Operadores pseudo-diferenciales con homogeneidades generalizadas

Viviani, Beatriz E.

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES CON HOMOGENEIDADES GENERALIZADAS

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Beatriz E. Viviani

Director: Dr. Roberto Macías

Octubre 1986

Trabajo realizado como becario del CONICET en el Programa Especial de Matemática Aplicada, Santa Fe.

Quiero agradecer muy especialmente a mi director, el Dr. Roberto A. Macías, por su guía y esfuerzo brindado en largas jornadas de labor, para la concreción de este trabajo.

Agradezco además, el invalorable estímulo, entusiasmo y colaboración de la Dra. Josefina Alvarez Alonso, quien me propuso este problema y a quien debo mi interés por estos temas; a mi compañero el Dr. Hugo Aimar por su estímulo permanente y a todos los investigadores y docentes del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires y del Programa Especial de Matemática Aplicada, Santa Fe, por su generoso apoyo y valiosos consejos.

Los resultados de esta tesis fueron obtenidos en uso de Becas Internas del CONICET en el Programa Especial de Matemática Aplicada, Santa Fe, instituciones a las que expreso mi profundo reconocimiento.

Por último dejo constancia de mi gratitud a la Srta. Celia Corti y a la Sra. María del Carmen Suffriti a quienes debo el mecanografiado de muchas páginas matemáticas.

INTRODUCCION

El propósito de esta tesis es el estudio de los operadores pseudo-diferenciales con homogeneidades mixtas. El caso de este tipo de operadores con la homogeneidad usual en $\mathbb{R}^n$ fue tratado por A.P. Calderón en [C]. En el mismo se da una descripción de la transformada de Fourier de distribuciones que coinciden fuera del origen con una función homogénea. Luego, estos resultados se aplican para obtener una caracterización del núcleo de distribución para la "casi-inversa" de operadores diferenciales elípticos. Debido a las condiciones de homogeneidad los resultados en [C] no incluyen a los operadores diferenciales parabólicos, tales como el operador relacionado con la ecuación del calor.

En el Capítulo I se generalizan los resultados relacionados con la transformada de Fourier para el caso de distribuciones que son homogéneas en el sentido más general definido en (1.25). Esto nos permite caracterizar, en Teorema (2.95), el núcleo de distribución para la "casi inversa" de operadores diferenciales parabólicos. Con este fin, en el Capítulo II introducimos una clase de símbolos y la clase correspondiente de operadores pseudo-diferenciales. Estas clases son similares a aquellas consideradas por Hörmander en [H], pero las mismas difieren en el hecho de que en la estimación de los símbolos se halla involucrada una métrica de tipo parabólico (ver (2.5)). A continuación se obtienen las propiedades básicas de estos operadores con homogeneidad generalizada. Además, en este capítulo se definen el concepto de amplitud y de los operadores asociados a las mismas y también se estudian sus propiedades. Se introducen desarrollos asintóticos, los cuales serán junto con Teorema (1.66) una de las herramientas que nos permitirá obtener la descripción de los núcleos antes mencionados. En el

Capítulo III se discute la acotación en norma L^p y la continuidad sobre espacios de Sobolev convenientes, de cierta clase de operadores pseudo-diferenciales. Se obtienen asimismo ejemplos de operadores de Calderón-Zygmund sobre espacios de tipo homogêneo, cuya teoría básica es desarrollada en Capítulo I.

Introducimos a continuación la notación que será usada a través del presente trabajo.

Si x es un punto en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ escribimos $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, el producto escalar en $\mathbb{R}^n$. La medida de Lebesgue de la bola unitaria $|x| \leq 1$ es denotada por ω_n . Como es usual S^{n-1}, representa la esfera unitaria $|x| = 1$, y $d\sigma$ la medida de Haar sobre ella. Escribimos $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y denotamos por $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de enteros no negativos y con $\mathbb{Z}_+^n$ el conjunto de multiíndices, esto es el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{Z}_+$. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, definimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

y

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Algunas veces, utilizaremos el símbolo D_j en lugar de $\frac{\partial}{\partial x_j}$. El operador Laplaciano $\sum_{j=1}^n D_j^2$ será denotado por Δ . Como es usual, δ indicará la distribución Delta de Dirac. Usaremos la siguiente notación para los espacios funcionales: $C^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones infinitamente diferenciables, definidas sobre el conjunto abierto Ω , $\mathcal{D}$ es el espacio $C_0^\infty(\Omega)$, de funciones en $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto, munido de la topología inducida por

$$\|f\|_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha f\|_\infty$$

y S es el espacio de las funciones rápidamente decrecientes dotado de la topología definida por las seminormas

$$|||f|||_{N,M} = \sup_{x} \max_{|\alpha|\leq M} |(1+|x|)^N D^\alpha f(x)| \quad .$$

Denotamos con $\mathcal{D}'$ el conjunto de funcionales lineales y continuas sobre $\mathcal{D}$ y sus elementos serán llamados distribuciones. El espacio de distribuciones temperadas se expresa como S' y E' denota el espacio de distribuciones con soporte compacto. Escribimos $F(f) = \hat{f}$ para la transformada de Fourier de la distribución f, definida, en el caso en que f es una función, por

$$\hat{f}(x) = \int e^{2\pi i x\cdot z} f(z)\, dz \quad .$$

Cada vez que consideremos funciones de varias variables, $f(x,y,\xi)$, escribiremos como subíndice la variable con respecto a la cual son aplicados los operadores, por ejemplo $D_x^\alpha f$, $F_y f$,..., etc.

INDICE

Pág.

CAPITULO I

TRANSFORMADA DE FOURIER DE DISTRIBUCIONES HOMOGENEAS

Para el caso de la homogeneidad usual de $\mathbb{R}^n$, A.P. Calderón obtiene en [C] una descripción de la transformada de Fourier de distribuciones que coinciden fuera del origen con funciones homogéneas. En este capítulo se generalizan estos resultados para el caso de distribuciones que coinciden fuera del origen con funciones que son homogéneas en un sentido más general.

En §.1 se dan la definición y propiedades básicas de las distribuciones homogéneas en un sentido generalizado. Asimismo, se desarrolla la teoría elemental de los espacios de tipo homogéneo que servirá de herramienta para nuestro trabajo. Por último, en §.2 se obtiene la descripción de la transformada de Fourier antes mencionada.

§.1 DEFINICION Y PROPIEDADES BASICAS DE FUNCIONES Y DISTRIBUCIONES HOMOGENEAS

Sea $\{T_\lambda : \lambda > 0\}$ un grupo continuo de transformaciones lineales sobre $\mathbb{R}^n$, tal que $T_{\lambda\mu} = T_\lambda T_\mu$ y $T_1 = I$, el operador identidad sobre $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por P el generador infinitesimal de T_λ , esto es, $T_\lambda = \exp(P \log \lambda)$. En este trabajo supondremos que P es una matriz real diagonalizable cuyos autovalores $\{a_i\}_{i=1}^n$ satisfacen $0 < a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Sean D la matriz diagonal con componentes $d_{ii} = a_i$ y Q una matriz ortogonal tal que $P = QDQ^{-1}$. Denotaremos por a el vector $a := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y por $|a|$ la traza de la matriz P , $|a| := \sum_{i=1}^n a_i$.

Es muy conocida la existencia de una métrica $d(x,y)$ generada por P , para el caso $a_1 \geq 1$, ver [CT]. Sin embargo, si $a_1 < 1$

puede demostrarse fácilmente que $d(x,y)$ es una casi-distancia. Incluimos estos resultados en la siguiente proposición pues serán de gran utilidad en todo lo que sigue; en su demostración se usan algunas técnicas de [R].

(1.1) PROPOSICION. Sea $F(x,\eta) = |T_{\eta^{-1}} x|$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\eta \in \mathbb{R}_+$. Entonces, para cada $x \neq 0$, $\eta(x)$ es el único número real positivo que satisface $F(x,\eta(x)) = 1$. Más aún, definiendo $\eta(0) = 0$, la función $\eta(x)$ es infinitamente diferenciable fuera del origen y verifica las siguientes propiedades.

(1.2) $\eta(x) \geq 0$, $\eta(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(1.3) $\eta(x+y) \leq K(\eta(x) + \eta(y))$, para una constante finita K .

(1.4) $\eta(x+y) \leq \eta(x) + \eta(y)$, si suponemos $a_1 \geq 1$.

(1.5) $\eta(T_\lambda x) = \lambda\, \eta(x)$.

(1.6) $\eta(x)^{a_1} \leq \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{a_1 a_k^{-1}}$, donde $(y_1,\ldots,y_n) = Q^{-1} x$.

(1.7) $\eta(x)^{a_n} \leq |x| \leq \eta(x)^{a_1}$, si $\eta(x) \leq 1$.

(1.8) $\eta(x)^{a_1} \leq |x| \leq \eta(x)^{a_n}$, si $\eta(x) \geq 1$.

Demostración. Como $|Qx| = |Q^{-1}x| = |x|$, tenemos que

$$|T_\eta x| = |Q \exp(D \log \eta)\, Q^{-1} x| = |\exp(D \log \eta)\, Q^{-1} x|$$

$$= |(\eta^{a_1} y_1,\ldots,\eta^{a_n} y_n)| ,$$

donde $(y_1,\ldots,y_n) = Q^{-1} x$. Por lo tanto, se verifica

(1.9) $|x|\, \eta^{a_n} \leq |T_\eta x| \leq |x|\, \eta^{a_1}$, si $0 < \eta \leq 1$.

Tomando $T_\eta x = z$, $x = T_{1/\eta} z$ en (1.9) se tiene

(1.10) $\quad |z|\,\eta^{a_1} \le |T_\eta z| \le |z|\,\eta^{a_n}$, si $\eta \ge 1$.

La existencia de una solución $\eta = \eta(x)$, tal que $F(x,\eta) = 1$, es una consecuencia de las siguientes propiedades de la función $F(x,*)$ para $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ fijo,

(1.11) $\quad F(x,\eta) \to 0$, cuando $\eta \to \infty$,

(1.12) $\quad F(x,\eta) \to \infty$, cuando $\eta \to 0$,

(1.13) $\quad F(x,\eta)$ es una función continua y decreciente de η .

Si $\eta \ge 1$, entonces de (1.9) se deduce que $F(x,\eta) \le \eta^{-a_1}|x|$, y (1.11) se satisface. Por otro lado, si $\eta \le 1$, a partir de (1.10) se obtiene que $F(x,\eta) \ge \eta^{-a_1}|x|$ y (1.12) se verifica. La continuidad de la función $F(x,*)$ es clara. Veamos por último la monotonía de $F(x,*)$. Si $\eta_1\,\eta_2^{-1} \le 1$, entonces de (1.9) sigue que

$$F(x,\eta_2) = |T_{\eta_1 \eta_2^{-1}}\, T_{\eta_1^{-1}}(x)| \le (\eta_1\,\eta_2^{-1})^{a_1}\,|T_{\eta_1^{-1}}(x)|$$
$$\le F(x,\eta_1) \ .$$

La unicidad de la solución $\eta = \eta(x)$ se obtiene fácilmente como consecuencia de (1.9) y (1.10). La suavidad de la función $\eta(x)$ resulta de aplicar el Teorema de la función implícita. Las propiedades (1.7) y (1.8) de $\eta(x)$ son una consecuencia inmediata de (1.9) y (1.10). De la unicidad de $\eta(x)$ se deduce fácilmente (1.5). Por otra parte, de (1.7) se sigue claramente que si $\eta(x) = 0$ entonces $x = 0$, lo que prueba (1.2).

Como $F(x,*)$ es decreciente, para demostrar (1.4) es suficiente probar que $|T_{(\eta_1+\eta_2)^{-1}}(x+y)| \le 1$. Sean $\eta_1 = \eta(x)$ y $\eta_2 = \eta(y)$, usando (1.9) tenemos que

$$|T_{(\eta_1+\eta_2)^{-1}}(x+y)| = |T_{(\eta_1+\eta_2)^{-1}} T_{\eta_1} T_{\eta_1^{-1}}(x) + T_{(\eta_1+\eta_2)^{-1}} T_{\eta_2} T_{\eta_2^{-1}}(y)|$$

$$\leq |T_{\eta_1(\eta_1+\eta_2)^{-1}}(T_{\eta_1^{-1}}(x))| + |T_{\eta_2(\eta_1+\eta_2)^{-1}}(T_{\eta_2^{-1}}(y))|$$

$$\leq \frac{\eta_1^{a_1}}{(\eta_1+\eta_2)^{a_1}} |T_{\eta_1^{-1}}(x)| + \frac{\eta_2^{a_1}}{(\eta_1+\eta_2)^{a_1}} |T_{\eta_2^{-1}}(y)|$$

$$\leq \frac{\eta_1^{a_1} + \eta_2^{a_1}}{(\eta_1+\eta_2)^{a_1}} \leq 1 \quad ,$$

pues $a_1 \geq 1$.

Con el propósito de demostrar (1.3), consideremos D' la matriz diagonal cuyos elementos $d'_{ii} := a_1^{-1} d_{ii}$, entonces

$$P = Q\, D\, Q^{-1} = Q\, a_1\, D'\, Q^{-1} = a_1\, P' \ ,$$

donde $P' := Q\, D'\, Q^{-1}$. Sean $T'_\lambda = \exp(P' \log\lambda)$ y $\eta'(x)$ la función asociada que, en particular, satisface (1.4). Por lo tanto,

$$1 = |T_{\eta(x)^{-1}}\, x| = |Q \exp\,(a_1\, P' \log\,(\eta(x)^{-1}))\, Q^{-1}\, x|$$

$$= |T'_{\eta(x)^{-a_1}}(x)| \ .$$

En consecuencia, $\eta'(x) = \eta(x)^{a_1}$, esto es $\eta(x) = \eta'(x)^{1/a_1}$, lo que implica (1.3).

Sólo nos resta probar (1.6). Si $t = \eta(x)$, entonces

$$(1.14) \qquad 1 = |T_{t^{-1}}(x)| = \Big[\sum_{k=1}^{n} (t^{-1}\, x_k^{a_k^{-1}})^{2a_k}\Big]^{1/2} \ .$$

En consecuencia, (1.14) implica que $t^{-1} |x_k|^{a_k^{-1}} \leq 1$ para todo $k:1,\ldots,n$. Además, como $a_k \geq a_1$ de (1.14) obtenemos

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} (t^{-1} |x_k|^{a_k^{-1}})^{a_1} .$$

Luego

$$t^{a_1} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{a_1 a_k^{-1}} . \ ///$$

Consideremos la función no negativa $d(x,y) = \eta(x-y)$ definida sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De (1.2) y (1.3) se sigue que la función $d(x,y)$ satisface las siguientes propiedades

(1.15) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$.

(1.16) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$.

(1.17) Existe una constante finita K tal que

$$d(x,y) \leq K(d(x,z) + d(z,y)) ,$$

para toda terna x,y,z de elementos de $\mathbb{R}^n$.

Una función no negativa definida sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que satisface (1.15), (1.16) y (1.17) será llamada una casi-distancia sobre $\mathbb{R}^n$.

En la prueba de (1.3) obtuvimos que $\eta(x)$ era igual a una potencia de una métrica, $d(x,y) = \eta'(x - y)^{1/a_1}$. Más aún, Macías-Segovia, [MS1], demostraron que la recíproca de esta afirmación es también cierta. Es decir, dada una casi-distancia d sobre $\mathbb{R}^n$, existen una distancia $\rho(x,y)$ y un número $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$d'(x,y) = \rho(x,y)^{1/\alpha}$$

es equivalente a d . En consecuencia, $d'(x,y)$ satisface además que para toda terna x,y,z de elementos de $\mathbb{R}^n$ y para todo $r > 0$ tal que $d'(x,z) < r$ y $d'(y,z) < r$, existe una constante c tal que vale la desigualdad

(1.18) $\quad |d'(x,z) - d'(y,z)| \leq c\, r^{1-\alpha}\, d'(x,y)^{\alpha}$.

Por consiguiente las bolas en la casi-distancia d' , $B_{d'}(x,r) = \{y: d'(x,y) < r\}$, son conjuntos abiertos.

En lo que sigue supondremos que $|a| \geq 1$. Consideraremos el cambio de variables en $\mathbb{R}^n$, $x \to (x', \eta(x))$, donde $x' \in S^{n-1}$ es tal que $T_{\eta(x)}(x') = x$. Mediante un cálculo del jacobiano correspondiente se obtiene

(1.19) $\quad dx = \eta(x)^{|a|-1}\, w(x')\, d\sigma\, d\eta$,

donde $w(x') = Px' \cdot x'$, es una función positiva y C^{∞} sobre S^{n-1} . Una prueba de (1.19) se encuentra en [R], p. 261-262.

Si m denota la medida de Lebesgue, de (1.19) sigue fácilmente que existe una constante A tal que

(1.20) $\quad m(B_d(x,2r)) \leq A\, m(B_d(x,r))$,

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Diremos que (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo si d es una casi-distancia definida sobre el conjunto X y μ es una medida no negativa definida sobre una σ-álgebra de partes de X que contiene las bolas B_d y satisface (1.20). Cuando un espacio de tipo homogéneo posee una casi-distancia con la propiedad (1.18), se dice que es de orden α .

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ dotado de la casi-distancia $d(x,y) = \eta(x-y)$ y de la medida de Lebesgue m , $(\mathbb{R}^n,d,m)$, es un ejemplo de espacio de tipo homogéneo de orden a_1 .

En muchos casos, interesa especialmente una clase de espacio de tipo homogéneo para los cuales la medida de la bola de radio r , es proporcional a r . Más precisamente, en [MS2] se da la siguiente definición.

Un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) es normal, si existen cuatro constantes positivas y finitas A_1, A_2, K_1 y $K_2, K_2 \leq 1 \leq K_1$, tales que

(1.21) $\quad A_1 r \leq \mu(B_d(x,r)) \quad$ si $\quad r \leq K_1\ \mu(X)$

(1.22) $\quad B_d(x,r) = X \quad$ si $\quad r > K_1\ \mu(X)$

(1.23) $\quad A_2 r \geq \mu(B_d(x,r)) \quad$ si $\quad r \geq K_2\ \mu(\{x\})$

(1.24) $\quad B_d(x,r) = \{x\} \quad$ si $\quad r < K_2\ \mu(\{x\})$.

En [MS1] se demuestra que dado un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos, si se toma como distancia entre dos puntos diferentes el ínfimo de las medidas de bolas que contienen a ambos y se conserva la propiedad $d(x,x) = 0$, se obtiene un espacio de tipo homogéneo normal con la misma medida y topología.

En el caso del espacio de tipo homogéneo $(\mathbb{R}^n,d,m)$ antes considerado, la casi-distancia normalizada será salvo múltiplo una constante

$$\delta(x,y) = d(x,y)^{|a|} = \eta(x-y)^{|a|} \quad .$$

En consecuencia, $(\mathbb{R}^n,\delta,m)$ es un espacio homogéneo normal de orden $a_1\ |a|^{-1}$. En el Capítulo III trabajaremos con este último espacio y explotaremos aún más la teoría de los espacios de tipo homogéneo.

A continuación introducimos la noción de distribución homogénea en un sentido generalizado.

(1.25) <u>DEFINICION</u>. Sea $m \in \mathbb{C}$. Diremos que una distribución K es homogénea de grado m con respecto a P si

(1.26) $\quad K(\phi\ T_{\lambda^{-1}}) = \lambda^{m+|a|}\ K(\phi)$,

para toda función de prueba ϕ .

Es claro a partir de la definición anterior que si $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n-\{0\})$, entonces f es una función homogénea de grado m si y sólo si $f(\phi T_{\lambda^{-1}}) = \lambda^{m+|a|} f(\phi)$, para toda $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n-\{0\})$.

Es un hecho conocido el que, para el caso de la homogeneidad usual de $\mathbb{R}^n$, toda distribución homogénea es temperada, ver [D]. Con el propósito de demostrar la validez de esta propiedad para distribuciones que son homogéneas en el sentido más general introducido en (1.25), construiremos una partición de la unidad adaptada a la casi-distancia asociada a P .

(1.27) <u>LEMA</u>. (Lema de cubrimiento). Sea d la casi-distancia inducida por P . Entonces existen un número natural M y una sucesión de puntos $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^n$ tales que

(1.28) $B_d(x_j,(4K)^{-1}) \cap B_d(x_i,(4K)^{-1}) = \emptyset$, $i \neq j$, K es la constante que aparece en (1.3).

(1.29) $\bigcup\limits_j B_d(x_j,1/2) = \mathbb{R}^n$.

(1.30) $\sum\limits_j \chi_j(x) \leq M$, siendo χ_j la función característica de $B_d(x_j,1)$.

