

## Tesis de Posgrado

# Dependencia de la excitación en osciladores de relajación

Romanelli, Lilia

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Romanelli, Lilia. (1989). Dependencia de la excitación en osciladores de relajación. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2197\\_Romanelli.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2197_Romanelli.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Romanelli, Lilia. "Dependencia de la excitación en osciladores de relajación". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1989.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2197\\_Romanelli.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2197_Romanelli.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

**Dependencia de la excitación en osciladores de  
relajación**

**Lilia Romanelli**

**Director: Jorge Hernando**

**Lugar de Trabajo: CAERCEM - CONICET**

**Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas**

**Abril 1989**

2.197

Ej: 2

## Índice

<b>Consideraciones generales</b> .....	1
<b>Capítulo 1</b>	
<i>Conceptos de dinámica no lineal</i> .....	4
1.1.1 <i>Acerca de sistemas dinámicos</i> .....	5
1.1.2 <i>Mapas</i> .....	10
1.1.3 <i>Sección de Poincaré</i> .....	12
1.2 <i>Clasificación de las órbitas</i> .....	13
1.2.2 <i>Clasificación de las bifurcaciones</i> .....	18
1.2.2.1 <i>Bifurcaciones globales de puntos de equilibrio</i> .....	19
1.2.2.2 <i>Bifurcaciones locales a partir de órbitas periódicas</i> .....	23
1.2.3 <i>Estabilidad de las soluciones</i> .....	30
1.2.3.3 <i>Estabilidad local</i> .....	30
1.2.3.4 <i>Estabilidad global</i> .....	31
1.2.3.5 <i>Estabilidad Estructural</i> .....	32
1.3.1 <i>Espectro de Potencias</i> .....	33
1.3.2 <i>Entropía</i> .....	35
1.4.3 <i>Escenarios</i> .....	37
1.4.3.1 <i>Escenario de Landau</i> .....	38
1.4.3.2 <i>Escenario Ruelle - Takens - Newhouse</i> .....	39
1.4.3.3 <i>Escenario de Feigenbaum</i> .....	40
1.4.3.4 <i>Escenario de Pomeau - Maneville</i> .....	41
<b>Capítulo 2</b>	
<i>Caracterización de sistemas caóticos</i> .....	42
2.1 <i>Introducción</i> .....	43
2.2 <i>Dimensiones de atractores</i> .....	46
2.2.1 <i>Visualización del cálculo de la dimensión fractal de un conjunto de puntos</i> .....	47
2.2.2 <i>Algoritmos para el cálculo de <math>D_f</math></i> .....	49
2.3 <i>Exponentes de Lyapunov</i> .....	55
2.4 <i>Cálculo de la dimensión de series temporales</i> .....	57
2.4.1 <i>La idea básica</i> .....	57
2.4.2 <i>Aplicación</i> .....	67

### **Capítulo 3**

<i>Oscilador de relajación forzado</i> .....	76
3.1 <i>Oscilador de Smith</i> .....	77
3.2 <i>Osciladores de relajación</i> .....	83
3.3 <i>Desaparición de las soluciones caóticas con la velocidad de relajación</i> .....	86
3.3.1 <i>Aproximación unidimensional del mapa estroboscópico</i> .....	90
3.3.2 <i>Caracterización de la burbuja caótica</i> .....	93

### **Capítulo 4**

<i>Oscilador forzado con excitación variable</i> .....	102
4.1 <i>Forzado con deltas de amplitud variable</i> .....	103
4.2 <i>Resultados obtenidos</i> .....	109

<b>Conclusiones</b> .....	115
---------------------------	-----

<b>Referencias</b> .....	117
--------------------------	-----

<b>Apéndice 1</b> .....	120
-------------------------	-----

#### *A.1- Definiciones*

<i>A.2 - Sistema de Lorenz</i> .....	123
--------------------------------------	-----

<i>A.3 - Medidas de Probabilidad Invariantes</i> .....	124
--	-----

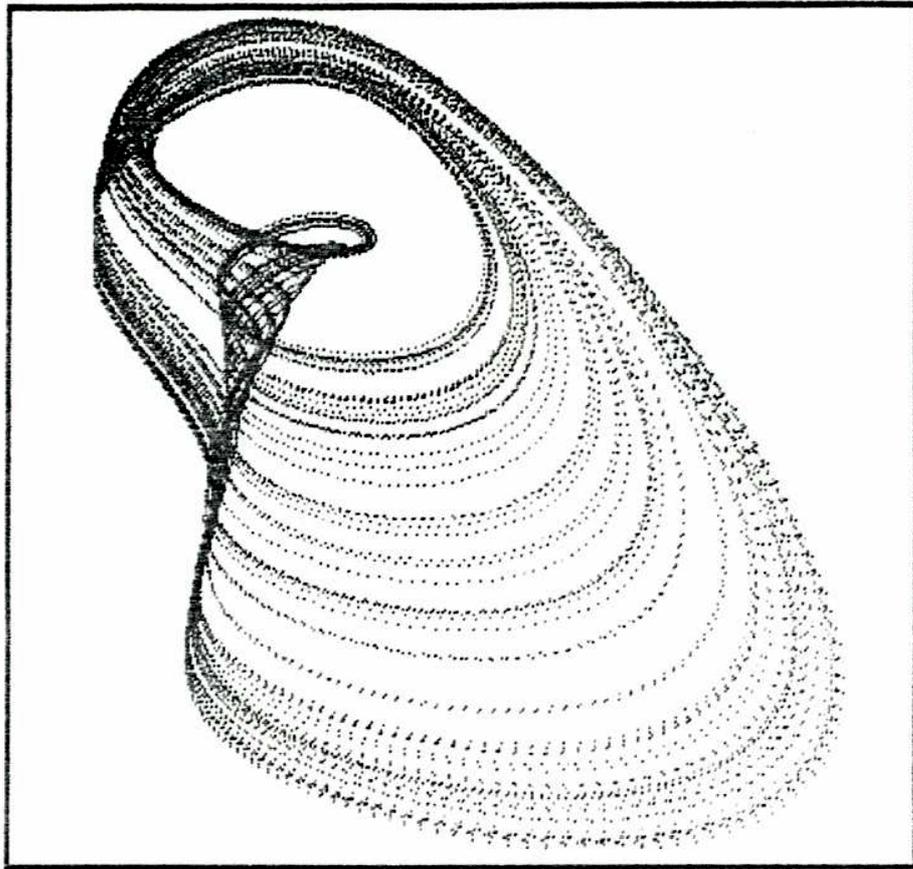
<i>A.4 - Medidas S R B</i> .....	125
----------------------------------	-----

<b>Apéndice 2</b> .....	128
-------------------------	-----

<b>Apéndice 3</b> .....	134
-------------------------	-----

<b>Apéndice 4</b> .....	137
-------------------------	-----

<b>Agradecimientos</b> .....	139
------------------------------	-----



Atractor caótico proveniente del modelo de Bruselas excitado por una fuerza anarmónica, dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A-B)x + x^2y - x + \alpha z \\ \dot{y} &= Bx - x^2y \\ \dot{z} &= -\omega u \\ \dot{u} &= \omega z(1 + \beta z^2)\end{aligned}$$

Siendo los parámetros:  $A = 0.4$ ,  $B = 1.2$ ,  $\alpha = 0.08$ ,  $\beta = 0.1$  y  $\omega = 0.86$

## Consideraciones generales

La dinámica no lineal (o caótica) es una rama relativamente joven de la física que esta en continua expansión.

El primer descubrimiento fundamental en dinámica no lineal ha sido que aun sistemas muy simples y de dimensión muy baja, como un péndulo forzado con amortiguamiento, pueden exhibir un comportamiento temporal complicado. Este comportamiento complicado y no periódico fue llamado caos pues su característica mas importante es la impredecibilidad. Pero el caos no es ruido, es determinístico, se produce por la evolución temporal del sistema para valores típicos de sus parametros físicos de control.

El segundo hito fundamental en dinámica caótica fue la unificación conceptual de muchos fenómenos similares observados en sistemas físicos, químicos y biológicos. Como ejemplo se puede destacar las relaciones de escala universales para la transición por bifurcación de período al caos dada por M. Feigenbaum (1979, 1980).

Esto sugiere la idea que el caos en los sistemas complejos puede ser analizado con métodos simples y a veces intuitivos y que, en un sentido real, puede construirse a partir de componentes con propiedades universales.

En otras palabras lo más importante es que la dinámica no lineal ha establecido un mecanismo de aproximación a uno de los grandes problemas no resueltos: la turbulencia completamente desarrollada. Un sistema turbulento es caótico en espacio y tiempo.

De hecho, este enfoque es una nueva manera de concebir los flujos hidrodinámicos y puede tener consecuencias prácticas importantes si se es capaz

de determinar la dimensión del sistema. Esta nos informa sobre los grados de libertad efectivos y da un límite inferior al número de variables que será necesario considerar si se desea una descripción simplificada pero realista (un modelo) del funcionamiento del sistema en cuestión.

Supongamos que para un flujo dado la dimensión del atractor resulta muy alta (digamos del orden de cien), esto significa que solamente es posible una descripción estadística que haga intervenir un número grande de grados de libertad. Si, por el contrario, se obtiene una dimensión reducida, bastará entonces un número limitado de variables para modelar el sistema. En este caso, el problema consiste en analizar correctamente el funcionamiento del sistema físico, identificar los mecanismos principales, y efectuar las aproximaciones adecuadas. Es decir, que una dimensión baja, nos da una herramienta para examinar el desorden aparente y poder aislar las estructuras organizadas subyacentes. En otras palabras, en presencia de un fenómeno caótico es fundamental determinar la dimensión del atractor que lo caracteriza.

El estudio de sistemas caóticos de baja dimensionalidad puede brindarnos ideas para entender la turbulencia ya que nos permite adquirir experiencias en el tratamiento de situaciones complejas y desordenadas con la configuración de estructuras simples subyacentes.

En este trabajo discutiremos los algoritmos más importantes para la determinación de la dimensionalidad del sistema caótico y lo aplicaremos a un sistema biológico.

Como modelo alternativo de la dinámica cardíaca, estudiaremos un oscilador de relajación sometido a fuerzas impulsivas de amplitud variable. La se-

cuencia que aplicaremos no es arbitraria sino que aproxima un irracional (secuencia de Fibonacci), el número de oro.

En consecuencia esta tesis está organizada como sigue:

En el capítulo 1 se resumirán algunos conceptos de dinámica no lineal que se aplicarán en todo el desarrollo.

El capítulo 2 discute los algoritmos y métodos para el análisis de la dimensionalidad de los sistemas dinámicos involucrados y se mostrarán resultados experimentales donde se aplican éstos métodos.

En el capítulo 3 se revisará someramente la dinámica del oscilador exactamente resoluble y se analizará la formación de burbujas caóticas y su posterior desaparición al variar la disipación del sistema.

En el capítulo 4 se estudiarán las características del oscilador exactamente resoluble cuando la secuencia de excitación se aproxima un irracional y se discutirán los resultados obtenidos comparándolos con los resultados experimentales an el tejido cardíaco analizado en el capítulo 2.

Finalmente se darán las conclusiones y se incluirán apéndices que facilitan la comprensión de algunos temas específicos.

## **Capítulo 1: Conceptos de dinámica no lineal**

En este capítulo daremos algunos conceptos y definiciones fundamentales en dinámica no lineal usados en el transcurso de este trabajo.

En la sección 1 describiremos el concepto de sistemas dinámicos, mapas y se definirá la sección de Poincaré.

En la sección 2 se definirán y clasificarán los tipos principales de bifurcaciones, discutiéndose además los criterios de estabilidad de las soluciones.

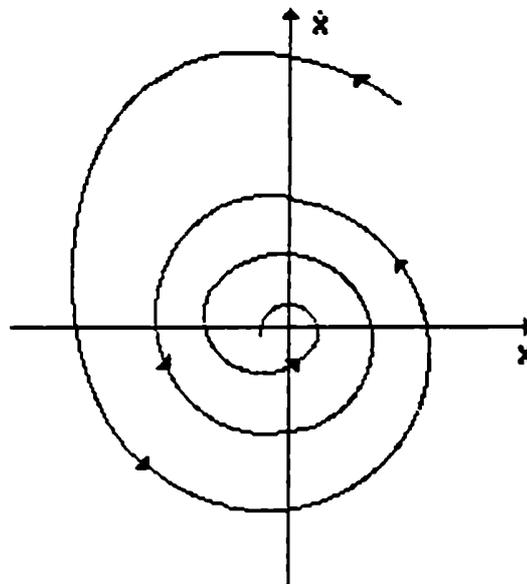
Finalmente en la sección 3, aclararemos algunas nociones acerca de espectros de potencia, entropía, y escenarios. Nos hemos restringido al análisis de temas que se aplican a sistemas disipativos, por lo que no se aclarará, que resultados son generales para su aplicación en sistemas conservativos y cuáles son inherentes a sistemas disipativos.

### 1.1.1 Acerca de sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos pueden ser divididos en dos amplias categorías, conservativos o disipativos dependiendo de que la energía se conserve o no.

Es de especial interés su comportamiento a tiempos suficientemente largos. En sistemas disipativos, éste está controlado por atractores, lo que significa que, comenzando con distintas condiciones iniciales, el movimiento evoluciona en el tiempo hacia un atractor y después de un tiempo suficientemente largo como para que los transitorios mueran, el movimiento se realizará sobre el atractor. Los atractores pueden clasificarse en tres categorías a los que nos referiremos en el curso de los siguientes capítulos.

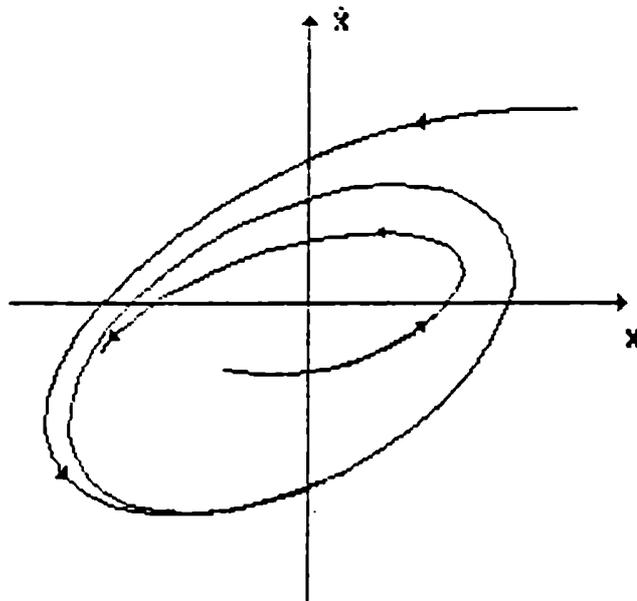
1) *Punto fijo* (estable) . Es un punto, como se muestra en la figura, que atrae hacia sí mismo todas las trayectorias que están dentro de la cuenca de atracción.



*Punto fijo (inestable).* Dependiendo del parámetro de control el punto fijo estable pierde su estabilidad y comienza a repeler todas las trayectorias cercanas (repulsor). Como pequeños cambios en el parámetro no pueden producir consecuencias tan drásticas como invertir la dirección de todas las líneas de flujo en todo el espacio de fases, en la vecindad del punto fijo inestable puede llegar a repeler algunas líneas de flujo mientras que permanece atractivo para regiones más lejanas.

La repulsión local y la atracción global del flujo implican la formación de una curva cerrada alrededor del punto fijo inestable y la curva atrae todas las trayectorias cercanas. Esta curva es la llamada ciclo límite.

2) *Ciclo límite:* el sistema tiende a evolucionar en una curva cerrada en el espacio de fases y corresponde al movimiento periódico del sistema.



3) *Atractor extraño* término acuñado por Ruelle, también llamado atractor caótico

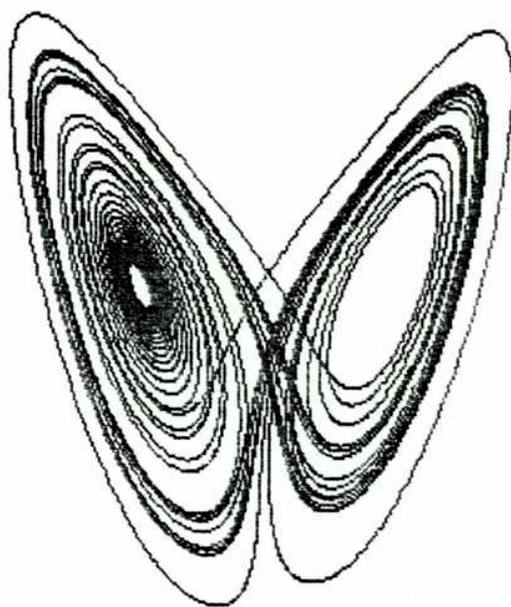
Si se considera un mapa del movimiento se encuentra que el atractor extraño describe un movimiento caótico del sistema en el sentido que la secuencia sucesiva de puntos es aleatoria.

Las propiedades que caracterizan a los atractores extraños son:

i) Está confinado en una región acotada del espacio de fases. Atrapa las trayectorias del sistema que hayan partido de condiciones iniciales ubicadas en el dominio de atracción ( cuenca de atracción) y puede ser muy complicado .

Además tiene la propiedad que no puede descomponerse en conjuntos más simples pues cualquier trayectoria atrapada por el atractor recorre todos los puntos del mismo si se deja pasar suficiente tiempo (es ergódico). Por el contrario una colección de puntos fijos aislados no constituye un atractor extraño pues las trayectorias que parten del dominio de atracción de uno de los puntos fijos no recorren los restantes.

ii) La propiedad principal que hace caótico al atractor es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Esta se produce porque, a pesar de la contracción del volumen, las longitudes no se contraen en todas las direcciones sino que pueden contraerse en una dirección y expandirse en otras. Esto hace que puntos arbitrariamente cercanos se separen macroscopicamente para tiempos suficientemente largos.



Atractor extraño proveniente del sistema de ecuaciones de Lorenz  
( ver Apéndice 1)

iii) Para que corresponda a un sistema físico real el atractor tiene que ser estructuralmente estable y genérico. En otras palabras, un pequeño cambio en los parámetros del campo vectorial cambia la estructura del atractor en forma continua (estabilidad estructural), y el conjunto de valores de los parámetros que generan el atractor extraño no debe ser de medida nula (de lo contrario sería no genérico y por consiguiente sin significado físico).

iv) Todos los atractores extraños encontrados hasta el presente tienen una dimensión de Hausdorff fraccionaria. Como veremos más adelante, en el capítulo 2 no se sabe aún si esa dimensión fraccionaria es consecuencia de las condiciones i), ii) y iii) o es una propiedad adicional que debe exigirse a un atractor para considerárselo extraño. Cualquiera que sea el caso, la dimensión fraccionaria es una característica esencial de los atractores extraños.

Los atractores extraños aparecen típicamente cuando el flujo contrae el elemento de volumen en algunas direcciones pero lo estira en otras. Para permanecer confinado dentro de una región cerrada el elemento de volumen se pliega. Este estiramiento y plegamiento son los responsables de la estructura compleja que adquiere el atractor.

Un aspecto fundamental es que ahora hay fuerte evidencia de que el caos en un gran número de sistemas puede ser descrito por atractores extraños de muy baja dimensionalidad. Esto significa que en un sistema de gran (inclusive infinito) número de grados de libertad sólo algunos pocos se manifiestan o se mantienen activos. Como la mayoría de las condiciones iniciales tienden a colapsar sobre el atractor, muy pocos grados de libertad participan activamente en el caos y el número de estos puede ser extremadamente pequeño en comparación con el total. Sin embargo, el caos es real ya que puntos cercanos divergen exponencialmente lo que causa que pequeños errores se encuentren notablemente amplificados. Esto es lo que se llama extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

Se debe acotar además que los atractores extraños no solamente se refieren a trayectorias en el espacio de las fases, se aplican también a mapas disipativos.

Los atractores caóticos tienen dimensión no entera o fractal como se discutirá con más detalle en los capítulos siguientes.

### 1.1.2 Mapas

El tiempo es una variable continua. La paradoja de Zenón respecto de Arquímedes y la tortuga depende de esa continuidad y para Newton, el tiempo era el primer ejemplo de variable continua. Sin embargo, a veces es útil tratar el tiempo como variable discreta. Esto es particularmente cierto para sistemas que son afectados por condiciones que varían periódicamente con el tiempo.

Algunas veces el uso del tiempo como variable discreta no es una mera cuestión de conveniencia, sino que es obligatorio ya que los datos no pueden ser obtenidos para todo tiempo como por ejemplo en sistemas biológicos o naturales. La aproximación de tratar las ecuaciones diferenciales con el tiempo como variable independiente como una ecuación de diferencias también requiere que el tiempo sea tratado como variable discreta.

Un sistema de orden  $n$  con tiempo discreto está definido por dos propiedades.

1) El estado del sistema está representado por  $n$  variables reales  $x_1, \dots, x_n$  o una variable vectorial real  $\bar{x}$  de dimensión  $n$ , las que pueden ser consideradas como coordenadas en un espacio  $n$ -dimensional abstracto llamado *espacio de fases*

2) El movimiento del sistema está representado por una sucesión de vectores  $r_t$  que satisfacen la relación:

$$r_{t+1} = F(r_t, t) \quad (1)$$

donde  $F$  es una función de  $r$  y de  $t$ .

Si se considera un sistema autónomo (  $F$  no depende explícitamente del tiempo ), las ecuaciones de movimiento son :

$$r_{t+1} = F(r_t) \quad (t=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

donde  $F$  es una función vectorial o "mapa" del espacio de fases en sí mismo.

En sistemas dinámicos la palabra *mapa* se usa en un sentido restringido que implica aplicación repetitiva.

Por ejemplo de la ecuación (2) se ve que:

$$r_1 = F(r_0), \quad r_2 = F(F(r_0)), \quad r_3 = F(F(F(r_0))), \text{ etc.} \quad (3)$$

Por conveniencia se usa la notación  $F^{(m)}$  para  $m$  iteraciones del mapa.

Así entonces:

$$F^{(1)}(r) = F(r), \dots, \dots, \quad F^{(m)}(r) = F(F^{(m-1)}(r)) \quad (m=2, 3, \dots) \quad (4)$$

El índice  $m$  no denota diferenciación sino orden de iteración.

Las transformaciones de mapas bidimensionales son los ejemplos más sencillos. desde el punto de vista numérico, de los fenómenos que tienen lugar en sistemas caóticos.

Sin embargo, desde el punto de vista físico, las oscilaciones de sistemas no lineales tienen un significado más claro e inmediato con el inconveniente numérico de la lentitud e inexactitud que implica integrar un sistema de ecuaciones diferenciales. Es por lo tanto deseable tratar sistemas no lineales que de alguna manera puedan resolverse con la rapidez de los mapas para, de esta forma, lograr una visión más amplia de las características cualitativas de sus respuestas frente a variación en los parámetros físicos del sistema.

### 1.1.3 Sección de Poincaré

El estudio de los sistemas dinámicos se ha simplificado mucho por la introducción de la superficie de Poincaré o superficie de sección.

La superficie de Poincaré es una superficie acotada (o un plano para simplificar) tal que todo el flujo la cruza, pero sólo se registra el paso de aquellos puntos que la atraviesan en un sentido definido de antemano como se observa en la figura siguiente.

Las orbitas del sistema dinámico cruzan este plano en una secuencia de puntos. Cada uno de estos puntos se transforman en sí mismos por el flujo.

Podemos definir un mapa bidimensional del plano,  $\Sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que es el mapa de Poincaré del flujo:

$$P_{n+1} = \Sigma(P_n)$$

o en notación vectorial:

$$x_{n+1} = \Sigma(x_n) \text{ con } x_n \equiv (x_n, y_n)$$

El mapa de Poincare preserva la esencia de la dinámica del flujo y tiene las mismas características topológicas en el sentido en que el mapa es caótico si y solo si el flujo también lo es.

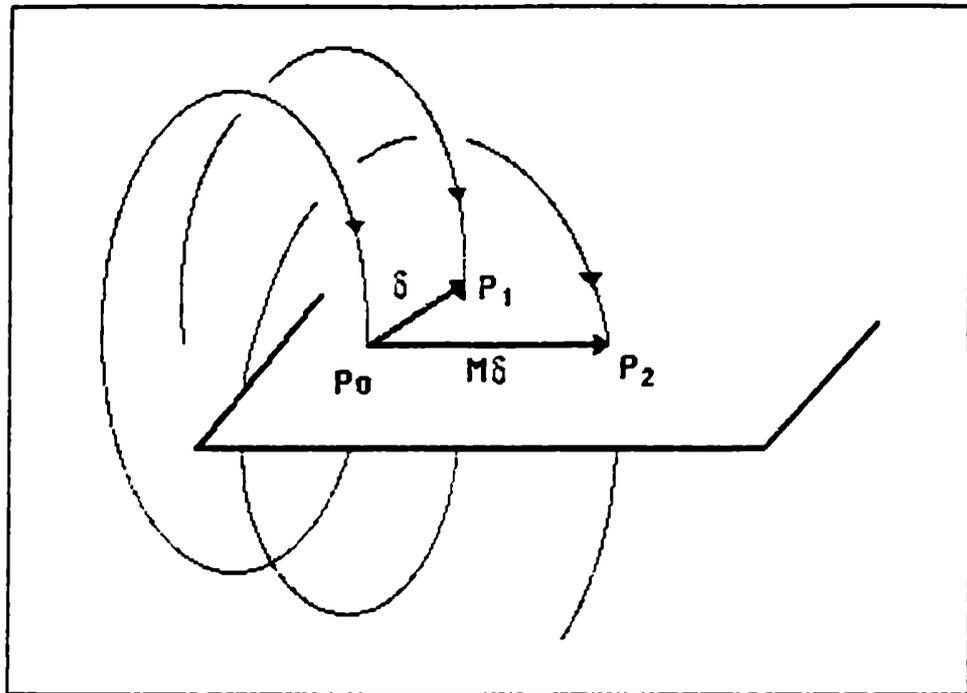


Fig 1.2

Las órbitas periódicas corresponden a puntos fijos de las sucesivas iteraciones del mapa. El intervalo de tiempo entre dos puntos sucesivos de la sección de Poincaré no es constante excepto para sistemas dinámicos forzados con una fuerza periódica de período  $T$ . En este caso el intervalo de tiempo entre secciones sucesivas de la trayectoria con el plano es el período  $T$  de la fuerza externa.

### 1.2. Clasificación de las órbitas

Las órbitas en un espacio de fases del sistema dinámico pueden ser estables o inestables ante pequeñas perturbaciones.

Consideremos, como se ve en la figura 1.2, el punto  $P_0$  que es la intersección de la órbita periódica con el plano de Poincaré y un punto  $P_1$  arbitrariamente cerca a él. Comenzando con la condición inicial  $P_1$ , dejamos a la trayectoria evolucionar bajo la acción del flujo. Si la magnitud del vector  $\delta$  que conecta  $P_0$  y  $P_1$  crece con el tiempo, significa que las condiciones iniciales cercanas a la órbita son repelidas bajo la acción del flujo. Es decir la órbita es *inestable*. Inversamente si  $\delta$  disminuye, la órbita es *estable*. La estabilidad global de la órbitas está dada por la teoría de Floquet (ver apéndice 2 ).

Si linealizamos el flujo alrededor de la órbita periódica  $x_0$ , y la perturbamos a una nueva condición inicial  $x_0 + \delta$ , el punto perturbado será transformado por el flujo linealizado y después de un periodo  $T$  de la fuerza externa, estará en  $x_0 + M\delta$  donde  $M$  es una matriz de  $3 \times 3$ . La estabilidad de la órbita periódica se analiza estudiando los autovalores de la matriz  $M$ . La matriz es una matriz de Floquet y sus autovalores son los multiplicadores característicos de Floquet.  $M$  tiene siempre un autovalor igual a uno, que corresponde al desplazamiento a lo largo de la órbita. El significado de esto es directo. Una condición inicial sobre la órbita viajara a lo largo de la órbita y volverá al punto de partida sin sufrir ninguna desviación; lo que no da ninguna información acerca de la estabilidad de las órbitas. Para esto necesitamos considerar las direcciones perpendiculares a la trayectoria.

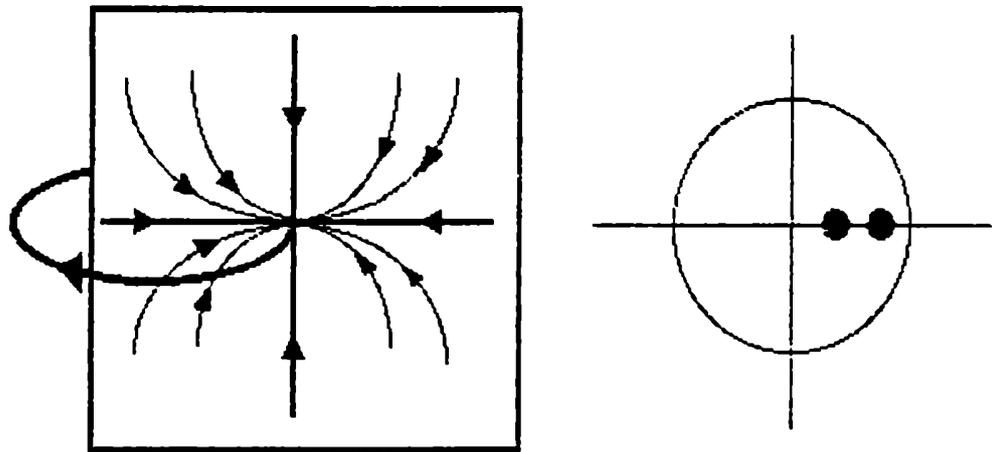
Los autovalores de  $M$  dependen de la forma de la órbita pero son independientes de la condición inicial  $x_0$ . Se ve intuitivamente que si todos los autovalores de  $M$  caen dentro de un círculo unidad en el plano complejo de los autovalores, entonces la órbita es estable.

En este caso, la magnitud de todas las componentes del desplazamiento  $\delta$  perpendiculares a la órbita se reducen después de cada período y la solución periódica es estable linealmente.

Si por ejemplo, al menos uno de los autovalores de  $\mathbf{M}$  está fuera del círculo unidad, el desplazamiento crece continuamente al menos en una dirección. Entonces la trayectoria se mueve hacia afuera de la órbita periódica, es decir que ésta es inestable.

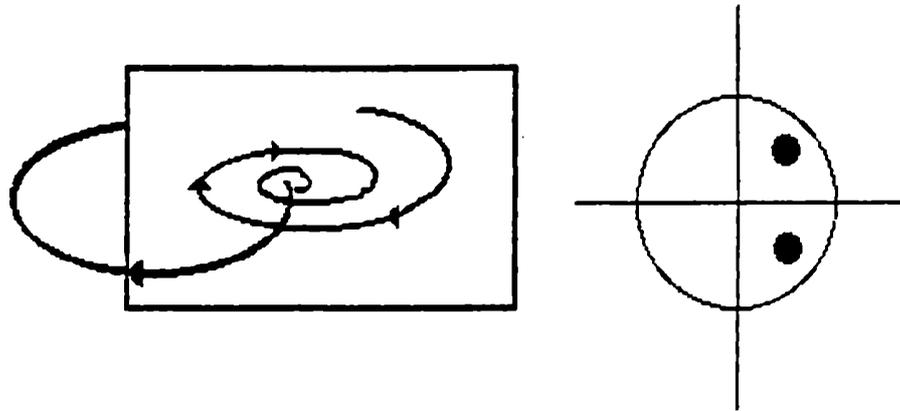
Hay diferentes tipos de órbitas periódicas estables e inestables.

En la figura se muestra la sección de Poincaré de un **nodo estable** donde también se indican los multiplicadores de Floquet que para este caso son menores que uno.



