

Tesis de Posgrado

El límite semiclásico de sistemas clásicamente no integrables

Leboeuf, Patricio

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Leboeuf, Patricio. (1989). El límite semiclásico de sistemas clásicamente no integrables. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2208_Leboeuf.pdf

Cita tipo Chicago:

Leboeuf, Patricio. "El límite semiclásico de sistemas clásicamente no integrables". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1989.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2208_Leboeuf.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

El límite semiclassical de sistemas clásicamente no integrables

por

Patricio Leboeuf

Director de tesis: Dr. Marcos Saraceno *M. Saraceno*

Lugar de Trabajo: Comisión Nacional de Energía Atómica
Departamento de Física
Laboratorio TANDAR

Trabajo de tesis presentado para optar al título de
Doctor en Ciencias Físicas

Junio 1989

*2208
EJ 2.*

a Constanza

Agradecimientos

Esta tesis pudo ser hecha gracias al Departamento de Física de la CNEA, que me aceptó como becario y me dió amplia libertad para utilizar todas las instalaciones y medios de los cuales dispone. Durante éstos años pude conocer y compartir mi trabajo con los investigadores de dicho departamento, a los cuales agradezco en conjunto. En particular, quisiera agradecer a los Drs. D.Bes, C. Cambiaggio y G.Dussel por el apoyo moral y científico que de ellos siempre recibí.

Tuve la oportunidad también de discutir y colaborar más estrechamente con el Dr.M.Saraceno, quien amablemente aceptó dirigir esta tesis. La profundidad y riqueza de sus ideas siempre me impresionó, y muchas de ellas están contenidas en este trabajo.

Quisiera también mencionar a algunos de mis compañeros, con los cuales pude trabajar y mantener provechosas discusiones: M.Bernath, A.Fendrik, A. García, J.Kurchan, G.Zemba; a M.Elgue por la asistencia que siempre me brindó en la parte de computación.

Por último, vaya mi agradecimiento a C.Fernández y D.Torres por la ayuda en el tipeado de este trabajo.

Indice

1	Introducción	3
2	El modelo SU(3)	8
2.1	Descripción cuántica	8
2.2	Estados coherentes del SU(3)	14
2.3	El límite clásico	18
2.4	La estructura del espacio de fases	25
3	Distribuciones cuánticas en el espacio de fases	31
3.1	Introducción	31
3.2	La distribución de Husimi para el grupo SU(3)	38
3.3	Proyección y Secciones de Poincaré	39
4	Cálculos y Resultados	42
4.1	Superficies Cuánticas de Integrabilidad	43
4.2	Sensibilidad de los autovalores ante perturbaciones	47
4.3	Análisis de las distribuciones	51
4.3.1	El caso $\chi = 0.5$	52
4.3.2	El caso $\chi = 10$	53
5	Conclusiones	60
A	Elementos de matriz del Hamiltoniano	68
B	La representación de estados coherentes y el límite de grandes N.	70
B.1	La representación de estados coherentes: su definición y propiedades. . .	71
B.1.1	Propiedades de los estados coherentes	73
B.1.2	Un ejemplo: el grupo de Weyl W_n	75
B.2	Los estados coherentes y el límite semiclásico de la mecánica cuántica.	79
B.3	La distribución de Husimi	83

B.3.1	El límite de grandes N y el principio variacional dependiente del tiempo	87
B.3.2	Límite clásico en el grupo de Weyl	90
C	Algunas propiedades de los estados coherentes del SU(3)	93
D	Cálculo de la curvatura.	96
E	Las Figuras	98

1 Introducción

Este trabajo es un estudio de un sistema cuántico (no relativista) cuya dinámica en el límite clásico resulta no integrable. Nuestro tema principal será, aunque no centraremos nuestra atención exclusivamente en esto, la estructura de los autoestados de este tipo de sistema. En particular, nos interesa el análisis de ésta estructura en términos de subconjuntos invariantes clásicos.

Por un lado, la relación entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica en el caso de sistemas integrables es muy conocida, y su esencia está contenida en el método WKB [1], el cual ha resultado de mucha utilidad práctica como método de aproximación a la solución exacta de la ecuación de Schrödinger.

Por otro lado, hasta el momento no existe un método análogo al WKB que describa satisfactoriamente el límite semiclásico de sistemas no integrables, para los cuales los métodos semiclásicos conocidos no constituyen en general una aproximación aplicable para intentar resolver el problema cuántico.

El interés por éstos temas surge en trabajos realizados sobre sistemas dinámico clásicos, en los cuales se comenzó a estudiar el fenómeno del caos. Los progresos efectuados en la teoría clásica tienen su origen en los trabajos de Poincaré [2] y, a partir de la década del 60, en los trabajos fundamentales de Kolmogorov, Arnold y Moser (teorema KAM; ver, por ejemplo [3]) y en los experimentos numéricos de Henon y Heiles [4]. El teorema KAM, el cual trata acerca de la estabilidad de los sistemas integrables ante perturbaciones, permitió una comprensión mucho más acabada de la estructura del espacio de fases para los sistemas no integrables. No daremos aquí una definición precisa de éstos sistemas, ni haremos una exposición de sus propiedades y estructura (zonas regulares, resonancias, trayectorias periódicas estables e inestables, estructura fractal, etc.); el libro de Lichtenberg y Lieberman [3] constituye una excelente referencia.

A diferencia de los sistemas integrables que presentan un movimiento simple, predecible y estable (espacio de fases constituido por toros), los sistemas no integrables (que constituyen la regla, y no la excepción en el conjunto de sistemas dinámicos) poseen una estructura mucho más compleja combinando el movimiento regular típico de los

sistemas integrables con trayectorias impredecibles que presentan un comportamiento aparentemente al azar, a pesar de las características deterministas de la dinámica. Este tipo de trayectoria posee un alto grado de sensibilidad a las condiciones iniciales. Un ejemplo típico es el de dos esferas rígidas chocando en una mesa rectangular (billar) cuyas trayectorias son caóticas (en realidad es más que esto, ha sido demostrado que es un sistema "mixing"). Citando un cálculo de Chirikov [5] que pone de manifiesto la inestabilidad de este sistema se calcula que, debido a una perturbación tal como la introducida por el jugador de billar sobre las esferas rígidas (perturbación gravitacional), bastan sólo nueve choques para que la indeterminación en el ángulo de reflexión de una de las esferas sea del orden de un radian.

En el caso extremo en el cual todas las trayectorias de un sistema (salvo un conjunto de medida nula) son caóticas, cubriendo densamente cada una de ellas la superficie de energía correspondiente, decimos que el sistema es ergódico; éstos son en principio los sistemas tratados por la mecánica estadística. No es necesario un gran número de grados de libertad para la aparición de propiedades estadísticas en un sistema, tal como lo demuestra el ejemplo anterior de las esferas rígidas ($g=4$). En el presente trabajo nos concentramos en sistemas conservativos de dos grados de libertad ($g=2$) cuyo espacio de fases presenta trayectorias regulares mezcladas con trayectorias caóticas, que llamaremos espacio de fases mixto. La diferencia más importante en relación a los sistemas no integrables con más grados de libertad ($g > 2$) es la difusión de Arnold [6], un problema que no trataremos aquí.

Teniendo en cuenta que la mecánica clásica es el límite con $\hbar \rightarrow 0$ de la mecánica cuántica, es natural preguntarse de qué manera están contenidos en esta última teoría los conceptos clásicos ligados al caos, y cual es la correspondencia entre ambas teorías (principio de correspondencia). Una dificultad inicial al atacar este problema se debe a las grandes diferencias conceptuales que separan a ambas teorías: espacio de fases, trayectorias, estabilidad e inestabilidad,... en el caso clásico; espacio de Hilbert, funciones de onda, autovalores, probabilidades,... desde el lado cuántico; cuánticamente se tornan difusos o muchas veces inaplicables los claros conceptos empleados en mecánica clásica al referirse a este tema. Muchas de las estrategias propuestas simplemente se

limitan a detectar o caracterizar consecuencias cuánticas de la no integrabilidad. Los métodos utilizados en esta tesis, basados en un formalismo en espacio de fases, no resuelven este problema, pero sin embargo intentan definir un marco unificado de discusión.

La mayoría de los estudios realizados en los últimos años se han concentrado en las propiedades estadísticas de los autovalores de éstos sistemas [50]. Si nuestro objetivo principal es en principio comprender la correspondencia entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica, y por lo tanto poder establecer una conexión entre las órbitas clásicas y las autofunciones y autovalores del sistema, parece más apropiado interesarse, como método de ataque a este complejo problema, en la estructura de las funciones de onda, e interpretarla en términos de órbitas clásicas. Esta interpretación se facilitaría enormemente si dispusiéramos de un formalismo de la mecánica cuántica que sea directamente comparable con el formalismo clásico en el espacio de fases. Este formalismo en espacio de fases de la mecánica cuántica existe, y no es único. Entre los muchos posibles, los más importantes (y conocidos) son los de Weyl-Wigner [7] y el de la representación de estados coherentes [8,9]. Algunos aspectos ligados a las diferencias entre ambas representaciones serán discutidos más adelante. Por el momento sólo diremos que, a diferencia de la representación de Weyl-Wigner, el formalismo de estados coherentes asocia a cada función de onda una distribución suave y definida positiva en el espacio de fases, y es el que utilizaremos en este trabajo. Para un sistema con $g = 2$ grados de libertad, esto será una distribución en un espacio 4-dimensional. En analogía con la mecánica clásica, podemos definir secciones de Poincaré de éstas distribuciones cuánticas, que constituirán la herramienta apropiada para el análisis de la estructura de las funciones de onda en términos de objetos invariantes clásicos.

Los resultados que presentaremos se refieren a un modelo de muchos cuerpos con simetría $SU(3)$ ligado a la física nuclear. Su límite clásico, que en este caso coincide con la aproximación de Time Dependent Hartree Fock (TDHF), resulta exacto cuando el número de partículas del modelo (N) tiende a infinito; este modelo en el cual $1/N$ desempeña entonces el papel de \hbar , constituye un sistema cuyo límite clásico pertenece a una clase más general de límites en los cuales el parámetro semiclásico no es \hbar [10]. En éste límite, el sistema queda representado por un hamiltoniano conservativo de dos

grados de libertad en un espacio de fases compacto, propiedad que refleja a nivel clásico el número finito de niveles que posee el sistema a nivel cuántico. Esta última es una propiedad importante del modelo desde el punto de vista del cálculo numérico, debido a que se eliminan los errores por truncamiento de la base al diagonalizar.

Este es un sistema típico (en este caso obtenido a través de una aproximación de campo medio en el marco de la física nuclear) en el cual las aproximaciones semiclásicas conocidas dejan de ser “globalmente” válidas. Si bien los estudios aquí presentados se restringen a este modelo particular, creemos que la esencia de los resultados obtenidos y las conclusiones que de ellos se desprenden tienen validez general para sistemas no integrables con dos grados de libertad. Asimismo, el formalismo en espacio de fases utilizado (basado en la representación de estados coherentes) es aplicable a una gran cantidad de sistemas cuyo límite clásico pertenece a la clase más general antes mencionada, debido a que los estados coherentes pueden ser definidos para una amplia variedad de grupos [9].

La organización de este trabajo es la siguiente: En la próxima sección introducimos el modelo $SU(3)$, dando su descripción cuántica, los estados coherentes asociados y el límite clásico que corresponde en este caso al número de partículas tendiendo a infinito. Una vez obtenido el hamiltoniano clásico, discutimos la estructura del espacio de fases identificando los distintos tipos de regiones. A continuación, en la sección 3.1, introducimos las distribuciones cuánticas en espacio de fases y discutimos algunas hipótesis acerca del comportamiento global de éstas en diversos tipos de sistemas, contrastándolas con los resultados que se poseen hasta el momento. Luego derivamos, en la sección 3.2, la distribución a calcular en el caso concreto del $SU(3)$. En la sección 3.3 definimos las secciones y proyecciones de ésta distribución, herramientas esenciales en lo que resta del trabajo. Los resultados obtenidos para las distribuciones del $SU(3)$ y su interpretación y discusión en términos de objetos invariantes clásicos están contenidos en la sección 4.3. Previamente, en las secciones 4.1 y 4.2 hacemos un estudio de los elementos de matriz y la sensibilidad de los autovalores ante perturbaciones en nuestro sistema. Finalmente, resumimos algunas conclusiones.

Los apéndices contienen algunos detalles matemáticos y/o conceptuales. En par-

particular, el apéndice B debe ser considerado como una parte importante del trabajo, pues contiene una introducción general a la representación de estados coherentes (para cualquier grupo) y su relación con el límite clásico y con la aproximación de TDHF, ejemplificando con el grupo de Weyl W_n . Muchos de los conceptos y propiedades de éste apéndice se utilizan en la parte central del trabajo.

2 El modelo SU(3)

2.1 Descripción cuántica

Este modelo fue utilizado anteriormente por varios autores [11]–[13] como modelo no trivial para probar distintos métodos de aproximación al problema de muchos cuerpos en física nuclear. En particular, Williams y Koonin [13] han analizado y comparado la validez de diversos métodos semiclásicos de recuantificación del Hamiltoniano de TDHF de este modelo, estudiando el espacio de fases en regiones próximas al fundamental.

Es un modelo esquemático del modelo de capas del núcleo, soluble exactamente, que constituye una extensión del conocido modelo de Lipkin SU(2) [14]. Consiste en N fermiones interactuantes en tres niveles posibles de partícula independiente (capas). Cada capa posee N sitios distinguibles que rotularemos con el índice m (ver fig.1). En el caso no interactuante, cada fermión puede estar en cualquiera de las tres capas, cada una de las cuales posee energía ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 .

Sea a_{im}^+ (a_{im}) ($i=0,1,2$) el operador que crea (destruye) una partícula en la capa i y sitio m . Estos operadores satisfacen las reglas de anticonmutación fermiónica

$$\begin{aligned} \{ a_{mi}; a_{m'j}^+ \} &= \delta_{mm'} \delta_{ij} \\ \{ a_{mi}; a_{m'j} \} &= 0 \quad i, j = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Construyamos, a partir de éstos, unos nuevos operadores "colectivos" G_{ij} , completamente simétricos ante el intercambio de dos fermiones cualesquiera, que por definición son una combinación lineal de los operadores de subida de un fermión del nivel j al i

$$G_{ij} = \sum_{m=1}^N a_{im}^+ a_{jm}; \quad G_{ij}^+ = G_{ji}. \quad (2.2)$$

Tenemos nueve operadores G_{ij} : los seis de subida y bajada entre cada par de niveles $G_{i \neq j}$ y los tres asociados al número de partículas de cada nivel G_{ii} .

Estos nueve operadores satisfacen las reglas de conmutación del grupo U(3)

$$[G_{ij}; G_{kl}] = \delta_{jk} G_{il} - \delta_{il} G_{kj}$$

y por lo tanto son generadores del álgebra de Lie de este grupo. Si trabajamos con un número total N de partículas constante entonces el invariante del grupo es

$$N = \sum_{i=0}^2 G_{ii} \quad (2.3)$$

y los ocho generadores independientes restantes forman ahora un álgebra de SU(3).

Sin interacción, el estado de menor energía del sistema es aquel en el cual todas las partículas del sistema se encuentran en el nivel de abajo 0; a este estado lo denotaremos $|0\rangle$. Aplicando los operadores G_{10} y G_{20} al nivel fundamental $|0\rangle$ construimos un estado con una partícula en el nivel 1 y otro con una partícula en el nivel 2, respectivamente

$$\begin{aligned} |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} G_{10}|0\rangle \\ |01\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} G_{20}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Continuando este proceso, podemos construir una base de estados simétricos ante el intercambio de dos fermiones m y m' aplicando sucesivamente los operadores G_{10} y G_{20} sobre el fundamental. Obtenemos así estados con n_1 partículas en el nivel 1 y n_2 en el nivel 2 (ver el apéndice A)

$$|n_1 n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{N! n_1! n_2!}{(N-n_1-n_2)!}}} G_{10}^{n_1} G_{20}^{n_2} |0\rangle \quad (2.5)$$

Debido a que asumimos un número total de partículas constante N , cada estado queda rotulado sólo por dos índices n_1 y n_2 que dan el número de ocupación de las capas 1 y 2; el número de ocupación de la capa inferior 0 será entonces

$$n_0 = N - n_1 - n_2. \quad (2.6)$$

La finitud del número de partículas impone sobre n_1 y n_2 la siguiente condición

$$0 \leq n_1 + n_2 \leq N. \quad (2.7)$$

Si esta condición no se satisface, el estado (2.5) asociado será nulo. La banda formada por los estados (2.5) constituyen una base de la representación irreducible $[N \ 0 \ 0]$ del grupo SU(3) [15,11].

Si el modelo tuviera sólo dos capas con i partículas en total, el número de estados de esta representación sería $(i+1)$. Al incluir la tercer capa y con un número total de partículas N , el número de partículas i que ocupa dos de ellas está comprendido entre cero y N ; por lo tanto, la dimensión de la representación $[N \ 0 \ 0]$ del SU(3) será

$$\sum_{i=0}^N (i+1) = \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad (2.8)$$

Notemos que esta dimensión crece como $\frac{N^2}{2}$ en el límite $N \rightarrow \infty$.

Incorporemos ahora una interacción V que acopla las partículas de una misma capa de a *pares*, cambiándolas de capa sin distinguir ni modificar el índice de sitio m . Esta interacción de dos cuerpos del tipo monopolo-monopolo permite escribir al Hamiltoniano en términos de los generadores G_{ij} del $SU(3)$

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H &= \sum_{i=0}^2 \epsilon_i G_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=0}^2 v_{ij} G_{ij}^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde H_0 es el término de partícula independiente. Los v_{ij} los elegimos reales $v_{ij} = v_{ji}$. Siendo $N = \sum_i G_{ii}$ el invariante del grupo, se cumple $[H; N] = 0$, que indica la conservación del número de partículas. En el caso particular en que dos de los tres v_{ij} sean nulos, el Hamiltoniano (2.9) se reduce al modelo de Lipkin de dos niveles. Para nuestro modelo, y en lo que resta de este trabajo, elegiremos la siguiente parametrización:

$$v_{01} = v_{02} = v_{12} = v; \quad \epsilon_0 = -\epsilon, \epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \epsilon \quad (2.10)$$

y por lo tanto tenemos dos parámetros independientes. Introduciendo el nuevo parámetro (cuya utilidad quedará clara en la sección 3.3)

$$\chi = \frac{(N-1)v}{\epsilon} \quad (2.11)$$

y teniendo en cuenta que de la (2.3) se cumple que $G_{00} = N - G_{11} - G_{22}$, el hamiltoniano (2.9) puede ser escrito

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \chi V \\ &= -\epsilon N + \epsilon G_{11} + 2\epsilon G_{22} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{(N-1)} \chi (G_{10}^2 + G_{01}^2 + G_{20}^2 + G_{02}^2 + G_{21}^2 + G_{12}^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Debido a que H está escrito en términos de los generadores del $SU(3)$, no conecta estados pertenecientes a distintas representaciones irreducibles de este grupo. Si traba-

jamos en la representación $[N 0 0]$, los autoestados de H serán entonces combinaciones lineales de los $|n_1 n_2 \rangle$ ¹

$$|\psi_i \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^N c_{n_1 n_2}^i |n_1 n_2 \rangle \quad (2.13)$$

Esto significa que en principio debemos diagonalizar una matriz de dimensión $\frac{(N+1)(N+3)}{2}$. Pero debido a la forma particular de la interacción, esta dimensión puede ser reducida. Esto se debe a que la interacción cambia de nivel *pares* de partículas y por lo tanto no acopla los estados de n_1 par con los de n_1 impar, y lo mismo para n_2 . La matriz H se parte entonces, dentro de la representación $[N 0 0]$, en cuatro bloques, según la paridad de los números de ocupación n_1 y n_2 : $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ y $(-, -)$. Si N es par, es como si tuviéramos $N' = \frac{N}{2}$ partículas, y la banda del fundamental $(+, +)$ la obtenemos reemplazando en la (2.8) N por N' , obteniéndose $\dim(+, +)_{par} = \frac{(N+2)(N+4)}{8}$. Para los bloques $(+, -)$, $(-, +)$ y $(-, -)$ repetimos el procedimiento pero con $N' = \frac{(N-2)}{2}$. En cambio, si N es impar el número de pares N' para los bloques $(+, +)$, $(+, -)$ y $(-, +)$ es $\frac{(N-1)}{2}$ y para el $(-, -)$ es $\frac{(N-3)}{2}$, dando por resultado la siguiente tabla de dimensiones de los bloques en que se parte H

	$(+, +)$	$(+, -)$	$(-, +)$	$(-, -)$
N par	$\frac{(N+2)(N+4)}{8}$	$\frac{N(N+2)}{8}$	$\frac{N(N+2)}{8}$	$\frac{N(N+2)}{8}$
N impar	$\frac{(N+1)(N+3)}{8}$	$\frac{(N+1)(N+3)}{8}$	$\frac{(N+1)(N+3)}{8}$	$\frac{(N-1)(N+1)}{8}$

Table 1: Dimensión de H asociada a los distintos bloques

En conclusión, en lugar que tener que diagonalizar una matriz de orden $\frac{N^2}{2}$ basta con

¹De aquí en más y durante el resto de éste trabajo, la expresión $\sum_{n_1, n_2=0}^N$ debe ser considerada como una abreviatura de

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1}$$

diagonalizar matrices de orden $\frac{N^2}{8}$. El fundamental del sistema siempre se encontrará en el bloque (+,+).

Un hecho fundamental a destacar es que la matriz a diagonalizar sea finita y por lo tanto su diagonalización es exacta. Esto representa una ventaja importante respecto a los sistemas en los cuales el espacio de Hilbert tiene dimension infinita, debido a que se eliminan los errores por truncamiento de la base. Como veremos más adelante en la sección 2.3, el límite $N \rightarrow \infty$ representa un límite clasico del modelo (ver tambien el apéndice B). La finitud de la representación $[N \ 0 \ 0]$ se reflejará en la estructura del espacio de fases de este límite.

El hamiltoniano (2.12) posee la siguiente simetría

$$\left. \begin{array}{l} n_0 \rightarrow n_2 \\ n_1 \rightarrow n_1 \\ n_2 \rightarrow n_0 \\ \chi \rightarrow -\chi \end{array} \right\} \Rightarrow H \rightarrow -H, \quad (2.14)$$

y por lo tanto basta con estudiar el caso $\chi \geq 0$. El caso $\chi < 0$ se obtiene del $\chi \geq 0$ invirtiendo las energías. Naturalmente, un dado bloque de paridad no poseerá él sólo esta simetría, salvo que la transformación (2.14) no nos “saque” de ese bloque. Este es el caso por ejemplo de los bloques (+,+) y (+,-) con N par, ya que en ese caso n_0 y n_2 poseerán la misma paridad. Esto en cambio no será cierto para los bloques (-,+) y (-,-), que se transforman mutuamente el uno en el otro con la transformación (2.14), es decir, los autovalores del (-,+) con χ cambiado de signo se transformarán en los del (-,-) con $-\chi$, y viceversa.

El Hamiltoniano H_0 es el de N fermiones no interactuantes en tres niveles de partícula independiente cuyos autovectores son los estados $|n_1 n_2 \rangle$ (ec.(2.5))

$$G_{ii} |n_1 n_2 \rangle = n_i |n_1 n_2 \rangle; \quad i = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
H_0 |n_1 n_2\rangle &= \epsilon_0 n_0 + \epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2 \\
&= \epsilon(n_1 + 2n_2 - N)
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

Este espectro es el de un oscilador armónico con dos grados de libertad con n_1 y n_2 fonones asociados a cada uno de ellos, de frecuencia ϵ y 2ϵ respectivamente (que deben ser asociados a las capas 0-1 y 0-2 que poseen como energía de partícula independiente ϵ y 2ϵ , respectivamente). La diferencia fundamental con un oscilador armónico bidimensional usual es la restricción adicional sobre el número máximo de fonones, condición (2.7). Si dibujamos dos ejes representando el número de fonones en ambos grados de libertad, cada autestado de H_0 queda representado por un punto cuyas coordenadas son números enteros. La (2.7) produce entonces una forma triangular para la rerepresentación (ver la fig.2.a, en la cual hemos representado un autoestado de H_0).

En cambio, un autoestado de H no será representado en este tipo de gráfico por un punto (n_1, n_2) pues, de acuerdo a la (2.13) será una combinación lineal de muchos puntos, cada uno de los cuales participa con un peso c_{n_1, n_2}^i . Si le asociamos a cada punto del gráfico una densidad de puntos proporcional a la probabilidad de presencia $|c_{n_1, n_2}^i|^2$ del sistema en ese punto, podemos entonces representar al cuadrado de la función de onda ψ_i como una densidad de puntos o “mancha” en este tipo de gráfico, tal como se muestra en la fig.2b. Debido a que cada función de onda es combinación lineal de estados de paridad definida, en cada dibujo las coordenadas n_1 y n_2 barren sólo sobre enteros pares o impares, según al bloque al que pertenezca $|\psi_i\rangle$.

2.2 Estados coherentes del SU(3)

En esta sección particularizamos, para el caso del grupo SU(3), las definiciones y propiedades dadas en forma general en el apéndice B, sección B.1 - se recomienda al lector no familiarizado con la representación de estados coherentes y sus propiedades leer en éste punto este último apéndice. Debido a que los cálculos correspondientes a los resultados presentados en ésta sección resultan un tanto engorrosos, el desarrollo más detallado de éstos ha sido transferido al apéndice C.

De acuerdo al procedimiento general, obtenemos los estados coherentes del grupo SU(3) aplicando los elementos asociados a los generadores de subida de una dada representación irreducible de éste grupo al estado de mínimo peso de esta representación. En el caso de la representación irreducible $[N\ 0\ 0]$ considerada en la sección 2.1, tomamos al estado $|0\rangle$ como el estado de mínimo peso que satisface:

$$\begin{aligned} G_{ii}|0\rangle &= n_i |0\rangle \quad ; n_0 = N, n_1 = n_2 = 0 \\ G_{0i}|0\rangle &= 0 \\ G_{21}|0\rangle &= G_{12}|0\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para esta representación, la acción del operador G_{12} es por lo tanto trivial y las órbitas coadjuntas del SU(3) cuya dimensión genérica es seis se reducen a variedades más simples. Tomando entonces como generadores de subida a G_{10} y G_{20} (cf.(2.4)), podemos definir a los estados coherentes a través de

$$|z_1 z_2\rangle = e^{z_1 G_{10} + z_2 G_{20}} |0\rangle. \tag{2.17}$$

Para este grupo (y esta representación) la órbita de la representación coadjunta puede ser entonces identificada con el espacio cociente $\mathcal{F} = SU(3)/U(2)$ [16] que es un espacio

de $\frac{8}{4} = 4$ dimensiones, identificadas con la parte real e imaginaria de los parámetros complejos z_1 y z_2 introducidos en la (2.17). Cada estado coherente puede entonces ser asociado con un punto de \mathcal{F} .

Expandiendo la exponencial en (2.17) obtenemos

$$|z_1 z_2\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^N \frac{\bar{z}_1^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\bar{z}_2^{n_2}}{n_2!} G_{10}^{n_1} G_{20}^{n_2} |0\rangle \quad (2.18)$$

que, en términos de los estados (2.5) de partícula independiente que constituyen una base de la representación irreducible $[N 0 0]$ se puede escribir

$$|z_1 z_2\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} |n_1 n_2\rangle \quad (2.19)$$

A partir de ésta última ecuación, obtenemos para la representación en estados coherentes de los autoestados $|n_1 n_2\rangle$ de H_0 la expresión simple (monomial)

$$\langle z_1 z_2 | n_1 n_2 \rangle = \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} z_1^{n_1} z_2^{n_2}. \quad (2.20)$$

El estado (2.19) no está normalizado, y su norma es

$$\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle = (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^N \quad (2.21)$$

y, debido a que constituyen un conjunto sobrecompleto, no son ortogonales entre sí

$$\langle z_1 z_2 | z'_1 z'_2 \rangle = (1 + z_1 \bar{z}'_1 + z_2 \bar{z}'_2)^N \quad (2.22)$$

La unidad (cf.(B.6)) viene en este caso dada por

$$\frac{(N+1)(N+2)}{\pi^2} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^{N+2}} |z_1 z_2\rangle \langle z_1 z_2| = I \quad (2.23)$$

donde $d^2 z_i = d(\text{Re} z_i) d(\text{Im} z_i)$. Combinando la expresión (2.20) con la (2.13) vemos que cualquier vector del espacio de Hilbert \mathcal{Q} queda entonces representado en el espacio \mathcal{F}

por un polinomio en z_1, z_2 (que constituye una función analítica en \mathcal{F} ; esta es la llamada representación de Bargmann [17]):

$$\begin{aligned}\psi(z_1, z_2) &= \langle z_1 z_2 | \psi \rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \langle n_1 n_2 | \psi \rangle.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Si $|\psi\rangle$ es una autofunción del hamiltoniano H a diagonalizar, los coeficientes $\langle n_1 n_2 | \psi \rangle$ son los obtenidos por la diagonalización numérica (los c_{n_1, n_2}^i de la ec.(2.13)).

Los operadores en cambio pueden ser representados por sus elementos diagonales en los estados coherentes (ec.(B.10)), denominado símbolo Q o covariante del operador correspondiente (los elementos no diagonales pueden ser obtenidos por extensión analítica [9])²

$$A(z, \bar{z}) = \frac{\langle z_1 z_2 | A | z_1 z_2 \rangle}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle}\quad (2.25)$$

Una representación alternativa al símbolo covariante para los operadores actuando en \mathcal{F} es la diferencial. Utilizando los resultados del apéndice A que nos dan la acción de los generadores G_{ij} sobre los estados $|n_1 n_2\rangle$, podemos obtener las siguientes expresiones para la representación en operadores diferenciales de los generadores

$$\begin{aligned}\langle z_1 z_2 | G_{00} &= \left(N - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \langle z_1 z_2 | \\ \langle z_1 z_2 | G_{11} &= z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \langle z_1 z_2 | \\ \langle z_1 z_2 | G_{22} &= z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \langle z_1 z_2 | \\ \langle z_1 z_2 | G_{10} &= \frac{\partial}{\partial z_1} \langle z_1 z_2 | \\ \langle z_1 z_2 | G_{20} &= \frac{\partial}{\partial z_2} \langle z_1 z_2 |\end{aligned}$$

²la notación (z, \bar{z}) será de acá en más una abreviatura de $(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$

$$\begin{aligned}
\langle z_1 z_2 | G_{21} &= z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \langle z_1 z_2 | & (2.26) \\
\langle z_1 z_2 | G_{12} &= z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \langle z_1 z_2 | \\
\langle z_1 z_2 | G_{01} &= (N z_1 - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}) \langle z_1 z_2 | \\
\langle z_1 z_2 | G_{02} &= (N z_2 - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}) \langle z_1 z_2 |
\end{aligned}$$

que a su vez pueden ser utilizados para evaluar los valores medios en los estados coherentes de los generadores, es decir, calcular su símbolo covariante. Utilizando la notación

$\mathcal{G}_{ij} = \frac{\langle z_1 z_2 | G_{ij} | z_1 z_2 \rangle}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle}$ obtenemos (ver el apéndice C)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{00} &= N \frac{1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\
\mathcal{G}_{11} &= N \frac{z_1 \bar{z}_1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\
\mathcal{G}_{22} &= N \frac{z_2 \bar{z}_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\
\mathcal{G}_{10} &= N \frac{z_1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\
\mathcal{G}_{20} &= N \frac{z_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\
\mathcal{G}_{21} &= N \frac{z_2 \bar{z}_1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} & (2.27) \\
\mathcal{G}_{ji} &= \bar{\mathcal{G}}_{ij}
\end{aligned}$$

y para los generadores al cuadrado $\mathcal{G}_{ij}^{(2)} = \frac{\langle z_1 z_2 | G_{ij}^2 | z_1 z_2 \rangle}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{i0}^{(2)} &= N(N-1) \frac{z_i^2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \\
\mathcal{G}_{21}^{(2)} &= N(N-1) \frac{z_2^2 \bar{z}_1^2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} & (2.28) \\
\mathcal{G}_{ji}^{(2)} &= \bar{\mathcal{G}}_{ij}^{(2)}
\end{aligned}$$

Las ecs. (2.27) y (2.28) son las expresiones necesarias para obtener el símbolo covariante del hamiltoniano del sistema, de acuerdo a la (B.43), tal como veremos en la sección

siguiente. Notemos que se cumple la ecuación $\sum_{i=0}^2 \mathcal{G}_{ii} = N$, que no es más que la versión en el espacio \mathcal{F} de la (2.3). Si deseamos utilizar la constancia del número de partículas y trabajar sólo en términos de los niveles 1 y 2 eliminamos al nivel cero usando la ecuación

$$\mathcal{G}_{00} = N - \mathcal{G}_{11} - \mathcal{G}_{22}. \quad (2.29)$$

Notemos además que el símbolo Q del cuadrado de los generadores no va como va el cuadrado de los símbolos Q de los generadores (N^2), sino que contiene dos órdenes: N^2 y N .

