

## Tesis de Posgrado

# Aplicaciones de la geometría integral a redes de curvas planas, a algunas desigualdades geométricas y a congruencias de rectas

Gysin, Liliana Mabel

1986

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Gysin, Liliana Mabel. (1986). Aplicaciones de la geometría integral a redes de curvas planas, a algunas desigualdades geométricas y a congruencias de rectas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2033\\_Gysin.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2033_Gysin.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Gysin, Liliana Mabel. "Aplicaciones de la geometría integral a redes de curvas planas, a algunas desigualdades geométricas y a congruencias de rectas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1986.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2033\\_Gysin.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2033_Gysin.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

APLICACIONES DE LA GEOMETRIA INTEGRAL A REDES DE CURVAS  
PLANAS, A ALGUNAS DESIGUALDADES GEOMETRICAS Y  
A CONGRUENCIAS DE RECTAS

Autor

Liliana M.Gysin

Director de Tesis

Dr.Luis A.Santaló

Lugar de trabajo

Departamento de Matemática de la F.C.E.N.

Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

1986

Tesis  
- 2033 -  
y.2

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis A. Santaló, quien fue la guía y el estímulo continuos durante la realización de este trabajo.

A Ursula Molter por el apoyo que me brindó durante el tiempo que duró la realización de esta tesis.

Al Departamento de Matemática por el lugar de trabajo y el apoyo financiero, y en particular a mis colegas del mismo que siempre me alentaron a seguir adelante.

A mi marido y a mis hijos, sin cuya comprensión no hubiera podido finalizar esta tarea.-

## INDICE

INTRODUCCION.....	IV
I-REDES DE CURVAS PLANAS.....	1
1-Introducción.....	1
2-Definiciones y algunos resultados de Sulanke y Hristov.....	2
3-Prueba de la conjetura de Sulanke.....	5
4-Resultados obtenidos para $M=6$ .....	10
5-Comparación de las distancias de Sulanke y Steinhaus.....	17
II-DESIGUALDADES PARA EL PRODUCTO DE LOS VOLUMENES DE LA PARTICION QUE UNA SUPERFICIE DETERMINA EN UN CUERPO CONVEXO.....	24
1-Introducción.....	24
2-La conjetura.....	26
3-Primeras generalizaciones.....	32
4-El espacio de dimensión $n$ .....	34
5-La otra desigualdad.....	37
III-CONGRUENCIAS DE RECTAS.....	38
1-Introducción.....	38
2-Congruencias de rectas en $E^3$ .....	38
3-Distintas expresiones para la densidad de congruencias.....	41
4-Congruencias de rectas en los espacios elíptico e hiperbólico.....	51
5-Algunas aplicaciones.....	56
BIBLIOGRAFIA.....	60

## INTRODUCCION.

Este trabajo exhibe una manera de utilizar los elementos que provee la geometría integral, permitiendo obtener algunos resultados nuevos y otros que llevan de diferente manera a resultados conocidos. Está dividido en tres partes, de acuerdo con los temas en que se ha trabajado.-

La primera, que trata sobre redes de curvas planas, se refiere esencialmente a un trabajo de R.Sulanke [11]. Se prueba una conjetura del mismo que permite ampliar sus resultados y con la que se han podido exhibir los casos en que existe una red que puede ser cortada por rectas (según conjuntos de medida no nula) en ciertos números de puntos dados, para  $M \leq 6$  (Sulanke había resuelto el problema para  $M \leq 5$ ), quedando por resolver sólo el caso  $\{1,2,3,6\}$ , es decir, el caso de la existencia o no de redes que pueden ser cortadas por rectas (según conjuntos de medida no nula) en 1,2,3 ó 6 puntos. Después se considera la distancia entre redes dada por Sulanke y se la compara con la distancia entre curvas definida por Steinhaus [9], obteniendo diferentes desigualdades entre ambas distancias y observando que hay casos en que no son comparables.-

La segunda se basa en un trabajo de L.A.Santaló [7] que es a su vez una generalización, con un enfoque diferente, de un trabajo de J.Bokowski [3] sobre desigualdades para el producto de los volúmenes en que un hiperplano divide a un convexo en un espacio de dimensión  $n$ . Prueba una conjetura de L.A.Santaló [7] que permite generalizar

los resultados al caso de los volúmenes de los cuerpos en que un convexo dado es dividido por una hipersuperficie secante, en vez de por un hiperplano. Se obtienen desigualdades válidas para el espacio euclídeo y para el hiperbólico. Para el caso elíptico hay que limitarse a cuerpos convexos de diámetro menor que  $\pi/2$ . Se comparan las desigualdades obtenidas que resultan a veces equivalentes y a veces mejores que las de Bokowski. Los resultados de esta segunda parte están en vías de ser publicados [4].-

La tercera trabaja sobre congruencias de rectas en el espacio de tres dimensiones, siguiendo los trabajos de R.Sulanke [10] y W.Pohl [6]. Se dan diferentes expresiones para la densidad de rectas en congruencias y se las compara con las conocidas. En particular se estudian dos maneras prácticas de dar una congruencia de rectas, a saber:

i) Considerando una superficie que corta a las rectas de la congruencia y determinando cada una de ellas por su punto de intersección con la superficie. Si las coordenadas curvilíneas sobre la superficie son  $u,v$ ; la congruencia queda determinada por los cosenos directores  $\alpha(u,v)$ ,  $\beta(u,v)$  y  $\gamma(u,v)$  de cada recta, en un sistema de ejes unido a la superficie que tomamos formado por la normal a la superficie y las tangentes a las líneas de curvatura. La densidad para las rectas de la congruencia toma entonces la forma explícita (III-3.4).

ii) Considerando la congruencia formada por las rectas que unen los puntos de dos curvas fijas dadas. En este caso la densidad toma la forma simple (III-3.6), que se demuestra que equivale a la (III-3.7) de Pohl.

Se hace una generalización a congruencias de los espacios elíptico e hiperbólico y se dan algunas aplicaciones de los resultados obtenidos.-

## I-REDES DE CURVAS PLANAS.

### 1-Introducción.

En su trabajo " Integralgeometrie ebener Kurvennetze " [11] R.Sulanke estudia propiedades geométricas (invariantes por movimientos) de redes de curvas planas.-

El invariante más simple que se puede asociar a una red de curvas  $G$  es el conjunto de probabilidades  $p_i = p_i(G)$  ( $i=1, \dots, M$ ) de que una recta que corta a la red la corte en exactamente  $i$  puntos; y relacionado con éste el tipo de la distribución que es el conjunto de naturales  $m_i / p_{m_i}(G) > 0$ . Se plantea entonces el problema siguiente: dado un conjunto de naturales, cuándo éste es realizable por una red de curvas, es decir, cuándo existe una red tal que el tipo de su distribución geométrica coincida con el conjunto dado. Sulanke estudia todos los casos posibles para  $M \leq 5$ , probando una serie de resultados, algunos de los cuales sólo valen para redes de segmentos. Resuelve todos los casos excepto dos ( que son resueltos en un trabajo posterior de G.Hristov [5] ) y conjetura que si un conjunto es realizable por una red de curvas, también es realizable por una red de segmentos.-

En otra parte de su trabajo define y estudia una medida en el espacio de redes de curvas planas.-

En el párrafo 2 se dan algunas definiciones y algunos de los resultados obtenidos por Sulanke y Hristov. En el párrafo 3 se prueba la conjetura de Sulanke. En el párrafo 4 se estudian los conjuntos realizables para  $M=6$ , quedando pendiente el conjunto  $\{1,2,3,6\}$  . En el párrafo 5 se compara la medida de Sulanke con la definida por Steinhaus [9].

2-Definiciones y algunos resultados de Sulanke y Hristov.

Una red de curvas planas se define como la unión  $\bigcup_{i=1}^r k_i$ , donde  $k_i$  son arcos convexos contenidos en el plano con la siguiente propiedad:

si un punto  $a \in k_i \cap k_j$  ( $i \neq j$ )  $\Rightarrow$   $a$  es un extremo de  $k_i$  y de  $k_j$ . Una tal red se nota  $G = \bigcup_{i=1}^r k_i$ .

Los extremos de los arcos se llaman nudos de la red. El grado de un nudo  $\gamma_G(a)$  es el número de arcos que lo tienen por extremo. Un nudo se dice trivial si  $\gamma_G(a)=2$ .  $\hat{G}$  es la cápsula convexa de una red  $G$ .  $G$  se llama una red de segmentos si se puede escribir como unión de segmentos de rectas.  $G$  se llama una red de Euler si se puede escribir como unión de ciclos.

Definiendo en el espacio de rectas no orientadas del plano ( con densidad  $dg=dp \wedge d\phi$  ) una topología ( los abiertos son los conjuntos de rectas que cortan a dos segmentos de recta abiertos ), Sulanke prueba que la aplicación sobre este espacio que a cada recta  $g$  le asigna el número de puntos de intersección que la recta tiene con una red fija  $G$

$$n_G(g) = \text{número de puntos de } G \cap g$$

es una función medible, por lo cual tiene sentido definir la probabilidad

$$p_i(G/E) = \text{prob.} \{ n_G(g)=i / g \in E \neq \emptyset \} \quad i=0,1,\dots$$

donde  $E$  es un conjunto cerrado y acotado que contiene a  $G$ . En particular podemos tomar  $E=G$ ; llamamos entonces tipo de  $G$  al conjunto

$$T(G) = \{ m = m_1 < \dots < m_s = M \} = \{ m_i / p_{m_i}(G) > 0 \}$$

Es decir,  $m_i \in T(G)$  si existe un conjunto de rectas de medida no nula tal que corten

a G en exactamente  $m_i$  puntos.-

Por ejemplo, con dos arcos convexos se pueden generar redes con los siguientes tipos:



{1}



{2}



{1,2}



{1,2}



{2,3}



{2,4}



{1,2,3}



{1,2,4}



{2,3,4}

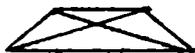


{1,2,3,4}

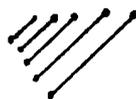
Se plantea entonces el siguiente problema:

dado un conjunto  $T = \{m_1 < \dots < m_s\}$  de números naturales, ¿cuándo existe una red G tal que  $T(G)=T$  ?

Por ejemplo, los conjuntos {1}, {2}, {1,2}, etc. son realizables por las redes que mostramos arriba. Entre los ejemplos de Sulanke tenemos que el conjunto {3,4} es realizable por



y el conjunto {1,2,3,4,5} es realizable por

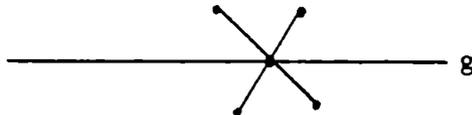


En cambio no son realizables, entre otros, los conjuntos {3}, {1,3}, {1,2,5}.

Sulanke estudia todos los conjuntos posibles para  $M \leq 5$ . Para ello define:

Una recta  $g$  se llama regular respecto de  $G$  si existe un entorno  $V=V(g)$  tal que para casi toda  $g' \in V(g)$  vale  $n_G(g')=i=\text{cte}$ . En tal caso se escribe  $n_G(g) \equiv i$ .

Por ejemplo, para la siguiente figura es  $1 = n_G(g) \equiv 2$ .



Una recta que no es regular se llama singular. Por ejemplo



donde para cualquier entorno alrededor de  $g$  algunas rectas del entorno cortan en 2 puntos y otras en 1 punto a la red.-

Sulanke prueba - entre otros resultados - que:

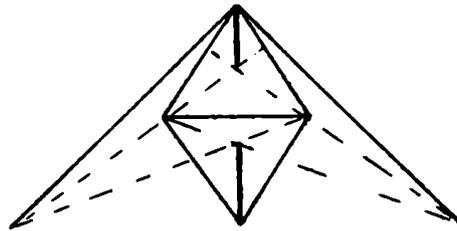
- a. La medida de un entorno de rectas es positiva.
- b. El conjunto de rectas singulares tiene medida nula.
- c.  $p_i(G) > 0$  si y sólo si existe  $g$  regular respecto de  $G$  tal que  $n_G(g) \equiv i$ .
- d. Si  $G$  es una red tal que  $\hat{G}$  es un polígono, entonces los vértices de  $\hat{G}$  son nudos (eventualmente triviales) de  $G$  cuyo grado pertenece a  $T(G)$ .
- e. Una red es de Euler si y sólo si su tipo contiene sólo números pares.
- f. El único conjunto realizable que sólo contiene números impares es  $\{1\}$ .
- g. Los únicos conjuntos unitarios realizables son  $\{1\}$  y  $\{2\}$ .
- h. Los únicos conjuntos binarios realizables son  $\{1,2\}$ ,  $\{2,3\}$ ,  $\{2,4\}$ ,  $\{3,4\}$  y  $\{4,6\}$ .

Exhibe luego una tabla con todos los conjuntos realizables ( siempre para  $M \leq 5$  )

dejando sin poder determinar si son o no realizables los conjuntos  $\{1,2,5\}$  y  $\{1,4,5\}$ .

En un trabajo posterior, referido al de Sulanke, G.Hristov [5] prueba que si  $T(G) = \{m=m_0 < m_1 < \dots < m_{s-1} < m_s=M\}$  es realizable, entonces  $m_{s-1} \geq \left\lceil \frac{M+1}{2} \right\rceil$  con lo cual descarta el  $\{1,2,5\}$  y exhibe una red que realiza el  $\{1,4,5\}$ .

Aquí tenemos otra red que realiza el  $\{1,4,5\}$ :



Con este ejemplo quedan completamente resueltos los casos para  $M \leq 5$ . Los únicos conjuntos realizables son:

$\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{1,2\}$ ,  $\{2,3\}$ ,  $\{2,4\}$ ,  $\{3,4\}$ ,  $\{1,2,3\}$ ,  $\{1,2,4\}$ ,  $\{1,3,4\}$ ,  $\{1,4,5\}$ ,  $\{2,3,4\}$ ,  $\{2,3,5\}$ ,  $\{2,4,5\}$ ,  $\{3,4,5\}$ ,  $\{1,2,3,4\}$ ,  $\{1,2,3,5\}$ ,  $\{1,2,4,5\}$ ,  $\{1,3,4,5\}$ ,  $\{2,3,4,5\}$ ,  $\{1,2,3,4,5\}$ .

Un ejemplo de cada caso se puede ver en Sulanke [11].-

### 3-Prueba de la conjetura de Sulanke.

Cuando encara el problema de la realizabilidad de conjuntos dados como tipos de una red, Sulanke [11] prueba que siempre puede tomarse la cápsula convexa  $\hat{G}$  de  $G$  como un polígono, y dice que lo mejor sería poder probar que siempre puede tomarse  $G$  como

una red de segmentos. Para probar esto, utilizaremos las definiciones y resultados de Sulanke citados en el parágrafo 2. Observemos además que el número de segmentos de la red de segmentos es en general mayor que el número de arcos de la red de curvas con el mismo tipo. Por ejemplo, podemos mostrar una red de tipo {2} formada por dos arcos, pero una red de segmentos con el mismo tipo debe contener por lo menos tres segmentos:



Proposición:

Sea  $G$  una red que realiza el tipo  $T(G) = \{m_1 < \dots < m_s\}$ , entonces existe una red de segmentos  $G'$  tal que  $T(G') = T(G)$ .

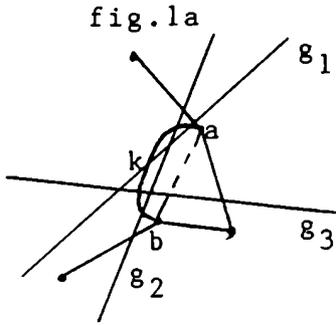
Demostración:

Si  $G$  es una red de segmentos, basta tomar  $G'=G$ . Si no, llamemos  $k$  a uno de los arcos de  $G$  que no es un segmento y sean  $a$  y  $b$  sus extremos. Si la cuerda  $\overline{ab} \in G$ , o si  $a=b$ , dividimos el arco  $k$  en dos subarcos (introduciendo un nudo trivial en  $G$ , lo cual no modifica su tipo) y consideramos como arco  $k$  a uno de los subarcos obtenidos.