Nodo estable

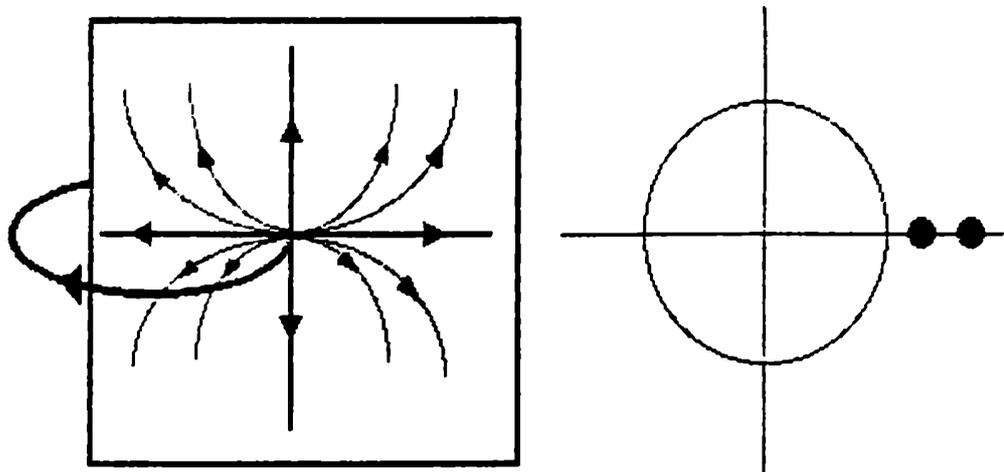
Mientras que en un **foco estable**, los multiplicadores son complejos conjugados y módulo menor que uno



Foco estable

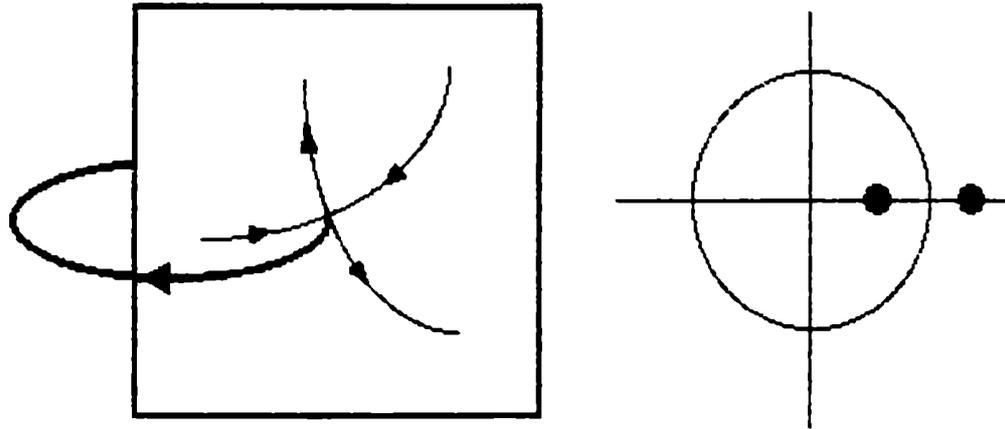
Las flechas de estos gráficos indican el sentido en que las iteraciones sucesivas se transforman.

Las órbitas inestables son: **nodo inestable** (todos los autovalores son reales y mayores que uno).



Nodo inestable

y **punto de ensilladura** (ambos autovalores son reales, uno mayor que uno y otro menor que uno)



Punto de ensilladura

Las órbitas del punto de ensilladura son particularmente interesantes. Si linealizamos alrededor de estas órbitas obtenemos dos autoespacios, uno inestable  $E^{in}$  correspondiente al autovalor mayor que uno y otro estable  $E^{es}$ , correspondiente al autovalor menor que uno.

El *Teorema de la Variedad Estable* (Guckenheimer y Holmes, 1984) garantiza la existencia en situaciones no lineales, de variedades locales estables e inestables en la mismas direcciones que los autoespacios  $E^{in}$  y  $E^{es}$  del sistema linealizado y tangentes a ellos en el punto fijo de ensilladura.

Una variedad localmente estable  $W_{loc}^{es}(x_0)$  es el conjunto de puntos que converge asintóticamente a la ensilladura en  $x_0$ .

$$W_{loc}^{es}(x_0) = \left\{ x \in U \mid \sum^n(x) \rightarrow x_0 \text{ para } n \rightarrow \infty \text{ y } \sum^n(x) \in U \forall n > 0 \right\}$$

donde  $U$  es un pequeño entorno del punto fijo de ensilladura en  $x_0$ .

Similarmente una variedad localmente inestable se define como el conjunto de puntos que convergen asintóticamente al punto de ensilladura en las iteraciones inversas

$$W_{loc}^{in}(x_0) = \left\{ x \in U \mid \sum^n(x) \rightarrow x_0 \text{ para } n \rightarrow -\infty \text{ y } \sum^n(x) \in U \forall n < 0 \right\}$$

A medida que cambia el parametro de control la estabilidad de las órbitas periódicas pueden cambiar. Pares de órbitas estables e inestables pueden colisionar y desaparecer, o una órbita puede llegar a ser inestable en la creación de la órbita de periodo doble. Estos son algunos ejemplos de procesos que pueden cambiar el comportamiento cualitativo del sistema dinámico.

### 1.2.2 Clasificación de las bifurcaciones

Una bifurcación implica la pérdida de la estabilidad lineal, lo que significa que uno o más autovalores tienen parte real nula. En estas condiciones hay una reducción de la dimensionalidad. El sistema reducido puede llevarse a una forma normal, lo que significa eliminar mediante un cambio de variable los términos irrelevantes para la descripción dinámica.

Debemos distinguir entre bifurcaciones locales y globales. Las primeras implican un cambio en la topología del flujo en las cercanías de la solución estacionaria (punto singular) o periódica (ciclo límite)

Las bifurcaciones globales involucran el comportamiento en todo el espacio de fases o en regiones que contienen más de una solución singular. De tal manera variedades estables e inestables correspondientes a distintas singularidades pueden conectarse entre si dando lugar a cambios en la dinámica del sistema.

### 1.2.2.1 Bifurcaciones globales de puntos de equilibrio

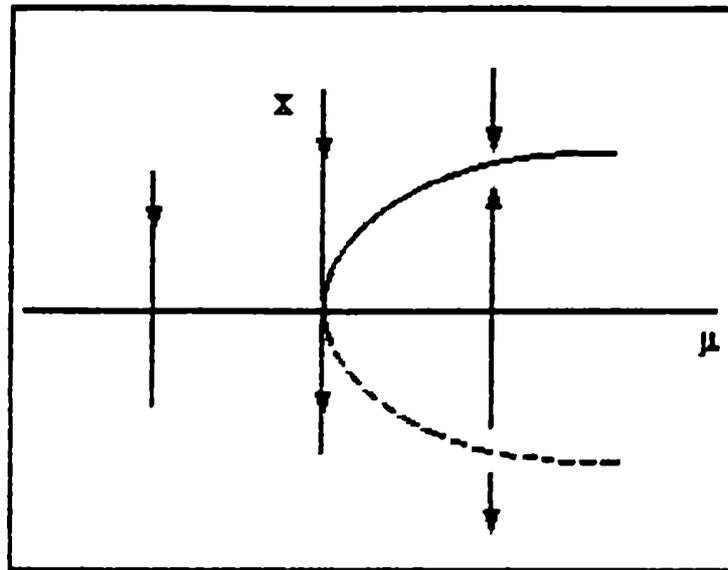
Se clasificarán las bifurcaciones en términos de las formas normales. Por forma normal de una bifurcación entendemos al campo vectorial más simple solución de una ecuación diferencial que caracteriza la dinámica de la bifurcación en las cercanías del punto crítico bajo una perturbación arbitraria. Las más importantes son:

#### a) Nudo-silla.

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

A medida que aumenta el parámetro  $\mu$  un nodo y un punto de ensilladura se acercan hasta que para un valor crítico  $\mu_c$  se superponen.

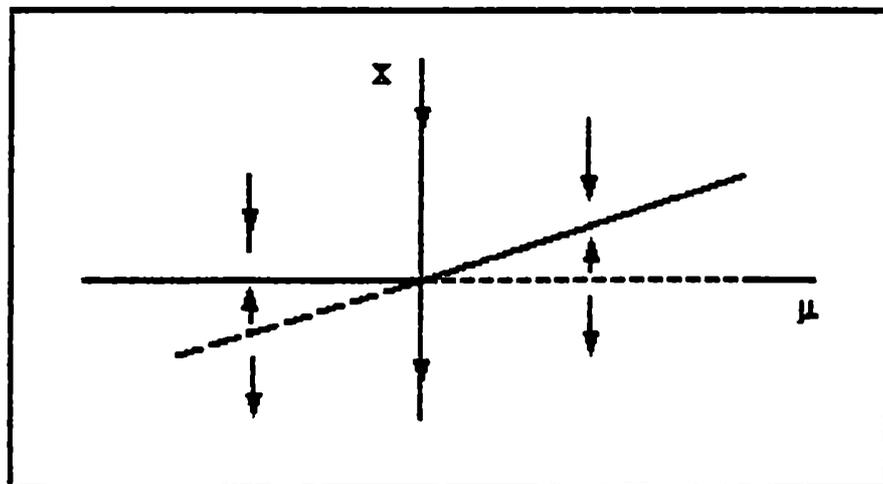
Para valores superiores del valor crítico  $\mu_c$  desaparecen las dos singularidades sin que aparezca una nueva. El diagrama de bifurcación puede verse en la siguiente figura. Las flechas indican la dirección del flujo, la línea llena corresponde a la variedad estable, mientras que la punteada a la inestable



### b) Transcrítica

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

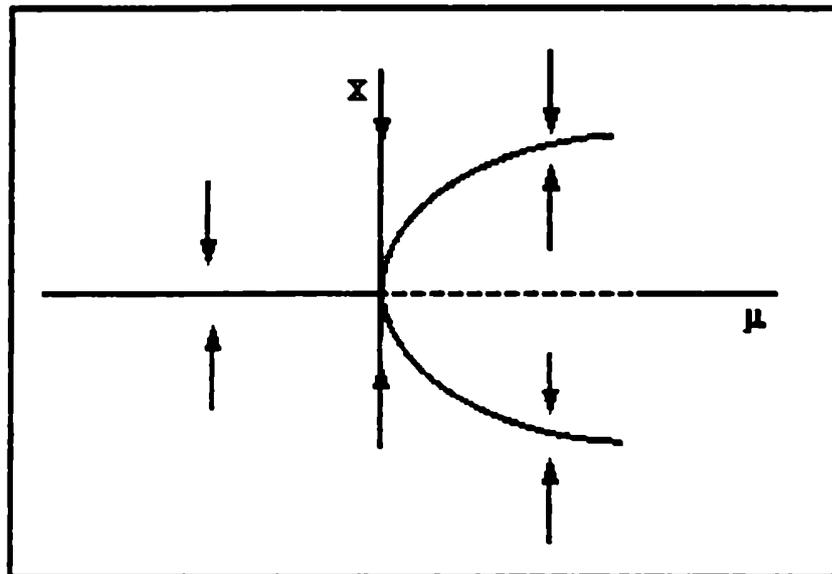
Pasado el valor crítico  $\mu_c$ , dos puntos singulares (uno estable y otro inestable) intercambian su estabilidad.



**c) Horquilla (Pitchfork)**

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Un nodo estable pierde su estabilidad para el valor crítico generándose dos nuevos nodos estables.



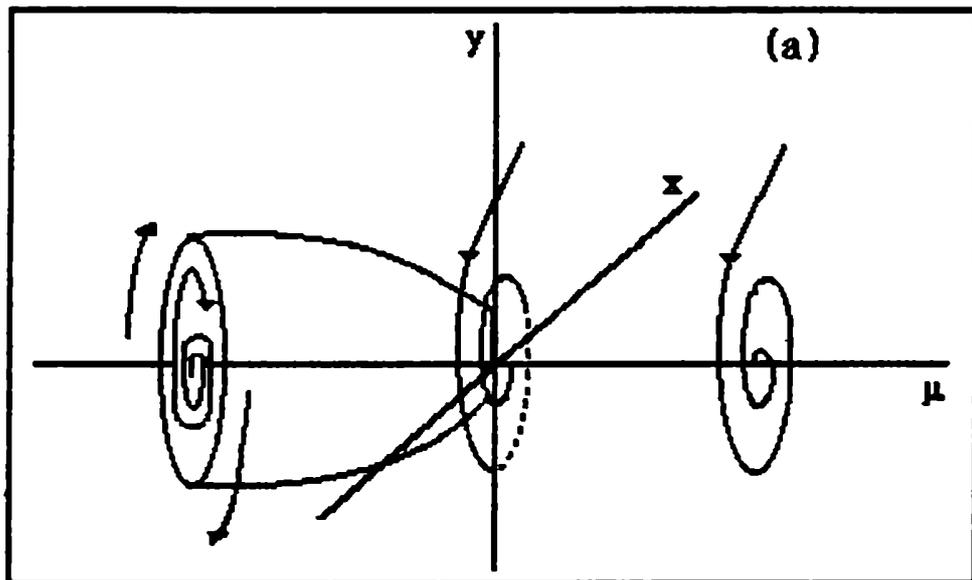
**d) Hopf:** La forma normal es:

$$\dot{x} = -y + x (\mu - (x^2 + y^2))$$

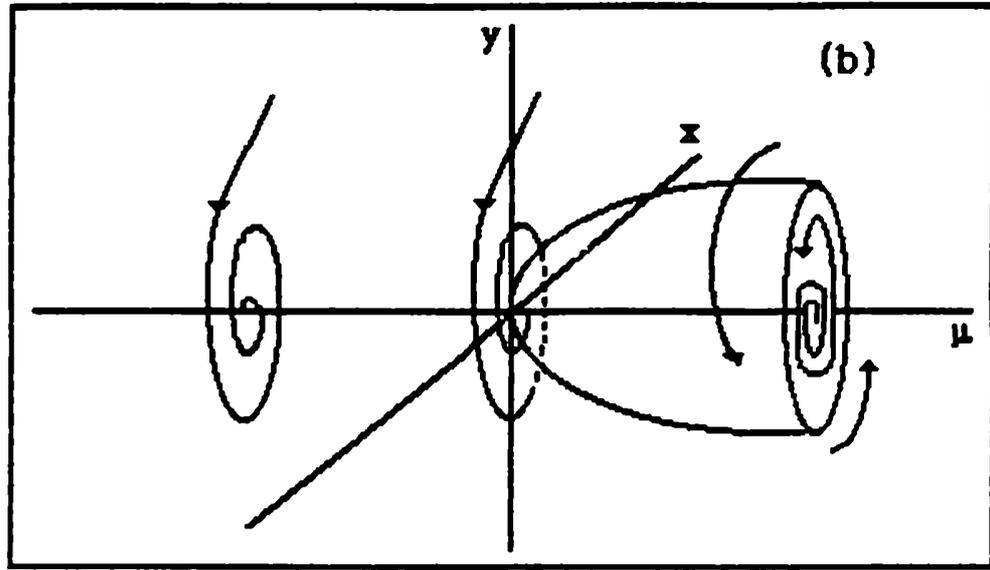
$$\dot{y} = x + y (\mu - (x^2 + y^2))$$

Las podemos clasificar en:

**i) Bifurcación de Hopf subcrítica.** Un ciclo límite inestable decrece en amplitud hasta confundirse con un foco estable dando lugar a un foco inestable (figura a ). Cuando el parámetro  $\mu < 0$  la solución va como una espiral hacia el origen, mientras que ésta se aleja en forma de espiral del origen cuando  $\mu > 0$  y si  $\mu = 0$  todas las soluciones son periódicas



**ii) Bifurcación de Hopf supercrítica:** Un ciclo límite estable se genera con la pérdida simultánea de la estabilidad de un foco estable, ( figura b).



### 1.2.2.2 Bifurcaciones locales a partir de órbitas periódicas

Las bifurcaciones de flujos continuos a partir de órbitas periódicas se estudian como bifurcaciones locales (estabilidad lineal) de puntos fijos en el mapa de Poincare. Puntos fijos de este mapa corresponden a soluciones periódicas y las bifurcaciones de estos puntos fijos corresponden a bifurcaciones de órbitas periódicas.

La pérdida de la estabilidad lineal de un punto fijo se tiene cuando

$$|\lambda| = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 1$$

Se presentan los siguientes casos:

$\lambda = 1$  conduce a bifurcaciones análogas a las discutidas en la sección anterior.

**i) Nodo-silla:** dos órbitas (una estable y otra inestable) colisionan aniquilándose en el tratamiento local. Si se tienen en cuenta las conexiones globales, la bifurcación nodo - silla puede dar lugar a órbitas periódicas a partir de puntos fijos. En la figura a se muestra el diagrama de bifurcaciones en función del parámetro de control y en la figura b el aspecto antes y después de la bifurcación en el espacio de fases.

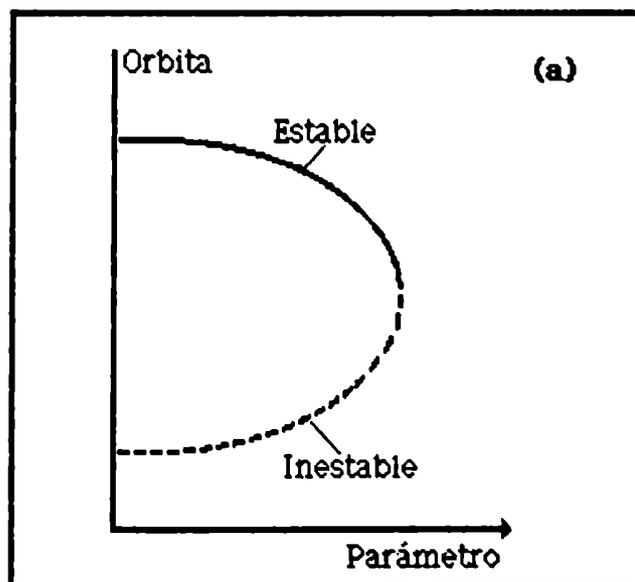


Diagrama de la bifurcación para nodo - silla

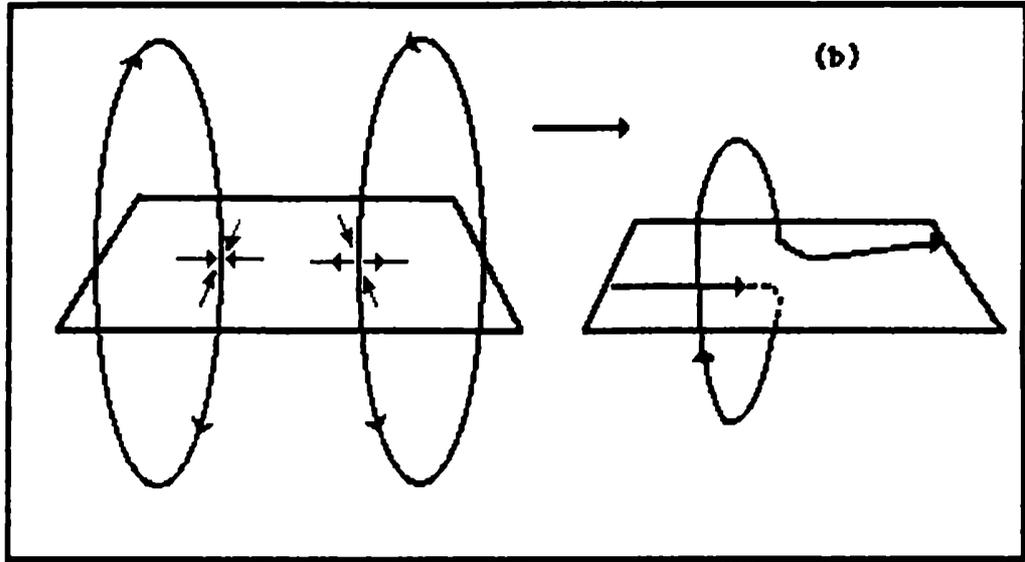


Diagrama para el flujo antes y después de la bifurcación

ii) **Transcritica.** Se intercambia la estabilidad de dos órbitas periódicas (figuras a y b)

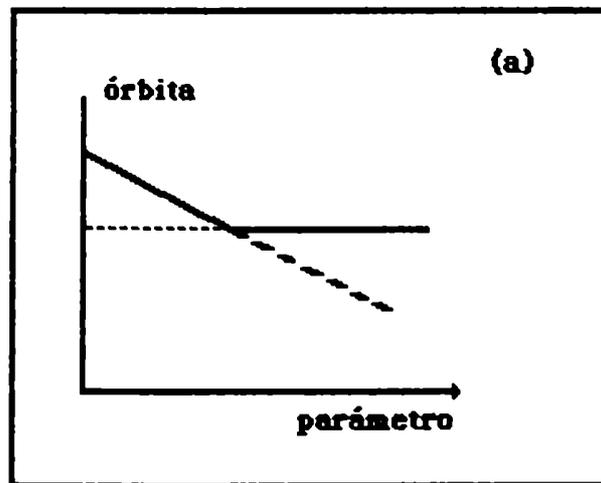


Diagrama de la bifurcación transcritica

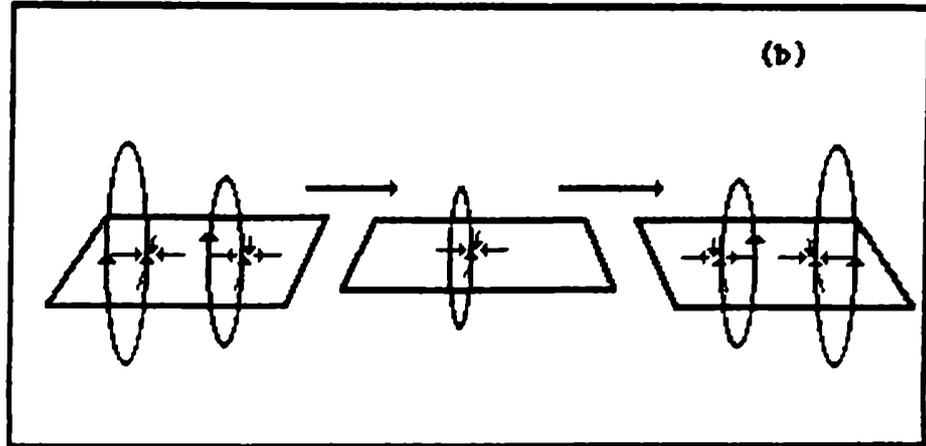


Diagrama del flujo antes y después de la bifurcación

iii) **Horquilla o nodo-silla simétrica.** Dos órbitas estables y una inestable colisiona dando lugar a una estable. Los diagramas correspondientes se muestran en las figuras a y b.

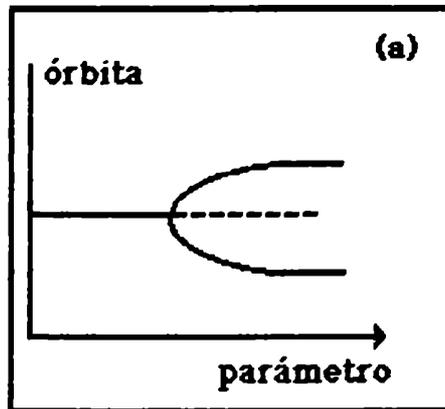


Diagrama de la bifurcación horquilla

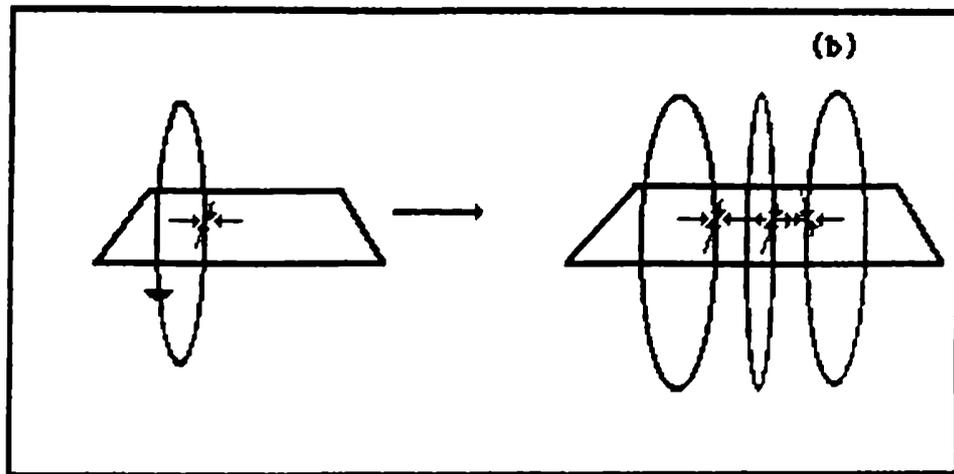


Diagrama del flujo antes y después de la bifurcación

Si  $\lambda = -1$  Conduce a la duplicación de período. Una órbita de período  $T_0$  pierde estabilidad generándose una órbita de período  $2T_0$  (figuras a y b).

Este proceso puede suceder muchas veces dando lugar a una cascada de bifurcaciones por duplicación de período, que alcanza un punto de acumulación más allá del cual la órbita es caótica.

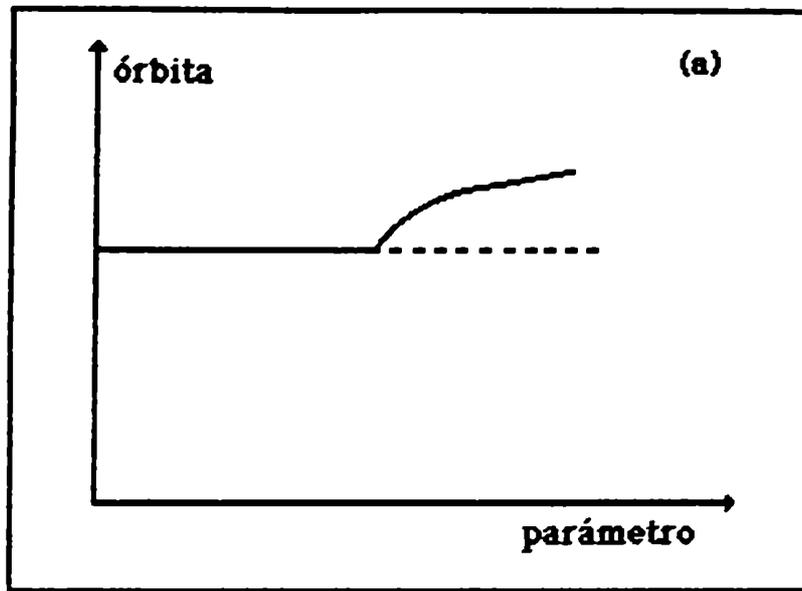


Diagrama de la bifurcación

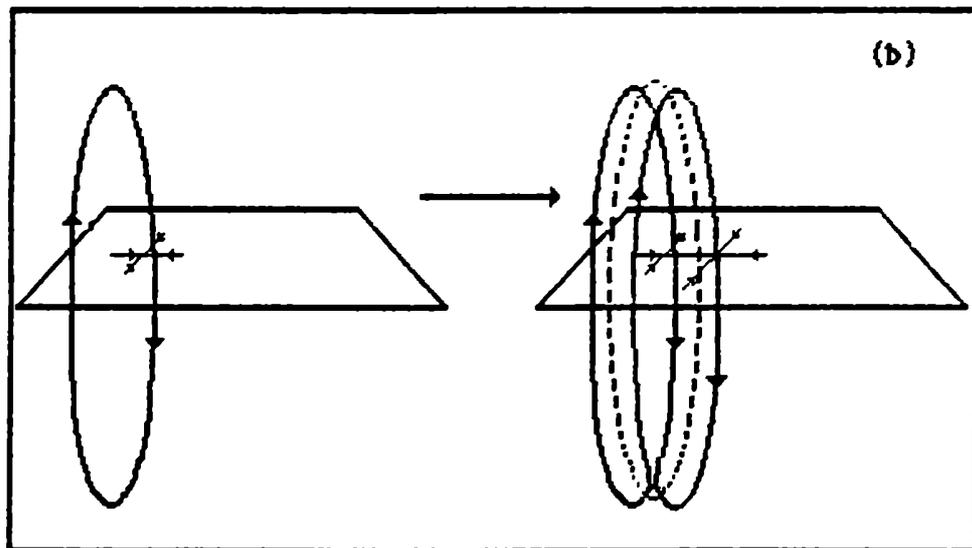


Diagrama cualitativo del flujo antes y después de la bifurcación

Para autovalores imaginarios (en espacios donde la dimensionalidad del mapa es mayor que 1). Si  $\lambda^3 = -1$  ó  $\lambda^4 = -1$  se tiene las llamadas resonancias fuertes que se deben tratar de manera especial (Arnold 1977). De otra manera te-

nemos una bifurcación análoga a la de Hopf ( llamada segunda bifurcación de Hopf ) que da lugar a la aparición de una nueva frecuencia. El movimiento tiene lugar sobre un toro, el que se cubre completamente por la trayectoria si las relaciones de frecuencias son irracionales ( movimiento cuasiperiódico) figuras (a y b)

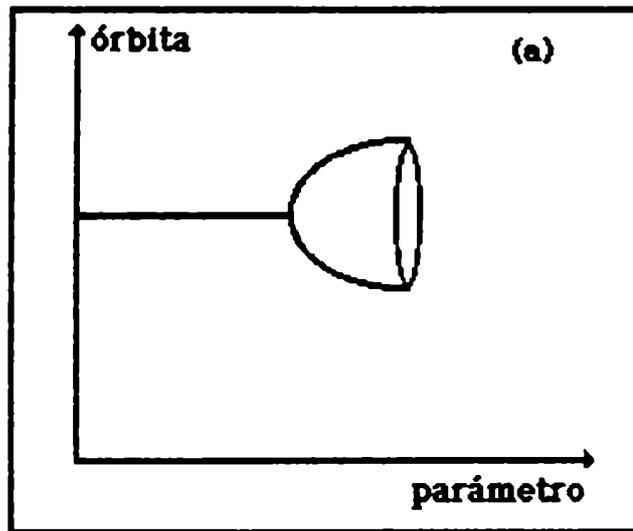


Diagrama de la segunda bifurcación de Hopf

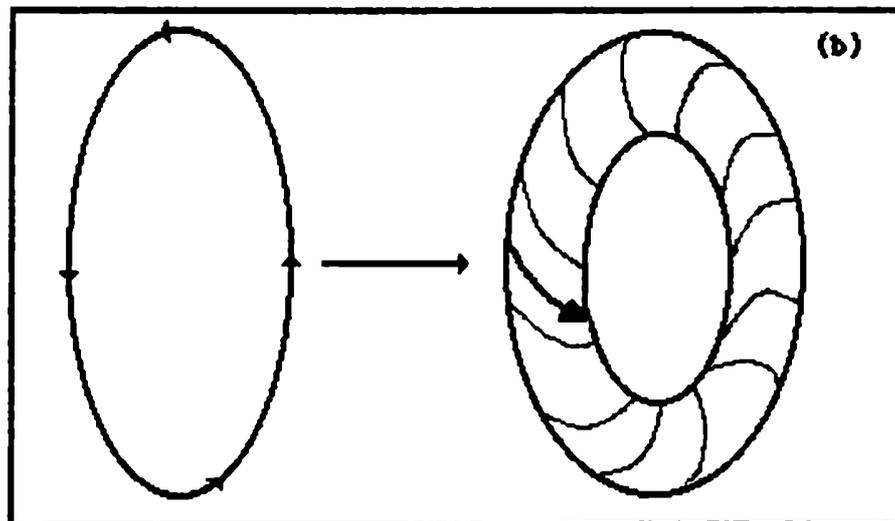


Diagrama cualitativo del flujo antes y después de la bifurcación. Las flechas indican la dirección del flujo

Para un análisis más detallado sobre el tratamiento de la teoría de bifurcaciones nos remitimos a Guckenheimer y Holmes (1984).

