

## Tesis de Posgrado

# Cuantificación del campo electromagnético en el espacio- tiempo curvo

Sztrajman, Jorge Bernardo

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Sztrajman, Jorge Bernardo. (1989). Cuantificación del campo electromagnético en el espacio-tiempo curvo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2237\\_Sztrajman.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2237_Sztrajman.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Sztrajman, Jorge Bernardo. "Cuantificación del campo electromagnético en el espacio-tiempo curvo". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1989. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2237\\_Sztrajman.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2237_Sztrajman.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

**CUANTIFICACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO  
EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO**

Autor

**Jorge B. Sztrajman**

Director de Tesis

**Mario A. Castagnino**

Lugar de Trabajo

**Area de Ciencias Fisicomatemáticas**

**Ciclo Básico Común**

**Universidad de Buenos Aires**

2 237  
Ed 2

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

## INDICE

<b>RESUMEN</b>	<b>3</b>
<b>Cap. 1: INTRODUCCION</b>	
§1.1. Origen de la Teoría Cuántica de Campos en Espacio Curvo.	4
§1.2. La Aproximación Semiclásica en la Actualidad.	7
§1.3. Plan de Tesis.	9
<b>Cap. 2: CAMPOS CONFORMES</b>	
§2.1. Transformaciones Conformes.	14
§2.2. Derivada Conforme.	18
§2.3. Consistencia Conforme de las Ecuaciones de Campo.	21
§2.4. Curvatura Conforme.	24
<b>Cap. 3: ECUACIONES DE CAMPO</b>	
§3.1. Campo Escalar.	27
§3.2. Campo del Neutrino.	30
§3.3. El Campo Electromagnético y la Cuantificación Canónica.	39
§3.4. El Método de Gupta-Bleuler en el Espacio-Tiempo Curvo.	43
§3.5. El Gauge Temporal en el Espacio-Tiempo Curvo.	45
<b>Cap. 4: EL CONCEPTO DE PARTICULA EN EL ESPACIO CURVO</b>	
§4.1. Soluciones de Frecuencia Positiva y Negativa en el Espacio de Minkowski.	48
§4.2. Transformaciones de Bogolubov.	49
§4.3. Creación de Partículas a partir de la Curvatura.	53
<b>Cap. 5: EL ROL DE LOS OBSERVADORES EN LA TEORIA CUANTICA DE CAMPOS EN ESPACIOS CURVOS</b>	
§5.1. Observadores y Campos Clásicos.	55
§5.2. Observadores y Campos Cuánticos.	56
§5.3. Sistema de Referencia Físico.	57
<b>Cap. 6: DIAGONALIZACION DEL HAMILTONIANO: CAMPO ESCALAR</b>	
§6.1. Hamiltoniano.	60
§6.2. El Operador $\mathcal{H}^2$ y el Producto Interno $(\cdot, \cdot)_2$ .	63
§6.3. Diagonalización del Hamiltoniano.	65

§6.4.	Minimización de la Energía.	70
<b>Cap. 7: DIAGONALIZACION DEL HAMILTONIANO: CAMPO ELECTROMAGNETICO</b>		
§7.1.	Hamiltoniano.	73
§7.2.	El Operador $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ y el Producto Interno $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ .	75
§7.3.	Diagonalización del Hamiltoniano.	78
§7.4.	Ley de Gauss. Transversalidad y Longitudinalidad de los Fotones.	81
§7.5.	Eliminación de los Fotones Longitudinales.	84
§7.6.	Minimización de la Energía.	90
<b>Cap. 8: EJEMPLOS</b>		
§8.1.	Separación de Variables.	92
§8.2.	$V^\mu$ es un Vector de Killing en un Entorno de $\Sigma$ .	93
§8.3.	Vacío Conforme.	94
§8.4.	Fluido Geodésico en un Universo de Robertson-Walker.	95
§8.5.	Observadores de Rindler.	97
<b>CONCLUSIONES</b>		110
<b>APENDICES</b>		
Ap. 1:	Unicidad de $\Lambda_\mu$ .	114
Ap. 2:	Magnitudes Características de un Fluido y Versor Temporal.	119
Ap. 3:	Objetos Geométricos en Carta Adaptada.	123
Ap. 4:	Espectro de los Operadores $\mathcal{H}^2$ y $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ .	127
Ap. 6:	Cálculo de algunas integrales.	134
GLOSARIO		141
REFERENCIAS		147
AGRADECIMIENTOS		152

## RESUMEN

Se establece una teoría para describir los efectos cuánticos de la gravedad sobre un campo electromagnético. Este último es considerado como un campo vectorial no masivo y cuantificado en el gauge temporal, mientras que el campo gravitatorio permanece a nivel clásico definiendo la geometría del espacio-tiempo.

La definición de frecuencia positiva es establecida exigiendo la diagonalización de un Hamiltoniano, el cual depende del fluido de observadores que llena la variedad. Así, en este formalismo aparece de manera natural la dependencia del estado de vacío respecto del observador. El formalismo es válido para cualquier espacio-tiempo globalmente hiperbólico y para cualquier fluido irrotacional de observadores, siendo esta última condición requerida para poder establecer la noción de tiempo. Si bien aparecen, en principio fotones transversales y longitudinales, estos últimos son eliminados a posteriori mediante la generalización, al espacio curvo, de un artificio conocido de la electrodinámica cuántica en el espacio de Minkowski.

La teoría es ejemplificada en diversos casos, obteniéndose vacíos ya conocidos en la literatura. A título ilustrativo, se detalla la obtención de los coeficientes de Bogolubov entre los modos electromagnéticos de Rindler y Minkowski, en el gauge de Candelas y Deutsch, indicando que los mismos dan lugar a que el número de partículas detectadas por el observador acelerado en el vacío de Minkowski, tenga una estructura exactamente Planckiana, aunque el espectro energético, como se sabe de trabajos anteriores, es térmico, pero no Planckiano, debido a la distorsión introducida por el factor de densidad de estados reducida.

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION

### 1.1. Origen de la Teoría Cuántica de Campos en Espacio Curvo.

De las cuatro interacciones fundamentales que aparecen en la naturaleza, tres han sido consideradas en teorías cuánticas que las describen en acuerdo con la experiencia. En efecto, la interacción electromagnética es descrita por la electrodinámica cuántica [1], la interacción débil ha sido unificada con la electromagnética en la teoría electrodébil [2], [3], y la interacción fuerte es representada con evidente éxito a través de la cromodinámica cuántica [4]. Por otra parte, se han realizado intentos, con buen resultado, de englobar a la interacción fuerte en una teoría de gauge junto con las interacciones electromagnética y débil [5], [6].

A pesar de este proceso de unificación cada vez mayor, la gravitación se ha mantenido al margen. Desde la presentación de la Relatividad General por Einstein [7] como un modelo de geometría Riemanniana para describir la interacción gravitatoria, los intentos de cuantificar la gravedad, iniciados con creciente interés después de la Segunda Guerra Mundial, han conducido al fracaso (pueden verse revisiones en las Ref. [8] y [9]).

Es que los infinitos que aparecen en el proceso de cuantificación de la gravedad no pueden ser eliminados con las técnicas habituales de renormalización, que sí operan con éxito para las otras interacciones. El motivo de este comportamiento reside en que la constante de acoplamiento que aparece en el caso de la gravedad es dimensional, mientras que las constantes de acoplamiento correspondientes a las otras interacciones no lo son.

Más recientemente, se han realizado esfuerzos para integrar a la gravedad junto con las otras interacciones en las teorías conocidas como

supergravedad [10], [11], [12], pero a pesar del entusiasmo inicial se ha caído en el escepticismo respecto de las mismas.

Actualmente, las expectativas más promisorias para incluir a la gravedad en una teoría cuántica junto con las otras interacciones proviene de la teoría de supercuerdas [13], que considera a las partículas, asociadas con las distintas interacciones, como modos de oscilación de un único elemento extenso: una cuerda, o supercuerda si se incluyen modos fermiónicos. Sin embargo, una relación clara de esta teoría con la gravedad cuántica es por el momento desconocida.

De esta manera, carecemos en la actualidad de una teoría cuántica de la gravedad. Por supuesto, es lícito preguntarse ¿por qué la gravedad debe estar cuantificada? Podemos pensar que así debe ser por una cuestión de completitud; si el resto de las interacciones obedece a la mecánica cuántica sería extraño que la gravedad no lo hiciera. Además, si confiamos en que en algún momento se tendrá una teoría unificada que describa todas las interacciones de la naturaleza, está claro que tal teoría deberá ser cuántica. Pero la necesidad de cuantificar el campo gravitatorio no es una necesidad puramente académica. Esta obvio que no hace falta la gravedad cuántica para analizar el movimiento planetario, pero sí cuando abordamos fenómenos físicos en donde la naturaleza cuántica del campo gravitatorio se vuelve crucial. Aunque no disponemos de una teoría de la gravedad cuántica, sí podemos conocer la escala en que comenzaría a ser importante. Ya fue señalado por Planck [14] que con la constante cuántica  $\hbar$ , la de gravitación  $G$  y la velocidad de la luz  $c$ , puede construirse un sistema de unidades fundamental, llamado hoy sistema de unidades de Planck, en donde la unidad de longitud (longitud de Planck) es  $L_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.616 \times 10^{-33}$  cm, y la unidad de tiempo (tiempo de Planck) es  $t_p = (G\hbar/c^5)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44}$  seg.

Estos valores, muchos órdenes de magnitud por debajo de las posibilidades

experimentales de la actualidad, marcan la frontera a partir de la cual los fenómenos cuánticos de la gravedad no pueden ser despreciados.

Sin embargo, aunque la gravedad no pueda ser tratada hoy de una manera completamente cuántica, es posible tener en cuenta los efectos cuánticos mediante una aproximación semiclásica. Para ello podemos basarnos en la experiencia de la aproximación semiclásica a la electrodinámica cuántica. En efecto, en las primeras épocas de la teoría cuántica, se trató al campo electromagnético sin cuantificar en interacción con la materia cuantificada, y muchos de los resultados obtenidos de esta manera estuvieron de acuerdo con los resultados posteriores de la teoría completamente cuantificada [15, Cap.11]. De modo análogo, la aproximación semiclásica a la gravedad cuántica consiste en considerar a los campos cuantificados en interacción con la gravitación, pero conservando a esta última sin cuantificar, simplemente como un marco que determina la geometría del espacio-tiempo en el cual los otros campos evolucionan. Puede demostrarse [16] que si se trata a la gravedad cuántica de manera perturbativa, es decir en serie de potencias de  $\hbar$ , la aproximación semiclásica equivale a considerar todos los términos hasta el orden  $\hbar$ . Es generalmente aceptado, que tal aproximación es válida en regiones del espacio-tiempo en las cuales la curvatura no supera el inverso del cuadrado de la longitud de Planck, o más precisamente,

$$\text{Máx } |R_{\mu\nu\rho\lambda}| < (1/L_p)^2$$

de manera que la teoría semiclásica sería útil para estudiar, por ejemplo, ciertas etapas del universo primitivo del modelo cosmológico del Big Bang y regiones próximas a un agujero negro.