<u>Demostración</u>. Sea U un conjunto maximal de puntos en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad que $d(x,y) > 1/2$, $\forall\, x$, $y \in U$. Usando el siguiente hecho en espacios de tipo homogéneo (ver [CW] p. 68), dados $j \in \mathbb{Z}_+$ y $B_d(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ existe a lo más un número finito de puntos y_i en $B_d(x,r)$ tales que $d(y_i,y_k) > \frac{r}{2^j}$ $\forall\, i \neq k$, se demuestra fácilmente que U es numerable, esto es $U = \{x_j\}_j$. Además por ser U maximal se deduce, claramente, que las bolas $B_d(x_j,1/2)$ cubren $\mathbb{R}^n$. Veamos ahora que $B_d(x_j,(4K)^{-1})$ son dos a dos disjuntas. En efecto, para $x \in B_d(x_j,(4K)^{-1})$ e $i \neq j$, se cumple

$$d(x,x_i) \geq K^{-1} d(x_j,x_i) - d(x_j,x) > (2K)^{-1} - (4K)^{-1} = (4K)^{-1} \quad ,$$

lo cual implica que $x \notin B_d(x_i,(4K)^{-1})$. Por último, si $x \in B_d(x_k,1) \cap B_d(x_j,1)$ con $j \neq k$, entonces

$$d(x_j,x_k) \leq K\, d(x,x_j) + K\, d(x,x_k) \leq 2K .$$

Por lo tanto, $B_d(x_j,1) \subset B_d(x_k,3K^2)$. Por la propiedad antes mencionada, existirá un número finito y fijo de puntos dentro de $B_d(x_k,(3K)^2)$ a distancia mayor que 1/2, lo cual prueba (1.30).///

(1.31) LEMA. (Partición de la unidad). Sea $\{x_j\}$ la sucesión dada por Lema (1.27). Entonces existe una sucesión $\{\phi_j(x)\}$ de funciones C^∞ no negativas que satisfacen

(1.32) $\quad \operatorname{sop}(\phi_j) \subset B_d(x_j,1)$.

(1.33) $\quad \| D^\alpha \phi_j \|_\infty \leq C_\alpha \quad , \ \forall j$.

(1.34) $\quad \sum_j \phi_j(x) = 1 \qquad , \ \forall x$.

Demostración. Sea $\omega(t)$ una función de clase C^∞ sobre $[0,\infty)$, tal que $0 \leq \omega(t) \leq 1$, $\omega(t) = 1$ si $0 \leq t \leq 1/2$ y $\omega(t) = 0$ para $t \geq 1$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ denotamos

$$\psi_j(x) = \omega(\eta(x_j - x)) \quad .$$

Estas funciones ψ_j son no negativas, con soporte contenido en $B_d(x_j,1)$ y, por (1.29) y (1.30), satisfacen

$$1 \leq \sum_j \psi_j(x) \leq M \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Entonces definiendo $\phi_j(x)$ como

$$\phi_j(x) = \psi_j(x)/\sum_i \psi_i(x) \quad ,$$

se cumple (1.34), las otras propiedades resultan evidentes.///

(1.35) PROPOSICION. Toda distribución homogénea con respecto a una matriz P diagonalizable es temperada.

Demostración. Sea K una distribución homogénea de grado m. Demostraremos que existe $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tal que

(1.36) $\quad |K(f)| \leq c|||f|||_{\tilde{N}} \;, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Usando la partición de la unidad construida en (1.31), podemos escribir

$$f = \sum_j \phi_j\, f = \sum_{j \in J_1} \phi_j\, f + \sum_{j \in J_2} \phi_j\, f \;,$$

donde J_1 es el conjunto de índices j tales que el soporte de ϕ_j está contenido en una bola fija, $B_d(0,3K^2)$. El cardinal de J_1 es finito y no depende de f.

Por lo tanto, es suficiente probar (1.36) primero para funciones de prueba ϕ con soporte contenido en $B_d(0,3K^2)$ y luego para aquéllas cuyo soporte está contenido en una bola $B_d(x_o,1)$ con x_o "lejos" del origen.

Como $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, existen una constante c_1 y un entero N tales que

(1.37) $\quad |K(\phi)| \leq c_1 \|\phi\|_N \leq c_1 |||\phi|||_N \;,$

para toda función de prueba ϕ, tal que $\operatorname{sop} \phi \subset B_d(0,3K^2)$.

Sea ahora $R > 3K^2$ y supongamos que $\operatorname{sop}(\phi) \subset B_d(0,R)$. En consecuencia $\phi\, T_R$ es una función de prueba, tal que $\operatorname{sop}(\phi\, T_R) \subset B_d(0,1)$. Por lo tanto, de (1.25) y (1.37) se sigue

(1.38) $\quad R^{-m-|a|} |K(\phi)| = |K(\phi\, T_R)| \leq C_1 \;\|\phi\, T_R\|_N \;.$

Además,

(1.39) $\quad \|\phi\, T_R\|_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha (\phi\; T_R)\|_\infty = \sum_{|\alpha| \leq N} \|R^{\alpha \cdot a}\, (D^\alpha \phi)\; T_R\|_\infty$

$$\leq R^{N a_n} \|\phi\|_N \;.$$

Aplicando (1.38) y (1.39) obtenemos

$$(1.40) \qquad |K(\phi)| \leq C_1 \, R^{N a_n + m + |a|} \, \|\phi\|_N \ ,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\operatorname{sop}(\phi) \subset B_d(0,R)$, $R > 3K^2$.

Sea ahora, $\phi \in \mathcal{D}$ tal que su soporte está contenido en $B_d(0,1)$. Supongamos además que existe x' en el soporte de ϕ tal que $R = \eta(x') > 3K^2$. Por consiguiente, si x está en el soporte de ϕ se verifican

$$(1.41) \qquad d(x,0) = \eta(x) \leq K(\eta(x-x') + \eta(x')) \leq K(R+2K)$$

y

$$(1.42) \qquad \eta(x) \geq \eta(x')\, K^{-1} - \eta(x-x') \geq (R-2K^2)\, K^{-1} \ .$$

Por lo tanto, por (1.42) y (1.8) se tiene, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$, que

$$\left(\frac{R - 2K^2}{K}\right)^{2N a_n} |D^\alpha \phi(x)| \leq \eta(x)^{2N a_n} |D^\alpha \phi(x)|$$

$$\leq (1+|x|^2)^{N a_n a_1^{-1}} |D^\alpha \phi(x)| \ .$$

Luego, para un entero $\tilde{N} \geq N a_n a_1^{-1} \geq N$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se sigue que

$$\left(\frac{R - 2K^2}{K}\right)^{2N a_n} \|D^\alpha \phi\|_\infty \leq \|(1+|x|^2)^{\tilde{N}} D^\alpha \phi(x)\|_\infty \ .$$

Sumando sobre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq N$, resulta

$$(1.43) \qquad \left(\frac{R - 2K^2}{K}\right)^{2N a_n} \|\phi\|_N \leq \sum_{|\alpha| \leq N} \|(1+|x|^2)^{\tilde{N}} D^\alpha \phi(x)\|_\infty \leq |||\phi|||_{\tilde{N}} \ .$$

Por otra parte, (1.41) implica que $\operatorname{sop}(\phi) \subset B_d(0,K(R+2K))$. Entonces aplicando primero (1.40) y luego (1.43), se tiene

$$|K(\phi)| \leq C_1 (K(R+2K))^{N a_n + m + |a|} \|\phi\|_N$$

$$\leq C_1 (K(R+2K))^{N a_n + m + |a|} \left(\frac{R - 2K^2}{K}\right)^{-2N a_n} |||\phi|||_{\tilde{N}}$$

$$\leq C \left(\frac{R+2K^2}{R-2K^2}\right)^{N a_n} \frac{(R+2K^2)^{m+|a|}}{(R-2K^2)^{N a_n}} \;|||\phi|||_{\tilde N} \ .$$

Como $g(R) = (R+2K^2)(R-2K^2)^{-1}$ es decreciente y $R > 3K^2$, obtenemos

$$(1.44) \qquad |K(\phi)| \leq 5^{N a_n} \frac{(R+2K^2)^{m+|a|}}{(R-2K^2)^{N a_n}} \;|||\phi|||_{\tilde N} \ ,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$ con $\mathrm{sop}(\phi) \subset B_d(x_o, 1)$ tal que existe x' en el soporte de ϕ con $R = \eta(x') > 3K^2$.

En consecuencia, para $f \in \mathcal{D}$

$$|K(f)| \leq \sum_{j\in J_1} |K(\phi_j f)| + \sum_{j\in J_2} |K(\phi_j f)| := \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \ .$$

Por otra parte, de (1.33), tenemos

$$|||\phi_j f|||_{\tilde N} \leq c \; |||f|||_{\tilde N} \ .$$

Entonces, usando (1.37), podemos acotar Σ_1 por $c \; |||f|||_{\tilde N}$, con c independiente de f . En cuanto a Σ_2 de (1.44) se deduce que

$$\sum\nolimits_2 \leq c \sum_{j\in J_2} (R_j + 2K^2)^{m+|a|} (R_j - 2K^2)^{-N a_n} \; |||f|||_{\tilde N}$$

$$\leq c \; |||f|||_{\tilde N} \ ,$$

tomando N suficientemente grande.///

(1.45) <u>Observación</u>. Supongamos $Q^{-1} P Q = D$, D diagonal; $S_\lambda = Q^{-1} T_\lambda Q = \exp(D \log \lambda)$ y $g(x) = f(Qx)$. Entonces f es homogénea de grado m con respecto a P si y sólo si g es homogénea de grado m con respecto a D . En efecto,

$$(1.46) \qquad f(T_\lambda x) = f(Q S_\lambda Q^{-1} x) = g(S_\lambda Q^{-1} x) \ .$$

Por lo tanto, si f es homogénea de grado m con respecto a P , (1.46) implica

$$g(S_\lambda x) = g(S_\lambda Q^{-1} Q x) = f(T_\lambda Q x) = \lambda^m f(Q x) = \lambda^m g(x) \ .$$

Recíprocamente, si g es homogénea de grado m con respecto a D ; entonces usando nuevamente (1.46) resulta

$$f(T_\lambda\, x) = \lambda^m\, g(Q^{-1}\, x) = \lambda^m\, f(x) \;./\!/\!/$$

La misma conclusión se obtiene para distribuciones, por lo que de ahora en más supondremos que la matriz P es diagonal.

Veremos a continuación algunas propiedades de distribuciones homogéneas que serán de gran utilidad. En vista de la Proposición anterior trabajaremos con distribuciones temperadas.

(1.47) <u>PROPOSICION</u>. Sea K una distribución homogénea de grado m . Entonces $D^\alpha K$ es una distribución homogénea de grado $m-\alpha\cdot a$.

<u>Demostración</u>. Para $\phi \in S$ se tiene que

$$D^\alpha\, K(\phi\; T_{\lambda^{-1}}) = (-1)^{|\alpha|}\; K(D^\alpha(\phi\; T_{\lambda^{-1}})) = (-1)^{|\alpha|}\, K(\lambda^{-\alpha\cdot a}\, (D^\alpha\,\phi)\; T_{\lambda^{-1}})$$

$$= \lambda^{-\alpha\cdot a}\;\lambda^{m+|a|}\;(-1)^{|\alpha|}\; K(D^\alpha\,\phi)$$

$$= \lambda^{m-\alpha\cdot a+|a|}\; D^\alpha\, K(\phi) \quad ./\!/\!/$$

(1.48) <u>PROPOSICION</u>. (Fórmula de Euler). Sea K una distribución. Entonces K es homogénea de grado m si y sólo si $m\,K = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j\, D_j\, K$.

<u>Demostración</u>. Supongamos primero que K es homogénea de grado m . Sea $\phi \in S$ y consideremos la función $f(\rho) = K(\phi\, T_{\rho^{-1}})$. Claramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$. Por lo tanto derivando con respecto a ρ en (1.26) obtenemos

$$K(-\sum_{j=1}^{n} a_j\; \rho^{-a_j-1}\; x_j\; D_j\;\phi(T_{\rho^{-1}}\, x)) = (|a| + m)\rho^{|a|+m-1}\; K(\phi) \quad ,$$

en consecuencia

$$K(-\sum_{j=1}^{n} a_j\; \rho^{-a_j}\, x_j\, D_j\;\phi(T_{\rho^{-1}}\, x)) = (|a| + m)\;\rho^{|a|+m}\, K(\phi) \quad , \forall \rho > 0 \, .$$

Usando $D_j(x_j\,\phi) = x_j\,D_j\,\phi + \phi$, obtenemos para $\rho = 1$

$$K(-\sum_{j=1}^{n} a_j\,D_j(x_j\,\phi)) + |a|\,K(\phi) = (|a| + m)\,K(\phi)\ .$$

Por consiguiente

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\,x_j\,D_j\,K(\phi) = m\,K(\phi)\quad .$$

Para probar la suficiencia observemos que $f(\rho) = K(\phi\,T_{\rho^{-1}})$ satisface

$$f'(\rho) = K(-\sum_{j=1}^{n} a_j\,\rho^{-a_j-1}\,x_j\,(D_j\,\phi)(T_{\rho^{-1}}\,x)) = \frac{1}{\rho}\,K(-\sum_{j=1}^{n} a_j\,x_j\,D_j\,(\phi\,T_{\rho^{-1}}\,x))$$

$$= \frac{1}{\rho}\,K(-\sum_{j=1}^{n} a_j\,D_j[x_j\,\phi(T_{\rho^{-1}}\,x)] + |a|\,\phi(T_{\rho^{-1}}\,x))$$

$$= \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{n} a_j\,x_j\,D_j\,K(\phi\,T_{\rho^{-1}}) + \frac{|a|}{\rho}\,K(\phi(T_{\rho^{-1}}))$$

$$= (m + |a|)\,\rho^{-1}\,f(\rho)\quad .$$

O sea

$$(1.49)\qquad \begin{cases} f'(\rho) - (m + |a|)\rho^{-1}\,f(\rho) = 0 \\ f(1) = K(\phi)\quad . \end{cases}$$

La solución de (1.49) es $f(\rho) = \rho^{m+|a|}\,K(\phi)$ .///

§.2 DESCRIPCION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE DISTRIBUCIONES QUE COINCIDEN FUERA DEL ORIGEN CON FUNCIONES HOMOGENEAS

En esta sección se generalizan los resultados de A.P. Calderón mencionados en la introducción de este capítulo, obteniéndose una descripción de la transformada de Fourier de distribuciones que coinciden fuera del origen con funciones homogéneas en el sentido generalizado de la definición (1.25).

(1.50) <u>DEFINICION</u>. Dado Ω , un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, diremos que una distribución K es C^∞ sobre Ω si existe una función $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que $K(\phi) = \int f\,\phi$, para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Esto será denotado por $K/_\Omega = f$.

(1.51) <u>DEFINICION</u>. Una distribución K será llamada de clase m , si es homogénea de grado m y C^∞ sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Es conocido que la propiedad de que una distribución sea de clase m es equivalente al hecho de que su transformada de Fourier sea de clase $-m-|a|$, ver por ejemplo [NS]. En [C] se señala que si K no es necesariamente de clase m pero coincide fuera del origen con una función C^∞ y homogénea, se puede aún afirmar que $\hat{K}$ es $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. A los efectos de facilitar la lectura de nuestra exposición incluimos su demostración, que básicamente sigue los lineamientos de [C], adaptándolos a nuestro caso.

(1.52) <u>Proposición</u>. Sea K una distribución que coincide con una función homogénea e infinitamente diferenciable sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces $\hat{K}$ es C^∞ sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Más aún, K es de clase m si y sólo si $\hat{K}$ es de clase $-m-|a|$.

<u>Demostración</u>. Supongamos primero que K es homogénea de grado m y sea $\phi \in S$. Entonces, como $(\phi\, T_{\lambda^{-1}})\hat{} = \lambda^{|a|}\,\hat{\phi}\, T_\lambda$, se tiene que

$$\hat{K}(\phi\; T_{\lambda^{-1}}) = \lambda^{|a|}\; K(\hat{\phi}\; T_\lambda) = \lambda^{|a|}\; \lambda^{-(m+|a|)}\; K(\hat{\phi})$$

$$= \lambda^{(-m-|a|)+|a|}\; \hat{K}(\phi) \quad .$$

Por consiguiente, $\hat{K}$ es homogénea de grado $-m-|a|$. La recíproca se demuestra de la misma manera.

Sea f en $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ y homogénea de grado m , tal que

$K/_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = f$. Sea ψ perteneciente a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\psi = 1$ en un entorno del origen. De donde se sigue que

$$K = \psi K + (1 - \psi) f \quad .$$

Como ψK es una distribución de soporte compacto, su transformada de Fourier es una función C^∞ . Por otra parte, $K_1 := (1 - \psi) f$ es $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además $\Delta^M K_1$ es una suma de funciones homogéneas de grado $m - \alpha \cdot a$, $|\alpha| = 2M$, fuera del soporte de ψ . Luego, eligiendo M suficientemente grande resulta que $\Delta^M K_1 \in L^1$. Por lo tanto $(\Delta^M K_1)^\wedge(\xi) = C\,|\xi|^{2M} \hat{K}_1(\xi)$ es continua y, en consecuencia, $\hat{K}_1$ es una función continua fuera del origen. Similarmente, como $x^\alpha K_1$ coincide fuera del soporte de ψ con una función homogénea de grado $m + \alpha \cdot a$ y $(x^\alpha K_1)^\wedge = C_\alpha D^\alpha \hat{K}_1$, se sigue que $D^\alpha \hat{K}_1$ es una función continua fuera del origen. Como esta conclusión es válida para todo α en $\mathbb{N}^n$, obtenemos que $\hat{K}_1$ es C^∞ fuera del origen.///

Introducimos a continuación una clase de multiíndices asociada a la matriz P y al grado de homogeneidad m , la que será de gran utilidad para presentar en forma clara y ordenada la teoría que se desarrolla a continuación.

(1.53) DEFINICION. Sea P una matriz diagonal y a el vector que representa su diagonal. Dado $m \in \mathbb{R}$, definimos

$$[P,m] := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : -(m + |a|) = a \cdot \alpha\} \quad .$$

Un enunciado equivalente a la próxima proposición, así como un bosquejo de su demostración, se encuentran en [NS], página 10.

(1.54) PROPOSICION. Sea f una función homogénea de grado m , tal que f pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Entonces

(1.55) Existe una distribución $K \in S'$ tal que $K/_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = f$.

(1.56) Si $[P,m] \neq \emptyset$ y

$$\int_{S^{n-1}} x'^{\alpha} f(x') \, w(x') \, d\sigma = 0 \quad ,$$

$\forall\, \alpha \in [P,m]$; K es de clase m y es única salvo combinaciones lineales de la forma $\sum_{\alpha\in[P,m]} C_\alpha D^\alpha \delta$.

(1.57) Si $[P,m] = \emptyset$, K es de clase m y es única.

<u>Demostración</u>. Dado que f es homogénea de grado m existe una función $\Omega(x)$, homogénea de grado cero, tal que

$$f(x) = \Omega(x) \, \eta(x)^m \quad .$$

Sea $\phi \in S$, luego

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_N(x) \quad ; \tag{1.58}$$

donde

$$R_N(x) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} x^\alpha \int_0^1 D^\alpha \phi(tx) \, (1-t)^{N-1} \, dt \quad .$$

Sea $\chi(x)$ la función característica del conjunto $\{\eta(x) \le 1\}$, definimos

$$K(\phi) := \int \Omega(x) \, \eta(x)^m \, [\phi(x) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha \chi(x)] \, dx$$

$$= \int_{\eta(x)\le 1} \Omega(x) \, \eta(x)^m R_N(x) \, dx$$

$$+ \int_{\eta(x)>1} \Omega(x) \, \eta(x)^m \phi(x) \, dx \quad .$$

Claramente K coincide con f sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. También es fácil ver que la segunda integral es un elemento de S' . Usando (1.58) la primera integral queda mayorada por

$$\max_{|\alpha|=N} \|D^\alpha \phi\|_\infty \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha \int_{S^{n-1}} \Omega(x') \, x'^{\alpha} \, w(x') \, d\sigma$$

$$\cdot \int_0^1 \eta^{m+Na_1+|a|-1} \, d\eta \le c \, \|\phi\|_N \quad ,$$

eligiendo N suficientemente grande. De donde la primera integral está asimismo en S' , quedando probado (1.55).

Sea $\phi \in S$, veremos que la función

$$I(z) := \int \Omega(x) \, \eta(x)^z \, \phi(x) \, dx \quad ,$$

converge absolutamente para $Re(z) > -|a|$ y que además, $I(z)$ puede ser continuada a todo $\mathbb{R}^n$ con una función meromorfa que tiene a lo más polos simples en los puntos $-|a|-\alpha\cdot a$. En efecto, sea

$$I^1(z) = \int_{\eta(x)\le 1} \Omega(x) \, \eta(x)^z \, \phi(x) \, dx \quad .$$

Claramente, $I(z) - I^1(z)$ es entera. De (1.58) sigue que

$$I^1(z) = \sum_{|\alpha|<N} c_\alpha \int_{\eta(x)\le 1} \Omega(x) \, \eta(x)^z \, x^\alpha \, dx + \int_{\eta(x)\le 1} \Omega(x) \, \eta(x)^z R_N(x) \, dx$$

Si $Re(z) > -|a|$, entonces $I^1(z)$ converge absolutamente. En caso contrario eligiendo $N(z)$ suficientemente grande, la última integral converge absolutamente. En cuanto a las integrales para $|\alpha| < N$, tenemos

$$\sum_{|\alpha|<N} c_\alpha \left(\int_{S^{n-1}} \Omega(x') \, x'^\alpha \, w(x') \, d\sigma \int_0^1 \eta^{z+\alpha\cdot a+|a|-1} \, d\eta \right.$$

$$= \sum_{|\alpha|<N} \frac{c'_\alpha}{z+\alpha\cdot a+|a|} \quad ,$$

cuando $z+\alpha\cdot a+|a| \ne 0$, para todo $|\alpha| < N$. Por lo tanto $I^1(z)$ es una función meromorfa con polos simples en los puntos $z = -\alpha\cdot a-|a|$. Si suponemos la condición de anulación de los momentos impuesta en (1.56) entonces $c'_\alpha = 0$ y en consecuencia K es analítica y homogénea de grado m . Por otra parte, si suponemos que $[P,m] = \emptyset$, entonces obtenemos la misma conclusión, pues en este caso $m \neq -\alpha\cdot a-|a|$, para todo α, resultando $I(z)$ analítica en $z=m$.