Sea  $G^*$  la red obtenida a partir de  $G$  reemplazando  $k$  por su cuerda  $\overline{ab}$ . Ya que las rectas regulares a  $G$  que cortan a  $k$  en un solo punto cortan también a  $\overline{ab}$  en un solo punto (ver fig. 1a, por ej.  $g_3$ ), sólo pueden modificarse por el reemplazo los números de puntos de intersección de rectas regulares a  $G$  que son secantes a  $k$ , de modo que valen los siguientes dos enunciados:

$$(1) m \in T(G) \implies m \in T(G^*) \vee m-2 \in T(G^*).$$

$$(2) m \in T(G^*) \implies m \in T(G) \vee m+2 \in T(G).$$



$$T(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$T(G^*) = \{1, 2, 3\}$$

$$n_G(g_1) \equiv 3 \text{ y } n_{G^*}(g_1) \equiv 1$$

$$n_G(g_2) \equiv 4 \text{ y } n_{G^*}(g_2) \equiv 2$$

$$n_G(g_3) \equiv 2 \text{ y } n_{G^*}(g_3) \equiv 2$$

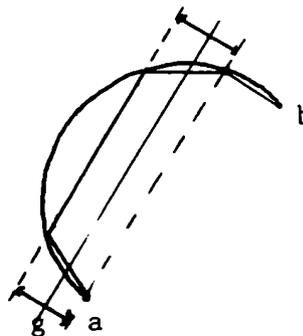
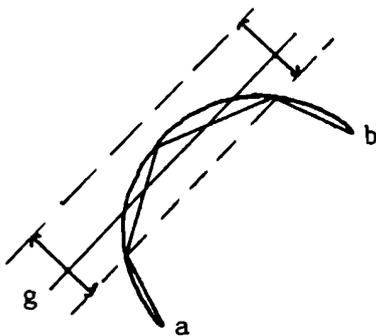
i) Si después de este reemplazo resulta  $T(G^*) = T(G)$ , trabajamos con  $G^*$  como antes con  $G$  desde el principio, hasta haber reemplazado todos los arcos de  $G$ , como el número de arcos de una red es finito, el proceso también lo es y tomando  $G' = G^*$  obtenemos la red de segmentos buscada.

Si con alguno de los reemplazos resulta  $T(G^*) \neq T(G)$ , puede suceder que  $T(G) \not\subseteq T(G^*)$ , o bien que  $T(G^*) \not\subseteq T(G)$ , o ambas.

ii) Si  $T(G) \not\subseteq T(G^*) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / m \in T(G) \wedge m \notin T(G^*) \xrightarrow{(1)} m-2 \in T(G^*)$

(Ver fig.1a, donde  $m=4$ ). Sea  $g$  una recta regular a  $G$  tal que  $n_G(g) \equiv m$ , entonces  $g$  es secante a  $k$ . Sea  $V$  un entorno rectangular de  $g$  (es decir un entorno tal que los segmentos de recta abiertos que lo determinan son ambos perpendiculares a  $g$ ) tal que para casi toda  $g' \in V$  es  $n_G(g') \equiv m$ .

Pueden presentarse las siguientes dos situaciones:

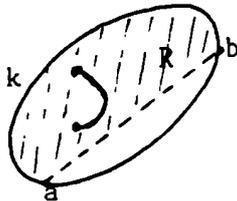


En cada caso tomamos  $G^*$  como la red obtenida a partir de  $G$  reemplazando el arco  $k$  por las cuerdas indicadas en las figuras, con lo cual resulta  $m \in T(G^*)$ . Si todavía fuera  $T(G) \not\subseteq T(G^*)$ , trabajamos nuevamente desde ii)

teniendo en cuenta que ahora  $k$  será alguno de los subarcos que reemplazamos por una cuerda. Como  $T(G)$  es un conjunto finito, el número de reemplazos también es finito y obtenemos una red  $G^*$  que verifica  $T(G) \subset T(G^*)$ .

iii) Si  $T(G^*) \not\subset T(G) \implies \exists m \in \mathbb{N} / m \in T(G^*) \wedge m \notin T(G) \xrightarrow{(2)} m+2 \in T(G)$   
 (Ver fig.1b, donde  $m=1$ ).

fig.1b



$$T(G) = \{2, 3, 4\}$$

$$T(G^*) = \{1, 2, 3, 4\}$$

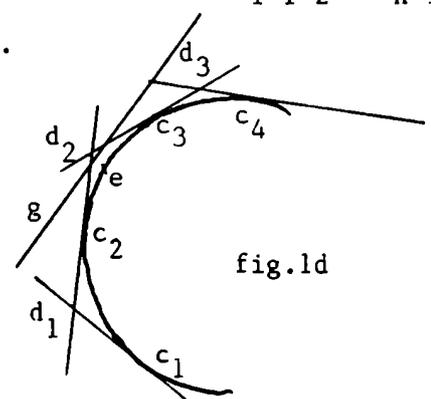
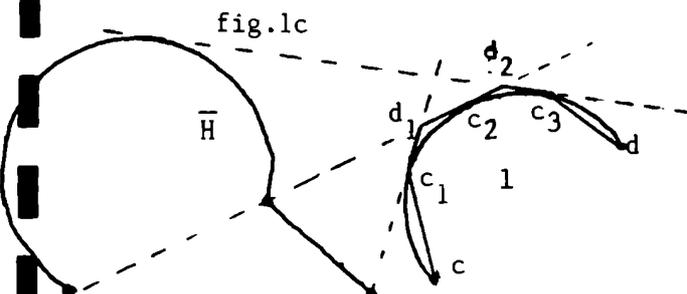
Llamemos  $R$  al convexo determinado por  $k$  y  $\overline{ab}$ , y llamemos  $\overline{G} = G - k$ . Es claro que  $m \in T(\overline{G})$  (pues  $m \in T(G^*)$ ,  $m \notin T(G)$  y  $m+2 \in T(G)$ ).

Si alguna subred de  $\overline{G}$  es interior a  $R$ , no puede tener puntos de contacto con  $k$  (pues  $k$  no tiene más nudos de  $G$  que  $a$  y  $b$ ). En este caso podemos reemplazar el arco  $k$  por una poligonal de extremos  $a$  y  $b$ , contenida en  $R$  y tal que determine con el segmento  $\overline{ab}$  un conjunto convexo que contenga a la subred de  $\overline{G}$  interior a  $R$ . Este reemplazo sólo puede agregar a  $T(G^*)$  elementos de  $T(G)$ , o sea aquellos que ya le pertenecen.

Si todavía  $m \in T(G^*)$ , debe existir otra subred de  $\overline{G}$ , exterior a  $R$  tal que las rectas  $g$ , regulares a  $G$ , para las que  $n_G(g) \equiv m+2$  verifican que  $n_{\overline{G}}(g) \equiv m$ . Estas rectas regulares a  $G$  son secantes a alguno de los subarcos de  $k$  que reemplazamos por cuerdas (puede haber distintas rectas para el mismo  $m$  que corten a diferentes arcos). Para cada uno de estos subarcos procedemos como sigue:

Sea  $l$  el subarco de  $k$  considerado,  $c$  y  $d$  sus extremos. Sabemos que el convexo  $K$  determinado por  $l$  y la cuerda  $\overline{cd}$  es tal que  $K \cap G = l$ . Sea  $\overline{H} = G - l$ . Tracemos desde los nudos de  $\overline{H}$  y desde sus arcos convexos (no segmentos) todas las posibles tangentes a  $l$  (ver fig.1c). Sean  $c_1, c_2, \dots, c_n$  los puntos de contacto de las tangentes, ordenados sobre  $l$  de manera que  $c_1$  es el más cercano a  $c$ . Sea  $d_i$  el punto de intersección de las tangentes por  $c_i$  y por  $c_{i+1}$ , para  $i=1, \dots, n-1$ .

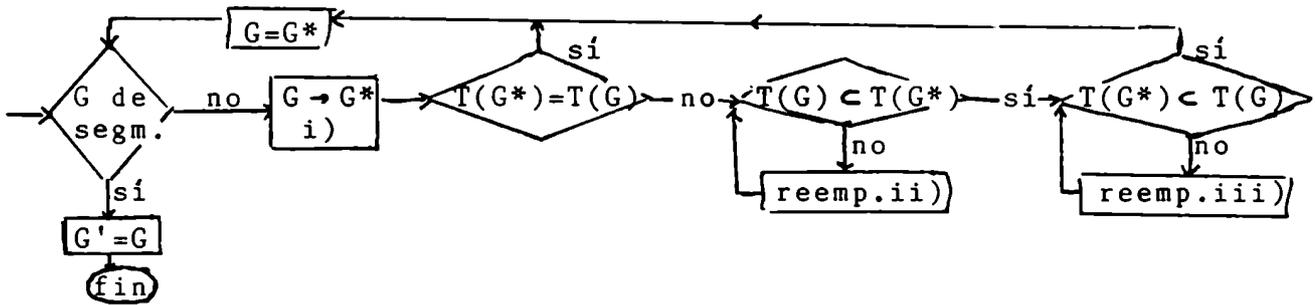
Sea  $H$  la red obtenida a partir de  $G$  reemplazando  $l$  por la poligonal  $cc_1d_1d_2 \dots d_{n-1}c_n d$  (donde puede ser  $c=c_1$  ó  $d=c_n$ ). Afirmamos que  $T(H) \subset T(G)$ .



Es claro que las rectas regulares a  $G$  y secantes a  $l$ , para las que  $n_G(g) \equiv m+2$  son ahora secantes a la poligonal (entre  $c_1$  y  $c_n$ ), con lo cual  $n_H(g) \equiv m+2$  (con los mismos entornos que para  $G$ , por ej.). Lo que debemos probar es que si existe  $g$  regular a  $H$  con  $n_H(g) \equiv s$  y tal que  $g \cap l = \emptyset$ , entonces  $s \in T(G)$ . Pero si existe una recta  $g$  en estas condiciones debe cortar a la poligonal (entre  $c_1$  y  $c_n$ ) en dos lados consecutivos, digamos  $\overline{d_1d_2}$  y  $\overline{d_2d_3}$ . Sea  $V$  el abierto determinado por los segmentos de recta abiertos  $\overline{c_2d_2}$  y  $\overline{d_2c_3}$ ; para casi toda  $g' \in V$  es  $n_H(g')=s$  (por construcción). Sea  $e$  un punto de  $l$  entre  $c_2$  y  $c_3$ ; sea  $V'$  el abierto determinado por los segmentos de recta abiertos  $\overline{c_2e}$  y  $\overline{ec_3}$ . Como  $V' \subset V$ , toda recta de  $V'$  es regular respecto de  $G$  y verifica  $n_G(g) \equiv s$  (ver fig.1d). Reemplazando entonces en  $G^*$  el arco  $\overline{cd}$  por la poligonal indicada, y haciendo esto mismo para todos los subarcos de  $k$  indicados, resulta  $m \notin T(G^*)$ . Con este nuevo  $G^*$  volvemos a iii).

Nuevamente, como  $T(G^*)$  es un conjunto finito, el número de reemplazos es finito y obtenemos una red  $G^*$  con la que volvemos a i).

Agregamos aquí un diagrama que muestra los pasos de la demostración y que puede facilitar el seguimiento de la misma. Es fundamental el hecho de que el número de reemplazos realizado, si bien puede ser muy grande, siempre es finito, lo que asegura que al finalizar se obtiene una red.



#### 4-Resultados obtenidos para M=6.

Se desprende de los resultados de Sulanke citados en el párrafo 2 que el único conjunto para M=6 de menos de tres elementos que es realizable es el {4,6}.- El conjunto {1,2,6} no es realizable por el resultado de Hristov [5].- Se probará a continuación un lema que permitirá, junto con algunos de los resultados de Sulanke, demostrar que no son realizables los conjuntos {1,3,6}, {1,4,6} y {1,5,6}.

Al final de esta párrafo se exhiben en una tabla ejemplos de redes que realizan los demás conjuntos para M=6.

Queda pendiente el conjunto {1,2,3,6}.-

Lema:

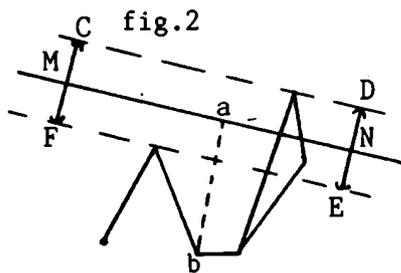
Sea  $G$  una red tal que existe un nudo  $a \in G$  con  $\gamma_G(a)=1$  y  $T(G) \neq \{1\}$ , entonces existe  $m \geq 1$  /  $m$  y  $m+1 \in T(G)$ .

Demostración:

Por la proposición, se puede considerar a  $G$  como una red de segmentos, y como  $T(G) \neq \{1\}$ , debe tener por lo menos dos segmentos no consecutivos.-

Sea  $b$  el otro extremo del segmento  $k$  /  $a$  es un extremo de  $k$  con  $\gamma_G(a) = 1$ .

Sea  $G' = G - k \neq \emptyset$  y  $a \notin G'$ , entonces existe una recta  $g$  regular a  $G'$  por  $a$  (según lema 4 de Sulanke [11], ver \*) con  $n_{G'}(g) \equiv i > 0$  ( por ser  $G' \neq \emptyset$  ). Sea  $V$  el entorno rectangular de  $g$  tal que para casi toda  $g' \in V$  es  $n_{G'}(g') \equiv i$  ( Ver figura 2 ).



$V = CDEF$  (es el conjunto de rectas que cortan a los segmentos abiertos  $CF$  y  $DE$  )

Entonces, para casi toda recta  $g' \in CDN$  es  $n_G(g') \equiv i$ , y para casi toda  $g' \in MNEF$  es  $n_G(g') \equiv i+1$ . Entonces  $i, i+1 \in T(G)$  como se quería probar.-

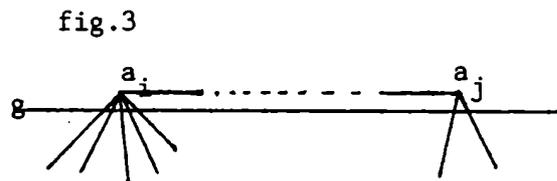
\*)Cita: Lema 4, párrafo 3 de Sulanke [11] :

Por cada punto  $a \notin G$  pasan a lo sumo finitas rectas singulares a  $G$ .

Imposibilidad de realizar el conjunto  $\{1,3,6\}$ .

Supongamos que existe una red  $G$  tal que  $T(G) = \{1,3,6\}$ . Por el lema,  $G$  no tiene nudos de grado 1. Como los vértices de  $\hat{G}$  son nudos de  $G$  cuyo grado pertenece a  $T(G)$  (ver par.2,d), los vértices de  $\hat{G}$  tienen grado 3 ó 6.

Sea  $a_i$  un vértice de  $\hat{G}$  del que suponemos  $\gamma_G(a_i)=6$ . Sea  $a_j$  un vértice de  $\hat{G}$  consecutivo de  $a_i$ ; sea  $g$  una recta regular paralela al lado  $\overline{a_i a_j}$  de  $\hat{G}$  y lo suficientemente cerca de éste ( ver figura 3 ). Obviamente resulta  $n_G(g) \geq \gamma_G(a_i)+\gamma_G(a_j)-2 \geq 7$  (pues  $\gamma_G(a_j) \geq 3$  ).