### 1.2.3 Estabilidad de las soluciones

#### 1.2.3.3 Estabilidad local

El análisis de la estabilidad local de puntos singulares y ciclos límites se efectúa perturbando el sistema alrededor de una de las soluciones y resolviendo la ecuación diferencial para la evolución temporal de las perturbaciones después de haber linealizado la ecuación diferencial original.

Se pueden establecer criterios locales de estabilidad (Lyapunov 1949), pues debemos permanecer cerca de la solución no perturbada para que la aproximación lineal sea válida. Siguiendo a Lyapunov estos criterios se pueden definir como:

*Estables* si las perturbaciones se mantienen acotadas cuando  $t \rightarrow \infty$ , se llaman marginalmente estables.

*Asintóticamente Estables* si la perturbación tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$

*Inestables* cuando no se cumple ninguna de las anteriores.

Para ciclos límites se define una estabilidad global que consiste en que puntos cercanos a la órbita cerrada se mantengan próximos a la misma aunque pueden alejarse entre sí. También pueden ser marginal o asintóticamente estables y es un requerimiento más débil ya que soluciones estables son necesariamente orbitalmente estables.

Estudiar la estabilidad para los puntos singulares conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. El problema entonces se reduce a la diagonalización de la matriz de los elementos constantes. Determinar los autovalores y autovectores correspondientes permite establecer la estabilidad y la dirección de las variedades correspondiente a cada punto singular

Los autovalores positivos y negativos corresponden a pendientes positivas y negativas respectivamente de las variedades estables e inestables asociadas al punto singular.

Recapitulando lo discutido en las secciones precedentes, se presentan seis casos:

- a)  $\lambda_{1,2}$  reales y positivos, nodo inestable
- b)  $\lambda_{1,2}$  reales y negativos, nodo estable
- c)  $\lambda_1$  real y positivo y  $\lambda_2$  real y negativo; punto de ensilladura
- d)  $\lambda_{1,2}$  complejos conjugados con parte real positiva; foco inestable
- e)  $\lambda_{1,2}$  complejos conjugados con parte real negativa; foco estable
- f) autovalores nulos o con parte real nula; el análisis lineal no decide

#### 1.2.3.4 Estabilidad global

Para la generalización a estabilidad global hacemos uso de la función auxiliar de Lyapunov. Resulta un método poderoso que puede extenderse a espacios más generales cuando se logra definir esta función.

Consideramos una función escalar  $V(\bar{x})$  que satisface:

1)  $V(\bar{x})$  es continua junto a sus derivadas primeras en cierta región  $D$  alrededor del origen

2)  $V(0)=0$

3)  $V(\bar{x})$  es definida positiva si excluimos el origen

y si además  $\dot{V}(\bar{x})$  es negativa ó 0 en  $D$ ,  $V(\bar{x})$  es una función de Lyapunov

### ***Teorema de Lyapunov***

Si existe en alguna vecindad del origen  $D$  una función de Lyapunov  $V(\bar{x})$  entonces el origen es estable. Si además  $-\dot{V}(\bar{x})$  es también definida positiva en  $D$ , entonces el origen es inestable.  $\dot{V}(\bar{x})$  se calcula a lo largo de una trayectoria

$$\dot{V}(\bar{x}) = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

### **1.2.3.5 Estabilidad Estructural**

Andronov (1966) postuló la idea de sistemas estructuralmente estables, que consiste en intentar clasificar los sistemas dinámicos que puedan servir como modelos de sistemas físicos reales.

Supuso que tales sistemas debían ser insensibles ante cambios infinitesimales de las funciones involucradas en su definición. Es decir, que no deben cambiar sus características cualitativas ante pequeñas perturbaciones.

La estabilidad estructural para flujos significa que las propiedades topológica de los mismos no cambian ante perturbaciones. Es importante destacar,

que si un sistema es estructuralmente estable, entonces todo sistema suficientemente cercano presenta el mismo comportamiento.

### 1.3.1 Espectro de Potencias

El espectro de potencias  $S(\omega)$  de una señal escalar  $u(t)$  está definido como el módulo del cuadrado de su amplitud Fourier por unidad de tiempo. Mide la cantidad de energía por unidad de tiempo (potencia) contenida en la señal como función de  $\omega$ .

También se suele definir  $S(\omega)$  como la transformada de Fourier de la función de correlación temporal  $\langle u(0), u(t) \rangle = \text{promedio sobre } \tau \text{ de } u(\tau), u(t+\tau)$ . Si las correlaciones de  $u$  decaen suficientemente rápido en el tiempo, las dos definiciones coinciden y se tiene:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T dt e^{i\omega t} u(t) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt' u(t') u(t+\tau') \quad (a)$$

Hay que notar que el límite superior de (a) tiene sentido solamente después de promediar sobre pequeños intervalos de  $\omega$ .

Sin este promediado la cantidad  $\frac{1}{T} \left| \int_0^T dt e^{i\omega t} u(t) \right|^2$  fluctúa considerablemente (es decir, es muy ruidoso).

El espectro de potencias indica si el sistema es periódico ó cuasiperiódico. Si es periódico con frecuencia  $\omega$ , tiene picos más o menos angostos en  $\omega$  y sus armónicas  $2\omega, 3\omega, \dots$ . En un sistema cuasiperiódico con frecuencias básicas  $\omega_1, \dots, \omega_k$  tiene picos en estas posiciones y también en todas las combinaciones lineales con coeficientes enteros. En un espectro de potencias experimental los picos no son tan agudos sino que tienen un ancho llamado *ancho experimental* ( $2\pi/T$ ) donde T es la longitud de la serie utilizada.

Sistemas que no sean cuasiperiódicos son habitualmente caóticos (pero por lo general el espectro de potencia no alcanza para elucidar el carácter caótico del sistema). Aunque el espectro de potencias puede contener picos, éstos son bastante anchos ( más allá del ancho experimental). Se presenta un fondo ruidoso conocido como espectro de banda ancha pero que **no** significa que el sistema sea infinitamente dimensional.

En general el espectro de potencias es muy bueno para la visualización de sistemas periódicos o cuasiperiódicos. Sin embargo para sistemas caóticos no tiene mucha utilidad ya que, (debido a que son los cuadrados de los valores absolutos) se pierde información de la fase, lo que es esencial en este tipo de sistemas. La dimensión del atractor ya no está relacionada con el número de frecuencias independientes en el espectro de potencias y el concepto de "número de modos" debe ser reemplazado por otros conceptos que se discutirán en el capítulo siguiente. Sin embargo las rutas al caos por bifurcación de período son fácilmente visualizables a través del espectro subarmónico de potencias.

La aplicación de estos conceptos se mostrarán en el ejemplo que se desarrollará en la sección ( 2.4.2).

### 1.3.2 Entropía

Parece natural extender al campo de los sistemas dinámicos el concepto de entropía introducido por Shannon en teoría de la información. Esto es así porque dadas dos condiciones iniciales cercanas (diferentes pero indistinguibles) dentro de una cierta precisión experimental evolucionará en estados distinguible después de un tiempo finito. Tal concepto determina la ganancia (o pérdida) de información que un observador adquiere al efectuar un experimento  $A$  que admite resultados  $A_j = 1, \dots, n$  con probabilidad  $p_j$ .

Tal ganancia de información está definida por:

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{j=1}^n p_j \ln p_j$$

En el Apéndice I definimos la medida de probabilidad  $\rho$ . Entonces la entropía de una partición  $\mathcal{S}$  respecto de la medida  $\rho$  resulta:

$$H(\mathcal{S}) = - \sum_{S \in \mathcal{S}} \rho(S) \ln \rho(S)$$

Se interpreta entonces a la entropía como la incerteza ligada a la partición sobre la ubicación de un punto distribuido en  $x$  según el estado  $\rho$  (por ubicación de un punto queremos decir en que conjunto de  $\mathcal{S}$  está).

La exactitud limitada en la observación nos obliga a considerar particiones del espacio de fases y referir la dinámica a ellas. Es decir que, fijando una partición  $\mathcal{S}$ , conocer la posición  $T^n(x)$  (el elemento de  $\mathcal{S}$  en que se encuentra) es conocer la posición de  $x$  según la partición  $T^{-n}\mathcal{S}$ .

La entropía de un sistema dinámico  $T$  referida a la partición  $\mathcal{S}$  y escribiendo para abreviar el conjunto de todas las particiones como:

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{S} = T^{-1}\mathcal{S} \vee T^{-2}\mathcal{S} \vee \dots \vee T^{-i}\mathcal{S}$$

resulta:

$$h_p(T, \mathcal{S}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(T^{-n}\mathcal{S} \mid \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{S})$$

donde  $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{S} = T^{-1}\mathcal{S} \vee T^{-2}\mathcal{S} \vee \dots \vee T^{-i}\mathcal{S}$  se refiere para abreviar a lo que puede interpretarse como la incerteza promedio de las  $n$  primeras iteraciones de  $T$ . En consecuencia definimos la entropía de la transformación  $T$  como.

$$h_p(T) = \sup_{\mathcal{S}} h_p(T, \mathcal{S})$$

Esta es la entropía *métrica o entropía de Kolmogorov*.

Una definición alternativa de la entropía está relacionada con los exponentes de Lyapunov ( que se discutirán en el capítulo siguiente), pero solamente es válida para aquellos casos en los que el espacio de fases es un espacio métrico, es decir que está dotado de una distancia  $d$ .

**Teorema** ( Ruelle, 1978). Sea  $f$  un mapa diferenciable de una variedad de dimensión finita y  $\rho$  una medida ergódica con soporte compacto. Entonces:

$$h(\rho) \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

Este resultado se conjetura que es válido para dimensión infinita aunque aún no se ha demostrado rigurosamente.

La entropía local se puede interpretar como la velocidad de crecimiento de un pequeño volumen en el espacio de las fases a lo largo de una órbita del sistema dinámico. Se podría entonces aceptar como definición de caos en un sistema dinámico, la presencia de entropía positiva. Lo que en numerosos casos significa sensibilidad a las condiciones iniciales, pero en el caso de sistemas disipativos, las medidas invariantes son algo artificiales y convendría más analizar los exponentes de Lyapunov.

### 1.4.3 Escenarios

El objetivo de esta sección es llegar a una descripción del comportamiento no transitorio del sistema dinámico clasificando sus atractores y el movimiento sobre ellos. En realidad, estamos interesados en describir sucintamente las diferentes secuencias de bifurcaciones que efectúa un sistema desde un régimen laminar u ordenado a otro turbulento o caótico. Si bien en principio cualquier secuencia de bifurcaciones es posible, hay algunas pocas que ocurren más frecuentemente en los sistemas dinámicos. Estas secuencias de bifurcaciones se denominan *escenarios* o *rutas al caos*.

Hay tres muy importantes que discutiremos brevemente pero es de esperar que otros escenarios relevantes puedan encontrarse en el futuro.

El análisis para el establecimiento de un escenario siempre toma la forma de *si* alguna cosa le sucede al atractor al variar el parámetro *entonces* es probable que otras consecuencias aparezcan. El término probable depende del

escenario en cuestión y en general no debe ser interpretado en términos de medida de probabilidad.

Un sistema dinámico puede tener varios atractores. Por lo tanto, varios escenarios podrían evolucionar en diferentes regiones del espacio de fases. En esto no hay ninguna contradicción puesto que la evolución de un sistema dinámico depende de su estado inicial.

#### **1.4.3.1 Escenario de Landau**

El primer intento de describir la turbulencia se debe a Landau (1959). En este escenario se presupone que al menos para un conjunto de problemas hay una secuencia de bifurcaciones supercríticas. Después de la primera bifurcación, el movimiento es generalmente periódico, después de la segunda es generalmente cuasiperiódico a dos frecuencias, y así sucesivamente.

Sin embargo este escenario tiene una deficiencia puntualizada por Ruelle y Takens. Existe un teorema de Peixoto (1963) en el que se afirma que la existencia de órbitas cuasiperiódicas no es una propiedad genérica de sistemas dinámicos.

Desde el punto de vista físico, esta afirmación significa que si un determinado sistema dinámico posee órbitas cuasiperiódicas, otro sistema que se obtenga del anterior mediante una perturbación pequeña, no tendrá tales órbitas ( en su lugar Peixoto demostró que la propiedad genérica es la de poseer únicamente puntos fijos u órbitas periódicas como soluciones asintóticas).

### 1.4.3.2 Escenario Ruelle - Takens - Newhouse

Como alternativa, Newhouse y otros (1978), Ruelle y Takens, (1981) propusieron otro escenario.

Si un sistema evoluciona a través de tres bifurcaciones de Hopf, comenzando por una solución estacionaria y, a medida que el parámetro varía dando lugar a la existencia de un toro tridimensional, entonces es altamente probable que el sistema posea un atractor extraño, con sensibilidad a las condiciones iniciales después de la tercera bifurcación y que no es destruido por pequeñas perturbaciones sobre el mismo. Esta condición, que contrasta con la no genericidad de los movimientos cuasiperiódicos (teoría de Landau), parece ser uno de los requisitos mínimos para la aparición de la turbulencia.

Sin embargo, pueden aparecer propiedades no genéricas como consecuencia de consideraciones de simetría. Por ejemplo, la conservación de la energía no es una propiedad genérica de los sistemas dinámicos.

El espectro de potencias de tal sistema exhibirá dos y probablemente tres frecuencias básicas independientes, cuando la tercera frecuencia está por aparecer simultáneamente se observará un espectro de banda ancha si hay atractor extraño. Esto se interpreta como una evolución caótica del sistema. Experimentos como la formación de vórtices de Taylor entre dos cilindros rotantes o la convección de Rayleigh - Bernard pueden ser interpretados en este escenario. La adición de ruido externo no destruye este escenario, en realidad prácticamente no lo afecta, por ser genérico.

### **1.4.3.3. Escenario de Feigenbaum**

El sistema evoluciona por bifurcaciones horquilla a medida que cambia el parámetro. Es quizá el más difundido. Después de una cascada de bifurcaciones se espera más allá del punto de acumulación  $\mu_\infty$  una cascada inversa de periodos ruidosos, entonces esta cascada de bifurcaciones conducirá a un flujo turbulento..

En el espectro de potencias se observan bifurcaciones subarmónicas. En el punto de acumulación se observa comportamiento aperiódico pero no un espectro de banda ancha.

La duplicación de periodo se comprobó tanto experimentalmente como numéricamente y ocurre en muchos sistemas dinámicos ( mapa de Henon, sistema de Lorenz, osciladores forzados con fricción, etc.). Experimentos con helio líquido han confirmado las predicciones.

La adición de ruido provoca la desaparición de las periodicidades más altas.

#### 1.4.3.4. Escenario de Pomeau - Maneville

Este escenario es conocido como la transición a la turbulencia a través de la intermitencia ( Pomeau y Maneville, 1980) y está asociado a la bifurcación nodo - silla.

La mayor dificultad de este escenario es que no tiene precursores claros. Sin embargo, algunos indicios se pueden detectar, se incrementan los transitorios largos y estos pueden ser observados ( órbitas periódicas) antes que colisionen dos puntos fijos, luego aparece una cascada inversa de bifurcaciones horquilla y al final de esto una transición intermitente hacia la turbulencia.

Se observa, en otras palabras, un flujo laminar interrumpido por aperiodicidades que se van incrementando hacia la aparición del caos. La teoría predice que la duración promedio de los intervalos de *orden* disminuye según,  $|R - R_c|^{1/2}$ .

Han sido observadas en el sistema de Lorenz y en muchos sistemas físicos Maurer y Libchaber (1980 ), Bergé y otros (1980 ), Pomeau y otros (1981), González (1987).

Una peculiaridad de este escenario es que no hace predicciones sobre el espectro de potencias. En su lugar, las consecuencias cuantitativas de este modelo se pueden verificar en el *espacio real* ( terminología de transiciones de fase), es decir, en la evolución de las variables de estado del sistema.

En este escenario la adición de ruido externo tiene mucha influencia.

## **Capítulo 2: Caracterización de sistemas caóticos**

En este capítulo se analizarán los atractores caóticos desde el punto de vista de sus dimensiones características. En la sección 1 daremos una introducción donde se definirán las características básicas del cálculo dimensional. Mientras que en la sección 2 se definirán rigurosamente y se ejemplificarán las dimensiones de información, fractal y de correlación dando, además, algunos conceptos de entropía métrica. El cálculo de la dimensión de los atractores será tratado en la sección 3 conjuntamente con un análisis crítico de los algoritmos más usuales para el mismo. Los exponentes de Lyapunov los definiremos en la sección 4 y finalmente en la sección 5 se aplicará este formalismo a series temporales y en particular a un sistema altamente dimensional (tejido cardíaco)

## 2.1 Introducción

La invariancia de escala juega un rol fundamental en muchos fenómenos naturales y está a menudo relacionada con formas irregulares que no pueden ser descritas por la geometría diferencial. Como consecuencia apareció una nueva clase de objetos geométricos, los fractales.

La idea fundamental consiste en la caracterización de la estructura de escala de un objeto por medio de un índice, *la dimensión fractal*  $D_f$  que da una idea de la "forma" (topología) de un objeto. En realidad la dimensionalidad de los objetos puede ser definida de varias maneras. Se puede definir la dimensión topológica contando el número de direcciones independientes en la que es posible moverse alrededor de un determinado punto. Por otro lado, se suele definir la dimensión fractal como una medida de "capacidad" contando el número  $N(r)$  de hipercubos de lado  $r$  necesario para cubrir un objeto  $D_f$ -dimensional cuando  $r \rightarrow 0$ :

$$N(r) \propto r^{-D_f}$$

La dimensión fractal es un concepto puramente geométrica, sólo depende de la forma del objeto.

En general, se puede asignar a un objeto físico una medida de probabilidad  $d\mu$ . La medida  $d\mu$  está dada por la longitud de resolución, lo que permite definir una probabilidad llamada de "grano grueso":

$$p_i(r) = \int_{\Lambda_i} d\mu(\vec{r})$$

como la "masa" de un hipercubo  $\Lambda_i$  de arista  $r$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, N(r)$ .

La relación de escala está dada por la *dimensión de información* definida por Balatoni y Renyi (1956).

$$\sum p_i \ln(p_i) \equiv D_I \ln(r).$$

Se puede ver sencillamente que  $D_I \leq D_f$  donde la igualdad es válida para una distribución uniforme de probabilidad  $p_i = 1/N(r) \propto r^{-D_f}$  para cada celda  $\Lambda_i$ .  $D_I$  es un índice más interesante que  $D_f$ , puesto que tiene características dinámicas, mide la frecuencia de visita en cada celda del atractor.

Si definimos los momentos como:

$$\langle p_i(r)^q \rangle \equiv \sum_{i=1}^{N(r)} p_i(r)^{q+1} \propto r^{qd_{q-1}} \quad (2.1.1)$$

Las  $d_q$  son las dimensiones de Renyi las cuales generalizan la dimensión de información.

$D_I = d_1$  y la dimensión fractal corresponde a  $D_f = d_0$ . Si el fractal es homogéneo, uno puede extraer  $q$  del promedio en (2.1.1) y las dimensiones de Renyi son todas iguales a la dimensión fractal. Por el contrario si las  $d_q$  no son constantes, se puede hablar de escala anómala y a medida que el orden  $q$  varía, la cantidad  $d_q - D_f$  da una medida (algo grosera) de la inhomogeneidad de la distribución de probabilidad.

Tal comportamiento se encuentra en muchos sistemas y el primero en puntualizarlo fue Mandelbrot (1974) en turbulencia completamente desarrollada. Posteriormente Frish y Parisi, (1985), Benzi y otros, (1984) introdujeron el concepto de objeto multifractal en el mismo contexto considerando que los momentos de los índices de escala pueden ser relacionados a la escala de la distribución de probabilidad de las singularidades según Halsey y otros (1986) y Jensen y otros, (1985). También se puede aplicar al estudio de los momentos de observables genéricas  $A$  calculadas con resolución  $r$ . A pesar de su nombre, escala anó-

mala, esta es una situación muy común, más aún un mismo objeto puede ser multifractal con respecto a un observable y un fractal homogéneo con respecto a otro.

Hasta ahora se ha analizado la multifractalidad como la manifestación de fluctuaciones espaciales de los observables. Sin embargo, las características de escala temporal tienen gran importancia en la evolución caótica de sistemas dinámicos determinísticos. En estos casos generalmente se observa una fuerte variación temporal en el grado de caoticidad. Este fenómeno de intermitencia involucra una escala anómala con respecto a las " dilataciones temporales" si identificamos el parámetro  $\exp(-t)$  con el parámetro  $r$  usado para dilataciones espaciales. Una medida del grado de intermitencia, requiere la introducción de conjuntos infinitos de exponentes los cuales son análogos a las dimensiones de Renyi y pueden ser relacionados a una estructura multifractal por el sistema dinámico en un espacio de trayectorias

Por otra parte, las características espaciales de caos determinístico indican que los puntos generados por la evolución temporal cubren un conjunto extraño y complejo con estructura de autosimilaridad. Este atractor caótico es generalmente un objeto fractal en el espacio de fases (Mandelbrot, 1982).

## 2.2 Dimensiones de atractores

Aquí vamos a discutir atractores de sistemas disipativos pero se puede aplicar a señales caóticas genéricas, ya que, después de un transitorio, un sistema disipativo evoluciona en las proximidades de un conjunto atractor (como se discute en el apéndice 1, Eckmann y Ruelle, 1985).

El concepto de dimensión es relevante para la dinámica ya que provee una manera precisa de estimar el número  $n_f$  de variables independientes involucradas en la evolución.

Explícitamente discutiremos de manera breve, puntos fijos, ciclos límites y toros en un atractor de dimensión  $n_f$ .

Un ejemplo sencillo y trivial es el de un sistema dinámico con un punto fijo estable  $x_0$ , donde para tiempos suficientemente largos  $x(t) \rightarrow x_0$ . El atractor tiene dimensión cero es decir  $n_f = 0$ . Un ciclo límite, por otra parte es un conjunto unidimensional y  $n_f = 1$  puesto que  $x(t)$  evoluciona sobre una línea. Para un movimiento cuasiperiódico con  $n$  frecuencias inconmensuradas el atractor es un toro  $n$ -dimensional y  $n_f = n$ .

Como ejemplo calculamos a continuación la dimensión fractal para dos conjuntos simples:

### **Ejemplo 1:** *El intervalo unitario*

Se considera el cálculo de la dimensión para un intervalo real  $[0, 1]$ . Tomando  $r = 1/3^n$  como la partición del intervalo resulta  $N(r) = 3^n$ . Hallando el límite para  $n \rightarrow \infty$  resulta:

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 3^n} = 1$$

**Ejemplo 2:** *El conjunto de Cantor del tercio central*

Se remueve el tercio central de un intervalo unitario dejando los dos intervalos  $[0, 1/3]$ ,  $[2/3, 1]$ . Luego el siguiente el tercio central de cada uno de estos dos intervalos dejando los cuatro intervalos y así sucesivamente hasta infinito. El resultado es el llamado *conjunto de Cantor de tercio central*. Tomando nuevamente una cobertura de  $r = 1/3^n$  resulta  $N(r) = 2^n$  por lo cual;

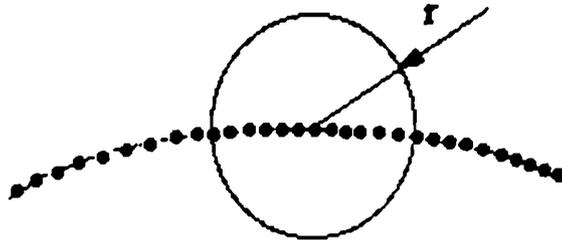
$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309.$$

Es decir el conjunto de Cantor es algo más que un punto (dimensión 0) pero algo menos que un intervalo (dimensión 1)

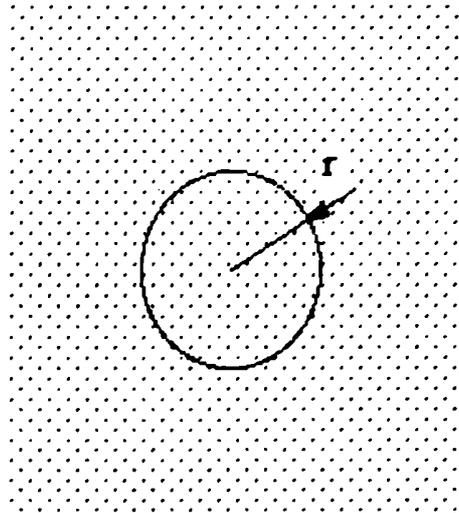
### 2.2.1 Visualización del cálculo de la dimensión fractal de un conjunto de puntos

Desde un punto cualquiera del conjunto, se traza un círculo (una esfera o una hiperesfera) de radio  $r$ . Como se discutió anteriormente  $N(r)$  es el número de puntos en el interior del círculo en función del radio  $r$ .

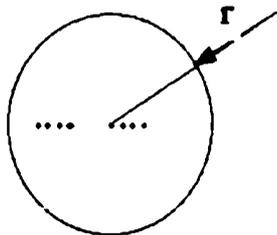
En el caso de una línea (dimensión 1):  $N(r) \propto r^1$ .



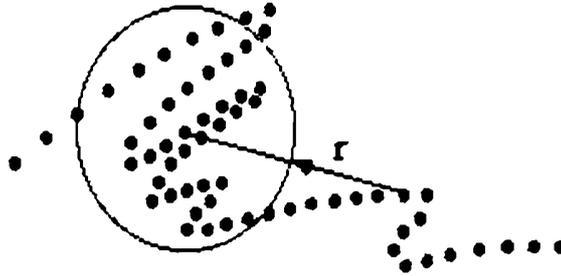
La siguiente figura representa un conjunto de puntos distribuidos en una superficie (dimensión 2), en consecuencia  $N(r) \propto r^2$ .



Si tenemos un conjunto de Cantor  $N(r) \propto r^{0.63\dots}$ .



Mientras que en el caso general  $N(r) \propto r^d$ .



Que significa en este caso el número efectivo de grados de libertad ( $n_f$ )?. La dimensión fractal  $D_f$  del atractor da una primera estimación de  $n_f$  ya que se aproxima al entero superior más cercano.

Existe una diferencia entre la llamada dimensión fractal y la de Hausdorff  $D_h$  ya que esta última involucra la evaluación del extremo entre particiones no uniformes diferentes en hipercubos de longitud del orden de  $r$ . En realidad  $D_h \leq D_f$  aunque para los casos típicos la igualdad se mantiene.

En lo que sigue discutiremos los distintos procedimientos para el cálculo de  $D_f$ .

### 2.2.2 Algoritmos para el cálculo de $D_f$

Se supone que el sistema dinámico es ergódico y **mixing** y que no se pueden extraer las propiedades estadísticas por el promedio temporal de una sola variable.

Siguiendo la definición de  $D_f$ ,  $N(r) \propto r^{-D_f}$  la manera más directa de calcular  $D_f$  es por el método de "box counting" (Russel y otros 1980). Se genera una serie  $x_i = x(i)$  con  $i = 1, 2, \dots, M \gg 1$  y se divide la región en donde el movimiento se desarrolla en hipercubos de lado  $r$ .  $N(r)$  es el número de hipercubos  $f$ -dimensionales de lado  $r$  necesarios para cubrir el atractor (tales que al menos haya un punto  $x_i$ , en cada cubo), en el límite  $M \rightarrow \infty$ :

$$N(r) \propto r^{-D_f} \quad \text{para } r \rightarrow 0$$

Con esta definición,  $D_f$  es en general la dimensión (topológica) del atractor. El algoritmo de "box counting" es prácticamente imposible de aplicar cuando  $f \geq 3$ , puesto que consume mucha memoria. Por lo tanto se han desarrollado otros métodos alternativos para estimar la dimensión fractal de los atractores caóticos.

Grassberger y Procaccia (1983a) han definido la *dimensión de correlación* considerando la escala de la integral de correlación:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \theta(r - |x_i(t) - x_j(t)|) \quad (2.2.1)$$

donde  $\theta$ , es la función de Heaviside.  $C(r)$  es el porcentaje de los pares  $(x_i, x_j)$  cuya distancia  $|x_i - x_j| \leq r$  y en el límite  $r \rightarrow 0$  se tiene que  $C(r)$  se comporta como  $C(r) \sim r^\nu$

Si cada caja tiene la misma densidad de puntos,  $\nu$  es igual a  $D_f$ . Dicho de otra manera si el atractor es uniforme entonces la dimensión de correlación es igual a la fractal. Sin embargo los atractores caóticos típicos son fractales inhomogéneos, entonces se tiene  $\nu \leq D_f$ .

$\nu$  es una magnitud más relevante que  $D_f$  ya que está relacionada con la probabilidad de distribución sobre el atractor (la llamada medida "natural" o "física", ver Apéndice 1) mientras que  $D_f$  no puede tomar en cuenta las eventuales inhomoge-

neidades en la frecuencia de visita. La dimensión de correlación  $\nu$  mide de hecho las propiedades de escala de la densidad promedio de puntos aunque no da información sobre la densidad de las fluctuaciones.

Se define el número  $n_i(r)$  de puntos en una esfera  $f$ -dimensional de radio  $r$  centrada en  $x_i$ :

$$n_i(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} (1/(M-1)) \sum_{i,j} e^{-\nu(r - |\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)|)}$$

para escribir la integral de correlación como el promedio de puntos en la esfera:

$$C(r) = \langle n(r) \rangle$$

donde, resulta por ergodicidad que:

$$\langle n \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} M^{-1} \sum_{i=1}^M n(\bar{x}_i)$$

Por otro lado, las fluctuaciones de  $n_i$  están reguladas por la distribución de probabilidad la cual puede ser reconstruida por el conocimiento de los momentos  $\langle n(r)^q \rangle$  (Paladin y Vulpiani 1984).

Se define entonces, un conjunto completo de exponentes de escala generalizados.

$$\langle n(r)^q \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} (1/M) \sum n_i(r)^q \propto r^{-\phi(q)} \quad (2.2.2)$$

donde  $\phi(1) = \nu$ . En un fractal homogéneo  $\phi(q) = D_f \cdot q$  y las desviaciones del comportamiento lineal son una medida del grado de inhomogeneidad. En la siguiente figura se muestra  $\phi(q)$  vs.  $q$  calculado para el mapa de Henon (Henon, 1976)

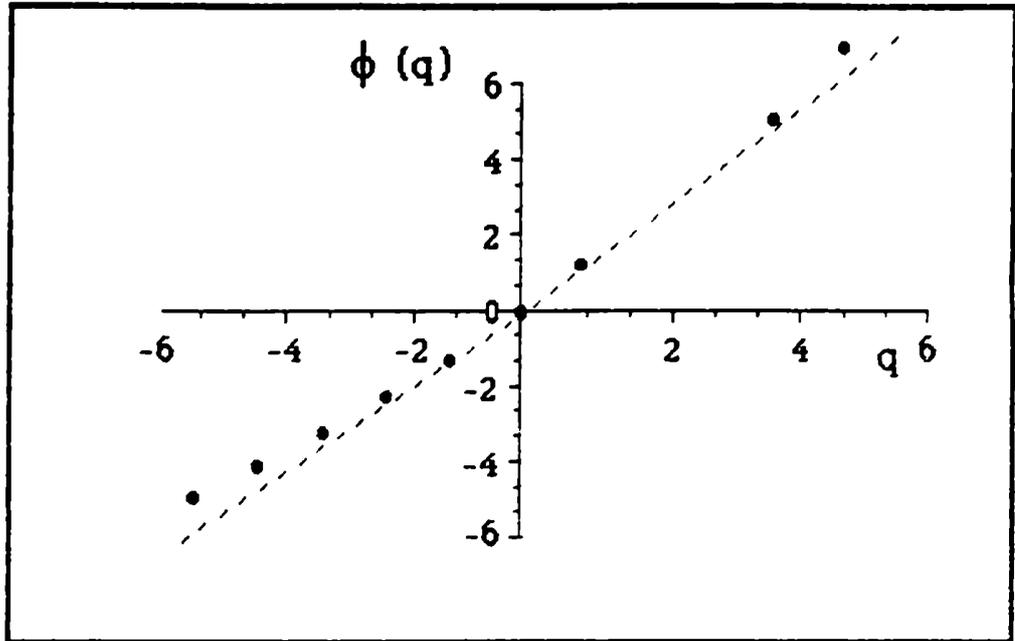


Gráfico  $\phi(q)$  vs.  $q$  para el atractor de Hénon.  $a = 1.4$ ,  $b = 0.2$

Las dimensiones de Renyi pueden ser calculadas como sigue:

Si consideramos una partición uniforme del espacio de fases en cajas de tamaño  $r$ , la probabilidad  $p_k(r)$  es aquella en que un punto  $x_i$  cae en la caja  $k$ -ésima.