Los primeros intentos de considerar efectos de la gravedad sobre los campos cuánticos se deben a Schrödinger a comienzos de la década del 30



[17]. Sin embargo, el establecimiento de un programa para realizar la aproximación semiclásica se deben a Lichnerowicz en la década del 60 [18], [19], [20] y a Parker [21], [22], quien fue el primero que señaló la existencia de una ambigüedad en la definición del modelo de partícula en un espacio curvo. Posteriormente Fulling [23], y más tarde Castagnino [24], [25], [26], mostró por primera vez que esta ambigüedad conduce a un mecanismo de creación de partículas a partir del campo gravitatorio, aunque la posibilidad de la producción de las mismas por la curvatura fue discutida mucho antes por Schrödinger [27] y, posteriormente, por De Witt [28], Takahashi y Umezawa [29] e Imamura [30]. No obstante, los primeros tratamientos completos de producción de partículas por un campo gravitatorio exterior se encuentran en la segunda mitad de la década del 60 [31], [32], [33], [34], [35].

En cuanto a los fundamentos conceptuales de la creación de partículas en un espacio curvo, pueden verse las Ref. [36], [37], [38], [39], [40].

## **1.2. La Aproximación Semiclásica en la Actualidad.**

Pese a los avances realizados, subsisten todavía problemas en esta aproximación semiclásica a la gravedad cuántica. Uno de ellos se relaciona con la falta de un criterio común para definir lo que se entiende por soluciones de frecuencia positiva en un espacio curvo arbitrario.

Uno de los criterios más ampliamente utilizados a tal fin ha sido el conocido como diagonalización del Hamiltoniano [30], [41], [42], [43], [24], [25], [44], [45], [46]. Aunque fuertes críticas a este procedimiento han sido formuladas [47], [48], consideramos que las mismas fueron adecuadamente rebatidas [49]. También se ha intentado definir el modelo de partícula, generalizando al caso cuántico el principio de equivalencia (principio de equivalencia cuántico) [50], [51], [52].

Aún cuando se pase por alto la ambigüedad en el modelo de partícula, el

otro gran problema que subsiste es el de la renormalización de las magnitudes divergentes, típicas de las teorías de campo, como por ejemplo el valor de expectación, en algún estado, del tensor energía-momento. Una revisión de las técnicas de renormalización en espacio curvo puede verse en la Ref. [53].

Un nuevo interés en estudiar esta aproximación a la gravedad cuántica, surgió con el descubrimiento teórico en 1975 del efecto Hawking [54], es decir la radiación térmica de los agujeros negros, fenómeno por el cual las partículas escapan del agujero negro por efecto túnel a través del horizonte [55]. Siendo entonces, que un fuerte campo de gravitación es capaz de producir un espectro térmico, y dado que el principio de equivalencia estipula que un campo de gravitación equivale localmente a uno de aceleraciones, es razonable esperar que los observadores acelerados vean radiación térmica no percibida por los observadores inerciales. En efecto, Davies en 1975 [56] y Unruh al año siguiente [57] hallaron que un observador uniformemente acelerado percibe el vacío de Minkowski del campo escalar como un espectro térmico con temperatura proporcional a su aceleración, y Candelas & Deutsch arribaron a esta conclusión en 1977 [118] para el campo electromagnético, y al año siguiente [120] para un campo no masivo de spin  $1/2$ . Posteriormente, Takagi estudió este fenómeno para un campo escalar [122], [123], [117] y para uno de spin  $1/2$  no masivo [126] en un espacio-tiempo de  $n$  dimensiones obteniendo, además del comportamiento térmico, el curioso resultado de una aparente inversión de la estadística para  $n$  impar.

Esta predicción de espectros térmicos, ha sido alcanzada también para campos de spin 0 y  $1/2$  y 1 [58], [121] en el contexto de la llamada teoría del campo de radiación del punto cero, en la cual se asume que el vacío de Minkowski consiste en un espectro de radiación invariante de Lorentz. Este espectro no puede ser percibido, en consecuencia, por un observador

inercial pero sí por uno que no lo es [59], [60], [61]. Un buen artículo sobre el tema, aunque de carácter divulgativo, puede encontrarse en [62].

Los efectos térmicos asociados con los observadores acelerados han sido considerados con gran generalidad, para campos escalares, por Sánchez [63], y también se han estudiado posibles efectos físicos [64], [65]. Una excelente revisión de la relación entre la teoría de campos en Relatividad General y la termodinámica se puede encontrar en la Ref. [66].

Una buena revisión general de la aproximación semiclásica a la gravedad cuántica es la Ref. [67].

Recientemente también han sido considerados campos en interacción, aunque el tratamiento se encuentra limitado principalmente a métricas de Robertson-Walker con regiones "in-out", donde la ambigüedad en la definición del vacío puede ser evitada, [68], [69], [70], [71].

También recientemente, han aparecido trabajos en donde se intenta el establecimiento de un criterio general para definir el estado de vacío de un campo cuántico en un campo gravitatorio arbitrario y para observadores en general, en los casos del campo escalar [72] y del campo electromagnético [73].

### **1.3. Plan de Tesis.**

En esta Tesis intentaremos dar, en el marco de la aproximación semiclásica, una prescripción general para obtener el modelo de partícula asociado al campo electromagnético (concebido como un campo no masivo de spin 1) interactuando con un campo gravitatorio arbitrario, y desde el punto de vista de observadores no rotantes. El criterio utilizado para definir las soluciones de frecuencia positiva será el de diagonalización del Hamiltoniano, aunque con la peculiaridad de que el Hamiltoniano es dependiente del observador.

Requerimos, como es generalmente aceptado para los campos no masivos,

que el formalismo sea invariante conforme. Así, el Cap. 2 es dedicado a introducir las nociones principales relacionadas con las transformaciones conformes. En §2.1 se definen las transformaciones conformes en un espacio-tiempo arbitrario, dando las leyes de transformación de los diversos entes geométricos de la variedad y de la densidad lagrangiana de los campos definidos sobre la misma. Además se introducen los campos de Weyl. La derivada conforme de los campos de Weyl es definida en §2.2 a través de un campo vectorial de Weyl de peso  $1/2$  que, más tarde, será asociado con el fluido de observadores. En §2.3 demostramos que las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos tensoriales de Weyl son las mismas cuando se utiliza la derivada conforme o la derivada covariante ordinaria, quedando claro de esta manera que se trata de ecuaciones invariantes conformes. A través de la conexión conforme, se definen en §2.4 el tensor de curvatura conforme y los tensores de rango 2 que se obtienen de él por contracción, así como el escalar de curvatura conforme. La obtención de las ecuaciones de campo para los campos no masivos de spin 0,  $1/2$  y 1 es reservada para el Cap. 3. En §3.1 se trata el campo escalar usando la derivada conforme y mostramos que, para cierto valor de la constante de acoplamiento (llamado acoplamiento conforme en la literatura), el observador no aparece en la ecuación de campo. El caso del spin  $1/2$  (neutrino) es encarado en §3.2 mediante el empleo de la conexión spinorial. La derivada conforme es extendida al caso spinorial, aunque las ecuaciones de campo obtenidas son las mismas que con la derivación spinorial ordinaria. En §3.3 se estudia el campo electromagnético y la problemática de su cuantificación en el espacio de Minkowski, puntualizando los métodos del gauge temporal y el de Gupta-Bleuler. Usando la derivada conforme obtenemos la densidad lagrangiana en espacio curvo y mostramos que sólo en 4 dimensiones la misma resulta independiente del fluido de observadores. La cuantificación de

Gupta-Bleuler en el caso curvo es delineada brevemente en §3.4, mientras que el caso del gauge temporal es tratado en §3.5.

La ambigüedad en la definición del modelo de partícula en el espacio curvo es abordada en el Cap. 4. En §4.1 se pasa revista al caso del espacio de Minkowski, donde la descomposición en frecuencias positivas y negativas aparece naturalmente (ondas planas) gracias a las simetrías de la variedad. El modelo de partícula en el espacio curvo es encarado en §4.2 tomando como ejemplo un campo escalar. Se explica la ambigüedad en la elección de la base de soluciones de la ecuación de campo y se introducen las transformaciones de Bogolubov que relacionan dichas bases entre sí. Las diferentes posturas que se encuentran en la literatura respecto de la ambigüedad en el modelo de partícula son comentadas en §4.3.

El Cap. 5 está dedicado a estudiar el papel que desempeña el observador en un espacio-tiempo curvo y cómo ese papel se vuelve crucial cuando se analizan fenómenos cuánticos. En §5.1 se pasa revista al rol jugado por el fluido de observadores, cuando se analizan campos clásicos (no cuantificados) en Relatividad General, mientras que en §5.2 se comenta cuál es el rol del observador cuando se estudian campos cuánticos y cómo el estado de vacío se vuelve dependiente del observador. Finalmente, en §5.3 se dan los elementos que caracterizan a un sistema de referencia en Relatividad General, introduciendo los importantes conceptos de tiempo natural y carta adaptada, que serán usados ampliamente en lo que sigue.

Como un paso previo al estudio del spin 1, en el Cap. 6 obtenemos el modelo de partícula asociado a la diagonalización del Hamiltoniano para el caso, más sencillo, del campo de spin 0. En §6.1 introducimos un Hamiltoniano que depende del observador y lo expresamos en la carta adaptada al fluido de observadores. En §6.2 introducimos un operador  $\mathcal{H}^2$  autoadjunto en un producto interno  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ , los cuales permiten escribir el Hamiltoniano y la ecuación de campo de una manera muy conveniente. La diagonalización del

Hamiltoniano es estudiada en §6.3, mostrando que la misma se obtiene a través de las autofunciones del operador  $\mathcal{H}^2$ , y que los datos de Cauchy de las soluciones de frecuencia positiva se obtienen conociendo las autofunciones y autovalores de  $\mathcal{H}^2$ . En §6.4 mostramos que el requerimiento de minimización de la energía produce el mismo modelo de partícula que el de diagonalización del Hamiltoniano.

En el Cap. 7 abordamos la diagonalización del Hamiltoniano para el campo electromagnético de manera análoga a lo realizado en el Cap. 6 para el campo escalar. En §7.1 se introduce el Hamiltoniano dependiente del observador y su expresión en la carta adaptada. En §7.2 se introduce el operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  autoadjunto en el producto interno  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ , que permite expresar convenientemente las ecuaciones de campo y el Hamiltoniano. En §7.3 se obtienen los datos de Cauchy de la base que diagonaliza el Hamiltoniano, la que queda determinada por los autovalores y autofunciones de  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ . En §7.4 se estudia el problema de la Ley de Gauss y su relación con la transversalidad y longitudinalidad de los fotones, arribando a la conclusión de que los modos con autovalor nulo son longitudinales, mientras que los de autovalor no nulo son transversales. El problema de la eliminación de los modos longitudinales (no físicos) es encarado en §7.5, en donde, para el caso en que la separación de variables es posible, calculamos los coeficientes de Bogolubov asociados a la creación de fotones longitudinales a través del tiempo, y mostramos que puede elegirse un parámetro libre de manera tal que dicha creación no ocurre.