Entonces, como  $g$  es una recta regular, existe en  $T(G)$  un número mayor o igual que 7, lo cual es absurdo. El absurdo provino de suponer que un vértice de  $\hat{G}$  tenía grado 6, entonces todos los vértices de  $\hat{G}$  tienen grado 3.-

Según prueba Sulanke (lema 11,[11],ver \*) si  $G$  tiene un nudo de grado 3, entonces existe  $j' \geq 1$  con  $j', j'+1 \in T(G)$  lo que es falso. Entonces  $G$  no tiene nudos de grado 3, y por tanto los vértices de  $\hat{G}$  no pueden tener grado 3, lo que es un absurdo ya que todos tenían grado 3. Entonces no existe ninguna red que realice el conjunto  $\{1,3,6\}$ .

\*)Cita: Lema 11, par.6 de Sulanke [11] :Sea  $G$  una red de segmentos.Si tiene un nudo impar con  $\gamma_G(a)=2j+1$ , entonces existen  $j', j'+1 \in T(G)$  /  $j' \geq j$ . Si  $G$  tiene un nudo no constante con  $\gamma_G(a)=2j$ , entonces existen  $j', j'+2 \in T(G)$  /  $j' \geq j-1$ .-

Imposibilidad de realizar el conjunto  $\{1,4,6\}$ .

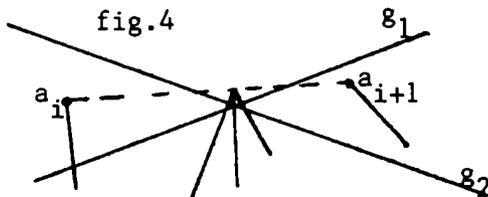
Procediendo como en el caso anterior, por el lema, no existe  $a \in G / \gamma_G(a) = 1$ , entonces los vértices de  $\hat{G}$  tienen grado 4 ó 6. Si existiera un vértice de  $\hat{G}$  de grado 6, existiría un número  $i \in T(G)$  con  $i \geq 6+4-2 = 8$ , lo cual es absurdo. Entonces los vértices de  $\hat{G}$  son todos de grado 4. Sean  $a_i, a_j$  dos vértices consecutivos de  $\hat{G}$ . Para que al tomar una recta  $g$  regular paralela al lado de  $\hat{G}$  ésta aporte al tipo de  $G, T(G)$ , un número no mayor que 6, cada uno de los vértices debe tener uno de sus segmentos contenido en el correspondiente lado de  $\hat{G}$ . Como además no existen en  $G$  nudos de grado 1, todos los lados de  $\hat{G}$  deben pertenecer a  $G$ , pero entonces  $1 \notin T(G)$ . Entonces el conjunto  $\{1,4,6\}$  no es realizable.-

Imposibilidad de realizar el conjunto  $\{1,5,6\}$ .

Como en los casos anteriores la red que supongo realiza al conjunto es de segmentos, y como no existen  $j', j'+2 \in T(G)$ , usando el resultado de Sulanke (ver \* pág. anterior) se sabe que  $G$  no tiene nudos no constantes de grado par. Como los vértices de  $\hat{G}$  no pueden ser nudos constantes ( un nudo se dice constante si para cada segmento que llega a él, también le llega el segmento contenido en la semirrecta opuesta respecto del nudo ), los vértices de  $\hat{G}$  tienen grado 1 ó 5.-

Si hubiera dos vértices consecutivos de grado 5, existiría  $i \in T(G) / i \geq 5+5-2 = 8$ , lo cual es absurdo.

Supongamos que hay dos vértices consecutivos de grado 1, entonces los segmentos que los tienen por extremos deben ser segmentos de la misma recta. Si no lo fueran, existiría una recta regular  $g$  que corte a ambos; como  $2 \notin T(G)$ , en este caso debe incidir en el correspondiente lado de  $\hat{G}$  un nudo de grado 3 ( de grado 4, para obtener el  $\hat{o}$ , no se puede ya que el nudo debe ser no constante ), pero entonces  $3 \in T(G)$  ó  $4 \in T(G)$  ( ver figura 4 ).



$$n_G(g_1) \equiv 4$$

$$n_G(g_2) \equiv 3$$

Además, más de dos vértices consecutivos de  $\hat{G}$  de grado 1 no puede haber por el razonamiento anterior; y como  $\hat{G}$  tiene por lo menos tres vértices (pues  $T(G) \neq \{1\}$ ), entonces hay por lo menos un vértice de grado 5 seguido de uno de grado 1.

Son posibles entonces sólo las siguientes dos situaciones:

fig.5

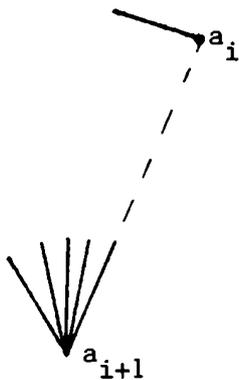
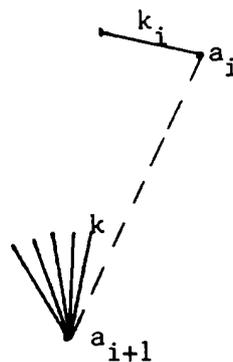


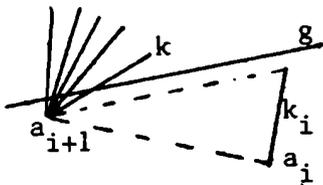
fig.6



En el caso de la figura 5 el segmento exterior del nudo de grado 5 está alineado con el nudo de grado 1. Esto lleva a un absurdo razonando como en el caso de dos vértices consecutivos de grado 1 ( ya que todo el segmento cuyo extremo es el nudo de grado 1 no puede estar alineado con el segmento citado del nudo de grado 5 ).

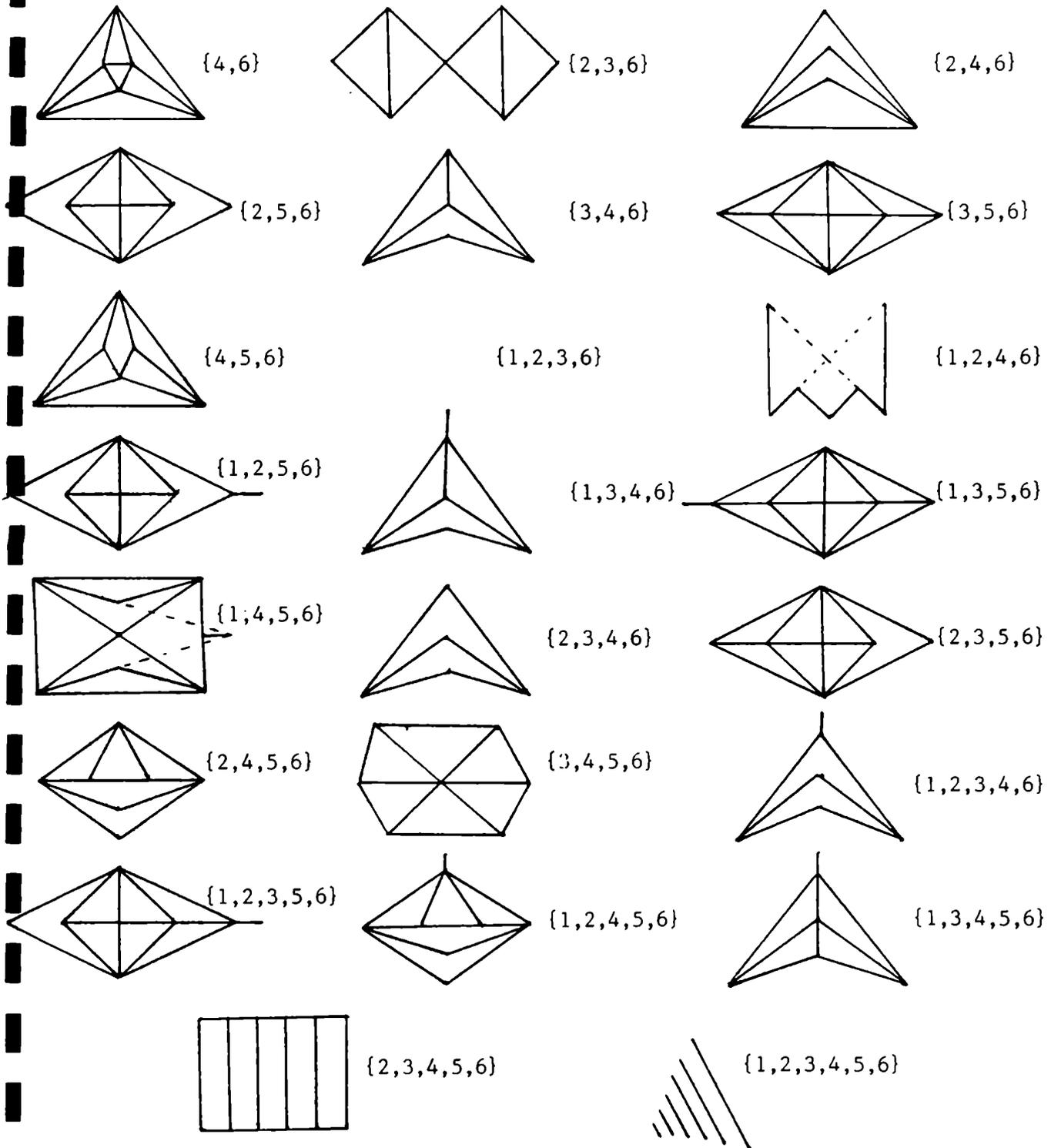
En el caso de la figura 6, llamemos  $k_i$  al segmento que tiene el nudo de grado 1 en uno de sus extremos, y  $k$  al segmento exterior del nudo de grado 5. Si existe una recta  $g$  regular que corte a  $k_i$  y a  $k$ , estamos en el caso anterior. Si la continuación de  $k$  no corta a  $k_i$  ni a ningún otro segmento de  $G$ , entonces existe una recta regular  $g$  tal que  $n_G(g) \equiv 4$  ( ver figura 7 ) lo cual es absurdo. Si la continuación de  $k$  no corta a  $k_i$  pero sí a otro segmento de  $G$ , entonces existe una recta regular  $g$  que corta a este segmento y a  $k$ , lo cual nos lleva al caso de la figura 5.-

fig.7



Entonces el conjunto  $\{1,5,6\}$  no es realizable.-

Tabla de conjuntos realizables (M=6).



5-Comparación de las distancias de Sulanke y Steinhaus.

Sean  $C_1$ ,  $C_2$  dos curvas en el plano,  $n_{C_1}(g)$  y  $n_{C_2}(g)$  el número de puntos de intersección de una recta  $g$  con  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente.-

Steinhaus[9] define la distancia entre  $C_1$  y  $C_2$  por la integral

$$\rho^*(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \int |n_{C_1}(g) - n_{C_2}(g)| dg$$

extendida a todas las rectas del plano.

Si la extendemos a redes, podemos compararla con la distancia definida por Sulanke [11] en el espacio de las redes:

$$\rho(G_1, G_2) = \mu \{g : n_{G_1}(g) \neq n_{G_2}(g)\} .$$

Llamando  $F_{ij} = \mu \{g : n_{G_1}(g)=i \text{ y } n_{G_2}(g)=j\}$  resultan:

$$\rho^*(G_1, G_2) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |i-j| F_{ij} \quad \rho(G_1, G_2) = \sum_{i \neq j} F_{ij} .$$

Como para  $i \neq j$  es  $|i-j| \geq 1$ , entonces  $2\rho^* = \sum_{i \neq j} |i-j| F_{ij} \geq \sum_{i \neq j} F_{ij} = \rho$ .

Es decir, en general vale que

$$2\rho^* \geq \rho .$$

Lema:

Si  $G_1$ ,  $G_2$  son redes de Euler (es decir, se pueden escribir como unión de ciclos), entonces  $\rho^* \geq \rho$

Demostración:

Se sabe por Sulanke (cita par.2,e) que una red es de Euler si y sólo si su tipo sólo contiene números pares. En este caso es  $|i-j| \geq 2$  (si  $i \neq j$ ), entonces

$$\rho^* = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |i-j| F_{ij} = \sum_{i \neq j} \frac{|i-j|}{2} F_{ij} \geq \sum_{i \neq j} F_{ij} = \rho.$$

Entonces,

$$\rho^* \geq \rho.$$

A continuación estudiamos todos los casos posibles siendo  $G_1$  una red de tipo unitario y  $G_2$  una red de tipo unitario o binario:

a)  $T(G_1)=\{1\}$  y  $T(G_2)=\{1\}$  , entonces  $G_1$  y  $G_2$  son segmentos cualesquiera.

$$\rho = F_{01} + F_{10} \quad \text{y} \quad \rho^* = \frac{1}{2} ( F_{01} + F_{10} ) \quad , \quad \text{entonces} \quad 2\rho^* = \rho.$$

Además podemos calcular, usando un resultado conocido [8,p.33]

$$F_{01} = 2 l_2 - ( L_i - L_e ) \quad \text{y} \quad F_{10} = 2 l_1 - ( L_i - L_e )$$

donde  $l_1$  ,  $l_2$  son las longitudes de los segmentos  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente;  $L_e$  ,  $L_i$  son las longitudes de las cápsulas exterior e interior respectivamente.

Entonces,

$$2\rho^* = \rho = 2 [ l_1 + l_2 - ( L_i - L_e ) ].$$

b)  $T(G_1)=\{1\}$  y  $T(G_2)=\{2\}$  , entonces  $G_1$  es un segmento y  $G_2$  es un convexo.

$$\rho = F_{02} + F_{10} + F_{12} \quad \rho^* = F_{02} + \frac{1}{2} F_{10} + \frac{1}{2} F_{12} \quad 2\rho^* = 2 F_{02} + F_{10} + F_{12}$$

Entonces,  $\rho^* = \rho \Leftrightarrow F_{10} + F_{12} = \frac{1}{2} (F_{10} + F_{12}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} (F_{10} + F_{12}) = 0 \Leftrightarrow F_{10} = F_{12} = 0$   
 con lo cual ninguna recta puede cortar a  $G_1$ , lo que es absurdo.

$2\rho^* = \rho \Leftrightarrow F_{02} = 2 F_{02} \Leftrightarrow F_{02} = 0$  es decir, ninguna recta regular que corte a  $G_2$  puede cortar a  $G_1$ , absurdo. Luego,

$$2\rho^* > \rho > \rho^*.$$

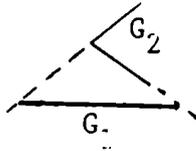
c)  $T(G_1) = \{1\}$  y  $T(G_2) = \{1, 2\}$ , entonces  $G_1$  es un segmento.

$$\rho = F_{01} + F_{02} + F_{12} + F_{10} \quad \text{y} \quad \rho^* = F_{02} + \frac{1}{2} F_{01} + \frac{1}{2} F_{12} + \frac{1}{2} F_{10}$$

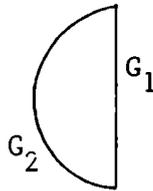
En general vale que  $2\rho^* \geq \rho \geq \rho^*$ .

$2\rho^* = \rho \Leftrightarrow F_{02} = 0 \Leftrightarrow$  toda recta que corte a  $G_2$  en dos puntos, necesariamente corta a  $G_1$ .