Sólo nos resta probar la unicidad de la representación. Sean K_1 y K_2 dos distribuciones de clase m, satisfaciendo (1.55). Entonces $K_0 := K_1 - K_2$ es una distribución de clase m soportada en el origen. Por lo tanto, $K_0 = \sum_\alpha c_\alpha D^\alpha \delta$. Como δ es homogénea de grado $-|a|$, por (1.47), K_0 es una combinación lineal de distribuciones homogéneas de grado $-|a|-a\cdot\alpha$. En consecuencia, si $c_\alpha \neq 0$, $-|a|-a\cdot\alpha = m$ y $\alpha \in [P,m]$. ///

(1.59) <u>Observación</u>. Si $m > -|a|$, entonces de la prueba de la proposición anterior se deduce claramente que $K = f$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Nos interesará estudiar la transformada de Fourier de distribuciones que satisfacen (1.55). En el caso de que $m \leq -|a|$ y $[P,m]=\emptyset$, aplicando (1.57) y luego (1.52) se deduce que $\hat{K}$ es de clase $-m-|a| > 0 > -|a|$ y, por consiguiente, $\hat{K}$ es una función de homogeneidad positiva. Cuando $[P,m] \neq \emptyset$ y se cumple la condición impuesta en (1.56) sobre los momentos, usando (1.52) se obtiene nuevamente que $\hat{K}$ es una función homogénea de grado $-m-|a| \geq 0$. En lo que sigue vamos a describir la transformada de Fourier de distribuciones que verifican (1.55) en el caso de que $[P,m] \neq \emptyset$ pero no se satisface la condición de los momentos antes mencionada. En esta dirección el primer resultado que obtenemos, cuando $[P,m] = \{0\}$, es el siguiente.

(1.60) <u>TEOREMA</u>. Sea f una función homogénea de grado $-|a|$, tal que f pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Sea K una distribución que coincide con f sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces

$$\hat{K}(x) = h(x) + P(x) + M \log [\eta(x)]^{-1} ,$$

donde $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ es homogénea de grado cero, $P(x)$ es un polinomio y $M := \int_{S^{n-1}} f(x')\, w(x')\, d\sigma$.

Demostración. Sea $\Omega(x)$ una función homogénea de grado cero tal que $f(x) = \Omega(x)\, \eta(x)^{-|a|}$. Consideramos

$$\Omega_1(x) = \Omega(x) - M(|a|\ \omega_n)^{-1} \quad .$$

Vale que $\int_{S^{n-1}} \Omega_1(x')\, w(x')\, d\sigma = 0$. En efecto, recordando que $w(x') = Px' \cdot x'$, ver (1.19), se tiene que

$$\int_{S^{n-1}} \Omega_1(x')\ w(x')\ d\sigma = M - M(|a|\ \omega_n)^{-1} \sum_j a_j \int_{S^{n-1}} x_j'^2\ d\sigma \ .$$

Usando el Teorema de la divergencia esta integral resulta igual a

$$M - M(|a|\ \omega_n)^{-1} \sum_j a_j \int_{|x|\le 1} dx = 0 \quad .$$

En consecuencia, $f(x)$ puede ser escrita como

$$f(x) = M(|a|\ \omega_n)^{-1}\ \eta(x)^{-|a|} + g(x) \quad ,$$

donde $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, es homogénea de grado $-|a|$ y satisface $\int_{S^{n-1}} g(x')\, w(x')\, d\sigma = 0$. Aplicando (1.56), sigue que existe $K_1 \in S'$, de clase $-|a|$, única salvo un múltiplo de δ tal que

$$K_1/_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = g(x) \quad .$$

Más aún, por (1.52), $\hat{K}_1$ es de clase 0. En particular, existe $h_1(x)$, C^∞ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y homogénea de grado 0, tal que

$$\hat{K}_1/_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = h_1 \quad .$$

Además por la observación (1.59) $h_1 = \hat{K}_1$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Por otra parte, si $\chi(x)$ es la función característica del conjunto $\{\eta(x) \le 1\}$, entonces definimos

$$K_2(\phi) := M(|a|\ \omega_n)^{-1} \int \eta(x)^{-|a|}\ [\phi(x) - \phi(0)\ \chi(x)]\ dx \quad .$$

Claramente

$$K_2/_{\mathbb{R}^n-\{0\}} = f - g \ .$$

Entonces por la definición de K_1 y K_2 resulta que $K - K_1 - K_2$ tiene soporte en el origen. Por consiguiente su transformada de Fourier es un polinomio. Sólo nos resta caracterizar $\hat{K}_2$. Veamos primero que $\hat{K}_2$ es una función. En efecto, sea $\gamma(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\gamma(x) = 1$ en un entorno del origen. Como γK_2 es una distribución de soporte compacto, tenemos que $(\gamma K_2)^\wedge \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, $(1-\gamma) K_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y, por lo tanto, $((1-\gamma) K_2)^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Calculamos ahora $\hat{K}_2$. Sea $\phi = \hat{\psi}$. Luego

$$\phi(T_{\lambda^{-1}}(x)) = (\lambda^{|a|} \psi T_\lambda)^\wedge (x)$$

y, por lo tanto,

$$(1.61) \quad \hat{K}_2 T_{\lambda^{-1}}(\psi) = \hat{K}_2 (\lambda^{|a|} \psi T_\lambda) = K_2((\lambda^{|a|} \psi T_\lambda)^\wedge) = K_2(\phi T_{\lambda^{-1}})$$

$$= M(|a|\,\omega_n)^{-1} \int \eta(x)^{-|a|} [\phi(T_{\lambda^{-1}} x) - \phi(0)\,\chi(T_{\lambda^{-1}} x)]\, dx$$

$$+ \phi(0)\, M(|a|\,\omega_n)^{-1} \int \eta(x)^{-|a|} [\chi(T_{\lambda^{-1}}(x)) - \chi(x)]\, dx \ .$$

Notemos que si $\lambda \geq 1$

$$(1.62) \qquad \chi(T_{\lambda^{-1}}(x)) - \chi(x) = \begin{cases} 0 & \eta(x) < 1 \\ 1 & 1 \leq \eta(x) \leq \lambda \\ 0 & \eta(x) > \lambda \end{cases}$$

y si $\lambda < 1$

$$(1.63) \qquad \chi(T_{\lambda^{-1}}(x)) - \chi(x) = \begin{cases} 0 & \eta(x) < \lambda \\ -1 & \lambda \leq \eta(x) \leq 1 \\ 0 & \eta(x) > 1 \ . \end{cases}$$

Para estimar la primera integral de (1.61) usamos el cambio de variables $y = \dot{T}_{\lambda^{-1}}(x)$ y para la segunda integral el cambio de variables (1.19), junto con (1.62) y (1.63). Luego obtenemos

$$\hat{K}_2\, T_{\lambda^{-1}}\ (\psi) = K_2(\phi) + M \log \lambda\ \delta(\phi) = (\hat{K}_2 + M \log \lambda)\ (\psi)$$

o sea,

$$\hat{K}_2\, T_{\lambda^{-1}} = \hat{K}_2 + M \log \lambda \quad , \quad \forall\, \lambda > 0 \ .$$

Recordando que $\hat{K}_2$ es una función, tomando $\lambda = \eta(x)$ tenemos que

$$\hat{K}_2(x) = \hat{K}_2(T_{\eta(x)^{-1}}\ (x)) + M \log\ (\eta(x)^{-1}) \ .$$

Como $K_2/_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$ es una función homogénea e infinitamente diferenciable, de (1.52) sigue que $\hat{K}_2$ es C^∞ sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$, aunque no es necesariamente homogénea. Consecuentemente

$$h_2(x) = \hat{K}_2(T_{\eta(x)^{-1}}\ (x)) \quad ,$$

es una función homogénea de grado cero e infinitamente diferenciable sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Por lo tanto,

$$\hat{K}_2(x) = h_2(x) + M \log\, [\eta(x)^{-1}] \quad .///$$

Para conseguir la descripción para el caso general $[P,m] \neq \emptyset$, necesitaremos un lema y la siguiente definición.

(1.64) <u>DEFINICION</u>. Sea $[P,m]$ la clase de multiíndices definida en (1.53). Si $[P,m] \neq \emptyset$, llamaremos orden de $[P,m]$, $O[P,m]$, al número $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$O[P,m] = s = \text{máx}\ \{|\alpha| : \alpha \in [P,m]\} \ .$$

En lo que sigue, denotaremos por $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

(1.65) <u>LEMA</u>. Sea $[P,m] \neq \emptyset$. Entonces $[P,m + a_i] \neq \emptyset$ si y sólo si existe $\alpha \in [P,m]$ tal que $\alpha_i \neq 0$. Más aún si $O[P,m] = s$ entonces $O[P,m + a_i] \leq s - 1$ y

$$[P,m+a_i] = \{\alpha - e_i \ : \ \alpha \in [P,m] \ , \ \alpha_i \neq 0\} \ .$$

Demostración. El lema queda demostrado por la observación, fácilmente verificable, de que las siguientes condiciones son equivalentes

i) $\beta \in [P,m+a_i]$.

ii) $\beta \cdot \alpha = -(m+a_i+|a|)$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

iii) Existe $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ con $\alpha_i \neq 0$ y tal que satisface $\alpha \cdot a = -(m+|a|)$ .///

(1.66) TEOREMA. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogénea de grado m y supongamos que $[P,m] \neq \emptyset$. Sea $K \in \mathcal{S}'$ tal que $K/_{\mathbb{R}^n-\{0\}} = f$. Entonces

$$\hat{K}(x) = P(x) + h(x) + Q(x) \log(\eta(x)^{-1}) \ ,$$

donde $P(x)$ es un polinomio, $h(x)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ y es homogénea de grado $-m-|a|$, y $Q(x)$ es un polinonio homogéneo de grado $-m-|a|$ que puede ser expresado como

$$Q(x) = \sum_{\alpha\in[P,m]} \frac{(2\pi i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{S^{n-1}} x^\alpha \, y'^\alpha \, f(y') \, w(y') \, d\sigma \ .$$

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre $O[P,m]$. Si $O[P,m] = 0$ entonces $m = -|a|$ y aplicando Teorema (1.60) nuestra afirmación se cumple. Supongamos que la tesis se verifica para todo $m' \in \mathbb{R}$ tal que $O[P,m'] \leq s-1$. Sea $O[P,m] = s$, $s > 0$. Entonces, usando la fórmula de Euler y reemplazando $x_j D_j K$ por $D_j(x_j K) - K$, obtenemos

$$(1.67) \qquad (m + |a|) \, K = K_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \, D_j(x_j \, K) \ ,$$

donde K_0 es una distribución soportada en el origen. Transformando Fourier (1.67) tenemos

(1.68) $$-(m+|a|)\hat{K} = P(x) + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j (x_j\, K)\hat{}\ ,$$

donde $P(x) = -\hat{K}_o$ es un polinomio. Estudiamos ahora cada término de la suma. Notemos que $x_j K$ coincide con $x_j f$ sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y es por lo tanto C^∞ y homogénea de grado $m+a_j$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Consideraremos dos casos según sea $[P,m+a_j] = \emptyset$ o $[P,m+a_j] \neq \emptyset$.

<u>Primer caso</u>. $[P,m+a_j] = \emptyset$. De (1.57) sigue que $x_j f$ puede ser extendida de manera única a una distribución K_j de clase $m+a_j$. Entonces, usando (1.52) resulta que $\hat{K}_j$ es una distribución de clase $-m-a_j-|a|$. En consecuencia, como $-(m+|a|) - a_j = \alpha \cdot a - a_j > -|a|$, por (1.59) se deduce que

$$x_j\,\hat{K}_j = x_j (x_j\, K)\hat{}\ := x_j\, h_j$$

es una función perteneciente a $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ y homogénea de grado $-m-|a|$.

<u>Segundo caso</u>. $[P,m+a_j] \neq \emptyset$. Usando (1.65) obtenemos que $O[P,m+a_j] \leq s-1$. Aplicando la hipótesis inductiva a $x_j f$ resulta

(1.69) $$(x_j\, K)\hat{}\ = P_j(x) + h_j(x) + Q_j(x)\log(\eta(x)^{-1})\ ,$$

donde $h_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ es homogénea de grado $-m-a_j-|a|$, P_j es un polinomio y $Q_j(x)$ es un polinomio homogéneo de grado $-m-a_j-|a|$ que puede expresarse como

$$Q_j(x) = \sum_{\beta\in[P,m+a_j]} \frac{(2\pi i)^{|\beta|}}{\beta!} \int_{S^{n-1}} x^\beta\, y'^\beta\, y_j'\, w(y')\, f(y')\, d\sigma\ .$$

De (1.65) sigue que

$$Q_j(x) = \sum_{\substack{\alpha\in[P,m]\\ \alpha_j\neq 0}} \frac{(2\pi i)^{|\alpha|-1}}{(\alpha-e_j)!} \int_{S^{n-1}} x^{\alpha-e_j}\, y'^{(\alpha-e_j)}\, y_j'\, w(y')\, f(y')\, d\sigma\ .$$

En consecuencia, tenemos que

$$(1.70) \qquad 2\pi i\, a_j\, x_j\, Q_j(x) = \sum_{\alpha\in[P,m]} \frac{(2\pi i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\, \alpha_j\, a_j \int_{S^{n-1}} x^\alpha y'^\alpha w(y')\, f(y')\, d\sigma\, .$$

Denotemos

$$J = \{j\colon [P, m + a_j] \neq \emptyset\} \quad .$$

Usando (1.68), obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{K} &= -\frac{1}{m+|a|}\{P(x) + \sum_{j\in J} 2\pi i\; a_j\; x_j\; P_j(x)\} \\ &\quad -\frac{1}{m+|a|}\{\sum_{j=1}^{n} 2\pi i\; a_j\; x_j\; h_j(x)\} \\ &\quad -\frac{1}{m+|a|}\{\sum_{j\in J} 2\pi i\; a_j\; x_j\; Q_j(x)\}\, \log\, (\eta(x)^{-1}) \\ &= P(x) + h(x) + Q(x)\, \log\, (\eta(x)^{-1}) \quad ,\end{aligned}$$

donde por (1.70)

$$\begin{aligned}Q(x) &= \sum_{\alpha\in[P,m]} \frac{(2\pi i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\; \frac{\alpha\cdot a}{-(m+|a|)} \int_{S^{n-1}} x^\alpha y'^\alpha w(y')\, f(y')\, d\sigma \\ &= \sum_{\alpha\in[P,m]} \frac{(2\pi i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{S^{n-1}} x^\alpha y'^\alpha w(y')\, f(y')\, d\sigma \quad ./// \end{aligned}$$

CAPITULO II

OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES CON HOMOGENEIDAD GENERALIZADA

En este capítulo desarrollaremos una teoría de operadores pseudo-diferenciales definidos mediante símbolos caracterizados por una métrica de tipo parabólico. A fin de motivar el estudio de tales operadores consideremos algunos ejemplos de operadores diferenciales clásicos.

Sea f una función perteneciente a C^∞ y $P(\xi)$ un polinomio con coeficientes constantes. Consideramos la ecuación diferencial

(2.1) $\quad P(D)\, h = f$.

Una solución fundamental es una distribución g tal que $P(D)\, g = \delta$ o, equivalentemente, $P(-2\pi i\xi)\, \hat{g} = 1$. Procediendo "formalmente" h en (2.1) puede ser representada por

(2.2) $$g * f = F^{-1}\left(\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\,\xi)}\right) * f + F^{-1}\left(\frac{\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\right) * f \;,$$

donde $\chi(\xi)$ está en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\chi(\xi) = 1$ para todo ξ perteneciente a un entorno de los ceros reales de $P(-2\pi i\xi)$. Es fácil ver que el segundo término del miembro derecho de (2.2) están en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, para obtener propiedades de regularidad de la solución de (2.1) será suficiente estudiar el comportamiento de $[1-\chi(\xi)]\, P(-2\pi i\xi)^{-1}$. Así, por ejemplo, en el caso en que $P(D)$ es un operador diferencial elíptico de orden m se obtiene la siguiente estimación, fácilmente verificable

(2.3) $$\left|D^\beta \frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\right| \le C_\beta(1 + |\xi|)^{-m-|\beta|} \;.$$

Cuando $P(D)$ es el operador del calor, esto es

$$P(D) = D_n - \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 \ .$$

se satisface la desigualdad

$$|D^\beta \frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}| \le C_\beta (1+|\xi|)^{-1-\frac{1}{2}|\beta|} \ .$$

Usando estas estimaciones, se puede probar que $F^{-1}[(1-\chi(\xi))\,P(-2\pi i\xi)^{-1}]*$ es un operador integral con núcleo, $k(x-y)$, el cual coincide con una función C^∞ fuera del origen de $\mathbb{R}^n$.

A.P. Calderón desarrolla en [C] una teoría general de operadores pseudo-diferenciales. Los símbolos, $P(-2\pi i\xi)$, asociados a estos operadores satisfacen condiciones análogas a (2.3). Allí se obtiene una descripción de los núcleos correspondiente a dichos operadores, en el logro de la misma juega un rol fundamental la homogeneidad de los símbolos. Esta teoría incluye a los operadores diferenciales elípticos, aun con coeficientes variables, pero sin embargo no se aplica a operadores diferenciales que poseen símbolos no homogéneos, como es el caso del operador del calor.

Si consideramos la métrica de tipo parabólica $\eta(\xi)$ asociada a la matriz diagonal cuyos elementos son $d_{ii} = 1$, $1 \le i < n$, $d_{nn} = 2$ (ver 1.1), obtenemos para el operador del calor la siguiente estimación

$$(2.4) \qquad |D^\beta \frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}| \le C_\beta\, (1+\eta(\xi))^{-2-\beta\cdot a} \ ,$$

donde a es el vector con componentes $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1$ y $a_n = 2$. Más aún, el símbolo $P(-2\pi i\xi)$ es homogéneo de grado dos en esta métrica. Este hecho nos sugiere desarrollar una teoría general de operadores pseudo-diferenciales con símbolos que satisfacen desigualdades análogas a (2.4).

En la primera sección de este capítulo se estudian las propiedades básicas de estos operadores. Definimos en (2.21) el concepto de una amplitud. Luego, obtenemos en (2.23) bajo condiciones convenientes, los operadores asociados a las mismas y analizamos sus propiedades. En (2.49) demostramos que un operador definido por una amplitud puede descomponerse como una suma de un operador propiamente soportado, $I^m_{\rho,\delta}$ (ver 2.53) y un operador "bueno". En la segunda sección, ver (2.62), introducimos desarrollos asintóticos. En Teorema (2.71) probamos que un operador en $I^m_{\rho,\delta}$ coincide con un operador definido por un símbolo. Se obtiene además, una expresión explícita de este símbolo en términos de una expansión asintótica, análoga a la dada en [C]. En la última sección definimos en (2.85) la clase I^m_H. Finalmente, aplicando los resultados del primer capítulo, en particular el Teorema (1.66), obtenemos en Teorema (2.95) una descripción explícita de los núcleos de los operadores pertenecientes a I^m_H, con $m<0$.

La teoría presentada en este capítulo incluye operadores diferenciales más generales tal como el operador parabólico dado por

$$P(D) = i^h \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} - \frac{\partial^{2\ell}}{\partial x_{n-1}^{2\ell}} + (-\Delta_{x_1,\dots,x_{n-2}})^k \quad ,$$

donde $k \geq \ell > j \geq 1$. Si consideramos la matriz diagonal tal que $d_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1,n-1} = k\,\ell^{-1}$ y $d_{nn} = 2kj^{-1}$; entonces el símbolo $P(-2\pi i\xi)$ es homogéneo de grado $2k$ con respecto a la métrica asociada a esta matriz. En particular, si $h=0$ y $j=\ell=k=1$ obtenemos el operador del calor. Más aun, variando los parámetros j,ℓ,k y aplicando (2.95) se obtienen representaciones para el núcleo de $F^{-1}[(1-\chi(\xi))(P(-2\pi i\xi))^{-1}]^*$, involucrando un término de la forma log $(\eta(x-y)^{-1})$. Esta teoría incluye asimismo operadores diferenciales con coeficientes variables.

§.1 OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES. DEFINICION Y PROPIEDADES

Los ejemplos anteriores sugieren estudiar la siguiente clase de funciones.

(2.5) DEFINICION. Sean $m \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$. Definimos $S^m_{\rho,\delta}$ como la clase de funciones $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tales que para todo par x,ξ de elementos de $\mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ existe una constante positiva $C_{\alpha,\beta}$ que satisface

(2.6) $$|D^\beta_x D^\alpha_\xi p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + \eta(\xi))^{m-\rho\,\alpha\cdot a+\delta\,\beta\cdot a} .$$

Los elementos $p(x,\xi)$ pertenecientes a $S^m_{\rho,\delta}$ son llamados símbolos de orden menor o igual que m , de tipo (ρ,δ) . Definimos el operador pseudo-diferencial de orden menor o igual que m correspondiente al símbolo $p(x,\xi)$ en $S^m_{\rho,\delta}$ por

(2.7) $$Lf(x) := \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad ,$$

para toda f en S . Estudiaremos a continuación las propiedades básicas de estos operadores.

(2.8) PROPOSICION. Si $p \in S^m_{\rho,\delta}$ entonces L es un operador lineal y continuo de S en S .