2.3 El límite clásico

El modelo $SU(3)$ es un sistema que posee un límite clásico que no es el típico $\hbar \rightarrow 0$. En nuestro caso éste corresponde a hacer tender el número de partículas N de la representación irreducible del grupo (la $[N 0 0]$) a infinito. Esto, como surge de la tabla I, hace tender a infinito la dimensión de dicha representación. Cuando esto sucede, los incrementos discretos de la matriz correspondiente a una dada variable dinámica son despreciables o muy pequeños en comparación con la magnitud de dicha variable, y por lo tanto es natural que sea una buena aproximación reemplazar las matrices por ciertas funciones cuya variación es continua. Las ecuaciones de Heisenberg quedarán en ese caso sustituidas por ecuaciones de Hamilton (para el caso del $SU(3)$, en un espacio de fases compacto) y por lo tanto la dinámica cuántica se reducirá, en este límite, a una dinámica clásica cuyo espacio de fases será la órbita de la representación coadjunta del

grupo. Una discusión más detallada podrá ser encontrada en el apéndice B.

Veamos con más detalle la estructura de éste espacio de fases. Según la (B.34), podemos definir en el espacio \mathcal{F} 4-dimensional compacto un tensor antisimétrico no degenerado dado por

$$\omega' = 2i \omega^{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j \quad (2.30)$$

donde

$$\omega^{ij} = \frac{1}{N} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} (\ln \langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle) \quad (2.31)$$

Utilizando la (2.21) obtenemos

$$\omega^{ij} = \frac{1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \begin{pmatrix} 1 + z_2 \bar{z}_2 & -z_2 \bar{z}_1 \\ -z_1 \bar{z}_2 & 1 + z_1 \bar{z}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Invirtiendo la (2.32), definimos el corchete de Poisson en \mathcal{F} mediante

$$\{f(z, \bar{z}); g(z, \bar{z})\} = i \omega_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} \right) \quad (2.33)$$

donde

$$\omega_{ij} = (\omega^{-1})^{ij} = (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) \begin{pmatrix} 1 + z_1 \bar{z}_1 & z_2 \bar{z}_1 \\ z_1 \bar{z}_2 & 1 + z_2 \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

y f, g son dos funciones cualesquiera definidas en \mathcal{F} .

Utilizando la (B.38), el límite de la ecuación de Heisenberg en esta representación queda

$$\frac{df}{dt} = \{f(z, \bar{z}), h_c(z, \bar{z})\} \quad (2.35)$$

donde $h_c(z, \bar{z})$ corresponde al límite clásico del símbolo covariante del hamiltoniano del sistema (cf.(B.43))

$$h_c(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle z_1 z_2 | H | z_1 z_2 \rangle}{\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle} \quad (2.36)$$

Introduciendo entonces la expresión (2.12) del hamiltoniano cuántico en la (2.36) y utilizando las ecuaciones (2.27) y (2.28) obtenemos la siguiente expresión para el símbolo Q del hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = -\varepsilon N + \varepsilon N \frac{(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} + \frac{1}{2} \chi \varepsilon N \frac{(z_1^2 + z_2^2 + \bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_1^2 z_2^2 + z_1^2 \bar{z}_2^2)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \quad (2.37)$$

donde hemos utilizado la definición (2.11) para χ .

Según el teorema de Thouless [18], la (2.17) define al estado más general de partícula independiente no ortogonal al $|0\rangle$ (transformación de Hartree-Fock dependiente de los parámetros complejos z_1 y z_2), que obviamente no son autoestados de H . Hemos llamado \mathcal{F} al espacio 4-dimensional definido por los parámetros complejos z_1 y z_2 , cada punto del cual identifica entonces a un estado de partícula independiente. La (2.37) define entonces una función hamiltoniana (energía) en este espacio, y constituye por lo tanto una aproximación de campo medio del sistema. El mínimo de $\mathcal{H}(z, \bar{z})$ me identifica entonces un punto (z^*, \bar{z}^*) en \mathcal{F} que identifica al estado de partícula independiente que minimiza la energía. $\mathcal{H}(z^*, \bar{z}^*)$ provee entonces la energía del fundamental en la aproximación de Hartree-Fock.

Una trayectoria en este espacio constituye un circuito en el “espacio de los estados de partícula independiente”. Tal como precisaremos más adelante, las trayectorias en \mathcal{F} quedarán definidas por una dinámica hamiltoniana.

Con el propósito de obtener una energía no divergente en el límite $N \rightarrow \infty$, normalizamos a \mathcal{H} con N ; además, mediremos la energía en términos de ε , la energía de partícula independiente:

$$\mathcal{H} \rightarrow \frac{\mathcal{H}}{\epsilon N} \quad (2.38)$$

Efectuando estos cambios tenemos entonces:

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = -1 + \frac{(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} + \frac{1}{2} \chi \frac{(z_1^2 + z_2^2 + \bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_1^2 z_2^2 + z_1^2 \bar{z}_2^2)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2} \quad (2.39)$$

que, debido a la normalización adoptada, es independiente de N , a χ constante. El parámetro χ utilizado elimina entonces la dependencia en N de \mathcal{H} y hace que éste coincida con su límite clásico

$$h_c(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}(z, \bar{z}) = \mathcal{H}(z, \bar{z}), \quad \chi = cte$$

que seguiremos llamando $\mathcal{H}(z, \bar{z})$ de aquí en más. El estado coherente $|z_1 z_2\rangle$, a diferencia del estado $|n_1 n_2\rangle$, es un estado que no tiene el número de ocupación de los distintos niveles o capas n_i ($i = 0, 1, 2$) bien definido. En cambio, de acuerdo a las tres primeras de las ecuaciones (2.27) posee los siguientes números medios de partículas

$$\begin{aligned} n_0(z, \bar{z}) &= \mathcal{G}_{00} = N \frac{1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\ n_1(z, \bar{z}) &= \mathcal{G}_{11} = N \frac{z_1 \bar{z}_1}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \\ n_2(z, \bar{z}) &= \mathcal{G}_{22} = N \frac{z_2 \bar{z}_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

que cumplen, como ya señalamos, $\sum_{i=0}^2 n_i(z, \bar{z}) = N$. Tal como vimos en la sección 1 (ec.(2.15)) el hamiltoniano H_0 corresponde cuánticamente a dos osciladores armónicos desacoplados donde los números de ocupación n_1 y n_2 representan la versión cuántica discretizada de las variables de acción de este Hamiltoniano. En este sentido, las ecs.(2.40) proveen una versión continua (clásica) de éstas variables definidas en el espacio de fases \mathcal{F} . Debido a su significado físico, es interesante entonces trabajar con las variables de

ángulo - acción del hamiltoniano no perturbado H_0 . Introduciendo, al igual que en el caso de la energía, las variables normalizadas

$$I_i(z, \bar{z}) = \frac{n_i(z, \bar{z})}{N}; \quad 0 \leq I_i \leq 1; \quad i = 1, 2 \quad (2.41)$$

efectuamos entonces el cambio de coordenadas $(z_i, \bar{z}_i) \rightarrow (I_i, \phi_i)$ dado por

$$z_i = \sqrt{\frac{I_i}{1 - I_1 - I_2}} e^{i\phi_i}; \quad i = 1, 2 \quad (2.42)$$

que satisface las ecs. (2.40). Mediante esta transformación (no canónica) el hamiltoniano clásico del sistema (2.39) se escribe

$$\mathcal{H}(\bar{I}, \bar{\phi}) = -1 + I_1 + 2I_2 + \chi[(1 - I_1 - I_2)(I_1 \cos 2\phi_1 + I_2 \cos 2\phi_2) + I_1 I_2 \cos 2(\phi_2 - \phi_1)] \quad (2.43)$$

donde $\bar{I}, \bar{\phi}$ representan a los vectores (I_1, I_2) y (ϕ_1, ϕ_2) respectivamente. La transformación (2.42) pasa entonces a las variables *canónicas* $\bar{I}, \bar{\phi}$ en términos de las cuales el tensor simpléctico ω_{ij} introducido en la (2.34) toma su forma canónica habitual $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Debemos señalar el hecho que éstas variables siempre existen, debido al teorema de Darboux [6]. Las ecuaciones de movimiento (2.35) cuando tomamos a f como las coordenadas quedan

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} \\ \dot{I}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_i} \end{aligned} \quad (2.44)$$

o, explícitamente

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= 1 + \chi \cos 2\phi_1 - 2\chi I_1 \cos 2\phi_1 - \chi I_2 [\cos 2\phi_2 + \cos 2\phi_1 - \cos 2(\phi_2 - \phi_1)] \\ \dot{\phi}_2 &= 2 + \chi \cos 2\phi_2 - 2\chi I_2 \cos 2\phi_2 - \chi I_1 [\cos 2\phi_2 + \cos 2\phi_1 - \cos 2(\phi_2 - \phi_1)] \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = 2\chi(1 - I_1 - I_2)I_1 \sin 2\phi_1 - 2\chi I_1 I_2 \sin 2(\phi_2 - \phi_1) \quad (2.45)$$

$$\dot{I}_2 = 2\chi(1 - I_1 - I_2)I_2 \sin 2\phi_2 + 2\chi I_1 I_2 \sin 2(\phi_2 - \phi_1)$$

que proveen la dinámica del sistema en el espacio de fases \mathcal{F} parametrizado por las coordenadas $(\bar{I}, \bar{\phi})$; estas ecuaciones nos dan, a través de las (2.42), ciertas funciones $z_i(t), \bar{z}_i(t)$ que, al insertarlas en la (2.17), generan un vector dependiente del tiempo $|z_1(t) z_2(t)\rangle$ en el espacio de Hilbert \mathcal{Q} . A N finito, la dinámica de este vector constituye la aproximación de TDHF de la evolución exacta dada por la ecuación de Schrödinger de un vector en \mathcal{Q} . En el límite $N \rightarrow \infty$, esta aproximación es exacta. Las (2.45) obviamente conservan la energía y puede demostrarse que también conservan el número de partículas

$$\frac{d}{dt}(I_0 + I_1 + I_2) = 0 \quad (2.46)$$

Al igual que su versión cuántica (2.12), el hamiltoniano clásico (2.43) posee dos partes. Si tomamos $\chi = 0$, la (2.43) se reduce al hamiltoniano \mathcal{H}_0 de dos osciladores armónicos desacoplados con frecuencias $w_1 = 1$ y $w_2 = 2$ escritos en términos de las variables de acción

$$\mathcal{H}_0(\bar{I}) = -1 + I_1 + 2I_2 \quad (2.47)$$

que debe ser comparada con la (2.15). En este caso las variables de acción I_i son constantes de movimiento y las (2.45) tienen por solución

$$\phi_i = w_i t + \phi_i^0 \quad (2.48)$$

$$I_i = cte \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.49)$$

No debemos olvidar sin embargo que nuestro espacio de fases es compacto y las variables de acción de los osciladores están limitadas por la condición

$$\sum_{i=0}^2 I_i = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq I_1 + I_2 \leq 1 \quad (2.50)$$

que es la versión clásica de la (2.7). Si en cambio tomamos $\chi \neq 0$, incluimos un término de interacción que acopla a los osciladores armónicos; esto hace que los números de ocupación I_i no sean más constantes de movimiento y posean ahora una dinámica, dada por la segunda de las ecs.(2.44). Si dibujamos en el plano $I_1 - I_2$ (restringido por la (2.50)), según las (2.49) las trayectorias de \mathcal{H}_0 serán puntos fijos (fig.3a) - al igual que las autofunciones de H_0 - y las trayectorias de \mathcal{H} con $\chi \neq 0$ serán en cambio curvas en este plano (ver la fig.3b, y comparar la fig.3 con la fig.2).

En el límite clásico hemos obtenido entonces un hamiltoniano conservativo de dos grados de libertad en un espacio de fases compacto (de cuatro dimensiones) donde las ecuaciones de movimiento las proveen las (2.45). Para que un sistema de este tipo sea integrable, necesitamos dos constantes de movimiento independientes e "in-involution" [6,3]. Si éstas existieran, las trayectorias se ubicarían sobre toros invariantes de dimensión dos. En principio, sólo poseemos la energía como constante de movimiento y por lo tanto la dinámica del sistema en el espacio \mathcal{F} corresponderá en general a trayectorias irregulares (caóticas) que cubren superficies tridimensionales determinadas por la energía. En un trabajo previo, Williams y Koonin [13] estudiaron las propiedades de la dinámica en este espacio de fases para regiones cercanas al fundamental del sistema, en un intento para determinar la validez de la aproximación semiclásica en sistemas no integrables. En lo que resta de esta sección haremos un estudio más detallado de la

totalidad del espacio de fases \mathcal{F} y de sus trayectorias, lo cual nos permitirá más adelante, en la sección 4, interpretar los resultados obtenidos para las funciones de onda en términos de éstas.

2.4 La estructura del espacio de fases

Para comenzar entonces calculemos los puntos estacionarios (estables e inestables) de nuestro sistema. Estos vienen dados por la condición

$$\bar{\nabla}\mathcal{H} = 0 \tag{2.51}$$

que ubica los puntos en espacio de fases para los cuales las cuatro coordenadas anulan su derivada temporal. La (2.51) representa un sistema de cuatro ecuaciones no lineales acopladas para las cuatro variables del sistema; éste es en general un sistema complicado de resolver en forma analítica. Sin embargo, se pudieron encontrar trece soluciones analíticamente como funciones del parámetro de interacción χ . Una última solución fue encontrada numéricamente reduciendo el sistema de ecuaciones a una ecuación con una incógnita. En la figura 4 dibujamos la energía de estos puntos estacionarios en función del parámetro de interacción χ ; los trazos continuos representan puntos estacionarios estables mientras que los punteados inestables. La energía del sistema está acotada por la energía de los puntos estacionarios estables inferior y superior. Esta limitación del espectro de energía se debe a que el espacio de fases que hemos obtenido es compacto, ec.(2.50). El punto inferior estable provee la energía del fundamental en la aproximación

de HF, tal como mencionamos más arriba.

Como ya dijimos, para $\chi = 0$, el modelo es integrable, y posee en éste caso extremos estables en $E = -1$, $E = 0$ y $E = 1$. La primera y última de éstas energías corresponden a tener todas las partículas en el nivel de abajo ($I_2 = I_1 = 0$) o todas en el nivel de arriba ($I_0 = 1 - I_1 - I_2 = 0, I_1 = 0$), respectivamente.

Al tomar $\chi \neq 0$ el sistema deja de ser integrable y vemos que a medida que χ aumenta, la complejidad del espacio de fases también va en aumento, produciéndose ramificaciones en las curvas de puntos estacionarios que aumentan así su número, hasta llegar a un total de catorce con $\chi = 10$, nueve de los cuales son inestables y cinco estables. La estabilidad de cada punto estacionario ha sido determinada de acuerdo al signo de las dos frecuencias RPA correspondientes a ese punto, que han sido calculadas a partir de una linearización del hamiltoniano en las proximidades de cada punto estacionario.

En la tabla II damos un resumen de las expresiones analíticas de la energía de éstos puntos, su ubicación, las correspondientes frecuencias RPA en función del parámetro de interacción y el rango en χ en que éstos extremos existen.

Para $\chi = 10$, la energía del sistema esta acotada por las energías -3.025 y $3.4\bar{3}$ de sus puntos estacionarios estables mínimo y máximo, respectivamente. Muchos de éstos puntos estacionarios son múltiples. Por ejemplo, el máximo $3.4\bar{3}$ es 4 degenerado, es decir, existen cuatro mínimos distintos con la misma energía, correspondiendo a los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 indicados en la tabla II más una posible diferencia de π , lo que da una 4 degeneración. De acuerdo a esto, uno espera, en el límite semiclásico, una 4 degeneración del nivel cuántico de mayor energía (máximo del sistema), y de sus estados próximos. Esto efectivamente puede observarse, ubicándose los 4 estados en los cuatro distintos

λ	f_1	f_2	ϕ_1	ϕ_2	ω_1^2	ω_2^2	Validez
1)	$\frac{-(x+1)^2}{4x}$	0	$\pi/2$	-	$2(x^2 - 1)$	$\frac{1}{4}(x+1)(x+5)$	$ x \geq 1$
2)	$\frac{-(x^2+4)}{4x}$	0	-	$\pi/2$	$(\frac{x^2}{4} - 4)$	$2(x^2 - 4)$	$ x \geq 2$
3)	$\frac{-(x+1)^2}{5x}$	$\frac{x-4}{5x}$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\frac{1}{25}(x+1)(7x-13 + \sqrt{64x^2 - 152x - 191})$	$\frac{4}{25}(x+1)(7x-13 + \sqrt{64x^2 - 152x - 191})$	$-1 \leq x \leq 4$
4)	$\frac{-(x-1)^2}{4x}$	$\frac{x-1}{2x}$	-	$\phi_1 + \pi/2$	$2(x^2 - 1)$	$\frac{1}{4}(1-x)(5-x)$	$ x \geq 1$
5)	$\frac{-(x^2-5)}{4x}$	$\frac{\lambda+5}{4x}$	$\pi/2$	0	$\frac{4(x^2/25 - 6x/5 - 1) + 4\sqrt{16x^4/625 - 12x^3/125 - 19x^2/25 + 12x/5 + 1}}{4\sqrt{16x^4/625 - 12x^3/125 - 19x^2/25 + 12x/5 + 1}}$	$\frac{4(x^2/25 - 6x/5 - 1) - 4\sqrt{(16x^4/625 - 12x^3/125 - 19x^2/25 + 12x/5 + 1)}}{4\sqrt{(16x^4/625 - 12x^3/125 - 19x^2/25 + 12x/5 + 1)}}$	$ x \geq 5$
6)	$\frac{-(x-1)^2}{5x}$	$\frac{x(x-1)}{5x}$	0	$\pi/2$	$\frac{4}{25} \frac{[(x^2 - 32x + 6) + \sqrt{(x^2 - 32x + 6)^2 + 15(x-1)^2(x+4)(x-6)}]}{[(x^2 - 32x + 6) + \sqrt{(x^2 - 32x + 6)^2 + 15(x-1)^2(x+4)(x-6)}]}$	$\frac{4}{25} \frac{[(x^2 - 32x + 6) - \sqrt{(x^2 - 32x + 6)^2 + 15(x-1)^2(x+4)(x-6)}]}{[(x^2 - 32x + 6) - \sqrt{(x^2 - 32x + 6)^2 + 15(x-1)^2(x+4)(x-6)}]}$	$-4 \leq x \leq 1$
7)							$\forall x$
8)	-1	0			$(1 - x^2)$	$(4 - x^2)$	$\forall x$
9)	0	0	-	-	$(1 - x^2)$	$(1 - x^2)$	$\forall x$
10)	+1	0	-	-	$(1 - x^2)$	$(4 - x^2)$	$\forall x$
11)	$\frac{(x-1)^2}{4x}$	0	0	-	$2(x^2 - 1)$	$\frac{3}{4}(1-x)(3+x)$	$ x \geq 1$
12)	$\frac{x^2+4}{4x}$	0	-	0	$\frac{x^2}{4}$	$2(x^2 - 4)$	$ x \geq 2$
13)	$\frac{(x+1)^2}{4x}$	$\frac{x+1}{2x}$	-	$\phi_2 = \phi_1$	$2(x^2 - 1)$	$\frac{3}{4}(1+x)(3-x)$	$ x \geq 1$
14)	$\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$	0	0	$\frac{1}{2}(x^2 - 3 + \sqrt{3x^2 + 9})$	$\frac{1}{2}(x^2 - 3 - \sqrt{3x^2 + 9})$	$ x > 3$

Tabla II

bloques de paridad definida $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ y $(-, -)$. La separación en energía de dos niveles supuestamente degenerados, que se debe a un efecto túnel, constituirá una medida de la validez de la aproximación clásica. La figura 5 complementa esta tabla ubicando, para este valor de χ , los 14 puntos estacionarios en el triángulo $I_1 - I_2$ señalando con un círculo lleno los estables y con una cruz los inestables.

Veamos ahora la existencia y ubicación de regiones regulares del espacio de fases. Para esto necesitamos ubicar zonas en las cuales podamos tener dos constantes locales de movimiento independientes. Esto es lo que sucederá en la proximidad de cualquier punto estable del sistema, pues en esa región el hamiltoniano puede ser aproximado a orden cuadrático por dos osciladores armónicos desacoplados. Por lo tanto asociamos al entorno de cada punto estacionario estable una zona regular, en la cual las trayectorias estarán ubicadas sobre toros invariantes de dimension $4-2=2$. A medida que aumentamos la energía dentro del pozo, podemos pensar al sistema nuevamente como un par de osciladores armónicos acoplados, pero esta vez el papel del parámetro KAM de acoplamiento lo desempeña la energía E medida con respecto a la energía del mínimo local estable. Entonces, a medida que ésta aumenta y que las anarmonicidades del potencial se vuelven importantes, los toros son destruídos. Numéricamente hemos comprobado que los toros ocupan una fracción importante (la mayoría) del espacio de fases local asociado al punto estacionario estable aproximadamente hasta la energía del primer punto inestable próximo a él . Más allá de ésta energía, los rastros de regularidad asociados al punto estacionario estable desaparecen casi completamente, aunque hay algunos toros que sobreviven. Por último, lejos de estos puntos estables la dinámica del sistema está dominada (casi) exclusivamente por trayectorias irregulares. En la Fig.6

mostramos, a modo de ejemplo, las secciones de Poincaré para varias trayectorias con dos energías próximas al punto estable $E = 3.4\bar{3}$; la figura 6a muestra trayectorias con energía $E = 3.1568$ situada entre éste punto estable y el primer punto inestable más cercano. En cambio la fig.6b muestra varias trayectorias con energía $E = 2.8946$ menor que 3.025, y donde vemos claramente la destrucción de los toros.

De las ecuaciones de movimiento (2.45) resulta que si el número de ocupación de un cierto nivel I_i es nulo, entonces éste será nulo para todo tiempo

$$I_i = 0 \Rightarrow \dot{I}_i = 0 \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.52)$$

y el sistema reduce en este caso su número de grados de libertad de dos a uno (modelo SU(2)). Existen tres posibilidades para esta situación, asociadas a que se anule el número de ocupación de cada una de las tres capas 0,1 o 2 ($I_0 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 = 1$). Nueve de los catorce puntos estacionarios con $\chi = 10$ obtenidos están asociados a una situación de este tipo. Cuando esto sucede y debido a que tenemos entonces un sistema conservativo de un grado de libertad, podemos calcular analíticamente las trayectorias, que serán curvas cerradas contenidas en el plano definido por la (2.52). Estas órbitas constituyen un caso especial de trayectoria periódica del sistema, y las denominaremos las tres familias principales. Cada una de ellas nace y muere en alguno de los puntos estacionarios asociados con un SU(2). Gráficamente estas tres familias pueden ser identificadas con el eje horizontal inferior del triángulo $I_1 - I_2$ en el caso de la familia $I_2 = 0$, con el vertical izquierdo para la $I_1 = 0$ y con el eje inclinado del triángulo en el caso $I_0 = 0$ (que equivale a $I_1 + I_2 = 1$).

En el caso $I_2 = 0$, el hamiltoniano del sistema se reduce a

$$\mathcal{H}(I_1, \phi_1) = -1 + I_1 + \chi(1 - I_1) I_1 \cos(2\phi_1) \quad (2.53)$$

En la figura 7 mostramos las curvas de energía constante de éste hamiltoniano con $\chi = 10$; se han utilizado coordenadas polares, donde el radio es I_1 y el ángulo ϕ_1 . El radio máximo está asociado al punto $I_1 = 1$. Esta familia nace en el punto estable -3.025 (mínimo absoluto de todo el sistema, que en la fig.7 corresponde a los puntos fijos ubicados en $\phi_1 = \pi/2$ y $3\pi/2$), atraviesa dos puntos inestables en $E = -1$ y $E = 0$ y muere en el punto inestable 2.025 (los puntos fijos en $\phi_1 = 0$ y π de la fig.7), atravesando, como se puede apreciar por los rangos de energía, gran parte del espacio de fases. Los dos puntos inestables mencionados se ubican en el centro ($I_1 = 0$) y en el borde ($I_1 = 1$) del círculo, respectivamente. En este sentido, el borde del círculo presenta una “patología” pues corresponde a un único punto. A lo largo de este recorrido la familia solamente es estable aproximadamente en la región $-3.025 \leq E \leq -2.42$. En todo el resto de su rango de energía es una familia inestable. Inclusive el punto estacionario en el cual la familia “muere”, a $E = 2.025$, es inestable, como ya dijimos. Las otras dos familias, $I_0 = 0$ e $I_1 = 0$, nacen en $E = -2.6$ y $E = -2.025$ para morir en $E = 2.6$ y $E = 3.025$, respectivamente.

Existen muchas otras familias de trayectorias periódicas más complicadas, y que no hemos investigado. Estas familias, como es sabido para los sistemas hamiltonianos no integrables con dos grados de libertad, se organizan en árboles uniparamétricos.

En conclusión, el modelo $SU(3)$ posee un espacio de fases compacto (y por lo tanto acotado en la energía) en el cual hemos ubicado ciertos puntos estacionarios estables e inestables. En la proximidad de cada uno de los puntos estables y aproximadamente hasta la energía del primer punto inestable más cercano, el espacio de fases es mayormente

regular; éstos toros se van progresivamente desvaneciendo a medida que superamos la energía crítica del punto inestable próximo. Lejos de éstos puntos estables, el sistema es caótico, con trayectorias irregulares que ocupan superficies tridimensionales. Superpuestas a ésta estructura global, hemos hallado familias de órbitas periódicas. Desde su nacimiento hasta su muerte en dos puntos estacionarios del sistema, estas familias atraviesan regiones regulares y caóticas.

3 Distribuciones cuánticas en el espacio de fases

3.1 Introducción

Así como los estados coherentes y su estructura de grupo asociada permiten definir un espacio de fases \mathcal{F} y una dinámica clásica en este espacio, también permiten asociar a los vectores y operadores del espacio de Hilbert funciones en \mathcal{F} (ecs.(2.24) y (2.25)). Las ecuaciones de Heisenberg escritas en \mathcal{F} proveerán entonces la dinámica cuántica de éstas funciones, que se reducirán a las ecuaciones dinámicas de Hamilton en el límite clásico correspondiente.

En particular, esta representación asocia a los vectores del espacio de Hilbert una distribución definida positiva en \mathcal{F} , que corresponde a tomar en la ec.(2.25) o la (B.10) a la matriz densidad como operador A (cf.(B.48)):

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}) = \frac{\langle z|\psi \rangle \langle \psi|z \rangle}{\langle z|z \rangle} \geq 0 \quad (3.1)$$

donde $|z \rangle$ es el estado coherente asociado con la simetría del sistema bajo estudio parametrizado por el conjunto de variables $\{z\}$ de \mathcal{F} y $|\psi \rangle$ es un vector cualquiera del espacio de Hilbert. Por su definición, \mathcal{W} nos da la probabilidad de encontrar al sistema en un entorno del punto (z, \bar{z}) de \mathcal{F} .

Esta distribución fué estudiada por primera vez por Husimi [19] en relación con el grupo de Weyl W_n . A diferencia de la distribución de Wigner [20] que no es definida positiva y oscila bruscamente en el límite semiclásico tomando grandes valores en regiones del espacio de fases donde no existen trayectorias clásicas asociadas a la función de onda [21], la distribución de Husimi que es una versión suavizada de la de Wigner, no presenta estas dificultades [22].

Si en la ec.(3.1) tomamos como estado $|\psi\rangle$ un autoestado de un cierto Hamiltoniano H independiente del tiempo

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle; \quad \rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

entonces en el límite clásico la distribución $\mathcal{W}(z, \bar{z})$ asociada va a satisfacer la ecuación de Liouville estacionaria (cf.(B.46))

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \{\mathcal{H}; \mathcal{W}\} = 0$$

que nos dice que la distribución cuántica se transforma, en el límite, en una distribución estacionaria clásica en \mathcal{F} ; esto implica que en éste límite $\mathcal{W}(z, \bar{z})$ tiene que estar asociada con una o varias superficies clásicas invariantes ante el flujo Hamiltoniano \mathcal{H} .

Acercas de esta asociación trata una de las primeras hipótesis relacionadas con este tema, formulada inicialmente por A. Voros [23] para sistemas ergódicos y luego generalizado por M.V.Berry [24] para sistemas no integrables en general, que dice que “*toda función de onda semiclásica posee una distribución en espacio de fases concentrada en la región explorada por una órbita típica a tiempo infinito*”. Más tarde, Helton y Tabor [25] dieron una demostración de un teorema muy relacionado con esta hipótesis, que veremos más adelante.

Para sistemas integrables, esta hipótesis es fácilmente verificable. Una órbita típica tomada a tiempo infinito define en este caso un toro identificado por las acciones $(I_i, i = 1, g)$ donde g es el número de grados de libertad del sistema. Es fácil demostrar entonces (ver Apéndice B) que la aproximación de orden cero de la distribución en \mathcal{F} para una dada función de onda ψ_m está picada en un toro invariante cuantificado según

la regla EBKM [26]

$$w_{\mathbf{m}}(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{\mathbf{m}}(z, \bar{z}) \simeq \delta(\mathbf{I}(z, \bar{z}) - \mathbf{I}_{\mathbf{m}}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{m}} = \hbar \left(\mathbf{m} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{4} \right)$$

donde \mathbf{m} es un vector de números enteros que define al estado y $\boldsymbol{\alpha}$ son los índices de Maslov. La regla de cuantificación EBKM permite entonces asociar a cada autoestado del sistema $\psi_{\mathbf{m}}$ con una determinada superficie lagrangiana invariante en \mathcal{F} . En la aproximación de orden uno la distribución de Husimi se transforma en una gaussiana centrada en el toro clásico cuantizado y cuya altura es inversamente proporcional a la velocidad clásica del sistema en el espacio de fases [22,27].

Un caso muy distinto es el de los sistemas ergódicos, en los cuales una órbita típica del sistema cubre uniformemente toda la superficie de energía, y deberíamos esperar entonces que la función de onda, de acuerdo a la hipótesis de Voros y Berry, ocupe toda esta superficie. La existencia de estos estados ha sido verificada numéricamente [28] en el caso del billar en forma de estadio [29] que es un sistema mixing (y por lo tanto ergódico). Desde el punto de vista teórico, la validez de esta hipótesis fue probada exactamente para ciertos sistemas ergódicos. En uno de los pocos resultados rigurosos existentes en este tema, Schnirelman, Zelditch y Colin de Verdières [30] demostraron que, para el movimiento libre de una partícula sobre una variedad de Riemann compacta en la cual el flujo geodésico es ergódico, en el límite $\hbar \rightarrow 0$ las autofunciones, salvo posiblemente un subconjunto de ellas de medida nula, ocupan toda la superficie de energía. Estos resultados fueron generalizados por Helffer y col. [31] a sistemas ergódicos arbitrarios.