Un ejemplo de este caso es



$\rho^* = \rho \Leftrightarrow F_{01} = F_{10} = F_{12} = 0$ , es decir: las que cortan a  $G_1$  en un punto deben cortar a  $G_2$ , las que cortan a  $G_2$  en un punto deben cortar a  $G_1$  y las que cortan a  $G_2$  en dos puntos no pueden cortar a  $G_1$ . Un ejemplo es:



Entonces, en este caso vale

$$2\rho^* \geq \rho \geq \rho^*.$$

d)  $T(G_1) = \{1\}$  y  $T(G_2) = \{p, q\}$  ,  $p \geq 2$ ,  $q \geq 3$  ( $\{2,3\}$ ,  $\{2,4\}$ ,  $\{3,4\}$ ,  $\{4,6\}$ )

$$\rho = F_{0p} + F_{0q} + F_{10} + F_{1p} + F_{1q}$$

$$\rho^* = \frac{p}{2} F_{0p} + \frac{q}{2} F_{0q} + \frac{1}{2} F_{10} + \frac{p-1}{2} F_{1p} + \frac{q-1}{2} F_{1q}$$

$$2\rho^* = p F_{0p} + q F_{0q} + F_{10} + (p-1) F_{1p} + (q-1) F_{1q}$$

Para que  $2\rho^* = \rho$  deben ser en particular  $F_{0p} = F_{0q} = 0$  , entonces todas las rectas regulares que cortan a  $G_2$  necesariamente deben cortar a  $G_1$ , lo cual es absurdo, luego

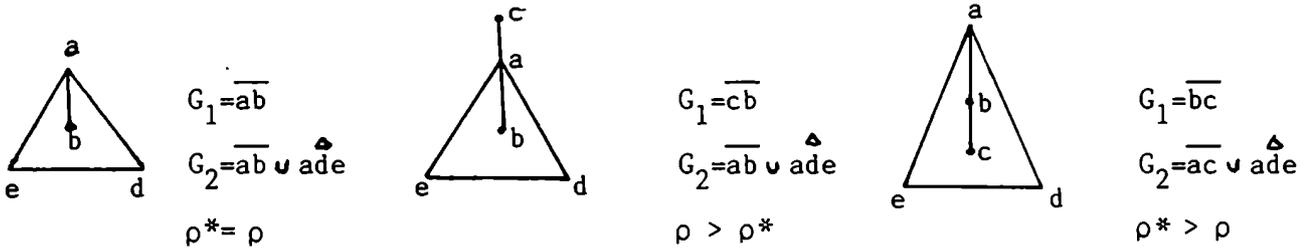
$$2\rho^* > \rho .$$

Para comparar  $\rho$  con  $\rho^*$  consideremos primero el caso  $T(G_2) = \{2,3\}$  .

$$\rho = F_{02} + F_{03} + F_{10} + F_{12} + F_{13}$$

$$\rho^* = F_{02} + \frac{3}{2} F_{03} + \frac{1}{2} F_{10} + \frac{1}{2} F_{12} + F_{13}$$

En los siguientes ejemplos se ve que no son comparables:



Análogamente se puede ver que los demás casos tampoco son comparables.-

e)  $T(G_1) = \{2\}$  y  $T(G_2) = \{2\}$  , entonces  $G_1$  y  $G_2$  son convexos (por ser de Euler).

$$\rho = F_{02} + F_{20} = \rho^* , \text{ entonces siempre es } \rho = \rho^* = L_1 + L_2 - 2 ( L_i - L_e )$$

donde  $L_1, L_2$  son las longitudes de los convexos;  $L_i, L_e$  como antes.-

$$f) T(G_1) = \{2\} \quad \text{y} \quad T(G_2) = \{1, 2\}$$

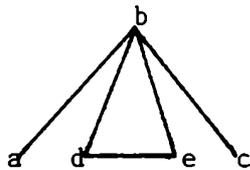
$$\rho = F_{01} + F_{01} + F_{20} + F_{21} \quad \text{y} \quad \rho^* = \frac{1}{2} F_{01} + F_{02} + F_{20} + \frac{1}{2} F_{21}$$

entonces en general vale

$$2\rho^* \geq \rho \geq \rho^* .$$

$\rho = \rho^* \Leftrightarrow F_{01} = F_{21} = 0$  que es absurdo pues no habría rectas que cortan a  $G_2$  en un punto.

$\rho = 2\rho^* \Leftrightarrow F_{02} = F_{20} = 0$  . Por ejemplo



$$G_1 = \triangle dbe$$

$$G_2 = \overline{ab} \cup \overline{bc}$$

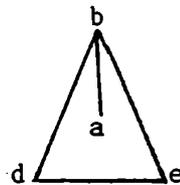
Entonces,

$$2\rho^* \geq \rho > \rho^* .$$

$$g) T(G_1) = \{2\} \quad \text{y} \quad T(G_2) = \{2, 3\}$$

$$\rho = F_{02} + F_{03} + F_{20} + F_{23} \quad \text{y} \quad \rho^* = F_{02} + \frac{3}{2} F_{03} + F_{20} + \frac{1}{2} F_{23}$$

$2\rho^* = \rho \Leftrightarrow F_{02} = F_{03} = F_{20} = 0$  , por ejemplo



$$G_1 = \triangle dbe$$

$$G_2 = \triangle dbe \cup \overline{ab}$$

$\rho$  y  $\rho^*$  no son comparables. Entonces

$$2\rho^* \geq \rho .$$

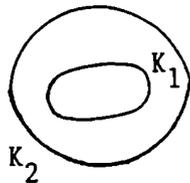
h)  $T(G_1) = \{2\}$  y  $T(G_2) = \{2, 4\}$

$$\rho = F_{02} + F_{04} + F_{20} + F_{24}$$

y

$$\rho^* = F_{02} + 2 F_{04} + F_{20} + F_{24}$$

$\rho^* = \rho \iff F_{04} = 0$ , por ejemplo



$$G_1 = K_1$$

$$G_2 = K_1 \cup K_2$$

Y como son redes de Euler, vale que

$$\rho^* \geq \rho .$$

i)  $T(G_1) = \{2\}$  y  $T(G_2) = \{3, 4\}$

$$\rho = F_{03} + F_{04} + F_{20} + F_{23} + F_{24}$$

y

$$\rho^* = \frac{3}{2} F_{03} + 2 F_{04} + F_{20} + \frac{1}{2} F_{23} + F_{24}$$

$2\rho^* = \rho$  no puede ser pues  $F_{04}$  y  $F_{24}$  no pueden anularse simultáneamente.  $\rho^*$  y  $\rho$  no son comparables, entonces

$$2\rho^* > \rho .$$

j)  $T(G_1) = \{2\}$  y  $T(G_2) = \{4, 6\}$ , como son de Euler es  $\rho^* \geq \rho$ .

$$\rho = F_{04} + F_{06} + F_{24} + F_{26} + F_{20}$$

y

$$\rho^* = 2 F_{04} + 3 F_{06} + F_{24} + 2 F_{26} + F_{20}$$

$\rho^* = \rho$  no puede ser pues  $F_{06}$  y  $F_{26}$  no pueden anularse simultáneamente, luego es

$$\rho^* > \rho .$$

Cuadro de comparación de las medidas de Sulanke ( $\rho$ ) y Steinhaus ( $\rho^*$ ).

$T(G_1)$	$T(G_2)$	
{1}	{1}	$2\rho^* = \rho = 2 [ l_1 + l_2 - ( L_i - L_e ) ]$
{1}	{2}	$2\rho^* > \rho > \rho^*$
{1}	{1,2}	$2\rho^* \geq \rho \geq \rho^*$
{1}	{2,3}	$2\rho^* > \rho$ . $\rho$ y $\rho^*$ no son comparables.
{1}	{2,4}	$2\rho^* > \rho$ . $\rho$ y $\rho^*$ no son comparables.
{1}	{3,4}	$2\rho^* > \rho$ . $\rho$ y $\rho^*$ no son comparables.
{1}	{4,6}	$2\rho^* > \rho$ . $\rho$ y $\rho^*$ no son comparables.
{2}	{2}	$\rho^* = \rho = L_1 + L_2 - 2 ( L_i - L_e )$
{2}	{1,2}	$2\rho^* \geq \rho > \rho^*$
{2}	{2,3}	$2\rho^* \geq \rho$ . $\rho$ y $\rho^*$ no son comparables.
{2}	{2,4}	$\rho^* \geq \rho$ .
{2}	{3,4}	$2\rho^* > \rho$ . $\rho$ y $\rho^*$ no son comparables.
{2}	{4,6}	$\rho^* > \rho$ .

II-DESIGUALDADES PARA EL PRODUCTO DE LOS VOLUMENES DE LA PARTICION QUE UNA SUPERFICIE DETERMINA EN UN CUERPO CONVEXO.

1-Introducción.

Sea K un dominio convexo en el espacio euclídeo n-dimensional  $E^n$  y  $A_{n-1}$  cualquier superficie de dimensión n-1 que divide a K en dos partes  $K_1$  y  $K_2$ . J.Bokowski [3] probó, en el caso de ser  $A_{n-1} = L_{n-1}$  un hiperplano, las siguientes desigualdades:

$$(1.1) \quad V_n(K_1)V_n(K_2) \leq \frac{(1-2^{-n})(n-1)}{n(n+1)} \kappa_{n-1} D^{n+1} V_{n-1}(H)$$

$$(1.2) \quad V_n(K_1)V_n(K_2) \leq \frac{(1-2^{-n})}{2(n+1)} D V_n(K-K)V_{n-1}(H)$$

donde  $V_n$  representa el volumen n-dimensional;  $H = K \cap A_{n-1}$ ;  $A-B$  es el conjunto diferencia definido por

$$(1.5) \quad A-B = \{x / x=a-b, a \in A, b \in B\}$$

D es el diámetro de K y  $\kappa_{n-1}$  es el volumen de la esfera unitaria de dimensión n-1, con lo cual, llamando  $O_n$  al área de la esfera unitaria de dimensión n, se sabe [8,p.9] que

$$(1.6) \quad O_n = \frac{2 \pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} \quad \kappa_n = \frac{O_{n-1}}{n} = \frac{2 \pi^{n/2}}{n \Gamma(n/2)}$$

donde  $\Gamma$  es la función gama que satisface las relaciones

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) ; \Gamma(n)=(n-1)! \quad (n \text{ entero}) ; \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} \quad .\text{Así por ejemplo}$$

$$O_0=2 ; O_1=2\pi ; O_2=4\pi ; O_3=2\pi^2 ; \kappa_1=2 ; \kappa_2=\pi ; \kappa_3=(4/3)\pi .$$

Santaló [7] dio una nueva demostración de (1.1), para el caso  $A_{n-1}=L_{n-1}$  y dimensión n=2,3 y la generalizó a cuerpos convexos de los espacios elíptico e hiperbólico.

Para poder aplicar una demostración similar al caso más general de una partición de  $K$  en dos conjuntos  $K_1$  y  $K_2$  no necesariamente convexos, separados por una curva ( $n=2$ ) o una superficie ( $n=3$ ), Santaló estableció la siguiente conjetura:

Consideremos en la recta real el intervalo cerrado  $[0, a]$  dividido en  $m+1$  partes por los puntos  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < a$ . Llamemos  $a_0=0$ ;  $a_{m+1}=a$  y consideremos los siguientes conjuntos de intervalos

$$T = \{ [0, a_1], [a_2, a_3], [a_4, a_5], \dots \}$$

$$T^* = \{ [a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots \}$$

Definiendo la integral

$$(1.3) \quad I(a_1, a_2, \dots, a_m, a) = \int_{\substack{t \in T \\ t^* \in T^*}} f(|t-t^*|) dt \wedge dt^*$$

la conjetura es que ésta integral tiene un máximo para  $m=1$  y  $a_1=a/2$  para cualquier función  $f$  integrable y no negativa definida sobre el intervalo  $[0, a]$ .

En el párrafo 2 se prueba la conjetura en el caso de ser  $f$  una función no decreciente. De otro modo la conjetura no es cierta, como se muestra con el ejemplo  $f(t)=\cos t$ .-

Usando este resultado, en el párrafo 3 se generaliza el trabajo de Santaló [7] al caso de curvas ( $n=2$ , planos euclídeo e hiperbólico) y superficies ( $n=3$ , espacio hiperbólico).-

En el párrafo 4 una aplicación a cuerpos convexos del espacio euclídeo  $E^n$  da el siguiente resultado:

$$(1.4) \quad V_n(K_1)V_n(K_2) \leq \frac{(1-2^{-n})}{n(n+1)} \kappa_{n-1} D^{n+1} V_{n-1}(H)$$

que mejora la desigualdad (1.1) de Bokowski para  $n > 2$ , en el caso de ser  $A_{n-1} = L_{n-1}$ , se observa que (1.2) es mejor cota que (1.1) y se exhibe un ejemplo para ver que (1.2) y (1.4) no son comparables. Se ve también que el resultado del parágrafo 2 se puede aplicar en el espacio hiperbólico  $n$ -dimensional (si bien el resultado no es sencillo de expresar); en el caso elíptico una demostración similar sólo sería posible para convexos cuyo diámetro verifique  $D \leq \pi/2$ .

En el parágrafo 5 se da una nueva demostración de (1.2) usando fórmulas integrales que vale para cualquier superficie  $A_{n-1}$  de dimensión  $n-1$  del espacio euclídeo  $E^n$  y es, por tanto, una generalización de (1.2).

## 2-La conjetura.

Primero veamos que si tomamos  $f(t) = \cos t$  la conjetura no es cierta. Para ello vamos a evaluar (1.3) sobre el intervalo  $[0, \pi/2]$  en los casos  $m=1$ ,  $a_1=a/2$  y  $m=3$ ,  $a_1=\pi/8$ ,  $a_2=\pi/4$ ,  $a_3=3\pi/8$  y compararlas.

$I(a/2, a) = I(\pi/4, \pi/2)$ . Aquí es  $T = \{[0, \pi/4]\}$ ,  $T^* = \{[\pi/4, \pi/2]\}$ .

$$\begin{aligned} I(a/2, a) &= \int_{\substack{t \in [0, \pi/4] \\ t^* \in [\pi/4, \pi/2]}} \cos(|t-t^*|) dt dt^* = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[ \int_0^{\pi/4} \cos(|t-t^*|) dt \right] dt^* = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[ -\sin(t^*-\pi/4) + \sin t^* \right] dt^* = \\ &= \cos(\pi/2-\pi/4) - \cos 0 - \cos \pi/2 + \cos \pi/4 = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$I(a_1, a_2, a_3, a) = I(\pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2) . \quad T = \{[0, \pi/8], [\pi/4, 3\pi/8]\}$$

$$T^* = \{[\pi/8, \pi/4], [3\pi/8, \pi/2]\}$$

$$I(a_1, a_2, a_3, a) = \int_{\pi/8}^{\pi/4} \left[ \int_0^{\pi/8} \cos(t^*-t) dt + \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \cos(t-t^*) dt \right] dt^* + \\ + \int_{3\pi/8}^{\pi/2} \left[ \int_0^{\pi/8} \cos(t^*-t) dt + \int_{\pi/4}^{3\pi/8} \cos(t^*-t) dt \right] dt^* =$$

$$= \int_{\pi/8}^{\pi/4} \left[ -\text{sen}(t^*-\pi/8) + \text{sen } t^* + \text{sen}(3\pi/8-t^*) - \text{sen}(\pi/4-t^*) \right] dt^* +$$

$$+ \int_{3\pi/8}^{\pi/2} \left[ -\text{sen}(t^*-\pi/8) + \text{sen } t^* - \text{sen}(t^*-3\pi/8) + \text{sen}(t^*-\pi/4) \right] dt^* =$$

$$= \cos(\pi/4-\pi/8) - \cos 0 - \cos \pi/4 + \cos \pi/8 + \cos(3\pi/8-\pi/4) - \cos(3\pi/8-\pi/8) - \cos 0 + \\ + \cos(\pi/4-\pi/8) + \cos(\pi/2-\pi/8) - \cos(3\pi/8-\pi/8) - \cos \pi/2 + \cos 3\pi/8 + \cos(\pi/2-3\pi/8) - \\ - \cos 0 - \cos(\pi/2-\pi/4) + \cos(3\pi/8-\pi/4) =$$

$$= 6 \cos \pi/8 - 3 \cos 0 - 4 \cos \pi/4 + 2 \cos 3\pi/8 - \cos \pi/2 =$$

$$= 6 \cos \pi/8 + 2 \cos 3\pi/8 - (3 + 2\sqrt{2}) .$$

Como  $\cos \pi/8 > 0,92$  y  $\cos 3\pi/8 > 0,38$  , entonces

$$I(a_1, a_2, a_3, a) > 5,52 + 0,76 - (3 + 2\sqrt{2}) = 6,28 - (3 + 2\sqrt{2}) > 6,28 - (3 + 2 \times 1,42) = \\ = 0,44 > \sqrt{2} - 1 = I(a/2, a)$$

Es decir,

$$I(a_1, a_2, a_3, a) > I(a/2, a)$$

Pero sí resulta cierta si pedimos que  $f$  sea además una función no decreciente como prueba el siguiente lema:

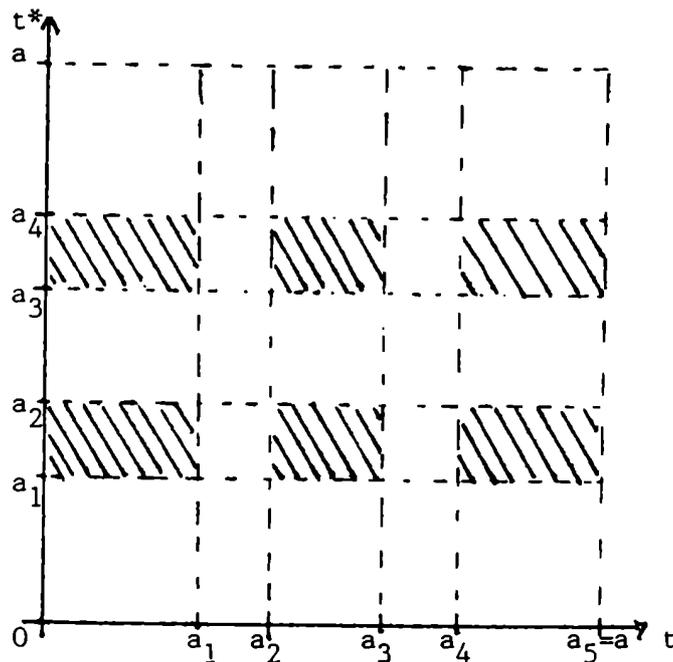
Lema:

Sea  $I(a_1, \dots, a_m, a)$  definida como en (1.3). Entonces  $I(a_1, \dots, a_m, a) \leq I(a/2, a)$  para toda función integrable, no negativa y no decreciente definida sobre el intervalo  $[0, a]$ .