La teoría expuesta en el Cap. 7 es aplicada a diversos casos de interés en el Cap. 8 mostrando que, en particular, se obtienen modelos de partícula ya conocidos en la literatura para el caso escalar. En §8.1 se estudia el caso en que la métrica es tal que se pueden separar variables en las ecuaciones de campo. En §8.2 se analiza el caso en que hay un vector de Killing, lo cual

incluye muchas situaciones conocidas. En §8.3 se describe el caso del vacío conforme y en §8.4 el ejemplo, muy importante por su interés cosmológico, del fluido geodésico en un universo en expansión. Finalmente, en §8.5 se presenta el caso Rindler-Minkowski, es decir cómo percibe el vacío fotónico de Minkowski un observador en movimiento uniformemente acelerado, obteniéndose, en el gauge de Candelas y Deutsch, un espectro exactamente Planckiano para el número de partículas, con temperatura proporcional a la aceleración del observador, igual que para el caso del spin cero, aunque el valor de expectación del tensor energía-momento es térmico (lo cual permite definir la temperatura), pero no Planckiano, debido a la distorsión introducida por el factor de densidad de estados reducida. Por último, ciertas demostraciones y expresiones útiles han sido incluidas como apéndices. En el Apéndice 1 usamos el álgebra de Clifford para demostrar la unicidad de la variación de la conexión spinorial frente a transformaciones conformes. El Apéndice 2 está dedicado a describir los principales entes geométricos que caracterizan un fluido de observadores. También se muestra que el requerimiento de fluido irrotacional es equivalente a que el rotor conforme del versor tangente a las líneas de fluido sea nulo. En el Apéndice 3 se resume la expresión de la conexión Riemanniana en la carta adaptada, así como la que toma la conexión conforme. El Apéndice 4 se dedica a estudiar las propiedades de los operadores  $\mathcal{H}^2$  y  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ . En §A4.1 se demuestra que el operador  $\mathcal{H}^2$  es autoadjunto en el producto interno  $(\cdot, \cdot)_Z$  y que sus autovalores son  $> 0$ . En §A4.2 se demuestra que el operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  es autoadjunto en el producto interno  $(\cdot, \cdot)_Z$  y que sus autovalores son  $\geq 0$ . Finalmente, se dedica un apéndice al cálculo de ciertas integrales que aparecen cuando se intenta obtener los coeficientes de Bogolubov entre las bases de Rindler y Minkowski.

Los aportes originales de esta tesis se encuentran, esencialmente, en los Cap. 2, 3 y 5, en donde se introducen las principales herramientas asociadas con el formalismo dependiente del observador, y en los Cap. 6, 7 y 8, donde se implementa la diagonalización del Hamiltoniano de los campos escalar y electromagnético y se tratan diversos casos de interés.



## CAPITULO 2

### CAMPOS CONFORMES

Es de aceptación generalizada en la literatura, que los campos no masivos deben ser descriptos por teorías invariantes frente a transformaciones conformes del espacio-tiempo. En este capítulo discutimos tales transformaciones y temas vinculados con ellas.

#### 2.1 Transformaciones Conformes.

Consideremos un espacio-tiempo globalmente hiperbólico  $C^\infty$  [74], [75], de  $n$  dimensiones (una temporal y  $n-1$  espaciales) con tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Los índices griegos serán  $n$ -dimensionales ( $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, n-1$ ) mientras que los latinos serán  $(n-1)$ -dimensionales ( $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n-1$ ). Una transformación conforme es un cambio de escala local en la métrica [76], [77], es decir

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \lambda(x) g_{\mu\nu} \quad (2.1.1)$$

donde  $\lambda(x)$  es una función de punto arbitraria no negativa la cual, para evitar problemas matemáticos, supondremos de clase  $C^\infty$ .

Para preservar la propiedad  $g_{\mu\eta} g^{\eta\nu} = \delta_\mu^\nu$  las componentes contravariantes del tensor métrico deben transformarse como

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \lambda^{-1}(x) g^{\mu\nu} \quad (2.1.2)$$

Puesto que el cambio de escala es introducido a través del tensor métrico, las diferenciales de coordenadas cumplen

$$\tilde{d}x^\mu = dx^\mu \quad (2.1.3)$$

$$\tilde{d}x_\mu = \lambda dx_\mu \quad (2.1.4)$$

A partir de estas propiedades de transformación pueden deducirse las leyes de transformación correspondientes a los distintos entes geométricos de la variedad. Por ejemplo, se tiene para  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , el elemento de volumen en  $n$  dimensiones  $d\eta$  y el elemento de superficie en  $n-1$  dimensiones  $d\sigma_\mu$ :

$$\tilde{g} = \lambda^n g \quad (2.1.5)$$

$$\tilde{d}\eta = \lambda^{n/2} d\eta \quad (2.1.6)$$

$$\tilde{d}\sigma_\mu = \lambda^{n/2} d\sigma_\mu \quad (2.1.7)$$

donde

$$d\eta = \sqrt{-g} d^n x = \sqrt{-g} (1/n!) \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_n}$$

$$d\sigma_\mu = \sqrt{-g} dS_\mu = \sqrt{-g} [1/(n-1)!] \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1}} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_{n-1}}$$

En cuanto a la conexión Riemanniana, su ley de transformación es, [77]

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} + (1/2)(\delta^\rho_\mu \partial_\nu \ln \lambda + \delta^\rho_\nu \partial_\mu \ln \lambda - g_{\mu\nu} \partial^\rho \ln \lambda) \quad (2.1.8)$$

de la cual se deduce por contracción:

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\mu\nu} = \Gamma^\mu_{\mu\nu} + (n/2) \partial_\nu \ln \lambda \quad (2.1.9)$$

A partir del comportamiento conforme de  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  pueden ser obtenidas las leyes de transformación de otros elementos geométricos de la variedad. Por ejemplo, para el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (2.1.10)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/4) \{ (n-2) [ 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \ln \lambda - \nabla_\mu \ln \lambda \nabla_\nu \ln \lambda + g_{\mu\nu} \nabla^\rho \ln \lambda \nabla_\rho \ln \lambda ] + \\ + 2 g_{\mu\nu} \nabla^\rho \ln \lambda \nabla_\rho \ln \lambda \} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

y para el escalar de curvatura  $R = R^\mu_\mu$ , es

$$\tilde{R} = \lambda^{-1} R - \lambda^{-1} (n-1) [ \nabla^\mu \nabla_\mu \ln \lambda + (1/4)(n-2) \nabla^\mu \ln \lambda \nabla_\mu \ln \lambda ] \quad (2.1.12)$$

Un campo tensorial o spinorial  $\Psi$  es introducido a través de su acción S:

$$S = \int \mathcal{L}(\Psi, \nabla\Psi) d\eta \quad (2.1.13)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana del campo y  $\nabla$  indica la derivada covariante. Naturalmente, para los campos no masivos pediremos que la teoría sea invariante conforme, lo cual se manifiesta en la invariancia conforme de la acción:

$$\tilde{S} = S \quad (2.1.14)$$

Entonces, a partir de la Ec.(2.1.6) aparece la siguiente ley de transformación para la densidad lagrangiana, [78]:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \lambda^{-n/2} \mathcal{L} \quad (2.1.15)$$

Al realizar una transformación conforme sobre la métrica no sólo cambian los entes geométricos, también deberán transformarse los campos para

lograr el cumplimiento de la propiedad (2.1.15). Un campo tensorial o spinorial será llamado un campo de Weyl, [77], de peso  $r$  cuando sus componentes covariantes se transformen frente a la transformación (2.1.1) como

$$\tilde{\Psi} = \lambda^r \Psi \quad (2.1.16)$$

Asumiremos que los campos físicos son campos de Weyl. El peso de Weyl de cada campo depende de su spin y puede ser obtenido a partir de las siguientes consideraciones. Consideremos un campo tensorial de Weyl  $\Psi$  de peso  $r$ , con  $m$  índices, es decir

$$\tilde{\Psi}_{\mu^1 \mu^2 \dots \mu^m} = \lambda^r \Psi_{\mu^1 \mu^2 \dots \mu^m} \quad (2.1.17)$$

El término cinético de  $\mathcal{L}$  será del tipo  $\nabla_{\mu} \Psi_{\mu^1 \mu^2 \dots \mu^m} \nabla^{\mu} \Psi^{\mu^1 \mu^2 \dots \mu^m}$  y en consecuencia, tendremos para la siguiente ley de transformación:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \lambda^{2r - m - 1} \mathcal{L} \quad (2.1.18)$$

y puesto que de acuerdo con la Ec. (2.1.15) deseamos que  $\mathcal{L}$  sea un escalar de Weyl de peso  $n/2$ , comparando con (2.1.18) tiene que ser:

$$r = [2(m + 1) - n]/4 \quad (2.1.19)$$

Así por ejemplo, para un campo escalar ( $m=0$ ) es  $r = (2-n)/4$  y para uno vectorial ( $m=1$ ) es  $r = (4-n)/4$ .

## 2.2. Derivada Conforme.

La derivada covariante de un campo de Weyl  $\Psi$  no será, en general, un campo de Weyl. Esto se debe a que la conexión Riemanniana  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$  no es un campo de Weyl, sino que frente a transformaciones conformes se transforma de acuerdo a la expresión (2.1.8). Así por ejemplo, para un campo de Weyl  $V_{\mu}$  de peso  $r$ , la ley de transformación de la derivada covariante es:

$$(\nabla_{\mu} V_{\nu})^{\sim} = \lambda^r [\nabla_{\mu} V_{\nu} - (1/2) V_{\mu} \nabla_{\nu} \ln \lambda + (r - 1/2) V_{\nu} \nabla_{\mu} \ln \lambda + (1/2) g_{\mu\nu} V_{\rho} \nabla^{\rho} \ln \lambda] \quad (2.2.1)$$

Puesto que las ecuaciones de campo se construyen a partir de derivadas covariantes del campo, está claro que la utilización de la conexión Riemanniana no es apropiada para obtener una teoría manifiestamente invariante conforme. Para conseguir esto último se hace necesario introducir una conexión que se transforme como un campo de Weyl. Para ello tengamos en cuenta que la ley de transformación de una conexión arbitraria  $\Omega^{\rho}_{\mu\nu}$  frente a un cambio de carta  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$  es:

$$\Omega'^{\rho}_{\mu\nu} = (\partial x'^{\rho} / \partial x^{\sigma}) (\partial x^{\alpha} / \partial x'^{\mu}) (\partial x^{\beta} / \partial x'^{\nu}) \Omega^{\sigma}_{\alpha\beta} - (\partial^2 x'^{\rho} / \partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}) (\partial x^{\alpha} / \partial x'^{\mu}) (\partial x^{\beta} / \partial x'^{\nu}) \quad (2.2.2)$$

A partir de  $\Omega^{\rho}_{\mu\nu}$  siempre es posible obtener otra conexión  $\Omega^{*\rho}_{\mu\nu}$  sumándole un tensor arbitrario  $A^{\rho}_{\mu\nu}$ :

$$\Omega^{*\rho}_{\mu\nu} = \Omega^{\rho}_{\mu\nu} + A^{\rho}_{\mu\nu} \quad (2.2.3)$$

En efecto, la ley de transformación de  $\Omega^{\rho}_{\mu\nu}$  frente a cambio de carta sigue siendo (2.2.2).