Sin embargo, el caso genérico es el de un espacio de fases mixto, el cual presenta la

estructura más rica y complicada. En éstos, los toros racionales y una porción del espacio de fases que los rodea han sido destruidos, sobreviviendo únicamente algunas órbitas periódicas inestables y estables; éstas últimas están rodeadas por islas primarias (toros) en las que a su vez las islas primarias racionales han sido destruidas y reemplazadas por órbitas periódicas inestables y estables, rodeadas éstas últimas por islas secundarias... , continuando así infinitamente [3] . Así, tenemos zonas irregulares arbitrariamente cerca de cualquier punto de una zona regular. El ancho de las regiones irregulares está asociado al orden de las resonancias (toros resonantes del sistema no perturbado), siendo más pequeño cuanto mayor sea el orden de la resonancia. Sin embargo, *esta estructura fractal del espacio de fases clásico no tiene mayor influencia en la mecánica cuántica* ya que, en éste último caso, “observo” al espacio de fases con una resolución $(2\pi\hbar)^g$, y cualquier estructura clásica que ocupe un volumen menor que éste volumen cuántico es *promediada e ignorada*. Por lo tanto si tenemos en una cierta región de \mathcal{F} una zona caótica cuyo volumen es mucho menor que $(2\pi\hbar)^g$ –tal como las zonas resonante de alto orden–, ésta región aparecerá como regular o integrable desde el punto de vista cuántico. En este sentido, la estructura del espacio de fases clásico “detectada” por la mecánica cuántica es una *estructura simplificada*, dependiendo el nivel de complejidad del valor de nuestro parámetro semiclásico $\hbar \sim 1/N$.

Para éstos sistemas que poseen un espacio de fases mixto, tales como el modelo SU(3) con $\chi = 10$, no se sabe mucho acerca de la estructura de la función de onda; éstos sistemas incluyen como caso particular a los sistemas regulares y ergódicos vistos más arriba. Según la hipótesis de Berry, deberíamos esperar encontrarnos, por ejemplo, con algunas distribuciones localizadas en toros KAM y otras con soporte en alguna región

caótica de \mathcal{F} . En el teorema de Helton y Tabor antes mencionado, efectivamente se demuestra que en el límite clásico las funciones de onda se localizan en los subconjuntos (cerrados) clásicos invariantes de \mathcal{F} . Ejemplos de subconjuntos invariantes son la superficie de energía, las órbitas periódicas, los toros y las regiones caóticas. El teorema no aclara cuántos subconjuntos invariantes están asociados a una dada función de onda y cuáles son ellos (regla de cuantificación!), y esto es precisamente lo que nos interesa determinar. Para los sistemas ergódicos, los teoremas de Schnirelman, Zelditch y Colin de Verdières antes mencionados identifican a la superficie invariante que soporta a las funciones de onda con la superficie $\delta(E - H(z, \bar{z}))$. Podemos pensar que en el caso general el número de superficies invariantes asociados a una dada función de onda será sólo una, como en el caso integrable (el toro cuantificado) o varias, y esperar que una dada función de onda esté soportada por una trayectoria periódica y un toro, por ejemplo. Dos cuestiones importantes que surgen de éstos interrogantes, y que serán tratadas más adelante al analizar los resultados del modelo $SU(3)$, son por lo tanto: a) cómo determinar cuántas y cuáles son las superficies invariantes que participan en una dada función de onda y b) con qué peso relativo lo hacen (éstas pueden ser sin embargo preguntas ambiguas o con múltiples “respuestas”, tal como el caso de los sistemas integrables que pueden ser pensados como toros o como infinitas órbitas periódicas [32]).

En uno de los primeros trabajos surgidos en este tema, no directamente relacionado con las funciones de onda sino con los autovalores, Gutzwiller [33] intentó dar una respuesta a éstos puntos; expresó la función densidad de estados en el límite semiclásico en función de una suma sobre las infinitas órbitas periódicas del sistema. A pesar de ser éste el único método de cuantificación semiclásico válido tanto para sistemas integrables

como no integrables conocido hasta el momento, ha tenido escasa repercusión debido, creo yo, a dos motivos: a) éste es un método “global” que, a diferencia de los métodos semiclásicos usuales tal como el EBKM que asocian *una* superficie invariante a *una* dada función de onda, da el espectro *completo* del sistema como superposición de *infinitas* trayectorias periódicas y b) conocer las *infinitas* trayectorias periódicas de un sistema y lograr sumarlas (codificarlas) es en general muy complicado [34].

Recientemente han surgido algunos trabajos que de alguna manera quiebran la validez general de la hipótesis de Berry y del teorema de Helton y Tabor. Por un lado, están los trabajos de McDonald y Kaufman [28] y Heller [36,36] en los cuales se muestra que existe un conjunto (de medida nula) de autofunciones del estadio asociadas con órbitas periódicas inestables del sistema. Bogomolny [38] realizó recientemente un estudio analítico de éstas funciones de onda inestables localizadas en órbitas periódicas. Debido a que éstas órbitas no son obviamente órbitas típicas de un sistema ergódico, contradicen la hipótesis de Berry (aunque éstas constituyan un conjunto de medida nula (ver [37])). Por otro lado, otros estudios recientes [39] – [42] sugieren que pueden existir grandes diferencias entre la dinámica cuántica y la clásica debido a la presencia de barreras parciales en las regiones caóticas del espacio de fases clásico (cantoros y separatrices, para un estudio clásico de la influencia de éstos objetos ver [43]). Estas superficies, que representan barreras parciales al flujo clásico, pueden transformarse en barreras totales (toros) desde el punto de vista cuántico, y localizar una función de onda en un sector restringido de una región invariante caótica, contradiciendo así la hipótesis de Berry y el teorema de Helton y Tabor. Todos éstos resultados serán nuevamente discutidos más adelante (sección 4.3) a la luz de los resultados obtenidos para el SU(3).

Varios autores han utilizado la distribución en espacio de fases (de Wigner o Husimi) para visualizar los autoestados cuánticos de sistemas clásicamente no integrables.

Hutchinson y Wyatt [44] utilizaron la función de Wigner para estudiar el potencial de Henon-Heiles y posteriormente el mismo sistema fue estudiado utilizando la distribución de Husimi por Weissman y Jortner [45], quienes definieron y formularon claramente las ventajas de utilizar ésta última distribución y sus secciones de Poincaré en el caso de este potencial perteneciente al grupo W_2 . La versión cuántica de la sección de Poincaré estroboscópica (apropiada para problemas dependientes del tiempo con potenciales periódicos) fue analizada, en relación con el problema del rotor unidimensional pateado, utilizando los estados coherentes del grupo W_1 [46] y los asociados a la simetría del problema [47], como un ejemplo de una distribución de Husimi generalizada.

En la sección 4.3 daremos los resultados numéricos obtenidos para las funciones de onda en el espacio de fases del modelo $SU(3)$ con $\chi = 10$ que presenta, como hemos visto en la sección 2.3, un espacio de fases mixto. Estas nos permitirán estudiar la estructura de las funciones de onda en \mathcal{F} en términos de objetos invariantes clásicos, y así sacar conclusiones que aclararán en parte los interrogantes planteados más arriba; al mismo tiempo podremos discutir y analizar algunos fenómenos tal como la localización por cantoros. Antes de esto, explicitamos a continuación las expresiones de las distribuciones de Husimi para el caso del $SU(3)$.

3.2 La distribución de Husimi para el grupo SU(3)

El cálculo de la distribución de Husimi de las autofunciones de un hamiltoniano tal como el (2.12) es muy simple cuando hemos diagonalizado al sistema en la base no acoplada (2.5) de los autoestados de H_0 . En ese caso, la función de onda (2.24) reescrita en términos de las variables de ángulo-acción definida por la (2.42) queda

$$\begin{aligned} \psi(\bar{I}, \bar{\phi}) &= \langle \bar{I}\bar{\phi} | \psi \rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} \frac{I_1^{\frac{n_1}{2}} I_2^{\frac{n_2}{2}}}{(1 - I_1 - I_2)^{\frac{n_1 + n_2}{2}}} e^{in_1 \phi_1} e^{in_2 \phi_2} \langle n_1 n_2 | \psi \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde con $|\bar{I}\bar{\phi}\rangle$ hemos indicado el estado coherente $|z_1 z_2\rangle$ expresado en función de las variables de ángulo-acción, $|\psi\rangle$ es un autoestado de H y los coeficientes $\langle n_1 n_2 | \psi \rangle$ se obtienen de la diagonalización numérica del hamiltoniano. En términos de estas variables la norma de los estados coherentes (2.21) se escribe

$$\langle \bar{I}\bar{\phi} | \bar{I}\bar{\phi} \rangle = \frac{1}{(1 - I_1 - I_2)^N} \quad (3.4)$$

De acuerdo a la definición (3.1) y usando las ecs.(3.3) y (3.4), la distribución de Husimi queda entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi(\bar{I}, \bar{\phi}) &= \frac{|\langle \bar{I}\bar{\phi} | \psi \rangle|^2}{\langle \bar{I}\bar{\phi} | \bar{I}\bar{\phi} \rangle} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)}{4\pi^2} \left| \sum_{n_1, n_2=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} I_1^{\frac{n_1}{2}} I_2^{\frac{n_2}{2}} (1 - I_1 - I_2)^{\frac{N - n_1 - n_2}{2}} \right. \\ &\quad \left. e^{i(n_1 \phi_1 + n_2 \phi_2)} \langle n_1 n_2 | \psi \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

La constante de normalización ha sido calculada de tal forma que se cumpla (cf.(2.23)).

$$\int d\bar{I} \cdot d\bar{\phi} \mathcal{W}_\psi(\bar{I}, \bar{\phi}) = 1 \quad (3.6)$$

suponiendo que $\langle \psi_i | \psi_i \rangle = 1$.

3.3 Proyección y Secciones de Poincaré

La distribución (3.5) es una función definida en el espacio de fases \mathcal{F} de cuatro dimensiones. Su visualización y representación gráfica es por lo tanto complicada.

Tal como en el caso clásico, resolvemos esta dificultad definiendo proyecciones y secciones de Poincaré de ésta distribución. Clásicamente, un mapa de Poincaré no isócrono se define eliminando una variable en virtud de la conservación de la energía y tomando un valor fijo para otra de las variables [3] (usualmente la canónica conjugada de la anterior). Se reduce entonces la dimensión del espacio de fases en dos y el tiempo queda eliminado completamente, quedando cada sección rotulada por la energía. Así, en este tipo de gráfico una trayectoria periódica se verá como una serie (finita) de puntos fijos, un toro como una curva cerrada y una trayectoria caótica como una mancha u objeto bidimensional.

Cuánticamente, obtenemos una construcción comparable al procedimiento anterior integrando una dada distribución estacionaria sobre una variable y fijando otra, que definirá entonces el plano de la sección. Así por ejemplo para un corte en el plano $I_2 = cte$ obtenemos

$$S_{I_2}(I_1, \phi_1) = \int d\phi_2 \mathcal{W}_\psi(\bar{I}, \bar{\phi}) \quad (3.7)$$

que es una distribución en el plano (I_1, ϕ_1) cuya representación gráfica será sencilla.

Cualquier otra sección se define en forma análoga.

Obtenemos así un objeto cuántico directamente comparable con las secciones de Poincaré clásicas que nos permitirá analizar la estructura de las funciones de onda en términos de objetos invariantes clásicos.

La distribución en espacio de fases \mathcal{W}_ψ está picada en la superficie de energía correspondiente al autoestado asociado; en el límite semiclásico, esta distribución, no es una delta sobre esta superficie, y por lo tanto la integral (3.7) toma puntos del espacio de fases a diferentes energías, cosa que en principio no es deseable.

Una alternativa para evitar esto es definir las secciones de Poincaré restringidas a la superficie de energía, es decir, en lugar de la (3.7) definimos

$$S_{I_2}(I_1, \phi_1) = \mathcal{W}_\psi(I_1, \phi_1, I_2, \phi_2(E, I_1, \phi_1, I_2)) \quad (3.8)$$

donde E es la energía del autoestado bajo estudio, $\phi_2(E, I_1, \phi_1, I_2)$ se lo obtiene invirtiendo el hamiltoniano clásico (ec.(2.43)) e I_2 se la considera constante. Esta sección en principio parece más conveniente. Sin embargo, debido a que la distribución en el límite semiclásico está fuertemente picada en la superficie de energía E , en la integración de (3.7) en realidad sólo contribuyen puntos muy cercanos a esta superficie, y el resultado de ambas definiciones (3.7) y (3.8) será esencialmente el mismo. En lo que resta del trabajo, utilizaremos cualquiera de las dos definiciones.

Clásicamente una trayectoria en el espacio de configuración puede ser vista como la proyección en éste espacio de la trayectoria ubicada en el espacio de fases. El análogo cuántico de una trayectoria (y que debe ser comparada con ésta) es entonces la proyección de la distribución \mathcal{W}_ψ sobre algún plano, que será el plano o espacio de

configuración. Por ejemplo

$$P(I_1, I_2) = \int d\phi_1 d\phi_2 \mathcal{W}_\psi(\bar{I}, \bar{\phi}) \quad (3.9)$$

nos da la proyección sobre el plano $(I_1 - I_2)$. Esta distribución provee la versión continua en espacio de fases de la densidad de probabilidad $|\langle n_1 n_2 | \psi \rangle|^2$, ya que las variables $(I_1 - I_2)$ representan la versión clásica continua de las variables discretas cuánticas $(n_1 - n_2)$. La relación entre ambas funciones se puede ver calculando explícitamente la (3.9) para el caso del SU(3). Integrando la (3.5) respecto a ϕ_1 y ϕ_2 obtenemos

$$P(I_1, I_2) = (N + 1)(N + 2) \sum_{n_1, n_2=0}^N \frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!} I_1^{n_1} I_2^{n_2} (1 - I_1 - I_2)^{N - n_1 - n_2} |\langle n_1 n_2 | \psi \rangle|^2. \quad (3.10)$$

La probabilidad en términos de las variables de acción clásicas I_i se obtiene entonces como una suavización trinomial de la probabilidad cuántica $|\langle n_1 n_2 | \psi \rangle|^2$.

En cambio, el cálculo de la sección de Poincaré (3.7) nos da en el caso del SU(3), utilizando la (3.5)

$$S_{I_2}(I_1, \phi_1) = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2\pi} \sum_{n_2=0}^N \frac{I_2^{n_2}}{n_2} \left| \sum_{n_1=0}^{N-n_2} \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} I_1^{n_1} (1 - I_1 - I_2)^{N - n_1 - n_2} e^{in_1 \phi_1} \langle n_1 n_2 | \psi \rangle \right|^2 \quad (3.11)$$

4 Cálculos y Resultados

En esta sección presentaremos y discutiremos algunos de los estudios numéricos que hemos efectuado en el modelo SU(3).

A pesar que hasta el momento hemos centrado nuestra atención en las distribuciones en espacio de fases como método para el estudio de la interrelación entre la mecánica clásica y la cuántica, éste obviamente no es el único. El caos clásico no se manifiesta únicamente en las funciones de onda, y entre otras cosas se ha estudiado su influencia en los elementos de matriz de operadores [48], en la sensibilidad de los autovalores ante perturbaciones [49] y en las propiedades estadísticas del espectro cuántico [50].

En realidad, la mayoría de los trabajos realizados en este tema en los últimos años se han concentrado en este último punto y en particular en el análisis de la distribución de los espaciamentos de los niveles vecinos más cercanos, propiedad que está íntimamente ligada al análisis de cruce o repulsión de niveles. Para el modelo SU(3) éstos estudios fueron realizados recientemente por [51].

Antes de entrar en el análisis de las distribuciones (sección 4.3), nos detendremos un poco en algunas características de los elementos de matriz de operadores y la sensibilidad de los autovalores ante perturbaciones en sistemas no integrables (secciones 4.1 y 4.2 respectivamente). Estos métodos proveen una estrategia *global* para el estudio de las funciones de onda (en el sentido que podemos decir algo de un autoestado considerando correlaciones entre *grupos* de ellos) a diferencia del análisis de las distribuciones, que permite el estudio de cada estado en *particular*. En este sentido, estos métodos deben ser considerados como complementarios.

Estos métodos globales tampoco proveen un criterio unívoco y preciso para la clasificación de los autoestados de un sistema. Por lo tanto, y hasta tanto no realicemos una discusión más detallada en la sección 4.3, hablaremos genéricamente de estados *regulares* y *caóticos*.

4.1 Superficies Cuánticas de Integrabilidad

Cuando un sistema clásico conservativo es integrable, las constantes del movimiento del sistema (tal como el hamiltoniano) pueden ser escritas como funciones de las variables de acción del sistema. La existencia de éstas funciones, vía la cuantificación EBK, provee propiedades características a los respectivos espectros de energía. En esta subsección investigaremos un método *puramente cuántico* que permite sensar la existencia, al menos localmente, de éstas funciones.

Supongamos entonces que el hamiltoniano clásico H es integrable y que por lo tanto puede ser escrito en término de las variables de acción \mathbf{I}

$$H = H(\mathbf{I}) \tag{4.1}$$

Las variables dinámicas que no conmuten con el hamiltoniano no serán constantes de movimiento. Sin embargo, la integrabilidad del sistema se pondrá de manifiesto en la cuasiperiodicidad de su evolución temporal

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}(t)) \tag{4.2}$$

$$\{A; H\} \neq 0; \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t.$$

Una consecuencia directa de la (4.2) es que el promedio temporal de una dada variable dinámica A es sólo función de las acciones, es decir es una constante de movimiento:

$$\bar{A} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) dt = A_0(\mathbf{I}) \quad (4.3)$$

(si las frecuencias $\omega(\mathbf{I})$ son conmensuradas entre sí (es decir, para el caso de un sistema de dos grados de libertad si $\frac{\omega_1(\mathbf{I})}{\omega_2(\mathbf{I})} = \frac{r}{s}$ donde r y s son dos enteros cualesquiera), la (4.3) no da un resultado tan simple, sino $A_{0,0}(\mathbf{I}) + A_{s,-r}(\mathbf{I}) + A_{2s,-2r}(\mathbf{I}) + \dots$, que es también una función sólo de las acciones. De todas formas, suponemos por simplicidad que esto no sucede y que la (4.3) es correcta).

Una construcción comparable a la anterior es posible desde el punto de vista cuántico [52], con la diferencia que ésta es *siempre* posible, sea integrable o no el límite clásico del sistema. Cuánticamente, la evolución temporal del operador A viene dada por

$$A(t) = e^{-iNHt} A e^{iNHt} \quad (4.4)$$

$$[A; H] \neq 0$$

donde $\frac{1}{N}$ es el parámetro semiclásico del sistema ($N \sim \frac{1}{\hbar}$ en el grupo de Weyl, $N \sim$ al número de partículas en el SU(3)). En la base $|i\rangle$ en que H es diagonal, tenemos

$$A_{ij}(t) = \langle i|A(t)|j\rangle = e^{iN(E_i - E_j)t} A_{ij}; \quad A_{ij} = \langle i|A|j\rangle \quad (4.5)$$

que nos dice que la variación temporal de los elementos de matriz de $A(t)$ es periódica, con período $T_{ij} = \frac{2\pi}{N(E_i - E_j)}$. El promedio temporal de éstos elementos de matriz

$$\bar{A}_{ij} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A_{ij}(t) dt \quad (4.6)$$

será por lo tanto nulo, a menos que $E_i = E_j$, en cuyo caso da A_{ij}

$$\bar{A}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } E_i \neq E_j \\ A_{ij} & \text{si } E_i = E_j. \end{cases} \quad (4.7)$$

Ignorando los casos de degeneración (cruce de niveles) –que en nuestro hamiltoniano del SU(3) dentro de un dado bloque de simetría no existen–, obtenemos que el promedio temporal de un cierto operador A nos da, en la base de H , simplemente sus elementos diagonales.

El interés de estos elementos diagonales es el siguiente: si el sistema bajo estudio es clásicamente integrable, el límite semiclásico de los autovalores del operador \bar{A} se obtiene a partir de su análogo clásico (4.3) mediante la regla de cuantificación EBK:

$$\bar{A}(\mathbf{I}) \Rightarrow \bar{A}(\mathbf{I}) = \hbar(\mathbf{n} + \frac{\alpha}{4}) \quad (4.8)$$

Debido a la existencia de la función clásica $A(\mathbf{I})$, los autovalores de \bar{A} serán funciones *suaves* de los números cuánticos \mathbf{n} , es decir, constituyen una discretización de la superficie clásica continua $\bar{A}(\mathbf{I})$. Si elegimos entonces dos funciones cualquiera A y B (que no son constantes de movimiento) y graficamos los elementos diagonales en la base de H de A versus los de B , obtendremos que los autoestados del sistema se ordenan según un reticulado o red regular.

Si en cambio el sistema clásicamente no es integrable, la función clásica $\bar{A}(\mathbf{I})$ no existe y no esperamos que los autovalores de \bar{A} varíen suavemente. Sin embargo, si el sistema posee zonas del espacio de fases regulares (es decir, donde existen variables de acción válidas *localmente*), la (4.8) serán válidas para los autoestados con soporte en esa región.

En el gráfico de los elementos diagonales de A versus los de B , esperamos entonces encontrar una red regular para las regiones *localmente integrables*. En cambio, la pres-

encia de zonas caóticas o topológicamente distintas a los toros originales (tal como las islas primarias) debería verse como una destrucción o deformación de la red.

Estos gráficos nos permitirán por lo tanto identificar zonas integrables, (grupos de estados que esperamos tengan soporte clásico en toros) y zonas irregulares (los grupos de estados que esperamos tengan soporte en una región clásica caótica). Es un método global, pues interesan propiedades *relativas* de los diferentes autoestados, tomando a muchos a la vez.

En la fig.8 mostramos los elementos diagonales para las variables de acción I_1 e I_2 del hamiltoniano H_0 del SU(3) no perturbado, para el caso $\chi = 0$. Debido a que para éste valor de χ éstas variables son constantes de movimiento del sistema (los números de ocupación de los niveles 1 y 2), el gráfico muestra una red regular perfecta.

En la fig.9 en cambio mostramos lo mismo que en la fig.8 (es decir, los elementos diagonales de I_1 e I_2 en la base de H) para el caso de $\chi = 0.5$; tal como sabemos de la fig.4 para este valor de χ , el espacio de fases es mayormente regular y posee tres puntos estacionarios estables. Vemos que gran parte de la red de $\chi = 0$ se mantiene, aunque con leves deformaciones. Sin embargo, existen dos regiones claramente visibles para las cuales esta red se ha destruído. Asociamos los estados pertenecientes a las zonas donde la red regular persiste a toros similares (pero levemente modificados) a los existentes con $\chi = 0$. En cambio, los estados pertenecientes a las zonas “irregulares” deberían estar asociados a zonas caóticas o topológicamente distintas a las correspondientes $\chi = 0$. Volveremos a estudiar esto con más detalle (y verificar estas hipótesis) en la sección 4.3.

La fig.10 muestra cómo, a medida que χ aumenta, las regiones “cuánticas” regulares se van deformando y destruyendo, en acuerdo con las predicciones clásicas del teorema

KAM. Para $\chi = 10$, gran parte de la estructura regular ha desaparecido, o bien el método no permite identificarlas. Sin embargo, esto no se debe únicamente a la destrucción de las regiones regulares. Un factor importante es el hecho que las variables I_1 e I_2 graficadas son muy distintas de las constantes de movimiento a este χ ; una elección más correcta serían las constantes surgidas de una aproximación armónica cerca del mínimo del potencial, por ejemplo.

4.2 Sensibilidad de los autovalores ante perturbaciones

Veamos ahora un segundo método global para caracterizar (utilizando magnitudes cuánticas) la sensibilidad de los niveles ante perturbaciones.

Debido a que los estados en regiones regulares se acoplan mucho más fuertemente con los estados vecinos – decreciendo este acoplamiento a medida que consideramos estados más lejanos – mientras que los estados asociados con regiones caóticas en cambio se acoplan ante una perturbación con intensidades de magnitud similar con todos los estados próximos en energía pertenecientes a una dada zona caótica, Percival [49] conjeturó que los estados irregulares *tienen que ser más sensibles a una perturbación que los que correspondan a zonas regulares del espacio de fases.*

Si consideramos un hamiltoniano dependiente de un cierto parámetro χ , tal como el modelo SU(3), la variación de éste parámetro puede ser vista como una perturbación al sistema $H(\chi) = H(\chi_0) + \delta\chi H'(\chi_0) + \dots$. En ese caso la derivada segunda de la energía de un dado autoestado respecto del parámetro χ provee entonces una medida

de la sensibilidad del estado ante perturbaciones.

La expresión para la derivada segunda de un cierto autoestado ψ_i de un sistema que depende linealmente de χ , tal como el modelo SU(3), es (ver Apéndice D)

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial \chi^2} = 2 \sum_{k \neq i} \frac{|\langle \psi_k | \hat{V} | \psi_i \rangle|^2}{E_i - E_k} ; \quad H = H_0 + \chi V \quad (4.9)$$

donde las E_i son las energías exactas del Hamiltoniano H.

El criterio de la sensibilidad de los autovalores ante perturbaciones está ligado al hecho que en sistemas integrables los niveles de energía en general se cruzan (dando una estadística tipo Poisson e^{-s} para la separación de niveles) mientras que en los no integrables no se cruzan y tienden a repelerse (dando una estadística tipo GOE (si H es real simétrica) se^{-s} para la separación de niveles [50].

Para sistemas tal como el SU(3) con $\chi = 10$,mientras nos mantengamos en un dado bloque de simetría, los niveles no se cruzan (chocan repeliéndose uno a otro). Sin embargo, existen dos tipos de choques muy distintos, según las características de la región del espacio de fases a la cual esté asociado el autoestado. En una zona de \mathcal{F} predominantemente regular (en la cual las zonas caóticas son muy pequeñas e ignorables desde el punto de vista cuántico) la perturbación acopla débilmente a estados vecinos y los niveles se “ven” recién cuando están muy próximos; el término $\frac{\langle \psi_i | \hat{V} | \psi_k \rangle}{E_i - E_k}$ de la (4.9) funciona en este caso como una delta. Esto da choques como el esquematizado en la fig. 11a.

En cambio, en zonas caóticas en las cuales los estados se acoplan más fuertemente los choques serán como el indicado en la fig.11b. El tipo de esquema que uno espera entonces es un comportamiento del tipo regular con curvas suaves en función de χ para

las zonas integrables en las cuales las curvaturas serán pequeñas (salvo obviamente el punto de choque de los niveles) (fig.11c) mientras que a una zona caótica las repulsiones del tipo fig.11b entre muchos niveles producirán un comportamiento menos ordenado y más sensible a la variación de χ , tal como se muestra en la fig.11d.

Graficando las curvaturas de los autoestados del sistema en función de la energía, esperamos poder detectar comportamientos bien distintos como los de las figs.11c y d. Los estados con una curvatura muy alta y aislados de a pares deben en principio ser descartados, pues los asociamos a choques entre niveles regulares y no a regiones caóticas.

En la fig.12 mostramos el resultado de las curvaturas para los autoestados del sistema con $N = 80$ y $\chi = 10$ en función de la energía.

Como primer punto notamos que cerca de los extremos (en energía) donde sabemos que el sistema es regular (ver la fig.4 y su comentario en la sección 2.4) la curvatura es (muy) pequeña, tal como esperábamos. En el rango $(-2, 0)$ aparece una zona de puntos correlacionados de a pares con grandes curvaturas, que, tal como dijimos, asociamos a estados regulares. Esto sitúa por lo tanto a un número importante de estados regulares en ésta región, hecho que en principio coincide con la presencia de un número mayor de puntos estacionarios estables para $E < 0$ en comparación con el rango $E > 0$ (fig.4).

Para tener un resultado más claro de la información contenida en éste tipo de gráfico, y teniendo en cuenta que sólo esperamos extraer resultados medios (groseros) de éste tipo de método, efectuamos un promedio de los datos con una función lorentziana

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \chi^2} = \sum_k \left(\frac{\eta}{(E - E_k)^2 + \eta^2} \right) \frac{\partial^2 E_k}{\partial \chi^2} \quad (4.10)$$

donde η es un parámetro arbitrario que da el ancho de la lorentziana. Si promediamos sobre un par de decenas de estados, obtenemos $\eta = 0.15$ y la (4.10) con este valor de η nos da la fig.13, en la cual las zonas de gran curvatura deben ser interpretadas por el momento como más regulares.

Deseamos ahora eliminar los estados que poseen gran curvatura (regulares). Obviamente no es claro a partir de cual valor de la curvatura eliminar, y no poseemos un criterio para esto (salvo la correlación de a pares). En la fig.14 mostramos el resultado de eliminar los estados con curvatura mayor que 150000. Vemos ahora una zona central (centrada en $E = 0$) en la cual las curvaturas son grandes y existen pocos estados con curvatura próxima a cero, estados que deben ahora ser asociados a un comportamiento caótico. Notamos una concentración mayor de estados con curvatura muy chica en el lado izquierdo ($-3.025 \leq E \leq -1$) que en el lado derecho ($1 \leq E \leq 3.43$). La fig.15a muestra el promedio lorentziano de ésta figura, mientras que si nos quedamos hasta curvaturas de sólo 10000, obtenemos la fig.15b, que ahora ubica a la zona más caótica en el intervalo (0,2).

En conclusión, el método ubica estados regulares en los extremos e indica (en concordancia con los resultados clásicos) una mayor concentración de estados regulares en el intervalo (-3.025,-1). La región próxima a cero ($-1 \leq E \leq 1$) aparece como la región más caótica, sin poder en principio dar mayores precisiones. Sin embargo, parece existir una supremacía de estados de mediana curvatura en el intervalo ($0 \leq E \leq 1.5$) (fig.12b).

Como se ve, el método dista de brindar resultados claros y precisos. No tenemos criterio para definir las zonas de curvatura que corresponden a distintos tipos de estados. Además, inevitablemente mezclamos estados regulares con irregulares y sólo obtenemos

propiedades medias. El estudio de las propiedades estadística de los autovalores adolece del mismo defecto.

4.3 Análisis de las distribuciones

Pasamos ahora a analizar las distribuciones y sus respectivas secciones de Poincaré para el modelo $SU(3)$, definidas en la sección 3.3. Deseamos, como ya dijimos, comprender la estructura de éstas en términos de subconjuntos invariantes clásicos, a los cuales sabemos que se reducen en el límite clásico los estados estacionarios de los sistemas conservativos (ver apéndice B).

Para realizar esta asociación, procedemos de la siguiente manera: dada una distribución $W_\psi(\bar{I}, \bar{\phi})$ que representa a la función de onda ψ en \mathcal{F} , calculamos su máximo, lo cual nos identifica un punto en este espacio de 4 dimensiones. Las coordenadas de este punto, pueden ser utilizadas como condiciones iniciales para la propagación de una trayectoria clásica, la cual diremos que es la *trayectoria principal* asociada a dicha función de onda. La idea es entonces ver qué tipo de órbita obtenemos y, comparando las secciones de Poincaré de las distribuciones con las de ésta trayectoria, analizar hasta que punto podemos explicar la estructura de la función de onda.

Si eventualmente existen máximos secundarios de W_ψ que no son explicados por la trayectoria principal, ubicando la posición de éstos podemos propagar órbitas secundarias que complementarán el análisis de la estructura del autoestado ψ .

En todos las figuras, la sección de Poincaré que aparece será para el valor de I_i

indicado por dos pequeñas marcas en el triángulo respectivo.

Como veremos, éste es un método mucho más rico y preciso que los anteriores, y nos permite sondear (con una definición en espacio de fases de $\frac{1}{N} \times \frac{1}{N}$) la relación entre la mecánica clásica y la cuántica, tratando, si así lo deseamos, cada autofunción en particular.

Comencemos, ya que nos había quedado pendiente de la sección 3.1, viendo el caso de $\chi = 0.5$, para el cual el sistema es prácticamente regular en todo el espacio de fases.

4.3.1 El caso $\chi = 0.5$

Mediante las secciones de Poincaré de los autoestados, podemos tratar de comprender mejor la estructura de la fig.9. Para esto, hemos elegido tres estados próximos, que hemos rodeado con un círculo en dicha figura. Uno de ellos, el nivel $|616 \rangle$ con energía 0.2556 se encuentra en la zona “regular” a la izquierda de la zona vertical en la cual el reticulado se ha destruído; un segundo estado, el $|621 \rangle$ con $E = 0.2572$, se encuentra en la región que nos interesa investigar mientras que el tercero, el $|617 \rangle$ con $E = 0.2558$ se halla a la derecha de esta región .