Demostración:

Primero observemos que el área de integración es máxima para  $I(a/2, a)$ . El área total de integración para  $I(a_1, \dots, a_m, a)$  es un rectángulo de base  $b = a_1 - a_0 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + \dots$  y altura  $h = a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + \dots$  (ver figura 1)

fig. 1 (m=4)



Es decir un rectángulo de perímetro  $2a$ . Como de todos los rectángulos de igual perímetro el que tiene área máxima es el cuadrado, y el cuadrado cuyo perímetro es  $2a$  es el de lado  $a/2$ , es decir el que utilizamos al calcular  $I(a/2, a)$  como área de integración, resulta la observación.

Para la demostración procedemos por inducción sobre  $m$ :

$P(1)$ :  $I(a/2, a) \geq I(a_1, a)$ . Ver demostración en Santaló ([7], p 125).

$P(m) \Rightarrow P(m+1)$ : debemos ver que si

$$I(a'_1, a'_2, \dots, a'_m, a) \leq I(a/2, a) \Rightarrow I(a_1, \dots, a_{m+1}, a) \leq I(a/2, a)$$

Para ello escribimos

$$I(a_1, \dots, a_{m+1}, a) = I(a_1, \dots, a_{m+1}) + \int_{a_{m+1}}^a \int_{t' \in T'} f(|t-t'|) dt' dt$$

donde  $T \neq T$  si  $m$  es par y  $T \neq T^*$  si  $m$  es impar.

Usando la hipótesis inductiva sobre  $I(a_1, \dots, a_{m+1})$  para el intervalo  $[0, a_{m+1}]$ , es

$$I(a_1, \dots, a_{m+1}) \geq I(a_{m+1}/2, a_{m+1}).$$

Luego, basta probar que

$$(2.1) \quad I(a/2, a) \geq I(a_{m+1}/2, a_{m+1}) + \int_{a_{m+1}}^a \int_{t' \in T'} f(|t-t'|) dt' dt.$$

Supongamos primero que  $a_{m+1} > a/2$ .

Podemos pensar que siempre existe  $j (1 \leq j \leq m)$  tal que  $a/2 = a_j$ . De no ser así,  $a/2 \in (a_j, a_{j+1})$  y para integrar podemos hacerlo sobre los intervalos  $[a_j, a/2]$  y  $[a/2, a_{j+1}]$ .

Hecha esta salvedad, definimos los siguientes conjuntos de intervalos:

$$T' = \{ [a_i, a_{i+1}] \notin T' \text{ y } a_i < a/2 \}, \quad T_1 \in T' / [a_i, a_{i+1}] \in T_1 \Leftrightarrow a_i < a/2$$

$$T_2 \in T' / T_2 = \{ [a_i, a_{i+1}] \in T' / [a_i, a_{i+1}] \notin T_1 \}.$$

Llamando  $r = |t_2 - t_1|$  podemos escribir (ver figura 2)



$$I(a/2, a) = \int_0^{a/2} \int_{a/2}^a f(r) dt_2 dt_1 = \int_0^{(a_{m+1})/2} \int_{a/2}^{a_{m+1}} f(r) dt_2 dt_1 + \int_{a_{m+1}}^a \int_{t_1 \in T_1} f(r) dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int_{a_{m+1}}^a \int_{t_1 \in T''} f(r) dt_1 dt_2 + \int_{(a_{m+1})/2}^{a/2} f(r) dt_2 dt_1 .$$

$$I(a_{m+1}/2, a_{m+1}) + \int_{a_{m+1}}^a \int_{t' \in T'} f(r) dt' dt = \int_0^{(a-a_{m+1})/2} \int_{(a_{m+1})/2}^{a/2} f(r) dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int_{(a-a_{m+1})/2}^{(a_{m+1})/2} \int_{(a_{m+1})/2}^{a/2} f(r) dt_1 dt_2 + \int_0^{(a_{m+1})/2} \int_{a/2}^{a_{m+1}} f(r) dt_2 dt_1 +$$

$$+ \int_{a_{m+1}}^a \int_{t_1 \in T_1} f(r) dt_1 dt_2 + \int_{a_{m+1}}^a \int_{t_1 \in T_2} f(r) dt_1 dt_2 .$$

Entonces, como

$$\int_{(a_{m+1})/2}^{a/2} \int_{a/2}^{a_{m+1}} f(r) dt_2 dt_1 = \int_{(a-a_{m+1})/2}^{(a_{m+1})/2} \int_{(a_{m+1})/2}^{a/2} f(r) dt_1 dt_2$$

ya que  $\frac{a_{m+1}}{2} - \frac{a-a_{m+1}}{2} = a_{m+1} - \frac{a}{2}$  , o sea que las áreas de integración son iguales

y en ambas integrales es  $0 \leq r \leq (a_{m+1})/2$  ; nos basta comparar

$$(2.2) \quad \int_{a_{m+1}}^a \int_{t_1 \in T''} f(r) dt_1 dt_2$$

$$(2.3) \quad \int_0^{(a-a_{m+1})/2} \int_{(a_{m+1})/2}^{a/2} f(r) dt_1 dt_2 + \int_{a_{m+1}}^a \int_{t_1 \in T_2} f(r) dt_1 dt_2 .$$

Sabemos por la observación hecha al principio de la demostración que el área de integración es mayor en (2.2) que en (2.3). Si verificamos que los valores de  $r$  también ,

son mayores en (2.2) que en (2.3), entonces- al ser  $f$  no decreciente- obtendremos (2.1).

En (2.2) es  $t_2 / a_{m+1} \leq t_2 \leq a$  y  $t_1 \in T''$  con lo cual  $0 \leq t_1 \leq a/2$ . Como  $a_{m+1} > a/2$  resulta  $|t_2 - t_1| = t_2 - t_1$  y  $a_{m+1} - a/2 \leq |t_2 - t_1| \leq a$ .

En (2.3) es, procediendo análogamente,  $a_{m+1} - a/2 \leq r \leq a$  y  $a_{m+1} - a/2 \leq r \leq a/2$ .

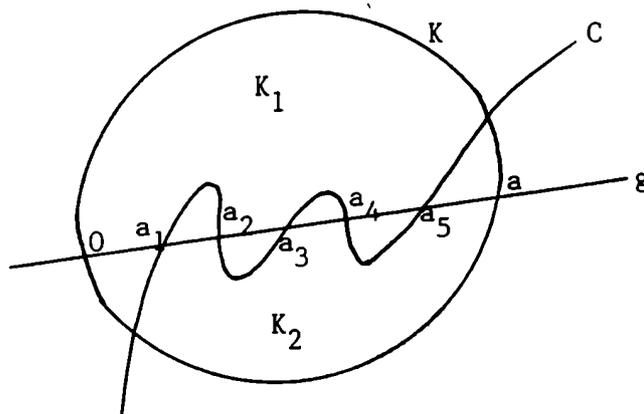
Luego, vale (2.1).-

La demostración en los casos  $a_{m+1} = a/2$  y  $a_{m+1} < a/2$  es análoga, quedando con ellas probado el lema.-

### 3-Primeras generalizaciones.

a)  $n=2$ . Plano euclídeo.

Consideramos una curva  $C$  que divide al conjunto convexo  $K$  en dos dominios  $K_1$  y  $K_2$ . Sea  $L$  la longitud de  $K \cap C$  y sean  $F_1, F_2$  las áreas de  $K_1, K_2$  respectivamente.



Utilizamos la fórmula integral ([8],p.28,46)

$$dP_1 \wedge dP_2 = |t_2 - t_1| dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG$$

donde  $dP_i$  es el elemento de área del plano en el punto  $P_i$ ,  $dG$  es la densidad de rectas en el plano, y  $t_1, t_2$  son las abscisas de  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente sobre  $G$ .

Integrando sobre todos los pares de puntos  $P_1 \in K_1$  y  $P_2 \in K_2$ , el lado izquierdo da el producto de las áreas y del lado derecho obtenemos

$$\int_{G \cap C \neq \emptyset} I(a_1, \dots, a_m, a) dG$$

donde  $I(a_1, \dots, a_m, a)$  es la definida en (1.3), y  $a_1, \dots, a_m$  son los puntos de intersección de  $G \cap C$ .

Por el lema sabemos que  $I(a_1, \dots, a_m, a) \leq I(a/2, a) = a^3/8 \leq D^3/8$ . Si usamos además que  $\int_{G \cap C \neq \emptyset} dG \leq \int m dG = 2L$  ([8],p.31), donde  $m$  es el número de puntos de  $G \cap C$ ,

entonces

$$\int_{G \cap C \neq \emptyset} I(a_1, \dots, a_m, a) dG \leq \frac{D^3}{8} \int_{G \cap C \neq \emptyset} dG \leq \frac{D^3}{8} 2L.$$

Por lo tanto

$$F_1 F_2 \leq \frac{D^3}{4} L$$

b)  $n=2$ . Plano hiperbólico.

En el plano hiperbólico valen las fórmulas integrales

$$dP_1 \wedge dP_2 = |\operatorname{sh}(t_2 - t_1)| dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG \quad ([8],p.316) \quad \text{y} \quad \int m dG = 2L \quad ([8],p.309).$$

Haciendo lo mismo que en el plano euclídeo, aplicando el lema para  $f(r)=\operatorname{sh}(r)$  y operando como Santaló [7], obtenemos

$$F_1 F_2 \leq 8 \operatorname{sh}(D/2) \operatorname{sh}^2(D/4) L.$$

c)  $n=3$  . Espacio hiperbólico.

Consideramos aquí un cuerpo convexo  $K$  y una superficie  $A_2$  que divide a  $K$  en dos dominios  $K_1, K_2$ . Si  $G$  es una geodésica que corta a  $A_2$  en  $m$  puntos y  $dG$  nota la densidad de geodésicas en el espacio hiperbólico, sabemos que  $\int m dG = \pi F$ , donde  $F$  es el área de  $A_2 \cap K$  ([8], p.309,245/6) y que vale la fórmula integral  $dP_1 \wedge dP_2 = \text{sh}^2 |t_2 - t_1| dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG$  ([8], p.316). Llamando  $V_1, V_2$  a los volúmenes de  $K_1, K_2$  respectivamente, evaluando como Santaló [7] y aplicando el lema para  $r = |t_2 - t_1|$ ,  $f(r) = \text{sh}^2(r)$ , obtenemos

$$V_1 V_2 \leq (1/8)(4 \text{sh}^2(D/2) + \text{sh}^2 D - D^2) \pi F .$$

4-El espacio de dimensión  $n$ .

Sean  $P_1, P_2$  dos puntos en el espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $E^n$  y  $G$  la recta que ellos determinan. Sean  $t_1, t_2$  las abscisas de  $P_1, P_2$  sobre  $G$ . Si con  $d\zeta_{n-1}$  notamos el elemento de volumen del hiperplano perpendicular a  $G$  en  $P_1$ , el elemento de volumen de  $E^n$  en  $P_1$  se puede escribir

$$dP_1 = d\zeta_{n-1} \wedge dt_1 .$$

Por otro lado, el elemento de volumen en  $P_2$  puede escribirse

$$dP_2 = t^{n-1} du_{n-1} \wedge dt_2 \quad \text{donde } t = |t_2 - t_1| \quad \text{y } du_{n-1} \text{ es el elemento de ángulo sólido correspondiente a la dirección de } G .$$

Tenemos entonces, llamando

do  $dG$  a la densidad de rectas en  $E^n$ , la siguiente fórmula integral

$$(4.1) \quad dP_1 \wedge dP_2 = r^{n-1} dG \wedge dt_1 \wedge dt_2 \quad ([8], p.237).$$

Integrando sobre todos los pares de puntos  $P_1 \in K_1$  y  $P_2 \in K_2$ , del lado izquierdo obtenemos el producto de los volúmenes  $n$ -dimensionales de  $K_1$  y  $K_2$ .