Lo anterior fundamenta la introducción de una conexión conforme  $K^{\rho}_{\mu\nu}$  como

$$K^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + Q^{\rho}_{\mu\nu} \quad (2.2.4)$$

donde  $Q^{\rho}_{\mu\nu}$  es un tensor definido por

$$Q^{\rho}_{\mu\nu} = (1/2)(\delta^{\rho}_{\mu} Q_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu} Q_{\mu} - g_{\mu\nu} Q^{\rho}) \quad (2.2.5)$$

siendo  $Q_{\mu}$  un vector. En realidad, podríamos definir  $Q^{\rho}_{\mu\nu}$  a partir de más de un vector; sin embargo nuestro ánimo no es establecer una teoría standard de la derivada covariante, ya que, como se verá más adelante,  $Q^{\rho}_{\mu\nu}$  estará estrechamente ligada al observador, y el fluido de observadores está caracterizado por un único campo de vectores (ver Ec. (2.2.11-13)) y Cap. 5. Para que  $K^{\rho}_{\mu\nu}$  sea invariante frente a transformaciones conformes ( $\tilde{K}^{\rho}_{\mu\nu} = K^{\rho}_{\mu\nu}$ ), el vector  $Q_{\mu}$  debe, frente a las mismas, sufrir una transformación de gauge:

$$\tilde{Q}_{\mu} = Q_{\mu} - \nabla_{\mu} \ln \lambda \quad (2.2.6)$$

Teniendo la conexión conforme, puede construirse una derivada conforme  $D_{\mu}$  que preserve el peso de los campos de Weyl. Esta derivada no es otra cosa que la derivada de gauge del grupo conforme [79]. Por ejemplo, para un vector de Weyl  $V_{\mu}$  de peso  $r$ , su derivada conforme es:

$$D_{\nu} V_{\mu} = \partial_{\nu} V_{\mu} - K^{\rho}_{\mu\nu} V_{\rho} + r Q_{\nu} V_{\mu} \quad (2.2.7)$$

donde debe notarse que además del término con la derivada ordinaria y el que contiene la conexión, aparece un tercero asociado al peso de Weyl  $r$ . La inclusión de este último término es necesaria para que la definición sea

consistente [80]. Para las componentes contravariantes del vector anterior, se tiene:

$$D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + K^\mu_{\rho\nu} V^\rho + (r-1) Q_\nu V^\mu \quad (2.2.8)$$

La aparición del factor  $r-1$  en lugar de  $r$  en la última expresión se debe a que al pasar el índice  $\mu$  de posición covariante a contravariante, el peso de Weyl disminuye en una unidad.

La derivada conforme de campos de Weyl de rango superior a 1 puede obtenerse pensándolos como productos de campos vectoriales como se hace corrientemente en los espacios de Riemann.

Contrayendo los índices en (2.2.8) se obtiene la expresión de la divergencia conforme de un vector de Weyl:

$$D_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + K^\mu_{\rho\mu} V^\rho + (r-1) Q_\mu V^\mu = \nabla_\mu V^\mu + [r-1 + (n/2)] Q_\mu V^\mu \quad (2.2.9)$$

Para la parte antisimétrica de la derivada conforme se tiene:

$$D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + r(Q_\mu V_\nu - Q_\nu V_\mu) \quad (2.2.10)$$

Es interesante notar que el vector  $Q_\mu$  no es un campo de Weyl, ya que frente a transformaciones conformes no se transforma según (2.1.16) sino según (2.2.6). Sin embargo,  $Q_\mu$  puede ser expresado en términos de un campo vectorial de Weyl unitario. En efecto, llamemos  $U_\mu$  a este campo auxiliar y  $p$  a su peso de Weyl, es decir:

$$\tilde{U}_\mu = \lambda^p U_\mu \quad (2.2.11a)$$

$$\tilde{U}^\mu = \lambda^{p-1} U^\mu \quad (2.2.11b)$$

$$U_\mu U^\mu = 1 \quad (2.2.11c)$$

y asumamos, por simplicidad, que sólo utilizaremos para construir  $Q_\mu$  a  $U_\mu$  y su derivada primera  $\nabla_\nu U_\mu$ . En tal caso, la expresión más general para  $Q_\mu$  es, [81]:

$$Q_\mu = b U^\nu \nabla_\nu U_\mu + a U_\mu \nabla_\nu U^\nu \quad (2.2.12)$$

siendo a y b dos parámetros a ser determinados. El término  $U^\nu \nabla_\mu U_\nu$  no aparece en (2.2.12) pues es idénticamente nulo en virtud de (2.2.11c).

Utilizando las expresiones (2.2.1) y (2.2.11) es fácil encontrar que para satisfacer la ley de transformación (2.2.6), deben ser  $p=1/2$ ,  $a=-2/(n-1)$  y  $b= 2$ , con lo cual queda para  $Q_\mu$  la siguiente expresión:

$$Q_\mu = 2 U^\nu \nabla_\nu U_\mu - [2/(n-1)] U_\mu \nabla_\nu U^\nu \quad (2.2.13)$$

De este modo, aparece naturalmente asociado al vector  $Q_\mu$  un campo de Weyl unitario de peso 1/2, el cual podría ser dotado de sentido físico. En efecto, como veremos, esta propiedad la tiene el vector unitario tangente a las líneas de fluido del campo de observadores y en tal interpretación la derivada conforme resultaría, en principio, dependiente del observador.

### 2.3. Consistencia Conforme de las Ecuaciones de Campo.

Para una acción invariante conforme la densidad lagrangiana debe satisfacer la Ec. (2.1.15), es decir que debe ser un escalar de Weyl de peso  $-n/2$ . Una manera de garantizar esto es construir la densidad lagrangiana a partir del campo  $\Psi$  y su derivada conforme  $D\Psi$  en lugar de su derivada covariante ordinaria  $\nabla\Psi$  ya que, mientras  $D\Psi$  es un campo de Weyl  $\nabla\Psi$  no lo es. Por otra parte, las ecuaciones de campo se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange y aparece naturalmente la pregunta de si las variables dinámicas en  $\mathcal{L}(\Psi, D\Psi)$  deben ser  $(\Psi, D\Psi)$  o  $(\Psi, \nabla\Psi)$ , ya que en cada caso podrían obtenerse ecuaciones de campo diferentes. Veremos que, por



el contrario, se obtienen en ambos casos las mismas ecuaciones.

Por simplicidad trabajaremos en dimensión  $n=4$  y para campos bosónicos.

Sea entonces un campo tensorial de rango  $m$  y peso  $r$ , es decir que se transforma de acuerdo a (2.1.17). La densidad lagrangiana asociada a este campo deberá cumplir la condición (2.1.15), es decir que

$$\tilde{\mathcal{L}} = \lambda^{-2} \mathcal{L} \quad (2.3.1)$$

La derivada conforme del campo  $\Psi$  está dada por la conveniente generalización de la Ec. (2.2.7):

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} &= \nabla_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} - \sum_{i=1}^m Q_{\mu \nu^i} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^{i-1} \rho \nu^{i+1} \dots \nu^m} + \\ &+ r Q_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

De esta última fórmula se ve que

$$\partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} = \partial \mathcal{L} / \partial \nabla_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} \quad (2.3.3)$$

y de (2.1.17) y (2.3.1) se deduce el peso de Weyl de  $\partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m}$ :

$$(\partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m})^\sim = \lambda^{-(r+2)} \partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} \quad (2.3.4)$$

Esta última expresión permite calcular la derivada conforme de  $\partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m}$ :

$$\begin{aligned} D_\mu \partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} &= \nabla_\mu \partial \mathcal{L} / \partial \nabla_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} - \sum_{i=1}^m Q_{\mu \nu^i} \partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^{i-1} \rho \nu^{i+1} \dots \nu^m} \\ &+ Q_{\mu \rho} \partial \mathcal{L} / \partial D_\rho \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} - (r+2) Q_\mu \partial \mathcal{L} / \partial D_\mu \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Notando que de acuerdo con la definición (2.2.5) es  $Q_{\mu\rho}^{\nu} = 2 Q_{\rho}^{\nu}$ , la Ec. (2.3.5) puede ponerse como

$$D_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} = \nabla_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial \nabla_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} - \sum_{i=1}^m Q_{\mu\rho}^{\nu^i} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^{i-1} \rho \nu^{i+1} \dots \nu^m} - r Q_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} \quad (2.3.6)$$

La última ecuación permite relacionar los términos análogos,  $D_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m}$  y  $\nabla_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial \nabla_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m}$ , que aparecen en las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ahora es preciso vincular los otros términos análogos que aparecen en las mencionadas ecuaciones, a saber:  $\partial \mathcal{L} / \partial \Psi |_{\nabla}$  calculado a  $\nabla_{\mu} \Psi$  constante y  $\partial \mathcal{L} / \partial \Psi |_{D}$  calculado a  $D_{\mu} \Psi$  constante. Usando la regla de derivación de función de función:

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{L} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} |_{\nabla} &= \partial \mathcal{L} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} |_{D} + (\partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\rho^1 \dots \rho^m}) (\partial D_{\mu} \Psi_{\rho^1 \dots \rho^m} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m}) = \\ &= \partial \mathcal{L} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} |_{D} + (\partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\rho^1 \dots \rho^m}) \left( - \sum_{i=1}^m Q_{\mu\rho}^{\nu^i} \delta_{\nu^1 \rho^1} \dots \delta_{\nu^{i-1} \rho^{i-1}} \delta_{\nu^i \rho^i} \delta_{\nu^{i+1} \rho^{i+1}} \dots \delta_{\nu^m \rho^m} \right) \\ &\quad + r Q_{\mu} \delta_{\nu^1 \rho^1} \dots \delta_{\nu^m \rho^m} = \\ &= \partial \mathcal{L} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} |_{D} - \sum_{i=1}^m Q_{\mu\rho}^{\nu^i} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^{i-1} \rho \nu^{i+1} \dots \nu^m} - r Q_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Finalmente, las Ec. (2.3.6) y (2.3.7) nos permiten concluir que

$$D_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial D_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} - \partial \mathcal{L} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} |_{D} = \nabla_{\mu} \partial \mathcal{L} / \partial \nabla_{\mu} \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} - \partial \mathcal{L} / \partial \Psi_{\nu^1 \dots \nu^m} |_{\nabla} \quad (2.3.8)$$

Esta última igualdad muestra claramente que las ecuaciones de campo obtenidas en ambos casos estudiados son idénticas. Es decir que, siempre

que utilizemos una densidad lagrangiana que cumpla (2.3.1), se obtienen las mismas ecuaciones de campo utilizando la derivada  $\nabla$  o la  $D$ , en el sentido en que lo muestra la Ec. (2.3.8).