En este caso, los momentos de  $p_k$  pueden estimarse sumando sobre las cajas

$$\langle p(r)^q \rangle = \sum_{k=1}^{N(r)} p_k(r)^{q+1} \propto r^{-qd_{q+1}} \quad (2.2.3)$$

Los exponentes  $d_q$  son las llamadas dimensiones de Renyi, y resulta:

$$\frac{\Phi(q)}{q} = d_{q+1} \quad (2.2.4)$$

Por ergodicidad  $n_i(r) \sim p_k(r)$  si  $x^i$  pertenece a la caja  $k$ -ésima, es lo mismo considerar un "ensemble" promedio (pesado sobre las cajas) o un promedio "temporal" (sumatoria sobre la evolución temporal).

La dimensión fractal se obtiene para  $q \rightarrow -1$  a partir de la relación (2.2.4)

$$D_f = d_0 = -\phi(-1)$$

y la dimensión de correlación, corresponde para  $q = 1$

$$\nu = d_2 = \phi(1)$$

Como  $\phi(q)$  es una función convexa de  $q$  por un teorema general de la teoría de probabilidad (Feller, 1971),  $d_q$  consecuentemente decrece a medida que  $q$  aumenta.

El cálculo de las dimensiones de Renyi, debe llevarse a cabo siguiendo la definición dada por la ecuación (2.2.2) en lugar de la correspondiente (2.2.3).

Es bastante sencillo generalizar el método de Grassberger y Procaccia con el de los cálculos de los momentos  $n_i(r)$ . Este procedimiento consume el mismo tiempo de CPU que el cálculo de la dimensión de correlación  $\nu$  dado por la ecuación (2.2.1).

Hentschel y Procaccia (1983) introdujeron un conjunto infinito de dimensiones definiendo:

$$C_n(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} (\text{número de } n\text{-uplas de puntos } (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \text{ cuyas distancias } |x_{i_\alpha} - x_{i_\beta}| \text{ sean menores que } r \text{ para todo } i_\alpha, i_\beta) \quad (2.2.5)$$

y se debe comportar como:

$$C_n(r) \propto r^{v_n}$$

siendo  $v_2 = v$ . Hay que destacar que el cálculo directo de  $v_n$  siguiendo la definición (2.2.5) requiere un mayor tiempo de CPU pues éste es aumentado por  $M^n$ . Sin embargo, se obtiene un espectro completo de dimensiones:

$$v_n = (n - 1) d_n \quad \text{con } n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.2.6)$$

La relación (2.2.6) se obtiene por el hecho que en la  $i$ -ésima caja la distribución es uniforme, lo que implica:

$$C_n^i(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} (\text{número de } n\text{-uplas de puntos } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ contenida en la } i\text{-ésima caja } |x_{i_\alpha} - x_{i_\beta}| < r \text{ para todo } i_\alpha, i_\beta) \quad (2.2.7)$$

por lo que resulta:

$$C_n^i(r) \propto p_n(r)^n M^n \quad (2.2.8)$$

La expresión (2.2.6) se obtiene a partir de (2.2.2), (2.2.5) y (2.2.7) pues:

$$C_n(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C_n^i(r)$$

### 2.3 Exponentes de Lyapunov

Comenzaremos con el caso de los mapas unidimensionales  $x_{n+1} = f(x_n)$

El exponente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  se define como:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|$$

donde  $f^N$  significa el mapa  $N$  veces iterado: o sea

$$f^N = f \circ f \circ \dots \circ f$$

nótese que de la definición surge que:

$$\left| f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0) \right| \cong \epsilon e^{N\lambda(x_0)}$$

Pero  $d^N$  es la distancia entre los puntos obtenidos al iterar  $N$  veces el mapa partiendo de  $x_0$  y  $x_0 + \epsilon$ . Por su parte  $\epsilon$  es la distancia entre los puntos de partida  $x_0$  y  $x_0 + \epsilon$ . Es decir que  $\epsilon e^{\lambda(x_0)}$  es el factor promedio por el cual se estira la distancia entre dos puntos muy próximos luego de cada iteración.

Nótese además que el exponente de Lyapunov también mide la pérdida promedio de información luego de una iteración. Para ver esto apliquemos la regla de la cadena

$$\left. \frac{d}{dx} f^2(x) \right|_{x_0} = \left. \frac{d}{dx} f[f(x)] \right|_{x_0} = f'(f(x_0)) f'(x_0) = f'(x_1) f'(x_0) \dots$$

donde  $x_1 = f(x_0)$

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d}{dx} f^N(x_0) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)| \end{aligned}$$

Un exponente de Lyapunov positivo significa que el mapa en cada iteración produce en promedio un alejamiento de puntos que inicialmente eran muy próximos. Este efecto de sensibilidad de las condiciones iniciales es característico de los atractores caóticos.

La definición de exponente de Lyapunov puede generalizarse fácilmente a  $d$  dimensiones, donde tenemos  $d$  exponentes cada uno para una dirección espacial.

Sea un mapa  $d$  dimensional

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{G}(\bar{x}_n) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = G_1(x_n^0, \dots, x_n^d) \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(d)} = G^d(x_n^0, \dots, x_n^d) \end{cases}$$

Si  $\delta(\bar{x}) = \frac{\delta G_i}{\delta x_j}$  es la matriz jacobiana del mapa, los exponentes de Lyapunov  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  se definen como:

$$\left( e^{\lambda_1(x_0)}, e^{\lambda_2(x_0)}, \dots, e^{\lambda_d(x_0)} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{N-1} \delta(\bar{x}_i)$$

módulo de los autovalores de

El algoritmo desarrollado por Eckman y otros (1986) permite determinar para cada serie de muestras al menos el mayor de los exponentes de Lyapunov del mapa en cuestión.

## 2.4 Cálculo de la dimensión de series temporales.

Dada una serie temporal hay varias preguntas que se deben contestar.

- 1) La señal mostrada corresponde a un movimiento sobre un atractor extraño o es ruido aleatorio?
- 2) Si es caos determinístico, cuál es la dimensión del atractor extraño?
- 3) Si la señal está contaminada por ruido aleatorio, cómo se podría separar el caos determinístico de las componentes aleatorias?
- 4) Si la señal es caótica: cuán caótica es?

### 2.4.1 La idea básica

Se dispone de una serie temporal  $\bar{x}_i$  de  $f$  variables  $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^N$   
con  $\bar{x}_i = x(it)$

Los puntos podrían estar esparcidos en un atractor de dimensión  $D$  ( si es caótico) o bien llenar el espacio  $f$  dimensional ( si es ruido)

Como en las experiencias habitualmente se mide una sola variable, se debe proceder de acuerdo a:

### **Teorema de Embedding (a la Mañè)**

Sea  $S$  un compacto en un espacio de Banach  $B$  y  $E$  un subespacio de dimensión finita tal que,  $\dim E > \dim_H (S \times S)$  o sea.  $S$  un compacto y entonces:

$$\dim E \geq 2 \dim_k (S) + 1,$$

donde  $\dim_H$  ( o bien  $\dim_k$  ) es la dimensión de Hausdorff (referido como capacidad). Entonces el conjunto de particiones  $\Pi : B \rightarrow E$  tal que  $\Pi$  restringido a  $S$  es inyectiva ( lo que significa relación uno a uno en  $E$ ) es denso entre todas las proyecciones  $B \rightarrow E$  con respecto a la métrica.

Es decir, si  $S$  es un conjunto de puntos de dimensión  $D$ . Entonces los puntos de  $S$  pueden ser parametrizados por  $m$  coordendas reales tal que  $m \geq 2D-1$

### **Teorema de Embedding (a la Takens)**

Sea  $\mathbf{x} = F(\mathbf{x})$  generado por un flujo  $d$  dimensional. Entonces el vector de dimensiones  $n=2d+1$  dado por:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = (x_i(t), x_i(t + \tau), x_i(t + 2\tau), \dots, x_i(t + n\tau)) \quad (2.4.1)$$

donde  $x_i(t)$  es una componente arbitraria del vector  $\vec{\mathbf{x}}$ , dando un embedding suave para el flujo, y las propiedades métricas de ambos espacios, el  $d$ - dimen-

sional  $\mathbf{x}(t)$  y el  $(2d+1)$  - dimensional  $\vec{\mathbf{x}}(t)$ , son las mismas en el sentido que las distancias en  $\mathbf{x}(t)$  y en  $\vec{\mathbf{x}}(t)$  tienen entre sí la misma relación la cual está uniformemente acotada a medida que nos alejamos de cero.

En la expresión (2.4.1) las coordenadas reales pueden ser coordenadas temporales retrasadas, siendo  $n$  la dimensión de embedding y  $\tau$  el tiempo de retardo.

En realidad hay muy pocos argumentos para la elección del tiempo  $\tau$ . No debe ser muy próximo al periodo propio pues se obtendría correlación temporal en el sistema a analizar ni demasiado grande como para que no distorsione las características del atractor que se quiere analizar. En general se elige el primer cruce por cero de la función de autocorrelación o el primer mínimo de la entropía de información mutua (Ver Apéndice 2 para una mayor discusión). En nuestra experiencia, cualquiera de estos métodos, han demostrado ser útiles. En la aplicación que se detalla en la sección siguiente se mostraran los resultados.

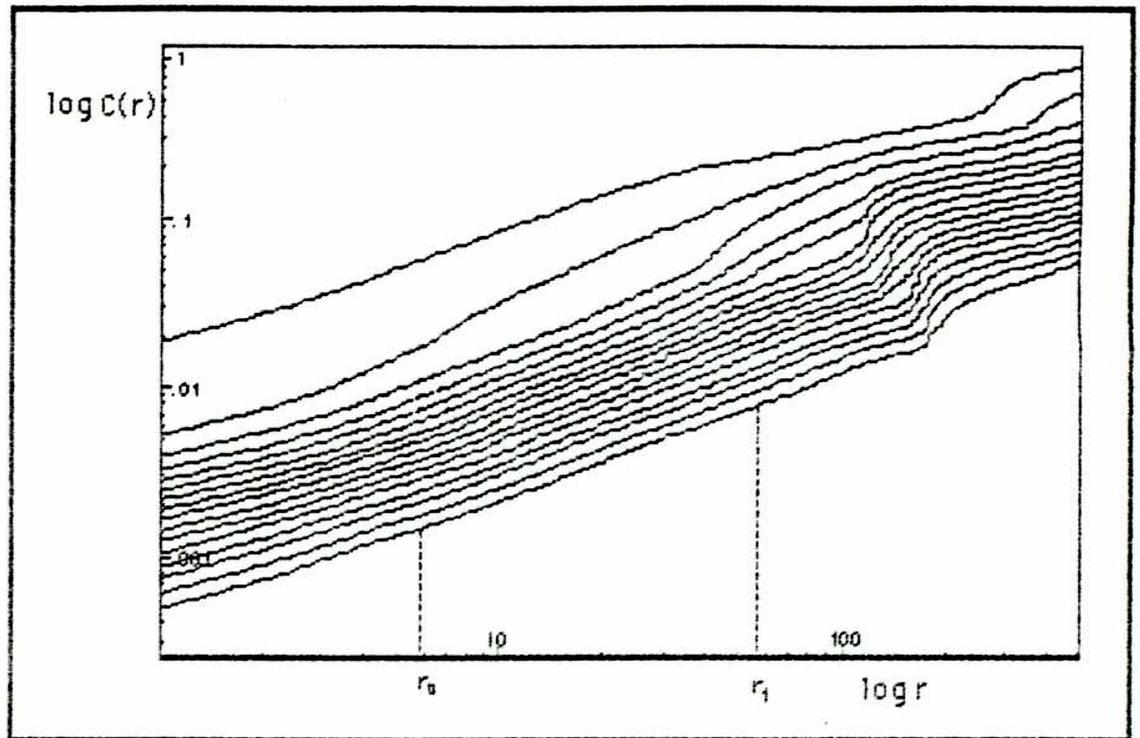
Para determinar si el movimiento del sistema se produce sobre un atractor extraño se calcula la dimensión de correlación dada por :

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \theta(r - |\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)|)$$

como se describió en la sección (2.2)

$$C(r) \approx r^{D_2}$$

Se calcula  $C(r)$  y se grafica  $\log C(r)$  vs.  $\log r$  calculándose por cuadrados mínimos la pendiente  $D_2$



$\log C(r)$  vs.  $\log r$  para distintos valores de la dimensión de embedding

Para pequeños  $r$  se tiene una gran dispersión debido a la poca estadística. hay un rango  $(r_0, r_1)$  de valores cuyas pendientes son bastante constantes. Para  $r$  más grandes hay una importante desviación.

Se grafica la pendiente de estas curva en función de la dimensión de embedding.



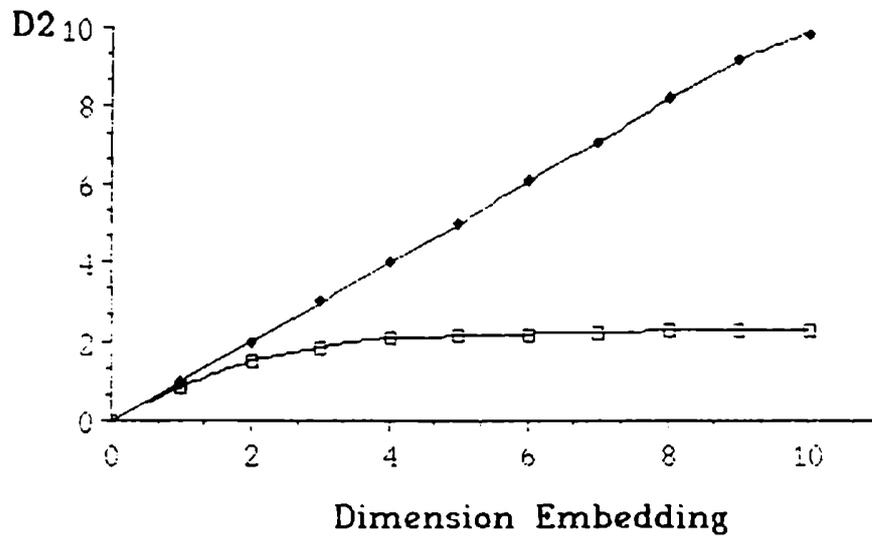


Grafico ilustrativo de la pendiente  $D_2$  en función de la dimensión de embedding para ruido aleatorio (rombos) y para un atractor caótico (cuadrados)

Si esta curva no satura, la conclusión es simple: las series medidas corresponden a ruido aleatorio. Si esta satura, el valor asintótico de la pendiente es la dimensión de correlación que nos permite determinar el mínimo de grados de libertad efectivos del sistema.

La entropía métrica es una noción asociada a la evolución caótica del sistema y da una medida del grado de desorden. La "magnitud" del desorden no viene dada por la dimensión fractal. Esta, en sistemas fuertemente disipativos, puede ser pequeña a pesar de estar ligada a sistemas muy desordenados. Por ejemplo, un comportamiento periódico es totalmente predecible, si se han efectuado un gran número de medidas podemos predecir el valor en que se hallará al término de una nueva medición. No hay información nueva proporcionada por la evolución del sistema (su entropía métrica es cero).

Para el régimen caótico, el conocimiento de la evolución pasada no permite llevar a cabo una predicción segura, sólo estimar una probabilidad de en-

contrar tal o cual valor. O sea que, cada nueva medición aporta una información suplementaria. La entropía métrica proporciona una medida de la cantidad de información nueva proveniente de la evolución del sistema.

El método de evaluación de la entropía métrica permite comprender la relación de esta magnitud con el parecido del sistema consigo mismo.

Consideremos una trayectoria del sistema (llamada central) entre los instantes  $t_0$  y  $t_1$  y determinemos el número de otros tramos de la trayectoria que durante el mismo intervalo se mantienen a una distancia inferior a  $r$  de la primera. Cuando aumenta la longitud de la trayectoria central, el número de porciones vecinas, aquellas situadas a una distancia inferior a  $r$  disminuye a causa de la divergencia de las trayectorias próximas. La velocidad de divergencia de estas trayectorias fuera del tubo de radio  $r$ , promediado sobre el atractor, proporciona una cota inferior de la entropía métrica.

Si la señal es muy parecida a sí misma, la divergencia de las trayectorias será lenta y por consiguiente su entropía métrica será pequeña. La divergencia de las trayectorias fuera del tubo de radio  $r$ , que se traduce como sensibilidad a las condiciones iniciales, es debido a las direcciones de estiramiento del atractor. Ello permite establecer que la entropía métrica es menor o igual a la suma de los exponentes positivos de Lyapunov.

El grado de caoticidad del sistema se puede determinar calculando la cota inferior de la entropía métrica  $K_2$  dada por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \log \frac{C^d(r)}{C^{d+1}(r)} \right) = K_2$$

Donde  $C^d(r)$  es la correlación que corresponde a la dimensión  $d$  de embedding. Teniendo en cuenta que  $K_2=0$  corresponde a un movimiento ordenado,  $K_2= \infty$  para movimiento aleatorio y  $K_2$  finito y distinto de 0 para movimiento caótico.

Muy recientemente (Albano y otros, 1988) desarrollaron un método de estimación de la dimensión combinando el método de descomposición singular dado por Broomhead y King (1986) con el algoritmo de Grassberger y Procaccia, que evita las ambigüedades y problemas de ambas técnicas cuando estas se aplican independientemente.

Brevemente resumiremos este método. A partir de una serie temporal  $v(t)$  se aplica la técnica de embedding, como se describió anteriormente, para construir un espacio  $M$ -dimensional sobre el cual se calcularán las dimensiones.

Cualquier matriz  $\mathbf{A}$  de  $N \times M$  con  $N \geq M$  puede ser expresada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^t$$

donde  $\mathbf{U}^t$  es la matriz transpuesta de  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$  es una matriz diagonal  $M \times M$  tal que:

$$S_{i,j} = \delta_{i,j} s(i) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$\mathbf{V}$  es una matriz de  $N \times M$  con columnas ortogonales.

$$(\mathbf{V}^t \mathbf{V})_{i,j} = \delta_{i,j}$$

y  $\mathbf{U}$  es una matriz ortogonal de  $M \times M$ :

$$(\mathbf{U}^t \mathbf{U})_{i,j} = (\mathbf{U} \mathbf{U}^t)_{i,j} = \delta_{i,j}$$

Los elementos  $s(i)$  de la matriz diagonal  $\mathbf{S}$  son conocidos como los valores singulares de  $\mathbf{A}$ .

Se construye una matriz  $\mathbf{A}$  de la trayectoria en cuyas filas están los vectores de embedding  $M$ - dimensionales provenientes de la serie temporal:

$$y(1) = (v(1), v(1+\tau), \dots, v(1+(M-1)\tau))$$

$$y(2) = (v(1+J), v(1+J+\tau), \dots, v(1+J+(M-1)\tau))$$

$$y(N) = (v(1+(N-1)J), v(1+(N-1)J+\tau), \dots, v(1+(N-1)J+(M-1)\tau))$$

con  $\tau$  como el tiempo de retardo, o el número de intervalos de muestreo entre las componentes sucesivas de un vector de embedding,  $J$  es el número de intervalos de muestreo (número de vectores que se usa para comparar las distancias).

El tiempo  $(M - 1)\tau$ , para cada vector de embedding, es la "Longitud de la ventana" de embedding.  $\tau$  se introduce debido al hecho que en un sistema experimental el intervalo de muestreo se establece sin conocer las escalas temporales intrínsecas del sistema a estudiar.

Los teoremas debidos a Takens y Mañé, que enunciamos previamente, establecen que si la dimensión de embedding  $M$  y la dimensión  $n$  de la variedad que contiene el atractor satisfacen la "desigualdad de Takens"  $M \geq 2n-1$ , entonces se obtiene una dimensión adecuada para el embedding excepto para simetrías especiales. En particular, la dimensión del atractor reconstruido es la misma que la del atractor en el espacio de fases.

El algoritmo de Grassberger - Procaccia que discutimos en la sección 2.2.2 requiere una cantidad muy grande de datos para que cálculos con dimensiones de embedding suficientemente grandes ( $> 10$ ) tengan significado dentro de un rango de confiabilidad de  $\pm 10\%$ . En sistemas experimentales, donde a ve-

ces el fenómeno a analizar no tiene la duración suficiente para adquirir un gran número de datos (> 20000) y la necesidad de incrementar la dimensión de embedding para lograr saturación ( lo que significa que la zona de escala se achica y a menudo desaparece) hace necesario obtener un procedimiento que reduzca el tamaño requerido de la dimensión de embedding. El método de la descomposición singular es el que lo logra y pasamos a discutirlo someramente.

Con estos vectores la matriz  $A$  toma la forma:

$$A = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

El embedding define un conjunto de puntos en un espacio  $M$  dimensional el cual puede ser descrito por una distribución multivariada cuyas variables son las  $M$  componentes de los vectores de embedding.

La transformación  $A \rightarrow A' = AU$  o bien,  $y_i \rightarrow y'_i$  se realiza con el objeto de obtener la matriz de los componentes principales con los cuales se realizan los cálculos.

El procedimiento de Grassberger - Procaccia para comprobar la convergencia puede oscurecerla pues se necesitan espacios de embedding de dimensiones bastante altas. Contando el número de los "mayores" valores singulares no da una buena estimación de la dimensión de la trayectoria reconstruida. Sin embargo, como las componentes principales de los vectores de embedding for-

man un conjunto estadísticamente independiente del conjunto de las variables y las contribuciones relativas de esas variables a las distancias usadas en el cálculo de la dimensión de correlación se miden directamente por los autovalores hay ventajas obvias para combinar ambos métodos.

La combinación se realiza como sigue: Para una dimensión de embedding dada, se realiza una descomposición de valores singulares que construye la matriz  $S$  de valores singulares y de la matriz ortogonal  $U$ . Se rota la matriz de la trayectoria para obtener la matriz de los componentes principales que son las que se usan en los cálculos de Grassberger-Procaccia.

La convergencia de los cálculos (esto significa la existencia de valores que no difieran entre sí con un error del 10% en una zona determinada), no se realizan como en el método de Grassberger y Procaccia, centrados en una esfera de radio  $r$  sino que se hacen en subespacios del espacio de embedding a lo largo de la dirección con el mayor valor singular. Este procedimiento considera que la convergencia ha sido exitosa si los cálculos no difieren en algunos (pocos) de los más grandes subespacios considerados.

Las ventajas fundamentales de este método son: a) su rapidez de cálculo. Por ejemplo, con el método tradicional en una PC de 8MHz, se realizaba la estimación de la dimensión, para un caso típico (el atractor de Lorentz, por ejemplo) en 14 ó 15 horas, mientras que para el mismo sistema y las mismas condiciones el tiempo de cálculo es a lo sumo 2 horas; b) la seguridad de los resultados, ya que se descartan "a priori" resultados que tengan discrepancias mayores a un 10% y no depende de la pericia para determinar las zonas de escala.

La mayor desventaja es que con este procedimiento es muy crítica la elección de la longitud de la ventana (dimensión de embedding y tiempo de re-

tardo  $\tau$ ). Esta debe ser muy cuidadosa, un criterio sería que  $(d-1) \tau$  debe ser pocas veces mayor que el tiempo de correlación.

En nuestro trabajo, tomando en cuenta el problema antes mencionado, hemos contrastado este método con los usados previamente (Grassberger y Procaccia, 1983 , Badii y Politi,1985) y consideramos que su eficiencia es muy superior por lo que lo adoptamos en todos los análisis de estimación de dimensión fractal cuando tenemos datos experimentales a analizar.

### **2.4.2 Aplicación**

Para aclarar estos conceptos mostramos la forma de tratar problemas no lineales de alta dimensionalidad en el marco de los sistemas dinámicos. Consideramos el problema típico de sistemas compuestos por un gran número de subsistemas interactuantes descritos por ecuaciones diferenciales no lineales ordinarias.

Ejemplos de este tipo son marcapasos cardíacos o neuronales que pueden modelarse por un gran número de osciladores no-lineales acoplados.

La dinámica del corazón es muy compleja pues involucra millones de células de características muy diferentes acopladas entre sí, que afectan el ritmo y la intensidad de las contracciones. Para caracterizar el comportamiento electrofisiológico irregular del tejido cardíaco se seleccionó un modelo experimental simple (ventrículo del sapo) que permite reproducir características esenciales del tejido cardíaco en condiciones fácilmente controlables. Se perturban los ventrículos con pulsos eléctricos simples, periódicos o combinaciones de ambos para obtener diferentes respuestas.

Se registran en papel y cinta magnética el electrocardiograma de superficie (**ECG**), el potencial de acción monofásico, (**PAM**) obtenido mediante un electrodo de succión y electrograma ventricular (**EGV**). En una etapa posterior se obtuvo un registro intracelular con microelectrodo. La señal **PAM** se considera la más apropiada para ser analizada, puesto que da información de un grupo de fibras cardíacas, tiene una buena relación señal-ruido y es relativamente fácil de obtener. Más detalles del sistema experimental que utilizamos se pueden obtener en Savino y otros, 1989.

En la figura 1 se muestran ejemplos de algunas señales temporales obtenidas y en la figura 2 el espectro de potencias para cada una de ellas. Las series temporales A y B muestran comportamientos periódicos de periodos 2 y cuatro respectivamente, los espectros de potencia correspondientes muestran un máximo en  $f$  y  $f/2$  ( para periodo 2) y  $f$ ,  $f/4$ ,  $f/2$  y  $3f/4$  ( para periodo 4), mientras que la señal C describe un movimiento irregular, en el espectro de potencia se observa que los máximos fueron reemplazados por una banda de ruido en las bajas frecuencias (menores que la frecuencia del marcapasos). La aparición de estas frecuencias sugieren una ruta al caos via duplicación de período.

Para determinar si este comportamiento irregular corresponde a una dinámica determinística, desarrollamos para cada una de las series temporales obtenidas experimentalmente los conceptos discutidos en las secciones precedentes.

Tabla 1

Comportamiento	Frecuencia marcadores $f$ (ppm) en vivo	Periodicidad	Serie PAM temporal	Espectro Subarmónico de Frecuencias	Correlación $(I)$	Número de trayectorias bidimensionales	Mapa de Poincaré
Periódico	< 80	periodo 1		F	continuo	una	un punto
	80-100	periodo 2	_	F, F/2	oscila	dos	dos puntos
	100-100	periodo 4	_  _  _	F, F/2, F/4, 3F/4	oscila	cuatro	cuatro puntos
Nonperiódico	> 120	cuasi periodicidad	_  _  _  _  _	ruido banda ancha	decae rápido	muchas bandas	muchos puntos

Se reconstruyó a partir de la serie unidimensional el espacio de fases mediante el teorema de embedding. En la figura 3 se muestra una proyección en el plano  $x(t), x(t+\tau)$  de la evolución. La figura (a) muestra un atractor de periodo 4, mientras que la figura (b) un atractor caótico. El tiempo de retardo se eligió considerando el primer cero de la función de autocorrelación. Cálculos de las dimensiones con distintos tiempos de retardo no evidenciaron gran sensibilidad a su elección, por supuesto manteniéndonos dentro de los límites que fueron discutidos previamente. Es decir, que este tiempo no fuera muy pequeño, como para evitar correlaciones temporales, ni demasiado grande para que distorsionara la dinámica.

En la tabla 1 se resumen los resultados obtenidos en el tratamiento previo al cálculo de las dimensiones del sistema. Hay que destacar que estas experiencias se realizaron con dos tipos de ventrículos, siete de ellos fueron removidos y mantenidos en una solución fisiológica (perfundidos) y las otras experiencias fueron realizadas in situ que en la tabla se caracterizan como en vivo.

Se muestra un esquema de las señales PAM obtenidas en cada caso. En la columna llamada Espectro de Frecuencia Subarmónico se describen las frecuencias observadas en el espectro de potencias como fuera ejemplificado en la figuras anteriores. También se detalla el comportamiento de la función de autocorrelación de la señal  $x_i$ , se observó que esta no varía para el periodo 1, oscila alrededor de cero para los periodos 2 y 4 y decae rápidamente para el caso no periódico.

La anteúltima columna detalla el comportamiento de las proyecciones bidimensionales en el espacio de fases. Para los casos periódicos se observan las órbitas separadas, para periodo 1 se observa sólo una, dos en el caso de la pri-

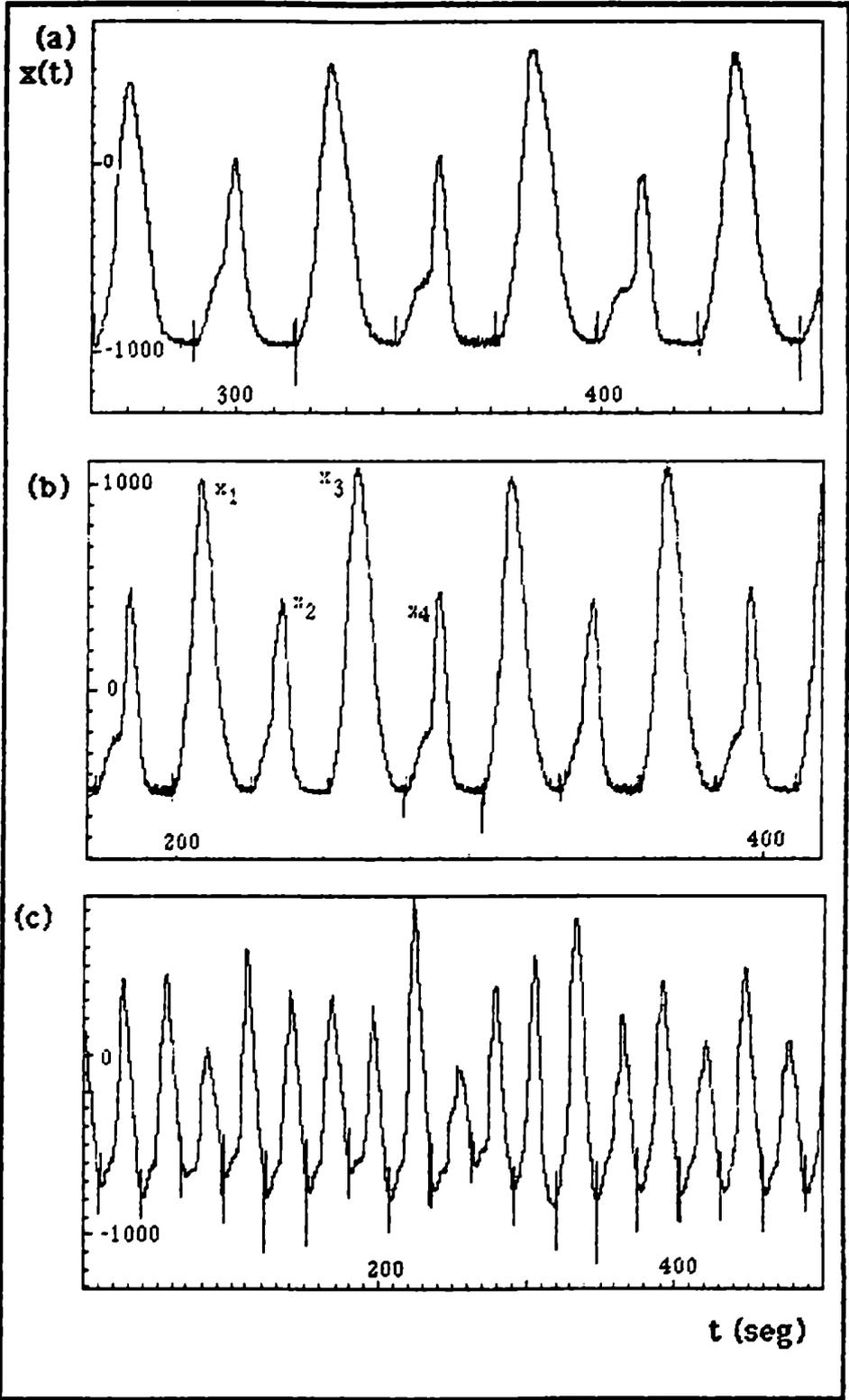


Figura 1: Se muestran las series temporales obtenidas para: (a) periodo 2, (b) periodo 4, aqui las  $x_i$  señalan las distintas amplitudes y (c) comportamiento caótico.