En la fig.16 mostramos la proyección de la función de onda y una sección de Poincaré del tipo (3.8) de la distribución correspondiente en el plano $I_2 = 0.55$ para los tres estados en cuestión, con sus respectivas trayectorias principales en la misma sección. Para $\chi = 0$, esta sección se vería como un círculo perfecto de radio I_1 (correspondiente al estado). Para $\chi = 0.5$, vemos que los estados $|616 \rangle$ y $|617 \rangle$ que se encuentran en la zona donde el reticulado se ha mantenido, efectivamente corresponden a “círculos deformados”, tal como predice el teorema KAM. En cambio la función de onda $|621 \rangle$

está asociada, según muestra su sección cuántica y la clásica correspondiente, a un objeto invariante cuya topología es diferente a la de los toros con $\chi = 0$: corresponde a una isla primaria, muy próxima a la órbita periódica ubicada en el centro de dicha isla o toro. De hecho, hemos verificado que todos los estados que se encuentran en la zona vertical en la cual la red se ha destruido corresponden a esta familia de órbitas periódicas, o una isla primaria muy cercana. Confirmamos así la hipótesis hecha en la sección 3.1 acerca de la interpretación de la figura 9.

4.3.2 El caso $\chi = 10$

En este caso el sistema no se halla próximo a uno integrable, y la estructura del espacio de fases a este χ fue explicada en la sección 2.4.

Tal como dijimos, alrededor de cada punto estacionario estable encontramos una zona mayormente regular en \mathcal{F} , y esperamos tener funciones de onda asociadas a los toros de estas regiones.

Las figuras 17-21 muestran estados asociados con las regiones regulares próximas a los puntos estacionarios de energía $-3.025(1)$, $-2.6(2)$, $-2.025(4)$, $-1.56(7)$ y $3.43(14)$, respectivamente, que son todos los puntos estacionarios estables que hemos hallado (entre paréntesis indicamos el número correspondiente a ese extremo en la Tabla II).

Comparando la proyección de la distribución en el plano (I_1, I_2) con la fig.5 vemos que estas funciones de onda se ubican en las proximidades del punto clásico estacionario correspondiente. El primer estado del grupo $E = -3.025$ es el fundamental del sistema. Tal como se ve, es un estado muy concentrado en el plano $I_2 = 0$, al igual que el estado $|5\rangle$ que le sigue en la figura. Análogamente, los estados correspondientes a los puntos

de energía $E = -2.6$ (fig.18) y -2.025 (fig.19) yacen muy cerca del plano $I_1 = 0$ e $I_1 + I_2 = 1$ respectivamente, según corresponde a la ubicación del punto estacionario asociado. En cambio, los estados próximos a los puntos $E = -1.5\bar{6}$ (fig.20) y $E = 3.4\bar{3}$ (fig.21) se ubican más hacia el centro del triángulo. Todos los estados de las figs.17-21 corresponden a funciones de onda asociadas con toros.

En la fig.21 que contiene estados próximos al punto estable de energía $E = 3.4\bar{3}$ muestra con más detalle que los anteriores el tipo de estado regular que encontramos en las proximidades de éstos puntos; cada una de las autofunciones viene acompañada, ubicada debajo de la misma, por su trayectoria principal.

El primer estado de dicha figura, el $|861 \rangle$ (máximo del sistema), se concentra sobre el punto estacionario clásico (no señalado en la figura), que simplemente corresponde a un punto en el máximo de la sección cuántica respectiva.

A medida que disminuye la energía (parámetro que puede ser considerado como el parámetro KAM) encontramos distintos estados que se “ubican” en los toros de las proximidades del punto estable. El punto inestable más próximo al $E = 3.4\bar{3}$ es el punto 13 de la tabla II, con energía $E = 3.025$. En la fig.21, los tres primeros estados (el $|861 \rangle$, $|856 \rangle$ y $|852 \rangle$) poseen una energía ubicada entre ambos puntos estacionarios, mientras que para los dos últimos (el $|847 \rangle$ y el $|845 \rangle$) ésta es menor que la del punto inestable ($E = 2.8946$ y $E = 2.8741$, respectivamente). Para tener una idea global de la estructura del espacio de fases en éstos rangos de energía y poder comparar y ubicar las trayectorias principales dadas en forma individual en la fig.21, referimos al lector a la fig.6. En ésta, hemos graficado la misma sección de Poincaré que en la fig.21 pero para varias trayectorias a dos energías distintas: en la fig.6a trayectorias con $E = 3.1568$ (la

energía del estado $|856 \rangle$) mientras que en la parte b poseen $E = 2.8946$ (la energía del $|847 \rangle$).

El estado $|856 \rangle$ se concentra en la órbita periódica ubicada en el centro de los toros de la fig.6a, según muestra su trayectoria principal asociada en la fig.21. Por su parte, el estado $|852 \rangle$ posee soporte en uno de los toros que rodea a ésta órbita periódica.

Si seguimos disminuyendo aún más la energía, y pasamos por debajo de la energía correspondiente al punto inestable, las zonas regulares se destruyen muy velozmente, tal como se muestra en la fig.6b, donde podemos apreciar que han aparecido zonas caóticas de volumen considerable. Sin embargo, a pesar de esto aún subsisten zonas regulares, y funciones de onda asociadas a estos toros, tal como el estado $|847 \rangle$ de la fig.21 que posee $E < 3.025$ y está asociado a un toro primario, o el $|845 \rangle$ de energía menor aún asociado a un toro muy próximo a la órbita periódica a la cual nos referíamos anteriormente (ver el $|856 \rangle$). Esta última función de onda posee además la particularidad de presentar, con un peso importante, dos subconjuntos invariantes clásicos, pues, como se observa, tiene una componente importante sobre la órbita periódica (inestable!) contenida en el plano $I_1 + I_2 = 1$.

Naturalmente, existen estados asociados a zonas caóticas del sistema. Tal como vimos anteriormente, una zona de \mathcal{F} muy caótica es la región $-1 < E < 1$. En la fig.22 se muestran dos estados de esta región, el $|431 \rangle$ y el $|341 \rangle$, con energía -0.10625 y -0.55648 , respectivamente, acompañados por sus respectivas órbitas principales.

Hemos dibujado en este caso las proyecciones y secciones de Poincaré cuánticas con densidad de puntos en lugar de curvas de nivel por razones de claridad. Como complemento de éstas, la fig.23 presenta la misma sección del estado $|431 \rangle$ que en

la fig.22 pero en un gráfico tridimensional. Tal como se observa en la sección de las trayectorias principales el subconjunto invariante que sirve de soporte a éstas funciones de onda son regiones caóticas. Las órbitas correspondientes dan cuenta de la sección cuántica obtenida. Para verificar la ergodicidad de éstas órbitas, graficamos en la fig.24 todo el espacio de fases accesible en ésta sección de Poincaré para la energía del estado $|341\rangle$. Vemos que efectivamente la trayectoria clásica y la función de onda ocupan prácticamente todo el espacio de fases accesible (son “ergódicas”). Sin embargo, ambas dejan una pequeña área sin ocupar en la región $I_1 \simeq 0$, $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$. Esto nos sugiere la existencia de un cantor en dicha región que esté actuando como barrera parcial.

Como test numérico de esto, hemos propagado la trayectoria clásica durante mayores tiempos que el de la fig.22 comprobando que finalmente la órbita entra en esa pequeña región inicialmente no ocupada, lo cual confirma la hipótesis del cantor. Si el flujo entrante (o saliente) de dicha región (medido en área) es mucho más chico que $(\frac{1}{N} \times \frac{1}{N})$, entonces la barrera *parcial* desde el punto clásico se transformará en una barrera *total* cuánticamente, produciendo una *localización* de la función de onda tal como la que observamos. Este tipo de fenómeno quiebra la asociación de subconjuntos invariantes clásicos con funciones de onda, pues un dado autoestado tendrá soporte solo en una *fracción* del subconjunto invariante. Además, esta fracción dependerá en general del valor de \hbar (i.e. $1/N$) al cual trabajemos.

Hemos visto hasta el momento funciones de onda asociadas a regiones regulares y caóticas. El caso general es una estructura mixta para el espacio de fases, conteniendo tanto órbitas regulares como caóticas mezcladas. Para ejemplificar esto y ver que tipo de funciones de onda hallamos, damos en la figura 25 una secuencia de estados vecinos

pertenecientes a una energía tal que el espacio de fases es claramente mixto, tal como se muestra en la sección de Poincaré clásica de la figura 26a (la energía de esta sección corresponde al estado $|172\rangle$, que está ubicado en el centro del grupo; el plano utilizado para ésta es el mismo que el de la fig.25). Para completar la imagen del espacio de fases en esta región mostramos también en la parte b de la fig.26 el espacio de fases accesible a esta energía y esta sección.

La función de onda $|169\rangle$ está asociada con la región caótica próxima al centro ($I_1 = 0$). Posee una estructura bien definida que tal vez pueda ser entendida a partir de las superficies invariantes estables e inestables asociadas a la órbita periódica central $I_1 = 0$. En cambio, la $|170\rangle$ posee un soporte regular muy próximo a una órbita periódica estable (no marcada en la figura 26a). La $|171\rangle$ es nuevamente otro autoestado con soporte caótico. Sin embargo, éste es complementario del subconjunto asociado a la $|169\rangle$, y entre ambos forman la parte caótica central de la fig.26a. No podemos afirmar por el momento si ambos subconjuntos son invariantes o no, es decir, si los separa otra superficie invariante (un toro) o una barrera parcial (un cantor). Esta función de onda parece además combinar diversos subconjuntos, ya que posee por ejemplo una componente importante en la zona regular próxima a la órbita periódica estable; en este sentido sería combinación de por lo menos dos subconjuntos invariantes.

El $|172\rangle$ presenta nuevamente una estructura regular próxima a la órbita estable (comparar con la $|170\rangle$). Finalmente, el $|173\rangle$ está fuertemente influenciado por un toro muy próximo a la zona caótica, mientras que la $|174\rangle$ y la $|175\rangle$ presentan nuevamente un soporte caótico, similar al de la $|169\rangle$, aunque con una estructura bien diferente.

Por último, quisiera discutir la influencia central que poseen algunas órbitas periódicas sobre las funciones de onda. Tal como dijimos en la sección 3.4, existen tres familias simples de órbitas periódicas contenidas en los planos $I_1 = 0, I_2 = 0$ e $I_1 + I_2 = 1$.

En la figura 7 mostramos la familia $I_2 = 0$. Esta familia posee una energía comprendida entre $-3.025 \leq E \leq 2.025$ (puntos 1 y 11 de la tabla II).

Hemos encontrado, a lo largo de todo este rango de energía numerosos estados cuya función de onda se encuentra fuertemente concentrada sobre el plano $I_2 = 0$.

Algunos de éstos estados se muestran en la fig.27, en la cual nuevamente hemos elegido graficar con densidad de puntos. La sección de Poincaré corresponde, en todo los casos, al plano $I_2 = 0$, es decir, el plano que contiene a la órbita periódica. Estas secciones deben ser comparadas con las distintas curvas de la fig.7, su correlato clásico.

Esta familia nace como una órbita estable en las proximidades del punto $E = -3.025$ (1) (función de onda $|1 \rangle$ de la fig.27) y luego se torna inestable, para morir en el punto inestable con $E = 2.025$ (11) al cual corresponde la $|784 \rangle$. La inestabilidad de la órbita periódica asociada se pone de manifiesto en la dispersión de la función de onda con respecto al plano $I_2 = 0$. Las funciones de onda $|238 \rangle$ a la $|784 \rangle$ de la figura 27 se encuentran en el rango inestable y, a diferencia de las tres primeras, muestran una dispersión grande (sobre todo comparar la $|1 \rangle$ y la $|784 \rangle$, ya que ambas corresponden a un estado fundamental (mínimo y máximo, respectivamente) de la familia).

La familia posee dos puntos estacionarios inestables. La $|238 \rangle$ está concentrada en el punto estacionario inestable de energía -1 (punto 8) de la Tabla II), mientras que la $|446 \rangle$ lo hace en el punto de energía 0 (punto 9 de dicha tabla).

Este mismo tipo de concentración fuerte de ciertas funciones de onda sobre (en

principio) *una* órbita periódica que puede ser inestable (sumergida en una región completamente caótica) ha sido observado para las otras dos familias principales ($I_1 = 0$ e $I_1 + I_2 = 1$) y para otras órbitas periódicas (no tan simples como las anteriores). Una cuantificación directa de estas familias (como si fueran un sistema unidimensional y por lo tanto integrable) provee una muy buena aproximación para la energía de éstos estados. El por qué de la existencia de éstos estados individuales no ha sido comprendido hasta el momento, aunque recientemente Bogomolny [38] y Berry [53] han dado una explicación sobre la concentración de un grupo de estados en éstas órbitas periódicas y Ozorio de Almeida [54] dió unos pasos hacia la comprensión de la cuantificación de éstos estados individuales.

5 Conclusiones

Este trabajo ha sido un intento por ampliar nuestros conocimientos acerca del límite semiclásico de sistemas clásicamente caóticos. Por un lado, hemos desarrollado una herramienta que permite el tratamiento en espacio de fases de sistemas cuyo límite clásico pertenece a una clase más general que el conocido $\hbar \rightarrow 0$ del grupo de Weyl.

A diferencia de otros métodos tales como la sensibilidad de los niveles ante perturbaciones o el comportamiento de los elementos de matriz de algunos operadores que proveen, a partir de magnitudes puramente cuántica, una caracterización global del sistema en cuanto a la clasificación de sus autoestados, hemos puesto nuestra mayor atención en la comparación de las distribuciones cuánticas en espacio de fases con las trayectorias clásicas. Creemos que éste tipo de análisis nos permite una comprensión más directa y rica de la naturaleza del límite semiclásico.

Basicamente, el trabajo consistió en una exploración de la estructura de la función de onda y su relación con los conjuntos invariantes clásicos. No damos (ni hemos pretendido dar) una explicación del porqué de esa estructura, es decir, no poseemos una expresión analítica general para la función de onda y la regla de cuantificación semiclásica correspondiente.

En general hemos encontrado que la órbita principal asociada al máximo de una dada distribución en espacio de fases resulta suficiente para explicar gran parte (alrededor del 90 por ciento) de la estructura de un dado autoestado del sistema. Basta entonces en esos casos con identificar sólo *un* subconjunto invariante clásico con la función de onda, que no necesariamente es el subconjunto “típico” a esa energía.

Sin embargo, existen excepciones, tales como la función de onda $|845 \rangle$ de la figura 21, que combina con peso similar *dos* subconjuntos invariantes. Esto tal vez esté asociado simplemente a un “choque” de niveles. Además, la presencia de cantoros en general hace que tengamos que identificar sólo una porción de un dado subconjunto caótico con una dada función de onda.

En el caso genérico de un espacio de fases mixto, encontramos funciones de onda cuyo soporte es un toro, una región caótica o una órbita periódica (estable o inestable). En principio, usando la teoría de perturbaciones y la regla de cuantificación EBK esperamos comprender la estructura y energía de los autoestados del primer tipo.

En cambio, la estructura de los estados con soporte en una región caótica no es obvia y hemos observado estados concentrados en la misma región caótica (y muy próximos en energía) pero que presentan una estructura bastante diferente en su sección de Poincaré, tales como los estados $|174 \rangle$ y $|175 \rangle$ de la fig.25. Esto sugiere la participación de distintas trayectorias pertenecientes a ésta región en cada una de estas funciones de onda.

Por último, están los estados fuertemente concentrados sobre una órbita periódica, que puede ser tanto estable como inestable. Existen familias de estados que siguen una dada familia de órbitas periódicas, cuya cuantificación tipo Bohr-Sommerfeld provee una buena aproximación para las energías. Recientemente se han hecho algunos avances en la comprensión de éstos estados [38,53,54]. Sin embargo, temas tales como cuáles son las órbitas periódicas que influyen a los autoestados (porque ciertas familias sí y otras no; es obvio que no pueden hacerlo todas pues éstas son infinitas) están por el momento lejos de estar resueltos.

Referencias

- [1] N.Froman and P.O.Froman, *The JWKB Approximation: Contributions to the Theory* (North Holland, Amsterdam, 1966); M.V.Berry and K.E.Mount, *Rep. Prog. Phys.* **35**, 315 (1972).
- [2] H.Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
- [3] A.J.Lichtenberg and M.A.Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, (Springer, New York, 1984).
- [4] M.Henon and C.Heiles, *Astron J.* **69**, 73 (1964).
- [5] *Les Houches Summer School Lecture Notes*, Eds. G. Looss, R.H.G. Helleman and R.Stora, (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [6] V.I.Arnol'd, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, (Mir, Moscow, 1976).
- [7] N.L.Balazs and B.K.Jennings, *Phys. Rep.* **104**, 347 (1984); M.Hillery, R.F.O'Connell, M.O.Scully and E.P.Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [8] J.R.Klauder and B.Skagerstam, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, (World Scientific, Singapore, 1985).
- [9] A.Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, (Springer, New York, 1986).

- [10] L.G.Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 407 (1982); y referencias allí contenidas.
- [11] S.Y.Li, A.Klein and R.M.Dreizler, *J.Math. Phys.* **11**, 975 (1970).
- [12] E.Moya de Guerra and F.Villars, *Nucl. Phys.* **A298**, 109 (1978); A.Klar, F.J.Margetan, J.P.Vary and A.Plantino, *Phys. Rev.* **C28**, 2499 (1983)
- [13] R.D.Williams and S.E.Koonin, *Nucl. Phys.* **A301**, 72 (1982).
- [14] H.J.Lipkin, M.Meshkov and A.J.Glick, *Nucl. Phys.* **62**, 188 (1965).
- [15] M.Moshinsky, *Group Theory and the Many-Body Problem*, (Gordon and Breach, Science Publ., New York, 1968).
- [16] P.Kramer and M.Saraceno, *Geometry of the Time-Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics*, (Springer, New York, 1981)
- [17] V.Bargmann, *Comm. Pure App. Math.* **XIV**, 187 (1961)
- [18] ver por ejemplo, P.Ring and P.Schuk, *The Nuclear Many Body Problem*, (Springer-Verlag, New York, 1980)
- [19] K.Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **22**, 264 (1940)
- [20] E.Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932)
- [21] M.V.Berry, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **287**, 237 (1977)
- [22] K.Takahashi, *J.Phys. Soc. Jpn.* **55**, 762 (1986).

- [23] A.Voros in *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, Proc. Como Conf. 1977, Lect. Notes Phys. **93**, eds G.Casati and J.Ford, (Springer, Berlin, 1979)
- [24] M.V.Berry, *Semiclassical Mechanics of Regular and Irregular Motion*, Les Houches Summer School Lecture Notes, Eds. G. Looss, R.H.G. Helleman and R.Stora, (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [25] J.W.Helton and M.Tabor, *Physica D***14**, 409, 1985
- [26] J.B.Keller, *Ann. Phys.* **4**, 1980 (1958); A.Einstein, *Verhand. Dent. Phys. Ges.* **19**, 82 (1917); M.L.Brillouin, *J. de Phys.*, ser. 6, **7**, 353 (1926); V.Maslov, *Théorie des Pérturbations*, (Dunod, Paris, 1972).
- [27] J.Kurchan, P.Leboeuf and M.Saraceno, CNEA preprint P-10/88 (mandado a publicar).
- [28] S.W.McDonald and A.N.Kaufman, *Phys.Rev.Lett.***42**, 1189 (1979); M.Shapiro and G.Goelman, *Phys.Rev.Lett.* **53**, 1714 (1984)
- [29] L.A.Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).
- [30] A.Schnirelman, *Usp. Mat. Nank.* **29**, 181 (1974); Y.Colin de Verdière, *Commun. Math. Phys.* **102**, 497 (1985) S.Zelditch, *Duke Math. J.* **55**, 919 (1987).
- [31] B.Helffer, A.Martinez and D.Robert, *Commun. Math. Phys.* **109**, 313 (1987).
- [32] M.V.Berry and M.Tabor, *Proc. R.Soc. London* **A349**, 101 (1976)
- [33] M.C.Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **12**, 343 (1971) y referencias allí contenidas

- [34] M.C.Gutzwiller, *Physica* **D5**, 183 (1982)
- [35] S.W.McDonald, Lawrence Berkeley Laboratory Report No. LBL-14837, 1983 (no publicado)
- [36] E.J.Heller, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515 (1984)
- [37] P.W.O'Connor and E.J.Heller, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2288 (1988)
- [38] E.B.Bogomolny, *Physica* **D31**, 169 (1988)
- [39] R.C.Brown and R.E.Wyatt, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1 (1986)
- [40] T.Geisel, G.Radons and J.Rubner, *Phys. Rev. Lett.* **57** 2883 (1986)
- [41] L.L.Gibson, C.C.Schatz, M.A.Ratner and M.J.Davis, *J.Chem Phys.* **86**, 3263 (1987)
- [42] M.J.Davis, *J.Phys. Chem.* **92**, 3124 (1988).
- [43] R.S.Mackay, J.D.Meiss and I.C.Percival, *Physica* **13D**, 55 (1984); D.Bensimon and L.P.Kadanoff, *ibid*, 82 (1984)
- [44] J.S.Hutchinson and R.E.Wyatt, *Chem. Phys. Lett.* **72**, 378 (1980)
- [45] Y.Weissman and J.Jortner, *Phys. Lett.* **A83**, 55 (1981); *J.Chem. Phys.* **77**, 1486 (1982)
- [46] S.Chang and K.Shi, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 269 (1985)
- [47] K.Zyczkowski, *Phys. Rev.* **A35**, 3546 (1987)

- [48] A.Peres, Phys. Rev. **A30**, 504 (1984); M.Feingold, N.Moiseyev and A.Peres, Phys. Rev. **A30**, 509 (1984).
- [49] I.C.Percival in *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, Proc. Como Conf. 1977, Lect. Notes Phys. **93**, eds. G.Casati and J.Ford, (Springer, Berlin, 1979).
- [50] O.Bohigas, M.J.Giannoni and C.Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984), ibid in *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, eds H.Seligman and H.Nishioka, Lectures Notes in Physics **263**, (Springer-Verlag, Berlin, 1986); P.Pechukas, Phys. Rev. Lett. **51**, 943 (1983); M.V.Berry and M.Tabor, Proc. Roy. Soc. London **A356**, 375 (1977); M.V.Berry and N.Robnik, J.Phys. **A17**, 2413 (1984).
- [51] D.C.Meredith, S.E.Koonin and M.R.Zirnbauer, Phys. Rev. **A37**, 3499 (1988).
- [52] A.Peres, Phys. Rev. Lett. **53**, 1711 (1984).
- [53] M.V.Berry, a aparecer en Proc.Rof.Soc.London.
- [54] A.Ozorio de Almeida, a aparecer en *Nonlinearity*
- [55] J.R.Klauder, J.Math. Phys. **8**, 2392 (1967) y referencias allí contenidas.
- [56] A.Voros, Thèse d'état, Saclay (1977); A.Voros, preprint Institute for Theoretical Physics (Santa Barbara), Mayo 1989.
- [57] R.Gilmore, *Lic Groups, Lie Algebra and some of their Applications*, (John Wiley, New York, 1974).
- [58] por ejemplo ver E.Witten, Physics Today, 38 (July 1980)

- [59] E.Witten, Nucl. Phys. **B160**, 57 (1979).
- [60] B.Simon, Commun. Math. Phys. **71**, 247 (1980).
- [61] J.P.Blaizot and H.Orland, Phys. Rev. **C24**, 1740 (1981).
- [62] J.E.Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 99 (1949)

A Elementos de matriz del Hamiltoniano

Damos aquí la expresión de los elementos de matriz del Hamiltoniano (2.12) en la base de partícula independiente (2.5). De la ref. [11] tenemos

$$\begin{aligned}
 G_{ii} |n_1 n_2\rangle &= n_i |n_1 n_2\rangle \quad (i = 0, 1, 2; \quad n_0 = N - n_1 - n_2) \\
 G_{10} |n_1 n_2\rangle &= \sqrt{(N - n_1 - n_2)(n_1 + 1)} |n_1 + 1 \quad n_2\rangle \\
 G_{20} |n_1 n_2\rangle &= \sqrt{(N - n_1 - n_2)(n_2 + 1)} |n_1 \quad n_2 + 1\rangle \\
 G_{21} |n_1 n_2\rangle &= \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1 \quad n_2 + 1\rangle \\
 G_{01} |n_1 n_2\rangle &= \sqrt{n_1(N - n_1 - n_2 + 1)} |n_1 - 1 \quad n_2\rangle \\
 G_{02} |n_1 n_2\rangle &= \sqrt{n_2(N - n_1 - n_2 + 1)} |n_1 \quad n_2 - 1\rangle \\
 G_{12} |n_1 n_2\rangle &= \sqrt{(n_1 + 1)n_2} |n_1 + 1 \quad n_2 - 1\rangle
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

En particular, iterando la segunda y tercera de las (A.1) sobre el estado fundamental $|0\rangle$ nos da la (2.5). Asimismo a partir de las (A.1) podemos escribir los elementos de matriz del hamiltoniano (2.9) con $v_{ij} = v_{ji}$, obteniendo

$$\begin{aligned}
 \langle n_1 n_2 | H |n'_1 n'_2\rangle &= [\epsilon_0(N - n_1 - n_2) + \epsilon_1 n_1 + \epsilon_2 n_2] \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2} \\
 &+ \frac{v_{01}}{2} \delta_{n_2, n'_2} \delta_{n_1, n'_1 - 2} [(n_1 + 1)(n_1 + 2)(N - n_1 - n_2)(N - n_1 - n_2 - 1)]^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{v_{01}}{2} \delta_{n_2, n'_2} \delta_{n_1, n'_1 + 2} [n_1(n_1 - 1)(N - n_1 - n_2 + 1)(N - n_1 - n_2 + 2)]^{\frac{1}{2}} \tag{A.2} \\
 &+ \frac{v_{02}}{2} \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2 - 2} [(n_2 + 1)(n_2 + 2)(N - n_1 - n_2)(N - n_1 - n_2 - 1)]^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{v_{02}}{2} \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2 + 2} [n_2(n_2 - 1)(N - n_1 - n_2 + 1)(N - n_1 - n_2 + 2)]^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{v_{12}}{2} \delta_{n_1, n'_1 + 2} \delta_{n_2, n'_2 - 2} [n_1(n_1 - 1)(n_2 + 1)(n_2 + 2)]^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{v_{12}}{2} \delta_{n_1, n'_1 - 2} \delta_{n_2, n'_2 + 2} [n_2(n_2 - 1)(n_1 + 1)(n_1 + 2)]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

El hamiltoniano que hemos diagonalizado utiliza las convenciones (2.10) y la definición (2.11).

B La representación de estados coherentes y el límite de grandes N .

Trataremos en este apéndice ciertos conjuntos sobrecompletos (no ortogonales) de vectores del espacio de Hilbert \mathcal{Q} , llamados estados coherentes. Estos estados fueron introducidos en su forma canónica por Klauder [55] en el marco de la óptica cuántica y luego generalizados por Perelomov [9]. Han sido aplicados en muchas áreas de la física y la referencia [8] constituye una excelente compilación de publicaciones relacionadas con este tema.

En la estructura de la mecánica cuántica es esencial el papel desempeñado por las distintas representaciones del espacio de Hilbert, en especial los conjuntos de vectores ortogonales completos asociados a los observables. Los estados coherentes proveen también una representación de la mecánica cuántica. Sin embargo, poseen ciertas propiedades particulares que los hace especialmente atractivos (relacionadas directamente con la sobrecompletitud y su definición en el espacio de fases). En particular, tal como veremos más adelante, los estados coherentes proveen la representación adecuada para el estudio de límites semiclásicos. Esto se debe fundamentalmente a dos cosas: i) la estructura grupal asociada a esta representación permite formular un método general para definir límites clásicos de teorías cuánticas [10], al cual se reducirá la dinámica del sistema en dicho límite y ii) proveen una aproximación global y uniforme de la función de onda en el límite semiclásico.

Estos conjuntos están íntimamente relacionados a los grupos: pueden ser definidos para las representaciones lineales de cualquier grupo [9]. Sin embargo, es en conexión

con las representaciones irreducibles unitarias de los grupos de Lie donde poseen su mayor importancia y peso, y este es el caso que trataremos aquí. La representación de estados coherentes no requiere para su utilización características particulares del Hamiltoniano, y basta con que el Hamiltoniano pueda ser escrito en términos de los generadores de algún grupo de Lie. En particular, no es necesario que el Hamiltoniano en cuestión preserve la forma de los estados coherentes en el tiempo.

B.1 La representación de estados coherentes: su definición y propiedades.

Sea un sistema o modelo cuántico definido sobre un espacio de Hilbert \mathcal{Q} a través de un cierto hamiltoniano H . Supongamos que en este sistema existe subyacente un cierto grupo de Lie semisimple G de orden r , en términos de los generadores del cual está escrito el hamiltoniano H . La estructura de G queda determinada por el algebra de sus r generadores G_i , $i = 1, \dots, r$

$$[G_i; G_j] = c_{ij}^k G_k \tag{B.1}$$

donde los c_{ij}^k son las constantes de estructura del grupo. Sea $U(z)$ (donde z representa un juego de r parámetros complejos $z = \{z_i\}, i = 1, \dots, r$) una representación unitaria irreducible de G actuando sobre el espacio de Hilbert \mathcal{Q} . Un elemento U cualquiera de G puede ser escrito en términos de los generadores del grupo como

$$U(z) = \exp\left(\sum_i \bar{z}_i G_i\right) \tag{B.2}$$

donde los G_i son ciertos operadores antihermíticos que representan a los generadores en \mathcal{Q} . Para grupos semisimples la forma canónica de las reglas de conmutación permite clasificar a los generadores G_i pertenecientes al álgebra \mathcal{G} en operadores de subida, de bajada y de peso (G^+, G^-, E). Consideremos el conjunto de estados parametrizados por el vector z de g componentes continuas generado por la aplicación de los elementos de G asociados con los operadores de subida sobre un estado $|0\rangle$

$$|z\rangle = \exp\left(\sum_{i=1}^g \bar{z}_i G_i^+\right) |0\rangle. \quad (\text{B.3})$$

donde $|0\rangle$ es el estado de mínimo peso de la representación irreducible que satisface

$$E_i |0\rangle = h_i |0\rangle \quad (\text{B.4})$$

$$G_i^- |0\rangle = 0 \quad (\text{B.5})$$

donde los h_i son números. El conjunto (B.3) así formado de estados $|z\rangle$ son los estados coherentes asociados a este grupo. Los operadores E_i que poseen la propiedad de dejar invariante al estado $|0\rangle$ (ec.(B.4)) generan un subgrupo de G denominado subgrupo de estabilidad o isotropía con respecto al $|0\rangle$.

La parametrización del estado coherente $|z\rangle$ viene entonces dada solamente por los elementos del espacio cociente $X=G/E$, que es el espacio que consideramos de aquí en más. Los estados coherentes poseen una rica estructura geométrica que proviene de la estructura del grupo G subyacente. Los parámetros $\{z_i\}$ que rotulan a un estado coherente definen un espacio o variedad \mathcal{F} de $2g$ dimensiones que puede ser naturalmente asociado al espacio cociente X , el cual es a su vez isomorfo a las órbitas de la representación coadjunta del grupo. Por el momento simplemente nos restringiremos a

identificar a un estado coherente con un punto de \mathcal{F} . Más adelante, en la sección B.2 explotaremos más esta estructura.

B.1.1 Propiedades de los estados coherentes

Los estados coherentes (B.3) no están normalizados, e indicaremos explícitamente su normalización.

La primera propiedad a señalar es la relación de completitud de esta representación. Debido a la irreducibilidad de la representación, y utilizando el lema de Schur[57] obtenemos la siguiente relación

$$\int d\mu(z) \frac{|z\rangle\langle z|}{\langle z|z\rangle} = I \quad (\text{B.6})$$

donde $d\mu(z)$ es la medida invariante del grupo. La integral indicada aquí y todas las que siguen deben ser interpretadas sobre el espacio cociente G/H .