#### 2.4. Curvatura Conforme.

Como hemos visto, el tensor métrico es un objeto de Weyl, pero no así otros elementos geométricos importantes de la variedad, como por ejemplo la conexión  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ , el tensor de curvatura  $R_{\rho\mu\nu\sigma}$ , el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar de curvatura  $R$ . Si se pretende construir ecuaciones de campo invariantes conformes utilizando, además de los propios campos, elementos geométricos de la variedad, sería útil que estos últimos se comporten como objetos de Weyl. De esta manera dichas ecuaciones mostrarían explícitamente su invariancia conforme.

Para el caso de la conexión  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$  hemos resuelto el problema introduciendo la conexión conforme  $K^{\rho}_{\mu\nu}$  que depende del vector  $Q_{\mu}$ . Puesto que el tensor de curvatura es obtenido a través de derivadas ordinarias de la conexión, para obtener el tensor de curvatura conforme  $K_{\rho\mu\nu\sigma}$  deberá hacerse el reemplazo  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \rightarrow K^{\rho}_{\mu\nu}$ , es decir

$$K_{\rho\mu\nu\sigma} = \partial_{\nu} K^{\rho}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} K^{\rho}_{\mu\nu} - K^{\alpha}_{\mu\sigma} K^{\rho}_{\alpha\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu} K^{\rho}_{\alpha\sigma} \quad (2.4.1)$$

y claramente se sigue, de la invariancia conforme de  $K^{\rho}_{\mu\nu}$ , que el tensor de curvatura conforme también es invariante conforme:

$$\tilde{K}_{\rho\mu\nu\sigma} = K_{\rho\mu\nu\sigma} \quad (2.4.2)$$

Poniendo todos los índices del tensor de curvatura conforme en posición covariante puede verse que se trata de un tensor de Weyl de peso 1. Introduciendo (2.2.4) y (2.2.5) en (2.4.1) obtenemos la relación entre el

tensor de curvatura conforme y el tensor de curvatura de Riemann:

$$\begin{aligned}
 K_{\rho\mu\nu\sigma} = & R_{\rho\mu\nu\sigma} + (1/2)(g_{\rho\mu}\nabla_\nu Q_\sigma + g_{\rho\sigma}\nabla_\nu Q_\mu - g_{\mu\sigma}\nabla_\nu Q_\rho - g_{\rho\mu}\nabla_\sigma Q_\nu - g_{\rho\nu}\nabla_\sigma Q_\mu + \\
 & + g_{\mu\nu}\nabla_\sigma Q_\rho) + (1/4)(g_{\rho\nu}Q_\sigma Q_\mu + g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}Q^\alpha Q_\alpha + g_{\mu\sigma}Q_\nu Q_\rho - g_{\rho\sigma}Q_\mu Q_\nu - \\
 & - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}Q^\alpha Q_\alpha - g_{\mu\nu}Q_\sigma Q_\rho) \quad (2.4.3)
 \end{aligned}$$

Por medio de este tensor es posible obtener la expresión del conmutador de derivadas conformes de un campo de Weyl. Por ejemplo, para un vector de Weyl de peso 0 se tiene:

$$(D_\sigma D_\nu - D_\nu D_\sigma) A_\mu = K^\rho_{\mu\nu\sigma} A_\rho \quad (2.4.4)$$

Una simple inspección de la expresión (2.4.3) muestra que  $K^\rho_{\mu\nu\sigma}$  es antisimétrico respecto de la permutación de los dos últimos índices ( $\nu\sigma$ ), lo cual vale para todo tensor de curvatura proveniente de conexión simétrica. Sin embargo,  $K^\rho_{\mu\nu\sigma}$  tiene menos simetrías que  $R^\rho_{\mu\nu\sigma}$ . En efecto:

$$R_{\rho\mu\nu\sigma} = R_{\nu\sigma\rho\mu} ; R_{\rho\mu\nu\sigma} = -R_{\mu\rho\nu\sigma} ; R_{\rho\mu\nu\sigma} = -R_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (2.4.4a)$$

$$K_{\rho\mu\nu\sigma} \neq K_{\nu\sigma\rho\mu} ; K_{\rho\mu\nu\sigma} \neq -K_{\mu\rho\nu\sigma} ; K_{\rho\mu\nu\sigma} = -K_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (2.4.4b)$$

Contrayendo 2 índices de  $R_{\rho\mu\nu\sigma}$  puede obtenerse un único tensor de rango 2, que es  $R_{\mu\nu}$ . Esto se debe a las propiedades (2.4.4a).

Para  $K_{\rho\mu\nu\sigma}$  otro es el caso, ya que tiene menos simetrías y, en principio, 3 tensores pueden ser obtenidos por contracción:

$$\begin{aligned}
 K_{\mu\nu} = K^\rho_{\mu\rho\nu} = & R_{\mu\nu} + (1/2)[\nabla_\mu Q_\nu - (n-1)\nabla_\nu Q_\mu - g_{\mu\nu}\nabla_\rho Q^\rho] + \\
 & + [(n-2)/4](Q_\mu Q_\nu - g_{\mu\nu}Q^\rho Q_\rho) \quad (2.4.5)
 \end{aligned}$$

$$K'_{\mu\nu} = K_{\mu}{}^\rho{}_\rho{}_\nu = R_{\mu\nu} - (1/2)[\nabla_\mu Q_\nu + (n-3)\nabla_\nu Q_\mu + g_{\mu\nu}\nabla_\rho Q^\rho] +$$

$$+ [(n-2)/4] (Q_\mu Q_\nu - g_{\mu\nu} Q^\rho Q_\rho) \quad (2.4.6)$$

$$K^*_{\mu\nu} \equiv K^\rho_{\rho\mu\nu} = (n/2) (\nabla_\mu Q_\nu - \nabla_\nu Q_\mu) \quad (2.4.7)$$

Sin embargo, estos 3 tensores no son independientes, ya que puede comprobarse que están relacionados por

$$K_{\mu\nu} = K'_{\mu\nu} + (2/n) K^*_{\mu\nu} \quad (2.4.8)$$

Es importante distinguir entre estos tensores pues, por ejemplo, al calcular el conmutador contraído de derivadas conformes de un vector de Weyl de peso 0 es  $K'_{\mu\nu}$  el que aparece:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) A^\mu = K'_{\mu\nu} A^\mu \quad (2.4.9)$$

Contrayendo ya sea  $K_{\mu\nu}$  o  $K'_{\mu\nu}$  ( $K^*_{\mu\nu}$  da 0 por contracción pues es antisimétrico) obtenemos, lo mismo en virtud de (2.4.8), el escalar de curvatura conforme  $K$ :

$$K = K^\mu_\mu = R - (n-1) (\nabla_\mu Q^\mu + [(n-2)/4] Q_\mu Q^\mu) \quad (2.4.10)$$

La curvatura conforme  $K$  es un escalar de Weyl de peso  $-1$ , es decir

$$\tilde{K} = \lambda^{-1} K \quad (2.4.11)$$

Los elementos ilustrados previamente pueden ser utilizados para construir ecuaciones de campo explícitamente invariantes conformes para los campos no-masivos en el espacio curvo. En el próximo capítulo lo haremos para el caso de los spines 0, 1/2 y 1, aunque la misma metodología puede ser extendida a spines superiores.

## CAPITULO 3

### ECUACIONES DE CAMPO

En este capítulo nos dedicaremos a mostrar cómo a partir de los elementos introducidos en el Capítulo 1 pueden ser obtenidas ecuaciones para los campos no-masivos en el espacio curvo, que presenten la invariancia conforme de manera explícita. Nos restringiremos a los casos usuales de los spines 0, 1/2 y 1, aunque queda claro que ecuaciones para spines más elevados pueden obtenerse de manera análoga. También trataremos temas íntimamente vinculados como productos internos en el espacio de soluciones de las ecuaciones de campo y condiciones de gauge.

#### 3.1. Campo Escalar.

Consideremos un campo no-masivo de spin 0, no cargado,  $\phi$ , cuya densidad lagrangiana en el espacio de Minkowski está dada por, [82]

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (3.1.1)$$

Para describir este campo en el espacio curvo, se utiliza la regla habitual de reemplazar las derivadas ordinarias  $\partial_\mu$  por derivadas covariantes  $\nabla_\mu$ . Si además, se admite un término de acoplamiento con la curvatura, debe incluirse un término proporcional al escalar de curvatura  $R$ . Puesto que deseamos una ecuación manifiestamente invariante conforme, deberemos utilizar la derivada conforme  $D_\mu$  y el escalar de curvatura conforme  $K$  introducidos en el Cap.2. Así, proponemos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (1/2) D_\mu \phi D^\mu \phi + (1/2) \xi K \phi^2 \quad (3.1.2)$$

en donde  $\xi$  es una constante sin dimensiones, llamada constante de acoplamiento, cuyo valor define el tipo de acoplamiento del campo con la curvatura (por ejemplo,  $\xi=0$  es el acoplamiento mínimo).

De acuerdo con las expresiones (2.1.19) y (2.4.11),  $\phi$  y  $K$  son escalares de Weyl de pesos  $-(n-2)/2$  y  $-1$  respectivamente. Entonces  $\mathcal{L}$ , dado por (3.1.2), resulta un escalar de Weyl de peso  $-n/2$ , como debe ser de acuerdo con (2.1.15).

La ecuación de campo que se obtiene a partir de la densidad lagrangiana (3.1.2), vía la ecuación de Euler-Lagrange, es:

$$D_{\mu}D^{\mu}\phi - \xi K\phi = 0 \quad (3.1.3)$$

Deberá notarse que, por construcción, esta ecuación es invariante conforme *para cualquier valor* de la constante de acoplamiento  $\xi$ .