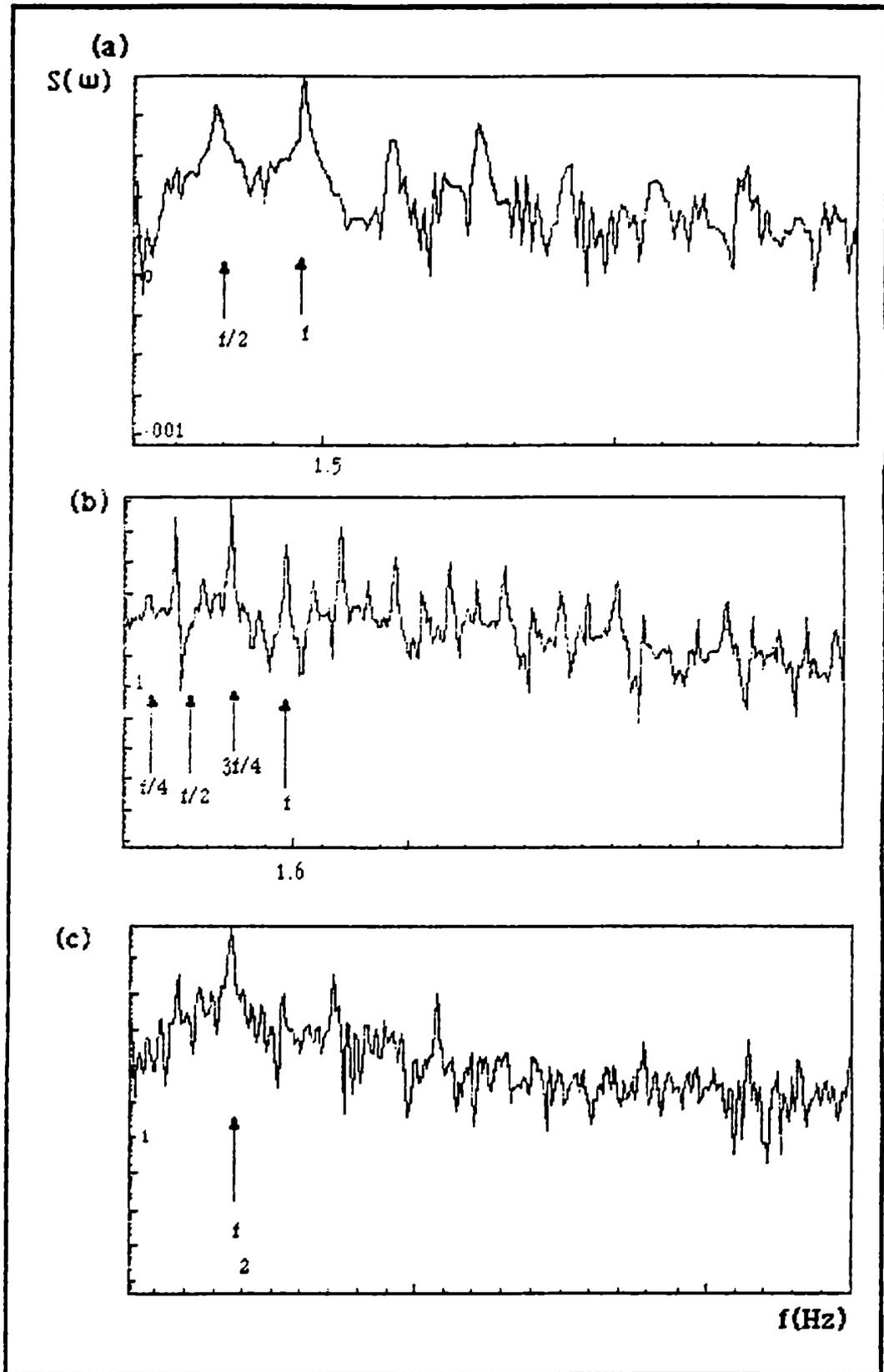


Figura 2: Espectros de potencia de las series temporales correspondientes a la fig.1 las flechas indican la frecuencia fundamental  $f$  y las frecuencias subarmónicas.

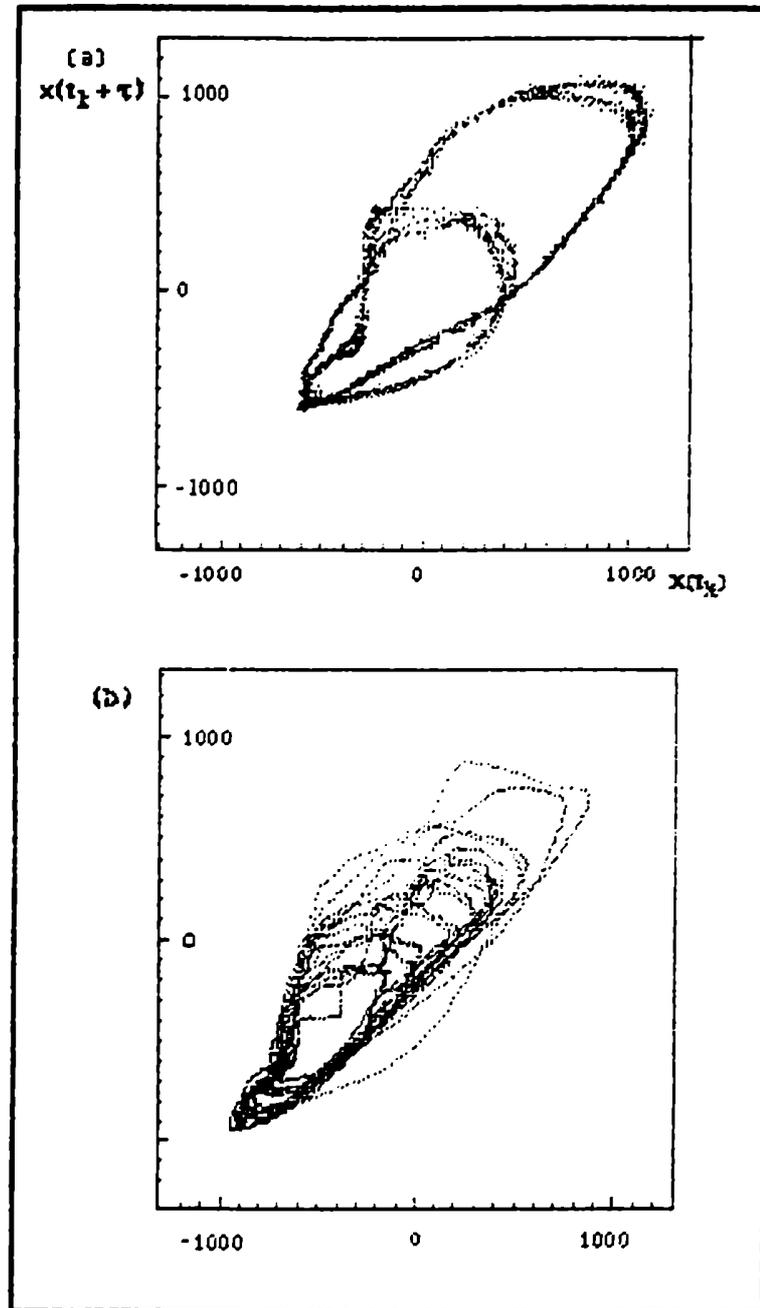


Figura 3: Proyección del atractor en el plano  $x(t+\tau)$ ,  $x(t)$  para dos situaciones: (a) periodo 4 y (b) situación caótica. En ambos casos el tiempo de retardo fue de  $\tau = 8$  seg.

Estos procedimientos también fueron aplicados a otros sistemas naturales altamente dimensionales como por ejemplo datos solares (Kurths y Herzel, 1987, Romanelli y otros, 1987), geomagnéticos (Figliola y Romanelli, 1988), aerónómicos (Romanelli y otros, 1988) y climáticos (Nicolis y Nicolis, 1985).

En el sistema teórico que nos ocupa y que se mostrara en el capítulo 3 en la sección correspondiente a burbujas caóticas, que el cálculo de las dimensiones del sistema ha sido de mucha ayuda para comprender su mecanismo de formación.

### Capítulo 3: Oscilador de relajación forzado

Este capítulo está dedicado a la descripción de las soluciones del oscilador de Smith (Smith 1961, Gonzalez y Piro 1983) forzado, cuya peculiaridad consiste en una ecuación diferencial no lineal de segundo orden con solución analítica.

Este modelo ha resultado particularmente interesante en el estudio de los osciladores de relajación forzada.

En la sección 3.1 se describe el comportamiento autónomo y luego bajo la acción de una fuerza externa (sucesión periódica de deltas de Dirac) de la misma intensidad.

La sección 3.2 trata de la descripción de osciladores de relajación. La generación de burbujas caóticas en este tipo de osciladores es discutida en la sección 3.3 y su posterior desaparición al variar la disipación del sistema considerando a ésta el parámetro fundamental de ese proceso.

### 3.1 Oscilador de Smith

El sistema autónomo es una ecuación diferencial de segundo orden.

La forma corresponde a la familia:

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + B(x)x + \omega^2 x = 0 \quad (3.1.1)$$

con

$$f(x) = (n+2) b x^n - 2a$$

$$B(x) = x^{-2} \int_0^x (y - f(y)) dy = bx^n - a$$

a, b,  $\omega$  son parámetros de la ecuación: **a** controla las no linealidades, **b** es un factor de escala y  $\omega$  es la frecuencia propia del sistema.

Para el caso particular de  $n=2$  la ecuación (3.1.1) toma la forma:

$$\ddot{x} + (4bx^2 - 2a) \dot{x} + b^2 x^5 - 2abx^3 + (a^2 + \omega_0^2) x = 0 \quad (3.1.2)$$

Las características de esta ecuación fueron discutidas ampliamente en Gonzalez (1987) y Piro (1984) y la solución analítica es:

$$x(t) = \cos(\varphi + \omega t) \left[ q e^{-2at} + A^2 (1 + a/\varphi + \omega) \cos(\varphi + \omega t) ((2a/\varphi + \omega) \cos(\varphi + \omega t) + 2 \sin(\varphi + \omega t)) - e^{-2at} (1 + a/\omega) \cos\varphi ((2a/\omega) \cos\varphi + 2 \sin\varphi) \right]^{-1/2}$$

Las constantes de integración  $\phi$  y  $q$  se determinan a partir de las condiciones iniciales:

$$\text{sen}\phi = (q^{1/2}/\omega) (x_0 a - x_0^3 b - \dot{x}_0)$$

$$\text{sign}(\cos\phi) = \text{sign } x_0$$

donde:

$$q = \omega^2 (x_0^2) \omega^2 - (x_0 a - x_0^3 b - \dot{x}_0)^2 \quad y,$$

$$A^2 = (b/2a)(1 - a^2/\omega^2)^{-1}$$

considerando  $a$ ,  $b$ , y  $\omega$  positivos. Limitaremos nuestro análisis a este caso.

La teoría general de sistemas dinámicos dice que las únicas singularidades en dos dimensiones son puntos singulares y ciclos límites. Dada la solución analítica se puede determinar simultáneamente el comportamiento asintótico ( $t \rightarrow \infty$ ) lo que resulta:

$$x(t) = \cos(\phi + \omega t) (A^2 (1 + (a/\omega) \cos(\phi + \omega t) ((2a/\omega) \cos(\phi + \omega t) + 2\text{sen}(\phi + \omega t))))^{1/2}$$

Eliminando el tiempo entre esta expresión y su derivada llegamos a una nueva expresión algebraica en el espacio de fases  $(x, \dot{x})$  que describe el ciclo límite hacia el cual tienden las soluciones del sistema de manera independiente a las condiciones iniciales.

$$y = \dot{x} = 2ax - bx^3 \pm (a^2 + \omega^2) ((2a/b) - x^2)^{-1/2}$$

Si se excita al sistema autónomo con una sucesión periódica de deltas de Dirac, se preserva la existencia de la solución exacta del oscilador y entonces el sistema puede escribirse como :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -(4bx^2 - 2a)y + b^2x^5 - 2abx^3 - (a^2 + \omega^2)x - V_E \sum \delta(t - nT_E)\end{aligned}$$

donde  $V_E$  es la amplitud y  $T_E$  el periodo de la fuerza externa.

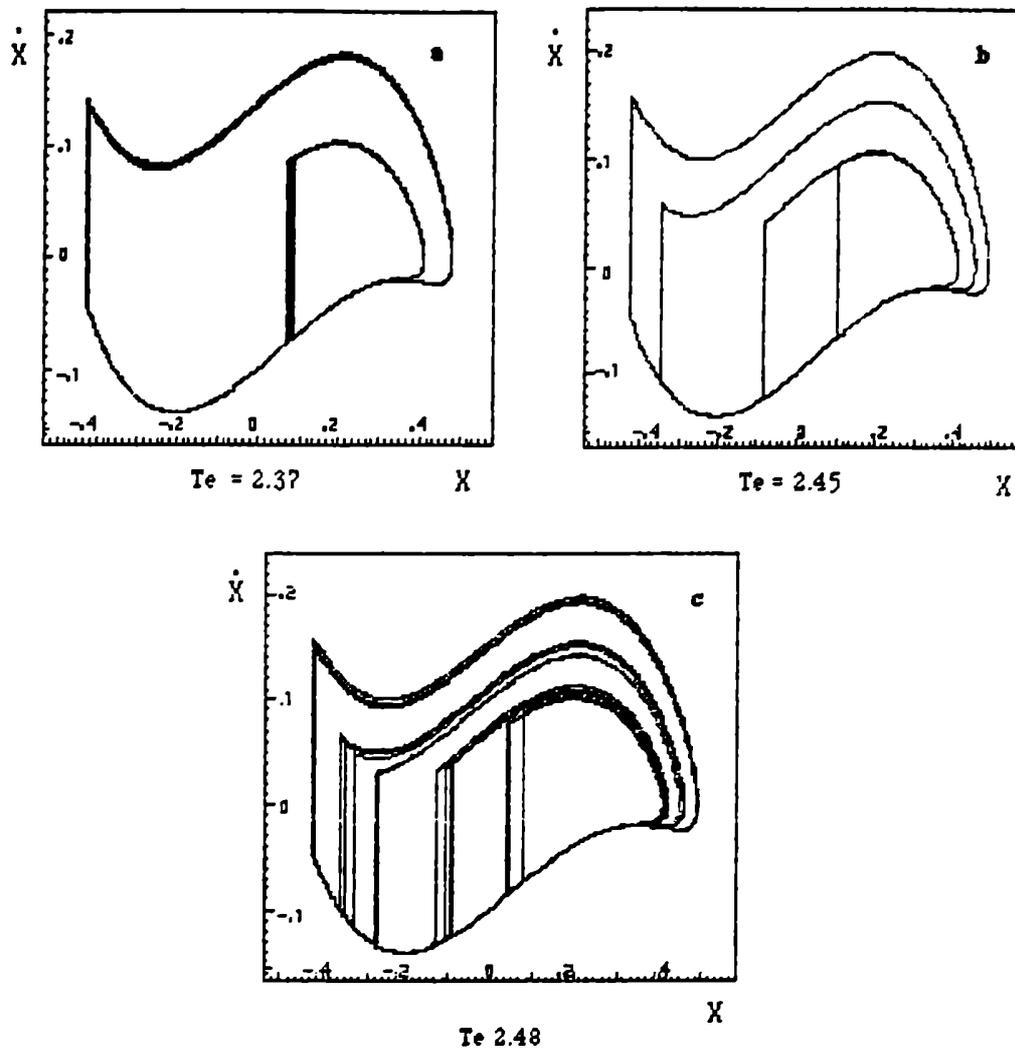
El efecto de cada pulso es producir una discontinuidad en la derivada mientras que la solución analítica es válida entre pulsos. Esta característica hace su estudio muy ventajoso puesto que permite obtener la solución del sistema sin error numerico.

Este oscilador muestra una dinámica extremadamente compleja la cual debido a las características de la solución puede ser estudiada detalladamente.

De acuerdo a la variación de sus parametros  $V_E$  y  $T_E$ , se presentan regiones de sincronización y regiones caóticas (duplicación de periodos, intermitencia, ventanas de estabilidad, etc.)

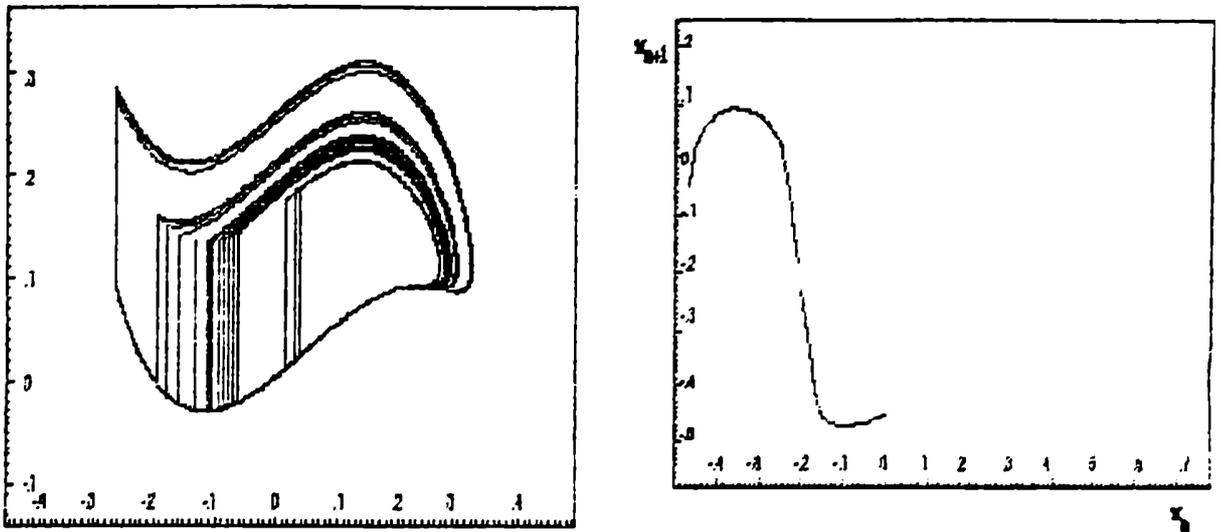
En las siguientes figuras se muestran en el espacio de fase la evolución del sistema desde una situación periódica cuando se aumenta el periodo de la fuerza externa. En todas ellas los parámetros utilizados fueron:  $a = \omega_0 = 1.57079$  y  $b = 15.7079$  en la línea de  $V_E = 1.625$  y variando el periodo de la fuerza externa  $T_E$ .

Es interesante notar que estas figuras muestran la aparición de la secuencia de duplicación de periodo a medida que aumenta  $T_E$ . Observamos periodos 2, 4 y alta periodicidad, en las figuras (a), (b) y (c) respectivamente.



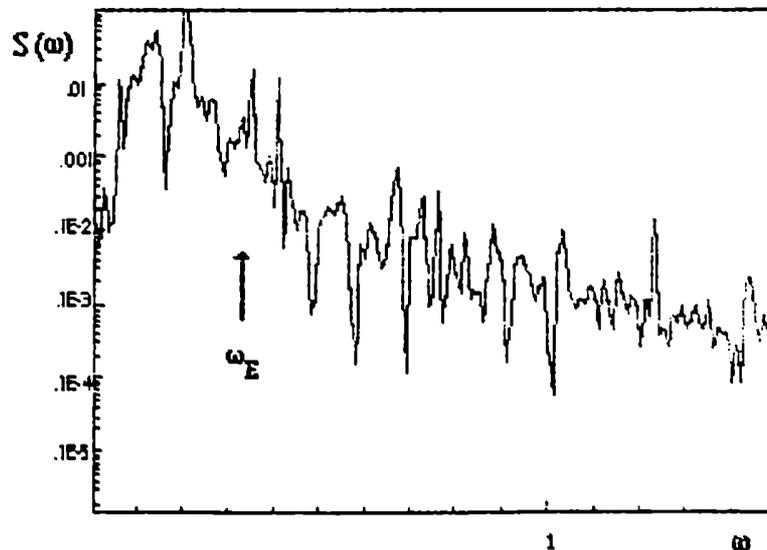
Superado el punto de acumulación de la cascada de bifurcaciones por duplicación de período nos encontramos con soluciones aperiódicas o caóticas.

En la siguiente figura se muestra una solución caótica con el mapa del primer retorno,  $x_{n+1} = f(x_n)$  en la línea de  $V_E = 1.625$  y  $T_E = 2.51$ .



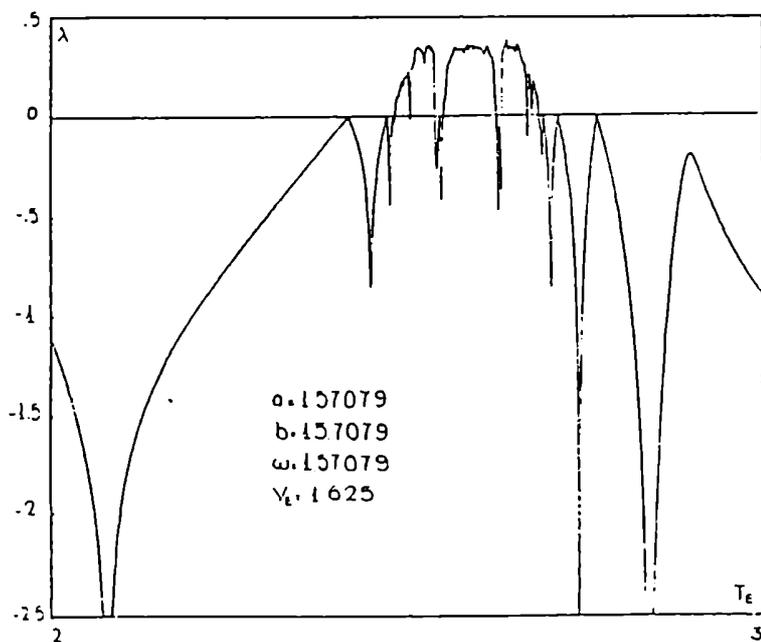
Es bastante difícil a veces distinguir visualmente entre una situación caótica y una aperiódica, en consecuencia para dilucidar este inconveniente se buscan otros indicadores.

El espectro de potencias para esta solución puede verse en la siguiente figura. Observamos una banda ancha de ruido que es característica de soluciones caóticas en la zona de bajas frecuencias como se discutiera en el capítulo 1.



Espectro de potencias para la solución caótica. La flecha indica la frecuencia externa

Sin embargo un espectro de potencias con estas características no es una demostración concluyente pues lleva a ambigüedades a veces peligrosas en la interpretación de la dinámica del sistema. Para evitarlo se debe calcular el coeficiente de Lyapunov. Este coeficiente se muestra en la siguiente figura calculado a lo largo de la misma línea de  $V_E$ , variando  $T_E$ . En el punto correspondiente al atractor de la figura anterior (que se sospecha caótico)  $T_E = 2.51$ , éste se hace positivo, indicando que las trayectorias vecinas se apartan exponencialmente, o lo que es lo mismo sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que corresponde a soluciones caóticas.



Estos elementos son los que nos permiten determinar el carácter de la solución.

### 3.2 Osciladores de relajación

Cuando la disipación del sistema (en nuestro caso) o la inductancia (en un circuito electrónico) se hacen despreciables frente a una fuerza externa o la capacidad según sea el sistema que se trate, las ecuaciones diferenciales de segundo orden que modelan el sistema pueden escribirse como un sistema de ecuaciones a primer orden.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de primer orden no pueden poseer soluciones oscilatorias a menos que las funciones  $f_i$  que las definen tengan singularidades. Cuando esto sucede, el sistema produce un tipo de soluciones oscilatorias llamadas de relajación (Guckenheimer y Holmes, 1983).

En muchos casos, este sistema surge de una ecuación diferencial de segundo orden, como el oscilador de Van der Pol que responde al siguiente modelo:

$$\ddot{x} = \mu (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0$$

lo que equivale a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu (x_1^2 - 1) x_2 + x_1\end{aligned}$$

El parametro que regula la no linealidad del sistema es  $\mu$ . Cuando  $\mu \rightarrow 0$  tenemos un oscilador armónico y para  $\mu \rightarrow \infty$  un oscilador de relajación.

Otro ejemplo de este tipo de osciladores es aquel que describe las oscilaciones químicas, conocido como el modelo de Bruselas (Brusselator) dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha - (\beta - 1)x - x^2 y \\ \dot{y} &= \beta x + x^2 y\end{aligned}$$

Todos estos osciladores presentan un ciclo límite atractor (y obviamente un punto fijo inestable en su interior). Debemos hacer notar que cualquier perturbación no lineal de la fuerza restauradora en los modelos clásicos de osciladores de relajación traerá aparejada, como consecuencia la aparición de puntos singulares distinto del trivial para ciertos valores del parámetro que la regula.

Como ya fuera establecido por Gonzalez (1987) aparentemente existe universalidad en el comportamiento de los osciladores de relajación forzados periódicamente. En consecuencia, en el estudio que se describirá a continuación se trabajará con el modelo de Smith (desde ahora llamado exactamente resoluble), descrito en la sección anterior que tiene la ventaja de poseer solución analítica expresada en funciones elementales, lo cual simplifica el proceso computacional y permite resultados numéricos con menor error.

En el régimen de alta relajación, el retrato de fases para los modelos estudiados presenta dos zonas bien diferenciadas en el espacio de los parámetros.

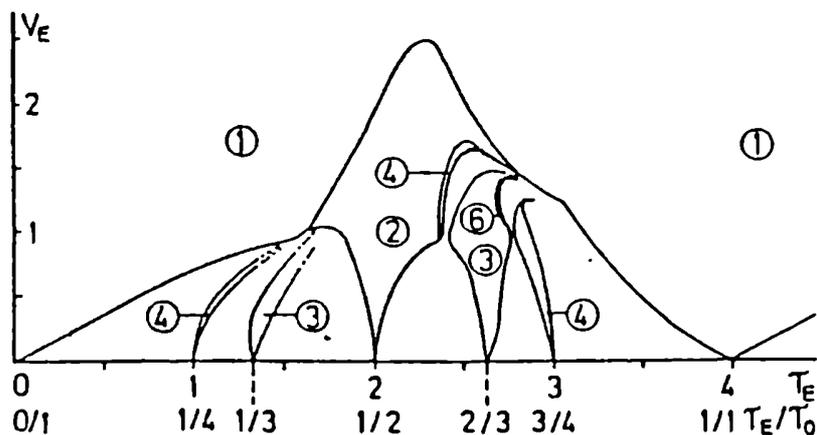
- a) Zona de sincronización : régimen periódico o cuasiperiódico
- b) Zona de comportamiento caótico : aparecen rutas de Feigenbaum al caos.

En la figura siguiente se muestra el retrato de fase para el oscilador exactamente resoluble en espacio de los parámetros y es muy similar para los tres modelos estudiados.

Los números muestran las periodicidades en la zona de sincronización, mientras que la zona marcada por CH significa situación caótica.

Cuando se disminuye la disipacion las regiones de duplicacion se cierran sobre si mismas y quedan contenidas en una región de período 2.

Posteriores reducciones del valor del parámetro  $a$ , producen la desaparicion sucesiva de la regiones de periodo  $2^n$  con  $n > 1$  en valores de  $a_n$ . Cuando  $a$  es más pequeño, no existen regiones de comportamiento caotico.



Disminuir la disipación para cada uno de los modelos estudiados significa:

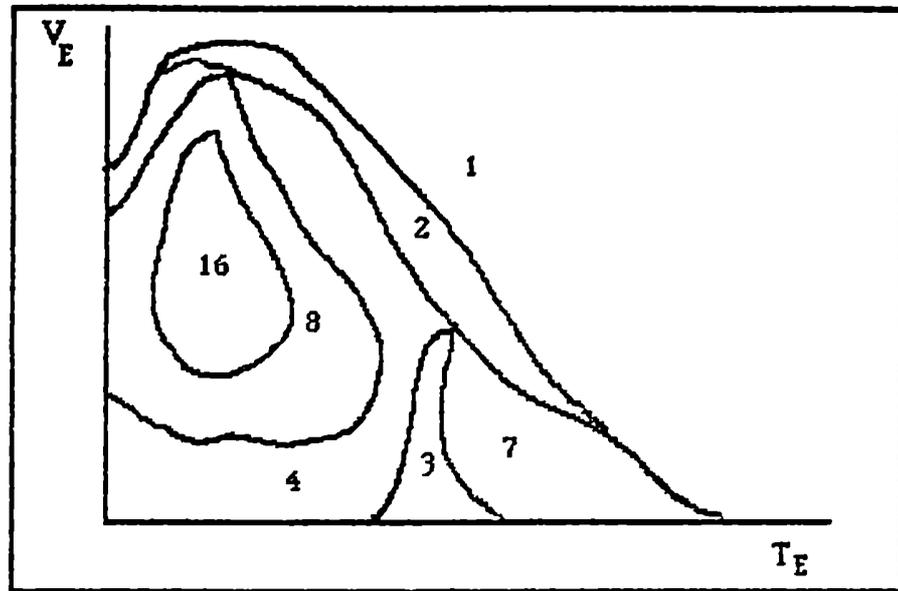
Van der Pol	disminuir	$\mu$
Bruselas	aumentar	$\alpha$
Exactamente resoluble	disminuir	$a$

### 3.3 Desaparición de las soluciones caóticas con la velocidad de relajación

En la sección previa mostramos las características del oscilador exactamente resoluble. En esta sección y utilizando dichas propiedades se trata parte del trabajo original realizado

Es interesante observar que muchos sistemas teóricos o experimentales (Bocko y otros, 1984, Oppo y Politi, 1984, Teitsworth y Westervelt, 1986, Wegener y Klingshern, 1987, Knobloch y Weiss, 1981) presentan lenguas de resonancia que se originan en cada valor racional para la relación de frecuencias entre la fuerza externa y la frecuencia propia del oscilador.

