot \alpha\|_2 \leq \|q\|_2 \|f^k * w - e_j \cdot \alpha\|_2 \leq \\ &\leq \|q\|_2 \left(\|f^k * w - \frac{q^k}{\|q\|_2^2}\|_2 + \left\| \frac{q^k}{\|q\|_2^2} - e_j \cdot \alpha \right\|_2 \right) \end{aligned} \quad (46)$$

o sea

$$D_k \leq \|q\|_2 (D_k^{(1)} + D_k^{(2)}) \quad (47)$$

Recuerdese de (34) que bajo la hipótesis $Q_{n+l}^t Q_{n+l} = \sigma^2 I$

resulta

f^k es el k -spiking filter para el input x si y sólo si

f^k es el shaping filter para el output deseado $\frac{q^k}{\sigma^2}$

(o sea f^k minimiza $\|f * x - e_k\|_2$ sobre $f \in \mathbb{R}^{\ell+1}$ si y sólo si

f^k minimiza $\|f * w - \frac{f^k}{\sigma^2}\|_2$ sobre $f \in \mathbb{R}^{\ell+1}$)

Vale también:

$$\text{Si } E_x = \|f^k * x - e_k\|_2 \quad \text{y} \quad E_w = \|f^k * w - \frac{q^k}{\sigma^2}\|_2$$

entonces

$$\sigma E_w = [E_x^2 - (1 - (\frac{\sigma_k}{\sigma})^2)]^{1/2} \quad (48)$$

$$\text{donde } \sigma_k = \|q^k\|_2$$

Prueba:

$$\begin{aligned} E_x^2 &= (f^k W_\ell Q_{n+l} - e_k)^t (f^k W_\ell Q_{n+l} - e_k) = \\ &= \sigma^2 f^k W_\ell^t W_\ell^t f^k - f^k W_\ell Q_{n+l}^t e_k - e_k^t Q_{n+l}^t W_\ell^t f^k + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Como } f^k \text{ satisface } \sigma^2 f^k W_\ell^t W_\ell = e_k^t Q_{n+l}^t W_\ell$$

reemplazando queda

$$E_x^2 = 1 - f^k W_\ell Q_{n+l} {}^t e_k = 1 - (f^k * x)(k) \quad (49)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} E_w^2 &= (f^k W_\ell - \frac{1}{\sigma^2} e_k {}^t Q_{n+l}) {}^t (f^k W_\ell - \frac{1}{\sigma^2} e_k {}^t Q_{n+l}) = \\ &= f^k W_\ell {}^t W_\ell {}^t f^k - \frac{1}{\sigma^2} f^k W_\ell Q_{n+l} {}^t e_k - \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} e_k {}^t Q_{n+l} {}^t W_\ell {}^t f^k + \frac{1}{\sigma^4} e_k {}^t Q_{n+l} Q_{n+l} {}^t e_k \end{aligned}$$

Usando nuevamente que $f^k W_\ell {}^t W_\ell = \frac{1}{\sigma^2} e_k {}^t Q_{n+l} {}^t W_\ell$
y que $e_k {}^t Q_{n+l} = q^k$ resulta

$$\begin{aligned} E_w^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\left(\frac{\sigma}{\sigma} k \right)^2 - f^k W_\ell Q_{n+l} {}^t e_k \right) = \\ &= \sigma^{-2} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma} k \right)^2 - (f^k * x)(k) \right] \quad (50) \end{aligned}$$

Luego

$$E_w^2 = \sigma^{-2} \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma} k \right)^2 - 1 \right] + E_x^2$$

o sea

$$\sigma E_w = \left[E_x^2 - \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma} k \right)^2 \right) \right]^{1/2} \quad (51)$$

Obsérvese que de (51) se deduce que

como

$$E_x^2 - (1 - (\frac{\sigma}{k})^2) \geq 0$$

resulta

$$0 \leq 1 - (\frac{\sigma}{k})^2 \leq E_x^2 \quad (52)$$

$$\text{Además } 0 \leq \sigma E_w \leq E_x \quad (53)$$

Considerando ahora $k = k_1$ en (47) resulta

$$D_{k_1}^{(1)} = E_w^{k_1} \leq \frac{E_x^{k_1}}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{n+m}{n+m+l+1} \right)^{1/2} \quad (54)$$

$$\text{y } D_{k_1}^{(2)} = \left\| \frac{q^{k_1}}{\sigma^2} - e_j \cdot \alpha \right\|_2 = \frac{\sigma^{k_1}}{\sigma^2} \left\| \frac{q^{k_1}}{\sigma^{k_1}} - e_j \frac{\sigma^2}{\sigma^{k_1}} \cdot \alpha \right\|_2$$