Utilizando las expresiones de la derivada conforme en términos del campo auxiliar  $Q_{\mu}$ , se tienen que:

$$D_{\mu}D^{\mu}\phi = \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\phi - [(n-2)/4][\nabla_{\mu}Q^{\mu} + [(n-2)/4]Q_{\mu}Q^{\mu}]\phi \quad (3.1.4)$$

y usando, además, la expresión de  $K$  en términos de  $Q_{\mu}$ , dada por (2.4.10), la ecuación de campo (3.1.3) puede reescribirse como:

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\phi - \xi R\phi + [\xi(n-1) - (n-2)/4][\nabla_{\mu}Q^{\mu} + [(n-2)/4]Q_{\mu}Q^{\mu}]\phi = 0 \quad (3.1.5)$$

Como puede verse, en general, la ecuación resulta dependiente del campo auxiliar  $Q_{\mu}$ . Sin embargo, existe un valor de  $\xi$ , digamos  $\xi^*$ , que elimina tal dependencia:

$$\xi^* = (n-2)/4(n-1) \quad (3.1.6)$$

En tal caso, la ecuación de campo es, simplemente

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi - \xi^{*} R \phi = 0 \quad (3.1.7)$$

Este valor de la constante de acoplamiento (que para  $n=4$  es  $\xi^{*}=1/6$ ) es conocido como acoplamiento conforme, [67].

Para ortonormalizar las soluciones de la ecuación de campo hace falta disponer de un producto interno que actúe entre tales soluciones. En el espacio-tiempo plano tal producto es

$$\langle U, V \rangle = i \int (V \dot{U}^{*} - U^{*} \dot{V}) d^3 \vec{x} \quad (3.1.8)$$

puesto que  $U(x)$  y  $V(x)$  satisfacen la ecuación de campo, este producto resulta independiente del tiempo usado para realizar la integración, [82].

Para el caso curvo, las derivadas temporales deben reemplazarse por derivadas conformes:

$$\langle U, V \rangle = i \int_{\Sigma} (V D_{\mu} U^{*} - U^{*} D_{\mu} V) d\sigma^{\mu} \quad (3.1.9)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie de Cauchy sobre la cual se realiza la integración.

Este producto interno es, por construcción, un escalar de Weyl de peso 0.

Además, igual que en el caso plano, el cumplimiento de la ecuación de campo garantiza la  $\Sigma$ -independencia del producto interno. En efecto, aplicando  $D^{\mu}$  al integrando de (3.1.9) se tiene,

$$D^{\mu} (V D_{\mu} U^{*} - U^{*} D_{\mu} V) = V D^{\mu} D_{\mu} U^{*} - U^{*} D^{\mu} D_{\mu} V \quad (3.1.10)$$

y utilizando la ecuación de campo (3.1.3) se sigue,



$$D^\mu (V D_\mu U^* - U^* D_\mu V) = V \xi K U^* - U^* \xi K V = 0 \quad (3.1.11)$$

Pero el integrando de (3.1.9) es un escalar de Weyl de peso  $-(n-2)/2$ , y entonces, de acuerdo con la Ec. (2.2.9), y considerando (3.1.11), tenemos que,

$$D^\mu (V D_\mu U^* - U^* D_\mu V) = \nabla^\mu (V D_\mu U^* - U^* D_\mu V) = 0 \quad (3.1.12)$$

y entonces, la nulidad de la divergencia covariante del integrando asegura, por aplicación del teorema de Gauss como de costumbre, la invariancia de la integral por cambio de la superficie de integración.

Por otra parte, la observación del integrando de (3.1.9) muestra que es independiente de la conexión utilizada en  $D_\mu$ , siendo entonces:

$$\langle U, V \rangle = i \int (V \partial_\mu U^* - U^* \partial_\mu V) d\sigma^\mu \quad (3.1.13)$$

### 3.2. Campo del Neutrino.

En esta sección consideraremos el campo asociado a una partícula de spin  $1/2$ , masa nula y sin carga (neutrino), representado por un spinor de Dirac  $\Psi$ , el cual será también un campo de Weyl de cierto peso  $r$  a determinar.

Por simplicidad trabajaremos, en esta sección en  $n=4$ .

Introducimos las matrices de Dirac de  $4 \times 4$ , las cuales están definidas por la condición de satisfacer en todo punto del espacio-tiempo la siguiente relación de anticonmutación:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = -2g_{\mu\nu} I \quad (3.2.1)$$

donde  $I$  es la matriz unidad de  $4 \times 4$ . Desde esta ecuación se concluye inmediatamente que las matrices de Dirac deben ser, frente a transformaciones conformes, objetos de Weyl de peso  $1/2$ , es decir:

$$\tilde{\gamma}_\mu = \lambda^{1/2} \gamma_\mu \quad , \quad \tilde{\gamma}^\mu = \lambda^{-1/2} \gamma^\mu \quad (3.2.2)$$

Puesto que las matrices de Dirac están definidas por la propiedad algebraica (3.2.1), desde las  $\gamma_\mu$  es posible obtener otro grupo de matrices  $\tilde{\gamma}_\mu$  que cumplan la misma propiedad, usando una transformación de similaridad:

$$\tilde{\gamma}_\mu = S \gamma_\mu S^{-1} \quad (3.2.3)$$

siendo  $S$  una matriz no singular arbitraria de  $4 \times 4$ . La transformación (3.2.3) puede ser considerada como un cambio de base en el espacio de los spinores (cambio de base spinorial).

Bajo un cambio de base spinorial el spinor contravariante  $\Psi$  (spinor columna) se transforma como, [51]

$$\tilde{\Psi} = S \Psi \quad (3.2.4)$$

El adjunto de Dirac del spinor  $\Psi$ , denotado por  $\bar{\Psi}$ , es definido por

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \beta \quad (3.2.5)$$

donde  $^\dagger$  es una conjugación y transposición, es decir la adjunción, y  $\beta$  es la matriz que realiza el siguiente cambio de base spinorial:

$$-\gamma_\mu^\dagger = \beta \gamma_\mu \beta^{-1} \quad (3.2.6)$$

El spinor covariante  $\bar{\Psi}$  (spinor fila) se transforma, frente a un cambio de base spinorial como

$$\hat{\bar{\Psi}} = \bar{\Psi} S \quad (3.2.7)$$

En el espacio-tiempo plano, la densidad lagrangiana para el campo del neutrino está dada por

$$\mathcal{L} = (1/2) (\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi) \quad (3.2.8)$$

En el caso curvo, las derivadas ordinarias deben reemplazarse por derivadas covariantes, pero, por tratarse de spinores, se hace necesario la introducción de una conexión spinorial  $\sigma_\mu$ , además de la conexión Riemanniana.

Así, las derivadas covariantes del campo spinorial  $\Psi$  son:

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \sigma_\mu \Psi \quad (3.2.9a)$$

$$\nabla_\mu \bar{\Psi} = \partial_\mu \bar{\Psi} - \sigma_\mu \bar{\Psi} \quad (3.2.9b)$$

Como paso previo, antes de la introducción de la derivada conforme spinorial, podemos postular como densidad lagrangiana para el campo del neutrino en el espacio curvo, a la expresión (3.2.8) con las derivadas ordinarias reemplazadas por las derivadas covariantes spinoriales (3.2.9):

$$\mathcal{L} = (1/2) (\nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi) \quad (3.2.10)$$

Las ecuaciones de campo para los campos  $\Psi$  y  $\bar{\Psi}$  serán:

$$\nabla_{\mu} (\partial \mathcal{L} / \partial \nabla_{\mu} \Psi) - \partial \mathcal{L} / \partial \Psi = 0 \quad (3.2.11a)$$

$$\nabla_{\mu} (\partial \mathcal{L} / \partial \nabla_{\mu} \bar{\Psi}) - \partial \mathcal{L} / \partial \bar{\Psi} = 0 \quad (3.2.11b)$$

Es necesario tener en consideración el significado de las derivadas que aparecen en estas últimas ecuaciones puesto que  $\Psi$  es un spinor columna y  $\bar{\Psi}$  es un spinor fila. Así  $\partial \mathcal{L} / \partial \Psi$  es un spinor fila, etc.

Las variables libres  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$ ,  $\nabla_{\mu} \Psi$ , y  $\nabla_{\mu} \bar{\Psi}$  pueden ser relacionadas con sus transformadas conformes, obteniendo

$$\tilde{\Psi} = \lambda^r \Psi$$

$$(\bar{\Psi})^{\sim} = \lambda^r \bar{\Psi}$$

(3.2.12)

$$(\nabla_{\mu} \Psi)^{\sim} = \lambda^r [ \nabla_{\mu} \Psi + (r \nabla_{\mu} \ln \lambda + \Lambda_{\mu}) \Psi ]$$

$$(\nabla_{\mu} \bar{\Psi})^{\sim} = \lambda^r [ \nabla_{\mu} \bar{\Psi} + \bar{\Psi} (r \nabla_{\mu} \ln \lambda - \Lambda_{\mu}) ]$$

donde  $\Lambda_{\mu}$  es la variación conforme de la conexión spinorial, es decir

$$\Lambda_{\mu} = \tilde{\sigma}_{\mu} - \sigma_{\mu} \quad (3.2.13)$$

Para preservar la propiedad

$$\hat{\nabla}_{\mu} \hat{\Psi} = S \nabla_{\mu} \Psi \quad (3.2.14)$$

es fácil demostrar, usando (3.2.4) y (3.2.9a), que la conexión spinorial  $\sigma_{\mu}$  debe transformarse, frente a un cambio de base spinorial, como

$$\hat{\sigma}_{\mu} = S \sigma_{\mu} S^{-1} + S \lambda_{\mu} S^{-1} \quad (3.2.15)$$

Usando las relaciones (3.2.12), obtenemos, a partir de (3.2.10) la ley de

transformación de la densidad lagrangiana:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \lambda^{2r+3/2} [\mathcal{L} - (1/2)\bar{\Psi}(\Lambda_{\mu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\Lambda_{\mu})\Psi] \quad (3.2.16)$$

Entonces, puesto que  $\mathcal{L}$  debe ser un escalar de Weyl de peso -2, se sigue

$$r = -3/4 \quad (3.2.17)$$

$$(\Lambda_{\mu}, \gamma^{\mu}) = 0 \quad (3.2.18)$$

donde el símbolo  $(,)$  indica el anticonmutador

La ecuación de campo que resulta para  $\Psi$  es

$$\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \Psi + (1/2)(\nabla_{\mu} \gamma^{\mu}) \Psi = 0 \quad (3.2.19)$$

Sin embargo, puesto que la conexión spinorial no está determinada unívocamente, es útil imponer la condición de que las  $\gamma^{\mu}$  sean "transparentes" a la derivación covariante:

$$\nabla_{\mu} \gamma_{\nu} = 0 \quad (3.2.20)$$

Con la conexión spinorial determinada cumpliendo (3.2.20), la ecuación de campo es, simplemente:

$$\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \Psi = 0 \quad (3.2.21)$$

Por otra parte, para que la condición (3.2.20) sea útil debe tener consistencia conforme, es decir que debe ser una ecuación invariante frente a transformaciones conformes. Puesto que desarrollando dicha ecuación se llega a:

$$\nabla_{\mu} \xi_{\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \sigma_{\mu} \xi_{\nu} - \xi_{\nu} \sigma_{\mu} = 0 \quad (3.2.22)$$

donde el símbolo ; indica la derivación covariante de  $\xi_{\nu}$  "como si fuera sólo un vector", arribamos a la siguiente ley de transformación:

$$(\nabla_{\mu} \xi_{\nu})^{\sim} = \lambda^{1/2} [\nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \Lambda_{\mu} \xi_{\nu} - \xi_{\nu} \Lambda_{\mu} - (1/2)(g_{\nu\rho} \xi_{\mu} - g_{\mu\nu} \xi_{\rho}) \nabla^{\rho} \ln \lambda] \quad (3.2.23)$$

y entonces queda claro que, para que la condición (3.2.20) conserve su forma bajo transformaciones conformes, es necesario que:

$$[\Lambda_{\mu}, \xi_{\nu}] = (1/2)(g_{\nu\rho} \xi_{\mu} - g_{\mu\nu} \xi_{\rho}) \nabla^{\rho} \ln \lambda \quad (3.2.24)$$

Así, la conexión spinorial debe ser tal que su variación frente a transformaciones conformes satisfaga las Ec. (3.2.18) y (3.2.24).