Para que la integral (B.6) exista, debe converger la integral $\int d\mu(z) \frac{|\langle z|0\rangle|^2}{\langle z|z\rangle}$. En este caso, la (B.6) provee una resolución de la unidad, y los estados coherentes constituyen una representación. Todo vector de \mathcal{Q} queda entonces representado por una función analítica de z en \mathcal{F} (representación de Bargmann [17]):

$$\psi(z) = \langle z|\psi\rangle \quad (\text{B.7})$$

con el producto escalar definido por

$$\langle \varphi|\phi\rangle = \int \frac{d\mu(z)}{\langle z|z\rangle} \bar{\varphi}(z) \phi(z). \quad (\text{B.8})$$

Tal como mencionamos anteriormente, el límite semiclásico de la (refa25) provee, en el caso de sistemas clásicamente integrables, una aproximación global (i.e., válida sobre

toda la trayectoria) y uniforme (sin divergencias) de la función de onda. La condición de analiticidad provee, en este límite, una aproximación semiclásica de los autovalores del sistema (ver, por ejemplo, [56,27]).

Debido a la sobrecompletitud del conjunto $|z\rangle$, estos no son ortogonales y por lo tanto cualquiera de ellos puede ser expresado como combinación lineal de los otros

$$|z\rangle = \int \frac{d\mu(z')}{\langle z'|z'\rangle} \langle z'|z\rangle |z'\rangle. \quad (\text{B.9})$$

Los operadores de \mathcal{Q} pueden ser representados en \mathcal{F} de varias maneras. Una de ellas es asociar una función $A(z, \bar{z})$ en \mathcal{F} a un dado operador A de \mathcal{Q} , llamada símbolo de A en \mathcal{F} . Sin embargo, esta prescripción no es única, y en general existen varios símbolos asociados a un dado operador ([9]). En este trabajo, nos interesa solamente el símbolo covariante (o Q) de un dado operador A :

$$A(z, \bar{z}) = \frac{\langle z|A|z\rangle}{\langle z|z\rangle} \quad (\text{B.10})$$

que define entonces una función en \mathcal{F} . Si A es un operador hermítico, $A(z, \bar{z})$ será real.

Alternativamente, se puede dar una representación de los generadores del grupo en términos de operadores diferenciales actuando sobre funciones definidas en \mathcal{F} . Por otro lado, otra consecuencia de la irreducibilidad de la representación U de G es que cualquier operador de \mathcal{Q} puede ser expresado como combinación lineal de los elementos del grupo. Y como todo elemento de G puede escribirse en términos de los generadores, entonces todo operador se puede escribir en términos de estos. Ello nos permitirá escribir a todo operador como un operador diferencial actuando sobre funciones de \mathcal{F} . Esto es análogo a lo que sucede en la representación de coordenadas de la mecánica cuántica.

En particular, la ecuación de Schrödinger será una ecuación diferencial para ciertas funciones analíticas en \mathcal{F} .

B.1.2 Un ejemplo: el grupo de Weyl W_n

Para ilustrar lo expuesto hasta aquí en forma general, presentamos a continuación la representación de estados coherentes para el grupo de Weyl W_g . Este es el grupo asociado con la formulación usual de la mecánica cuántica en términos de los operadores \hat{x} y \hat{p} .

Supongamos entonces tener un sistema cuántico cualquiera cuyo hamiltoniano está escrito en términos de los operadores posición y momento:

$$H = H(\hat{x}, \hat{p})$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{B.11}$$

con g grados de libertad y donde $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_g)$, $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_g)$.

Consideremos al conjunto de operadores constituido por los operadores \hat{x}, \hat{p} y la unidad I , que forman un álgebra cerrada:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I \ ; \ [\hat{x}, I] = [\hat{p}, I] = 0. \tag{B.12}$$

Las reglas de conmutación (B.12) definen el álgebra del grupo de Weyl W_g , que denotaremos \mathcal{G}_w , y por lo tanto constituyen los generadores del grupo y describen los elementos infinitesimales de W_g . Por comodidad, realizamos un cambio de base en \mathcal{G}_w a la base usual de operadores de creación y destrucción

$$a = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}} \quad a^+ = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar}} \tag{B.13}$$

en términos de los cuales los conmutadores (B.12) que definen al álgebra quedan

$$[a; a^+] = \frac{I}{\hbar}; \quad [a; I] = [a^+; I] = 0 \quad (\text{B.14})$$

Siguiendo la definición general para los estados coherentes dada en la sección B.1, tomemos al estado de mínimo peso $|0\rangle$ de la representación irreducible sobre la cual actúa el grupo (vacío de bosones) que satisface

$$I|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{B.15})$$

$$a|0\rangle = 0 \quad (\text{B.16})$$

y por lo tanto los estados coherentes vendrán dados por

$$|z\rangle = e^{z a^+} |0\rangle, \quad z = \{z_i\} (i = 1, \dots, g). \quad (\text{B.17})$$

En este caso el grupo de isotropía es simplemente la unidad, a^+ son los operadores de subida y a los de bajada. El espacio cociente \mathcal{F} con los puntos del cual identificamos a los estados coherentes coincide en este caso, como es sabido, con el espacio de fases euclideo usual generado por las variables (q, p) relacionadas con los z a través de

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) \quad (\text{B.18})$$

donde $q = \frac{\langle z | \hat{q} | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ y $p = \frac{\langle z | \hat{p} | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$.

Los estados coherentes (B.17) no están normalizados

$$\langle z | z \rangle = \exp\left(\frac{z \cdot \bar{z}}{\hbar}\right). \quad (\text{B.19})$$

Los operadores a y a^+ actúan en el espacio de Hilbert \mathcal{Q} . Una base de \mathcal{Q} apropiada es la generada por el operador a^+ actuando sobre el vacío de fonones

$$|n\rangle = |n_1 \cdots n_g\rangle = \sqrt{\frac{\hbar^n}{n!}} (a^+)^n |0\rangle \quad (\text{B.20})$$

En términos de los estados de la base (B.20) de \mathcal{Q} , $|z\rangle$ se puede escribir

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \exp(\bar{z}a^+) |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n (a^+)^n}{n!} |0\rangle \\ |z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\hbar^n n!}} \bar{z}^n |n\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

donde n denota colectivamente a los índices $n = (n_1, \dots, n_n)$. De la (B.21) tenemos para la representación de los autoestados del oscilador armónico en la base de estados coherentes

$$\langle z|n\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{\hbar^n n!}}. \quad (\text{B.22})$$

La resolución de la unidad para esta familia sobrecompleta de estados queda:

$$\frac{1}{(2\pi i \hbar)^g} \int \frac{dz d\bar{z}}{\langle z|z\rangle} |z\rangle \langle z| = I \quad (\text{B.23})$$

o en parametrización p, q

$$\frac{1}{(2\pi \hbar)^g} \int \frac{d^g q d^g p}{\langle pq|pq\rangle} |pq\rangle \langle pq| = I \quad (\text{B.24})$$

donde

$$|pq\rangle = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)a^+\right] |0\rangle \quad (\text{B.25})$$

Cualquier estado $|\psi\rangle$ de \mathcal{Q} queda representado en \mathcal{F} por la siguiente función

$$\psi(z) = \langle z|\psi\rangle \quad (\text{B.26})$$

donde $\langle z|\psi\rangle$ es analítica en z . Expandiendo al estado ψ en términos de la base del oscilador armónico (B.20)

$$|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle \quad ; \quad \psi_n = \langle n|\psi\rangle \quad (\text{B.27})$$

y proyectando este estado en la base de los estados coherentes y teniendo en cuenta la (B.22) obtenemos

$$\psi(z) = \langle z|\psi\rangle = \sum_n \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{\hbar^n n!}} \quad (\text{B.28})$$

que pone de manifiesto la analiticidad de $\psi(z)$.

Los estados coherentes no son ortogonales entre sí, debido a la sobrecompletitud:

$$\langle z|z'\rangle = \exp(z\bar{z}') \quad (\text{B.29})$$

Otras propiedades son:

- $\frac{\langle z|a|z\rangle}{\langle z|z\rangle} = \bar{z}/\hbar$

- $\frac{\langle z|a^+|z\rangle}{\langle z|z\rangle} = z/\hbar$

- $\frac{\langle z|a a^+|z\rangle}{\langle z|z\rangle} = z\bar{z}/\hbar^2$

- la identificación diferencial de la operación a y a^+ en \mathcal{F} es

$$a|z\rangle = \frac{\bar{z}}{\hbar}|z\rangle \quad ; \quad a^+|z\rangle = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z\rangle \quad (\text{B.30})$$

- $\frac{\langle z|p q\rangle}{\sqrt{\langle p q|p q\rangle}} = \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{1}{\hbar}(ipz - \frac{(z-q)^2}{2})}$ $\frac{|\langle z|p q\rangle|^2}{\langle p q|p q\rangle} = \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{(z-q)^2}{\hbar}}$

Utilizando la identificación con operadores diferenciales de a y a^+ en \mathcal{F} , y teniendo un Hamiltoniano cualquiera $H(\hat{p}, \hat{x})$ escrito en terminos de a^+ y a , podemos asociarle al hamiltoniano un operador diferencial a través de:

$$\langle z|H(a^+ a) = H\left(z; \frac{\partial}{\partial z}\right) \langle z| \quad (\text{B.31})$$

y las ecuaciones de Schrödinger en el espacio \mathcal{F} en representación de estados coherentes quedan:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z) = H(z; \frac{\partial}{\partial z}) \psi(z) \quad (\text{B.32})$$

$$H(z; \frac{\partial}{\partial z}) \psi(z) = E \psi(z) \quad (\text{B.33})$$

B.2 Los estados coherentes y el límite semiclásico de la mecánica cuántica.

Usualmente se dice que la mecánica cuántica se reduce a la mecánica clásica en el límite $\hbar \rightarrow 0$. Este es el llamado principio de correspondencia.

El teorema de Ehrenfest nos dice que la evolución de los valores medios de un cierto paquete obedece, cuando la dispersión del paquete es mucho más chica que las dimensiones sobre las cuales varía apreciablemente el potencial, a la dinámica clásica. En el límite semiclásico, esto será obviamente correcto sólo para tiempos cortos, puesto que al evolucionar la dispersión del paquete irá en aumento, y llegará un momento para el cual éste dejará de ser lo suficientemente pequeño, y la evolución, debido a la dispersión, no será más clásica. Los estados coherentes son paquetes cuya forma no es (en general) preservada por la dinámica cuántica. Sin embargo, poseen justamente la propiedad que su dispersión tiende a cero en el límite clásico (es decir, se reduce a un punto en \mathcal{F}) y por lo tanto en ese límite su evolución será clásica. En cambio, tal como mostraremos más adelante, una función de onda cualquiera corresponderá en ese límite no a un punto

punto de \mathcal{F} sino a una distribución en dicho espacio propagándose clásicamente. Los estados estacionarios estarán a su vez asociados con superficies clásicas invariantes.

El límite $\hbar \rightarrow 0$, al cual implícitamente o explícitamente nos hemos referido hasta el momento, no es el único límite clásico que existe. En general podemos decir que si el hamiltoniano de nuestro sistema puede ser escrito en términos de los generadores de un grupo de Lie, entonces éste poseerá un límite clásico cuando algún parámetro N de la representación del grupo, que debe ser identificado en cada caso, tiende a infinito. Entendemos por límite clásico algún límite en el cual las correlaciones cuánticas desaparecen (es decir, el producto de operadores se vuelve conmutativo) y la dinámica del sistema se reduce a una dinámica clásica usual dada por las ecuaciones de hamilton.

Algunos ejemplos de éstos límites clásicos “generalizados” son el caso de una partícula puntual moviéndose en un potencial central N dimensional [58], el límite de gran número de colores ($N = N_c$) de la QCD [59] o los modelos cuánticos de N espines [60]. Para una exposición general de los límites de grandes N ver [10].

El límite clásico estudiado en esta tesis corresponde a aquellos límites en los cuales dejamos fijo el grupo de simetría G (el $SU(3)$ en nuestro modelo) y variamos la dimensión de la representación del grupo, siendo ésta última una función creciente de N (parámetro que en nuestro modelo corresponde al número de partículas). Este procedimiento coincide con lo que usualmente denominamos el límite de grandes números cuánticos, en el cual la dimensión de la matriz que representa a los distintos operadores es muy grande, siendo por lo tanto los incrementos discretos muy pequeños en comparación con la magnitud del módulo de dichos operadores. Como consecuencia de esto, los operadores pueden ser reemplazados por números que conmutan (funciones en

\mathcal{F}) cuyo variación es continua.

El espacio de fases clásico que emerge de éste procedimiento es el espacio de los parámetros \mathcal{F} mencionado anteriormente (identificado con las órbitas de la representación coadjunta de G) dotado de una estructura simpéctica que definiremos a continuación. En éste sentido éstas órbitas constituyen entonces generalizaciones del espacio de fases usual (p, q) .

Todas las cantidades geométricas relacionadas a este espacio pueden ser expresadas en términos de la norma $\langle z | z \rangle$ de los estados coherentes (B.3) [9] que puede ser explícitamente evaluada para cada representación. El tensor antisimétrico no degenerado (2-forma) viene dado por

$$\omega' = 2i \omega^{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j \quad (\text{B.34})$$

donde

$$\omega^{ij} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \left(\frac{1}{N} \ln \langle z | z \rangle \right). \quad (\text{B.35})$$

En términos de ω^{ij} podemos definir un corchete de Poisson en \mathcal{F} a través de

$$\{f(z, \bar{z}); g(z, \bar{z})\} = i \omega_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} \right) \quad (\text{B.36})$$

donde $\omega_{ij} = (\omega^{-1})^{ij}$ (ω es no degenerado) y f, g son dos funciones cualesquiera definidas en \mathcal{F} . La estructura simpléctica de \mathcal{F} nos permite entonces definir una dinámica clásica en éste espacio, caracterizada por un cierto hamiltoniano h_c

$$\frac{df}{dt} = \{f, h_c\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{B.37})$$

El hecho que la teoría cuántica posee un límite clásico cuando $N \rightarrow \infty$ está basado en la siguiente propiedad de la representación de estados coherentes, que es de fundamental importancia:

$$\frac{\langle z|AB|z \rangle}{\langle z|z \rangle} = AB + \frac{1}{N} \omega_{ij} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}_i} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (\text{B.38})$$

donde A y B son dos operadores cualesquiera y \mathcal{A} y \mathcal{B} son sus respectivos símbolos covariantes (cf.(B.10)). La (B.38) nos dice que en el límite $N \rightarrow \infty$ el producto de operadores se transforma en el producto de sus respectivos símbolos, poniendo de manifiesto la pérdida de las correlaciones y fluctuaciones propias de la mecánica cuántica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta A = \lim_{N \rightarrow \infty} (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2) = 0. \quad (\text{B.39})$$

En cambio, a orden $1/N$ la (B.38) nos da el límite de un conmutador como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{i} \frac{\langle z|[A; B]|z \rangle}{\langle z|z \rangle} = \{a(z, \bar{z}); b(z, \bar{z})\} \quad (\text{B.40})$$

donde con letras minúsculas hemos indicado el límite clásico -que suponemos que existe- del símbolo covariante de un operador

$$a(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle z|A|z \rangle}{\langle z|z \rangle}; \quad (\text{B.41})$$

análogamente para $b(z, \bar{z})$. El corchete indicado en la (B.40) es el definido por la (B.36).

La (B.40) relaciona las reglas de conmutación de la mecánica cuántica con el corchete de Poisson, y por lo tanto con la estructura simpléctica de \mathcal{F} . Aplicando esta propiedad al valor medio de la ecuación de Heisenberg en esta representación obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{N}{i} [A; H] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \{a; h_c\} \quad (\text{B.42})$$

donde

$$h_c(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle z|H|z \rangle}{\langle z|z \rangle} \quad (\text{B.43})$$

es la análoga a la (B.41) y define, a partir del operador cuántico, al hamiltoniano clásico h_c que describe en \mathcal{F} el comportamiento límite del sistema.

En conclusión en el límite $N \rightarrow \infty$ las funciones de onda y operadores cuánticos se transforman en funciones ordinarias en un espacio de fases \mathcal{F} dotado de una estructura simpléctica. Como consecuencia de la propiedad (B.38), la teoría cuántica se reduce entonces a una dinámica clásica en \mathcal{F} .

B.3 La distribución de Husimi

Si en particular elegimos como operador A en la (B.42) a la matriz densidad de un cierto estado $|\psi(t)\rangle$, $A(t) = \rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, el límite semiclásico en representación de estados coherentes de las ecuaciones

$$\dot{\rho} = \frac{N}{i} [H; \rho] \quad (\text{B.44})$$

$$H\rho = E\rho \quad (\text{B.45})$$

queda, utilizando la (B.38)

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \{\mathcal{W}; \mathcal{H}\} = 0 \quad (\text{B.46})$$

$$(E - \mathcal{H})\mathcal{W} = \frac{1}{2N} \omega_{ij} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_i} \right) + \mathcal{O}(1/N^2) \quad (\text{B.47})$$

La función $\mathcal{W}(z, \bar{z}, N)$ es el símbolo covariante de la matriz densidad

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}, N) = \frac{\langle z | \rho | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{|\langle z | \psi \rangle|^2}{\langle z | z \rangle} \quad (\text{B.48})$$

que asocia a cada función de onda $|\psi\rangle$ una distribución definida positiva en el espacio de fases. Para el grupo de Weyl, esta distribución fue estudiada por primera vez por Husimi [19]. Provee una representación en espacio de fases de la función de onda cuyo

límite semiclásico es suave, y en este sentido constituye un elemento ideal para el estudio de la estructura de las autofunciones en dicho límite y su correlación con las estructuras invariantes clásicas.

En el límite clásico, la (B.46) se reduce a la ecuación de Liouville

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \{w; h_c\} = 0 \quad (\text{B.49})$$

o sea, la distribución \mathcal{W} siguiendo la trayectoria clásica en \mathcal{F} es constante (conserva el volumen). Si agregamos correcciones cuánticas en $1/N$ a la (B.46), la evolución ya no será más clásica y equivaldrá a la de un sistema disipativo que no conserva el volumen.

La función $w(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{W}(z, \bar{z}, N)$ representa en este límite la probabilidad de presencia del sistema en el punto (z, \bar{z}) de \mathcal{F} .

Veamos ahora el comportamiento en el límite semiclásico de la distribución correspondiente a un estado estacionario. A orden cero, la (B.47) nos da

$$(E - h_c(z, \bar{z}))w(z, \bar{z}) = 0. \quad (\text{B.50})$$

La parte entre paréntesis $(E - h_c(z, \bar{z}))$ es una función nula sobre la superficie $h_c(z, \bar{z}) = E$ correspondiente a la energía E del autoestado del sistema y es distinta de cero fuera de ésta. Por lo tanto, para que se satisfaga la (B.50), $w(z, \bar{z})$ puede ser distinta de cero sólo sobre la superficie citada:

$$w(z, \bar{z}) = f_E(z, \bar{z}) \delta(E - h_c(z, \bar{z})) \quad (\text{B.51})$$

donde f_E es una función cualquiera desconocida por el momento. Para sistemas conservativos de un grado de libertad, la (B.51) simplemente nos da una delta sobre la trayectoria clásica de energía E . El estudio de ésta distribución a orden $1/N$ fue estudiada en [22,27] donde se muestra que a este orden la delta se transforma en una

gaussiana y la función f_E que da la amplitud es inversamente proporcional a la velocidad del sistema en el espacio de fases:

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}) = \frac{c}{v(z, \bar{z})} \exp[-2N(\frac{h_c(z, \bar{z}) - E}{v(z, \bar{z})})^2]. \quad (\text{B.52})$$

Si el sistema bajo estudio corresponde a un caso integrable con g grados de libertad entonces existirán $g - 1$ operadores independientes de H que conmutan entre sí y con H

$$[H; A_i] = [A_i; A_j] = 0 \quad i, j = 1, \dots, g - 1 \quad (\text{B.53})$$

que pueden ser diagonalizados en la misma base que H . Esto hace que existan $g - 1$ ecuaciones adicionales del tipo (B.50) para las $g - 1$ A_i , es decir, un total de g

$$(E - h_c(z, \bar{z}))w(z, \bar{z}) = 0$$

$$(a_1 - a_1(z, \bar{z}))w(z, \bar{z}) = 0$$

$$(a_{g-1} - a_{g-1}(z, \bar{z}))w(z, \bar{z}) = 0 \quad (\text{B.54})$$

sistema que tiene como solución en el límite clásico para la distribución de Husimi de un sistema integrable

$$w(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) \delta(E - h_c(z, \bar{z})) \delta(a_1 - a_1(z, \bar{z})) \cdots \delta(a_{g-1} - a_{g-1}(z, \bar{z})) \quad (\text{B.55})$$

La (B.40) junto con las (B.53) nos aseguran en cambio que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{i} \langle [H; A_i] \rangle &= \{h_c; a_i\} = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{i} \langle [A_i; A_j] \rangle &= \{a_i; a_j\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

lo cual significa que h_c y las a_i son funciones independientes e in-volution [6]. En este caso, el producto de las deltas en la ecuación (B.55) me define un toro, seleccionado por los números cuánticos E y a_1, \dots, a_{g-1} , confirmándose lo dicho más arriba. En conclusión, la función de onda de sistemas integrables se concentra, en el límite semiclassical, sobre el toro definido por las reglas de cuantificación EBK.

Si el sistema en cambio es no integrable, disponemos sólo de la ec. (B.50) que nos dice que la distribución es cierta función sobre la superficie de energía cuantificada, ec.(B.51), pero no sabemos nada acerca de la estructura interna de la función de onda sobre ésta superficie. Si el espacio de fases del sistema es mixto, en esta superficie de energía habrá toros, regiones caóticas, etc. El estudio de la estructura de la función de onda en estos casos constituye el objetivo principal de esta tesis.

Además del interés formal de la comprensión del principio de correspondencia, el estudio de estos límites clásicos es de gran importancia práctica como método de aproximación.

En el límite, nuestra teoría se ha reducido a un sistema clásico. Se plantea entonces el problema de recuperar información, a partir de éste, de nuestro sistema cuántico original. La energía del estado fundamental vendrá dada en este límite por la energía del mínimo del hamiltoniano clásico $h_c(z, \bar{z})$; calculando las pequeñas oscilaciones cerca de este mínimo y cuantificándolas obtenemos una aproximación armónica al espectro que será satisfactoria para los estados más bajos del sistema, tanto mejor cuanto mayor sea N . La energía de los estados más excitados (estados colectivos) puede obtenerse considerando las trayectorias clásicas más alejadas del mínimo y cuantificando mediante la regla *EBK* [26]. Finalmente, una expansión en $1/N$ nos permitirá calcular las variables de interés

físico de la teoría original con N finito.

A pesar que en principio este esquema de aproximación es correcto y puede resultar muy útil - en especial como método de aproximación en teorías en las cuales otros métodos fallan o resultan muy complicados- su validez se limita a hamiltonianos clásicos integrables. En el caso que el hamiltoniano $h_c(z, \bar{z})$ que obtenemos sea no integrable, la regla de cuantificación *EBK* no vale más pues existen ahora regiones caóticas en \mathcal{F} y no sabemos como recuantificar el límite clásico, es decir, como reobtener información acerca de los autovalores y autoestados del problema cuántico original salvo, eventualmente, las regiones del espacio de fases próximas al fundamental donde esperamos que el sistema sea mayormente regular.

B.3.1 El límite de grandes N y el principio variacional dependiente del tiempo

Antes de pasar a un ejemplo concreto sobre éstos límites, me gustaría hacer algunas consideraciones acerca del principio variacional dependiente del tiempo (PVDT) y su relación con los límites clásicos expuestos más arriba. La ecuación de Schrödinger puede ser obtenida variando la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) dt \quad (\text{B.57})$$

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \langle \psi | i\hbar \partial_t - H | \psi \rangle \quad (\text{B.58})$$

donde ψ y $\bar{\psi}$ son consideradas variables independientes. Si la variación de $|\psi\rangle$ es general

$$\delta S = 0 \Rightarrow i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad \text{y la c.c..} \quad (\text{B.59})$$

Supongamos ahora que *no* permitimos una variación de $|\psi\rangle$ en todo el espacio de Hilbert \mathcal{Q} , si no que la restringimos a un cierto subespacio $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ de \mathcal{Q} . Para definir este subespacio, vamos a imponer la condición que cualquier vector perteneciente a éste queda definido por un conjunto de parámetros $\{z_i\}$, $i = 1, \dots, g$ que definen un espacio de parámetros que hemos denominado \mathcal{F} .

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi(z)\rangle \quad (\text{B.60})$$

y por lo tanto a cada punto de \mathcal{F} le corresponde un vector de $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ y viceversa.

Nos interesa el caso en el cual la parametrización es la de estados coherentes, y por lo tanto $|\psi(z)\rangle$ son los estados coherentes $|z\rangle$ y \mathcal{F} es el espacio cociente G/H anteriormente utilizado.

Restringiendo entonces la variación de $|\psi\rangle$ a $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ y suponiendo que toda la dependencia temporal de las $|\psi(z)\rangle$ es a través de los z , por el PVDT no más obtendremos la ecuación lineal (B.59) sino un juego de ecuaciones de Hamilton no lineales para los z [16]:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \{z_i; \mathcal{H}\} \quad (\text{B.61})$$

donde el corchete es el mismo que hemos definido en (B.36) y $\mathcal{H}(z, \bar{z}, N) = \frac{\langle z, N | H(N) | z, N \rangle}{\langle z, N | z, N \rangle}$, donde hemos, en esta última expresión, explicitado la dependencia en N de \mathcal{H} .

Las (B.61) definen una dinámica “clásica” en \mathcal{F} , que provee la mejor trayectoria en este espacio: da la evolución temporal de un vector en $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ que mejor “sigue” a la verdadera evolución de $|\psi\rangle$ en todo \mathcal{Q} .

Este método se diferencia conceptualmente del límite clásico anterior ya que en el primer caso los estados coherentes son utilizados como representación en el espacio \mathcal{Q} ,

evaluando los observables físicos en esta base y obteniendo el límite clásico de la teoría en esta representación, mientras que en el marco del PVDT los estados coherentes son utilizados como aproximación a la función de onda exacta $|\psi(t)\rangle$. En este sentido, la ec.(B.61) no es ningún límite clásico de la teoría, sino que simplemente constituye una aproximación a la dinámica exacta válida para cualquier valor de N . La ec.(B.61) no es la misma que la (B.42) ya que el hamiltoniano en ambas no es el mismo: $\mathcal{H}(z, \bar{z}, N)$ es la representación en estados coherentes del hamiltoniano cuántico a cualquier N , mientras que $h_c(z, \bar{z})$ es su símbolo en el límite $N \rightarrow \infty$:

$$h_c(z, \bar{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{H}(z, \bar{z}, N) \quad (\text{B.62})$$

Esto da la conexión entre el límite clásico de estas teorías y la aproximación por parametrización de la ecuación de Schrödinger y nos dice que en el límite $N \rightarrow \infty$ esta última aproximación es exacta, y que coincide con el límite clásico de la teoría. Dicho de otra manera, la evolución temporal aproximada de los $|z\rangle$ dada por la ec.(B.61) es exacta en el límite, indicándonos que en éste último caso el hamiltoniano preserva la forma de estos estados. La obtención de las ecuaciones clásicas (B.61) así como las correcciones ulteriores para recuperar toda la información original de nuestro sistema fueron estudiadas en el marco del problema de muchos cuerpos utilizando la integral funcional en representación de estados coherentes [61]. Este método de aproximación adolece de las mismas dificultades que las ya expuestas más arriba con relación a la integrabilidad del sistema, siendo ahora la dinámica dependiente en este caso del parámetro N . En el caso que el conjunto de estados coherentes sea el generado por los estados de partícula independiente (teorema de Thouless [18]), las ecs.(B.61) son las de *TDHF* el

mínimo de \mathcal{H} da la energía del estado fundamental en la aproximación de Hartree-Fock.

B.3.2 Límite clásico en el grupo de Weyl

Para dar un ejemplo concreto de un límite clásico utilizando la representación de estados coherentes, ilustrar lo expuesto más arriba y obtener ciertas conclusiones acerca de las distribuciones en el espacio de fases \mathcal{F} , retomamos el caso del grupo de Weyl. Las órbitas coadjuntas de este grupo son simplemente planos $2g$ dimensionales que, para un dado valor de \hbar , definen el espacio de fases. La dinámica clásica en el espacio cociente de este grupo coincide entonces con la dinámica clásica usual, y la relación entre los parámetros z y las coordenadas canónicas conjugadas (q, p) viene dada por la (B.18).

Deseamos obtener el límite con $\hbar \rightarrow 0$ de la ecuación dinámica

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [A; H] + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{Heis} \quad (\text{B.63})$$

utilizando la representación de estados coherentes del grupo de Weyl W_g (sección B.1.2)

$$|z\rangle = \exp(\bar{z}a^\dagger)|0\rangle$$

$$\langle z|z\rangle = \exp\left(\frac{z\bar{z}}{\hbar}\right).$$

Tomando el valor medio en éstos estados de la (B.63) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{A}(z, \bar{z}, t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A; H] \rangle + \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right)_{Heis} \quad (\text{B.64})$$

donde \mathcal{A} , como siempre es $\mathcal{A}(z, \bar{z}, \hbar) = \frac{\langle z, \hbar | A | z, \hbar \rangle}{\langle z, \hbar | z, \hbar \rangle}$ y $\langle \rangle \equiv \frac{\langle z, \hbar | \cdot | z, \hbar \rangle}{\langle z, \hbar | z, \hbar \rangle}$.

Necesitamos calcular entonces, en el límite semiclásico $\hbar \rightarrow 0$, el símbolo covariante del conmutador. Para esto, utilizamos la fórmula (B.40) válida a orden \hbar . Sin embargo,

para este grupo disponemos de una expresión válida a todo orden para el símbolo covariante del producto de dos operadores, debida a Moyal [62]. Esta fórmula relaciona éste producto con derivadas en \mathcal{F} del símbolo de cada operador:

$$\langle AB \rangle = \frac{\langle z|AB|z \rangle}{\langle z|z \rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n A}{\partial \bar{z}^n} \frac{\partial^n B}{\partial z^n} \quad (\text{B.65})$$

Usando la (B.65), obtenemos para el valor medio del conmutador

$$\langle [A; B] \rangle = \hbar \{A; B\}_{z, \bar{z}} + \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{z}^2} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \bar{z}^2} \right) + \dots \quad (\text{B.66})$$

donde $\{A(z, \bar{z}); B(z, \bar{z})\}_{z, \bar{z}} = \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \right)$ para este grupo. Utilizando la ec.(B.18) para pasar a las variables canónicas conjugadas usuales (p, q) , obtenemos para el corchete

$$\{A; B\}_{z, \bar{z}} = i\hbar \{A; B\}_{p, q} \quad \text{con} \quad \{A; B\}_{p, q} = \left(\frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \right) \quad (\text{B.67})$$

y definiendo al operador

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_q - i \partial_p)$$

la (B.66) queda

$$\langle [A; B] \rangle = i\hbar \{A; B\}_{p, q} + \frac{\hbar^2}{2} [\mathcal{D}^2(A) \bar{\mathcal{D}}^2(B) - \bar{\mathcal{D}}^2(A) \mathcal{D}^2(B)] + \mathcal{O}(\hbar^3) \quad (\text{B.68})$$

El límite $\hbar \rightarrow 0$ de las ecs.(B.65) y (B.68) es, introduciendo minúsculas para el límite de las funciones $a(z, \bar{z}) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} A(z, \bar{z}, \hbar)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle AB \rangle &= a(z, \bar{z}) b(z, \bar{z}) + \mathcal{O}(\hbar) \\ \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle [A; B] \rangle &= i\hbar \{a, b\}_{p, q} + \mathcal{O}(\hbar) \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

que son el caso particular de las expresiones generales (B.38) y (B.40)) para este grupo.

Introduciendo la (B.68) en la (B.64) queda, a orden \hbar :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \{A; \mathcal{H}\}_{p,q} + \frac{\hbar}{2i} [\mathcal{D}^2(A)\bar{\mathcal{D}}^2(\mathcal{H}) - \bar{\mathcal{D}}^2(A)\mathcal{D}^2(\mathcal{H})] + \left(\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)_{\text{Heis}} \quad (\text{B.70})$$

que, en el límite $\hbar \rightarrow 0$ coincide con la ecuación de evolución clásica (B.37)

$$\frac{da}{dt}(p, q, t) = \{a(p, q); h_c(p, q)\}_{p,q} + \frac{\partial a}{\partial t} \quad (\text{B.71})$$

Si en particular A es \hat{x} o \hat{p} , siendo $\frac{\partial \hat{x}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \{q; h_c\} = \frac{\partial h_c}{\partial p} \\ \dot{p}(t) &= \{p; h_c\} = -\frac{\partial h_c}{\partial q} \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

es decir, las ecuaciones de hamilton usuales.