Demostración. Para $f \in S$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, tenemos

(2.9) $$x^\alpha D^\beta_x Lf(x) = x^\alpha \underset{\beta_1+\beta_2=\beta}{\mathrm{C.L.}} \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \xi^{\beta_1} D_x^{\beta_2} p(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \ .$$

Usando la identidad $x^\alpha e^{-2\pi i x\cdot\xi} = C_\alpha D^\alpha_\xi e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ e integrando por partes el segundo miembro de (2.5) resulta igual a

$$\underset{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta \\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}}{\mathrm{C.L.}} \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, D_\xi^{\alpha_1}(\xi^{\beta_1} D_x^{\beta_2} p(x,\xi))\, D_\xi^{\alpha_2} \hat{f}(\xi)\, d\xi \ .$$

Como $p \in S^m_{\rho,\delta}$ y $|\xi|^{1/a_n} \le \eta(\xi) \le |\xi|^{1/a_1}$ para $\eta(\xi) \ge 1$, las siguientes acotaciones son válidas.

$$|x^\alpha D^\beta_x Lf(x)| \le c \int (1+\eta(\xi))^{-|a|-1} (1+\eta(\xi))^{|a|+1+\mu} |D^\nu \hat{f}(\xi)|\, d\xi$$

$$\le c \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(1+|\xi|)^{a_1^{-1}(|a|+1+\mu)} D^\nu \hat{f}(\xi)|$$

$$\le C.L. \sup_{\gamma,\lambda \in \mathbb{N}^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\gamma D^\lambda f(\xi)| \quad ,$$

donde ν multiíndices y μ positivo resulta de la definición de $S^m_{\rho,\delta}$. La última acotación sigue de la continuidad del operador transformada de Fourier sobre S ./ / /

Denotaremos por K el núcleo de distribución asociado a L, es decir

(2.10) $$K(f \otimes g) := \int_{\mathbb{R}^n} Lf(x)\, g(x)\, dx \quad ,$$

para todo par de funciones de f y g pertenecientes a $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Para estos núcleos tenemos

(2.11) PROPOSICION. Existe un único elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, también denotado por K, que satisface (2.10). Más aún,

$$K(\phi) = \iint e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, F_y(\phi(x,y))\,(\xi)\, d\xi\, dx \quad ,$$

para toda ϕ en $C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Usaremos el siguiente lema de Schwartz. Una prueba del mismo puede hallarse en [S].

Lema. Sea B una transformación lineal y continua de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}'$. Si B se puede definir por un núcleo K, este núcleo es único.

Veamos que K está en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Como $\phi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces $F_y(\phi(x,y))(\xi)$ es C^∞ y de soporte compacto, E_1, como función de x uniformemente en ξ y pertenece a S como función de ξ con norma acotada independientemente de x. Por lo tanto, como $p \in S^m_{\rho,\delta}$ y $\eta(\xi) \le |\xi|^{1/a_1}$ para $\eta(\xi) \ge 1$, tenemos que

$$|K(\phi)| \le C_{E_1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \max_{x \in E_1} |(1 + |\xi|)^{(|a|+1+\mu)\, a_1^{-1}} F_y(\phi(x,y))(\xi)|$$

$$\cdot \int (1 + \eta(t))^{-|a|-1}\, dt$$

$$\le C_{E_1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \max_{x \in E_1} |(1 + |\xi|)^M F_y(\phi(x,y))(\xi)|$$

con $M > (|a|+1+\mu)\, a_1^{-1}$. Sea E el soporte de ϕ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Como F es un operado acotado de S en S, se sigue que

$$|K(\phi)| \le c \max_{|\alpha| \le N} \sup_{(x,y) \in E} |(1 + |y|)^N D_y^\alpha \phi(x,y)|$$

$$\le c_E \sum_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha \phi\|_\infty .$$

Por otra parte, $K(\phi)$ satisface claramente (2.10) para $\phi(x,y) = f(x)\, g(y)$ con f y g en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. El lema nos asegura que K es único.///

Introducimos a continuación una función γ con el propósito de efectuar truncaciones adaptadas a la geometría inducida por η. Sea $\psi \in C^\infty[0,\infty)$, tal que $0 \le \psi(t) \le 1$, $\psi(t) = 1$ si $0 \le t \le 1$ y $\psi(t) = 0$ para $t > 2$. Definimos

(2.12) $\quad \gamma(\xi) = \psi(\eta(\xi))$.

En lo que sigue, Ω denotará $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. En la próxima proposición demostraremos que el núcleo K definido en (2.11) es C^∞ sobre Ω en el sentido de (1.50).

(2.13) PROPOSICION. Sea $\rho > 0$. Entonces K es C^∞ sobre Ω , es decir, existe $k(x,y)$ en $C^\infty(\Omega)$ tal que $K/_\Omega = k$.

Demostración. Para $0 < \epsilon \leq 1$, definimos

$$k_\varepsilon(x,y) := \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, d\xi \ .$$

Claramente $k_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Más aún, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, tenemos

$$D_x^\alpha D_y^\beta k_\varepsilon(x,y) = \underset{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}{\mathrm{C.L.}} \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, \xi^{\beta+\alpha_1} D_x^{\alpha_2} p(x,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, d\xi \ .$$

Usando la identidad $\Delta_\xi^M e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} = (-4\pi^2|x-y|^2)^M e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}$, para $M \in \mathbb{N}$, e integrando por partes obtenemos

$$(2.14) \qquad g_\varepsilon(x,y) := (-4\pi^2 |x-y|^2)^M D_x^\alpha D_y^\beta k_\varepsilon(x,y)$$

$$= \underset{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ |\delta_1+\delta_2|=2M}}{\mathrm{C.L.}} \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^{\delta_1}(\xi^{\alpha_1+\beta} D_x^{\alpha_2} p(x,\xi))\, \varepsilon^{a\cdot\delta_2} D_\xi^{\delta_2} \gamma(T_\varepsilon \xi)\, d\xi \ .$$

Notemos ahora que el soporte de $D_\xi^{\delta_2} \gamma(T_\varepsilon \xi)$ está contenido en $\{\eta(\xi) \leq 2\varepsilon^{-1}\}$, en consecuencia

$$\varepsilon^{a\cdot\delta_2} \leq C(1+\eta(\xi))^{-a\cdot\delta_2} \ ,$$

para todo $\xi \in \mathrm{sop}(D_\xi^{\delta_2} \gamma(T_\varepsilon \xi))$. Por lo tanto, la función integrando de (2.14) está acotada por

$$C_{\alpha,\beta,M}\, (1+\eta(\xi))^{m+\max\{a_n,1\}|\alpha+\beta|-\min\{a_1,1\}2M\rho} \ ,$$

donde $C_{\alpha,\beta,M}$ es una constante independiente de ε . Como $\rho > 0$, eligiendo M suficientemente grande, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesque. En consecuencia, $g_\varepsilon(x,y)$ converge puntualmente sobre $\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n$ a una función $k_{\alpha,\beta,M}(x,y)$ cuando ε tiende a cero. Además, procediendo de la misma manera se prueba que, para M suficientemente grande, la familia $\{g_\varepsilon(x,y)\}_\varepsilon$ es equicontinua. Por consiguiente, $g_\varepsilon(x,y)$, converge uniformemente a $k_{\alpha,\beta,M}(x,y)$ y por lo tanto $D_x^\alpha D_y^\beta k_\varepsilon(x,y)$ converge uniformemente a $k_{\alpha,\beta,M}(x,y)$ $(-4\pi^2 |x-y|^2)^{-M}$ sobre subconjuntos compactos de Ω . Este hecho implica que k_ε converge a una función k en $C^\infty(\Omega)$, cuando ε tiende a cero.

Por otra parte, k_ε converge a K en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En efecto, para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\iint k_\varepsilon(x,y)\, \phi(x,y)\, dx\, dy = \iint \phi(x,y)\, \left(\int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, p(x,y)\, \gamma(T_\varepsilon\, \xi)\, d\xi\right) dx\, dy$$

$$= \iint e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon\, \xi)\, \hat{\phi}_\xi(x,\xi)\, d\xi\, dx \quad .$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se obtiene la conclusión deseada.///

Como corolario de esta proposición resulta que, para toda f en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y x fuera del soporte de f

$$(2.15) \qquad Lf(x) = \int k(x,y)\, f(y)\, dy \quad .$$

Nos interesará estudiar especialmente operadores pseudo-diferenciales que poseen la propiedad de no aumentar demasiado el soporte de las funciones a que se aplican. Para precisar mejor los conceptos introducimos la siguiente definición.

(2.16) <u>DEFINICION</u>. Diremos que un operador pseudo-diferencial L es propiamente soportado si existe una constante positiva M tal que para toda $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ el soporte de Lf está contenido en un M entorno del soporte de f .

Una condición sobre el núcleo que caracteriza estos operadores está contenida en la siguiente proposición.

(2.17) <u>PROPOSICION</u>. Sea L un operador pseudo-diferencial. Entonces L es propiamente soportado si y sólo si existe una constante $M_1 > 0$ tal que $\operatorname{sop} K \subset \{(x,y): |x-y| \leq M_1\}$.

<u>Demostración</u>. Supongamos primero que L es propiamente soportado. Sea M la constante que existe según definición (2.16). Consideremos $M_1 > M$ y $\phi(x,y) \in C_0^\infty(\{|x-y| > M_1\})$. Fijando $x \in \mathbb{R}^n$, el soporte de $\phi(x,y)$ está contenido en $\{y: |x-y| > M_1\}$. Como $M_1 > M$, por (2.16) $L(\phi(x,*))(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Por consiguiente, $K(\phi) = \int L(\phi(x,*))(x)\,dx = 0$ para toda $\phi(x,y)$ perteneciente a $C_0^\infty(\{|x-y| > M_1\})$. Esto muestra que la condición es necesaria.

Para demostrar la suficiencia, consideramos f en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ fuera de un M_1 - entorno del soporte de f , entonces por (2.11)

$$Lf(x) = \int k(x,y)\; f(y)\; dy = 0$$

En consecuencia, $\operatorname{sop}(Lf) \subset M_1$ - entorno del $\operatorname{sop}(f)$ .///

Dado un operador pseudo-diferencial L quisiéramos extender su dominio de definición a un espacio de distribuciones. Un camino posible sería encontrar el operador transpuesto L^t de L , tal que L^t sea continuo de S en S . Suponiendo esto, definimos

(2.18) $$LH(\phi) := H(L^t\,\phi) \quad ,$$

para todo $H \in S'$ y $\phi \in S$. El operador transpuesto L^t debe satisfacer

$$(2.19)\qquad \int Lf(x)\, g(x)\, dx = \int f(x)\, (L^t g)(x)\, dx \quad ,$$

para todo f y $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, al menos "formalmente" obtenemos que

$$(2.20)\qquad L^t f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, p(y,-\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, f(y)\, dy\, d\xi \quad ,$$

donde $\gamma(\xi)$ es la función truncación definida en (2.12). Esto sugiere estudiar expresiones del tipo (2.20). Con este fin se define una clase de funciones, $A(x,y,\xi)$, que incluye a los símbolos $p(x,\xi)$, de manera tal que los operadores asociados a estas funciones, a través de (2.20), sean del tipo (2.7) módulo operadores "buenos".

(2.21) DEFINICION. Sean $m \in \mathbb{R}$ y $0 \le \delta \le \rho \le 1$. En lo que sigue denotamos con $S^m_{\rho,\delta}$ la clase de funciones $A(x,y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tales que para toda terna x,y,ξ de elementos de $\mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}^n$ existe una constante positiva $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ que satisface

$$(2.22)\qquad |D_x^\alpha\, D_y^\beta\, D_\xi^\gamma\, A(x,y,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}\, (1+\eta(\xi))^{m-\rho\, a\cdot\gamma+\delta\, a\cdot(\alpha+\beta)} \quad .$$

Claramente las funciones $p(x,\xi)$ que verifican (2.6) también cumplen (2.22). Por lo que el uso de la misma notación para designar ambas clases no introduce confusión.

Un elemento $A(x,y,\xi)$ de $S^m_{\rho,\delta}$ es llamado una amplitud de orden menor o igual que m y de tipo (ρ,δ) . Diremos que una función $A(x,y,\xi)$ pertenece a $S^{-\infty}$ si está en $S^m_{\rho,\delta}$ para todo m .

La siguiente proposición nos ayudará a dar un sentido preciso a expresiones del tipo (2.20).

(2.23) PROPOSICION. Sea $A \in S^m_{\rho,\delta}$. Supongamos que $\delta < a_1\, a_n^{-1}$. Entonces

$$(2.24) \qquad Lf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\ \gamma(T_\varepsilon \xi)\ f(y)\ dy\ d\xi \quad ,$$

está bien definido para toda f en S y el límite es independiente de la función ψ usada en la definición (2.12) de γ .

Demostración. Usando la identidad

$$(1 + 4\pi^2\ |\xi|^2)^M\ e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} = (1 - \Delta_y)^M\ e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} \quad ,$$

para $M > 0$, e integrando por partes en (2.24) obtenemos

$$\iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\ (1 + 4\pi^2\ |\xi|^2)^{-M}\ (1 - \Delta_y)^M\ (A(x,y,\xi)\ f(y))\ \gamma(T_\varepsilon \xi)\ dy\, d\xi$$

$$= \underset{|\beta_1+\beta_2|\le 2M}{\mathrm{C.L.}} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\ \frac{D_y^{\beta_1} A(x,y,\xi)}{(1+4\pi^2\ |\xi|^2)^M}\ D_y^{\beta_2}\ f(y)\ \gamma(T_\varepsilon \xi)\ dy\ d\xi$$

$$= \underset{|\beta_1+\beta_2|\le 2M}{\mathrm{C.L.}} \int dy\ \Big(\int_{\eta(\xi)\le 1} + \int_{\eta(\xi)>1}\Big) \quad .$$

La primera integral está acotada por

$$C \max_{|\beta|\le 2M} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(1 + |y|)^{n+1}\ D_y^\beta\ f(y)|\ \max_{|\beta|\le 2M} \sup_{(x,y,\xi)} \Big(\frac{|D_y^\beta A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^{m+\delta a\cdot\beta}}\Big)$$

$$\cdot \int_0^1 (1 + \eta)^{m+\delta a_n 2M}\ \eta^{|a|-1}\ d\eta \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|)^{-(n-1)}\ dz \le C\ |||f|||_{n+1,2M} \quad .$$

Aplicando (1.8), la segunda integral está acotada por

$$C \max_{|\beta|\le 2M} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(1 + |y|)^{n+1}\ D_y^\beta\ f(y)|\ \max_{|\beta|\le 2M} \sup_{(x,y,\xi)} \Big(\frac{|D_y^\beta A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^{m+\delta a\cdot\beta}}\Big)$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |z|)^{-(n+1)}\ dz \cdot \int_1^\infty \eta^{m-2M(a_1-\delta a_n)}\ \eta^{|a|-1}\ d\eta \quad .$$

Eligiendo M suficientemente grande y teniendo en cuenta que $\delta < a_1\, a_n^{-1}$, la última expresión está acotada por $|||f|||_{n+1,2n}$. En consecuencia, Lf está bien definido. Por otra parte, para probar que el límite es independiente de la función ψ , consideremos γ_1 y γ_2 definidas por las funciones ψ_1 y ψ_2 respectivamente. Entonces

$$|\lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\ f(y)\ (\gamma_1(T_\varepsilon\ \xi) - \gamma_2(T_\varepsilon\ \xi))\ dy\ d\xi|$$

$$\leq C \max_{|\beta|\leq 2M} \sup_{y\in\mathbf{R}^n} |(1+|y|)^{n+1}\ D_y^\beta\ f(y)\ | \max_{|\beta|\leq 2M} \sup_{(x,y,\xi)} \left(\frac{|D_y^\beta A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^{m+\delta a\cdot\beta}}\right)$$

$$\cdot \int_{\mathbf{R}^n} (1+|z|^{-(n+1)}\ dz \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \eta^{m-2M(a_1-\delta a_n)+|a|-1}\ d\eta = 0 \quad ,$$

si M es suficientemente grande.///

De ahora en más supondremos siempre que $\delta < a_1 a_n^{-1}$ y $\rho > 0$. Estudiamos a continuación algunas propiedades del operador L definido en la proposición anterior.

(2.25) PROPOSICION. L es un operador continuo de S en S .

Demostración. Sean $f\in S$ y $\alpha,\gamma'\in\mathbf{N}^n$. Integrando por partes como en la prueba de (2.23), obtenemos

$$(2.26)\quad x^\alpha D_x^{\gamma'}\ Lf(x) = x^\alpha D_x^{\gamma'} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\ (1+4\pi^2|\xi|^2)^{-M}\ (1-\Delta_y)^M$$

$$(A(x,y,\xi)\ f(y))\ \gamma(T_\varepsilon\ \xi)\ dy\ d\xi$$

$$= x^\alpha \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{\gamma_1+\gamma_2=\gamma'}{\mathrm{C.L.}} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\ \xi^{\gamma_1}(1+4\pi^2|\xi|^2)^{-M}$$

$$D_x^{\gamma_2}(1-\Delta_y)^M\ (A(x,y,\xi)\ f(y))\ \gamma(T_\varepsilon\ \xi)\ dy\ d\xi \quad .$$

Usando la identidad $x^\alpha e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} = C D_\xi^\alpha e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}$ e integrando por partes se obtiene que (2.26) es igual a

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0}} \ \underset{\substack{\gamma_1+\gamma_2=\gamma' \\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}}{\mathrm{C.L.}} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, \xi^{\gamma_1-\alpha_1} D_\xi^{\alpha_2}\, [(1+4\pi^2|\xi|^2)^{-M} D_x^{\gamma_2}(1-\Delta_y)^M (A(x,y,\xi)\, f(y))\, \gamma(T_\varepsilon \xi)]\, d\xi\, dy \ .$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ \underset{\substack{\gamma_1+\gamma_2=\gamma' \\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}}{\mathrm{C.L.}} \int dy \left(\int_{\eta(\xi)\le 1} + \int_{\eta(\xi)>1}\right) .$$

Usando el mismo argumento que en (2.23) resulta que la primera integral está mayorada por

$$c \max_{|\beta|\le 2M} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(1+|y|)^{n+1} D_y^\beta f(y)| \max_{\substack{|\beta|\le 2M \\ |\gamma_2|\le|\gamma'| \\ |w|\le|\alpha_2|}} \sup_{(x,y,\xi)} \frac{|D_y^\beta D_x^{\gamma_2} D_\xi^w A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^{m+\delta a\cdot(\beta+\gamma_2)-\rho a\cdot w}}$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|)^{-(n+1)}\, dz \le c\, |||f|||_{n+1,2M} \ .$$

Aplicando (1.8), la segunda integral está acotada por

$$c \max_{|\beta|\le 2M} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(1+|y|)^{n+1} D_y^\beta f(y)| \max_{\substack{|\beta|\le 2M \\ |\gamma_2|\le|\gamma'| \\ |w|\le|\alpha_2|}} \left(\frac{|D_y^\beta D_x^{\gamma_2} D_\xi^w A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^{m+\delta a\cdot(\beta+\gamma_2)-\rho a\cdot w}}\right)$$

$$\cdot \int_1^\infty \eta^{m+a_n|\gamma'|-a_1|\alpha|\rho-2M(a_1-\delta a_n)+|a|-1}\, d\eta \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|)^{-(n+1)}\, dz$$

$$\le c\, |||f|||_{n+1,2M} \ ,$$

eligiendo M suficientemente grande y teniendo en cuenta que $\delta<a_1 a_n^{-1}$ .///

Sea L^t definido por

$$(2.27) \qquad L^t f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, A(y,x,-\xi)\, f(y)\, dy\, d\xi \ .$$

En consecuencia L^t satisface (2.19). Además, aplicando la proposición anterior, L^t es un operador continuo de S en S y, por consiguiente, L puede ser extendido al espacio de distribuciones S' por la identidad (2.18). Por lo tanto, obtenemos la siguiente proposición.

(2.28) PROPOSICION. L es un operador continuo de S' en S' .///

Estudiaremos ahora las propiedades del núcleo de distribución asociado a estos operadores. Si K es el núcleo de distribución de L , entonces

$$(2.29)\quad K(f\otimes g) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, f(y)\, g(x)\, d\xi\, dy\, dx ,$$

para todo par de funciones f y g en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Más aún, procediendo como en la prueba de (2.23) se demuestra que para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$(2.30)\quad K(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, \phi(x,y)\, d\xi\, dx\, dy$$

está bien definido y $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Para estos núcleos se verifica además la propiedad análoga a (2.13), es decir.

(2.31) PROPOSICION. Existe $k(x,y) \in C^\infty(\Omega)$ tal que $K/_\Omega = k$.

Demostración. Para $0 < \varepsilon \leq 1$, definimos

$$k_\varepsilon(x,y) := \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, d\xi \quad .$$

Usando el mismo razonamiento que en la prueba de la proposición (2.13), se demuestra que existe una función k tal que k_ε converge a k en $C^\infty(\Omega)$ .///

Como consecuencia de esta proposición obtenemos, igual que en (2.15), el siguiente colorario.

(2.32) COROLARIO. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x \notin \text{sop}(f)$. Entonces

$$Lf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy \quad ./\!/\!/$$

Una propiedad importante que satisfacen los operadores definidos en (2.23), es que los mismos no aumentan el soporte singular de la distribución a que se aplican. Un concepto equivalente a éste es introducido en la siguiente definición.

(2.33) DEFINICION. Diremos que un operador L es pseudo-local si para todo $T \in E'$ tal que existe un conjunto abierto y acotado U con la propiedad que $T \in C^\infty(U)$ (ver (1.50)), entonces se cumple que $L(T) \in C^\infty(U)$.