Si se elige $j = j_0$ (el índice correspondiente a la coordenada de máximo valor absoluto de q^{k_1}) y

$$\alpha = \text{sg}(q_{j_0}^{k_1}) \cdot \frac{\sigma^{k_1}}{\sigma^2}$$

resulta

$$D_{k_1}^{(2)} = |\alpha| \left\| \frac{q^{k_1}}{\sigma^{k_1}} - e_{j_0} \right\|_2 = |\alpha| \sqrt{2-2D(q^{k_1})} \quad (55)$$

donde $D(q^{k_1})$ indica la norma D de q^{k_1} .

Finalmente

$$\begin{aligned}
D_{k_1} &\leq \sigma D_{k_1}^{(1)} + \sigma D_{k_1}^{(2)} = \sigma E_w + \sigma D_{k_1}^{(2)} \\
&= \{E_x^2 - [1 - (\frac{\sigma k_1}{\sigma})^2]\}^{1/2} + \sigma D_{k_1}^{(2)} \leq \\
&\leq \{\frac{n+m}{n+m+l+1} - [1 - (\frac{\sigma k_1}{\sigma})^2]\}^{1/2} + \frac{\sigma k_1}{\sigma} (2 - 2 D(q^{k_1}))^{1/2} \leq \quad (5) \\
&\leq (\frac{n+m}{n+m+l+1})^{1/2} + \frac{\sigma k_1}{\sigma} (2 - 2 D(q^{k_1}))^{1/2} \quad (57)
\end{aligned}$$

Obsérvese que

- 1) el primer sumando decrece con la longitud del filtro
- 2) las pruebas numéricas muestran que el índice k_1 seleccionado por el MEDD es tal que la coordenada de máximo valor absoluto de q , o sea $q_{k(q)}$ esta en q^{k_1} .

En este caso $D(q^{k_1}) \geq D(q)$ y $D(q^{k_1})$ decrece con la longitud del filtro y por tanto la expresión $[2 - 2D(q^{k_1})]^{1/2}$ crecerá con l .

$$3) \frac{\sigma k_1}{\sigma} \leq 1$$

Apendice

En el análisis del error en el MEDD aparece la expresión

$$\|f^{k*}w - q^k\|_2 \quad k \in [0, n+m+l]$$

donde f^k es el Shaping filter respecto del input w y del output q^k .

Se dará una acotación para la suma de estos errores:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+m+l} \|f^{k*}w - q^k\|_2 &= \sum_{k=0}^{n+m+l} \left\| \sum_{h=0}^{n+l} q_{k-h} (a^h * w) - \sum_{h=0}^{n+l} q_{k-h} \delta_h \right\|_2 = \\ &= \sum_{k=0}^{n+l+m} \left\| \sum_{h=0}^{n+l} q_{k-h} (a^h * w - \delta_h) \right\|_2 < \\ &< \sum_{h=0}^{n+l+m} \sum_{h=0}^{n+l} |q_{k-h}| \|a^h * w - \delta_h\|_2 = \\ &= \sum_{h=0}^{n+l} \|a^h * w - \delta_h\|_2 \sum_{k=0}^{n+m+l} |q_{k-h}| < \\ &< \sum_{h=0}^{n+l} \|a^h * w - \delta_h\|_2 \|q\|_1 < \|q\|_1 \sqrt{n+l+1} \sqrt{n} \end{aligned}$$

Si ahora se usa la hipótesis $Q_{n+l}^t Q_{n+l} = \sigma^2 I$

resulta:

$$\text{Si } S_k^2 = \|f^{k*}w - q^k\|_2^2$$

$$S_k^2 = (f^{k*}w - q^k)^t (f^{k*}w - q^k)$$

de (11) $f^k = q^k A = e_k {}^t Q_{n+l} A$, luego

$$\begin{aligned} S_k^2 &= (q^k A W_\ell - q^k) {}^t (q^k A W_\ell - q^k) = \\ &= q^k (A W_\ell - I) {}^t (A W_\ell - I) {}^t q^k \\ &= e_k {}^t Q_{n+l} (A W_\ell - I) {}^t (A W_\ell - I) Q_{n+l} {}^t e_k \end{aligned}$$