Del lado derecho, procediendo como en el párrafo 3-a) y aplicando el lema para  $r = |t_2 - t_1|$ ,  $f(r) = r^{n-1}$ , resulta

$$\int_{G \cap A_{n-1} \neq \emptyset} \iint |t_2 - t_1|^{n-1} dt_1 dt_2 dG \leq \int_{G \cap A_{n-1} \neq \emptyset} \int_0^{a/2} \int_{a/2}^a |t_2 - t_1|^{n-1} dt_1 dt_2 dG =$$

$$= \int_{G \cap A_{n-1} \neq \emptyset} \frac{(1-2^{-n})}{n(n+1)} a^{n+1} \quad \text{donde } a \text{ es la longitud de } G \cap K.$$

Como aquí es  $\int m dG = \frac{O}{O_1} V_{n-1}(H)$  para  $H = A_{n-1} \cap K$ ,  $O_i$  como definido en (1.6),

obtenemos

$$(1.4) \quad V_n(K_1) V_n(K_2) \leq \frac{(1-2^{-n})}{n(n+1)} \kappa_{n-1} D^{n+1} V_{n-1}(H).$$

En el espacio hiperbólico  $n$ -dimensional, la fórmula que sustituye a (4.1) es

$$dP_1 \wedge dP_2 = \text{sh}^{n-1}(|t_2 - t_1|) dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG.$$

Como  $\text{sh } r$  es creciente, podemos aplicar aquí- operando como en el espacio euclídeo  $E^n$ - el lema para  $r = |t_2 - t_1|$ ,  $f(r) = \text{sh}^{n-1}(r)$ , obteniendo

$$V_n(K_1) V_n(K_2) \leq \int_{G \cap A_{n-1} \neq \emptyset} \int_0^{a/2} \int_{a/2}^a \text{sh}^{n-1}(|t_2 - t_1|) dt_1 dt_2 dG, \text{ pero el cálculo}$$

de esta integral nos deja con una cota que no tiene una expresión sencilla.-

Pasemos a comparar las desigualdades para  $n \geq 2$  en el caso euclídeo. Es obvio que (1.4) mejora (1.1). Pero ya (1.2) mejoraba (1.1) pues :

$n \geq 2 \Rightarrow (n-1)/n \geq 1/2$  y  $V_n(K-K) \leq V_n(B(0,D)) = \kappa_{n-1} D^n$ , donde  $B(0,D)$  es la bola de centro 0 y radio D. Entonces

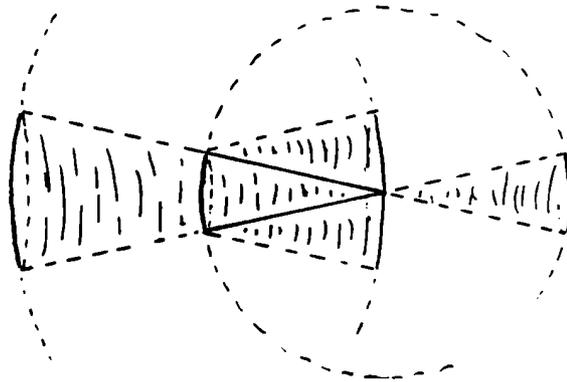
$$\frac{V_n(K-K)}{2} \leq \kappa_{n-1} D^n \frac{n-1}{n}$$

Pero (1.2) y (1.4) no son comparables, ya que:

Si K es una esfera de radio D,  $V_n(K-K) = \kappa_{n-1} D^n \geq (2/n) \kappa_{n-1} D^n$ . En este caso (1.4) es mejor que (1.2).-

Si tomamos K como la intersección de una semiesfera n-dimensional de radio D con un cono de vértice en el centro de la esfera y de ángulo sólido tal que verifique

$$V_n(K) \leq (\kappa_{n-1} D^n)/h \quad \text{con } h > n \times 2^{n-1}$$



Entonces  $V_n(K-K) \leq [\kappa_{n-1} (2D)^n]/h < (2/n) \kappa_{n-1} D^n$ , con lo cual resulta que (1.2) es mejor que (1.4).-

5-La otra desigualdad.

Evaluando en  $E^n$  como en el párrafo 4, obtenemos, para el caso n-dimensional,

$$V_n(K_1) V_n(K_2) \leq \int_{G \cap H \neq \emptyset} \frac{(1-2^{-n})}{n+1} a \frac{a^n}{n} dG \leq \frac{(1-2^{-n})}{n+1} D \int_{G \cap H \neq \emptyset} \int_0^a t^{n-1} dt dG .$$

Para calcular esta integral, escribimos como antes  $dG = d\zeta_{n-1} \wedge du_{n-1}$ . Tomando  $P'_1 \in H$  ( $H = A_{n-1} \cap K$ ) tenemos  $d\zeta_{n-1} = \text{sen } \xi dP'_1$ , donde  $\xi$  es el ángulo entre  $G$  y  $H$  y  $dP'_1$  es el elemento de volumen de  $H$  en  $P'_1$ . Como  $P'_2$  puede ser un punto de abscisa positiva o negativa sobre  $G$  (para  $G \cap H = P'_1$ ) evaluamos dos veces  $du_{n-1}$ , entonces

$$\int_{G \cap H \neq \emptyset} \int_0^a t^{n-1} dt dG = \int_{P'_1 \in H} \int |\text{sen } \xi| / 2 dP'_2 dP'_1 \text{ ya que } dP'_2 = t^{n-1} du_{n-1} dt .$$

Por otro lado, si fijamos  $P'_1$  en  $H$ , considerando  $P'_1$  como origen,  $P'_2 \in K-K$  (definido en (1.5)) y obtenemos

$$\int_{P'_1 \in H} \int |\text{sen } \xi| / 2 dP'_2 dP'_1 \leq (1/2) V_n(K-K) V_{n-1}(H) .$$

Entonces,

$$V_n(K_1) V_n(K_2) \leq \frac{(1-2^{-n})}{2(n+1)} D V_n(K-K) V_{n-1}(H)$$

que es el resultado de Bokowski (1.2), generalizado al caso de ser  $A_{n-1}$  cualquier superficie (n-1)-dimensional en  $E^n$ .-

### III-CONGRUENCIAS DE RECTAS.

#### 1-Introducción.

La teoría de congruencias de rectas ha sido tratada desde distintos puntos de vista por diferentes autores, entre ellos por W.F.Pohl [6], L.A.Santaló [8] y R.Sulanke [10]. A partir del enfoque de Sulanke [10], que se expone brevemente en el párrafo 2, se hallan- en el párrafo 3- diferentes expresiones para la densidad de conjuntos de rectas de una congruencia, que llamaremos densidad de congruencias, en el espacio euclídeo  $E^3$ , que resulta ser, salvo signo, la misma que las introducidas por Pohl [6] y por Santaló ([8], cp.19).-

En el párrafo 4 se desarrolla una expresión para la densidad de congruencias de rectas en los espacios elíptico e hiperbólico a partir de la densidad de geodésicas definida en espacios de Riemann por L.Santaló ([8], p.332) y como una generalización de la expresión obtenida para el espacio euclídeo por W.Pohl [6].-

En el párrafo 5 se dan algunas aplicaciones de las expresiones obtenidas.-

#### 2-Congruencias de rectas en $E^3$ .

Una congruencia de rectas en  $E^3$  es un conjunto de rectas dependientes de dos parámetros. Para obtener invariantes diferenciales ( formas diferenciales invariantes por movimientos ) de la teoría de congruencias, R.Sulanke [10] trabaja en el espacio

$H^4$  de rectas orientadas del espacio euclídeo de la siguiente manera:

El espacio  $E(3)$  de todos los movimientos del espacio euclídeo de puntos  $E^3$  ( y que tiene dimensión 6 ) puede pensarse como todos los triedros ortonormales  $(X, e_1, e_2, e_3)$  del  $E^3$ . En tal caso, las rectas de  $H^4$  se representan por las clases de equivalencia de la relación

$$(X^*, e_i^*) \sim (X, e_i) \Leftrightarrow e_3^* = e_3 \quad y \quad \overrightarrow{XX^*} = a e_3, \quad a \text{ un número real.}$$

Una recta  $g \in H^4$  determina el triedro  $(X, e_i)$  donde

$X$  es el pie de la perpendicular a  $g$  desde un origen  $O$ ;

$e_3 = e(g)$  es el versor dirección de  $g$ , o sea su imagen esférica;

$e_1, e_2$  generan el plano tangente a la imagen esférica de  $g$ .

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} dX &= e_1 \sigma_1 + e_2 \sigma_2 + e_3 \sigma_3 \\ (2.1) \quad de_1 &= e_2 \omega_3 - e_3 \omega_2 \\ de_2 &= -e_1 \omega_3 + e_3 \omega_1 \\ de_3 &= e_1 \omega_2 - e_2 \omega_1 \end{aligned}$$

Las  $\sigma_i, \omega_i$  son las formas diferenciales de primer grado sobre  $H^4$  ( inducidas a partir de las de  $E(3)$  ). Para obtener invariantes de  $H^4$  basta tomar combinaciones de éstas que no dependan de la elección de la esfera de referencia ni de los vectores tangentes  $e_1, e_2$ . Las transformaciones según las que deben ser invariantes son entonces:

$$(2.2) \quad e'_1 = e_1 \cos \xi + e_2 \operatorname{sen} \xi \quad e'_2 = -e_1 \operatorname{sen} \xi + e_2 \cos \xi$$

$$(2.3) \quad X'' = X + f(g) e_3, \quad \text{con } f(g) \text{ cualquier función diferenciable de } g.$$

Por las transformaciones (2.2), las formas  $\sigma_1, \sigma_2, \omega_1$  y  $\omega_2$  se transforman análogamente y  $\sigma'_3 = \sigma_3$   $\omega'_3 = \omega_3 + d\xi$ .

Por las transformaciones (2.3) resultan

$$\begin{aligned} \sigma''_1 &= \sigma_1 + f(g) \omega_2 & \sigma''_2 &= \sigma_2 - f(g) \omega_1 \\ \sigma''_3 &= \sigma_3 + df & \omega''_i &= \omega_i \quad (i=1,2,3). \end{aligned}$$

Los invariantes de  $H^4$  que introduce Sulanke son:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} ds^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 && \text{(forma cuadrática, elemento de arco de la imagen esférica)} \\ \phi &= \omega_1 \wedge \omega_2 && \text{(forma exterior, elemento de área de la imagen esférica)} \\ T &= \sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 && \text{(forma cuadrática)} \\ \Psi &= \sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1 && \text{(forma diferencial exterior)} \end{aligned}$$

Cuando consideramos conjuntos de rectas  $F_2 \subset H^4$  que dependen de dos parámetros, es decir congruencias de rectas, por la inmersión

$$i : F_2 \rightarrow H^4$$

las formas  $\sigma_i, \omega_i$  inducen formas diferenciales sobre  $F_2$  ( $\sigma_{iF} = i^* \sigma_i$ ,  $\omega_{iF} = i^* \omega_i$ ) que notaremos  $\sigma_i, \omega_i$ , resultando las formas diferenciales correspondientes a las definidas en (2.4) también invariantes sobre  $F_2$ . En particular,  $\Psi$  será la densidad para conjuntos de rectas de una congruencia, o sea la densidad de congruencias. Veamos entonces que es invariante por las transformaciones (2.2) y (2.3):

$$\begin{aligned} \Psi' &= \sigma'_1 \wedge \omega'_2 - \sigma'_2 \wedge \omega'_1 = (\sigma_1 \cos \xi + \sigma_2 \operatorname{sen} \xi) \wedge (-\omega_1 \operatorname{sen} \xi + \omega_2 \cos \xi) - \\ &\quad - (-\sigma_1 \operatorname{sen} \xi + \sigma_2 \cos \xi) \wedge (\omega_1 \cos \xi + \omega_2 \operatorname{sen} \xi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\operatorname{sen} \xi \cos \xi \sigma_1 \wedge \omega_1 + \cos^2 \xi \sigma_1 \wedge \omega_2 - \operatorname{sen}^2 \xi \sigma_2 \wedge \omega_1 + \operatorname{sen} \xi \cos \xi \sigma_2 \wedge \omega_2 + \\ &+ \operatorname{sen} \xi \cos \xi \sigma_1 \wedge \omega_1 - \cos^2 \xi \sigma_2 \wedge \omega_1 + \operatorname{sen}^2 \xi \sigma_1 \wedge \omega_2 - \operatorname{sen} \xi \cos \xi \sigma_2 \wedge \omega_2 = \\ &= (\operatorname{sen}^2 \xi + \cos^2 \xi) \sigma_1 \wedge \omega_2 - (\operatorname{sen}^2 \xi + \cos^2 \xi) \sigma_2 \wedge \omega_1 = \sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi'' &= \sigma_1'' \wedge \omega_2'' - \sigma_2'' \wedge \omega_1'' = (\sigma_1 + f(g) \omega_2) \wedge \omega_2 - (\sigma_2 - f(g) \omega_1) \wedge \omega_1 = \\ &= \sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1 . \end{aligned}$$

Para medir un conjunto de rectas de una congruencia, se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma  $\Psi$ . Para los cálculos conviene tener a mano algunas otras expresiones para  $\Psi$ .-

### 3-Distintas expresiones para la densidad de congruencias.

i) Una congruencia, dijimos, es un conjunto de rectas que dependen de dos parámetros. En particular, dada una superficie del espacio euclídeo  $E^3$ , un conjunto de rectas tal que cada una pasa por un único punto de la superficie es una congruencia. Queremos escribir la densidad de congruencias  $\Psi$  en función de los parámetros de la superficie.

Consideremos un punto  $X$  de la superficie y en él definido un sistema ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . En el mismo punto definimos otro sistema ortonormal  $\{a_1, a_2, a_3\}$  tal que  $a_3$  sea el versor dirección de la recta de la congruencia que corta a la superficie en el punto  $X$ . Será entonces

$$a_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \quad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$a_2 = (e_3 \wedge a_3) / \sqrt{1-\gamma^2} = (\alpha e_2 - \beta e_1) / \sqrt{1-\gamma^2}$$

$$a_1 = a_2 \wedge a_3$$

Resultan

$$a_1 = (1/\sqrt{1-\gamma^2}) [ \alpha\gamma e_1 + \beta\gamma e_2 - (1-\gamma^2)e_3 ]$$

$$a_2 = (1/\sqrt{1-\gamma^2}) [ -\beta e_1 + \alpha e_2 ]$$

$$a_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 .$$

con lo cual serán

$$e_1 = (\gamma\alpha/\sqrt{1-\gamma^2}) a_1 - (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) a_2 + \alpha a_3$$

$$e_2 = (\gamma\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) a_1 + (\alpha/\sqrt{1-\gamma^2}) a_2 + \beta a_3$$

$$e_3 = (\sqrt{1-\gamma^2}) a_1 + \gamma a_3$$

donde convenimos que para  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow 1$  es  $(\alpha/\sqrt{1-\gamma^2}) \rightarrow 1$ ,  $(\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) \rightarrow 0$ .

En la superficie  $X=X(u,v)$  tenemos definidas las primera y segunda forma fundamental

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

Tomando como curvas paramétricas las líneas de curvatura  $u=\text{cte.}$ ,  $v=\text{cte.}$ , se sabe que es

$$F = M = 0.$$

El sistema  $\{e_1, e_2, e_3\}$  lo tomamos de la siguiente manera:

$e_1, e_2$  son las tangentes a las líneas de curvatura,  $e_3$  es la normal a la superficie .