En el Apéndice I probamos que estas dos ecuaciones determinan unívocamente a  $\Lambda_{\mu}$ , resultando:

$$\Lambda_{\mu} = (1/8) [\xi_{\nu}, \xi_{\mu}] \nabla^{\nu} \ln \lambda \quad (3.2.25)$$

A partir de un trabajo de Loos [83], se sabe que la forma más general de la conexión spinorial  $\sigma_{\mu}$  que verifica la condición (3.2.20) es

$$\sigma_{\mu} = (1/24)(6I - 7\mathbb{R} + 8\mathbb{R}^2 - 4\mathbb{R}^3) (\xi_{\nu;\mu} \xi^{\nu}) + v_{\mu} I \quad (3.2.26)$$

donde  $v_{\mu}$  es un vector arbitrario y  $\mathbb{R}$  es el siguiente operador lineal que actúa sobre las matrices  $\mathcal{N}$  de  $4 \times 4$ :

$$\mathbb{R} \mathcal{N} = (1/4) \xi_{\mu} \mathcal{N} \xi^{\mu} \quad (3.2.27)$$

Ahora, teniendo en cuenta las propiedades de transformación de las magnitudes que participan en (3.2.26) obtenemos:

$$\tilde{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + (1/8) [\tilde{\chi}_\nu, \tilde{\chi}_\mu] \nabla^\nu \ln \lambda + (\tilde{v}_\mu - v_\mu) I \quad (3.2.28)$$

Entonces, comparando esta última con (3.2.25) se concluye que el vector arbitrario  $v_\mu$  debe ser invariante conforme:

$$\tilde{v}_\mu = v_\mu \quad (3.2.29)$$

Quizás haya llamado la atención la introducción de condiciones de consistencia conforme sobre la conexión spinorial. En efecto, la conexión spinorial  $\sigma_\mu$ , tal como ha sido presentada, no posee de manera explícita las propiedades adecuadas a fin de preservar la invariancia conforme. Más precisamente, su ley de transformación está dada por la Ec. (3.2.28). Está claro, por otra parte, que el tratamiento sería mucho más natural si trabajáramos con una conexión spinorial conforme  $\tilde{\Gamma}_\mu$ , es decir una conexión con la propiedad:

$$\tilde{\Upsilon}_\mu = \Gamma_\mu \quad (3.2.30)$$

A continuación construiremos una conexión con la propiedad (3.2.30), a fin de mostrar que un formalismo *explícitamente* conforme puede ser utilizado en este caso. Sin embargo, como veremos, los resultados serán los mismos que los ya descritos.

La simple inspección de la Ec. (3.2.28) nos sugiere la definición de la siguiente nueva conexión spinorial:

$$\Gamma_\mu = \sigma_\mu - (1/4) \sigma_{\mu\nu} Q^\nu \quad (3.2.31)$$

donde  $Q^\nu$  es el vector introducido en la sección (2.2) y  $\sigma_{\mu\nu}$  es simplemente la mitad del conmutador de las matrices de Dirac:

$$\sigma_{\mu\nu} = (1/2) [\gamma_\nu, \gamma_\mu] \quad (3.2.32)$$

En efecto, la conexión  $\Gamma_\mu$  dada por (3.2.31) verifica (3.2.30).

Ahora, es posible definir la derivada conforme,  ${}_sD_\mu$ , de cantidades spinoriales. Por ejemplo, para el campo  $\Psi$ :

$${}_sD_\mu \Psi = D_\mu \Psi + \Gamma_\mu \Psi \quad (3.2.33)$$

donde  $D_\mu \Psi$  indica la derivada conforme de  $\Psi$  "como si sólo fuese un escalar". Es interesante calcular la derivada conforme spinorial de las matrices de Dirac:

$${}_sD_\mu \gamma_\nu = {}_sD_\mu \gamma_\nu + [\Gamma_\mu, \gamma_\nu] = \nabla_\mu \gamma_\nu - (1/4)([\sigma_{\mu\rho}, \gamma_\nu] - 2g_{\mu\nu} \gamma_\rho + 2g_{\rho\nu} \gamma_\mu) \quad (3.2.34)$$

pero, teniendo en consideración la Ec. (3.2.20) y la relación algebraica:

$$[\sigma_{\mu\rho}, \gamma_\nu] = 2(g_{\mu\nu} \gamma_\rho - g_{\rho\nu} \gamma_\mu) \quad (3.2.35)$$

llegamos a que

$${}_sD_\mu \gamma_\nu = 0 \quad (3.2.36)$$

De modo que la modificación de la derivada spinorial, para convertirla en conforme, sigue respetando la propiedad de "transparencia" de las  $\gamma_\mu$ .



La densidad Lagrangiana construida con derivadas conformes será:

$$\mathcal{L} = (1/2) [({}_5D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\mu ({}_5D_\mu \Psi)] \quad (3.2.37)$$

la cual, por la manera como ha sido construida, es un objeto de Weyl.

A primera vista, pareciera que la densidad Lagrangiana (3.2.37) depende del campo vectorial auxiliar  $Q_\mu$ , via la derivada conforme. Sin embargo, un breve cálculo muestra que esto no es así. En efecto:

$$\gamma^\mu ({}_5D_\mu \Psi) = \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (1/4) \gamma^\mu (3g_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}) Q^\nu \quad (3.2.38)$$

$$({}_5D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu = (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu - (1/4) (3g_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}) \gamma^\mu Q^\nu$$

y es inmediato probar que se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu (3g_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}) &= 0 \\ (3g_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}) \gamma^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Entonces, aunque la derivación conforme spinorial no coincide con la derivación spinorial ordinaria, sí lo hacen las siguientes expresiones, que son las que finalmente aparecen en la acción:

$$\gamma^\mu ({}_5D_\mu \Psi) = \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi \quad (3.2.40)$$

$$({}_5D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu = (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu$$

Así, para el campo spinorial, la introducción de la derivada conforme no introduce modificaciones en la acción (y entonces tampoco en las ecuaciones de campo), es simplemente una herramienta para poner de

manifiesto la invariancia conforme del formalismo.

Para finalizar con este § introduciremos, al igual que para el campo escalar, un producto interno para ortonormalizar las soluciones de las ecuaciones de campo:

$$\langle U, V \rangle = -i \int_{\Sigma} \bar{U} \gamma_{\mu} V d\sigma_{\mu} \quad (3.2.41)$$

La independencia de esta integración respecto de la superficie de Cauchy  $\Sigma$  se sigue en virtud de la nulidad de la divergencia covariante del integrando, lo cual se prueba usando las ecuaciones de campo. En cuanto a la invariancia conforme de este producto interno se sigue de las propiedades de transformación (2.1.7), (3.2.2), (3.2.12) y (3.2.17).

### 3.3. El Campo Electromagnético y la Cuantificación Canónica.

Ahora dedicaremos nuestra atención al estudio del campo electromagnético en espacio curvo, el cual será considerado como un campo no masivo de spin 1. La aparición de modos de polarización no físicos, igual que ocurre en el espacio de Minkowski, dará lugar a diferentes mecanismos para eliminarlos.

Ya en el espacio-tiempo plano aparecen inconsistencias al intentar la cuantificación del campo electromagnético, lo cual da lugar a la implementación de mecanismos específicos (a través de las condiciones de gauge) para evitarlas. Veamos cuáles son.

La densidad Lagrangiana clásica para el campo electromagnético en el espacio de Minkowski de 4 dimensiones está dada por:

$$\mathcal{L} = -(1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.3.1)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es el tensor campo electromagnético definido en términos del 4-potencial  $A_\mu$  como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.3.2)$$

Cuando se intenta la cuantificación,  $A_\mu$  debe ser considerado como un operador y también su momento conjugado  $\pi^\mu$  definido como

$$\pi^\mu = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{A}_\mu \quad (3.3.3)$$

donde el punto indica la derivada con respecto al tiempo. La cuantificación canónica requiere que  $A_\mu$  y  $\pi_\mu$  satisfagan las reglas canónicas de conmutación a tiempo constante, [82]:

$$[ A_\mu(t, \vec{x}); \pi^\nu(t, \vec{y}) ] = i \delta^\nu_\mu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.3.4)$$

Sin embargo, las relaciones (3.3.4) no son compatibles con (3.3.1) pues se ve inmediatamente que

$$\pi^0 = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{A}_0 = F^{00} = 0 \quad (3.3.5)$$

Entonces, calculando el conmutador para  $A_0$  y  $\pi_0$  tenemos, de acuerdo con (3.3.4):

$$0 = i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.3.6)$$

lo cual es absurdo. Resulta entonces, que si deseamos cuantificar usando la densidad Lagrangiana (3.3.1) debe usarse un procedimiento no canónico de cuantificación. Por el contrario, si se quiere utilizar el procedimiento

canónico de cuantificación, entonces debe modificarse (3.3.1). Por lo general, este último caso consiste en la introducción de condiciones de gauge particulares, de las cuales describiremos dos que nos interesan particularmente: (a) la cuantificación en el gauge temporal, y (b) la cuantificación en el gauge de Gupta-Bleuler.

(a) La cuantificación en el gauge temporal, [84], consiste en eliminar  $A_0$  como grado de libertad en  $\mathcal{L}$ . De esta manera, desaparece la inconsistencia (3.3.6) y sólo quedan 3 grados de libertad. Este método tiene la ventaja de que los fotones temporales (no físicos) asociados con la componente  $A_0$  son eliminados a priori por el formalismo. Sin embargo, los fotones longitudinales (no físicos) necesitan ser eliminados con algún artificio adicional.