Para demostrar que los operadores pseudo-diferenciales definidos por una amplitud son pseudo-locales necesitaremos construir una partición de la unidad asociada a un cubrimiento del conjunto U .

El siguiente lema de cubrimiento está enunciado en [MS2] pág. 277, y su demostración está contenida esencialmente en [CW] pág 70.

(2.34) LEMA. (Lema de cubrimiento). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Consideremos $d(x) = \inf\{|x-y| : y \notin U\}$. Dado $c \geq 1$, sea $r(x) = (2c)^{-1} d(x)$. Entonces, existen un número natural M que depende de c y una sucesión $\{x_j\} \subset U$ tal que si r_j denota $r(x_j)$, tenemos que

(2.35) r_j tiende a cero, cuando j tiende a ∞ ,

(2.36) las bolas $B(x_j, r_j/4)$ son dos a dos disjuntas ,

(2.37) la unión $\bigcup_j B(x_j, r_j)$ es igual a U ,

(2.38) para todo j , $B(x_j, c\, r_j)$ está contenida en U , (2.39) para todo j , el número de bolas $B(x_i, c\, r_i)$ cuyas intersecciones con $B(x_j, c\, r_j)$ son distintas del vacío es a lo más M .///

(2.40) LEMA. (Partición de la unidad). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Consideramos las sucesiones $\{x_j\}$ y $\{r_j\}$ dadas en Lema (2.34) para $c = 8$. Entonces, existe una sucesión $\{\phi_j(x)\}$ de funciones no negativas satisfaciendo

(2.41) el soporte de ϕ_j está contenido en $B(x_j, 2r_j)$,

(2.42) la función ϕ_j es mayor igual que M^{-1} sobre $B(x_j, r_j)$ y

(2.43) $\sum_j \phi_j(x) = \chi_U(x)$, donde χ_U es la funcio´n característica del conjunto U .

Demostración. Una prueba de este lema se encuentra en [MS2] pág. 278.///

(2.44) PROPOSICION. L es pseudo-local.

Demostración. Sean $T \in E' \cap C^\infty(U)$ y $\phi \in C^\infty(U)$. Probaremos que existe una función $G \in C^\infty(U)$ tal que

$$L(T)\ (\phi) = G(\phi) = \int G(y)\ \phi(y)\ dy \quad .$$

Sea $\{\phi_j\}$ la partición de la unidad construida en el lema anterior. Luego, por (2.43)

$$\phi(x) = \sum_j \phi_j(x)\ \phi(x) \quad .$$

Veamos que esta suma es finita. En efecto, si $K = \mathrm{sop}(\phi)$ entonces

$$\mathrm{sop}(\phi_j\ \phi) \subset B(x_j, 2r_j) \cap K \quad .$$

Como $r_j = 16^{-1} d(x_j)$ tiende a cero cuando j tiende a infinito y $K \subset\subset U$, resulta que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(x_j,r_j) \cap K = \phi$$

para todo $j \geq N$, $\phi(x) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)\,\phi(x)$. Para cada $j:1,\ldots,N$, consideramos $\psi_j(x) \in C_o^\infty(U)$ tal que $\psi_j(x) = 1$ en $B(x_j,4r_j)$. En consecuencia

$$(2.45)\quad L(T)(\phi) = \sum_{j=1}^{N} L(T)(\phi_j\,\phi) = \sum_{j=1}^{N} L(T\,\psi_j)(\phi_j\,\phi) + \sum_{j=1}^{N} L(T(1-\psi_j))\,(\phi_j\,\phi)$$

$$=: \textstyle\sum_1 + \sum_2 \;.$$

Como $T\psi_j \in C_o^\infty(U)$, por (2.25) tenemos que

$$(2.46)\qquad G_j = \phi_j\; L(T\;\psi_j)$$

es una función en $C^\infty(U)$, por lo que $\sum_1$ verifica la propiedad requerida. Para estimar $\sum_2$, notemos que $\mathrm{sop}(1-\psi_j) \subset B(x_j,4r_j)$. Por consiguiente,

$$\mathrm{sop}(T(1-\phi_j)) \cap \mathrm{sop}(\phi_j\,\phi) = \emptyset \quad .$$

Por lo tanto, aplicando primero (2.18) y luego (2.32) obtenemos

$$(2.47)\qquad \textstyle\sum_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} (1-\psi_j)\; T(L^t\,\phi_j\,\phi) = \sum_{j=1}^{N} T((1-\psi_j)\; L^t(\phi_j\,\phi))$$

$$= \sum_{j=1}^{N} T_x((1-\psi_j(x)) \int k(x,y)\;\phi_j(y)\;\phi(y)\;dy)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int T_x((1-\psi_j(x))\;k(x,y))\;\phi_j(y)\;\phi(y)\;dy \quad ,$$

pues T conmuta con la integral, como es fácilmente verificable. Como $k(x,*)$ es C^∞ , resulta que

$$\tilde{G}_j(y) := T_x((1-\psi_j(x))\;k(x,y))\;\phi_j(y)$$

es una función perteneciente a $C^\infty(U)$. De (2.47) se sigue

$$(2.48) \qquad \textstyle\sum_2 = \sum_{j=1}^{N} \tilde{G}_j(\phi) \quad .$$

De (2.45), (2.46) y (2.48) se deduce que

$$L(T) = \sum_{j=1}^{N} (G_j + \tilde{G}_j) =: G \quad ,$$

pertenece a $C^\infty(U)$ .///

Con el propósito de estudiar el operador L lo descomponemos en suma de dos operadores L_1 y L_2 de la siguiente manera. Para $M > 0$, consideramos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(t) = 1$ si $|t| \leq M/2$ y $\text{sop}(\phi) \subset \{t: |t| \leq M\}$. Por lo tanto, para toda $f \in S$ tenemos

$$(2.49) \quad Lf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\, \phi(x-y)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)\, f(y)\, dy\, d\xi$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} \gamma(T_\varepsilon \xi)\, A(x,y,\xi)\, (1 - \phi(x-y))\, f(y)\, dy\, d\xi$$

$$= L_1 f(x) + L_2 f(x) \quad .$$

A partir de (2.17) se deduce fácilmente que L_1 es un operador propiamente soportado. Con respecto a L_2 , veremos que el mismo admite una representación integral a través de un núcleo C^∞ . Más aún, $D^\alpha L_2 = L_2 D^\alpha$ y $D^\alpha L_2$ está acotada en morma L^p para $1 < p < \infty$ y $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Probaremos primero que L_2 es un operador integral definido a través de un núcleo C^∞ . En efecto, usando la identidad

$$e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} = (-4\pi^2)^N\, |x-y|^{-2N}\, \Delta_\xi^N\, e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} \quad ,$$

para $N \in \mathbf{N}$ e integrando por parte obtenemos

$$(2.50) \quad L_2 f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} (-4\pi^2)^N\, \Delta_\xi^N\, [A(x,y,\xi)\, \gamma(T_\varepsilon \xi)]$$

$$\cdot\, (1 - \phi(x-y))\, |x-y|^{-2N}\, f(y)\, dy\, d\xi$$

$$= \underset{|\alpha_1+\alpha_2|=2N}{\mathrm{C.L.}} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^{\alpha_1} A(x,y,\xi)\, D_\xi^{\alpha_2} \gamma(T_\varepsilon \xi) \varepsilon^{a\cdot\alpha_2}$$

$$\cdot\ (1-\phi(x-y))\ |x-y|^{-2N}\ f(y)\ dy\ d\xi\ .$$

Notemos que si $\alpha_2 \neq 0$, $\mathrm{sop}(D^{\alpha_2} \gamma(T_\varepsilon\, \xi)) \subset \{\eta(\xi) \leq 2\varepsilon^{-1}\}$. En consecuencia

$$\varepsilon^{a\cdot\alpha_2} \leq C(1+\eta(\xi))^{-a\cdot\alpha_2} \quad, \text{ para toda } \quad \xi \in \mathrm{sop}(D^{\alpha_2}\gamma(T_\varepsilon\, \xi)) \ .$$

Por consiguiente, el integrando en (2.50) está acotado por

$$C(1+\eta(\xi))^{m-\rho a_1 2N} \quad |f(y)| \quad (1+|x-y|^{2N})^{-1} \quad ,$$

donde c es una constante que no depende de ε. Si $\alpha_2 = 0$, se tiene la misma estimación. Luego, como $\rho > 0$, eligiendo N suficientemente grande podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obteniendo

$$\text{(2.51)} \qquad L_2\, f(x) = \underset{|\alpha|=2N}{\mathrm{C.L.}} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha A(x,y,\xi)\ (1-\phi(x-y))$$

$$\cdot\ (1+|x-y|^{2N})^{-1}\ f(y)\ dy\ d\xi$$

$$= \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\ b_N(x,y,\xi)\ f(y)\ dy\ d\xi \quad ,$$

donde

$$b_N(x,y,\xi) := \underset{|\alpha|=2N}{\mathrm{C.L.}} D_\xi^\alpha A(x,y,\xi)\ (1-\phi(x-y))\ (1+|x-y|^{2N})^{-1}$$

pertenece a la clase $S_\rho^{m-\rho a_1 2N}$. Por lo tanto,

$$L_2\, f(x) = \int k(x,y)\ f(y)\ dy \quad ,$$

donde

$$k(x,y) = \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\ b_N(x,y,\xi)\ d\xi$$

satisface

(2.52) $\quad |D_x^{\alpha} D_y^{\beta} k(x,y)| \leq C_N (1 + |x-y|^{2N})^{-1}$.

Finalmente, observamos que integrando por partes $D^{\alpha} L_2 = L_2 D^{\alpha}$ y que, por (2.52), ambos operadores están acotados por el operador de convolución

$$\int c\ (1 + |x-y|^{2N})^{-1} f(y)\ dy \quad ,$$

el cual es continuo sobre L^p , $1 \leq p \leq \infty$, para N suficientemente grande.

Con el fin de describir y estudiar las propiedades de los operadores del tipo L_1 , obtenido anteriormente en (2.49), damos a continuación la siguiente definición, similar a aquélla considerada por A.P. Calderón en [C].

(2.53) DEFINICION. Denotaremos por $I^m_{\rho,\delta}$ a la clase de operadores L definidos, para f en S , por

$$Lf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\ \gamma(T_{\varepsilon}\xi)\ f(y)\ dy\ d\xi \quad ,$$

donde $A \in S^m_{\rho,\delta}$, $A(x,y,\xi) = 0$ sobre $|x-y| > M$ para algún $M > 0$, y $0 \leq \delta a_n < \rho a_1 \leq a_1$. Diremos que un operador L está en la clase $I^{-\infty}$, si éste pertenece a $I^m_{\rho,\delta}$ para todo m . Por último, observemos que, como en el caso del operador L_1 , de (2.17) se deduce que los operadores que están en $I^m_{\rho,\delta}$ son propiamente soportados.

§2. EXPANSION ASINTOTICA

Nuestro próximo objetivo es demostrar que un operador perteneciente a la clase $I^m_{\rho,\delta}$ coincide con un operador definido por un símbolo $p(x,\xi)$ perteneciente a $S^m_{\rho,\delta}$, como en (2.7). Veremos que este símbolo puede ser expresado en términos de una suma asintótica similar a la obtenida por A.P. Calderón en [C]. Para ello necesitaremos las dos proposiciones siguientes. Las pruebas presentadas de las mismas son una adaptación de los Teoremas (ii), pág. 16, de [C] y 29, pág. 147, de [H].

(2.54) <u>PROPOSICION</u>. Sea $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ tal que $p_j \in S^{m}_{\rho,\delta}$ con $m_j \downarrow -\infty$. Entonces existe $p \in S^{m_0}_{\rho,\delta}$ con la propiedad de que para todo entero no negativo N

$$b - \sum_{j<N} b_j \in S^{m_N}_{\rho,\delta} \quad . \tag{2.55}$$

<u>Demostración</u>. Sea $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ tal que $0 \le \psi(t) \le 1$, $\mathrm{sop}(\psi) = [1,\infty)$ y $\psi(t) = 1$ para $t \ge 2$. Definimos

$$\phi(\xi) := \psi(\eta(\xi))$$

y consideramos

$$p_j'(x,y,\xi) = p_j(x,y,\xi)\ \phi(T_{\varepsilon_j}\ \xi) \quad ,$$

donde $\{\varepsilon_j\}$ es una sucesión decreciente de números positivos que tien de a 0 cuando j tiende a ∞ . En consecuencia,

$$\mathrm{sop}_\xi(p_j') = \{\xi : \eta(\xi) \ge \varepsilon_j^{-1}\} \tag{2.56}$$

y

$$D_x^\alpha\, D_y^\beta\, D_\xi^\gamma\, p_j'(x,y,\xi) = \sum_{\substack{\gamma_1+\gamma_2=\gamma \\ |\gamma_2|>0}} D_x^\alpha\, D_y^\beta\, D_\xi^{\gamma_1}\, p_j(x,y,\xi)\ D_\xi^{\gamma_2}\,\phi(T_\varepsilon\,\xi)\,\varepsilon_j^{a\cdot\gamma_2} + D_\xi^\gamma\, p_j(x,y,\xi)\ \phi(T_{\varepsilon_j}\ \xi) \quad . \tag{2.57}$$

Como $\mathrm{sop}(D_\xi^{\gamma_2}\,\phi(T_\varepsilon\,\xi)) \subset \{\xi : \eta(\xi) \le 2\varepsilon_j^{-1}\}$,

$$\varepsilon_j^{a\cdot\gamma_2} \le [3(1+\eta(\xi))]^{-a\cdot\gamma_2}$$

para todo $\xi \in \mathrm{sop}(D_\xi^{\gamma_2}\,\phi(T_\varepsilon\,\xi))$. Luego, como $0 < \rho < 1$, de (2.57) tenemos que

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma p_j'(x,y,\xi)| \le c_{\alpha,\beta,\gamma}^j (1+\eta(\xi))^{m_j+\delta a\cdot(\alpha+\beta)-\rho a\cdot\gamma}$$

$$= c_{\alpha,\beta,\gamma}^j (1+\eta(\xi))^{-1} (1+\eta(\xi))^{m_j+1+\delta a\cdot(\alpha+\beta)-\rho a\cdot\gamma}$$

Más aún, de (2.56) se sigue que

$$(1+\eta(\xi))^{-1} \le \varepsilon_j$$

para todo $\xi \in \mathrm{sop}_\xi(p_j')$ y, por consiguiente, obtenemos

$$(2.58)\quad |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma p_j'(x,y,\xi)| \le c_{\alpha,\beta,\gamma}^j \varepsilon_j (1+\eta(\xi))^{m_j+1+\delta a\cdot(\alpha+\beta)-\rho a\cdot\gamma} ,$$

con $\varepsilon_j \downarrow 0$ cuando j tiende a ∞. Definimos

$$p(x,y,\xi) := \sum_j p_j'(x,y,\xi) \quad .$$

Como $\varepsilon_j \downarrow 0$ cuando j tiende a ∞, de (2.56) es claro que $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Notemos que si

$$(2.59)\qquad r_N = p - \sum_{j<N} p_j \in S_{\rho,\delta}^{m_N} ,$$

entonces

$$p = \sum_{j<N} p_j + r_N$$

pertenece a $S_{\rho,\delta}^{m_o}$. Por lo tanto, será suficiente probar (2.59). Para ello descomponemos a r_N de la siguiente manera

$$r_N = \sum_{j<N} p_j' - p_j + \sum_{j=N}^{M-1} p_j' + \sum_{j\ge M} p_j' =: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 ,$$

donde $M>N$, será elegido convenientemente. Estudiamos primero

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{j<N} (p_j' - p_j)\ (x,y,\xi) = \sum_{j<N} (1-\phi(T_{\varepsilon_j}\xi))\ p_j(x,y,\xi)$$

Sea $N_o > 0$ tal que $2\varepsilon_N^{-1} \le N_o$. Luego

$$\mathrm{sop}_\xi(\textstyle\sum_1) \subset \{\xi : \eta(\xi) \le N_o\} \quad .$$

En consecuencia,

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma \textstyle\sum_1| \le \sum_{j<N} c_{\alpha,\beta,\gamma}^j (1+\eta(\xi))^{m_j - m_N} (1+\eta(\xi))^{m_N - \rho a\cdot\gamma + \delta a\cdot(\alpha+\beta)}$$

$$\le c \ (1+\eta(\xi))^{m_N - \rho a\cdot\gamma + \delta a\cdot(\alpha+\beta)} \quad .$$

Lo que prueba que $\Sigma_1 \in S_{\rho,\delta}^{m_N}$. Por otra parte, como $S_{\rho,\delta}^{m_j} \subset S_{\rho,\delta}^{m_N}$ para todo $j \ge N$, claramente se obtiene que $\Sigma_2 \in S_{\rho,\delta}^{m_N}$. Con el propósito de estudiar Σ_3, consideremos $M > 0$ tal que

$$(2.60) \qquad m_M + 1 \le m_N \quad ,$$

lo cual es posible pues $m_j \downarrow -\infty$. Dados α, β y γ en $\mathbb{N}^n$ elegimos $\varepsilon_j \downarrow 0$ tal que para todo $j \ge M$ se cumpla

$$(2.61) \qquad c_{\alpha,\beta,\gamma}^j \ \varepsilon_j \le 2^{-j} \quad ,$$

donde $c_{\alpha,\beta,\gamma}^j$ es la constante que aparece en (2.58). Por lo tanto de (2.58), (2.60) y (2.61) se sigue que

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma \textstyle\sum_3| \le \sum_{j\ge M} |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma p_j'|$$

$$\le \sum_{j\ge M} 2^{-j} \ (1+\eta(\xi))^{m_j + 1 + \delta a\cdot(\alpha+\beta) - \rho a\cdot\gamma}$$

$$\le c \ (1+\eta(\xi))^{m_M + 1 + \delta a\cdot(\alpha+\beta) - \rho a\cdot\gamma}$$

$$\le c \ (1+\eta(\xi))^{m_N + \delta a\cdot(\alpha+\beta) - \rho a\cdot\gamma} \quad .$$

Luego, Σ_3 está en $S_{\rho,\delta}^{m_N}$ ./\/\/

(2.62) <u>DEFINICION</u>. Diremos que una función p perteneciente a $S_{\rho,\delta}^{m_o}$ es la suma asintótica de $\{p_j\}$ si satisface (2.55) y lo denotaremos por $p \approx \sum_j p_j$.

(2.63) PROPOSICION. Sea $p_j \in S^{m_j}_{\rho,\delta}$, $j:0,1,\ldots,$ tal que $m_j \downarrow -\infty$. Sea $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y supongamos que para todo α , β y γ perteneciente a $\mathbb{N}^n$ existen c y λ que dependen sólo de α , β y γ tal que

(2.64) $$|D^\alpha_x D^\beta_y D^\gamma_w p(x,y,w)| \le c\,(1+\eta(w))^\lambda \quad .$$

Si además para todo entero $N \ge 0$ existen C_N y μ_N que satisfacen

(2.65) $$|p(x,y,w) - \sum_{j<N} p_j(x,y,w)| \le C_N(1+\eta(w))^{\mu_N}$$

y $\mu_N \downarrow -\infty$, entonces $p \in S^{m_o}_{\rho,\delta}$ y $p \approx \sum_j p_j$.

Demostración. En la prueba de esta proposición necesitaremos el siguiente Lema.

(2.66) Lema. Sea $f \in C^2(U)$, U subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sean K_1 y K_2 conjuntos compactos tales que $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset U$. Entonces

$$\sum_{|\alpha|=1} \sup_{x\in K_1} |D^\alpha f(x)|^2 \le c \sup_{x\in K_2} |f(x)| \,(\sup_{x\in K_2} |f(x)| + \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in K_2} |D^\alpha f(x)|) \quad .$$

Demostración del Lema. Sea $x \in K_1$. Como $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2$, existe $h_o > 0$ tal que $x+\xi \in K_2$ para todo $|\xi| \le h_o$. Luego, desarrollando en Serie de Taylor la función f , en la dirección $h_j = h e_j$, obtenemos

$$f(x+h_j) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h + \frac{2h^2}{2!}\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x+t\,h_j)\,(1-t)\, dt \quad .$$

Esto es

(2.67) $$h\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = [f(x+h_j) - f(x)] - h^2 \int_o^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x+t\,h_j)\,(1-t)\, dt \quad .$$

Denotando $C_1 := \sup_{x\in K_2} |f(x)|$ y $C_2 := \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in K_2} |D^\alpha f(x)|$, de (2.68) resulta que

$$|h|^2 \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|^2 \le \left(2C_1 + h^2 C_2 \int_0^1 (1-t)\,dt\right)^2 = \left(2C_1 + \frac{h^2}{2} C_2\right)^2 .$$

Por consiguiente, para todo $|h| \le h_o$ se sigue

$$(2.68) \qquad C_3 := \sum_{|\alpha|=1} \sup_{x\in K_1} |D^\alpha f(x)|^2 \le n \left(2\,\frac{C_1}{h} + \frac{h}{2} C_2\right)^2 .$$

Si $C_2 = 0$, tomando $h = h_o$, C_3 está acotado por $C\,C_1^2$. Si $C_2 > 0$, consideramos

$$\phi(h) = \frac{2}{h} C_1 + \frac{C_2}{2} h \quad ,$$

para todo $h > 0$. Esta función alcanza un mínimo en $\bar{h} := 2\,(C_1/C_2)^{1/2}$. En el caso de que $\bar{h} \le h_o$, eligiendo $h = \bar{h}$ en (2.68) obtenemos que

$$C_3 \le n\, \phi(\bar{h})^2 = 4\, n\, C_1\, C_2 \quad .$$

Si $\bar{h} > h_o$, entonces $C_2 < 4\,C_1\,h_o^{-2}$. Por lo tanto, reemplazando h por h_o en (2.68) tenemos que

$$C_3 \le n \left(\frac{2}{h_o} C_1 + \frac{h_o}{2}\, 4\, C_1\, h_o^{-2}\right) \le C\, C_1^2 \quad .$$

Por lo que la conclusión del lema es obtenida.