Si en cambio tomamos como operador A a la matriz densidad de un cierto estado $|\psi(t)\rangle$,

$A(t) = \rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, las ecuaciones cuánticas

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H; \rho] \quad (\text{B.73})$$

$$H\rho = E\rho \quad (\text{B.74})$$

quedan, respectivamente:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \{\mathcal{W}; \mathcal{H}\} = \frac{\hbar}{2i} [\mathcal{D}^2(\mathcal{H})\bar{\mathcal{D}}^2(\mathcal{W}) - \bar{\mathcal{D}}^2(\mathcal{H})\mathcal{D}^2(\mathcal{W})] + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (\text{B.75})$$

$$(E - \mathcal{H})\mathcal{W} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (\text{B.76})$$

donde (cf.(B.48))

$$\mathcal{W}(p, q, \hbar) = \frac{\langle p, q | \rho | p, q \rangle}{\langle p, q | p, q \rangle} = \frac{|\langle p, q | \psi \rangle|^2}{\langle p, q | p, q \rangle}. \quad (\text{B.77})$$

C Algunas propiedades de los estados coherentes del SU(3)

Dado el estado coherente

$$|z_1 z_2\rangle = e^{z_1 G_{10} + z_2 G_{20}} |0\rangle \quad (\text{C.1})$$

este puede ser escrito utilizando la (2.5) como

$$|z_1 z_2\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} |n_1 n_2\rangle \quad (\text{C.2})$$

La norma la calculamos a partir de (C.2)

$$\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^N \frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!} (z_1 \bar{z}_1)^{n_1} (z_2 \bar{z}_2)^{n_2} \quad (\text{C.3})$$

que, usando la fórmula de Newton

$$(a + b + c)^N = \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l \leq N}}^N \frac{N!}{k! l! (N - k - l)!} a^{N-k-l} b^k c^l$$

obtenemos

$$\langle z_1 z_2 | z_1 z_2 \rangle = (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^N \quad (\text{C.4})$$

La demostración de la fórmula de la unidad (2.23) es como sigue: de la ecuación

$$\int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^{N+2}} |z_1 z_2\rangle \langle z_1 z_2| \quad (\text{C.5})$$

utilizando la (C.2) en lugar de $|z_1 z_2\rangle$ y el cambio de variables

$$z_i = \rho_i e^{i\varphi_i} \quad (\text{C.6})$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1, n_2=0}^N \sum_{\substack{n'_1, n'_2=0 \\ n'_1 + n'_2 \leq N}}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} \sqrt{\frac{N!}{n'_1! n'_2! (N - n'_1 - n'_2)!}} \\
& |n_1 n_2 \rangle \langle n'_1 n'_2| \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_1 d\rho_1 \rho_2 d\rho_2 \\
& \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \frac{\rho_1^{n_1+n'_1} \rho_2^{n_2+n'_2}}{(1 + \rho_1^2 + \rho_2^2)^{N+2}} e^{i\varphi_1(n_1-n'_1)} e^{i\varphi_2(n_2-n'_2)}. \tag{C.7}
\end{aligned}$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi_i(n_i-n'_i)} d\varphi_i = 2\pi \delta_{n_i, n'_i} \tag{C.8}$$

con lo cual eliminamos las variables φ ; haciendo ahora el nuevo cambio de variables

$$\rho_i^2 = x_i \tag{C.9}$$

la (C.7) queda

$$\pi^2 \sum_{n_1, n_2=0}^N \frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!} |n_1 n_2 \rangle \langle n_1 n_2| \int_0^\infty \int_0^\infty dx_1 dx_2 \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2}}{(1 + x_1 + x_2)^{N+2}} \tag{C.10}$$

Pero

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dx_1 dx_2 \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2}}{(1 + x_1 + x_2)^{N+2}} = \frac{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}{(N + 2)!} \tag{C.11}$$

con lo cual de la (C.10) obtenemos

$$\frac{\pi^2}{(N + 2)(N + 1)} \sum_{n_1, n_2=0}^N |n_1 n_2 \rangle \langle n_1 n_2| = \frac{\pi^2}{(N + 2)(N + 1)} \tag{C.12}$$

con lo cual demostramos la (2.23).

Las expresiones de los operadores diferenciales (2.26) se obtienen a partir de las ecs.(A.1) y la (C.2). A modo de ejemplo, obtenemos la séptima de las ecs. (2.26)

$$G_{12}|z_1 z_2 \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} G_{12}|n_1 n_2 \rangle \tag{C.13}$$

$$\text{pero } G_{12}|n_1 n_2 \rangle = \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1 \ n_2 - 1 \rangle$$

$$G_{12} |z_1 z_2\rangle = \sum_{\substack{n_1 = -1 \\ n_2 = 1}} \sqrt{\frac{N!}{(n_1 + 1)!(n_2 - 1)!(N - n_1 - n_2)!}} (n_1 + 1) \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} |n_1 + 1 \ n_2 - 1\rangle \quad (\text{C.14})$$

Con el cambio

$$p = n_1 + 1 \quad (\text{C.15})$$

$$q = n_2 - 1$$

obtenemos

$$G_{12} |z_1 z_2\rangle = \sum_{p,q=0} \sqrt{\frac{N!}{p!q!(N-p-q)!}} p \bar{z}_1^{p-1} \bar{z}_2^{q+1} |p \ q\rangle$$

que, como se ve, equivale a

$$\bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} |z_1 z_2\rangle \quad (\text{C.16})$$

o bien

$$\langle z_1 z_2 | G_{12} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \langle z_1 z_2 |. \quad (\text{C.17})$$

Finalmente, los valores medios de los generadores en la representación de estados coherentes, ecs.(2.27) y (2.28) se obtienen a partir de las expresiones diferenciales (2.26) aplicando $\langle z_1 z_2 |$ a izquierda y teniendo en cuenta que $\langle z_1 z_2 |$ depende sólo de las variables z_1 y z_2 , y por lo tanto puede pasar a través de las derivadas. A título de ejemplo nuevamente, derivemos el G_{12}

$$\begin{aligned} \langle z_1 z_2 | G_{12} |z_1 z_2\rangle &= \langle z_1 z_2 | \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} |z_1 z_2\rangle \\ &= \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \langle z_1 z_2 |z_1 z_2\rangle \\ &= \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^N = N z_1 \bar{z}_2 (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^{N-1} \\ \Rightarrow G_{12} &= \frac{\langle z_1 z_2 | G_{12} |z_1 z_2\rangle}{\langle z_1 z_2 |z_1 z_2\rangle} = N \frac{z_1 \bar{z}_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)} \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

El resto de las expresiones se obtienen procediendo análogamente.

D Cálculo de la curvatura.

Si tenemos un sistema dependiente de r parámetros $\bar{R} = \{R_i\}, i = 1, \dots, r$, la ecuación de Schrödinger estacionaria se escribe

$$H(\bar{R}) |\psi_i(\bar{R})\rangle = E_i(\bar{R}) |\psi_i(\bar{R})\rangle \quad (D.1)$$

Derivando respecto de \bar{R} ambos miembros obtenemos

$$\bar{\nabla} H |\psi_i\rangle + H |\bar{\nabla} \psi_i\rangle = \bar{\nabla} E_i |\psi_i\rangle + E_i |\bar{\nabla} \psi_i\rangle \quad (D.2)$$

Multiplicando a izquierda por $\langle \psi_k |$ y despejando sale

$$\langle \psi_k | \bar{\nabla} \psi_i \rangle = \frac{\bar{\nabla} E_i \delta_{i,k} - \langle \psi_k | \bar{\nabla} H | \psi_i \rangle}{E_k - E_i} \quad (D.3)$$

Con $k = i$ nos da la fórmula usual para la pendiente (corrección a 1^{er} orden de la teoría de perturbaciones)

$$\bar{\nabla} E_i = \langle \psi_i | \bar{\nabla} H | \psi_i \rangle \quad (D.4)$$

Calculando ahora la divergencia de $\bar{\nabla} E_i$, con $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} E_i = \nabla^2 E_i$ y usando que $\bar{\nabla} \cdot (U \bar{A}) = U \bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{\nabla} U$ obtenemos

$$\nabla^2 E_i = \langle \bar{\nabla} \psi_i | \bar{\nabla} H | \psi_i \rangle + \langle \psi_i | \nabla^2 H | \psi_i \rangle + \langle \psi_i | \bar{\nabla} H | \bar{\nabla} \psi_i \rangle \quad (D.5)$$

o bien

$$\nabla^2 E_i = \sum_k [\langle \bar{\nabla} \psi_i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \bar{\nabla} H | \psi_i \rangle + \langle \psi_i | \bar{\nabla} H | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \bar{\nabla} \psi_i \rangle] + \langle \psi_i | \nabla^2 H | \psi_i \rangle \quad (D.6)$$

El término con $k = i$ de la sumatoria del miembro derecho nos da

$$\langle \psi_i | \bar{\nabla} H | \psi_i \rangle \cdot \bar{\nabla} \langle \psi_i | \psi_i \rangle \quad (\text{D.7})$$

que suponemos que es nulo si el vector conserva la norma al variar \bar{R} . Utilizando entonces la ec. (D.3) con $k \neq i$ y reemplazado en (D.6) obtenemos finalmente para la curvatura

$$\nabla^2 E_i = 2 \sum_{k \neq i} \frac{|\langle \psi_k | \bar{\nabla} H | \psi_i \rangle|^2}{E_i - E_k} + \langle \psi_i | \nabla^2 H | \psi_i \rangle \quad (\text{D.8})$$

El 1^{er} término del miembro derecho está ligado a la interacción de niveles, y vemos que todos contribuyen, salvo aquellos no acoplados con el nivel i (distintas simetrías por ejemplo). Cuanto más próximos están los niveles, mayor es la repulsión. El segundo término del miembro derecho no depende del resto de los niveles (término de “autointeracción”). Este término no está presente en el modelo SU(3) cuya dependencia es lineal en χ .

Si $H = H_0 + \chi V$ (cf(2.12)), entonces $\bar{\nabla} H = V = \frac{H-H_0}{\chi}$ y reemplazando en (D.8) con $\nabla^2 H = 0$ obtenemos una fórmula más apropiada para los cálculos numéricos:

$$E_i'' = \frac{\partial^2 E_i}{\partial \chi^2} = \frac{2}{\chi^2} \sum_{k \neq i} \frac{|\langle \psi_k | H_0 | \psi_i \rangle|^2}{E_i - E_k} \quad (\text{D.9})$$

o bien, introduciendo la base no perturbada $|n_1 n_2 \rangle$ de H_0

$$E_i'' = \frac{2}{\chi^2} \sum_{k \neq i} \frac{|\sum_{n_1 n_2} \epsilon_{n_1, n_2} \langle \psi_k | n_1 n_2 \rangle \langle n_1 n_2 | \psi_i \rangle|^2}{E_i - E_k} \quad (\text{D.10})$$

donde ϵ_{n_1, n_2} son los autovalores del H_0 y los coeficientes $\langle n_1 n_2 | \psi_i \rangle$ los obtenemos de la diagonalización correspondiente.

E Las Figuras

Figura 1: esquema del modelo SU(3). La energía de partícula independiente ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 es tomada como $-\epsilon$, 0 y ϵ , respectivamente.

Figura 2: representación esquemática del modulo al cuadrado de una autofunción de: H_o en la parte a) y H en la parte b). La forma triangular se debe a la ec.(2.7).

Figura 3: representación esquemática de trayectorias clásicas correspondientes a: \mathcal{H}_o en la parte a) y \mathcal{H} en la parte b). Comparar con la fig.3.

Figura 4: energía de los puntos estacionarios del hamiltoniano clásico del sistema en función del parámetro χ . El trazo continuo representa puntos estacionarios estables, mientras que el punteado representa puntos estacionarios inestables.

Figura 5: Ubicación de los puntos estacionarios en el plano $I_1 - I_2$ para $\chi = 10$. Los círculos llenos representan a los puntos estables, mientras que las cruces a los inestables.

Figura 6: Sección de Poincaré para varias trayectorias ubicadas: a) cerca del punto estable con $E = 3.43$ pero con energía mayor que la del primer punto inestable; y b) cerca del mismo punto estacionario pero con energía menor que la del punto inestable.

Figura 7: Curvas de nivel para la familia de órbitas periódicas correspondiente al caso $I_2 = 0$.

Figura 8: Valores medios de los operadores número de partículas en la base de H_0 ($\chi = 0$).

Figura 9: Mismo gráfico que la figura 8 pero ahora tomando los valores medios en la base de H con $\chi = 0.5$.

Figura 10: Secuencia de gráficos para los valores medios del número de ocupación de los niveles 1 y 2 para distintos χ .

Figura 11: Esquema para los distintos tipos de choques de niveles que esperamos en un sistema no integrable: a) y c) zona regular; b) y d) zona irregular.

Figura 12: Curvaturas de los autoestados de H para $N = 80$ y $\chi = 10$, en función de la energía.

Figura 13: Promedio lorentziano de la figura anterior.

Figura 14: misma figura que la 12 pero para estados con curvatura de hasta 150000.

Figura 15: Parte a): promedio lorentziano de la fig.14; parte b): promedio lorentziano pero quedándonos sólo con curvaturas de hasta 10000.

Figura 16: Proyecciones y secciones de Poincaré para las tres funciones de onda indicadas con un círculo en la fig.9 ($\chi = 0.5$). Todas están acompañadas por su trayectoria principal.

Figura 17: dos funciones de onda regulares próximas al punto estacionario estable con $E = -3.025$.

Figura 18: dos funciones de onda regulares próximas al punto estacionario estable con

$$E = -2.6.$$

Figura 19: dos funciones de onda regulares próximas al punto estacionario estable con

$$E = -2.025.$$

Figura 20: dos funciones de onda regulares próximas al punto estacionario estable con

$$E = -1.56.$$

Figura 21: cinco funciones de onda regulares próximas al punto estacionario estable

con $E = 3.43$. Cada función de onda viene acompañada por la trayectoria principal respectiva. Comparar éstas con la fig.6.

Figura 22: dos funciones de onda caóticas pertenecientes al rango de energías $-1 \leq$

$E \leq 0$, con sus respectivas trayectorias principales.

Figura 23: misma sección que en la fig.22 para el estado $|431 \rangle$ pero tridimensional.

Figura 24: espacio de fases accesible para la sección de la fig.22 con la energía del estado $|341 \rangle$.

Figura 25: una secuencia de estados pertenecientes con una energía para la cual el espacio de fases posee claramente una estructura mixta, acompañadas por sus respectivas trayectorias principales.

Figura 26: parte a): sección de Poincaré para varias trayectorias que poseen la energía del estado $|172 \rangle$ de la fig.25; parte b): espacio de fases disponible para ésta misma sección y energía.

Figura 27: una secuencia de estados con una fuerte componente sobre el plano I_2 , que asociamos a una familia de órbitas periódicas. Comparar con la fig.7.

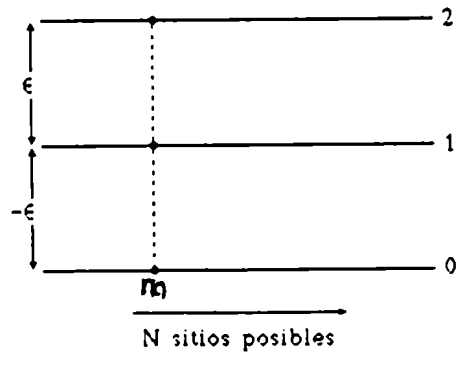


Figura 1

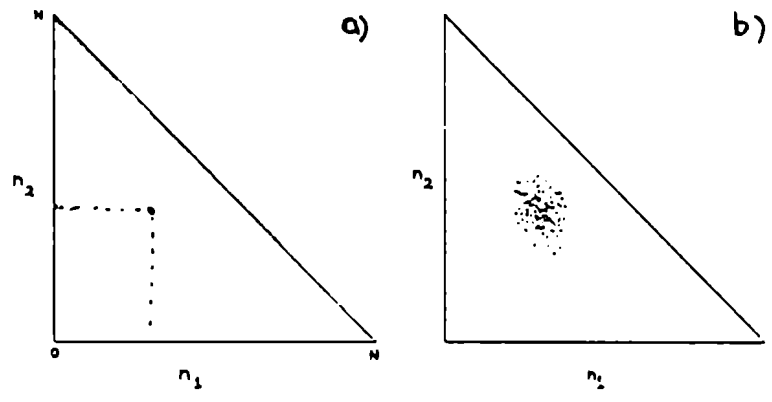


Figura 2

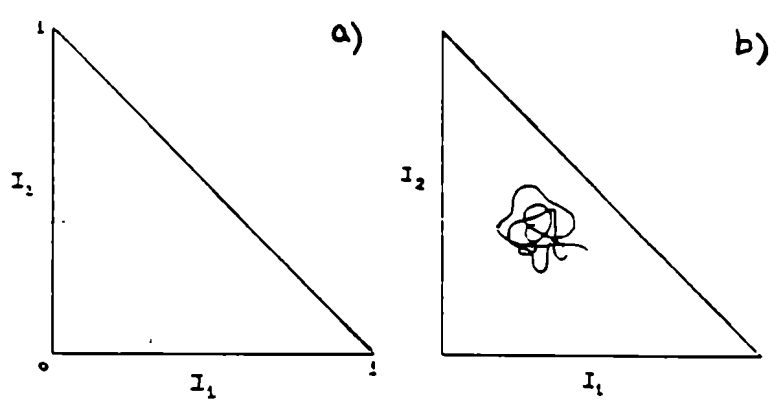


Figura 3

EXTREMOS SU(3)