Luego

$$\sum S_k^2 = \text{Traza} ({}^t Q_{n+l} (A W_\ell - I) ({}^t A W_\ell - I) Q_{n+l})$$

Usando que $\text{Traza}(A.B) = \text{Traza}(B.A)$ también vale para matrices rectangulares cuya multiplicación tenga sentido resulta

$$\begin{aligned} \sum S_k^2 &= \text{Traza}(Q_{n+l} {}^t Q_{n+l} (A W_\ell - I) {}^t (A W_\ell - I)) = \\ &= \sigma^2 \text{Traza}[(A W_\ell - I) {}^t (A W_\ell - I)] = \sigma^2 \sum_{k=0}^{n+l} \|a^{k*} w - \delta_k\|^2 = \\ &= \sigma^2 \cdot n \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=0}^{n+m+l} S_k^2 = \sigma^2 n$$

Convergencia del algoritmo MED con norma Varimax

Se han realizado pruebas numéricas con objeto de estudiar la convergencia del algoritmo MED dependiendo del filtro inicial f^0 elegido.

Se consideraron los siguientes casos:

- 1) $f^0 = e_k \quad k = 0, \dots, \ell$
- 2) Los coeficientes de f^0 fueron elegidos aleatoriamente.
- 3) f^0 se igualó al MEDD filter, para los mismos datos.

En el primer caso los valores obtenidos después de que la convergencia se estabilizara fueron similares para la norma Varimax variando solo levemente la velocidad de convergencia en función del k elegido.

En el segundo caso los resultados fueron completamente indeseables, en cuanto a la velocidad de convergencia.

En general se necesitó el doble de iteraciones para alcanzar valores Varimax cercanos a los obtenidos por los filtros del caso uno.

En cuanto al tercer caso, en que filtro inicial da un valor Varimax inicial alto, al comenzar la iteración se observaron dos resultados, distintos.

Para algunos ejemplos el valor Varimax se mantuvo casi constante y en otros decreció hasta valores cercanos a los alcanzados en el primer caso.

1.6. Conclusiones

El análisis hecho hasta aquí se basa en la hipótesis de que los primeros $(n+l)$ coeficientes de autocorrelación de la serie de impulsos sean iguales a cero.

Esta hipótesis es consistente con la hipótesis de simplicidad ya que en el caso que $D(q) = 1$, la autocorrelación de q es $\delta_0 \cdot \sigma^2$

Observese también, que debido al hecho que la autocorrelación de q tiende a $\sigma^2 \delta_0$ cuando $D(q)$ tiende a 1 y por tanto $Q_{n+l}^t Q_{n+l} \rightarrow \sigma^2 I$, la hipótesis considerada ($Q_{n+l}^t Q_{n+l} = \sigma^2 I$) es un caso límite del caso general.

Por otro lado, también es consistente (aunque menos restrictiva), con la hipótesis de ruido blanco para la serie de impulsos, donde se pide que la autocorrelación de q sea un múltiplo de δ_0 .

Ambas hipótesis (simplicidad y ruido blanco) han dado excelentes resultados en modelos de prospección geológica.

El MEDD tiene un parámetro libre, que es la longitud l del filtro.

Es claro que esta longitud depende de la 'forma' de la ondícula fuente w y de la amplitud y distancia entre los spikes o impulsos significativos de la serie q .


Debido a que la norma D plantea un spiking filter sobre la entrada $x = w * q$ y no sobre w , filtros de excesiva

longitud, tenderan a invertir x y por lo tanto producirán un output demasiado simplificado.

Por otro lado, si l es pequeño, el filtro puede no realizar una buena inversión de w .

A través del análisis del error se observa que $\epsilon^{(1)}$ disminuye cuando crece la longitud del filtro y cuando la ondícula tiene una aceptable inversibilidad (Error pequeño en Spiking filter) mientras que $\epsilon^{(2)}$ en general crecerá cuando crece l . (se consideran más coeficientes de q ya que q^k tiene longitud $n+l+1$). O sea que la longitud óptima del filtro debe realizar un balance entre estos dos errores.

Debido a que w y q son incognitas en el problema, no parece probable la existencia de un criterio que permite 'a priori' determinar el valor de l , sin imponer más hipótesis sobre el modelo.



16/8/84