<u>Demostración de la Proposición</u>. A partir de (2.54) se sigue que existe $p_o \in S^{m_o}_{\rho,\delta}$ tal que $p_o \approx \sum_j p_j$. Luego, como

$$p - \sum_{j<N} p_j = (p - p_o) + \left(p_o - \sum_{j<N} p_j\right) \quad ,$$

será suficiente probar que $p - p_o \in \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}$. Sea $N \ge 0$. Como $\mu_j \downarrow -\infty$, existe $N_o \ge N$ tal que $\mu_{N_o} \le m_N$ y $m_{N_o} \le m_N$. Por lo tanto, usando (2.65) tenemos

$$(2.69)\quad |p(x,y,w)-p_o(x,y,w)| \le |p(x,y,w) - \sum_{j<N_o} p_j(x,y,w)| + |p_o(x,y,w) - \sum_{j<N_o} p_j(x,y,w)|$$

$$\le C_1\ (1+\eta(w))^{\mu_{N_o}} + C_2\ (1+\eta(w))^{m_{N_o}}$$

$$\le C\ (1+\eta(w))^{m_N}\quad ,$$

para todo $N \ge 0$. Para obtener estimaciones de $D_x^{\alpha} D_y^{\beta} D_w^{\gamma}(p-p_o)$ aplicamos el Lema (2.66) a la función definida por

$$f(x', y', w') = (p-p_o)\ (x+x' , y+y' , w+w')\quad ,$$

donde x,y,w pertenecen a $\mathbb{R}^n$. Si

$$K_i = \{(x', y', w') : |x'|,|y'|,|w'| \le i\}$$

con $i = 1,2$ y α , β y γ son multiíndices tales que $|\alpha+\beta+\gamma|=1$, entonces de (2.64), (2.66) y (2.69) resulta que

$$|D_1^{\alpha} D_2^{\beta} D_3^{\gamma} (p-p_o)\ (x+x',y+y',w+w')|^2 = |D_{x'}^{\alpha} D_{y'}^{\beta} D_{w'}^{\gamma} f(x',y',w')|^2$$

$$\le C \sup_{|w'|\le 2} (1+\eta(w+w'))^{\mu} \sup_{|w'|\le 2} \{(1+\eta(w+w'))^{\mu} + (1+\eta(w+w'))^{\lambda}\}\ ,$$

donde $\mu = m_N \downarrow -\infty$. Razonando por inducción sobre el orden de derivación, supongamos que las derivadas de orden $h = |\alpha'+\beta'+\gamma'|$ de f , están acotadas por $(1+\eta(w))^{\mu+\lambda}$ con μ suficientemente pequeño. Sean α'' , β'' y γ'' en $\mathbb{N}^n$ tales que $|\alpha''+\beta''+\gamma''| = h+1$. Consideremos $\alpha''+\beta''+\gamma'' = (\alpha+\alpha') + (\beta+\beta') + (\gamma+\gamma')$, donde $|\alpha'+\beta'+\gamma'| = h$ y $|\alpha+\beta+\gamma| = 1$. Por lo tanto, si

$$D_{x'}^{\alpha'} D_{y'}^{\beta'} D_{w'}^{\gamma'} (p-p_o)\ (x+x',y+y',w+w') =: \tilde{f}(x',y',w')\quad ,$$

aplicando el Lema (2.66) a $\tilde{f}$ tenemos

$$(2.70)\quad |D_1^{\alpha''} D_2^{\beta''} D_3^{\gamma''}(p-p_o)(x+x',y+y',w+w')|^2 = |D_{x'}^{\alpha} D_{y'}^{\beta} D_{w'}^{\gamma} \tilde{f}(x',y',w')|^2$$

$$\leq \sup_{K_2} |\tilde{f}(x',y',w')| \{\sup_{K_2} |\tilde{f}(x',y',w')$$

$$+ \sum_{|\alpha+\beta+\gamma|=2} \sup_{K_2} |D_{x'}^{\alpha} D_{y'}^{\beta} D_{w'}^{\gamma} \tilde{f}(x',y',w')|\} \quad .$$

Usando la hipótesis inductiva y (2.64), el primer miembro de (2.70) está acotado por

$$C\ (1+\eta(w))^{\mu+\lambda}\ \{1+\eta(w)^{\mu+\lambda} + (1+\eta(w))^{\lambda'}\} \leq C\ (1+\eta(w))^{\mu+\lambda''} \quad ,$$

donde μ es suficientemente pequeño. Esto prueba que $p-p_o \in \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}$ y la proposición.///

En el Teorema siguiente caracterizamos los operadores pertenecientes a la clase $I^m_{\rho,\delta}$.

(2.71) <u>TEOREMA</u>. Sea $L \in I^m_{\rho,\delta}$. Entonces existe una única función $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ tal que para toda $f \in S$

$$Lf(x) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\ p(x,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi \quad .$$

Más aún, para todo entero $N \geq 1$

$$p(x,\xi) - \sum_{|\alpha|<N} (\frac{i}{2\pi})^{|\alpha|}\ \frac{1}{\alpha!}\ D_y^{\alpha}\ D_{\xi}^{\alpha}\ A(x,y,\xi)|_{y=x} \in S_{\rho,\delta}^{m-N(\rho a_1-\delta a_n)} \quad .$$

<u>Demostración</u>. Como L es propiamente soportado entonces para cada x en $\mathbb{R}^n$ fijo existe un conjunto acotado, E , tal que $A(x,y,\xi) = 0$, para todo $y \notin E$. Sea $\chi \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi \equiv 1$ en un entorno de E . Entonces $Lf(x) = L(\chi f)(x)$ está bien definido para toda f en C^{∞} . Probaremos que

$$p(x,w) := e^{2\pi i x\cdot w}\ L(e^{-2\pi i *\cdot w})\ (x) \in S^m_{\rho,\delta} \quad .$$

Notemos que

$$p(x,w) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot(\xi-w)} A(x,y,\xi)\ \gamma(T_\varepsilon \xi)\ d\xi\ dy$$

$$=: \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon \ .$$

Luego, usando el cambio de variables $u = y-x$ y $v = \xi - w$, obtenemos

$$I_\varepsilon = \iint e^{2\pi i u\cdot v} A(x,x+u,v+w)\ \gamma(T_\varepsilon(w+v))\ du\ dv \ . \tag{2.72}$$

Denotemos $b(x,u,w) := A(x,x+u,w)$. Entonces $b = \lim_{\varepsilon\to 0} b_\varepsilon$, donde

$$b_\varepsilon(x,u,w) := A(x,x+u,w)\ \gamma(T_\varepsilon w) \ .$$

Claramente b_ε se anula para $|u| > M$ y, por lo tanto, de (2.72) se sigue que

$$I_\varepsilon = \int \hat{b}_\varepsilon(x,v,w+v)\ dv \ ,$$

donde $\hat{b}_\varepsilon$ es la transformada de Fourier con respecto a la segunda variable. Estimamos ahora $D_x^\beta D_w^\alpha \hat{b}_\varepsilon$. Para $N \in \mathbb{Z}_+$ tenemos

$$|v|^{2N} D_x^\beta D_x^\alpha \hat{b}_\varepsilon(x,v,w) = |v|^{2N} D_x^\beta D_w^\alpha \int_{|u|\le M} e^{2\pi i u\cdot v} A(x,x+u,w)\ \gamma(T_\varepsilon w)\ du \ , \tag{2.73}$$

escribiendo $|v|^{2N} e^{2\pi i u\cdot v} = (-4\pi^2)^{-N} \Delta_u^N e^{2\pi i u\cdot v}$ y integrando por partes, (2.73) es igual a

$$\underset{\substack{|\mu|=2N \\ \beta_1+\beta_2=\beta \\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}}{\mathrm{C.L.}} \int_{|u|\le M} e^{2\pi i u\cdot v} \left(D_1^{\beta_1} D_2^{\mu+\beta_2} D_3^{\alpha_1} A\right)(x,x+u,w)\ D_w^{\alpha_2} (\gamma\, T_\varepsilon w)\ du \ ,$$

donde D_i es el operador diferencial con respecto a la i-ésima variable. Como $A \in S^m_{\rho,\delta}$, obtenemos que

$$|v|^{2N}\ |D_x^\beta D_w^\alpha \hat{b}_\varepsilon(x,v,w)| \le C\ (1+\eta(w))^{m+\delta a_n(2N+|\beta|)-\rho a_1|\alpha|} \ ,$$

donde C es una constante que no depende de ε . Por lo tanto,

$$(2.74) \qquad |D_x^\beta D_w^\alpha \hat{b}_\varepsilon(x,y,w)| \le C\, |v|^{-\nu}\, (1+\eta(w))^{m(\nu,|\beta|,|\alpha|)} \quad ,$$

para todo $\nu \in \mathbb{Z}_+$ y $m(\nu,|\beta|,|\alpha|) := m + \delta\, a_n(\nu+|\beta|) - \rho a_1 |\alpha|$. Si en (2.74) consideramos $|v| \ge 1$ y ν suficientemente grande, entonces

$$|D_x^\beta D_w^\alpha \hat{b}_\varepsilon(x,v,w+v)| \le C\, \eta(v)^{-a_1\nu} (1+\eta(v+w))^{m(\nu,|\beta|,|\alpha|)}$$

$$\le C\, \eta(v)^{-\nu(a_1-\delta a_n)+\delta a_n|\beta|-\rho a_1|\alpha|+m}$$

$$\cdot\ (1+\eta(w))^{m(\nu,|\beta|,|a|)} \quad .$$

Por consiguiente, como $\delta < a_1 a_n^{-1}$, $|D_x^\beta D_w^\alpha \hat{b}_\varepsilon(x,v,w+v)|$ está acotada por una función integrable en v , para ν grande. El Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \hat{b}_\varepsilon(x,v,w+v)\, dv = \int \hat{b}(x,v,w+v) = p(x,w) \quad .$$

Más aún, $p(x,w) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y

$$(2.75) \qquad |D_x^\beta D_w^\alpha p(x,w)| \le C\, (1+\eta(w))^\lambda$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia, $p(x,y,w) = p(x,w)$ satisface (2.64). Desarrollando en serie de Taylor la función $\hat{b}(x,v,*)$ obtenemos

$$(2.76) \qquad \hat{b}(x,v,w+v) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{v^\alpha}{\alpha!} D_3^\alpha \hat{h}(x,y,w)$$

$$= \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} v^\alpha \int_0^1 (1-t)^{N-1} D_3^\alpha \hat{b}(x,v,w+tv)\, dt$$

De (2.74) y (2.76) se sigue

$$(2.77) \qquad |\hat{b}(x,v,w+v) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{v^\alpha}{\alpha!} D_3^\alpha \hat{b}(x,v,w)|$$

$$\le C\, |v|^{N-\nu} \sup_{0\le t\le 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(\nu,0,|\alpha|)}\}$$

para todo N y ν perteneciente a $\mathbb{Z}_+$. Como tomamos la transformada de Fourier de b con respecto a la segunda variable, tenemos que

$$\sum_{|\alpha|<N} \int \frac{v^\alpha}{\alpha!} D_3^\alpha \hat{b}(x,v,w)\, dv = \sum_{|\alpha|<N} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} D_3^\alpha \int (D_2^\alpha b)^\wedge (x,v,w)\, dv$$

$$= \sum_{|\alpha|<N} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} (D_3^\alpha D_2^\alpha b)\ (x,0,w)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha|=j} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} (D_3^\alpha D_2^\alpha A)\ (x,x,w) \quad .$$

Por lo tanto, escribiendo

$$p_j = \sum_{|\alpha|=j} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} (D_3^\alpha D_2^\alpha A)\ (x,x,w) \quad ,$$

resulta que

$$|D_x^\beta D_w^\gamma p_j(x,w)| \le C\ (1+\eta(w))^{m-j(\rho a_1-\delta a_n)+\delta\beta\cdot a-\rho\gamma\cdot a} \quad .$$

lo cual implica

(2.78) $\qquad p_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}$ para $m_j = m - j(\rho a_1 - \delta a_n)$.

Como $\delta a_n < \rho a_1$, m_j tiende a $-\infty$, cuando j tiende a ∞ . En consecuencia, si probamos que la sucesión p_j satisface además (2.65), de acuerdo a la proposición (2.63), concluimos la prueba del Teorema. Estimemos

(2.79) $\qquad |p - \sum_{j<N} p_j| = |\int \{\hat{b}(x,v,w+v) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{v^\alpha}{\alpha!} D_3^\alpha \hat{b}(x,v,w)\}\, dv|$

Para ello, consideremos primero el caso $\eta(w) > 2K$, donde K es la constante que aparece en (1.3).

A partir de (2.77) se sigue que

$$|p - \sum_{j<N} p_j| \le C \int_{\eta(v)\le(2K)^{-1}\eta(w)} |v|^{N-\nu_1} \sup_{0\le t\le 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(\nu_1,0,N)}\}\, dv$$

$$+ C \int_{\eta(v)>(2K)^{-1}\eta(w)} (1+|v|)^{N-\nu_2} \sup_{0\le t\le 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(\nu_2,0,N)}\}\, dv$$

$$=: I_1 + I_2$$

para todo $\nu_1,\nu_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Estudiemos I_1 . Eligiendo $\nu_1 = N$, tenemos

$$I_1 = \int_{\eta(v)\leq(2K)^{-1}\eta(w)} \sup_{0\leq t\leq 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(N,0,N)}\}\, dv \quad .$$

Como $\delta a_n < \rho a_1$, tomando N suficientemente grande $m(N,0,N) = m + N(\delta a_n - \rho a_1) \leq 0$. Luego, observando que

$$\eta(w+tv) \geq K^{-1}\,\eta(w) - \eta(v) \geq (2K)^{-1}\,\eta(w) \quad ,$$

se deduce que

$$I_1 \leq C\ (1+\eta(w))^{m(N,0,N)+|a|} \quad .$$

Más aún,

$$\mu_N^1 := m(N,0,N) + |a| = N(\delta a_n - \rho a_1) + m + |a|$$

tiende a $-\infty$ cuando N tiende a ∞ .

Estimemos I_2 . Supongamos primero que $\delta > 0$ y notemos que, para ν_2 suficientemente grande, $N - \nu_2 < 0$ y $m(\nu_2,0,N) = m + \delta\, a_n\, \nu_2 - \rho a_1 N \geq 0$. Entonces, como $|v| \geq \eta(v)^{a_1}$ para $\eta(v) > 1$, obtenemos

$$|I_2| \leq C \int_{\eta(v)>(2K)^{-1}\eta(w)} (1+\eta(v))^{(N-\nu_2)a_1} \sup_{0\leq t\leq 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(\nu_2,0,N)}\}\, dv \ .$$

Como

$$1 + \eta(w+tv) \leq C\ (\eta(w) + \eta(v)) \leq C\ \eta(v) \quad ,$$

usando nuevamente que $\delta < a_1\, a_n^{-1}$, tenemos que

$$|I_2| \leq C \int_{\eta(v)>(2K)^{-1}\eta(w)} (1+\eta(v))^{Na_1(1-\rho)-\nu_2(a_1-\delta a_n)+m}\, dv$$

$$= C\ (1+\eta(w))^{Na_1(1-\rho)-\nu_2(a_1-\delta a_n)+m+|a|}$$

Eligiendo $\nu_2 = \nu_2(N)$ suficientemente grande, se sigue que

$$\mu_N^2 := Na_1(1-\rho)-\nu_2(N)\ (a_1-\delta a_n)+m+|a|$$

tiende a $-\infty$ cuando N tiende a ∞ .

Consideramos ahora $\delta=0$. Como $m(\nu_2,0,N) = m-\rho a_1 N \leq 0$ para N suficientemente grande, resulta que

$$|I_2| \leq C \int_{\eta(v)\geq(2K)^{-1}\eta(w)} (1+\eta(v))^{(N-\nu_2)a_1} dv \quad .$$

Por lo tanto,

$$|I_2| \leq C \ (1+\eta(w))^{(N-\nu_2)a_1+|a|}$$

Para $\nu_2 = \nu_2(N)$ suficientemente grande, tenemos que

$$\mu_N^2 := (N - \nu_2(N)) \ a_1 + |a|$$

tiende a $-\infty$ cuando N tiende a ∞ .

Tomando $\mu_N = \min(\mu_N^1,\mu_N^2)$, hemos probado que la sucesión p_j satisface (2.65) cuando $\eta(w) > 2K$.

Sólo nos resta considerar el caso $\eta(w) \leq 2K$. De (2.77) obtenemos

$$|p - \sum_{j<N} p_j| \leq C \int_{\eta(v)\leq 1} |v|^N \sup_{0\leq t\leq 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(0,0,N)}\} dv$$

$$+ C \int_{\eta(v)>1} (1+|v|)^{N-\nu} \sup_{0\leq t\leq 1} \{(1+\eta(w+tv))^{m(\nu,0,N)}\} dv \quad .$$

$$=: I_1 + I_2 \ .$$

Como $m(0,0,N) = m - \rho a_1 N \leq 0$ para N grande, I_1 está acotado por

$$C \ (1+\eta(w))^{\mu_N^1} \quad ,$$

donde μ_N^1 tiende a $-\infty$ cuando N tiende a ∞ . Para acotar I_2 , observemos que $1 \geq (2K)^{-1} \eta(w)$. Luego, procediendo como en el caso anterior para la estimación de I_2 , obtenemos la cota deseada. Esto es

$$|I_2| \leq C\,(1+\eta(w))^{\mu_N^2} ,$$

donde μ_N^2 tiende a $-\infty$ cuando N tiende a ∞. Tomando como antes $\mu_N = \min(\mu_N^1, \mu_N^2)$, la sucesión p_j también verifica (2.65) para $\eta(w) \leq 2K$ .///

Este Teorema nos permite introducir la siguiente definición.

(2.80) <u>DEFINICION</u>. El símbolo de un operador $L \in I^m_{\rho,\delta}$, denotado $\sigma(L)$, es la función $p(x,\xi)$ asociada a L, como en Teorema (2.71).

Observemos que si L es un operador pseudo-diferencial asociado a una amplitud $A \in S^m_{\rho,\delta}$ tal que $0 \leq \delta a_n < \rho a_1 \leq a_1$, entonces de acuerdo a (2.49) podemos definir $\sigma(L)$ módulo $S^{-\infty}$.

Enunciamos a continuación algunas propiedades de los símbolos, $\sigma(L)$, asociados a los operadores pseudo-diferenciales pertenecientes a $I^m_{\rho,\delta}$ cuyas demostraciones pueden encontrarse en [C], pág.13.

(2.81) <u>PROPOSICION</u>. Sea $L \in I^m_{\rho,\delta}$ y $M \in I^{m'}_{\rho,\delta}$. Entonces $L^* \in I^m_{\rho,\delta}$ y $LM \in I^{m+m'}_{\rho,\delta}$. Además, si $p = \sigma(L)$ y $q = \sigma(M)$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\sigma(L^*) = \sum_{|\alpha|<k} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_x D^\alpha_\xi \bar{p}(x,\xi) + r(x,\xi) \quad , \; r \in S^{m-k(\rho a_1 - \delta a_n)}$$

$$\sigma(LM) = \sum_{|\alpha|<k} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha_\xi p)(D^\alpha_x q) + r(x,\xi) \quad , \; r \in S^{m+m'-k(\rho a_1 - \delta a_n)}_{\rho,\delta} .$$

EL SIMBOLO PRINCIPAL

(2.82) <u>DEFINICION</u>. Sea $L \in I^m_{\rho,\delta}$. Diremos que $p(x,\xi)$ es un símbolo principal de orden m de L si $p - \sigma(L) \in S^{m-(\rho a_1 - \delta a_n)}_{\rho,\delta}$.

De (2.82) se deduce que el símbolo principal de un operador en $I^m_{\rho,\delta}$ está bien definido módulo $S^{m-(\rho a_1-\delta a_n)}_{\rho,\delta}$. La clase de símbolos principales de orden m de L será denotada por $\sigma_m(L)$, y si p es un símbolo principal de orden m de L , escribiremos $p \simeq \sigma_m(L)$. Las siguientes propiedades del símbolo principal, son consecuencias inmediata de su definición y de (2.81).

(2.83) Si $p \simeq \sigma_m(L)$ y $q \simeq \sigma_m(M)$, entonces

$$p + q \simeq \sigma_m(L+M) \quad y \quad \bar{p} \simeq \sigma_m(L^*) .$$

(2.84) Sean $p \simeq \sigma_m(L)$ y $q \simeq \sigma_{m'}(M)$. Entonces

$$pq \simeq \sigma_{m+m'}(LM) .$$

§.3 LA CLASE I^m_H

En esta sección estudiaremos una clase importante de operadores pseudo-diferenciales. La misma incluye a los operadores mencionados al comienzo de este capítulo de la forma $F^{-1}[(1-\chi(\xi))(P(-2\pi i\xi))^{-1}]^*$, donde $P(-2\pi i\xi)$ es el símbolo asociado a un operador diferencial parabólico. También se consideran en esta clase las "casi-inversas" de operadores diferenciales con coeficientes variables tales como

$$P(x',D) - \frac{\partial}{\partial x_n} ,$$

donde $P(x',D) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x')\, D_i D_j$ es un operador elíptico de orden 2 con coeficientes C^∞ en $\mathbb{R}^{n-1}$.