Esquemáticamente los resultados preliminares que nos llevaron a investigar los mecanismos de la formación de burbujas caóticas y su posterior desaparición se muestran en la siguiente figura.



Retrato de fases cualitativo donde se visualiza la generación de burbujas caóticas

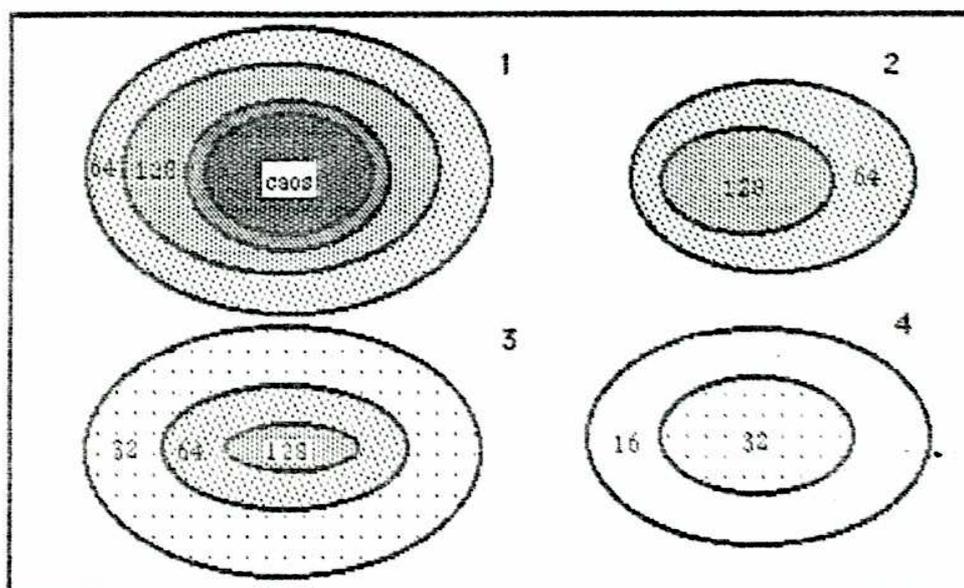
En el esquema anterior se observa para un valor de la disipación fijo, como se cierran sobre sí mismas las lenguas de periodicidades. Aumentando levemente la disipación y la resolución del barrido se logra que la burbuja de periodicidad 16 muestre periodicidades mayores hasta llegar a la situación caótica.

Para asegurar que los parámetros del sistema fueran coherentes con estos cambios, la variación del parámetro  $a$  fue realizada en la línea de  $V_c =$  constante. Siendo  $V_c$  definido como:

$$V_c = \sqrt{\frac{2a}{b}(a^2 + \omega_0^2)}$$

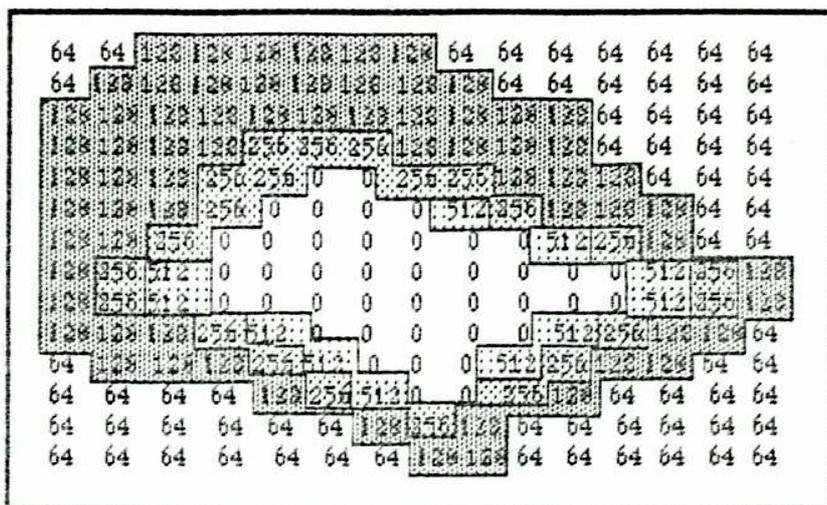
y para los valores de  $a = 0.79605$ ,  $b = 15.7079$  y  $\omega_0 = 1.57079$  resulta entonces  $V_c = 0.560637793$ . No debe perderse de vista que solo existe caos cuando  $V_E > V_c$  (Piro, 1984).

Es interesante destacar la desaparición sucesiva de las burbujas comenzando por las interiores, primero desaparece el caos, luego la región de periodicidad 256, luego la de 128 y así sucesivamente a medida que disminuye el valor de la disipación.

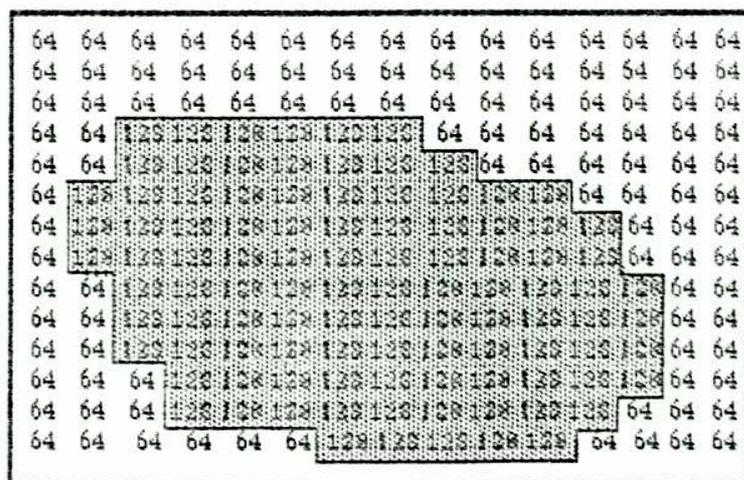


Esquema de la desaparición del caos al variar la disipación. Los rangos de este parámetro son: desde 0.70603 (1) hasta 0.79659 (4)

En la siguiente figura se muestran dos ejemplos de las salidas numéricas obtenidas para  $a = 0.79602$  y para  $a = 0.79601$



Salida para  $a = 0.79602$ ,  $V_E$  ( eje vertical ) variando entre 0.724467 y 0.722163 en pasos de  $1.536 \times 10^{-4}$  y  $T_E$  ( eje horizontal ) entre 2.50672 y 2.6016 en pasos de  $3.41 \times 10^{-4}$ .



Desaparición de la burbuja caótica para los mismos valores de los parámetros con  $a = 0.70601$ . La zona sombreada indica la periodicidad de 128 rodeada por la de 64. En el eje vertical se indica la variación de  $V_E$  y en el horizontal la de  $T_E$ .

La burbuja caótica es la zona indicada por ceros, rodeadas por periodicidades cada vez menores como lo muestran las zonas sombreadas. Estas se van

cerrando y a medida que disminuye la disipación desaparece la burbuja caótica como se puede observar en las figuras anteriores quedando una zona cerrada de periodicidad 128.

Los cálculos fueron realizados considerando un error en las comparaciones de las periodicidades de  $10^{-7}$ . Estos son solo ejemplos típicos ya que se han estudiado muchas situaciones y en todas el comportamiento fue similar.

Hemos comprobado que la burbuja se mantiene estable incluso aumentando o disminuyendo el error en las comparaciones, no hemos realizado cálculos con error menor a  $10^{-9}$  pues ya influye el error de precisión de la máquina.

### 3.3.1 Aproximación unidimensional del mapa estroboscópico

La idea de la aproximación unidimensional se basa en suponer que el sistema luego de la aplicación de un pulso vuelve al ciclo límite en un tiempo mucho menor que la separación entre pulsos.

Para un oscilador cualquiera, se puede establecer una recurrencia unidimensional que tendrá que tendrá la fase de oscilación antes de cada pulso como variable y como parámetros la amplitud y el periodo de la fuerza externa.

$$\Phi_{n+1} = f(\Phi_n; V_E, T_E) \quad (3.3.1.1)$$

$\Phi_n$  es la fase antes de la aplicación de la fuerza externa,  $V_E$  y  $T_E$  la amplitud y el periodo de la fuerza externa. Como entre pulso y pulso el sistema es regido por la ecuación autónoma, se puede separar la dependencia temporal de la de la amplitud.

En el caso del oscilador exactamente resoluble el efecto del pulso, puede ser considerado como un apartamiento violento del sistema de su ciclo límite. Dado que la evolución posterior es rápidamente convergente hacia el ciclo límite, el único efecto del pulso es la modificación de la fase. Como la fase no depende más que de las condiciones iniciales es posible calcular el efecto del pulso en forma exacta si uno conoce la fase como función de las condiciones iniciales y la evolución a lo largo del ciclo límite.

La ventaja de este modelo artificial es que se pueden estudiar las propiedades generales (que no dependen del tipo de fuerza) con un grado de complejidad que para cualquier sistema requeriría integración numérica, con el correspondiente aumento en la capacidad de cálculo.

La variación de la fase durante un periodo de la excitación externa puede escribirse como  $\Delta\Phi_n = \omega_0 T_E$ . Entonces la ecuación 3.3.1.1, resulta:

$$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n; V_E) - \omega_0 T_E$$

La función  $F(\Phi_n, V_E)$  se denomina *curva o función de transferencia de fase (PTC)* y contiene toda la información dinámica relevante del sistema en alta relajación.

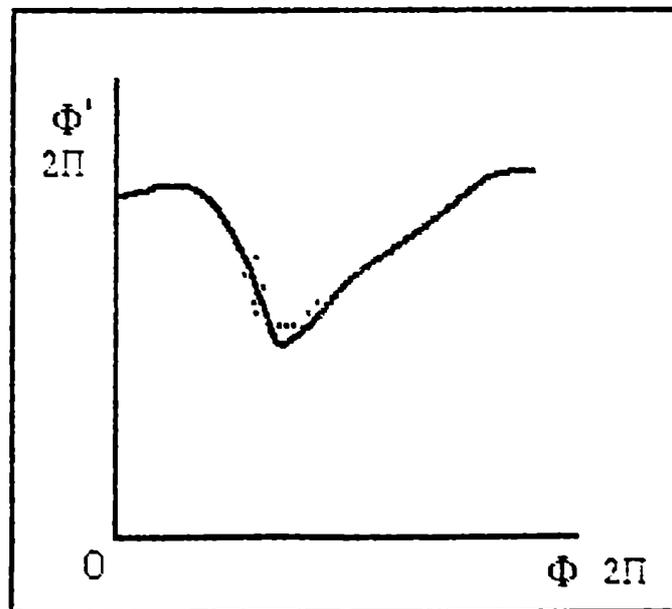
La iteración de este mapa permite obtener el retrato de fases. Como un cambio en la frecuencia de la fuerza externa no afectan la forma del mapa de las fases, las propiedades topológicas de éste se reflejarán sobre las características globales de la dinámica del sistema modelado.

Sin embargo, la PTC que resulta muy útil en el régimen de alta relajación no es válida al disminuir la disipación. La causa es que ya no puede ase-

gurarse que el sistema se encuentre a una distancia despreciable del ciclo límite al recibir el nuevo impulso. Sin embargo, el hecho que el retrato de fases persiste al utilizar fuerzas de tipo senoidal parece apoyar la hipótesis de la existencia de alguna otra aproximación unidimensional del mapa estroboscópico (Figliola y otros, 1989).

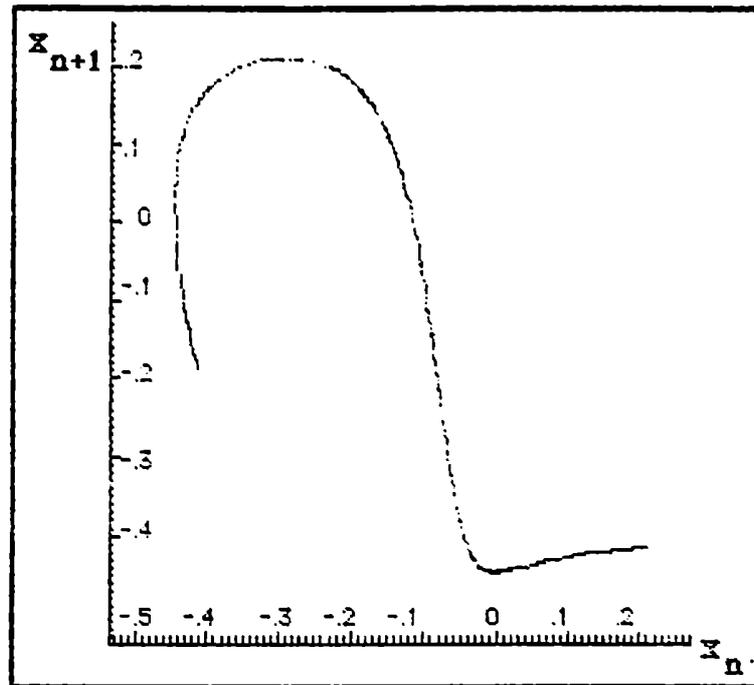
Para comprobar esta conjetura, se efectuó un muestreo estroboscópico del atractor del oscilador exactamente resoluble para los valores donde no es válida la **PTC**. Si existiera otro mapa unidimensional el muestreo debería encontrarse sobre una variedad unidimensional.

En la figura siguiente se muestran los resultados obtenidos. Debemos notar que los puntos del muestreo se encuentran sobre una curva, lo que corrobora la hipótesis de trabajo.



$\Phi$  es la fase antes de la delta.  $\Phi'$  la fase posterior. La curva llena es la **PTC** para el oscilador exactamente resoluble. Los puntos son las iteraciones del mapa exacto para  $V_E = 0.722163$ ,  $a = 0.79602$ ,  $b = 15.7079$  y  $\omega_0 = 1.57079$ .

Hemos asimismo calculado el mapa del primer retorno de la burbuja caótica y no muestra apartamiento del mapa unidimensional como se observa en la figura..



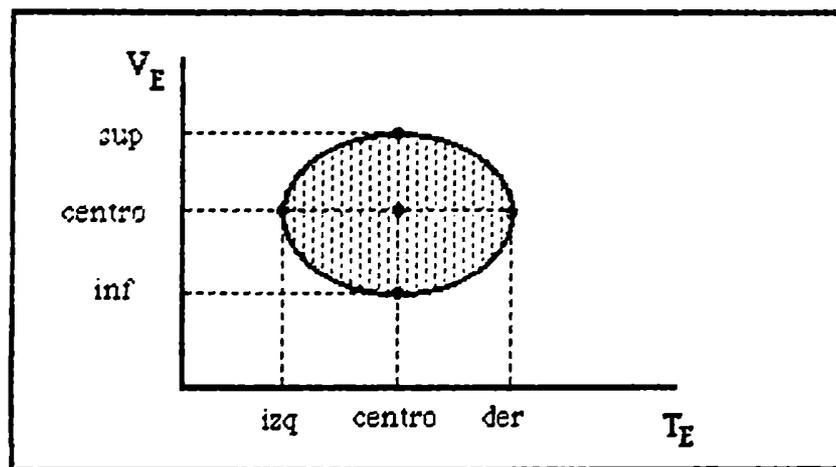
Mapa del primer retorno de la burbuja caótica

### 3.3.2 Caracterización de la burbuja caótica

Como ya discutimos anteriormente es necesario buscar indicadores que caractericen el caos del sistema a analizar. En el caso de la burbuja caótica hemos calculado las dimensiones que denominamos características (fractal, de información y de correlación) cuyos algoritmos y limitaciones fueron analizados en el capítulo 2. El método utilizado fue el de Albano y otros (1988). Para el

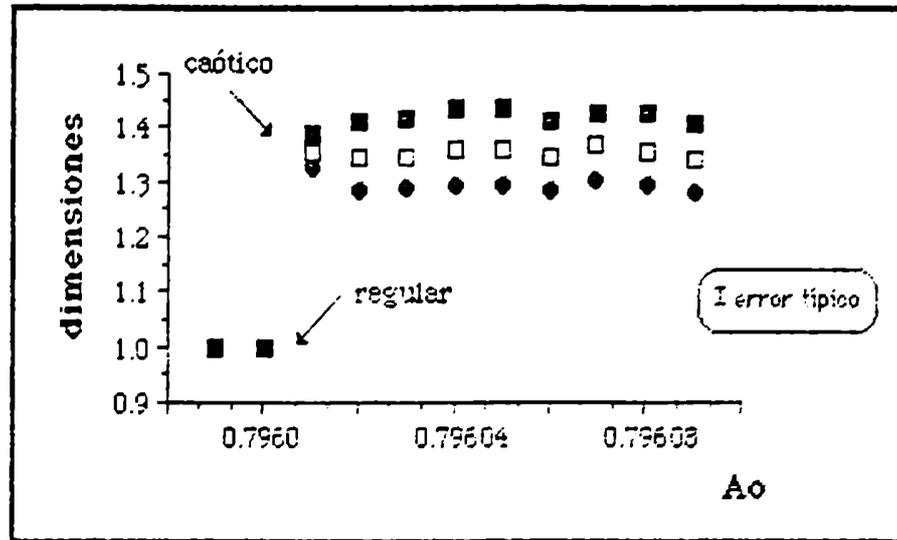
cálculo se tomó  $N = 10000$  y  $m = 1000$  donde  $N$  es el número de datos y  $m$  el número de vectores de referencia para realizar las comparaciones.

El siguiente esquema cualitativo resultará útil para visualizar la manera como se analizaron los datos que se discutirán a continuación. Los valores del centro (en el espacio de los parámetros), y de los extremos de la burbuja típica analizada son: *centro*  $V_E = 0.7233918$  y  $T_E = 2.60384$ , *bordes* derecho e izquierdo para el período de la fuerza externa ( $T_E = 2.60672$  y  $2.6016$ ) y superior e inferior para la intensidad de la fuerza ( $V_E = 0.724467$  y  $0.722163$ ).



Esquema cualitativo para indicar los límites de la variación de los parámetros de la burbuja caótica. Centro indica las coordenadas del centro de la misma. Izq. y der los bordes izquierdo y derecho para la variación de  $T_E$ . Sup e inf. los bordes superior e inferior de la variación de  $V_E$

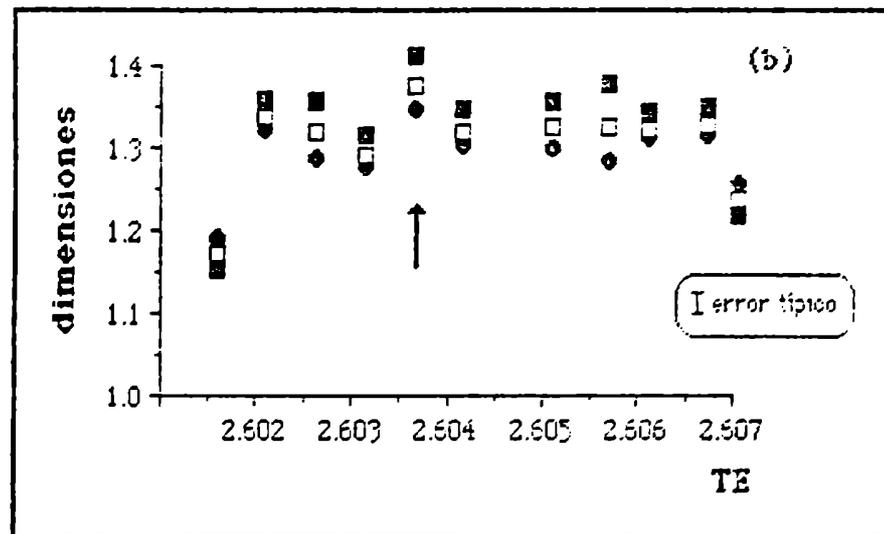
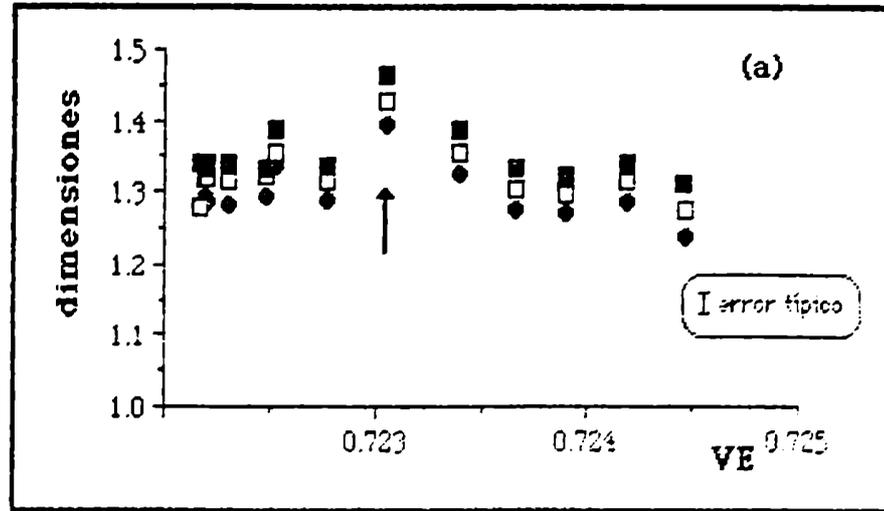
En el siguiente gráfico se muestra la variación de las dimensiones con la disipación para el borde de la burbuja. Es de notar que las dimensiones características definen aceptablemente la frontera regular-caótica y que, además esa definición resulta totalmente clara independientemente de la dimensión que se mire.



Variación de las dimensiones características con la disipación  $A_0$ . El círculo representa la dimensión de correlación, el cuadrado blanco la de información y el cuadrado negro la dimensión fractal. La barra indica el error del cálculo en todas las dimensiones.

En las siguientes figuras se muestra la variación de las dimensiones a lo largo de la burbuja, manteniendo el valor de la disipación constante en  $A_0 = 0.79602$ . En la figura a se varía la amplitud del pulso  $V_E$  y el periodo de la fuerza externa  $T_E$  en la figura b.

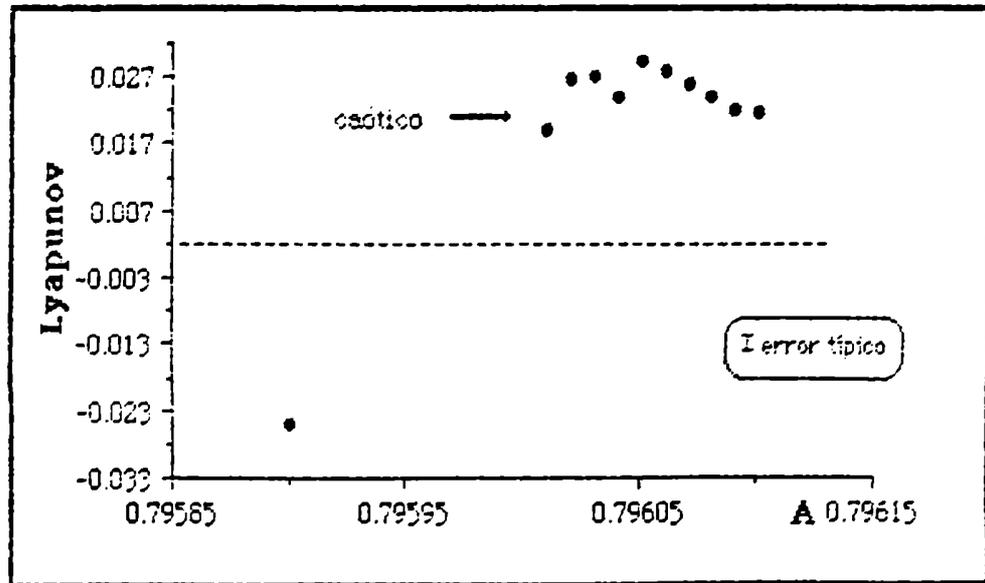
En el centro de la burbuja ( $V_E = 0.7233918$  y  $T_E = 2.60584$ , e indicado con una flecha) el valor de la dimensión es levemente mayor disminuyendo hacia los bordes, como es de esperar. Estos valores se señalan con una flecha.



Dimensiones características de la burbuja caótica para  $a = 0.79502$ . (a) en función de la intensidad de la fuerza externa  $VE$  y (b) en función del periodo de la fuerza externa  $TE$ . El círculo representa la dimensión de correlación, el cuadrado blanco la de información y el cuadrado negro la dimensión fractal. La barra indica el error del cálculo en todas las dimensiones.

Para obtener una mayor resolución en los cálculos de las dimensiones tendríamos que calcular momentos mayores que  $q = 2$  (ver ecuación 2.1.1). Recordemos que  $q = 0$  corresponde a la dimensión fractal,  $q = 1$  a la de información y  $q = 2$  a la de correlación. Sin embargo el tiempo de CPU necesario para llevarlos a cabo aumenta considerablemente dado que el tiempo requerido crece como  $N^4$ . Como ejemplo basta decir que en una PC con reloj de 8 MHz cada punto para  $q = 2$  requiere 14 hs. de CPU y obviamente para todos los cálculos realizados (un promedio de 10 situaciones para cada parámetro y cada dimensión) este tiempo de CPU están fuera, por el momento, de nuestras posibilidades.

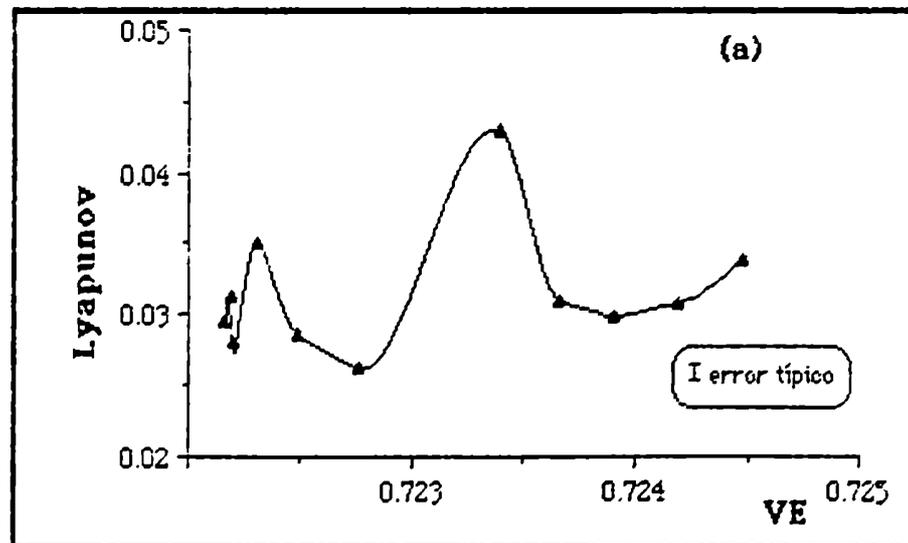
Se calcularon asimismo los coeficientes de Lyapunov para distintas situaciones. Hemos registrado en las figuras solamente el primer coeficiente por motivos de claridad. En la figura siguiente mostramos el coeficiente de Lyapunov para los valores que corresponden al centro de la burbuja.

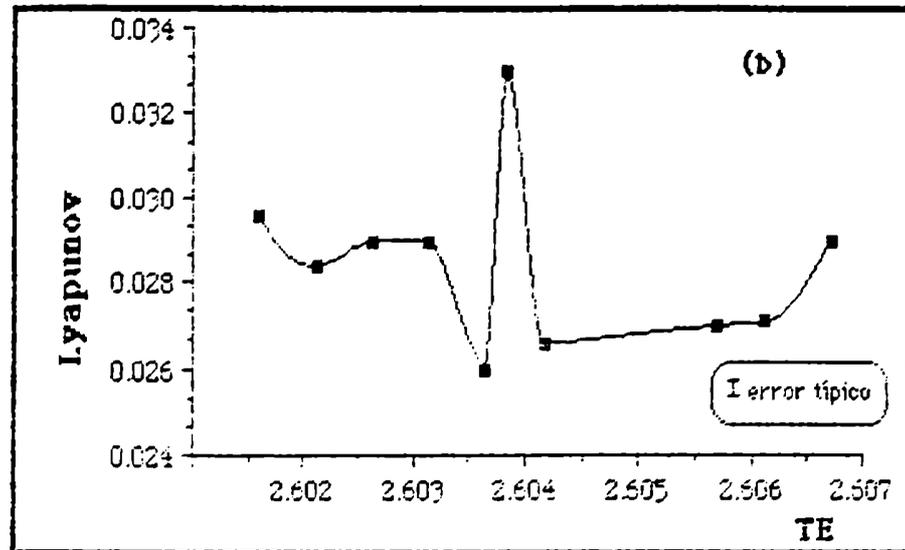


Variación del coeficiente de Lyapunov con la disipación manteniendo fijos los valores de  $T_E$  y  $V_E$  en la línea de  $V_C$  constante.

La línea punteada indica el cero del coeficiente de Lyapunov (que corresponde para una solución cuasiperiódica). Los valores encontrados para  $a$  mayores que 0.79601 resultan todos positivos indicando una situación caótica, mientras que los valores de  $a$  menores resultan negativos (solución periódica). Estos resultados están de acuerdo con los obtenidos en el retrato de fases (mapa de estabilidad) mostrado en la sección anterior. Conviene enfatizar la excelente resolución de la frontera regular - caótica dada por el cálculo del coeficiente de Lyapunov.

En el caso de las figuras siguientes, también hemos calculado los coeficientes de Lyapunov pero manteniéndonos en un valor de la disipación que nos garantizaba una burbuja caótica y variamos la intensidad de la fuerza  $V_E$  (figura a) ó el periodo de la fuerza externa  $T_E$  (figura b).





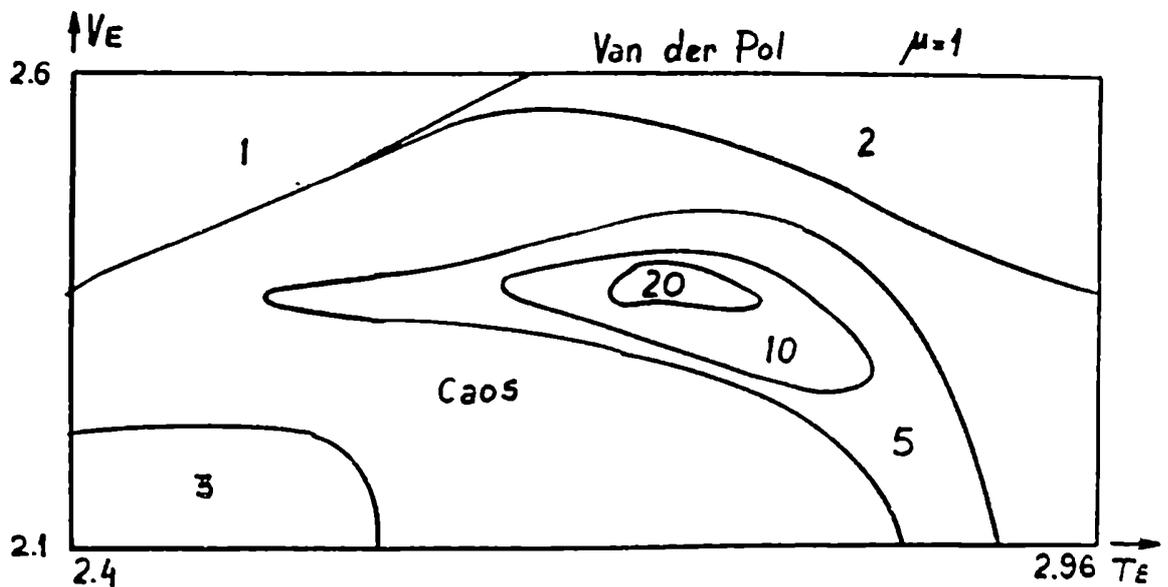
Variación del coeficiente de Lyapunov en el centro de la burbuja con  $\alpha_0 = 0.79602$ . La interpolación en ambos gráficos es por motivos de claridad: (a) corresponde a la variación de  $V_g$  mientras que (b) corresponde a la variación de  $T_g$ .