Es decir

$$e_1 = X_u / \sqrt{E} \qquad e_2 = X_v / \sqrt{G} \qquad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

Sabemos además que (Blaschke [2], p.79)

$$X_{uu} = (E_u / 2\sqrt{E})e_1 - (E_v / 2\sqrt{G})e_2 + Le_3$$

$$X_{uv} = (E_v / 2\sqrt{E})e_1 + (G_u / 2\sqrt{G})e_2$$

$$X_{vv} = (-G_u / 2\sqrt{E})e_1 + (G_v / 2\sqrt{G})e_2 + Ne_3$$

Escribiendo

$$dX = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3$$

$$dX = X_u du + X_v dv = \sqrt{E} du e_1 + \sqrt{G} dv e_2$$

y comparando, obtenemos

$$\sigma_1 = \sqrt{E} du$$

$$\sigma_2 = \sqrt{G} dv$$

$$\sigma_3 = 0$$

Para calcular los  $\omega_i$ , hacemos  $de_3 = d(e_1 \wedge e_2) = de_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge de_2$

$$\begin{aligned} de_1 &= d(X_u / \sqrt{E}) = (X_{uu}/\sqrt{E})du - (X_u E_u / 2E\sqrt{E})du + (X_{uv}/\sqrt{E})dv - (X_u E_v / 2E\sqrt{E})dv = \\ &= (E_u / 2E)du e_1 - (E_v / 2\sqrt{EG})du e_2 + (L/\sqrt{E})du e_3 - (E_u / 2E)du e_1 + (E_v / 2E)dv e_1 + \\ &+ (G_u / 2\sqrt{EG})dv e_2 - (E_v / 2E)dv e_1 = \end{aligned}$$

$$de_1 = \frac{(-E_v du + G_u dv)}{2\sqrt{EG}} e_2 + \frac{L}{\sqrt{E}} du e_3$$

Análogamente resulta

$$de_2 = \frac{(E_v du - G_u dv)}{2\sqrt{EG}} e_1 + \frac{N}{\sqrt{G}} dv e_3$$

Entonces

$$\begin{aligned} de_3 &= (L/\sqrt{E})du e_3 \wedge e_2 + (N/\sqrt{G})dv e_1 \wedge e_3 = \\ &= (-L/\sqrt{E})du e_1 - (N/\sqrt{G})dv e_2 \end{aligned}$$

$$de_3 = (-L/E)X_u du - (N/G)X_v dv .$$

$$\omega_1 = e_3 de_2 = -e_2 de_3 = -(X_v/\sqrt{G})[-(L/E)X_u du - (N/G)X_v dv]$$

$$\omega_2 = e_1 de_3 \qquad \omega_3 = e_2 de_1$$

Resultan

$$\omega_1 = (N/\sqrt{G})dv$$

$$\omega_2 = -(L/\sqrt{E})du$$

$$\omega_3 = (-E_v du + G_u dv)/2\sqrt{EG}$$

Escribiendo  $dX = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3$  y reemplazando los  $e_i$  en función de los  $a_i$ ,

$$dX = \left(\frac{\sigma_1 \gamma \alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{\sigma_2 \gamma \beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)a_1 + \left(\frac{-\sigma_1 \beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{\sigma_2 \alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)a_2 + (\sigma_1 \alpha + \sigma_2 \beta)a_3$$

Como

$$dX = \sigma_1^* a_1 + \sigma_2^* a_2 + \sigma_3^* a_3$$

Comparando resultan

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \sigma_1^* &= (\sqrt{E}\gamma\alpha/\sqrt{1-\gamma^2})du + (\sqrt{G}\gamma\beta/\sqrt{1-\gamma^2})dv \\ \sigma_2^* &= (-\sqrt{E}\beta/\sqrt{1-\gamma^2})du + (\sqrt{G}\alpha/\sqrt{1-\gamma^2})dv \\ \sigma_3^* &= \sqrt{E}\alpha du + \sqrt{G}\beta dv \end{aligned}$$

Para calcular  $\omega_1^*$  y  $\omega_2^*$  usamos las relaciones de Sulanke (2.1), según las cuales es

$$da_3 = a_1\omega_2^* - a_2\omega_1^*$$

Como

$$a_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

resulta

$$da_3 = d\alpha e_1 + d\beta e_2 + d\gamma e_3 + \alpha(e_2\omega_3 - e_3\omega_2) + \beta(-e_1\omega_3 + e_3\omega_1) + \gamma(e_1\omega_2 - e_2\omega_1)$$

Reemplazando, comparando las expresiones y operando, resultan

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \omega_1^* &= (1/\sqrt{1-\gamma^2})[\beta d\alpha - \alpha d\beta + \alpha\gamma\omega_1 + \beta\gamma\omega_2 - (1-\gamma^2)\omega_3] \\ \omega_2^* &= (1/\sqrt{1-\gamma^2})[-d\gamma - \beta\omega_1 + \alpha\omega_2] \end{aligned}$$

La expresión que buscamos es

$$(3.3) \quad \Psi^* = \sigma_1^* \wedge \omega_2^* - \sigma_2^* \wedge \omega_1^*$$

Reemplazando los valores obtenidos en (3.1) y (3.2), llegamos a

$$\begin{aligned} \Psi^* &= (\sqrt{E}/1-\gamma^2)[\beta^2 du \wedge d\alpha - \alpha\beta du \wedge d\beta - \alpha\gamma du \wedge d\gamma] + (\sqrt{G}/1-\gamma^2)[- \alpha\beta dv \wedge d\alpha + \alpha^2 dv \wedge d\beta - \\ &- \gamma\beta dv \wedge d\gamma] + \sqrt{E}(\gamma du \wedge \omega_2 - \beta du \wedge \omega_3) + \sqrt{G}(-\gamma dv \wedge \omega_1 + \alpha dv \wedge \omega_3). \end{aligned}$$

Observemos que

$$- \alpha\beta du \wedge d\beta - \alpha\gamma du \wedge d\gamma = \alpha(\beta d\beta + \gamma d\gamma) \wedge du = (*)$$

como  $\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$

$$(*) = \alpha(-\alpha d\alpha) \wedge du = \alpha^2 du \wedge d\alpha.$$

Usando que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$  y reemplazando (analogamente en el otro sumando) resulta

$$\Psi^* = \sqrt{E} du \wedge d\alpha + \sqrt{G} dv \wedge d\beta - (\beta G_u / 2\sqrt{G}) du \wedge dv + (\alpha E_v / 2\sqrt{E}) du \wedge dv$$

pero

$$d\alpha = \alpha_u du + \alpha_v dv, \text{ entonces } du \wedge d\alpha = \alpha_v du \wedge dv$$

analogamente

$$dv \wedge d\beta = -\beta_u du \wedge dv.$$

Luego

$$\Psi^* = [\sqrt{E}\alpha_v - \sqrt{G}\beta_u - (\beta G_u / 2\sqrt{G}) + (\alpha E_v / 2\sqrt{E})] du \wedge dv$$

$$(3.4) \quad \Psi^* = [(\alpha\sqrt{E})_v - \beta(\sqrt{G})_u] du \wedge dv.$$

Donde  $\alpha, \beta$  son los cosenos directores de  $a_3$  (versor según la dirección de la recta) respecto de los versores  $e_1, e_2$  (que son las tangentes a las líneas de curvatura de la superficie. E y G son los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie.

A partir de la densidad para geodésicas en espacios de Riemann de dimensión n y para  $n > 2$ , Santaló ([8], p.334) define como densidad de congruencias de geodésicas (para un conjunto de geodésicas tal que existe una superficie transversal que corta a cada geodésica en uno y sólo un punto.)

$$dG^1 = dp_1 dx_1 + dp_2 dx_2$$

donde se eligió un sistema rectangular de coordenadas de manera que las ecuaciones de la superficie son localmente

$$x_3=0, x_4=0, \dots, x_n=0$$

La forma cuadrática fundamental se escribe

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n g_{ii} dx_i^2 \quad \text{y} \quad p_i = g_{ii} \frac{dx_i}{ds}$$

El ángulo  $\alpha_i$  de la geodésica G con la curva  $x_i$  está dado por

$$\cos \alpha_i = \sqrt{g_{ii}} (dx_i/ds);$$

por lo tanto tenemos

$$p_i = \sqrt{g_{ii}} \cos \alpha_i .$$

Reemplazando obtenemos

$$(3.5) \quad dG^1 = -\sqrt{g_{11}} \operatorname{sen} \alpha_1 d\alpha_1 \wedge dx_1 - \sqrt{g_{22}} \operatorname{sen} \alpha_2 d\alpha_2 \wedge dx_2 + \\ + [(\partial\sqrt{g_{22}}/\partial x_1) \cos \alpha_2 - (\partial\sqrt{g_{11}}/\partial x_2) \cos \alpha_1] dx_1 \wedge dx_2$$

donde para el caso  $n=3$ , la superficie transversal considerada tiene localmente ecuación  $x_3=0$ .

Veamos su expresión en el caso del espacio euclídeo  $E^3$ . Para la superficie es

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

y comparando, como  $x_1=u$ ,  $x_2=v$ ,  $\cos \alpha_1 = \alpha$ ,  $\cos \alpha_2 = \beta$ , resultan

$$g_{11}=E, \quad g_{22}=G, \quad \operatorname{sen} \alpha_1 d\alpha_1 = -d\alpha, \quad \operatorname{sen} \alpha_2 d\alpha_2 = -d\beta$$

con lo cual

$$dG^1 = \sqrt{E} d\alpha \wedge du + \sqrt{G} d\beta \wedge dv + [(G_u/2\sqrt{G})\beta - (E_v/2\sqrt{E})\alpha] du \wedge dv = \\ = -\sqrt{E} du \wedge d\alpha - \sqrt{G} dv \wedge d\beta + (\beta G_u/2\sqrt{G}) du \wedge dv - (\alpha E_v/2\sqrt{E}) du \wedge dv = \\ \Psi^* .$$

Es decir, la expresión (3.5) general para geodésicas de una congruencia de un espacio de Riemann, se reduce a la densidad  $\Psi^*$  expresada por (2.4) o por (3.4).

11) También forman una congruencia las rectas que unen puntos de dos curvas de  $E^3$ . En tal caso, llamemos  $X = X(s_1)$  ,  $Y = Y(s_2)$  a los puntos de cada una de las curvas, queremos expresar la densidad  $\Psi^*$  en función de los parámetros que determinan  $X$  e  $Y$ . La recta  $g$  de la congruencia es la que pasa por  $X$  e  $Y$ , por lo tanto tenemos

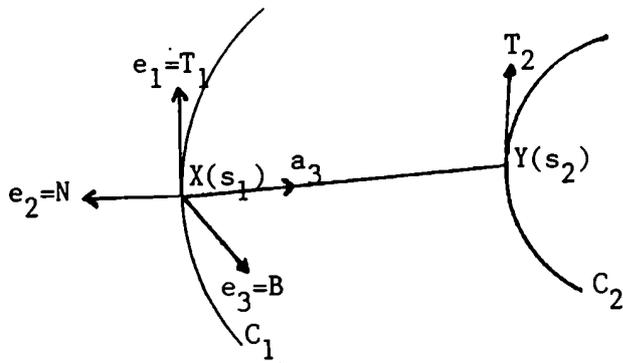
$$a_3 = (Y-X)/r \quad \text{donde } r = \sqrt{(Y-X)^2} \quad \text{es la distancia entre } X \text{ e } Y.$$

Si llamamos  $C_1$  ,  $C_2$  a las curvas, consideramos como sistema  $\{e_1, e_2, e_3\}$  el triedro de Frenet para la curva  $C_1$  en el punto  $X$ , o sea

$$e_1 = T_1$$

$$e_2 = N$$

$$e_3 = B$$



Obviamente es

$$dX = T_1 ds_1$$

y como

$$dX = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3$$

comparando obtenemos

$$\sigma_1 = ds_1$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 0$$

Además, usando las relaciones de Sulanke (2.1) será

$$dT = de_1 = \omega_3 e_2 - \omega_2 e_3 = \omega_3 N - \omega_2 B$$

$$dN = de_2 = -\omega_3 e_1 + \omega_1 e_3 = -\omega_3 T + \omega_1 B$$

$$dB = de_3 = \omega_3 e_1 - \omega_1 e_2 = \omega_2 T - \omega_1 N$$

Comparando éstas con las fórmulas de Frenet

$$dT = \chi N ds_1$$

$$dN = -\chi T ds_1 + \tau B ds_1$$

$$dB = -\tau N ds_1$$

Resultan

$$\omega_1 = \tau ds_1$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\omega_3 = \chi ds_1$$

donde  $\chi$  es la curvatura y  $\tau$  es la torsión de la curva  $C_1$ .

Reemplazando estos valores en (3.1) y (3.2) obtenemos

$$\sigma_1^* = (\sigma_1 \gamma \alpha / \sqrt{1-\gamma^2}) + (\sigma_2 \gamma \beta / \sqrt{1-\gamma^2}) = (\gamma \alpha / \sqrt{1-\gamma^2}) ds_1$$

$$\sigma_2^* = (-\sigma_1 \beta / \sqrt{1-\gamma^2}) + (\sigma_2 \alpha / \sqrt{1-\gamma^2}) = (-\beta / \sqrt{1-\gamma^2}) ds_1$$

$$\omega_1^* = (1/\sqrt{1-\gamma^2}) [ \beta d\alpha - \alpha d\beta + \alpha \gamma \omega_1 + \beta \gamma \omega_2 - (1-\gamma^2) \omega_3 ]$$

$$\omega_1^* = (1/\sqrt{1-\gamma^2}) [ \beta d\alpha - \alpha d\beta + \alpha \gamma \tau ds_1 - (1-\gamma^2) \chi ds_1 ]$$

$$\omega_2^* = (1/\sqrt{1-\gamma^2})[-d\gamma - \beta\omega_1 + \alpha\omega_2]$$

$$\omega_2^* = (-d\gamma - \beta\tau ds_1)$$

con esto calculamos

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \sigma_1^* \wedge \omega_2^* - \sigma_2^* \wedge \omega_1^* = (-\gamma\alpha/1-\gamma^2)ds_1 \wedge d\gamma + (\beta/1-\gamma^2)(\beta ds_1 \wedge d\alpha - \alpha ds_1 \wedge d\beta) = \\ &= (1/1-\gamma^2)(-\gamma\alpha ds_1 \wedge d\gamma + \beta^2 ds_1 \wedge d\alpha - \beta\alpha ds_1 \wedge d\beta) \end{aligned}$$

y operando como antes

$$-\gamma\alpha ds_1 \wedge d\gamma - \beta\alpha ds_1 \wedge d\beta = \alpha(\gamma d\gamma + \beta d\beta) \wedge ds_1 = \alpha(-\alpha d\alpha) \wedge ds_1 = \alpha^2 ds_1 \wedge d\alpha$$

y como  $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$ , resulta

$$(3.6) \quad \Psi^* = ds_1 \wedge d\alpha .$$

Que es una expresión simple para la densidad de rectas de una congruencia formada por las rectas que unen puntos de dos curvas dadas.

Para estas congruencias de rectas determinadas por dos curvas, podemos aún obtener otra expresión de la siguiente manera:

$\alpha$  es el coseno director de  $a_3$  respecto de  $e_1$ , por tanto

$$\alpha = [(Y-X)/r] \cdot T_1 = [(Y-X)/\sqrt{(Y-X)^2}] \cdot T_1$$

como  $d\alpha = (\partial\alpha/\partial X)dX + (\partial\alpha/\partial Y)dY$  y  $dX = T_1 ds_1$        $dY = T_2 ds_2$

resulta

$$ds_1 \wedge d\alpha = (\partial\alpha/\partial Y) \cdot T_2 ds_1 \wedge ds_2$$

dado que  $(\partial\alpha/\partial Y) \cdot T_2 = \frac{1}{r} [(\frac{Y-X}{r} \wedge T_1) \cdot (\frac{Y-X}{r} \wedge T_2)]$

y usando que  $(X \wedge Y)(X_1 \wedge Y_1) = (XX_1)(YY_1) - (XY_1)(X_1Y)$

resulta

$$ds_1 \wedge d\alpha = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{Y-X}{r} \wedge T_1 \right) \cdot \left( \frac{Y-X}{r} \wedge T_2 \right) \right] ds_1 \wedge ds_2$$

Como todos los vectores son de módulo unidad, los productos vectoriales nos dan el seno del ángulo entre  $g$  y  $T_1$ , y entre  $g$  y  $T_2$  respectivamente, y el producto escalar nos da el coseno del ángulo entre los planos generados por  $[g$  y  $T_1]$  y por  $[g$  y  $T_2]$ .

Entonces

$$(3.7) \quad \psi^* = (1/r) \operatorname{sen} \eta_1 \operatorname{sen} \eta_2 \cos \theta \, ds_1 \wedge ds_2$$

Comparando con el invariante  $dI$  introducido por Pohl [6] es

$$\psi^* = -dI$$

#### 4-Congruencias de rectas en los espacios elíptico e hiperbólico.

A partir de la definición dada por Santaló ([8], p.332/4) para densidad de geodésicas en espacios de Riemann  $n$ -dimensionales

$$dG = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$$

éste considera el caso de conjuntos de geodésicas determinados de la siguiente manera:

Dadas  $C_1, C_2$  dos subvariedades de dimensión  $h$  tales que todo par de puntos  $X \in C_1, Y \in C_2$  determina una única geodésica  $g$ , entonces

$$dG^h = (dG)^h = \sum_{i_1 < \dots < i_h} h! dp_{i_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_h} \wedge dx_{i_h}$$

y podemos escribir

$$dG^h = h!(-1)^{(h-1)h/2} \sum_{i_1 < \dots < i_h} dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_h} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_h} \quad \text{para } 1 \leq h \leq n$$

El caso que aquí nos interesa es  $n=3, h=1$  y el espacio de Riemann de curvatura constante, que es una generalización a los espacios elíptico e hiperbólico de 3ii). Sean entonces  $C_1, C_2$  dos curvas (variedades de dimensión 1) de un espacio de Riemann de curvatura constante de dimensión 3 tales que todo par de puntos  $X \in C_1, Y \in C_2$  determina una única geodésica  $g$ . Con las mismas notaciones de 3ii), sean  $S_1, S_2$  las variedades planas de dimensión 2 que contienen a  $g$  y a  $T_1, T_2$  respectivamente.