(2.85) DEFINICION. Sea $m \in \mathbb{R}$. Diremos que un operador L pertenece a I^m_H , si L está en $I^m_{1,0}$ y el símbolo $\sigma(L)$ de L tiene un desarrollo asintótico de la forma

$$\sigma(L) \simeq \sum_{j\geq 0} \sum_{|\alpha|=j} p^\alpha(x,\xi) \quad ;$$

donde $p^{\alpha}(x,\xi)$ pertenece a $S^{m-\alpha\cdot a}_{1,0}$ y coincide para cada $x\in\mathbb{R}^n$ y $\eta(\xi)>1$ con una función homogénea en ξ de grado $m-\alpha\cdot a$.

Notemos además, que de (2.81) se obtiene fácilmente que las clases I^m_H para todo m en $\mathbb{R}$, son cerradas con respecto a la suma, composición y operación de tomar adjunto.

Vamos a aplicar ahora los resultados obtenidos en el capítulo anterior a los operadores pertenecientes a las clases I^m_H, con $m<0$. Con este propósito demostraremos una serie de lemas y luego resumiremos sus resultados en el Teorema (2.95). Para ello necesitaremos la siguiente definición.

(2.86) DEFINICION. Sea $m\in\mathbb{R}$ tal que $[P,m]=\emptyset$. Definimos

$$[[P,m]] = \{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+ : \alpha\cdot a < -(m+|a|)\} .$$

Diremos que $O[[P,m]]=s$, $s\in\mathbb{Z}_+$, si $[[P,m]]\neq\emptyset$ y $s=\text{máx}\{|\alpha| : \alpha\in[[P,m]]\}$.

(2.86) LEMA. Si $[P,m]=\emptyset$, entonces $[P,m+\beta\cdot a]=\emptyset$ para todo $\beta\in\mathbf{N}^n$.

Demostración. Supongamos que existe $\beta\in\mathbf{N}^n$ tal que $[P,m+\beta\cdot a]\neq\emptyset$. Luego, existe $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$ tal que $-(m+\beta\cdot a+|a|)=\alpha\cdot a$. Por lo tanto, $-(m+|a|)=(\alpha+\beta)\cdot a$ y $[P,m]\neq\emptyset$, lo que contradice la hipótesis del Lema.///

(2.87) LEMA. Sea $m<-|a|$ y $[P,m]=\emptyset$. Supongamos que $O[[P,m]]=N$. Entonces $m+\beta\cdot a>-|a|$ para todo $\beta\in\mathbf{N}^n$ tal que $|\beta|>N$.

Demostración. Supongamos que existe $\beta\in\mathbf{N}^n$ con $|\beta|>N$ tal que $m+\beta\cdot a\leq-|a|$. Como $[P,m]=\emptyset$, $m+\beta\cdot a<-|a|$. En consecuencia, $\beta\in[[P,m]]$ y $|\beta|>N$, lo cual contradice lo supuesto sobre $O[[P,m]]$.///

(2.88) LEMA. Sea $p(x,\xi)$ un símbolo perteneciente a la clase $S^m_{1,0}$, $m<0$, el cual coincide para cada $x\in\mathbb{R}^n$ y $\eta(\xi)>1$ con una función, $q(x,\xi)$, homogénea en ξ, de grado m. Entonces, si $m>-|a|$,

$$F_\xi(p(x,\xi))\,(z) = P(x,z) + h(x,z) \quad ,$$

donde $P(x,z)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ y $h(x,z)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n-\{0\}))$, es una función homogénea de grado $-m-|a|$ con respecto a la segunda variable.

Demostración. Sea $\phi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(\xi)=1$ para $\eta(\xi)\le 2$. Entonces

$$p(x,\xi) - q(x,\xi) = [p(x,\xi) - q(x,\xi)]\,\phi(\xi) \quad .$$

Para calcular la transformada de Fourier de $p(x,\xi)-q(x,\xi)$, observemos primero que $p(x,\xi)\,\phi(\xi)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ y tiene soporte compacto en ξ, por lo tanto $F_\xi(p(x,\xi)\,\phi(\xi))\,(z)$ es C^∞ con respecto a las dos variables x y z. Por otra parte, $q(x,\xi)\,\phi(\xi)$ tiene soporte compacto en ξ y es homogénea de grado $m>-|a|$ cerca del origen, lo que implica que $q(x,\xi)\,\phi(\xi)$ es una función integrable en ξ. Por consiguiente

$$F_\xi(q(x,\xi)\;\phi(\xi))\;(z) = \int e^{-2\pi i\xi\cdot z}\,q(x,\xi)\;\phi(\xi)\;d\xi$$

es una función infinitamente diferenciable en x y z. Luego, si

$$\begin{aligned} P(x,\xi) := {} & F_\xi[(p(x,\xi) - q(x,\xi))\;\phi(\xi)]\;(z) \\ = {} & F_\xi(p(x,\xi))\;(z) - F_\xi(q(x,\xi))\;(z) \quad , \end{aligned}$$

hemos probado que $P\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Más aún, de (1.52) y (1.59) obtenemos que

$$F_\xi(q(x,\xi))\;(z) = h(x,z) \quad ,$$

donde $h(x,z)$ es una función homogénea en z, de grado $-m-|a|>-|a|$.

En consecuencia,

$$F_\xi(p(x,\xi))\ (z) = h(x,z) + P(x,z) \quad .$$

Para ver que $h(x,z)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$, sólo debemos observar que, en vista de (2.13), $F_\xi(p(x,\xi))\ (z)$ es una función infinitamente diferenciable sobre $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ ./ / /

(2.89) <u>LEMA</u>. Sea $p(x,\xi)$ como en (2.88). Supongamos que $m < -|a|$ y $[P,m] = \emptyset$. Entonces

$$F_\xi(p(x,\xi))\ (z) = P(x,z) + h(x,z) \quad ,$$

donde $P(x,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $h(x,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$, es una función homogénea de grado $-m-|a|$ con respecto a la segunda variable.

<u>Demostración</u>. Como $m < -|a|$ implica que $[[P,m]] \neq \emptyset$, probaremos el Lema por inducción sobre $O[[P,m]]$. Supongamos que $O[[P,m]] = 0$. Sea $q(x,\xi)$ como en (2.88). Aplicando la fórmula de Euler, obtenemos para $\eta(\xi) > 1$

$$m\ p(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j\ \xi_j\ \frac{\partial}{\partial \xi_j}\ p(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j\ \frac{\partial}{\partial \xi_j}\ (\xi_j\ p)\ (x,\xi) - |a|\ p(x,\xi) \quad .$$

Por lo tanto,

$$p(x,\xi) + \frac{1}{-(m+|a|)} \sum_{j=1}^{n} a_j\ \frac{\partial}{\partial \xi_j}\ (\xi_j\ p)\ (x,\xi)$$

pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y tiene soporte compacto sobre $\{\eta(\xi) \leq 1\}$. Luego, su transformada de Fourier con respecto a ξ es una función infinitamente diferenciable de x y z , $P(x,z)$. En consecuencia,

$$\text{(2.90)} \qquad F_\xi(p(x,\xi))(z) = P(x,z) + \frac{1}{-(m+|a|)} \sum_j a_j\ 2\pi i\ z_j\ F_\xi(\xi_j\ p(x,\xi))(z) \ .$$

Notemos que $p_j(x,\xi) := \xi_j\ p(x,\xi)$ coincide con una función homogénea en ξ de grado $m+a_j = m + e_j \cdot a$. Como de (2.87) se tiene que $m + e_j \cdot a > -|a|$, podemos aplicar (2.88) a $p_j(x,\xi)$ obteniendo

$$F_\xi(p(x,\xi))(z) = P(x,z) + \frac{1}{-(m+|a|)} \sum_j a_j\, 2\pi i\, z_j\, (h_j(x,z) + P_j(x,z)) ,$$

donde $P_j(x,z)$ está en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $h_j(x,z)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ y es homogénea en z, de grado $-m-|a|-a_j$. Por consiguiente, nuestra afirmación se cumple en este caso. Con el fin de completar nuestro argumento inductivo, consideremos que $O[[P,m]] = s$, donde s es un entero positivo. Supongamos que la tesis se satisface para todo $m' < 0$ tal que $O[[P,m']] \le s-1$. Denotando

$J := \{1 \le j \le n : m + a_j > -|a|\}$, aplicando la fórmula de Euler y transformando Fourier con respecto a ξ, como en (2.90), tenemos que

$$F_\xi(p(x,\xi))(z) = P(x,z) + \frac{1}{-(m+|a|)} [\sum_{j\in J} a_j\, 2\pi i\, z_j\, F_\xi(\xi_j\, p(x,\xi))(z)$$
$$+ \sum_{j\notin J} a_j\, 2\pi i\, z_j\, F_\xi(\xi_j\, p(x,\xi))(z)] .$$

Si $j \in J$, entonces de (2.88) resulta

(2.91) $$z_j\, F_\xi(\xi_j\, p(x,\xi))(z) = P_j(x,z) + h_j(x,z) ,$$

donde $P_j(x,z)$ está en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $h_j(x,z)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ y es homogénea en z, de grado $-m-|a|$. Por otra parte, de (2.86) se sigue que $m + a_j < -|a|$ para todo $j \notin J$. Claramente $O[[P,m+a_j]] \le s-1$. Por lo tanto, aplicando nuestra hipótesis inductiva a $\xi_j\, p(x,\xi)$, la tesis se satisface para todo $j \notin J$. ///

Resumimos (2.88) y (2.89) en el siguiente corolario.

(2.92) <u>COROLARIO</u>. Sea $p(x,\xi)$ como en (2.88). Si $[P,m] = \emptyset$, entonces

$$F_\xi(p(x,\xi))\,(z) = P(x,z) + h(x,z) ,$$

donde $P(x,z)$ está en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $h(x,z)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ y es homogénea de grado $-m-|a|$, en la segunda variable.

(2.93) LEMA. Sea $p(x,\xi)$ el símbolo dado en (2.88). Si $[P,m] \neq \emptyset$, entonces

$$F_\xi(p(x,\xi))\,(z) = h(x,z) + Q(x,z)\,\log\,[\eta(z)]^{-1} + P(x,z) \quad ,$$

donde $h(x,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ y es homogénea de grado $-m-|a|$, $P(x,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $Q(x,z)$ es un polinomio homogéneo en z de grado $-m-|a|$ cuyos coeficientes son funciones infinitamente diferenciables de x .

Demostración. Probaremos el lema razonando por inducción sobre $O[P,m]$. Estudiamos primero el caso $O[P,m] = 0$, esto es $m = -|a|$. Sea $q(x,\xi)$ la función dada en (2.88). Definimos la distribución q_x por

$$q_x(\psi) = \int q(x,\xi)\,[\phi(\xi) - \psi(0)\,\chi(\xi)]\,d\xi \quad ,$$

donde $\chi(\xi)$ es la función característica del conjunto $\{\eta(\xi) \leq 1\}$. Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(\xi) = 1$ para $\eta(\xi) \leq 2$. Es fácil ver que la transformada de Fourier de la distribución $q_x\phi$ está dada por

$$F_\xi(q_x\phi)(z) = q_x\,(e^{2\pi i z\cdot *}\phi) = \int q(x,\xi)\,\phi(\xi)\,[e^{2\pi i z\cdot\xi} - \chi(\xi)\,d\xi \ .$$

Claramente $F_\xi(q_x\phi)$ es una función infinitamente diferenciable de x y z . Por otra parte, aplicando el Teorema (1.60) obtenemos que

$$F_\xi(q_x)(z) = h(x,z) + M(x)\,P_0(z) + M(x)\,\log\,[\eta(z)]^{-1} \quad ,$$

donde $h(x,z)$ es una función homogénea de grado cero con respecto a z , $M(x) := \int_{S^{n-1}} q(x,\xi')\,w(\xi')\,d\sigma$ es una función infinitamente diferen ciable y $P_0(z)$ es un polinomio. Por lo tanto, denotando

$$P_1(x,z) := F_\xi[(p(x,\xi) - q_x(\xi))\ \phi(\xi)]\ (z)$$

tenemos que

$$F_\xi(p(x,\xi))(z) = h(x,z) + M(x) \log[\eta(z)^{-1}] + M(x)\ P_0(z) + P_1(x,z) .$$

Para completar la prueba en este caso, sólo nos resta ver que $h(x,z)$ está en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$. Esto es cierto pues de (2.13) se sigue que $F_\xi(p(x,\xi))(z)$ es C^∞ sobre $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$. Sea s un entero positivo. Supongamos que $O[P,m] = s$ y que la tesis se cumple para todo $m' < 0$ tal que $O[P,m'] \leq s - 1$. Procediendo como en la prueba de (2.89), aplicamos la fórmula de Euler obteniendo

$$(2.94)\qquad F_\xi[p(x,\xi)](z) = P(x,z) + \frac{1}{-(m+|a|)} \sum_{j=1}^{n} a_j\ 2\pi i z_j\ F_\xi(\xi_j\, p(x,\xi))(z)$$

donde $P(x,z)$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Notemos que $p_j(x,\xi) :=$ $\xi_j\, p(x,\xi)$ coincide con una función homogénea en ξ de grado $m+a_j$ sobre $\{\eta(\xi) \geq 1\}$. Si $[P,m+a_j] = \emptyset$, de (2.94), la tesis sigue aplicando el Corolario (2.92) a $p_j(x,\xi)$. En caso contrario, si $[P,m+a_j] \neq \emptyset$, entonces a partir de (1.65) obtenemos que $O[P,m+a_j] \leq s - 1$ y podemos usar la hipótesis inductiva obteniendo de (2.94) la conclusión deseada.///

(2.95) <u>TEOREMA</u>. Sea $L \in I_H^m$, $m < 0$. Entonces L es un operador integral con un núcleo $K(x,y)$ que satisface las siguientes propiedades

(2.96) $K(x,y) \in C^\infty(\Omega)$.

(2.97) Para cada entero positivo N tal que $Na_1 - m - |a| > 0$, tenemos

$$K(x,y) = \sum_{|\alpha|<N} h^\alpha(x,x-y) + Q^\alpha(x,x-y) \log[\eta(x-y)]^{-1} + R_N(x,x-y) ,$$

donde $h^{\alpha}(x,z)$ y $R_N(x,z)$ pertenecen a $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$, $h^{\alpha}(x,z)$ y $Q^{\alpha}(x,z)$ son funciones homogéneas de grado $-m-|a|+\alpha \cdot a$ con respecto a la segunda variable, $Q^{\alpha}(x,z)$ es un polinomio en z cuyos coeficientes son funciones infinitamente diferenciales de x , $Q^{\alpha}(x,z) = 0$ si $[P,m-\alpha\cdot a] = \emptyset$ y $D_x^{\gamma} D_z^{\beta} R_N(x,z)$ es acotada sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para $\beta \cdot a < Na_1 - m - |a|$.

<u>Demostración</u>. De acuerdo a (2.85) tenemos que

$$Lf(x) = \sum_{0\le|\alpha|<N} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, p^{\alpha}(x,\xi)\, \gamma(T_{\varepsilon}\xi)\, W(x-y)\, f(y)\, dy\, d\xi$$

$$+ \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, r_N(x,\xi)\, W(x-y)\, f(y)\, dy\, d\xi \quad ,$$

donde $W \in C_0^{\infty}$ es tal que $W = 1$ en un entorno del origen, $p^{\alpha}(x,\xi)$ está en $S^{m-\alpha\cdot a}$ y coincide para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $\eta(\xi) \ge 1$ con una función homogénea en ξ , $q^{\alpha}(x,\xi)$, de grado $m-\alpha\cdot a$ y $r_N(x,\xi) \in S_{1,0}^{m-a_1 N}$. Por lo tanto,

$$L = \sum_{|\alpha|<N} L^{\alpha} + B \quad ,$$

donde $L^{\alpha} \in I^{m-\alpha\cdot a}$ y $B \in I_H^{m-a_1 N}$ es el operador integral definido por el núcleo

$$R_N'(x,z) := [\int e^{-2\pi i z\cdot\xi}\, r_N(x,\xi)\, d\xi]\, W(z) \quad .$$

Como la integral es absolutamente convergente para $Na_1 - |a| - m > 0$, $R_N'(x,z)$ está bien definido. Además, $R_N'(x,z)$ es una función continua y acotada tal que $D_x^{\gamma} D_z^{\beta} R_N'(x,z)$ es acotada y continua si $\beta \cdot a < Na_1 - m - |a|$. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ fijo y denotemos por $m' = m - \alpha \cdot a$. Como

$$L^{\alpha}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, p^{\alpha}(x,\xi)\, \gamma(T_{\varepsilon}\xi)\, W(x-y)\, f(y)\, dy\, d\xi \,,$$

entonces integrando con respecto a y tenemos que

$$L^{\alpha}f(x) = \int p^{\alpha}(x,\xi)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, g(\xi)\, d\xi \quad ,$$

donde $g(\xi)$ es la transformada Fourier de $W(x-y)\,f(y)$ con respecto a y. En consecuencia, para completar la prueba de (2.97) será suficiente ver que la transformada de Fourier de $p^{\alpha}(x,\xi)$ con respecto a ξ es una función de la forma

$$(2.98) \qquad h^{\alpha}(x,z) + Q^{\alpha}(x,z)\log[\eta(z)]^{-1} + P^{\alpha}(x,z) \quad ,$$

donde $h^{\alpha}(x,z)$ y $Q^{\alpha}(x,z)$ son como en (2.97) y $P^{\alpha}(x,z)$ pertenece a $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Si $[P,m'] = \emptyset$ usando el Corolario (2.92) se sigue (2.98), con $Q^{\alpha}(x,z) = 0$. El caso contrario, $[P,m'] \neq \emptyset$, resulta de aplicar el Lema (2.93). Luego, definiendo $R_N = R'_N + \sum_{|\alpha|<N} P^{\alpha}$ obtenemos (2.97) y por consiguiente (2.96).///

CAPITULO III

ACOTACION EN ESPACIOS L^p DE OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIALES

En este capítulo estudiamos las propiedades de continuidad de los operadores introducidos en el capítulo anterior.

Definimos primero espacios de Sobolev adecuados y consideramos en (3.11) la acotación en estos espacios de los operadores pseudo-diferenciales pertenecientes a $I^m_{\rho,\delta}$. Luego en Teorema (3.13) obtenemos la acotación en norma L^p de operadores definidos por una amplitud perteneciente a $S^0_{1,\delta}$. Como consecuencia de resultados recientes de David, Journé y Semmes (ver [DJS]), las estimaciones dadas en la prueba de (3.13) para los núcleos de estos operadores implican, en particular, que son operadores de Calderón-Zygmund sobre el espacio de tipo homogéneo, normal de orden $a_1 |a|^{-1}$, $(\mathbb{R}^n, d^{|a|}, m)$ (ver pág.7). Esto proporciona ejemplos de operadores de Calderón-Zygmund sobre espacios de tipo homogéneo.

ACOTACION EN NORMA L^2

Estudiamos la acotación en norma L^2 de los operadores pertenecientes a $I^m_{\rho,\delta}$ con $m \leq 0$. La prueba de la misma es una adaptación inmediata de la dada en [C], Teorema 6, por lo que sólo damos a continuación un bosquejo de su demostración.

(3.1) TEOREMA. Sea $L \in I^m_{\rho,\delta}$ con $m \leq 0$. Entonces L es un operador continuo de L^2 en L^2. Más aún, existen un entero no negativo M y una constante positiva C tal que

$$\|Lf\|_{L^2} \leq C \max_{|\alpha+\gamma+\beta| \leq M} \sup_{x,y,\xi \in \mathbb{R}^n} \{ |D^\alpha_x D^\beta_y D^\gamma_\xi A(x,y,\xi)| \cdot (1+\eta(\xi))^{-(m+\delta(\alpha+\beta)\cdot a-\rho a\cdot\gamma)} \} \|f\|_{L^2} .$$

Demostración. Necesitaremos el siguiente lema cuya prueba es esencialmente la misma que la dada en [C] pág. 18.

(3.2) Lema. Sea $p(x,\xi)$ perteneciente a $S^{o}_{\rho,\delta}$ con $a_n\delta < a_1\rho \le a_1$ y sea $N>0$ tal que $|p(x,\xi)| \le 2^{-1}N$ para todo x,ξ en $\mathbb{R}^n$. Entonces para cada entero positivo k existe B_k en $I^{o}_{\rho,\delta}$ tal que

$$B_k^* B_k + L^* L = I N^2 + R_k ,$$

donde R_k está en $I^{-k(a_1\rho - a_n\delta)}_{\rho,\delta}$.