De la observación de las figuras encontramos que el coeficiente de Lyapunov (positivo en todos los casos, como era de esperar) resulta apreciablemente mayor en ambos casos para los valores de los parámetros que corresponden al centro de la burbuja.

Recapitulando, de los cálculos obtenidos encontramos que los valores de las dimensiones para la situación caótica en las burbujas es algo inferior (alrededor de 25%) que el valor obtenido para el atractor de modelo exactamente resoluble (cuya dimensión fractal es de 2.03), mientras que no se manifiestan diferencias sustanciales en los coeficientes de Lyapunov (para el oscilador exactamente resoluble es de 0.05 en un caso típico caótico). Dicho de otra manera, los coeficientes de Lyapunov son sumamente útiles para determinar el carácter regular o caótico de una trayectoria, mientras que las dimensiones ca-

racterísticas constituyen una sonda mas sensible al entorno considerado en el espacio de los parámetros. La conjetura que surge de este resultado es que la burbuja "guarda memoria" de las periodicidades que la originaron y su dimensionalidad baja en consecuencia. El analisis mas detallado de esta conjetura plantea un problema abierto que va mas alla de los objetivos de este trabajo y es tema actual de investigación.

Hemos observado mecanismos de formación de burbujas caóticas en los modelos anteriormente mencionados (Van der Pol y Bruselas) al variar el parametro que regula la disipacion (relajacion) del sistema, con resultados muy similares a los expuestos anteriormente. Un ejemplo ilustrativo del mecanismo de formación para el oscilador de Van der Pol se muestra en la siguiente figura para un valor del parametro  $\mu$ .



Estos calculos conjuntamente con las evidencias experimentales anteriormente mencionadas nos permite corroborar la hipótesis de universalidad del mecanismo de formación de las burbujas y su posterior desaparición.

### Capítulo 4: Oscilador forzado con excitación variable

En este capítulo discutiremos qué le sucede al oscilador exactamente resoluble forzado, que se analizó en el capítulo 3, cuando la amplitud de la deita es variable. La aplicación más inmediata de este sistema es en el tejido cardíaco cuando los pulsos del marcapasos no mantienen una altura constante.

Con el objeto de analizar este comportamiento, se excitó el oscilador con distintas secuencias que fueron elegidas de acuerdo a la secuencia de Fibonacci. La elección de esta secuencia no es arbitraria, sino que esta es la mejor aproximación al número irracional  $(\sqrt{5} - 1) / 2$  (número de oro). De manera tal que se observó y analizó el comportamiento para dos deltas, tres, cinco, ocho, trece, veintiuna y cincuenta y cinco. También se excitó al oscilador con una secuencia de cincuenta y tres deltas dada por el desarrollo binario de los primeros dieciséis dígitos del número pi ( $\pi$ ).

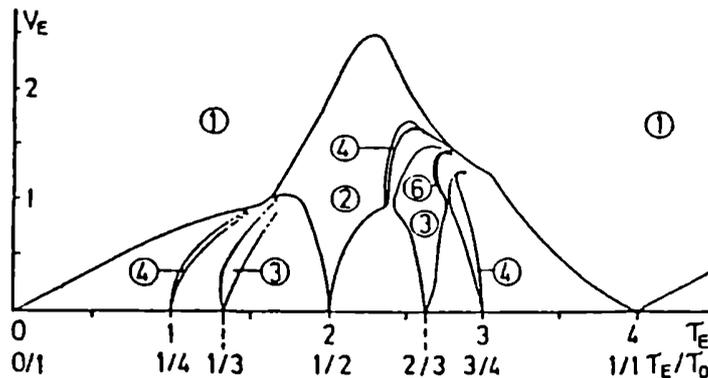
En la sección 1 se describe el método utilizado y se analizan los resultados obtenidos. Mientras que en la sección 2 se comparan con los obtenidos para el oscilador común y se discuten los resultados.

## 4.1 Forzado con deltas de amplitud variable

El oscilador parte de ciertas condiciones iniciales y evoluciona siguiendo una trayectoria (en el espacio de fases tridimensional) la cual es solución del sistema. Estudiar directamente la trayectoria resulta en general complejo pues el espacio es tridimensional. No obstante, se puede simplificar el estudio efectuando un mapa de Poincaré (estroboscópico), en intervalos de tiempo dados por el periodo de la fuerza externa.

Partiendo de una condición arbitraria e iterando el mapa estroboscópico hasta que decaiga el transitorio, se puede determinar la periodicidad de las soluciones en función de la amplitud y el periodo de la fuerza externa. El gráfico así obtenido se denomina **retrato de fase**.

El retrato de fase (mapa de estabilidad) para el oscilador exactamente resoluble excitado con una delta fue obtenido por Piro (1984) y Gonzalez (1987) se muestra en la siguiente figura (ver capítulo 3).



El mismo procedimiento se llevó a cabo cuando el oscilador es excitado por una secuencia de deltas de amplitud variable. Este análisis se llevó a cabo con distintas secuencias, con el objeto de determinar si el comportamiento depende o no del tipo de excitación.

Llamamos A la amplitud de una delta que mantendremos fija (para nuestro análisis A toma el valor de 1.317, que corresponde a una solución periódica en el caso del oscilador excitado con una delta), mientras B toma valores variables. Además la secuencias de estas deltas la hemos pensado para que se aproximen al número de oro ( $(\sqrt{5} - 1) / 2$ ). Para ello elegimos la secuencia de Fibonacci, que se detalla en el Apéndice 3.

Para el caso de dos deltas : la secuencia utilizada es ABAB....., Para tres deltas, ABAABA....., etc.. Los mapas de estabilidad para cada secuencia de deltas fueron realizados con barridas que cubrían amplias variaciones de los parámetros. Las corridas típicas incluyen valores de  $T_E$  variando desde 0.5 hasta 14 mientras que la variación de  $V_E$  fue desde 0.5 hasta 4 ambos en pasos de  $2 \times 10^{-3}$ . El error de las comparaciones de los períodos como en todos los cálculos es de  $10^{-7}$ .

Para tener idea de la magnitud de los archivos, basta decir que para cada secuencia de deltas calculadas se barrieron  $1.2 \times 10^6$  puntos y el tiempo de CPU requerido fue de 60 hs. en una PC con reloj de 32 MHz (equivalente en capacidad de cálculo a una VAX 11/780).

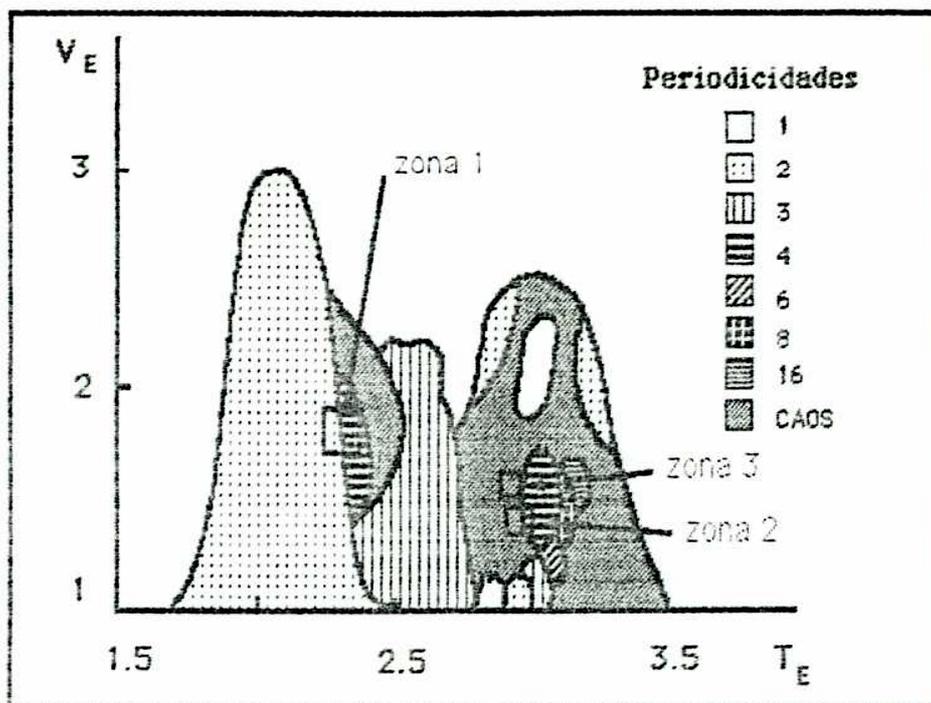


Figura 2: Mapa de estabilidad en el espacio de los parámetros para la secuencia de 3 deltas cuyas amplitudes varían de acuerdo a la secuencia de Fibonacci. Los periodos 1, 2, ... se miden en términos del periodo de la secuencia de deltas. Las zonas 1, 2 y 3 se mostrarán ampliadas y en particular ésta está dentro de la zona caótica

Este mapa de estabilidad dibujado de manera cualitativa es un ejemplo de las otras secuencias analizadas, todas muestran mapas similares, más aún este mapa se repite exactamente a lo largo del eje  $T_E$ . Esta característica (que los diagramas se repitan a sí mismos en una cantidad igual al periodo propio  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ) se debe a que el decaimiento del ciclo es muy rápido de manera que tiene lugar en intervalos menores que un periodo propio o de la fuerza externa y una vez en el ciclo límite, el sistema no puede distinguir situaciones que tengan lugar en intervalos mucho menores que un periodo propio o de la fuerza externa.

Las zonas sombreadas corresponden a las periodicidades encontradas, como se indica en la figura, mientras que las zonas no sombreadas corresponden a período 1. Posteriores ampliaciones de algunas zonas mostraron que este comportamiento es autosimilar, característica de la fractalidad del atractor. A continuación se muestran para ejemplificar algunas ampliaciones obtenidas del retrato de fases.

Las ampliaciones referidas son salidas de los cálculos realizados cuando se aplicó una secuencia ABA. El cero indica caos mientras que las otras periodicidades se muestran en módulo tres ya que este es el período de excitación de esta secuencia en particular, (aunque resulte redundante debemos destacar que las periodicidades están en unidades de secuencias de deltas). Es así que en las siguientes figuras, la periodicidad seis, es en realidad una periodicidad dos, a doce le corresponde cuatro, a veinticuatro ocho y así sucesivamente. La figura 3 representa una ampliación en la zona 1 señalada en la figura 2.

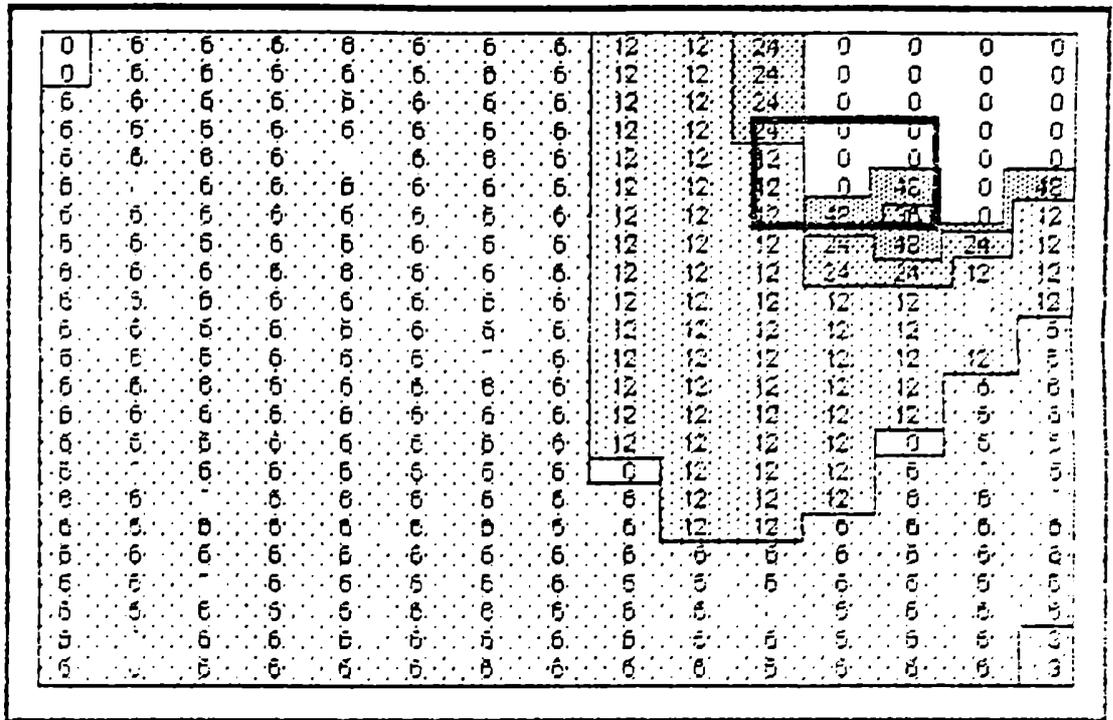


Figura 3: Ampliación para  $V_E$  (eje vertical) variando desde 1.74 a 1.9 en pasos de  $5.5 \times 10^{-3}$  y  $T_E$  (eje horizontal) desde 2.85 a 2.95 en pasos de  $4.7 \times 10^{-3}$

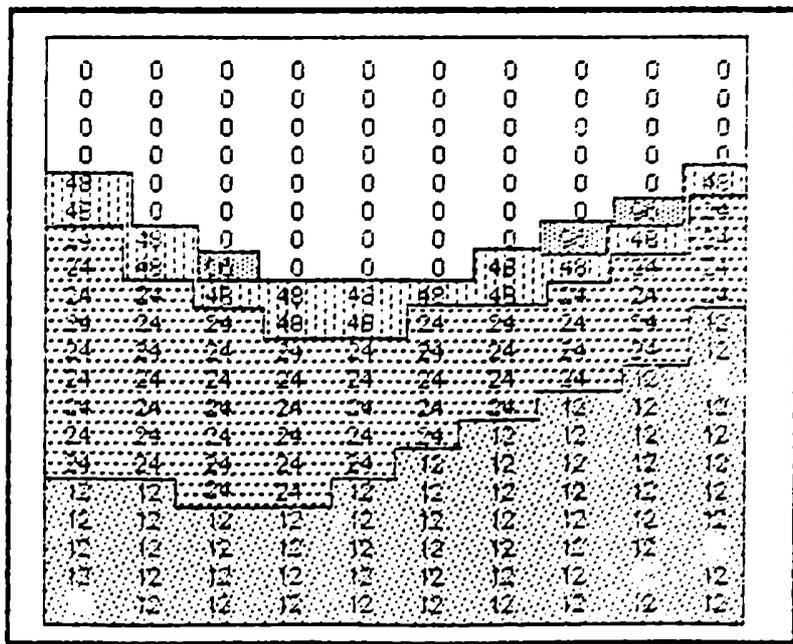


Figura 3a:  $V_E$  (eje vertical) variando desde 1.7754 a 1.81 en pasos de  $1.5 \times 10^{-3}$  y  $T_E$  (eje horizontal) desde 2.9128 a 2.9248 en pasos de  $1.2 \times 10^{-3}$

La figura 3a corresponde a una ampliación del rectángulo marcado en la figura 2, es interesante observar la repetición de la estructura, lo que es indicio de fractalidad (autosimilaridad ).

Las figuras 4 y 5 son ampliaciones de las zonas 2 y 3 de la figura 2 respectivamente.

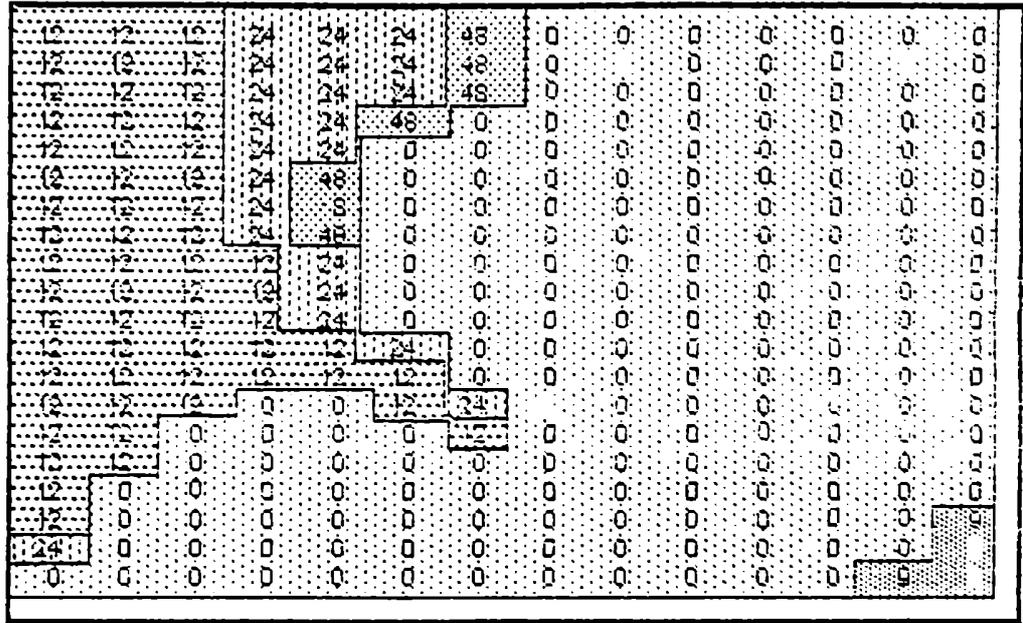


Figura 4:  $V_E$  (eje vertical) variando desde 1.3144 a 1.348 en pasos de  $1.679 \times 10^{-3}$  y  $T_E$  (eje horizontal) desde 2.4392 a 2.4584 en pasos de  $9.59 \times 10^{-4}$

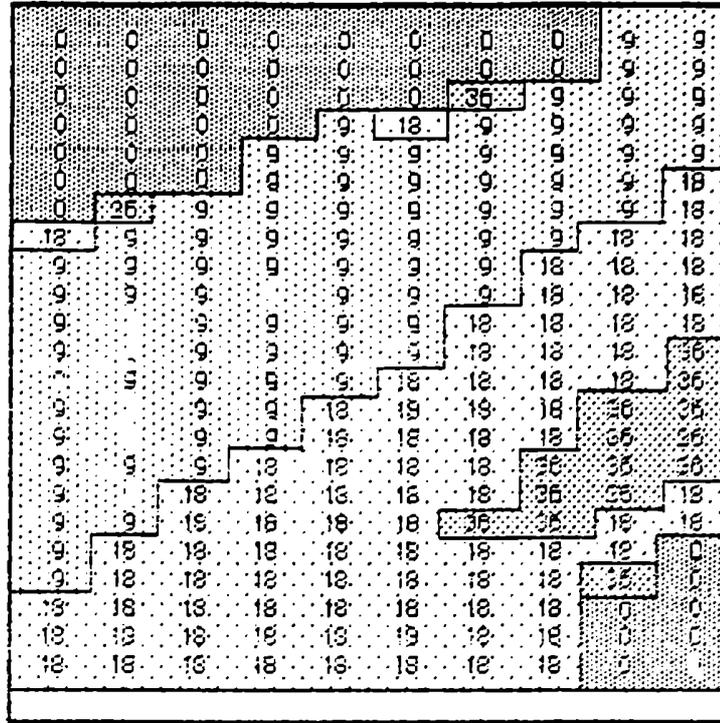


Figura 5  $V_g$  (eje vertical) variando desde 1.5632 a 1.592 en pasos de  $1.439 \times 10^{-3}$  y  $T_E$  (eje horizontal) desde 2.9344 a 2.9488 en pasos de  $1.439 \times 10^{-3}$

Salidas como éstas realizadas en gran cantidad pero, en bien de la síntesis no se muestran. Sin embargo han comprobado ampliamente las hipótesis de autosimilaridad.

#### 4.2 Resultados obtenidos

En la figura 6 se muestra para ejemplificar el atractor, obtenido de una solución caótica para una secuencia de 13 deitas. Los parámetros utilizados son:  $V_{E1} = 1.317$  y  $V_{E1} = 1.4$  con  $T_E = 2.9$

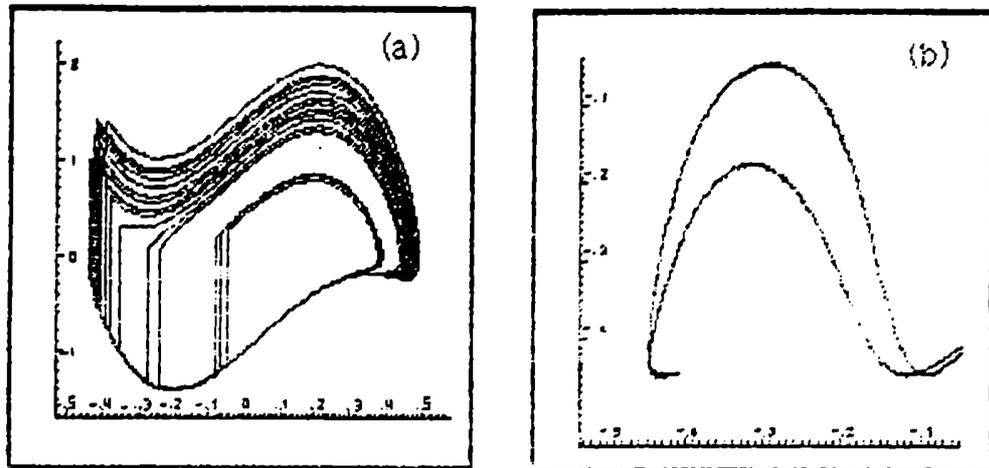


Figura 6 . (a) Atractor correspondiente a una secuencia de 13 deltas.  
 b) Mapa del primer retorno para el mismo atractor

Comparando con el oscilador exactamente resoluble (figura 7) en la situación caótica, (que no corresponden a los parámetros de 13 deltas, pues para ellos es regular) vemos que no hay diferencias sustanciales en las características del atractor, sin embargo el mapa del primer retorno pierde su carácter unidimensional, manifestándose bidimensional ya para cuando la secuencia es de dos deltas. Esta característica se ha podido comprobar con los datos del tejido cardíaco del corazón del sapo discutido en el capítulo 2. En esa circunstancia el mapa obtenido también presenta pérdida del carácter unidimensional (Savino y otros, 1989) hecho que se detallara en las conclusiones del trabajo.

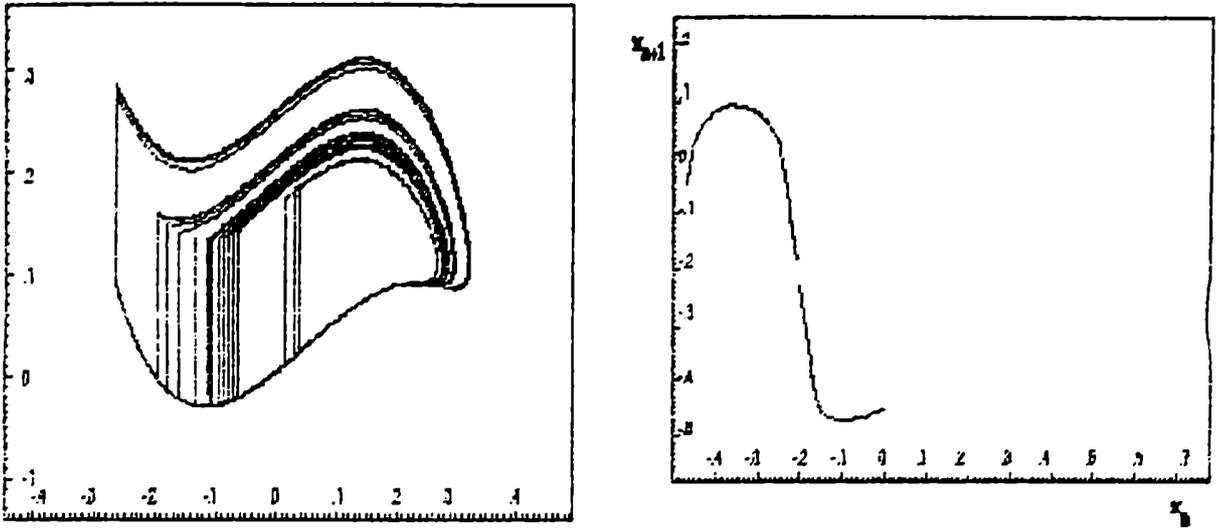


Figura 7. Atractor del oscilador exactamente resoluble excitado con una delfta de altura  $V_E = 1.625$  y  $T_E = 2.51$  conjuntamente con el mapa del primer retorno

Hemos calculado las dimensiones características de los atractores, en la situación caótica y el máximo exponente de Lyapunov con las técnicas analizadas en el capítulo 2.

Los resultados se resumen en la tabla siguiente:

<b>Cantidad de deltas</b>	<b>Dimensión Fractal</b>	<b>Lyapunov</b>
1	2.03 ± .0005	0.45
2	2.02 ± .0006	0.32
3	2.05 ± .0007	0.41
5	2.07 ± .0004	0.43
8	2.07 ± .0002	0.42
13	2.06 ± .0003	0.48
21	2.06 ± .0003	0.5
55	2.07 ± .0002	0.49
PI(53)	2.07 ± .0002	0.48

Como se puede observar los resultados son muy similares no demostrando diferencias apreciables ni en la dimensión ni en el coeficiente de Lyapunov. Hemos incluido una secuencia del número pi (obviamente irracional) para comprobar la independencia de la conducta del oscilador con respecto a los detalles finos de la excitación. La descomposición de pi en números binarios con una precisión de 16 dígitos es equivalente a una secuencia de cincuenta y tres fuerzas impulsivas.

A partir de resultados preliminares encontrados por González y Piro (1985) donde se analizaba la respuesta del oscilador exactamente resoluble cuando se lo excitaba con una secuencia de deltas de signo alternado encontra-

mos que la bidimensionalidad del mapa del primer retorno también se manifiesta en este caso como se observa en la figura 8.

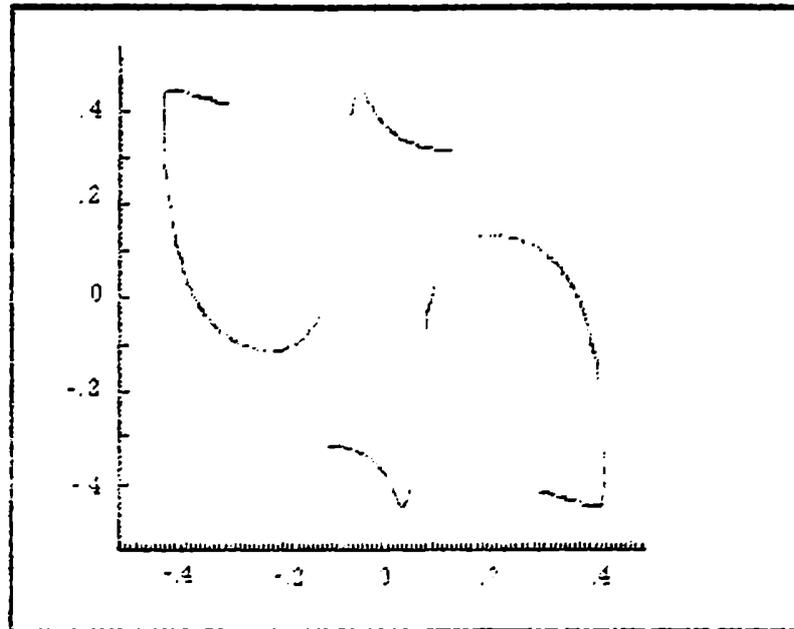


Figura 8: Mapa del primer retorno del oscilador excitado con una secuencia de deltas de signo alternado

De todo lo expuesto en este capítulo podemos observar características cualitativas dependientes e independientes de la secuencia de deltas utilizada.

Vamos a comparar el modelo excitado con una delta con los resultados obtenidos con secuencias de deltas de amplitud variable, que llamaremos simplemente varias deltas.

El mapa del primer retorno para una delta es unidimensional mientras que para varias deltas es bidimensional.

La dimensionalidad es similar en todos los casos así como los coeficientes de Lyapunov. Con estos indicadores no se pueden distinguir la pérdida del carácter unidimensional. Una posible alternativa sería, como discutimos en el ca-

pítulo 3, calcular los momentos superiores a  $q = 2$  lo que como ya se dijo está fuera de nuestras posibilidades por el tiempo de CPU requerido.

Los retratos de fase (mapas de estabilidad) son diferentes ya sea si tratamos con una delta (fig.1) como si analizamos varias deltas (fig.2) aunque ambos presentan autosimilaridad y similares rutas al caos (bifurcación de periodo, cuasiperiodicidad).

Como conclusión general encontramos que este oscilador presenta una conducta estable frente a cualquier tipo de excitación impulsiva, evidenciando solamente diferencias en el mapa del primer retorno. Esta estabilidad no significa que se mantenga ante otra excitación no impulsiva pues la respuesta es distinta.

## Conclusiones

Se observó la generación de burbujas caóticas en el oscilador excitado con una delta y su posterior desaparición cuando se disminuye el parámetro que regula la disipación del sistema.

Se confirmó que este comportamiento es universal para osciladores de relajación, siendo válida la aproximación unidimensional, cuando se lo excita con una sola fuerza impulsiva. También se encontró que las dimensiones características constituyen una sonda más delicada que el primer coeficiente de Lyapunov.

Se especula con la existencia de una aparente "memoria" en las zonas de caos en las burbujas proveniente de la curvatura de las lenguas periódicas que las originan. En consecuencia surgen algunas preguntas relacionadas, por ejemplo: si depende la dimensionalidad del orden de las periodicidades en el entorno de la burbuja, si es función del "espesor" de cada zona periódica que la rodea, etc. La comprobación del efecto de la aparente histéresis y las cuestiones asociadas es un problema aun abierto y escapa a los alcances de este trabajo.

Se analizó el oscilador exactamente resoluble cuando la amplitud de la fuerza impulsiva es variable. Elegimos la secuencia de Fibonacci porque es la que mejor aproxima al número de oro (que es el que está más lejos de algún racional). También se lo excitó con una secuencia definida por el número  $\pi$  y se obtuvo que su comportamiento en términos generales es independiente del tipo de excitación.

Se encontraron características fractales (autosimilaridad) independiente del tipo de secuencia utilizada.

Se encontró apartamiento del comportamiento unidimensional del mapa del primer retorno, que es el que se observa cuando la excitación es de magnitud constante y este aspecto no se refleja en ninguna de las dimensiones características, quedando abierta la investigación si las dimensiones  $D_q$  para  $q > 2$  dan algún indicio al respecto.

El comportamiento bidimensional del mapa del primer retorno se observa ya cuando la excitación periódica corresponde a una secuencia AB de deltas, indicando con A y B dos amplitudes distintas de la fuerza externa, también cuando se mantiene la misma amplitud pero los signos se alternan. (esto correspondería a las señales nerviosas de los marcapasos que involucran mecanismos de polarización y depolarización).

Se comprobó este efecto experimentalmente con los datos del tejido cardíaco del ventrículo del sapo puesto que, un sistema autónomo no oscilatorio (como el ventrículo perfundido) o un sistema oscilatorio (ventrículo in situ) pueden ser modelados por el oscilador exactamente resoluble.

Los datos analizados muestran que aparecen zonas de sincronización (enganche de fase) y transición al caos por duplicación de periodo descritos por ese sistema y el mapa de máximo contra máximo (M-1 vs M), que es equivalente al mapa del primer retorno en los sistemas experimentales, mostro un comportamiento también bidimensional avalando de esta manera las conclusiones cualitativas extraídas del oscilador exactamente resoluble.