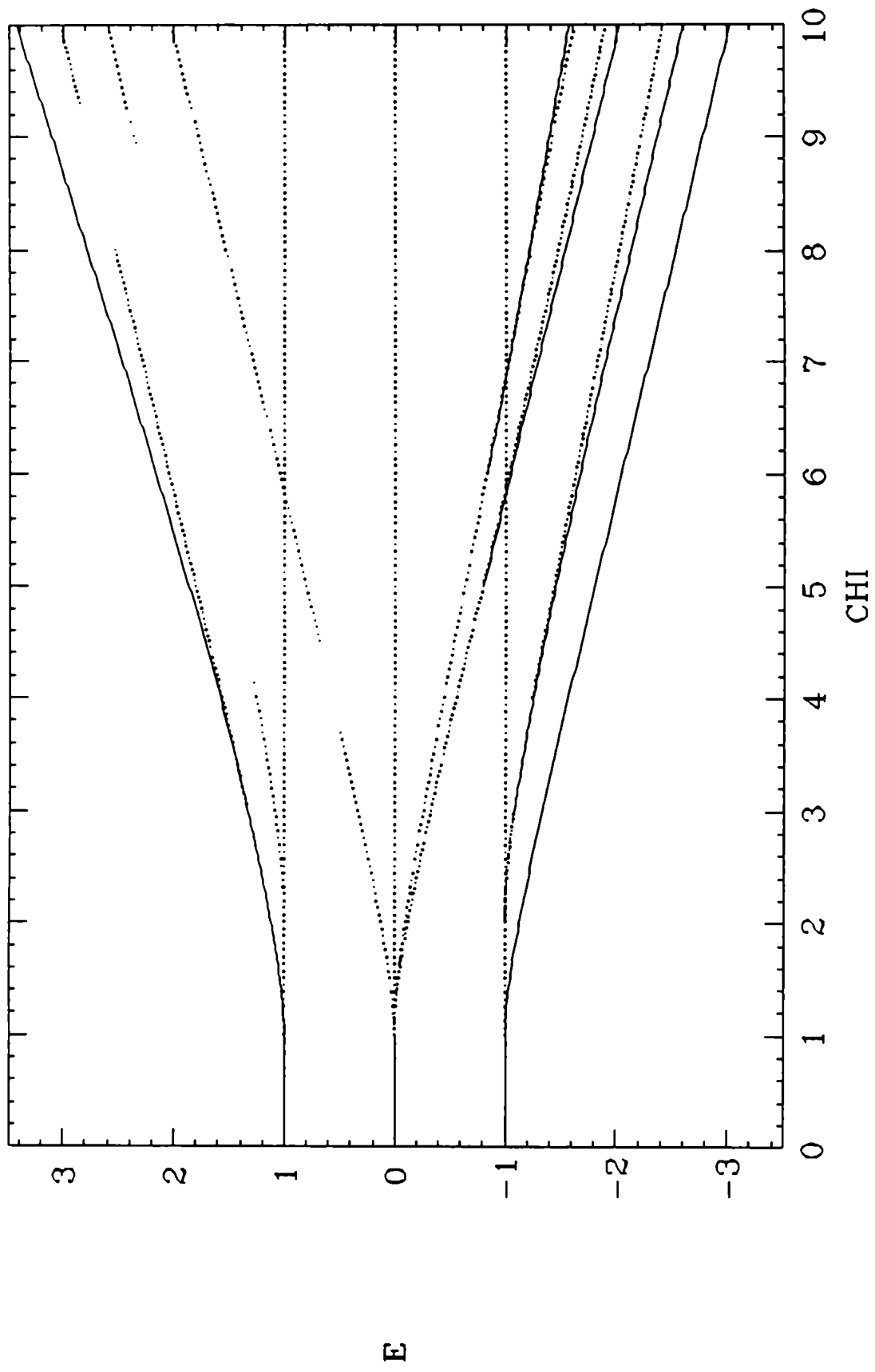


Figura 4

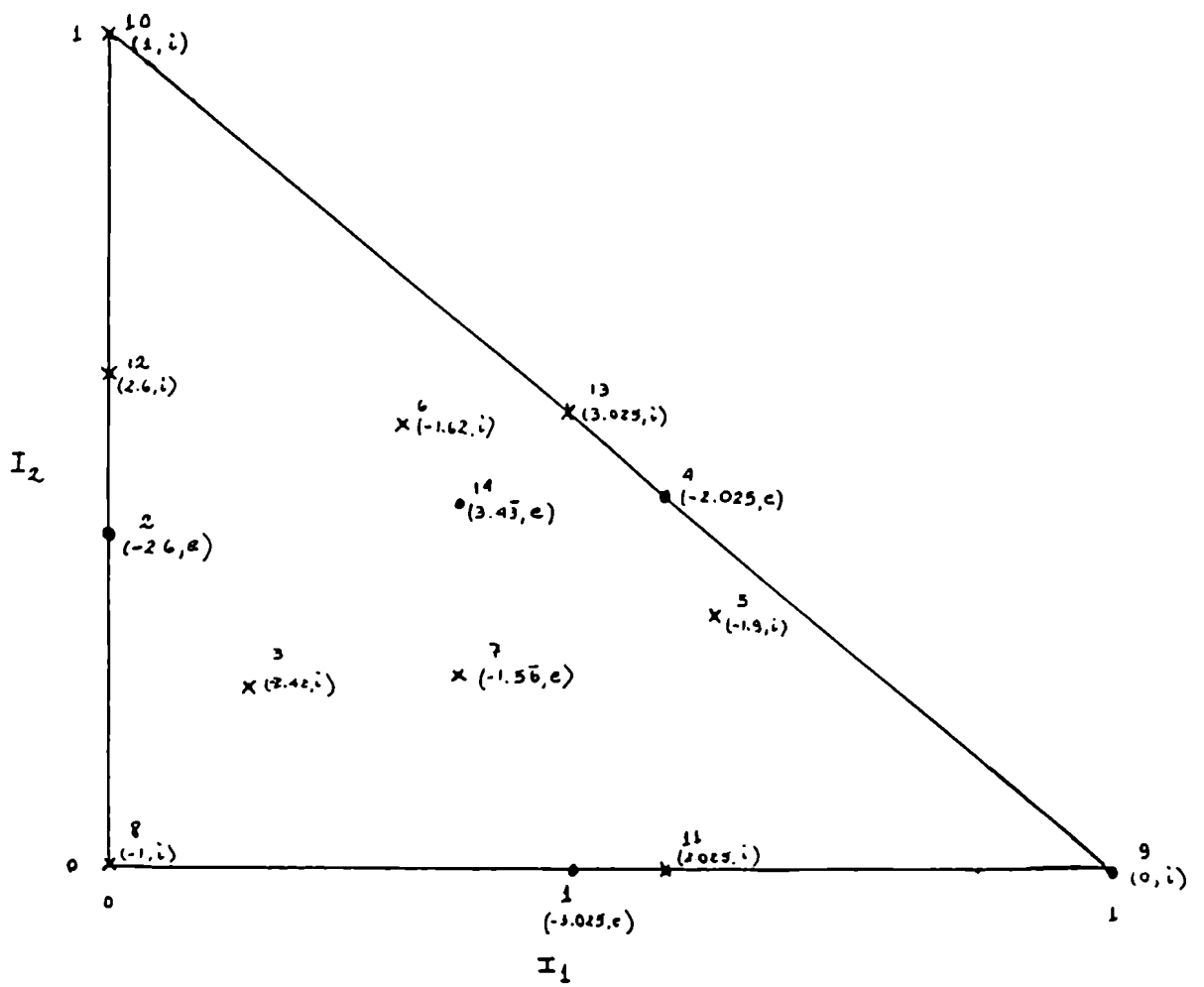


Figura 5

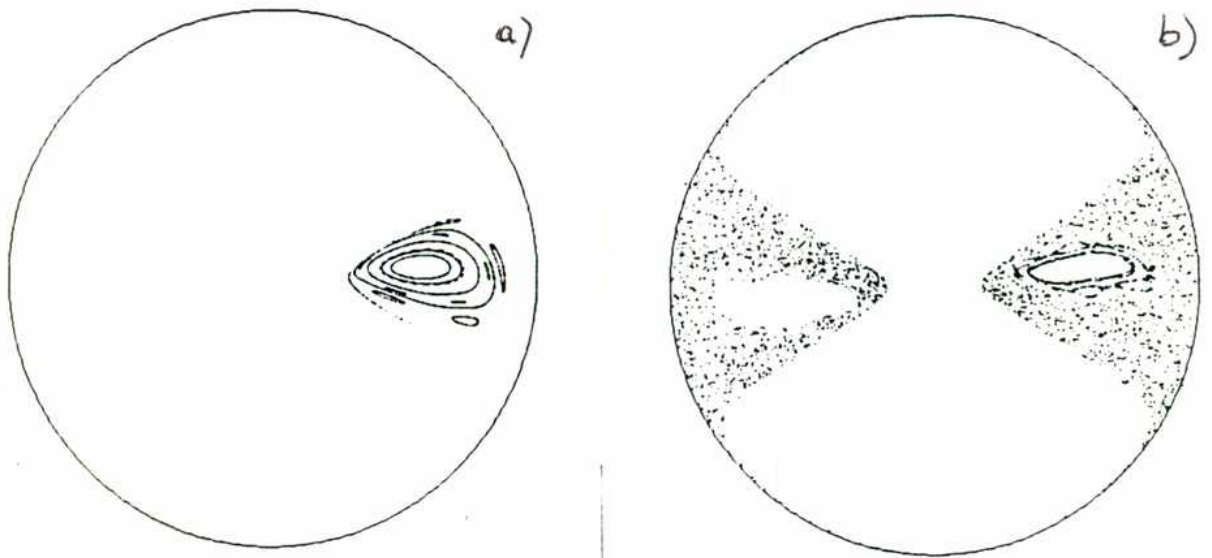


Figura 6

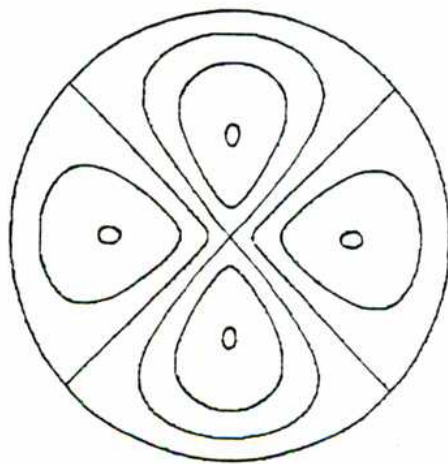


Figura 7

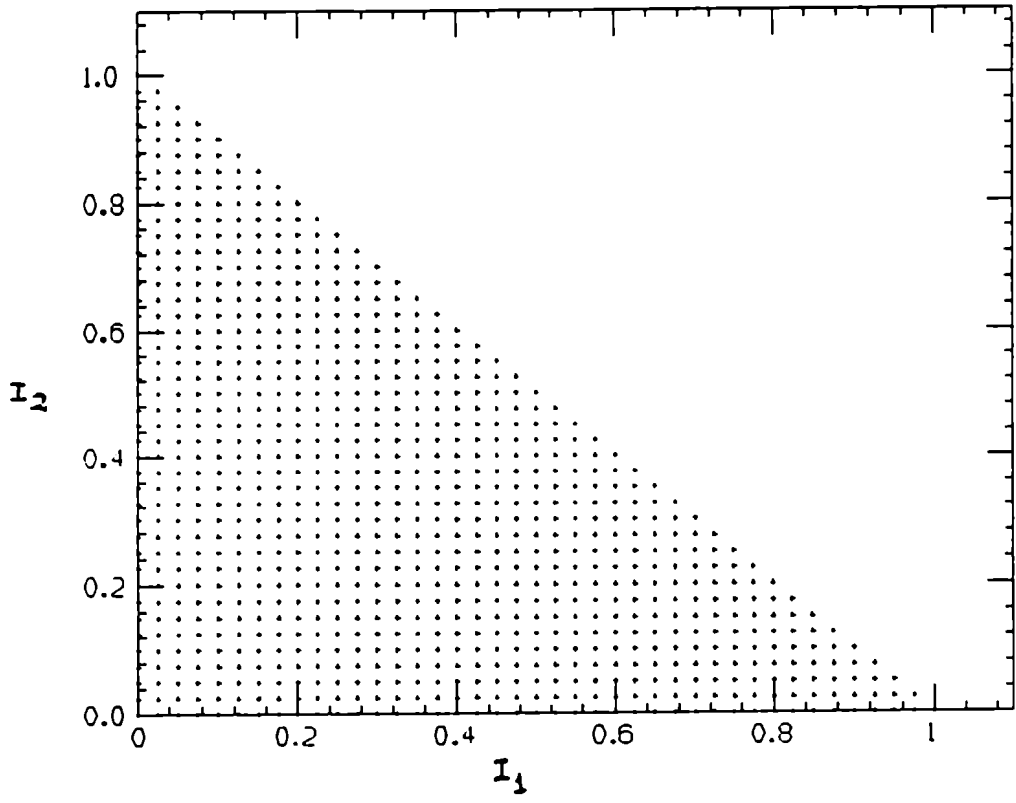


Figura 8

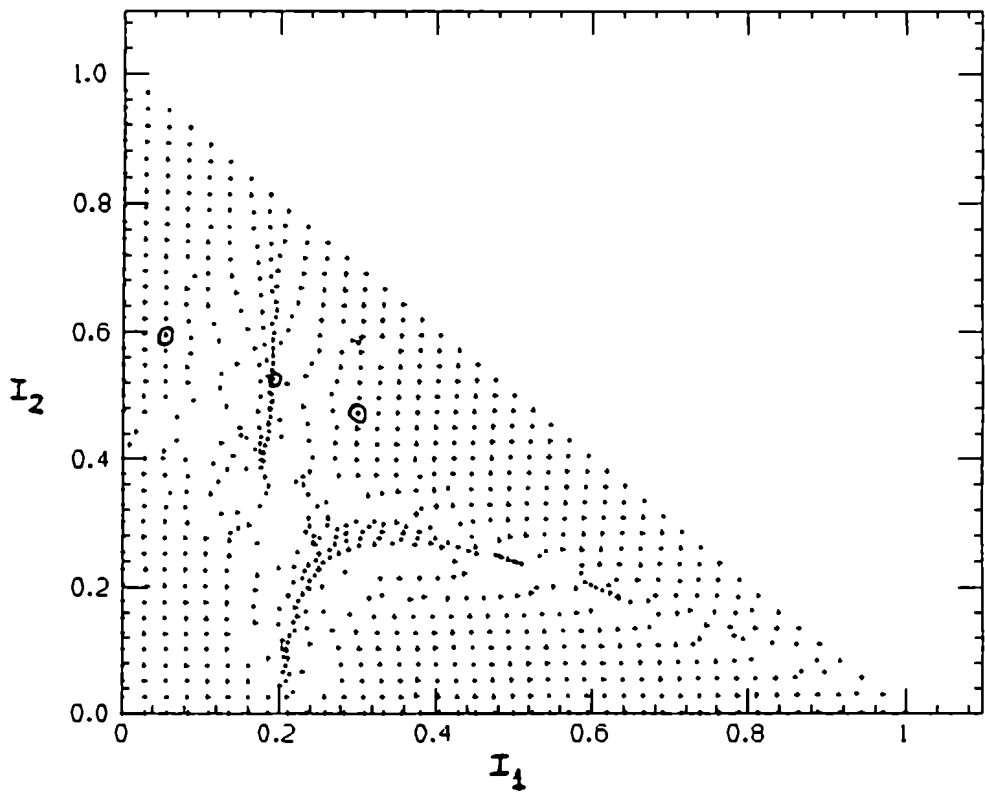


Figura 9

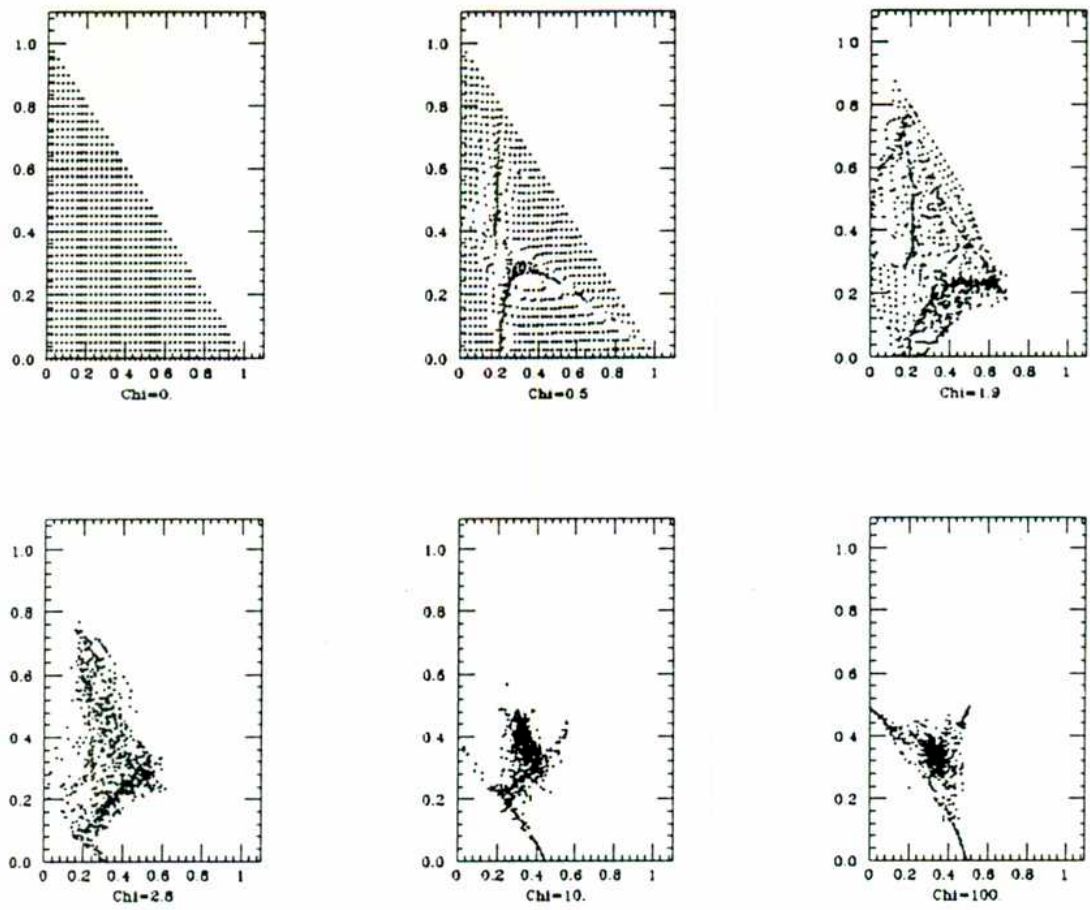


Figura 10

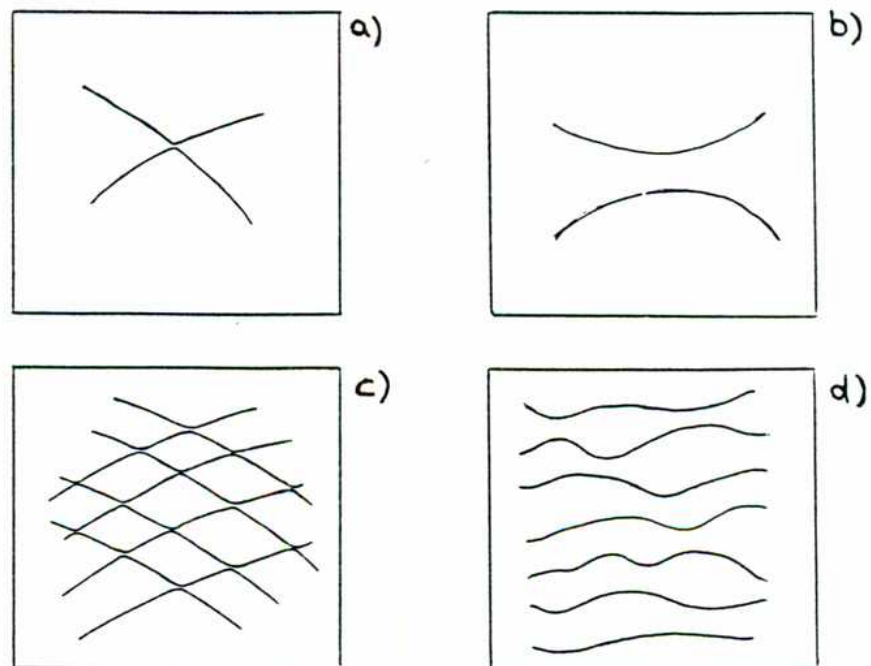


Figura 11

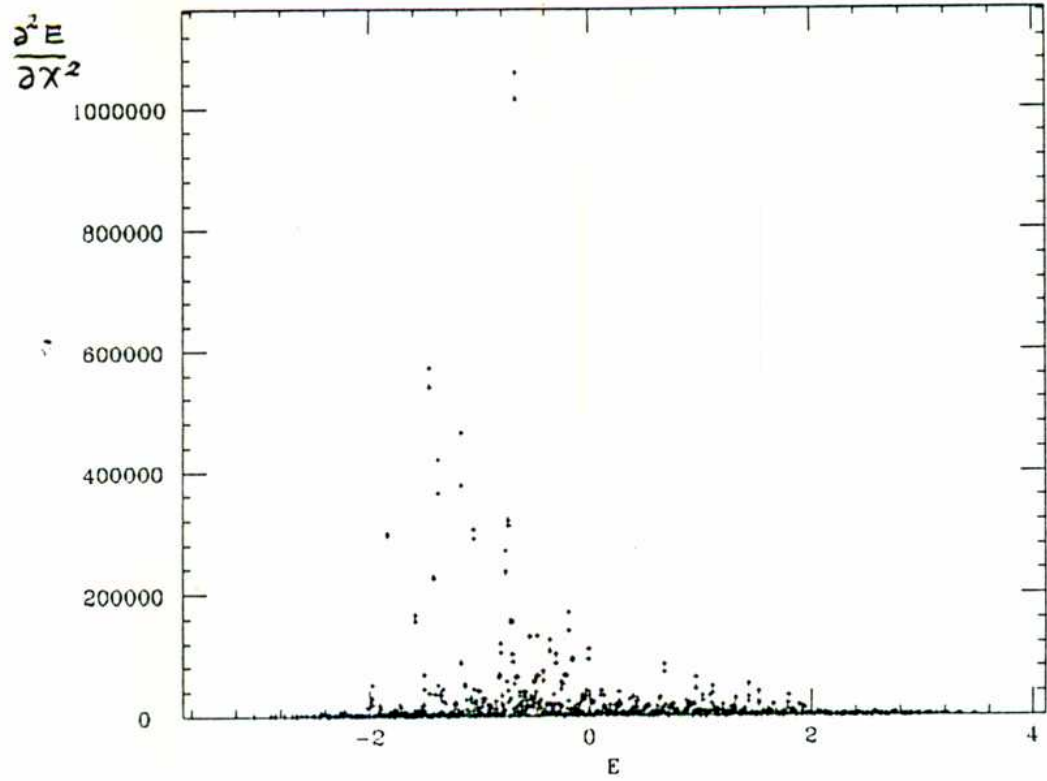


Figura 12

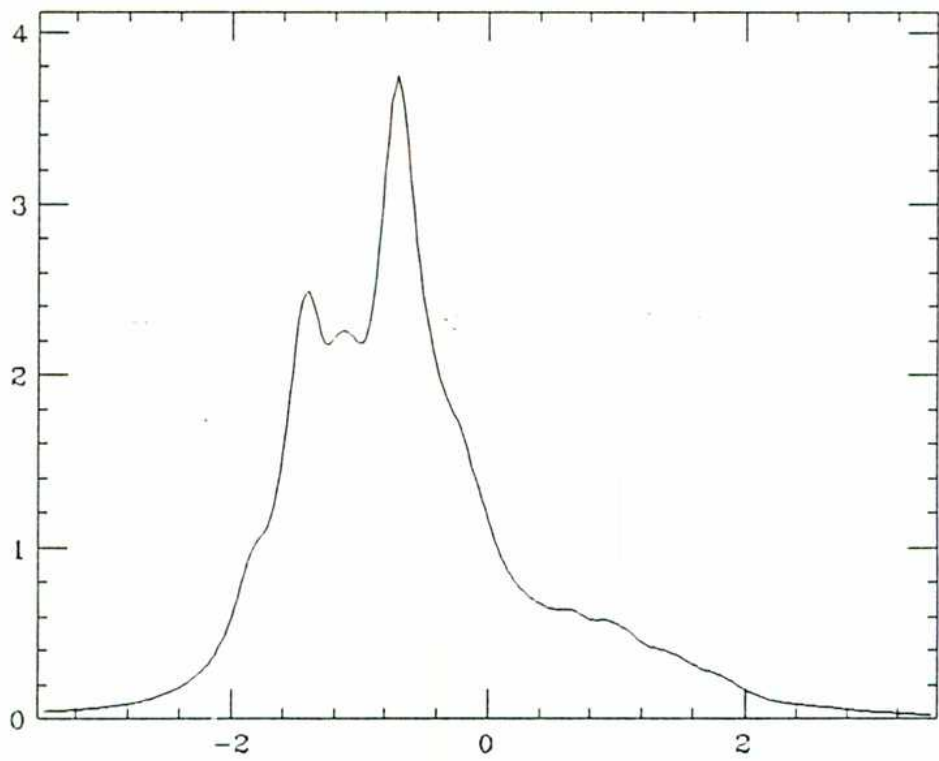


Figura 13

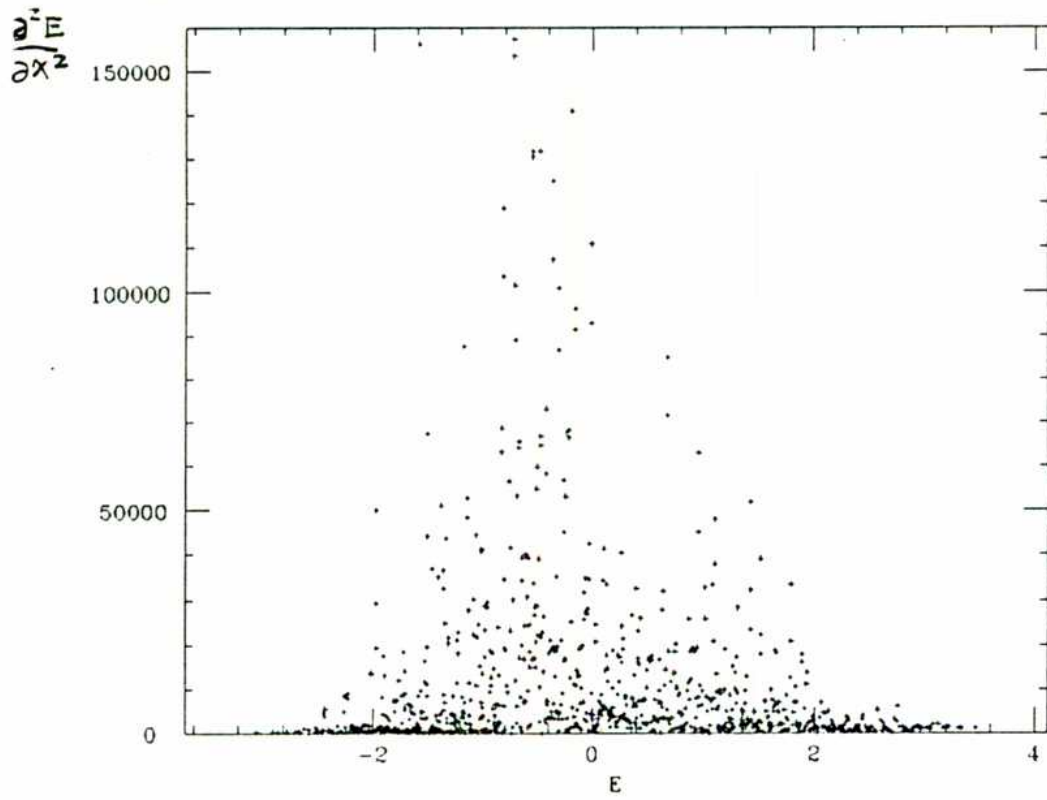


Figura 14

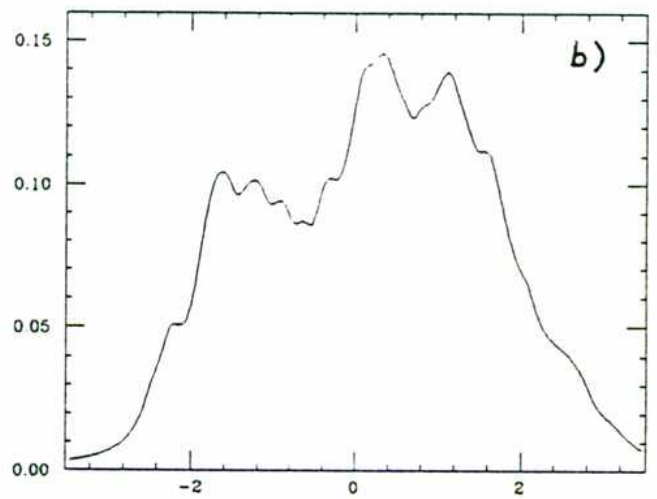
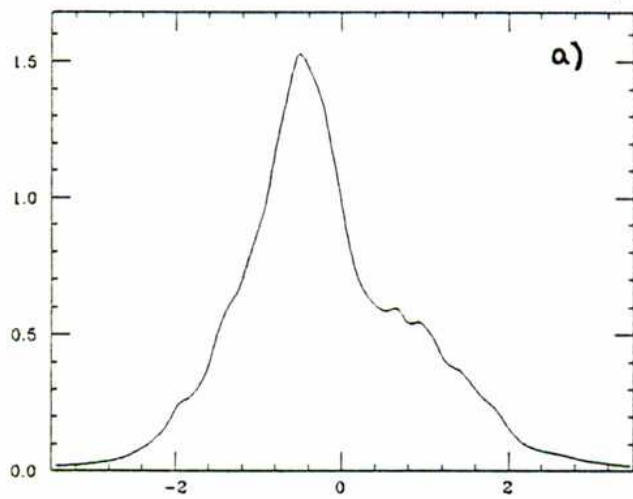
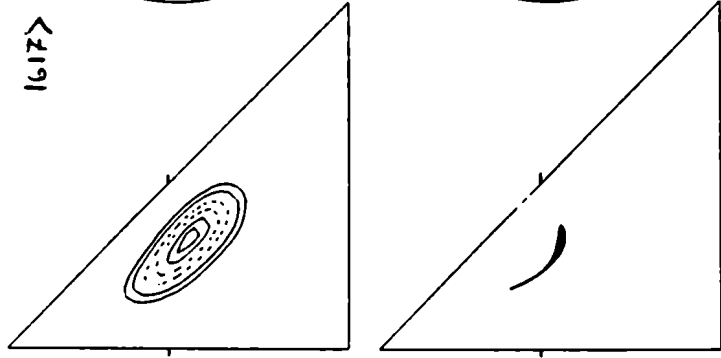
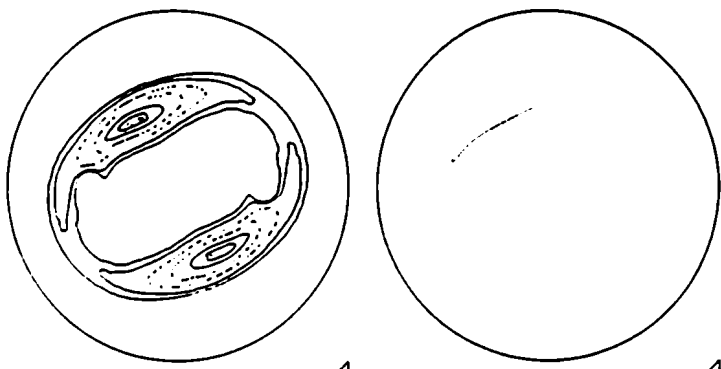
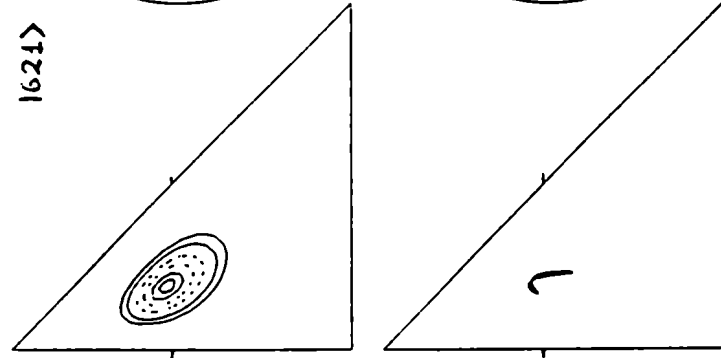
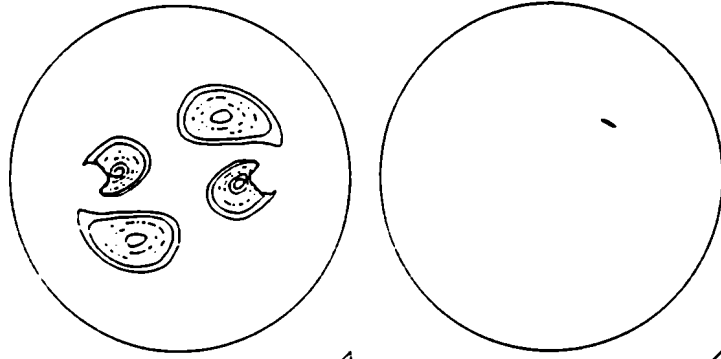


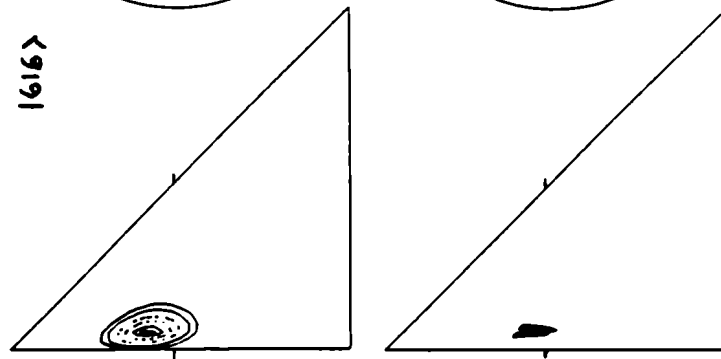
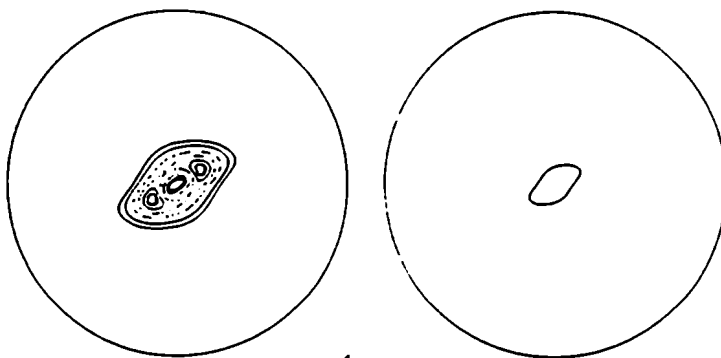
Figura 15



1617



1621



1616

Figura 16

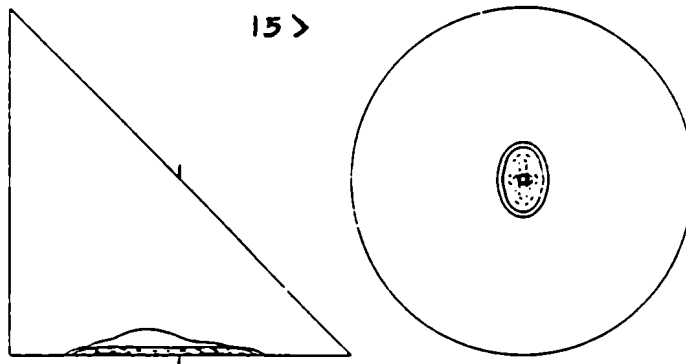
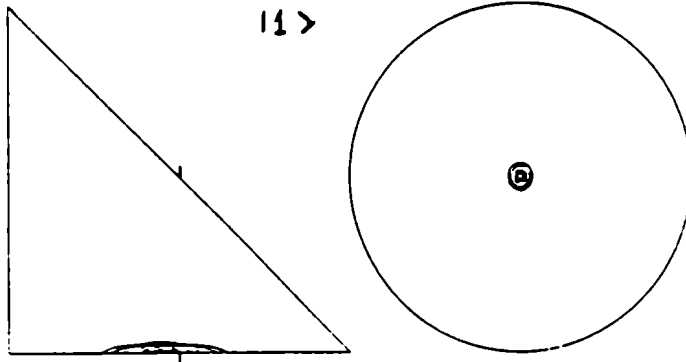


Figura 17

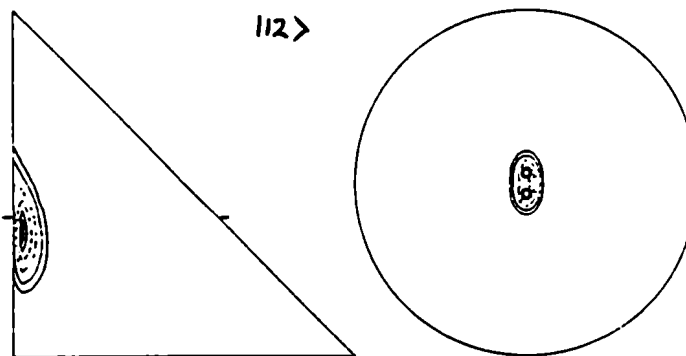
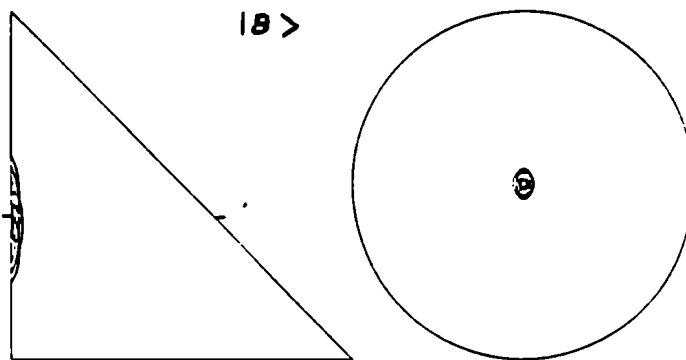


Figura 18

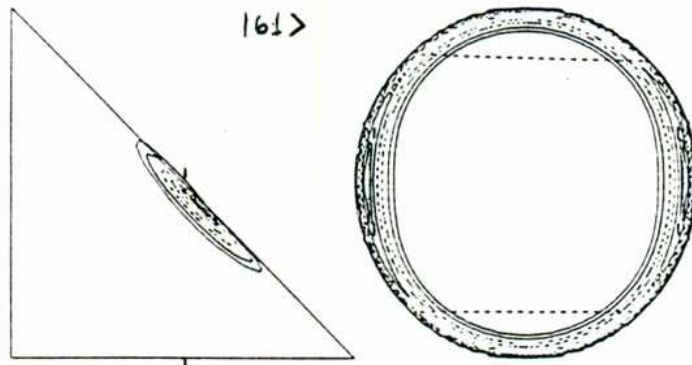
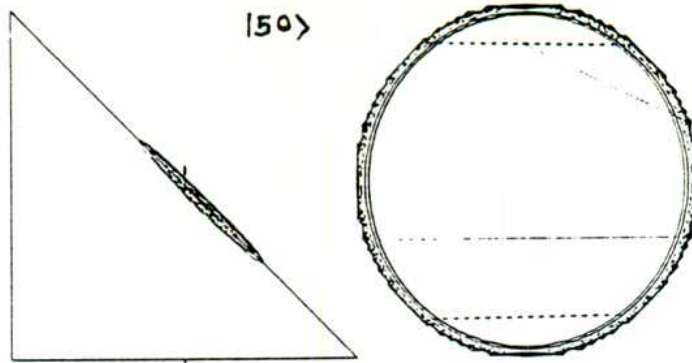


Figura 19

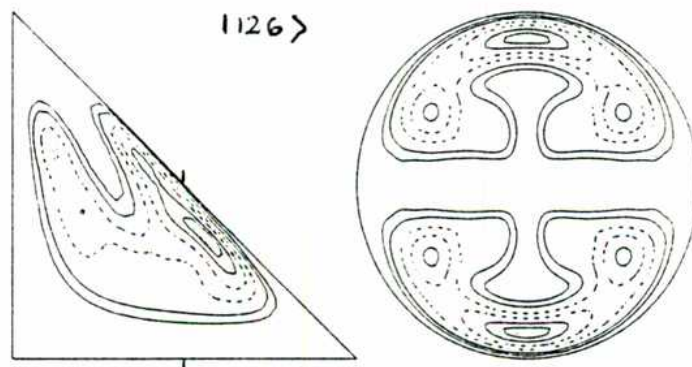
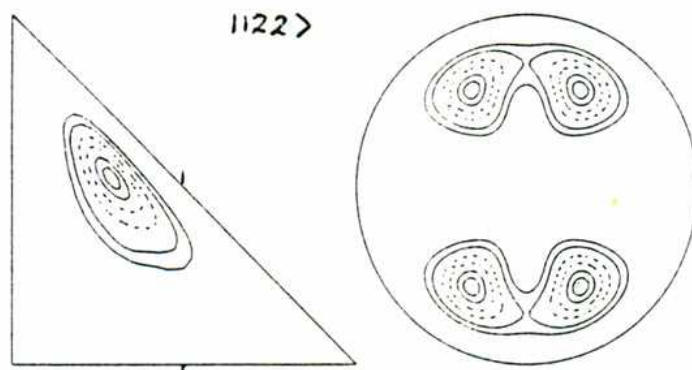
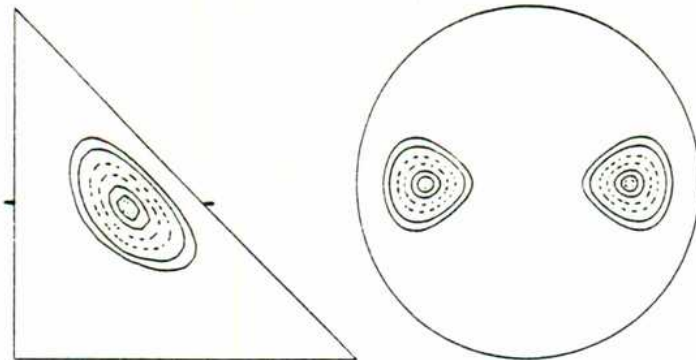
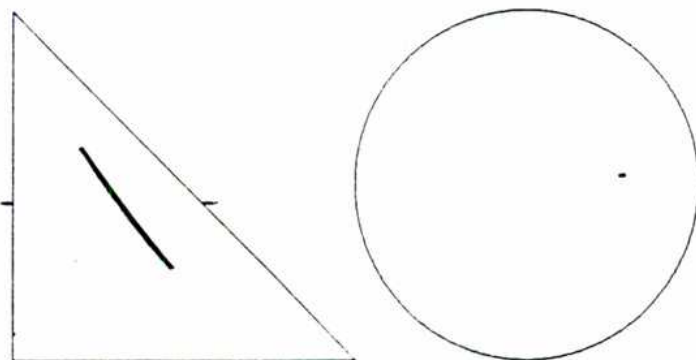
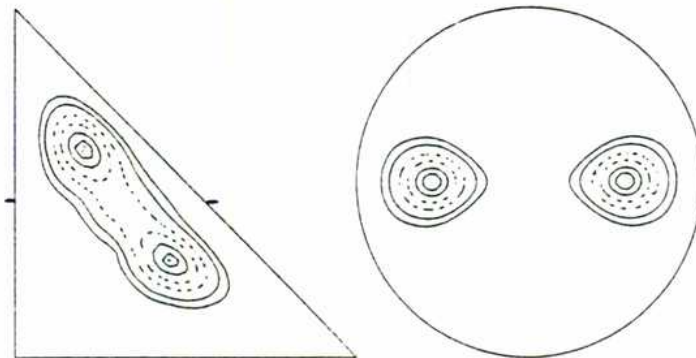


Figura 20

1861>



1856>



1852>

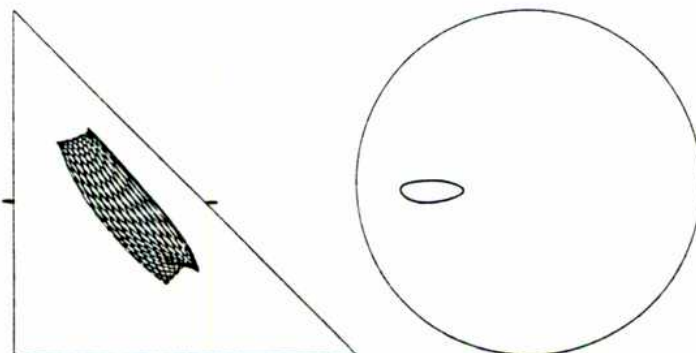
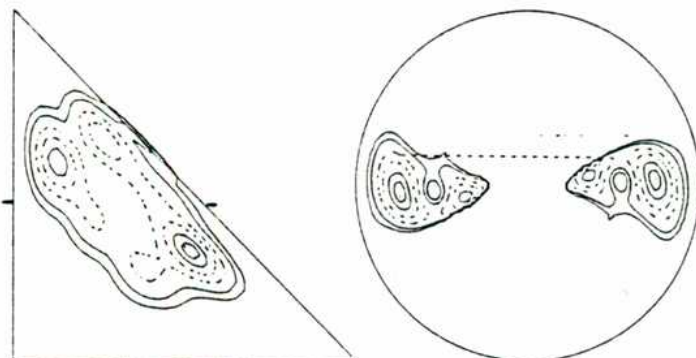
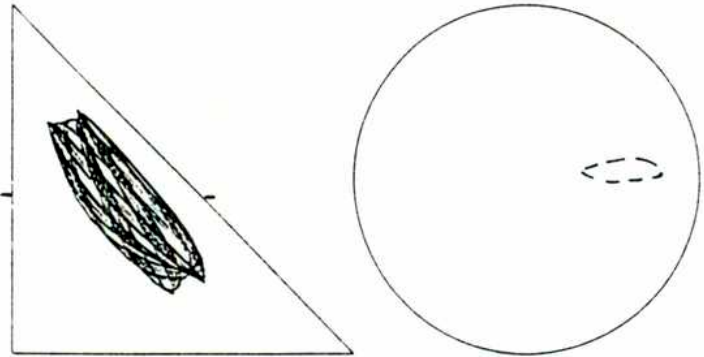
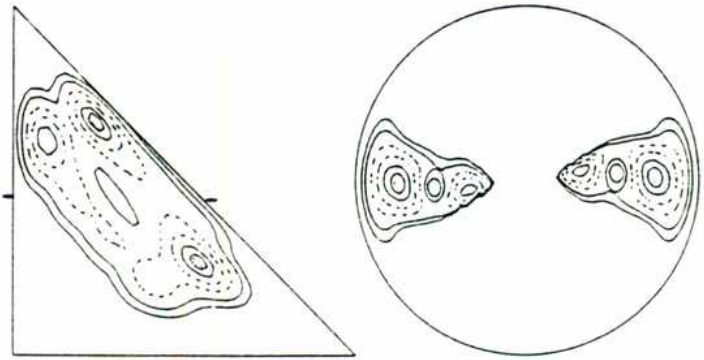