Demostración del Teorema. Supongamos primero que $m < -|a|$. En consecuencia,

$$|Lf(x)| = \left|\iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A(x,y,\xi)\, f(y)\, dy\, d\xi\right| = \left|\int k(x,y)\, f(y)\, dy\right|$$

$$= \left|\int_{|z|\le M_1} k(x,z+x)\, f(x+z)\, dz\right| ,$$

pues $k(x,y)$ se anula para $|x-y| \ge M_1$. Elevando al cuadrado, integrando con respecto a x ambos miembros y aplicando luego la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$(3.3)\quad \int |Lf(x)|^2\, dx \le \int \left(\int_{|z|\le M_1} |k(x,x+z)|\, |f(x+z)|\, dz\right)^2 dx$$

$$\le C_{M_1} \sup_{\substack{|z|\le M_1\\ x\in\mathbb{R}^n}} |k(x,x+z)|^2 \iint_{|z|\le M_1} |f(x+z)|^2\, dz\, dx$$

$$\le C_{M_1} \sup_{\substack{|z|\le M_1\\ x\in\mathbb{R}^n}} |k(x,x+z)|^2\, \|f\|^2_{L^2} .$$

Como $m < -|a|$, tenemos

$$(3.4)\quad \sup_{\substack{|z|\le M_1\\ x\in\mathbb{R}^n}} |k(x,x+z)| \le \sup_{x,y,\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{|A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^m} \int (1+\eta(\xi))^m\, d\xi$$

$$\le C \sup_{x,y,\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{|A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^m} .$$

De (3.3) y (3.4) se deduce

(3.5) $$\|Lf\|_{L^2} \le C_{M_1} \sup_{x,y,\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{|A(x,y,\xi)|}{(1+\eta(\xi))^m} \|f\|_{L^2} .$$

Usaremos ahora el Lema (3.2) para un k grande, $k(a_1\rho - a_n\delta) > |a|$, tal que R_k satisface (3.5). Por consiguiente, para f en S sigue

(3.6) $$(B_k^* B_k f + L^* Lf , f)_{L^2} = N^2 \|f\|^2_{L^2} + (R_k f,f)_{L^2} \le (N^2 + \|R_k\|) \|f\|^2_{L^2} .$$

Como el miembro izquierdo de (3.6) mayora a $\|Lf\|^2_{L^2}$, resulta la acotación L^2. La estimación deseada para la norma se obtiene usando (3.3) para R_k y estimando su núcleo a través del estudio de los pasos seguidos en la construcción de B_k en el Lema (3.2), ver por ejemplo [K] , Teorema 4.1, pág. 79.///

Con el propósito de introducir espacios de Sobolev apropiados, para el estudio de propiedades de continuidad de los operadores en $I^m_{\rho,\delta}$, damos a continuación la siguiente definición.

(3.7) <u>DEFINICION</u>. Dado $s\in\mathbb{R}$, definimos para toda $u\in S'$

$$J^s u := F^{-1} ((1+\eta(\xi)^2)^{-s/2} \hat{u}) .$$

Claramente J^s es un operador continuo de S en S y de S' en S'. Además, la familia $\{J^s\}_s$ forma un grupo, esto es $J^{s+t} = J^s J^t$.

(3.8) <u>DEFINICION</u>. Dado $s\in\mathbb{R}$, definimos

$$H_s := H_s(\mathbb{R}^n) := \{u\in S' : J^{-s} u\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

y

$$\|u\|_{H_s} = \|J^{-s}u\|_{L^2} .$$

(3.9) PROPOSICION

(i) Si $t \leq s$, entonces H_s está contenido continuamente en H_t .

(ii) J^s es un isomorfismo suryectivo de H_t en H_{t+s} .

(iii) $\bigcap_s H_s \subset C^\infty$ y $\bigcup_s H_s \supset E'$.

Demostración. Para $u \in H_s$, tenemos que

$$\|u\|_{H_t} = \|J^{-t}u\|_{L^2} = \|J^{s-t}J^{-s}u\|_{L^2} = \|F^{-1}[(1+\eta(\xi)^2)^{-(s-t)/2}(J^{-s}u)^\wedge]\|_{L^2}$$

$$= \|(1+\eta(\xi)^2)^{-(s-t)/2}(J^{-s}u)^\wedge\|_{L^2}$$

$$\leq \|J^{-s}u\|_{L^2} = \|u\|_{H_s} ,$$

lo cual implica (i). La prueba de (ii) es inmediata. En efecto, si $u \in H_t$ resulta que

$$\|J^s u\|_{H_{t+s}} = \|J^{-(t+s)}J^s u\|_{L^2} = \|J^{-t}u\|_{L^2} = \|u\|_{H_t} .$$

Para demostrar (iii) sólo debemos observar que si

$$\tilde{H}_s := \{u \in S' : (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\} ,$$

entonces las siguientes inclusiones son continuas

(3.10) $$H_{sa_n} \subset \tilde{H}_s \subset H_{sa_1} \subset H_{-sa_1} \subset \tilde{H}_{-s} \subset \tilde{H}_{-sa_n} ,$$

para $s > 0$ ./ / /

(3.11) PROPOSICION. Sea $L \in I^m_{\rho,\delta}$, $m \in \mathbb{R}$. Entonces L es un operador continuo de H_s en H_{s-m} , para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por (3.9) (ii) será suficiente probar que $S = J^{m-s} L J^s$ es un operador continuo de L^2 en L^2 . Si

$$Lf(x) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad ,$$

entonces

$$L J^s f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, (1+\eta(\xi)^2)^{-s/2}\, \eta(T_\varepsilon \xi)\, f(y)\, dy\, d\xi$$

Por lo tanto, como en (2.49) podemos escribir

$$\text{(3.12)} \qquad L J^s f(x) = L_1 f(x) + L_2 f(x) \quad ,$$

donde $L_1 \in I^{m-s}_{\rho,\delta}$ y L_2 es por (3.10) un operador continuo entre dos espacios de Sobolev arbitrarios, en particular, es un operador acotado de L^2 en H_{s-m}. En consecuencia

$$Sf = J^{m-s} L_1 f + J^{m-s} L_2 f \quad .$$

Como $J^{m-s} L_2$ es, por (3.9) (ii), continuo de L^2 en L^2, sólo nos resta probar que la misma acotación es válida para $J^{m-s} L_1$. Si $a_1(x,\xi) \in S^{m-s}_{\rho,\delta}$ es el símbolo asociado a L_1, entonces procediendo como en (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned} J^{m-s} L_1 f(x) &= \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, (1+\eta(\xi)^2)^{\frac{s-m}{2}}\, (L_1 f)^{\wedge}(\xi)\, d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, (1+\eta(\xi)^2)^{\frac{s-m}{2}}\, \overline{a_1^*}(y,\xi)\, \eta(T_\varepsilon \xi) \\ &\qquad\qquad f(y)\, dy\, d\xi \\ &= S_1 f(x) + S_2 f(x) \quad , \end{aligned}$$

donde $S_1 \in I^{0}_{\rho,\delta}$ y S_2 es un operador acotado en norma L^2. Aplicando el Teorema (3.1) a S_1, se obtiene que S es continuo de L^2 en L^2, lo que prueba la proposición.///

ACOTACION EN NORMA L^p, $1 < p < \infty$.

En el próximo teorema demostramos la acotación en norma L^p de los operadores definidos por una amplitud A perteneciente a $S^o_{1,\delta}$ con $\delta < a_1 a_n^{-1}$. En la prueba del mismos usaremos sólo una derivada de A en las variables x e y y un número finito de derivadas en la variable ξ , parte entera del número $(|a|+1+a_n)\, a_1^{-1}$. Probaremos además, que estos operadores son operadores de Calderón-Zygmund (ver [DJS]) en el espacio de tipo homogéneo normal de orden $a_1 |a|^{-1}$, $(\mathbb{R}^n,\delta,m)$, considerado en el Capítulo I.

(3.13) <u>TEOREMA</u>. Sea L el operador definido, en (2.23), por una amplitud $A \in S^o_{1,\delta}$ con $\delta < a_1 a_n^{-1}$. Entonces L es un operador continuo de L^p en L^p , para $1 < p < \infty$. Más aún, L es un operador de Calderón-Zygmund en $(\mathbb{R}^n,\delta,m)$.

<u>Demostración</u>. Sea

$$Lf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int k_\varepsilon(x,y)\, f(y)\, dy \quad ,$$

donde

$$k_\varepsilon(x,y) = \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, A(x,y,\xi)\, \eta(T_\varepsilon\, \xi)\, d\xi \quad .$$

Usando la descomposición (2.49) y el Teorema (3.1) obtenemos

$$(3.14) \qquad \|L_\varepsilon f\|_{L^2} \le C_1\, \|f\|_{L^2} \quad ,$$

donde C_1 es una constante independiente de ε . Probaremos ahora las siguientes estimaciones

$$(3.15) \qquad |k_\varepsilon(x,y)| \le C_2\, \eta(x-y)^{-|a|} \quad ,$$

$$(3.16) \qquad |\nabla_{x,y}\, k_\varepsilon(x,y)| \le C_3\, \eta(x-y)^{|a|(-1-t)} \quad ,$$

donde C_2 y C_3 son constantes independientes de ε y $0 < t \le 1$.

Si suponemos que, además de (3.14), se satisface (3.16), entonces por argumentos usuales adaptados a la teoría de espacios de tipo homogéneo (see [CW]), el Lema de Fatou y la proposición (2.23) se sigue la conclusión del teorema. Por otra parte, el núcleo K asociado a L también satisface (3.15) y (3.16), lo cual junto a la continuidad en L^2 implican que L es un operador de Calderón-Zygmund en $(\mathbb{R}^n,\delta,m)$.

Con el propósito de probar (3.15) consideramos una función $w\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $0\le w\le 1$, $w(t)=1$ si $t\in[3/2,5/2]$ y $w(t)=0$ si $t\notin(1,3)$. Entonces si

$$\phi_j(\xi) = w(\eta(T_{2^{-j}}\,\xi))\,[\sum_{k\in\mathbb{Z}} w(\eta(T_{2^{-k}}\,\xi))]^{-1} \quad ,$$

tenemos que $0\le\phi_j\le 1$, sop $(\phi)=\{2^j\le\eta(\xi)\le 2^j\,3\}$ y $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi_j(\xi)=1$ para $\xi\neq 0$. Sea $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0\le\psi\le 1$, tal que $\psi(\xi)=1$ si $\eta(\xi)\le 1/4$ y $\psi(\xi)=0$ para $\eta(\xi)>1/2$. Por lo tanto, escribiendo

$$A_\varepsilon(x,y,\xi) := A(x,y,\xi)\;\eta(T_\varepsilon\,\xi) \quad ,$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
(3.17)\qquad k_\varepsilon(x,y) &= \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\,A_\varepsilon(x,y,\xi)\;\psi(\xi)\;d\xi \\
&+ \sum_{j<0}\int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\,A_\varepsilon(x,y,\xi)\;(1-\psi(\xi))\;\phi_j(\xi)\;d\xi \\
&+ \sum_{j\ge 0}\int e^{-2\pi i(x,y)\cdot\xi}\,A_\varepsilon(x,y,\xi)\;(1-\psi(\xi))\;\phi_j(\xi)\;d\xi \\
&= \int e^{-2\pi i(x,y)\cdot\xi}\,b_\varepsilon(x,y,\xi)\;d\xi + \sum_{j\ge 0} k_\varepsilon^j(x,y) \quad ,
\end{aligned}
$$

donde

$$b_\varepsilon(x,y,\xi) := A_\varepsilon(x,y,\xi)\;\psi(\xi) + \sum_{j=-3}^{-1} A_\varepsilon(x,y,\xi)\;(1-\psi(\xi))\;\phi_j(\xi)$$

y

$$k_\varepsilon^j(x,y) = \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} A_\varepsilon(x,y,\xi)\ \phi_j(\xi)\ d\xi \quad .$$

En consecuencia, de (3.17) se sigue

$$(3.18) \qquad k_\varepsilon(x,y) = k_\varepsilon^1(x,y) + \sum_{j\geq 0} k_\varepsilon^j(x,y) \quad .$$

Primero estimamos $\sum_{j\geq 0} k_\varepsilon^j(x,y)$. Para $M\in\mathbb{Z}_+$ e $i=1,2,\dots,n$, tenemos

$$(3.19) \qquad |(x_i-y_i)^M k_\varepsilon^j(x,y)| = C\,\left|\int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_{\xi_i}^M(A_\varepsilon(x,y,\xi)\ \phi_j(\xi))\ d\xi\right|$$

$$= \left|\sum_{s+\ell=M} C.L. \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_{\xi_i}^s A_\varepsilon(x,y,\xi)\, D_{\xi_i}^\ell \phi_j(\xi)\ 2^{-\ell j a_i}\ d\xi\right|$$

$$\leq \sum_{s+\ell=M} C.L.\ 2^{-ja_i\ell} \int_{2^j\leq\eta(\xi)\leq 2^j 3} (1+\eta(\xi))^{-a_i s}\ d\xi \ .$$

Luego,

$$(3.20) \qquad |(x_i - y_i)^M k_\varepsilon^j(x,y)| \leq C\ 2^{-ja_iM}\ 2^{j|a|} \quad .$$

Veremos que la desigualdad

$$(3.21) \qquad 2^{ja_1N}\ |x_i - y_i|^{a_1a_i^{-1}N}\ |k_\varepsilon^j(x,y)| \leq C\ 2^{j|a|}$$

se cumple para todo entero $N\geq a_n a_1^{-1}$.

En efecto, de acuerdo a (3.20) para $M=N$ obtenemos que

$$(2^j\ |x_i - y_i|^{1/a_i})^{a_i N}\ |k_\varepsilon^j(x,y)| \leq C\ 2^{j|a|} \quad .$$

Si $2^j|x_i-y_i|^{1/a_i}\geq 1$, como $a_i > a_1$, (3.21) se satisface en este caso. Supongamos ahora que $2^j|x_i-y_i|^{1/a_i} < 1$. La condición $N\geq a_n a_1^{-1}$ implica que existe un entero N' tal que

(3.22) $\qquad a_n N' \le a_1 N$.

Eligiendo $M = N'$ en (3.20) y usando $a_i \le a_n$ resulta que

$$(2^j |x_i - y_i|^{1/a_i})^{a_n N'} |k_\varepsilon^j(x,y)| \le C\, 2^{j|a|} .$$

En consecuencia, de (3.22) obtenemos (3.21).

Por otra parte, tomando $M = 0$ en (3.20) y aplicando (3.21) se sigue que

$$(1 + 2^{ja_1 N} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^{a_1 a_i^{-1} N}) |k_\varepsilon^j(x,y)| \le C\, 2^{j|a|} .$$

Usando (1.6) tenemos

$$(3.23) \qquad (1 + 2^{ja_1 N} \eta(x-y)^{a_1 N}) |k_\varepsilon^j(x,y)| \le C\, 2^{j|a|} .$$

Por consiguiente, es válida la acotación

$$(3.24) \qquad |k_\varepsilon^2(x,y)| := |\sum_{j\ge 0} k_\varepsilon^j(x,y)| \le C \sum_{j\ge 0} 2^{j|a|} (1 + 2^{ja_1 N} \eta(x-y)^{a_1 N})^{-1} .$$

Si $a_1 \le 1$, eligiendo

$$N = (|a| + 1)\, a_1^{-1} - s \quad , \quad 0 \le s < 1$$

se satisface

$$(3.25) \qquad a_1 N = |a| + \sigma \quad ,$$

donde $0 < \sigma := 1 - a_1 s$. En caso contrario, si $a_1 > 1$ tomando

$$N = (|a| + 1) - s \quad , \quad 0 \le s < 1 \quad ,$$

se verifica (3.25) para σ positivo definido por

$$\sigma := (a_1 - 1)\, |a| + a_1(1 - s) .$$

Por lo tanto, podemos escribir (3.24) como

$$|k_\varepsilon^2(x,y)| \le C \sum_{j\ge 0} 2^{j|a|} [1 + 2^{j(|a|+\sigma)} \eta(x-y)^{|a|+\sigma}]^{-1} .$$

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\eta(x-y) = 2^r$. Entonces

$$(3.26) \qquad |k_\varepsilon^2(x,y)| \le C \sum_{j\ge 0} 2^{j|a|} [1 + 2^{j(|a|+\sigma)} 2^{r(|a|+\sigma)}]^{-1} .$$

Para estimar la suma en (3.26) consideramos primero $r \ge 0$. Luego, obtenemos

$$(3.27) \qquad |k_\varepsilon^2(x,y)| \le 2^{-r|a|} 2^{-r\sigma} \sum_{j\ge 0} 2^{-j\sigma} \le C \eta(x-y)^{-|a|} .$$

Si $r < 0$, escribimos $-r = k + s$ con $k \in \mathbb{N}$ y $0 \le s < 1$. Entonces

$$(3.28) \qquad \sum_{j=0}^{k+1} 2^{j|a|} [1 + 2^{j(|a|+\sigma)} 2^{r(|a|+\sigma)}]^{-1}$$

$$\le \sum_{j=0}^{k+1} 2^{j|a|} = 2^{|a|(k+2)} [2^{|a|} - 1]^{-1}$$

$$\le C 2^{-|a|(r+s)} \le C \eta(x-y)^{-|a|}$$

y

$$(3.29) \qquad \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{j|a|} [1 + 2^{j(|a|+\sigma)} 2^{r(|a|+\sigma)}]^{-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+k+2)|a|} [1 + 2^{(j+k+2)(|a|+\sigma)} 2^{r(|a|+\sigma)}]^{-1}$$

$$\le 2^{\sigma(s-2)} 2^{-r|a|} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\sigma}$$

$$\le C 2^{-r|a|} = C \eta(x-y)^{-|a|} .$$

Por consiguiente de (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29) se sigue que

$$|k_\varepsilon^2(x,y)| \le C \eta(x-y)^{-|a|} .$$

Para obtener (3.15) sólo nos resta estimar $k_\varepsilon^1(x,y)$. Notemos que para todo $M \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente acotación

$$|(x_i - y_i)^M k_\varepsilon^1(x,y)| \le C \left| \int e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_{\xi_i}^M [A_\varepsilon(x,y,\xi)\ \psi(\xi)]\, d\xi \right.$$

$$\left. + \int_{1/4\le\eta(\xi)\le 3/2} e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_{\xi_i}^M \sum_{j=-3}^{-1} A_\varepsilon(x,y,\xi)\ [1-\psi(\xi)]\ \phi_j(\xi)\, d\xi \right| \le C .$$

Eligiendo M conveniente y usando (1.6), se tiene que

$$|k_\varepsilon^1(x,y)| \le C\ \eta(x-y)^{-|a|} ,$$

completando la prueba de (3.15).

Con el propósito de establecer (3.16) estimamos $(x_i - y_i)^M$ $\nabla_{x,y} k_\varepsilon^j(x,y)$ como en (3.19), obteniendo que

$$(2^j\ |x_i - y_i|^{1/a_i})^{a_i M}\ |\nabla_{x,y}\ k_\varepsilon^j(x,y)| \le C\ 2^{j(|a|+a_n)}$$

Si $a_1 \le 1$, eligimos $N = (|a|+1+a_n)\, a_1^{-1} - s$ con $0 \le s < 1$ y en caso contrario, esto es $a_1 > 1$, tomamos $N = |a|+1+a_n - s$ con $0 \le s < 1$. Para acotar la suma en j procedemos como antes, resultando que

$$|\nabla_{x,y}\ k_\varepsilon^2(x,y)| \le C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(|a|+a_n)} [1 + 2^{j(|a|+a_n+\sigma)}\ \eta(x-y)^{|a|+\sigma+a_n}]^{-1}$$

$$\le C\ \eta(x-y)^{-|a|(1+a_n|a|^{-1})} = C\ \eta(x-y)^{|a|(-1-t)} ,$$

donde $0 < t := a_n\, |a|^{-1} \le 1$. Esto prueba (3.16) y el Teorema.///

Beatriz E. Viviani

Roberto A. Macías
Director

BIBLIOGRAFIA

[C] CALDERON, A.P.

Lectures Notes on Pseudo-Differential Operators and Elliptic Boundary Value Problems, I.

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Instituto Argentino de Matemática (1976).

[CT] CALDERON, A.P. y TORCHINSKY, A.

Parabolic Maximal Functions.

Advances in Mathematics, V. 16 (1975), 1-63.

[CW] COIFMAN, R.R. y WEISS, G.

Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes.

Lecture Notes in Mathematics Nº 242, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[DJS] DAVID, G.; JOURNE, J.L. y SEMMES, S.

Operateurs de Calderón-Zygmund sur les Espaces de Nature Homogene.

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique (1985).

[D] DONOGHUE, W.

Distribution and Fourier Transform.

Academic Press (1969).

[H] HORMANDER, L.

Pseudo-Differential Operators and Hypoelliptic Equations.

Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., Singular Integral Operators, V. 10 (1967), 138-185.

[K] KUMANO-GO, H.

Pseudo-Differential Operators.

Cambridge, London. The M.I.T. Press (1981), 455 p.

[MS1] MACIAS, R. y SEGOVIA, C.

Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type.

Advances in Mathematics, V. 33 (1979), 257-270.

[MS2] MACIAS, R. y SEGOVIA, C.

A Decomposition into Atoms of Distributions on Spaces of Homogeneous Type.

Advances in Mathematics, V. 33 (1979), 271-309.

[NS] NAGEL, A. y STEIN, E.M.

Lectures on Pseudo-Differential Operators. Regularity Theorems and Applications to Non-Elliptic Problems.

Mathematical Notes, V. 24

Princeton, Princeton University Press. University of Tokyo Press. (1979).

[P] PETERSEN, B.E.

Introduction to the Fourier Transform and Pseudo-Differential Operators.

Monographs and Studies in Mathematic, V. 19, Boston-London-Melbourne, Pitman (1983), 356 p.

[R] RIVIERE, N.M.

Singular Integral and Multiplier Operators.

Arkiv för Matematik, V. 9 (1973), 243-278.

[S] SCHWARTZ, L.

Matemática y Física Cuántica.

Cursos y Seminarios de Matemática (Fasc. 1), Universidad de Buenos Aires (1958).

Beatriz E. Viviani

Roberto A. Macías
Director