## Referencias

- Andronov, A. A. y E. A. Vitt : *Theory of oscillators* Perg. Press, Oxford, 1966
- Albano, A. M. J. Muench, C. Schwartz, A. I. Mees y P. E. Rapp: *Phys. Rev. A* **38** (en prensa) 1988.
- Arnold, V. I. : *Funct. Anal. Appl.* **II** (2), 1,1977.
- Badii, R. y A. Politi: *J. Stat. Phys.*, **40**, 725, 1985.
- Balaboni, J. y A. Renyi. *Pub. Math. Inst. Hungarian Acad. Sc.* **1**, 9, 1956.
- Bocko, M., D. H. Douglas y H. H. Frutchy : *Phys. Lett* **104A**, (8), 338, 1984
- Benzi R., G. Paladin, G. Parisi y A. Vulpiani: *J. Phys.* **A19**, 823, 1986.
- Bergé, P., M. Dubois, P. Maneville y Y. Pomeau : *J. Phys. Lett.* **41**, L341, 1980
- Broomhead, D. S. y G. P King: *Physica* **20D**, 217, 1986.
- Eckmann, J. P. y D. Ruelle :*Rev. Mod. Phys.* **57** , 617, 1983.
- Feigenbaum, M. J.: *Los Alamos Sci.* **1**, 4 ; *Comm. Math. Phys.* **77**, 65., *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **357**, 330, 1980.
- Feigenbaum, M. J.: *Phys. Lett A* **74** ,375. ; *J. Stat. Phys.* **21**, 669, 1979.
- Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications* Vol 2 (N.Y. Wiley),1971
- Figliola M.A. y L. Romanelli: *Geoacta* **15**, (1), 391, 1988.
- Figliola M. A., H. Larrondo y L. Romanelli: preprint, 1989
- Fraser, A. M. : *Dimensions and Entropies of Chaotic Systems* ,ed. G. Mayer - Kress p. 82 (Springer.Berlin),1986.
- Fraser, A. M. y H. L. Swinney : *Phys. Rev.* **33A**, 1134, 1986.
- Frish, U. y G. Parisi en " *Turbulence and predictability of geophysical flows and climatic dynamics*" ed. N. Ghil, L. Benzi y G. Parisi (North Holland, 1985)

- Gonzalez, D. L y O. Piro : Phys. Rev. Lett., **55**,17 1985
- Gonzalez, D. L.: "*Sincronizacion y Caos en Osciladores no lineales*" Tesis Doctoral UNLP 1987.
- Grassberger P. y I. Procaccia, Phys. Rev. **A28** , 2591,1983.
- Grassberger, P. y I. Procaccia: Physica **9D**, 189, 1986.
- Grebogi, C., E. Ott y J. A. York, Physica **D7**,181, 1983
- Guckenheimer, J. y Holmes, P.: *Nonlinear oscillators, Dynamical systems and Bifurcations of vector fields*, Springer - Verlag, N. Y., 1984
- Halsey, F. C., M. H. Jensen, L. F. Kadanoff, I. Procaccia y B. I. Shraiman: Phys. Rev. Lett, **55**, 2796, (1985).
- Henon, M.: Comm. Math. Phys., **81**, 229, 1976
- Hentschel H. G. I y I. Procaccia: Physica **3D**, 435, 1983.
- Jensen, M.H., L. P. Kadanoff, A. Libchaber I. Procaccia y J. Stevens: Phys. Rev. Lett., **55**, 2798, 1985.
- Knobloch, E. y N. O. Weiss: Phys. Lett **85A**, (3), 127, 1981
- Kurths, J. y H. Herzel : Physica **25D**, 165,1987.
- Landau, L. y E. Lipschitz : *Fluid Mechanics* ( Pergamon, Oxford ), 1959
- Lorenz, E. N. : J. Atmosph. Scies. **20**, 130, 1963.
- Mandelbrot B. B., J. Fluid. Mech., **62**, 331, 1974.
- Mandelbrot, B. B. "*The fractal geometry of nature*" (Freedman, San Francisco 1982).
- Mañé, R.: *Dynamical Systems and Turbulence*, vol **898** de "Lectures Notes in Mathematics" (ed. D. A. Rand y L. S. Young) Springer (Berlin) p. 230, 1981.

- Martinerie, J., A.M.Albano, A. I. Mees, T. R. Bashore y P. E. Rapp (1988)  
comunicación interna.
- Maurer, J. y A. Libchaber: J. Phys. Lett. **41**, L515, 1980
- Newhouse, S., D. Ruelle y F. Takens : Comm. Math. Phys., **64**, 35, 1978
- Nicolis, C. y G., Nicolis : Nature, **311**, Nº 5986, 529, 1984.
- Oppo, G. L. y A. Politi: Phys. Rev A , **30**, (1),435, 1984.
- Piro, O : *Caos en sistemas dinámicos*. Tesis doctoral 1984
- Pomeau Y., J. C. Roux, A. Ross, S. Bachelar y C. Vidal: J. Phys. Lett. **42**, L515,  
1981
- Peixoto, M. M.: Topology. **1**, 101. 1963
- Romanelli, L., M. A. Figliola, F. A. Hirsch y S. M. Radicella: Solar Physics **110**,  
391, 1987.
- Romanelli, L., M. A. Figliola y F. A. Hirsch : J. Stat. Phys. **53** ( 3), 991, 1988.
- Ruelle, D. y F. Takens: Comm. Math. Phys. **20**, 167, 1971
- Ruelle, D.: Bol. Soc. Bras. Mat. **9**, 83, 1978.
- Russel, D. A., J. D. Hansen y E. Ott :Phys. Rev .Lett. **45**, 1175, 1980.
- Savino, G. , L. Romanelli, D. L. González, O. Piro y M. Valentinuzzi : Biophys. J.  
(en prensa), 1989
- Smith, R. A.: J. London Math. Soc., **36**, 33, 1961
- Takens, F.: *Dynamical Systems and Turbulence*, vol **898** de "Lectures Notes in  
Mathematics "ed. D. A. Rand y L. S Young (Springer. Berlin) p. 366,1981.
- Teitsworth, S. W. y R. M. Westervelt : Phys. Rev. Lett **56**, (5), 516, 1986
- Wegerer, M. y C. Klingshern: Phys. Rev. A **35**, (10), 4247, 1987
- Wolf, A., J. B. Swift, H. L. Swinney y J. A. Vastano: Physica **16D**, 285, 1985.

## Apéndice 1

La topología diferencial generaliza las nociones familiares del cálculo vectorial en espacios más abstractos con el objeto de separar la esencia de las estructuras investigadas a partir de las coordenadas utilizadas para describirlas. Se necesita para describir la evolución de los sistemas dinámicos de manera más natural. A continuación daremos definiciones más rigurosas y enunciados de teoremas que se utilizaron en el desarrollo de esta tesis.

### A.1 - Definiciones :

Dado un ordenamiento que permita determinar la magnitud relativa de dos elementos de un conjunto, se define *supremo* (  $\sup$  ) como el elemento máximo del mismo, mientras que el elemento mínimo se llama *ínfimo* (  $\inf$  ).

Si los elementos de un conjunto se pueden designar por enteros, el conjunto es *numerable*.

*Intersección:*  $X \cap Y$  es  $\{ x \mid x \in X, y x \in Y \}$

*Unión:*  $X \cup Y$  es  $\{ x \mid x \in X, \text{ ó } x \in Y \}$

*Partición* de un conjunto es una colección de subconjuntos no nulos y disjuntos de un conjunto cuya unión es el conjunto.

*Intersección* de dos particiones  $A$  y  $B$ , es el conjunto de todas las intersecciones de los elementos de una partición.

*Complemento* de un conjunto  $X \subset Y$ , es el conjunto de todos los puntos en  $Y$  contenidos en  $X$ .

*Producto directo* de dos conjuntos  $X$  e  $Y$  se define como:

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X; y \in Y\}$$

Dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , se define entre ellos una *transformación*  $f : X \rightarrow Y$  que asocia cada elemento de  $x$  que pertenece a  $X$  con un único elemento determinado  $y$  que pertenece a  $Y$ .

Una transformación  $f : X \rightarrow Y$  es *lineal* si  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ,  $\forall x, y \in X$  y  $\alpha$  y  $\beta$  constantes.

Si para cada  $y \in f(X)$  existe un único  $x$  tal que  $y = f(x)$ , entonces se dice que es una transformación *uno a uno* ó *inyectiva*

Si  $f$  es inyectiva entonces tiene una transformación *inversa*  $f^{-1}$  definida obviamente como: si  $f(x) = y$  entonces  $f^{-1}(y) = x$ .

Si el rango de  $f$  es todo el espacio  $Y$ , entonces es una transformación *sobre* ó *suryectiva*, y se escribe  $f(X) = Y$ .

Si  $f$  es inyectiva y sobre entonces es *biyectiva*.

*Espacio métrico* es un conjunto para el cual esta definida una medida de distancia entre los puntos y se puede definir el entorno de los puntos.

La función distancia (métrica)  $d$ , no necesariamente debe estar relacionada con la distancia euclídea, debe satisfacer que:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq 0 \\ d(x,y) &= 0 \text{ ssi } x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Una transformación  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios métricos es *continua* en  $x \in X$  si para un entorno  $N$  de  $f(x)$  contenido en  $Y$ , ( $N \subset Y$ ) existe un entorno  $M \subset X$  de  $x$ .

Un *isomorfismo* es una transformación biyectiva.

Un *homeomorfismo* es una transformación biyectiva y bicontinua ( $f$  y  $f^{-1}$  son continuas): cada elemento de  $X$  está asociado a un elemento de  $Y$  y no hay saltos en la asociación

Se llama *variedad*  $m$  - dimensional a una superficie  $m$  - dimensional en  $\mathbb{R}^n$  definida por  $n-m$  relaciones entre las coordenadas.

*Dimensión topológica* de una variedad es la que corresponde al espacio real y se denota por  $\dim(M)$ .

Un subconjunto tiene *medida cero* si posee un cubrimiento numerable de esferas de volúmen arbitrariamente pequeño.

$A$  es un *atractor* si existe un abierto tal que en un entorno  $U$  de  $A$   $f^t U \rightarrow A$  cuando  $t \rightarrow \infty$

#### *Definición operacional*

Existe un conjunto en el que los puntos  $f^t x$  se acumulan para  $t$  grandes.

#### a) *Punto fijo atractivo*

Sea  $P$  un punto fijo en el sistema dinámico  $f^t P = P \forall t$

La derivada  $D_P f^t = f^t$  en el punto fijo es una matriz de  $m \times m$  o un operador en el espacio de Hilbert. Si su espectro está en un disco  $(z: |z| < \alpha)$  con  $\alpha < 1$  entonces  $P$  es un punto fijo atractivo.

Cuando la evolución temporal está definida por ecuaciones definidas en  $\mathbb{R}^m$ , la condición de atracción es que los autovalores de  $D_P f_m$  tengan todos parte real negativa.

#### b) *Órbitas periódicas (ciclos límites)*

Si existe un punto  $A$  y un  $T > 0$  tal que  $f^T A = A$  pero  $f^t A \neq A$  para

$0 < t < T$ , entonces  $A$  es un punto periódico de período  $T$  y  $R = \{f^t A : 0 \leq t < T\}$  es la órbita cerrada correspondiente.

La derivada  $D_A f^T$  tiene autovalor 1 correspondiente a la dirección tangente a  $T$  en  $A$ .

### c) *Atractor cuasiperiódico*

Una órbita periódica es un sistema continuo en un circuito y el movimiento puede ser escrito como:

$$\phi(t) = \phi(0) + \omega t \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

donde  $\omega = 2\pi/T$

Si se consideran los osciladores de frecuencias  $\omega_1, \dots, \omega_n$  (sin que haya una relación racional entre los  $\omega_i$ ), el movimiento de los osciladores puede ser descrito por:

$$\phi_i(\tau) = \phi_i(0) + \omega_i \tau \quad (\text{mod. } 2\pi) \quad i=1, \dots, k$$

y su movimiento da lugar a  $k$  círculos ( $k > 1$ ) lo que corresponde a un toro  $k$ -dimensional  $T^k$ . Si  $T^k$  está contenido en  $R^m$   $m \geq k$ , entonces  $T^k$  es un atractor cuasiperiódico.

## A.2 - Sistema de Lorenz

Este sistema así conocido es uno de los primeros conjuntos encontrados de ecuaciones diferenciales que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales (Lorenz, 1963), y puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma (y - x) \\ \dot{y} &= -xz + \rho x - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

con  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\rho$  como parámetros. En el espacio de fases (ver capítulo 1) se observa que la evolución temporal del sistema se efectúa en un subconjunto bien definido del espacio tridimensional (atractor), con un comportamiento aleatorio que proviene de la manera particular en que el sistema converge sobre el atractor.

En la figura mencionada se muestra esta evolución en el plano y-z con  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 28$  como valores de los parámetros.

### A.3 - Medidas de Probabilidad Invariantes

La medida de probabilidad  $\mu$  sobre A describe cuan frecuentemente varias partes de A son visitadas por la órbita  $x(t)$  que describe el sistema.

Operacionalmente  $\mu$  se define como el promedio temporal de la delta de Dirac en los puntos  $x(t)$

$$\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \delta_x(t)$$

Si  $\Phi$  es una función continua entonces se define

$$\rho(\Phi) = \int \rho(dx) \Phi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \Phi(x(t))$$

Esta medida  $\rho$  es invariante en una evolución temporal (sistema dinámico). Para todo  $\Phi$  se tiene

$$\rho(\Phi \circ f^t) = \rho(\Phi)$$

Una propiedad de  $\rho$  es que no es posible descomponerla, es decir que es ergódica.

Las medidas invariantes (ergódicas) están definidas por promedios temporales.

#### A.4 - Medidas S R B

Los conjuntos atractivos, son uniones de variedades inestables. Transversalmente a ellas, a menudo se encuentra una estructura discontinua que corresponde a un plegado complicado de la variedad inestable sobre si mismas. Esto evidentemente sugiere que las medidas invariantes pueden dar una determinación grosera de las densidades en las direcciones que son transversales a dichos pliegues.

Por otra parte, debido al estiramiento en la dirección inestable la medida es suavizada en esa dirección.

Se llamará medida **SRB** (por Sinai, Ruelle y Bowen) a las medidas que son suaves en las direcciones inestables.

La existencia de medidas **SRB** tiene consecuencias muy importantes ya que la mayoría de las relaciones entre entropía, dimensiones y exponentes característicos se realizan a través de ellas.

A veces no existen medidas **SRB**, pero es poco claro cuán frecuentemente esto sucede. Por otra parte no se conocen ejemplos de sistemas físicamente relevantes sin medidas **SRB**.

Intuitivamente, definiremos las medidas **SRB** como medidas con densidades suaves en la dirección de estiramiento o inestables del sistema dinámico definido por la transformación  $f$ .

Vamos a aclarar algunos conceptos:

1. En la Teoría Ergódica de sistemas dinámicos diferenciales no hay distinción esencial entre sistemas de tiempo discreto y los de tiempo continuo. Es decir, que cualesquiera que sean los sistemas (continuos o discretos) que se traten, los exponentes característicos, las dimensiones, las variedades estables e inestables y la entropía permanecen invariantes.

2. Si  $f$  es un difeomorfismo (es decir un mapa diferenciable con inversa diferenciable) entonces nuestro sistema dinámico está definido para tiempos positivos y negativos. Si  $f$  además es dos veces diferenciable entonces la inversa también lo es. Para lo que nos interesa es suficiente suponer que  $f$  es dos veces diferenciable y es un *difeomorfismo* o al menos que  $f$  y  $Df$  sean

inyectivas (lo que significa que si  $f_x = f_y$  lo que implica  $x = y$  y  $D_x f u = D_x f v$  entonces  $u = v$ ).

En los sistemas físicos, se puede demostrar, en un gran número de casos que los promedios ergódicos

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k,x}$$

tienden a la medida **SRB** cuando  $n \rightarrow \infty$ .

## Apéndice 2

### Teoría de Floquet y estabilidad de las órbitas periódicas.

Consideremos una pequeña perturbación de una solución periódica en un sistema de ecuaciones dado por:

$$\frac{dx}{dt} = F\mu[x(t), t] \quad (\text{A.1})$$

donde  $F\mu \equiv (F_1, F_2)$  es periódica,  $x \equiv (x, y)$  y  $\mu$  es el parámetro de control del sistema

Si  $\bar{x}(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$ . Reemplazando en (A.1) tenemos

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = F\mu(x(t) + \delta x(t), t) - F\mu(x(t), t)$$

para  $\delta x \rightarrow 0$

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = A(t) \delta x \quad (\text{A.2})$$

con

$$A(t) = \left[ \frac{\partial F\mu}{\partial x} \right] [x(t), \delta x(t)] = \frac{1}{\delta x} [F\mu(x + \delta x) - F\mu(x)]$$

como  $F\mu$  es periódica  $A(t) = A(t + T)$

Si consideramos dos soluciones linealmente independiente  $\delta_{x_1}$  y  $\delta_{x_2}$ , entonces cualquier solución general (A.2),  $\delta_x$  tendrá dada por una combinación lineal de  $\delta_{x_1}$  y  $\delta_{x_2}$ .

Por otra parte  $M$  es una matriz independiente del tiempo que transforma  $\delta_x(t)$  en  $\delta_x(t+T)$ .

$$\delta_x(t(t+T)) = M\delta_x(t)$$

Sustituyendo en (A.2)

$$\frac{d[\delta_x(t+T)]}{dt} = M \frac{d[\delta_x(t)]}{dt} = A(t) M [\delta_x(t)] \quad (A.3)$$

tal que si  $\delta_x(t)$  es solución de A.2 entonces  $\delta_x(t+T)$  también lo es.

Si  $\Phi = [\delta_{x_1}, \delta_{x_2}]$  es una matriz cuyas columnas son las correspondientes a las soluciones linealmente independientes de (A.2). La matriz se llama matriz fundamental de la solución.

A partir de (A.3) resulta que también  $\Phi(t+T)$  es también matriz fundamental de la solución.

Consideremos  $\Phi(t)$ , esta matriz con valores iniciales iguales a la matriz unidad

$$\Phi(0) = I \text{ y por lo tanto } \Phi(T) = M.$$

$\Phi(T)$  se llama la **matriz de monodromía** y se tiene :

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \Phi(T);$$

$$\Phi(nT) = \Phi^n(T) \quad (A.4)$$

Los autovalores  $\lambda$  de la matriz de monodromía son llamados multiplicadores de Floquet que satisfacen las ecuación de autovalores

$$\Phi(T) \Psi = \lambda(T) \Psi$$

con  $\Psi$  un autovector de  $\Phi(t)$ .

De (A.4) se tiene

$$\lambda(nT)\Psi = \Phi(nT)\Psi = \Phi^n(T)\Psi = \lambda^n(T)\Psi$$

tal que  $\lambda(nT) = \lambda^n(T)$ .

Si definimos el parámetro de Floquet  $\sigma$  como:

$$\sigma = \xi + i\eta$$

relacionado con el multiplicador de Floquet por :

$$\lambda(T) = e^{\sigma T}$$

y por lo tanto:

$$\Phi(T)\Psi = e^{\sigma T}\Psi$$

Es importante destacar que la parte real de los exponentes de Floquet se conoce como el exponente de Lyapunov.

Si  $\sigma$  es un exponente de Floquet que pertenece a  $\lambda(T)$  entonces también  $\sigma + (2\pi ik/T)$  con  $k$  entero, es un exponente de Floquet a quien le corresponde el mismo autovalor  $\lambda(T)$ .

Con el conocimiento de los multiplicadores de Floquet y de los exponentes podemos caracterizar la estabilidad de las órbitas periódicas de nuestro sistema dinámico forzado.

Si  $\delta(t)$  es una perturbación de la órbita periódica  $x(t)$  entonces si la órbita es estable  $\delta x$  decrecerá con el tiempo. Mientras que si la órbita es inestable aumentará.

$\delta x \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  solo si:

$$|\lambda(T)| = e^{\xi T} < 1$$

para todos los multiplicadores de Floquet del espectro  $\Phi(T)$  y por lo tanto:

$$\xi = \text{Re}[\lambda(T)] < 0$$

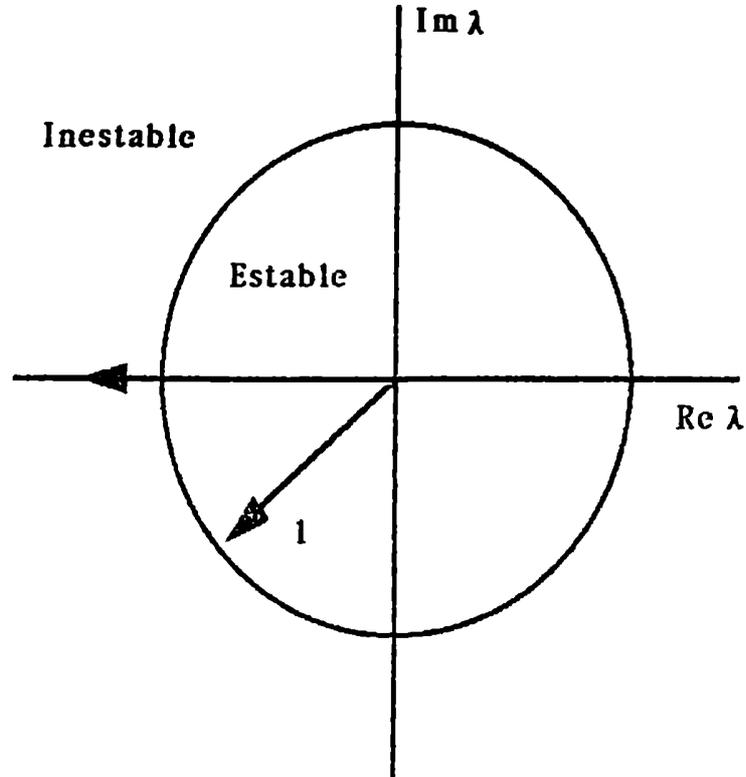
Esto implica que en un sistema dinámico bidimensional una órbita es estable si los dos multiplicadores de Floquet correspondientes a direcciones perpendiculares de la trayectoria tienen módulo menores que uno (yacen dentro del círculo unidad en el plano complejo de los multiplicadores de Floquet).

Por otra parte, la órbita es inestable si al menos uno de los multiplicadores tiene módulo mayor que uno (fuera del círculo unidad).

El proceso de desestabilización de una órbita se produce en el cruce del círculo unidad. La manera en que el multiplicador de Floquet cruza el círculo unidad indica el tipo de bifurcación involucrada en el proceso de desestabilización de la órbita.

Si el multiplicador de Floquet cruza el círculo unidad pasando por el valor  $-1$  tenemos una bifurcación *nodo - silla*. Si pasa a través del valor  $-1$  tenemos bifurcación por *duplicación de período* como se describió en el Capítulo 1.

Las implicancias de la estabilidad de los multiplicadores de Floquet se representan en la figura A en el plano complejo de los multiplicadores de Floquet.



**Figura A.** Plano complejo de los multiplicadores de Floquet. Las órbitas periódicas que tienen todos los multiplicadores de Floquet dentro del círculo unidad son estables. Si al menos un multiplicador de Floquet está afuera del círculo unidad la órbita es inestable. Esta pierde estabilidad cuando el multiplicador cruza el círculo unidad. En esta figura se muestra el cruce en -1 que corresponde a una bifurcación de período.

Es interesante verificar los exponentes de Floquet y los multiplicadores para bifurcación por duplicación de período.

En el valor crítico de la bifurcación  $\mu^*$ , el módulo del multiplicador de Floquet es igual a 1.

$$1 = |\lambda_{\mu^*}(T)| = e^{\xi T}$$

lo que significa que  $\xi = 0$ .

Por lo tanto:

$$\lambda_{\mu^*}(T) = e^{i\eta_{\mu^*}T} = e^{i\omega_0 T}$$

con  $\eta_{\mu^*} = \omega_0$ .

Si consideramos

$$0 < \omega_0 < 2\pi/T$$

El multiplicador de Floquet es univaluado. Si tenemos  $\delta x(t) = e^{i\omega_0 T} V(t)$ , y la solución es en  $nT$  entonces:

$$e^{i\omega_0(t+nT)} V(t+nT) = e^{i\omega_0 T} V(t)$$

y como  $V(t) = V(t+nT)$  por lo tanto:

$$e^{i\omega_0 nT} = 1; \quad \omega_0 nT = 2\pi m \text{ y } \omega_0 = (m/n)(2\pi/T)$$

En el caso de duplicación de período  $(m/n) = 1/2$  entonces  $\omega_0 = \pi/T$  y por lo tanto

$$\lambda_{\mu^*}(T) = e^{i\pi T} = -1$$

Lo que nos indica que una bifurcación de duplicación está caracterizada por el pasaje de un multiplicador de Floquet de valor -1.

### Apéndice 3

#### Información mutua

En este apéndice las definiciones se dan en términos de sistemas discretos por simplicidad, pero pueden generalizarse a variables continuas.

Consideramos sistemas  $S$  y  $Q$  que consisten en conjuntos discretos de posibles mensajes  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  y  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  con las probabilidades asociadas  $(P_S(s_1), \dots, P_S(s_n))$  y  $(P_Q(q_1), \dots, P_Q(q_n))$ .

La entropía  $H(S)$  es la cantidad promedio de información ganada en una medición de  $S$

$$H(S) = - \sum_{i=1}^n P_S(s_i) \ln P_S(s_i)$$

y  $H(Q)$  se define análogamente.

La información mutua de los sistemas  $S$  y  $Q$  se denotan como  $I(Q,S)$ . Dada una medición de  $S$ ,  $I(Q,S)$  es el número de bits de  $q$ , en promedio, que puede ser predicho

$$I(Q,S) = H(Q) + H(S) - H(S,Q)$$

donde  $H(Q)$  y  $H(S)$  son las entropías de los sistemas  $Q$  y  $S$  respectivamente.

$H(Q,S)$  es la función entropía conjunta y es la cantidad promedio de información ganada cuando se miden los pares  $(S,Q)$  donde la función distribución de la probabilidad conjunta  $P_{SQ}(s_i, q_j)$  es la probabilidad que  $s = s_i$  y  $q = q_j$

$$H(S,Q) = - \sum_i^n \sum_j^m P_{sq}(s_i, q_j) \ln P_{sq}(s_i, q_j)$$

y como  $H(S,Q) = H(Q,S)$  entonces  $I(Q,S) = I(S,Q)$

Supongamos una variable  $u$  que es investigada y tiene un tiempo de muestreo  $T_s$ . En el contexto descrito anteriormente de sistema  $S$  y sistema  $Q$ ,  $s$  es la medición de  $u$  en el tiempo  $t$  y  $q$  la medición en un tiempo posterior  $t + T_s$

Usando estas mediciones para definir los sistemas  $S$  y  $Q$  se puede calcular la información mutua  $I(S,Q)$ . Es decir que esta es función de  $T_s$ . Para este problema, la información mutua será el número de bits de  $u(t + T_s)$  que puedan ser predichos, en promedio cuando  $u(t)$  es conocido.

Lo deseable es elegir  $T_s$  tal que se pueda obtener la máxima cantidad de nueva información en cada medición. Por lo tanto  $T_s$  debe ser tal que  $v(t-T_s)$  sea lo más impredecible posible.

La máxima impredecibilidad ocurre en un mínimo de predictibilidad, esto es en un mínimo de información mutua. Debido a la divergencia exponencial de las trayectorias caóticas, el primer mínimo de  $I$  ( más que algún mínimo posterior) , sería probablemente la elección más adecuada para el intervalo de muestreo.

## Apéndice 4

### Secuencias de Fibonacci

En 1202 Fibonacci (conocido como Leonardo de Pisa) formuló un problema muy simple.

Supongamos que se tiene una pareja de conejos, que cuando procrean generan otro par de conejos. Este nuevo par dará origen a otro par. De manera tal que al principio se tenía un par, luego dos pares y después tres pares de conejos. La pregunta es cómo continuará esta secuencia suponiendo que cada nuevo par, después de una temporada dará origen a un nuevo par. Para simplificar el problema se supone que los conejos no mueren.

Obviamente, el número de pares de conejos en la  $n$ -ésima temporada, será igual al número de pares de la temporada anterior (ya que no mueren) más el número de conejos de dos temporadas anteriores puesto que todos aquellos están en condiciones de producir un nuevo par.

La fórmula de la secuencia es:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\text{A.3.1})$$

Si  $F_1 = 1$  y  $F_2 = 1$ , se tiene la siguiente secuencia:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

donde cada número es la suma de sus dos predecesores.

Esta secuencia aparentemente trivial, tiene gran contacto con las matemáticas y se usa en las más diversas aplicaciones. Por ejemplo, la relación de números sucesivos tiende al número de oro  $\phi = 1,618\dots$ , y juega un rol muy importante en caos determinístico ya que  $\phi$  se lo considera como el número "más irracional".

## Apéndice 4

### Secuencias de Fibonacci

En 1202 Fibonacci (conocido como Leonardo de Pisa) formuló un problema muy simple.

Supongamos que se tiene una pareja de conejos, que cuando procrean generan otro par de conejos. Este nuevo par dará origen a otro par. De manera tal que al principio se tenía un par, luego dos pares y después tres pares de conejos. La pregunta es cómo continuará esta secuencia suponiendo que cada nuevo par, después de una temporada dará origen a un nuevo par. Para simplificar el problema se supone que los conejos no mueren.

Obviamente, el número de pares de conejos en la  $n$ -ésima temporada, será igual al número de pares de la temporada anterior (ya que no mueren) mas el número de conejos de dos temporadas anteriores puesto que todos aquellos están en condiciones de producir un nuevo par.

La fórmula de la secuencia es:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (A.3.1)$$

Si  $F_1 = 1$  y  $F_2 = 1$ , se tiene la siguiente secuencia:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

donde cada número es la suma de sus dos predecesores.

Esta secuencia aparentemente trivial, tiene gran contacto con las matemáticas y se usa en las más diversas aplicaciones. Por ejemplo, la relación de números sucesivos tiende al número de oro  $\phi = 1,618\dots$ , y juega un rol muy importante en caos determinístico ya que  $\phi$  se lo considera como el número "más irracional".

$$g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{A.3.2})$$

La relación de número de Fibonacci sucesivos, da un desarrollo en fracciones continuas involucrando exclusivamente al entero 1, en el sentido que es el irracional más "alejado" de los racionales.

Ejemplo:

1 es el primero de los números de Fibonacci

$1 + 1/1 = 2$ , es la relación entre los dos siguientes

$1/(1 + 1/1) = 3/2$  es el resultado de los otros dos y así

sucesivamente este proceso de:  $5/3, 8/5, 13/8$  ..... etc. convergiendo al número de oro  $g$  de la ecuación A.3.2.

## **Agradecimientos**

*Quisiera agradecer a todos aquellos que me apoyaron en el desarrollo de esta tesis.*

*A Jorge Hernando, mi director y amigo, por la dedicación y el apoyo científico que me brindó en las múltiples discusiones y además por ser un tipo macanudo.*

*A Guillermo Dussel, quien fue el primero en insistir en la necesidad de completar este trabajo.*

*Al personal del CAERCEM, por todos los años de trabajo en un clima de gran cordialidad y camaradería.*

*A Alejandra Figliola, Francisco Hirsch, Hilda Larrondo y Guillermo Savino con quienes comparto proyectos y dificultades.*

*A Vicky Bekeris porque sin las innumerables charlas que tuvimos en todos estos años este trabajo no hubiera sido posible.*

*A Diego González con quien he compartido muchas horas inolvidables y logró contagiarme sus quimeras de manera tal que recogí la posta dejada por él.*

*Y por supuesto, dejo para el final las cuatro personas que con su amor, apoyo y tolerancia hicieron realidad un hecho postergado. Al Oso, mi compañero y marido y a mis hijos Matías, Nicolás y Tomás*