Figura 21
parte 1

1847 >



1845 >

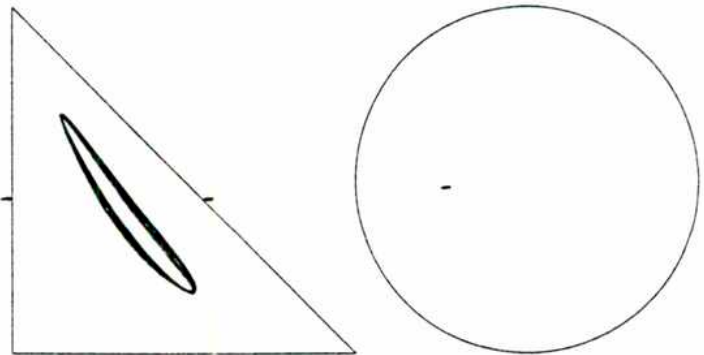
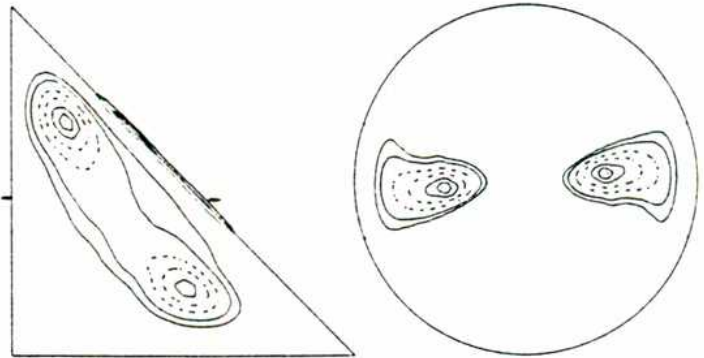
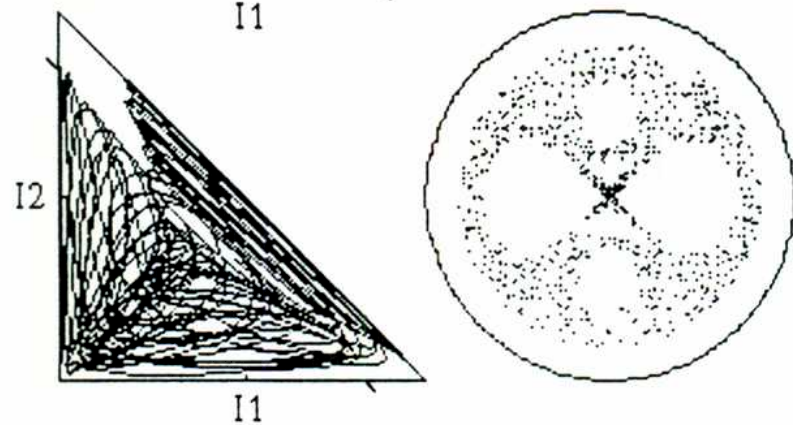
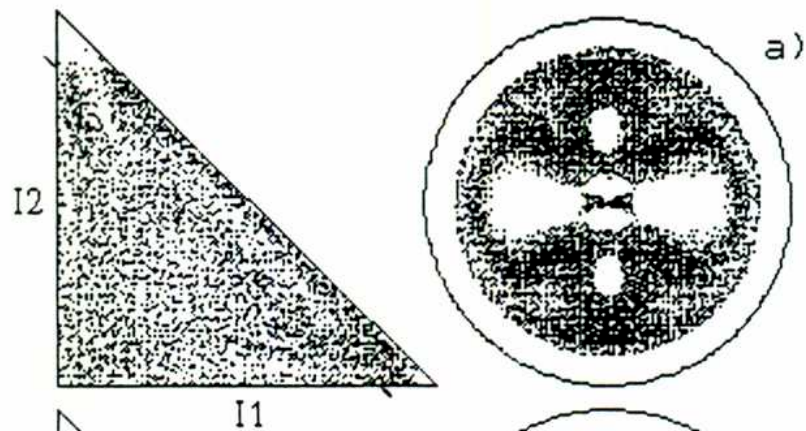


Figura 21
parte 2

1431>



1341>

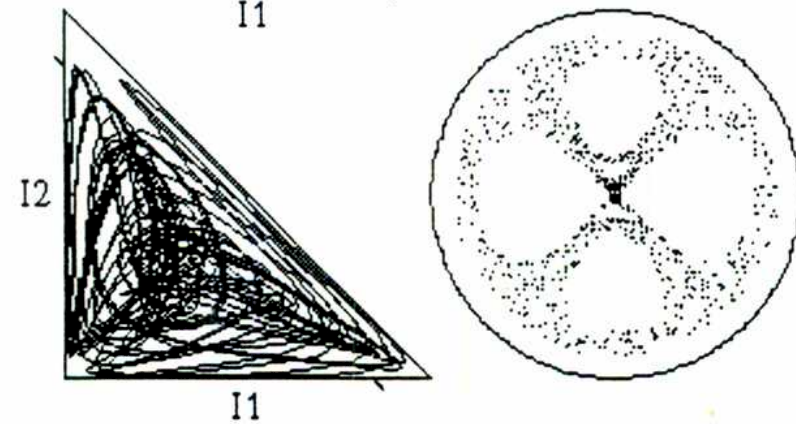
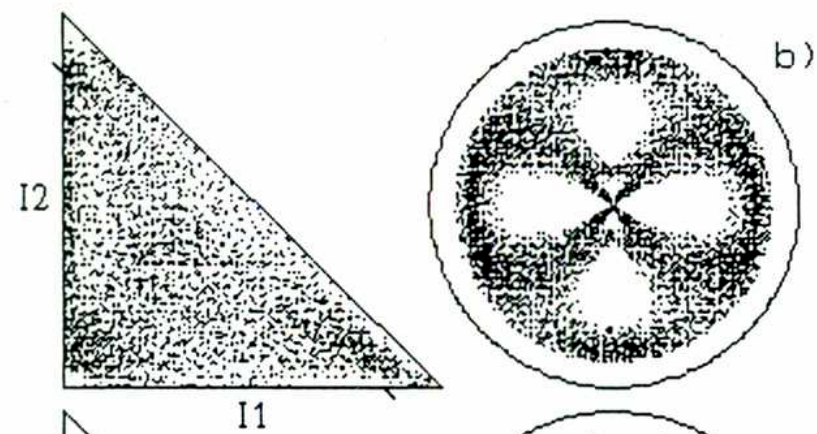


Figura 22

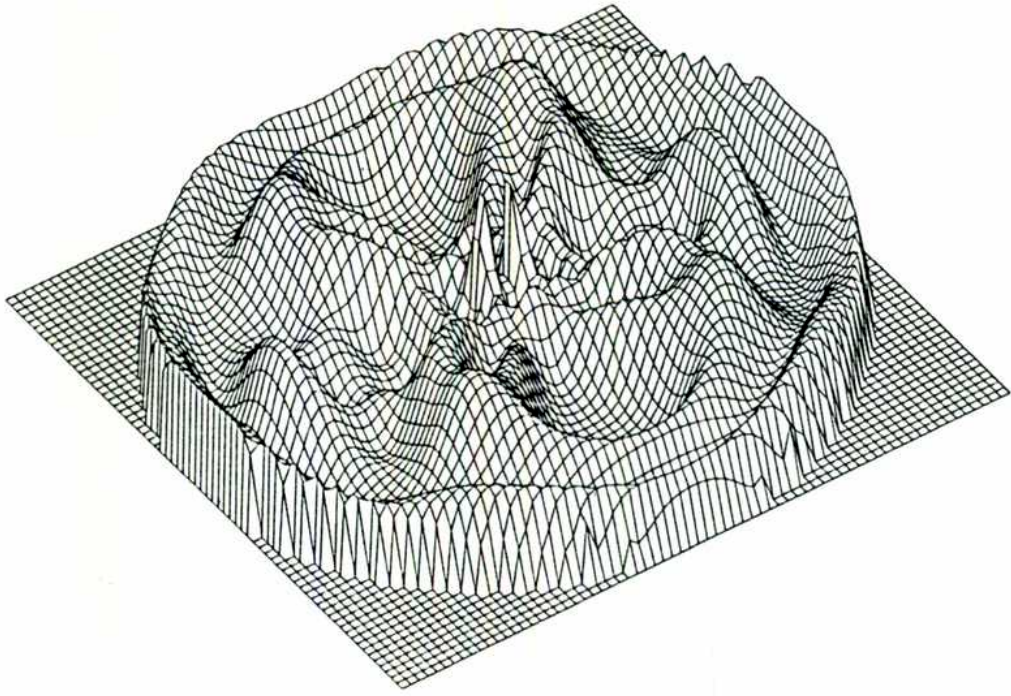


Figura 23

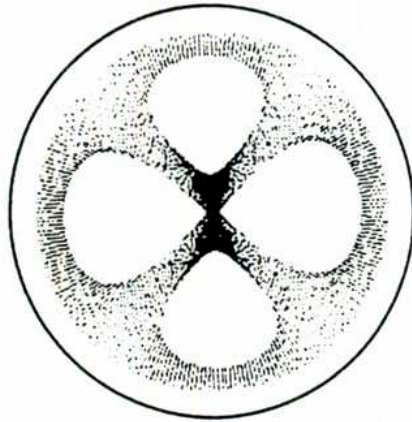
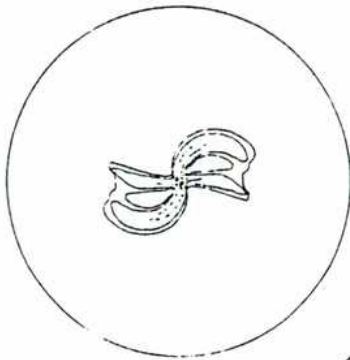
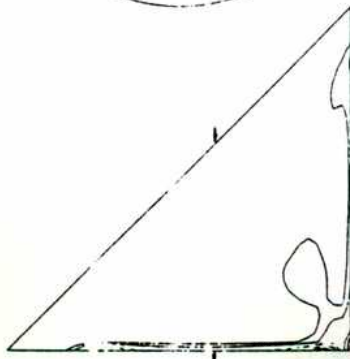
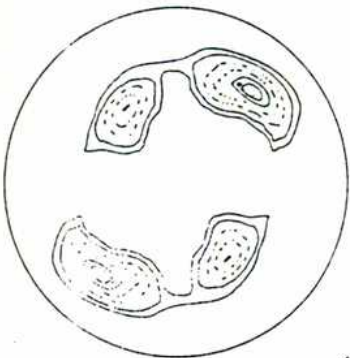
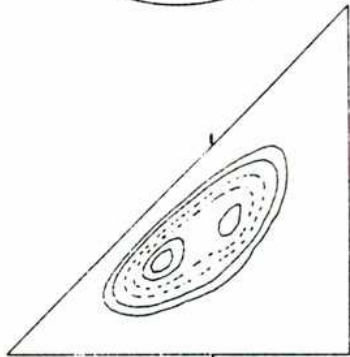


Figura 24

1169 >



1170 >



1171 >

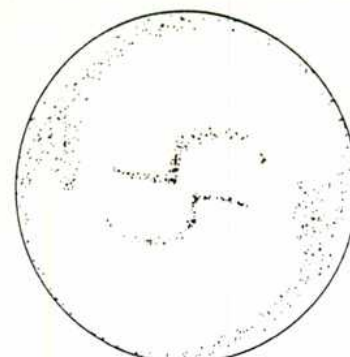
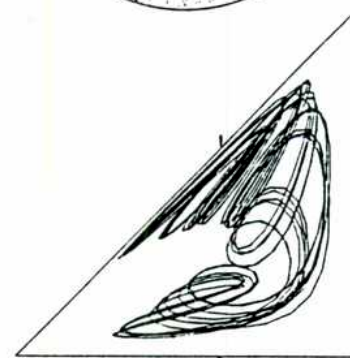
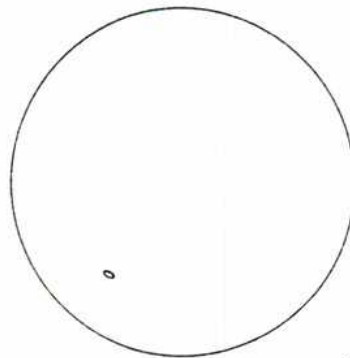
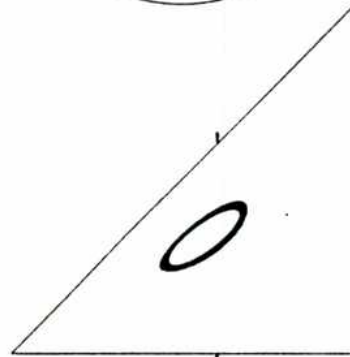
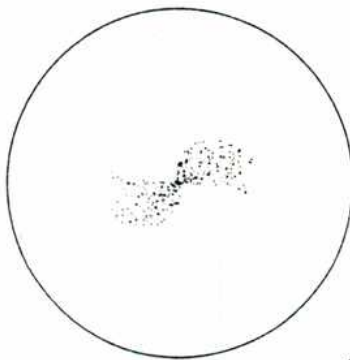
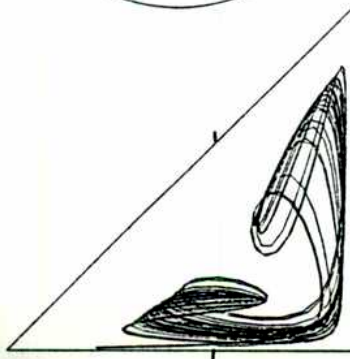
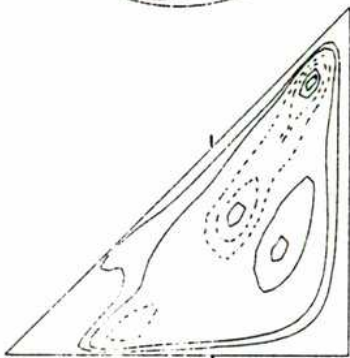
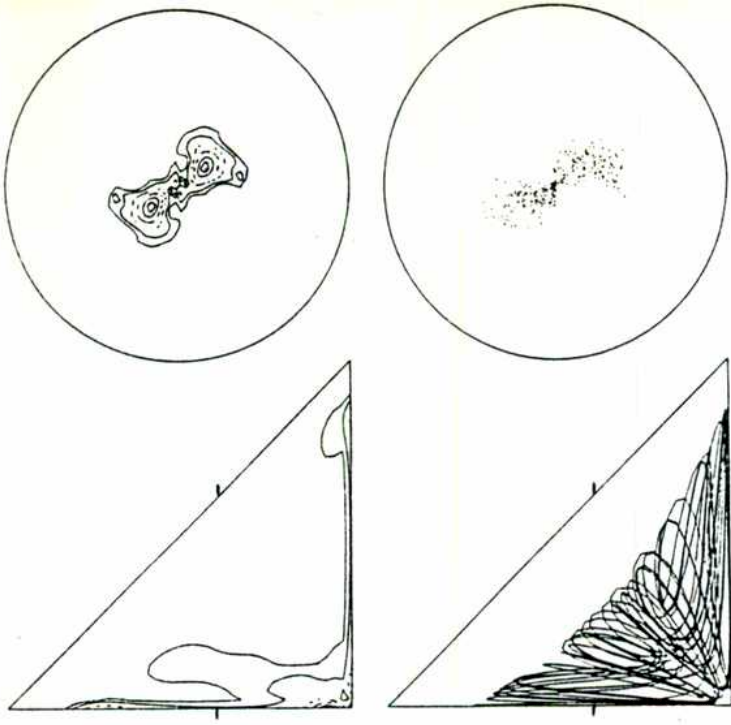
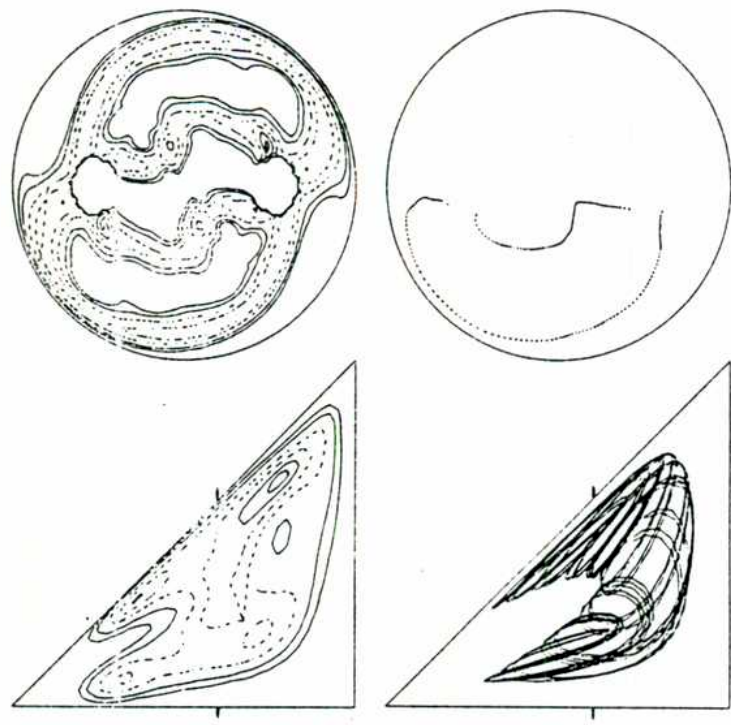


Figura 25
parte 1

1174 >



1173 >



1172 >

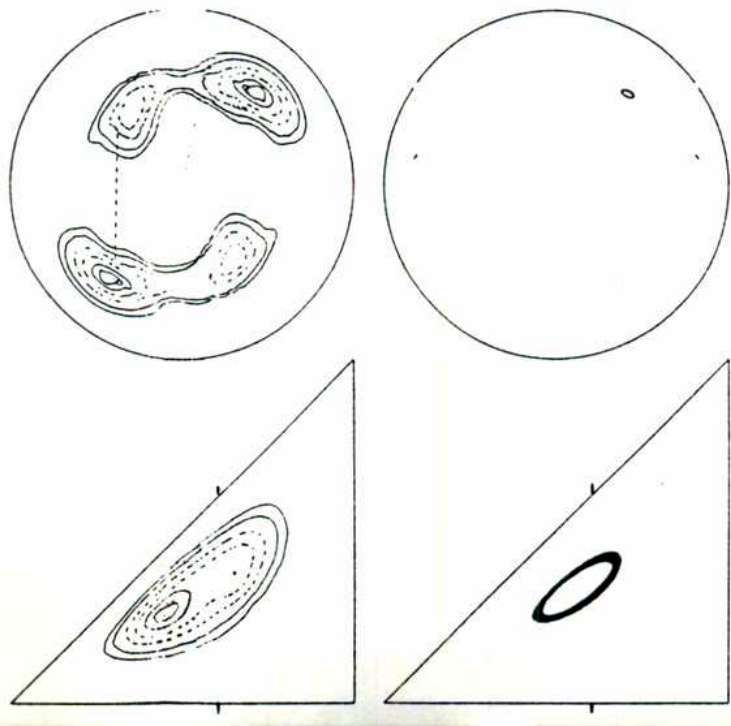


Figura 25
parte 2

1175 >

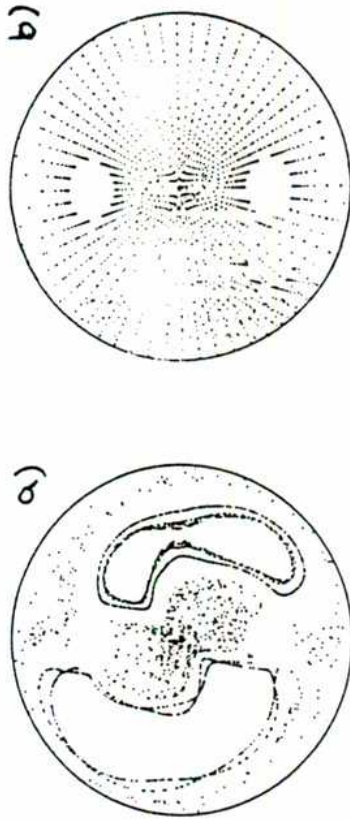
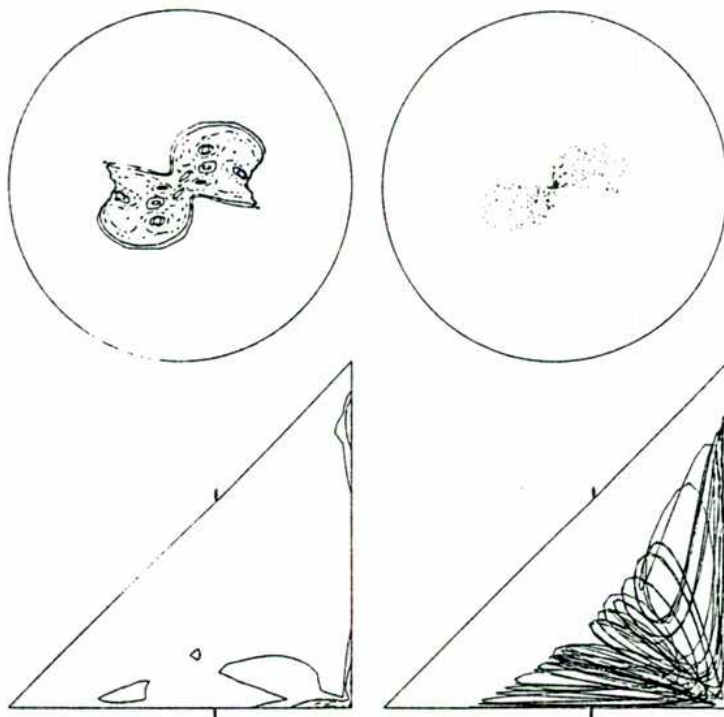
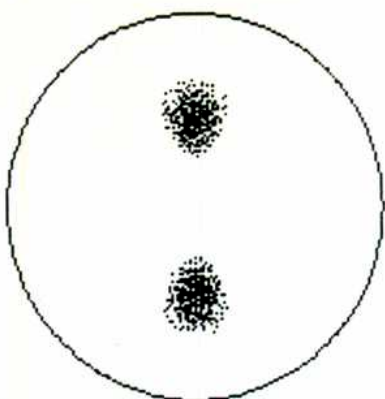
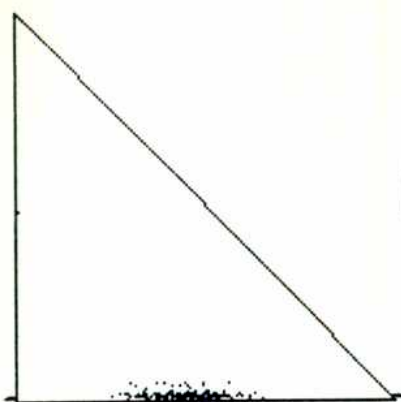


Figura 26

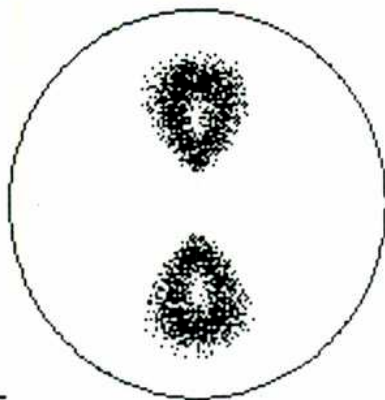
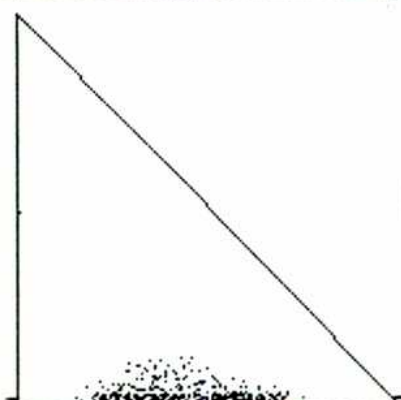
Figura 25

parte 3

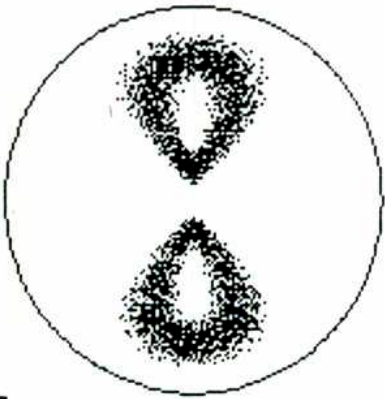
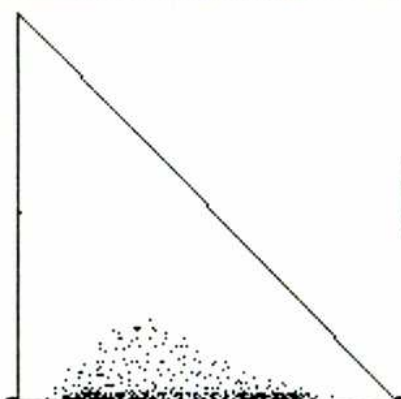
11>



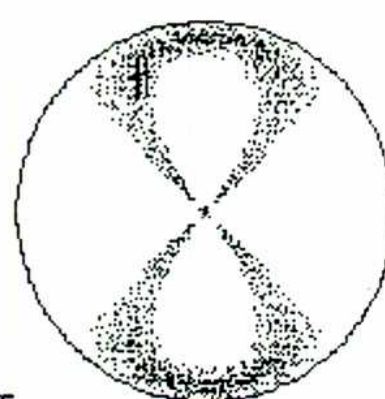
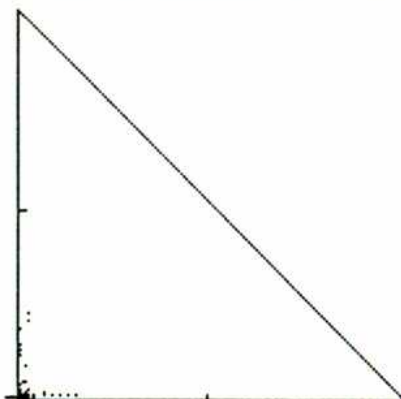
15>



134>



1238>



1337>

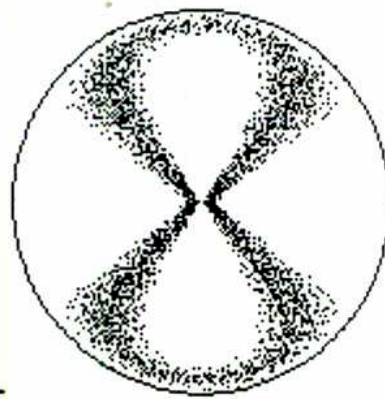
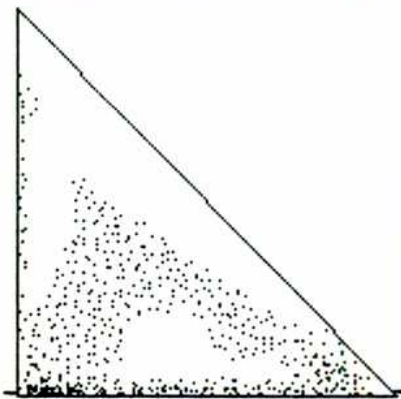
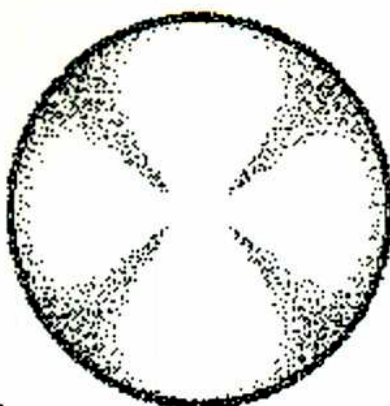
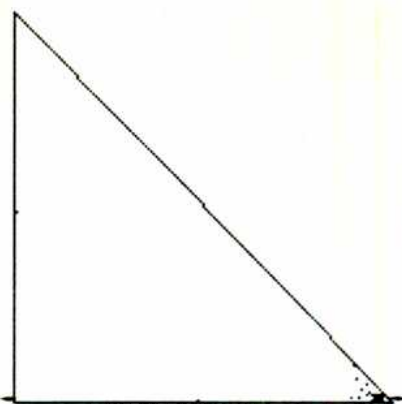
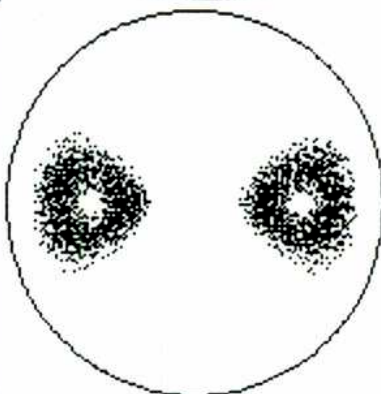
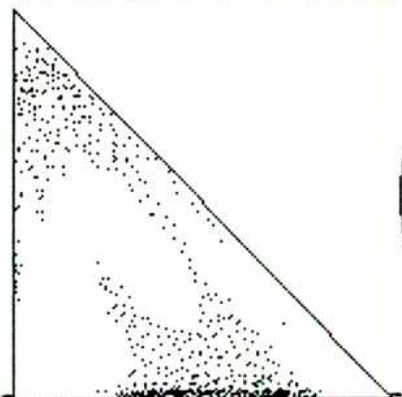


Figura 27
parte 1

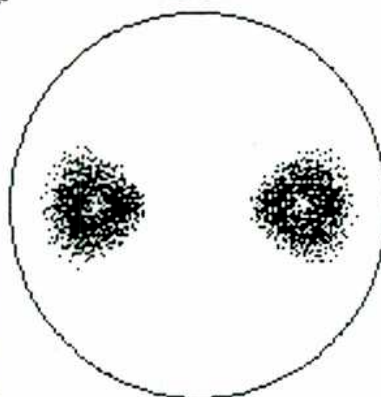
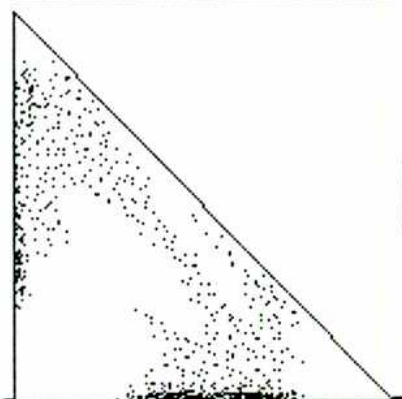
1446 >



1741 >



1761 >



1784 >

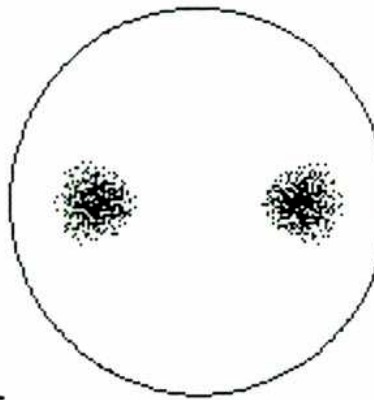
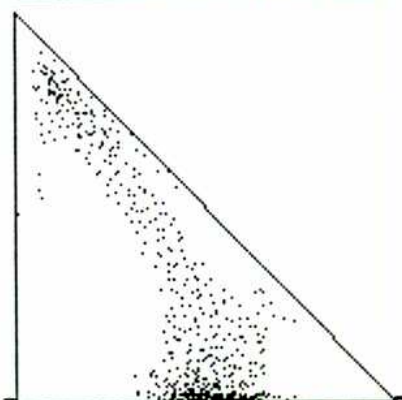


Figura 27

parte 2