Consideramos en  $X$  el siguiente sistema de coordenadas ortonormal

$x_1$  es el vector tangente a  $g$  en  $X$

$x_2 \in S_1$

con lo cual queda determinado  $x_3$ .

Sea  $S' = \{X \in S_1 / x_1 = 0\}$

Determinamos  $g$  por su intersección con  $S'$  (es decir  $X$ ).

Entonces resulta

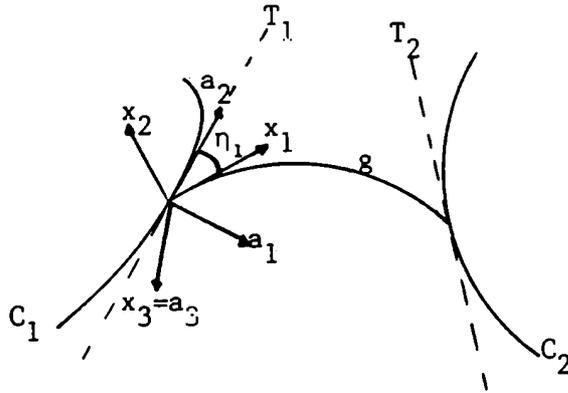
$$(4.1) \quad dG = dp_2 \wedge dx_2$$

También con centro en  $X$  consideramos el sistema  $\{a_i\}$  definido por

$$a_3 = x_3$$

$$a_2 \in T_1$$

$a_1$  tal que  $a_1 a_2$  tenga la misma orientación que  $x_1 x_2$ .



Proyectando es

$$\text{sen } \eta_1 = \cos (\pi/2 - \eta_1) = dx_2/da_2$$

o sea que

$$dx_2 = da_2 \text{ sen } \eta_1$$

Por otro lado, según Santaló ([8], p.334-337) es

$$dp_2 = \sqrt{g_{22}} \text{ sen } \alpha_2 d\alpha_2 \quad ds_1 = \sqrt{g_{22}} da_2$$

y el elemento de arco correspondiente a la circunferencia euclídea unitaria de centro X, en la dirección tangente a g en X es

$$d\zeta_1 = (\text{sen} \alpha_2 d\alpha_2 / \cos \nu) \quad \text{donde } \cos \nu = 1 \text{ ya que } \nu \text{ es el ángulo entre } g \text{ y } x_1;$$

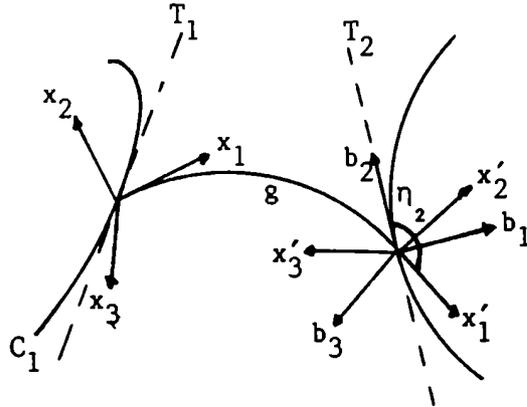
es decir que

$$d\zeta_1 = \text{sen } \alpha_2 d\alpha_2$$

y reemplazando en (4.1), resulta

$$(4.2) \quad dG = \text{sen } \eta_1 d\zeta_1 \wedge ds_1$$

Ahora nos ubicamos en  $S_2$  ( $X, Y \in S_2$ ;  $g \subset S_2$ ). Consideramos el sistema ortonormal de coordenadas  $\{b_i\}$  en  $Y$  definido de modo que  $b_2$  genere  $T_2$ ;  $b_1, b_2 \in S_2$  y orientado como  $x'_1, x'_2, x'_3$  que son los trasladados paralelamente de  $x_1, x_2, x_3$  a lo largo de  $g$  desde  $X$  hasta  $Y$ .



Para un punto de  $S_2$  llamemos  $\lambda_i$  a los ángulos de las direcciones del punto respecto del sistema  $\{b_1, b_2\}$  de  $S_2$ ,  $\rho$  a la distancia de  $X$  al punto; un sistema de coordenadas polares en  $S_2$  con centro en  $X$  será tal que

$$ds^2 = d\rho^2 + H^2(\rho) d\lambda_i^2$$

donde  $H(\rho)$  es

$\rho$  en el caso euclídeo

$\text{sen } \rho$  en el caso elíptico

$\text{sh } \rho$  en el caso hiperbólico.

En  $\rho = \text{cte.}$  será  $db_i = H d\lambda_i$

Con lo cual el elemento de arco en  $\rho = \text{cte.}$  será

$$d\xi_p = H du'_i$$

con  $du'_1$  el elemento de arco de la circunferencia euclídea unitaria en la dirección respecto de las  $b_i$ .

Como el ángulo entre  $x'_1$  y  $b_1$  es  $\eta_2$  (salvo  $\pm\pi/2$ ) resulta

$$\text{sen } \eta_2 ds_2 = d\xi_p$$

Si además llamamos  $du_1$  al elemento de arco respecto del sistema  $x'_i$  será

$$\cos \theta = du_1/du'_1$$

Entonces

$$d\xi_1 = du_1 = \cos \theta du'_1 = (\cos \theta d\xi_p)/H = (\cos \theta \text{sen } \eta_2 ds_2)/H$$

Reemplazando obtenemos

$$(4.4) \quad dG = (1/H) \text{sen } \eta_1 \text{sen } \eta_2 \cos \theta ds_2 \wedge ds_1$$

que en el caso euclídeo coincide, salvo signo, con la expresión (3.7) obtenida para  $\psi^*$ .

Para los casos elíptico ( $H = \text{sen } \rho$ ) e hiperbólico ( $H = \text{sh } \rho$ ) se obtienen respectivamente

$$(4.4) \quad dG = (1/\text{sen } \rho) \text{sen } \eta_1 \text{sen } \eta_2 \cos \theta ds_2 \wedge ds_1$$

$$(4.5) \quad dG = (1/\text{sh } \rho) \text{sen } \eta_1 \text{sen } \eta_2 \cos \theta ds_2 \wedge ds_1$$

Observaciones:

a) Un razonamiento similar da por resultado en dimensión  $n$ , para  $C_1, C_2$  de dimensión  $h$ ,

$$(dG)^h = (1/H^h) h! (-1)^{(h-1)h/2} \text{sen } \eta_1 \text{sen } \eta_2 \cos \theta dV_2 \wedge dV_1$$

que generaliza la fórmula de Pohl [6] a los espacios euclídeo e hiperbólico de dimensión  $n$ .

b) Si trabajamos directamente con las formas de primer grado en  $H^4$ , Sulanke [10] define

$$\Psi = \sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1$$

Pohl [6] define

$$dI = \omega_{31} \wedge \sigma_1 + \omega_{32} \wedge \sigma_2$$

como  $\omega_{31} = de_3 e_1 = \omega_2$  y  $\omega_{32} = de_3 e_2 = -\omega_1$

resulta

$$dI = \omega_2 \wedge \sigma_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 = -\sigma_1 \wedge \omega_2 + \sigma_2 \wedge \omega_1 = -\Psi.$$

### 5-Algunas aplicaciones.

i) Sabemos según Santaló ([8],p.335) que la condición necesaria y suficiente para que una congruencia de rectas sea normal (es decir que sus rectas sean las normales de una superficie) es  $\Psi \equiv 0$ .

Según Blaschke ([2],p.71) la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea normal a una superficie dada es que

$$(X_u \cdot a_3)_v = (X_v \cdot a_3)_u$$

haciendo pasos sucesivamente equivalentes, esta condición es

$$(\sqrt{E} e_1 \cdot a_3)_v = (\sqrt{G} e_2 \cdot a_3)_u$$

$$(\alpha \sqrt{E})_v = (\beta \sqrt{G})_u$$

$$(\alpha \sqrt{E})_v - (\beta \sqrt{G})_u = 0.$$

y utilizando la expresión para congruencias (3.4) esto es equivalente a la citada  $\Psi \equiv 0$ .

ii) Observando la expresión (3.6)

$\Psi = ds_1 \wedge d\alpha$  como aquí es  $\Psi \neq 0$  se sigue que las rectas que unen puntos de dos curvas del espacio no pueden formar una congruencia normal (como observa Pohl ([6], p.1327)).

iii) En el caso de ser la congruencia el conjunto de rectas secantes a una curva  $C$  de longitud  $L$ , usando la expresión (3.6) donde  $\alpha$  dijimos que es el coseno director de  $a_3$  respecto de  $e_1$  (o sea  $\alpha = \cos \eta_1$ ), calculamos

$$\int_{C \times C} dI = - \int_C \Psi = - \left[ \int_0^{\pi} \int_0^L ds_1 \wedge d\alpha \right] = -L \cos \eta_1 \Big|_0^{\pi} = 2L$$

que es el resultado de Pohl ([6], teorema 2).

iv) Utilizando este último resultado y una fórmula obtenida por Sulanke [10] según la cual

$$\int n(E) dE = (\pi/2) \int |\Psi|$$

donde  $n(E)$  es el número de rectas de la congruencia contenidas en el plano  $E$ ; si consideramos una curva  $C$  de longitud  $L$  del espacio euclídeo, llamando  $N(E)$  al número de puntos de  $C \cap E$ , como  $n(E) = N(E)$  ya que las rectas de la congruencia se toman orientadas, resulta

$$\int N(E) dE = \int n(E) dE = (\pi/2) \int |\Psi| = (\pi/2) 2L = \pi L$$

que es una conocida fórmula de la geometría integral (Santaló [8], p.246).

v) Veamos finalmente algunas generalizaciones a los espacios elíptico e hiperbólico de resultados obtenidos por Pohl [6].

Para ello observamos primero que tanto el resultado de Banchoff y Pohl ([1],p.183)

$$\int \lambda^2(C \cap E, g) dG(E) \wedge dE^* = - \int \left( \sum_{i,j} r(x_i, x_j) i_{x_i} i_{x_j} \right) dE^*$$

(donde  $\lambda$  es el "linking number" de la curva  $C$  respecto de la recta  $g$ ;  $x_1, x_2, \dots$  son los puntos de  $E \cap C$ ,  $r(x_i, x_j)$  es la distancia entre  $x_i$  y  $x_j$ , y  $i_{x_j}$  es el número de puntos de intersección de  $C \cap E$  en  $x_j$ ) como las fórmulas integrales

$$dG(E) \wedge dE^* = dE(G) \wedge dG \quad (\text{Santaló [8], p.207})$$

y 
$$\int dE(G) = O_1/O_0 = \pi \quad (\text{Santaló [8], 12.36 para el caso } n=3, r=2, q=1)$$

valen en espacios de Riemann de curvatura constante.

Además

$$\lambda(C, g) = \lambda(C \cap E, g) \quad \text{si } g \subset E, C \text{ una curva del espacio de dimensión 3.}$$

Sea  $B = \{(E, g) / g \subset E\}$ . Queremos calcular  $\int \lambda^2(C, g) dB$

donde  $dB = dG(E) \wedge dE^* = dE(g) \wedge dG$

Si para ello fijamos primero  $g$  es

$$\int \lambda^2(C, g) dE(G) \wedge dG = \pi \int \lambda^2(C, g) dG$$

y por otro lado, como  $C \cap E$  es una variedad de dimensión 0 en  $E$ , usando el resultado de Banchoff y Pohl ([1], p.183) para  $E$  fijo es

$$\int \lambda^2(C, g) dG(E) \wedge dE^* = \int \lambda^2(C \cap E, g) dG(E) \wedge dE^* = - \int \left( \sum_{i,j} r(x_i, x_j) i_{x_i} i_{x_j} \right) dE^*$$

Con lo cual obtenemos la fórmula 1 de Pohl [6].

$$\pi \int_{G \subset E^3} \lambda^2 dG = - \int_{E \subset E^3} \left( \sum_{i,j} r(x_i, x_j) i_{x_i} i_{x_j} \right) dE^*.$$

Más aún, como también vale en los casos elíptico e hiperbólico que

$$dE = \sin^2 \phi dG(E_0) d\phi \quad (\text{Santaló [8], p.211})$$

resulta

$$\int_{E \subset E^3} \left[ \sum_{i,j} r(x_i, x_j) \frac{i_{x_i} i_{x_j}}{i_{x_i x_j}} \right] dE =$$

fijando E tal que contenga a la recta  $\overline{x_i x_j}$ ,

$$= \int_0^\pi r \sin^2 \phi dG(E_0) d\phi = (\pi/2) \int r dG(E_0)$$

Obtenemos entonces que

$$\int_{E \subset E^3} \left[ \sum_{i,j} r(x_i, x_j) \frac{i_{x_i} i_{x_j}}{i_{x_i x_j}} \right] dE^* = (\pi/2) \int r dG^*(E_0) = -(\pi/2) \int r dI$$

que es el otro resultado de Pohl [6].

Observemos finalmente que también puede generalizarse la fórmula de Banchoff y Pohl ([1], p.189), obteniendo para el espacio n-dimensional

elíptico  $\int \sin \rho dG^h = -(h-1)! (-1)^{h(h-1)/2} \int (1/\sin^{h-1} \rho) \cos \eta_1 \cos \eta_2 \cos \theta dV_2^h dV_1$

hiperbólico  $\int \operatorname{sh} \rho dG^h = -(h-1)! (-1)^{h(h-1)/2} \int (1/\operatorname{sh}^{h-1} \rho) \cos \eta_1 \cos \eta_2 \cos \theta dV_2^h dV_1$

si bien la aplicación que Pohl hace en el caso euclídeo obteniendo una generalización de la desigualdad isoperimétrica no es generalizable con ellas.-

CA Santaló

~~Alonso~~

BIBLIOGRAFIA.

1. Banchoff, T.F. y Pohl, W.F. : " A generalization of the Isoperimetric Inequality "   
Journal of Diff.Geometry 6 (1971) p.175-192.
2. Blaschke, W. : "Vorlesungen über Differentialgeometrie I ", 2ª Auflage . Springer .   
Berlín (1924).
3. Bokowski, J. : " Ungleichungen für den Inhalt von Trennflächen ", Arch. Math.   
Basel 34 (1980) p.84-89.
4. Gysin, L. : " Inequalities for the Product of the Volumes of a Partition determined   
in a convex Body by a Surface ", aceptado para su publicación   
en el Rendiconti del C.Mat.di Palermo, Vol.36 (1987).
5. Hristov, G. : " A Certain Problem of R.Sulanke ", Mathematics and mathematical   
ed. Proc.Second Spring Conf.of the Bulgarian Math.Soc., Vidin   
(1973) Bulgarian, p.231-235.
6. Pohl, W.F. : " Some Integral Formulas for Space Curves and their generalization ",   
American Journal Math., XC (1968) p.1321-1345.
7. Santaló, L.A. : " An Inequality between the Parts into which a Convex Body is   
divided by a Plane Section ", Rendiconti del Circ.Mat.di   
Palermo,S.II, T.XXXII (1983) p.124-130.

8. Santaló, L.A. : " Integral Geometry and Geometric Probability ", Encyclopedia of Math.and Applications. Addison-Wesley, Reading (1976).
9. Steinhaus, H. : " Length, Shape and Area ", Colloq.Math.3 (1954) p.1-13.
10. Sulanke, R. : " Croftonsche Formeln für Strahlensysteme des euklidischen Raum ", Math.Nachrichten 38 (1968) p.299-307.
11. Sulanke, R. : " Integralgeometrie ebener Kurvennetze ", Acta Math.Acad.Scientarum Hungaricae 17 (3-4) ,(1966) p.233-261.