(b) El método de Gupta-Bleuler, ([85], [86] y también libros de texto como [87], [88], [89] y el más moderno [90]), consiste en modificar la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -(1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\alpha/2)(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.3.7)$$

donde  $\alpha$  es una constante adimensional  $\neq 0$  (ya que con  $\alpha=0$  se recupera (3.3.1)). Ahora, mediante (3.3.5) obtenemos

$$\pi^0 = -\alpha \partial_\mu A^\mu \neq 0 \quad (3.3.8)$$

Así, desaparece la inconsistencia (3.3.6). Por otra parte, los 4 grados de libertad (de los cuales sólo 2 son físicos) permanecen en la densidad Lagrangiana. Para eliminarlos se introduce la siguiente condición de gauge sobre los estados físicos  $|\text{Fis}\rangle$ :

$$(\partial_\mu A^\mu)^- |\text{Fis}\rangle = 0 \quad (3.3.9)$$

donde  $(\partial_\mu A^\mu)^-$  es la parte de frecuencias negativas del operador  $\partial_\mu A^\mu$ .

A partir de (3.3.9) puede demostrarse, [90], que aunque los fotones temporal y longitudinal siguen estando presentes en el formalismo, el valor de expectación para el número de tales fotones en un estado físico es cero.

Para generalizar la teoría anteriormente descrita desde el espacio de Minkowski al espacio curvo, las derivadas ordinarias se reemplazarán, como de costumbre por derivadas covariantes. Sin embargo, puesto que también estamos interesados en preservar la invariancia conforme, las derivadas a utilizar deberán ser derivadas conformes. A tal efecto, tengamos en cuenta que siguiendo la expresión general (2.1.19), el campo de Weyl  $A_\mu$  es un campo de Weyl de peso  $r = (4-n)/4$ . Entonces con la derivada covariante ordinaria la ley de transformación de la densidad Lagrangiana (3.3.1) es (después de un cálculo tedioso pero simple):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = & \lambda^{-n/2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda^{-n/2} (4-n) [ F_{\mu\nu} A^\nu \nabla^\mu \ln \lambda + \\ & + (1/8)(4-n) A_\mu A^\mu \nabla^\nu \ln \lambda \nabla_\nu \ln \lambda - (1/8)(4-n) (A^\mu \nabla_\mu \ln \lambda)^2 ] \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

De modo que la densidad Lagrangiana así construida sólo tendría el comportamiento conforme apropiado, dado por (2.1.15), para el caso de que la dimensión fuese  $n = 4$ . Así la introducción de derivadas conformes en el Lagrangiano es innecesaria si solamente nos interesa el caso 4-dimensional. Si por el contrario, deseamos un Lagrangiano conforme en cualquier dimensión, podemos definir el tensor conforme de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  como:

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \quad (3.3.11)$$

donde  $D_\mu$  es la derivada conforme asociada al campo auxiliar  $Q_\mu$ . La relación entre este tensor  $F_{\mu\nu}$  y el tensor campo electromagnético ordinario  $F_{\mu\nu}$  es

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + [(4-n)/4](Q_\mu A_\nu - Q_\nu A_\mu) \quad (3.3.12)$$

Introducimos la densidad Lagrangiana conforme  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{L} = -(1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.3.13)$$

la cual, después de desarrollarla queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -(1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (1/4)(4-n)[F_{\mu\nu} A^\nu Q^\mu + \\ & + (1/8)(4-n)(A_\mu A^\mu Q^\nu Q_\nu - (Q^\mu A_\mu)^2] \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

y así, vemos que el Lagrangiano es en general dependiente del campo auxiliar  $Q_\mu$ , salvo para  $n = 4$ , en cuyo caso se recupera la densidad Lagrangiana tradicional. Por supuesto, esta misma conclusión es válida para las ecuaciones de campo que se desprenden de la densidad Lagrangiana (3.3.14). En lo que sigue consideraremos para el campo electromagnético que  $n = 4$ , salvo que se explicita lo contrario.

### 3.4. El Método de Gupta-Bleuler en el Espacio-Tiempo Curvo.

Como hemos visto, el método de Gupta-Bleuler para cancelar la contradicción que aparece a consecuencia de utilizar la cuantificación canónica, consiste en modificar la densidad Lagrangiana original agregándole un término extra que hace que  $\pi_0$ , el momento canónicamente conjugado a  $A_0$ , sea no nulo. A primera vista, pareciera que la manera más natural de generalizar la densidad Lagrangiana (3.3.7) es reemplazar la

divergencia  $\partial_\mu A^\mu$  por la divergencia covariante  $\nabla_\mu A^\mu$ . Sin embargo, la aparición de este término rompe la invariancia conforme, pues en tal caso  $\mathcal{L}$  deja de ser un escalar de Weyl. En efecto, a partir de la expresión (2.2.1) debería ser claro que  $\nabla_\mu A^\mu$  no se transforma como un objeto de Weyl; su ley de transformación es:

$$(\nabla_\mu A^\mu)^\sim = \lambda^{-1}(\nabla_\mu A^\mu + A^\mu \nabla_\mu \ln \lambda) \quad (3.4.1)$$

Entonces, la magnitud más apropiada para incluir en  $\mathcal{L}$  no es  $\nabla_\mu A^\mu$  sino  $D_\mu A^\mu$  que es la divergencia conforme, que se transforma como un escalar de Weyl de peso -1 (así su cuadrado se transforma como un escalar de Weyl de peso -2 como es requerido para no romper la invariancia conforme). De este modo, la densidad Lagrangiana de Gupta-Bleuler que conserva la invariancia conforme es:

$$\mathcal{L} = -(1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\alpha/2)(D_\mu A^\mu)^2 \quad (3.4.2)$$

En cuanto a las derivadas que aparecen en  $F_{\mu\nu}$ , la diferencia es irrelevante, pues en 4 dimensiones coinciden las derivadas ordinaria, covariante y conforme conduciendo al mismo primer término de la acción (3.4.2).

Por supuesto, la condición sobre los estados físicos (3.3.9) debe ser también generalizada covariantemente y conservando la invariancia conforme. En base a la discusión anterior, tal generalización es:

$$(D_\mu A^\mu)^\sim |Fis\rangle = 0 \quad (3.4.3)$$

No continuaremos el estudio de este formalismo en esta tesis y nos dedicaremos, en cambio al caso del gauge temporal.

### 3.5. El Gauge Temporal en el Espacio-Tiempo Curvo.

Como hemos visto, el modo en que el método del gauge temporal resuelve la inconsistencia en las relaciones canónicas de conmutación, es la eliminación de  $A_0$  como grado de libertad del Lagrangiano.

Para transcribir esta prescripción al espacio-tiempo curvo en un lenguaje covariante, es necesario tener en cuenta que  $A_0$  es la componente temporal del vector  $A_\mu$ . Por lo tanto, la anulación de  $A_0$  es una condición que ocurre en una carta determinada, pero que es violada en otra; vale decir que se trata de una condición no covariante. Por otra parte, el concepto de tiempo está definido, para cada fluido de observadores por el campo de vectores unitarios tangentes a las líneas de fluido definidas por las trayectorias espacio-temporales de dichos observadores. Estos vectores  $U_\mu$  son, como ha sido señalado en §2.2, vectores de Weyl (de peso 1/2), y entonces podemos plantear la condición de gauge temporal de una manera que conserva la invariancia conforme:

$$U^\mu A_\mu = 0 \quad (3.5.1)$$

En una carta que utilice como coordenadas espaciales a las que parametrizan a las líneas de fluido de observadores y como coordenada temporal a una magnitud que es constante sobre cada hipersuperficie ortogonal a dichas líneas (carta adaptada), el vector  $U^\mu$  es simplemente  $U^\mu = (1,0,0,0)$ , y la condición de gauge temporal es, en esa carta:

$$A_0 = 0 \quad (3.5.2)$$

En cuanto a la densidad Lagrangiana, sigue siendo (3.3.1) donde los índices son subidos y bajados con el correspondiente tensor métrico de la variedad. Las derivadas que aparecen en  $F_{\mu\nu}$  son derivadas ordinarias, pero



debe tenerse presente que, si trabajamos en una carta adaptada al fluido de observadores, sólo 3 variables dinámicas aparecen:  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Así, mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las siguientes 3 ecuaciones de campo:

$$\nabla_{\mu} F^{\mu k} = 0 \quad (3.5.3)$$

La cuarta ecuación, que es la Ley de Gauss  $\nabla_{\mu} F^{\mu 0} = 0$ , no se obtiene como ecuación de campo en este formalismo, y debe ser impuesta *a posteriori* mediante un mecanismo especial.

Las soluciones de (3.5.3) deben ser ortonormalizadas usando un adecuado producto interno, invariante frente a transformaciones conformes e independiente de la superficie de integración. En la Ref. [73] probamos que estos requerimientos determinan el producto interno, a menos de un factor irrelevante, como

$$\langle f^{\mu}, g_{\mu} \rangle = -i \int_{\Sigma} (g^{\mu} D_{\nu} f_{\mu}^{*} - f_{\mu}^{*} D_{\nu} g^{\mu} - g_{\nu} D^{\mu} f_{\mu}^{*} + f_{\nu}^{*} D^{\mu} g_{\mu}) d\sigma^{\nu} \quad (3.5.4)$$

donde  $D_{\mu}$  es la derivada conforme.

El formalismo en el gauge temporal será desarrollado con mayor amplitud en el Cap. 7.

## CAPITULO 4

### EL CONCEPTO DE PARTICULA EN EL ESPACIO CURVO

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) en el espacio de Minkowski toma como base a una teoría de campos ampliamente corroborada por la experiencia (el modelo standard) y generaliza su formalismo para describir campos cuánticos de diferentes spines. Análogamente, la TCC en Espacio-Tiempo Curvo (TCCETC) es un intento de generalizar la TCC en el espacio de Minkowski para describir el comportamiento de campos cuánticos en presencia de gravitación.

Puesto que todavía no disponemos de una teoría cuántica satisfactoria de la gravedad, la TCCETC considera a la gravitación como un campo clásico descrito por la Relatividad General que provee la geometría espacio-temporal en la cual evolucionan los otros campos cuantificados (teoría semiclásica).

Los valores típicos de longitudes y tiempos a los cuales la gravedad cuántica empezaría a tener relevancia física están dados por la longitud de Planck  $L_p = (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}$  cm y el tiempo de Planck  $T_p = (G\hbar/c^5)^{1/2} = 5.4 \times 10^{-44}$  seg y, dada la extrema pequeñez de estos valores, queda una amplia zona de acción para una teoría semiclásica.

Uno de los pilares en los que se apoya la TCC en el espacio de Minkowski es el de operadores de creación y de aniquilación de partículas, y éstos no admiten una generalización unívoca en el caso de un espacio-tiempo arbitrario.

#### 4.1. Soluciones de Frecuencia Positiva y Negativa en el Espacio de Minkowski.

Por razones de simplicidad consideremos el caso de un campo escalar  $\phi(x)$  en un espacio de Minkowski de dimensión  $n$ , el cual obedece a la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0 \quad (4.1.1)$$

donde  $m$  es la masa de los cuantos de campo y  $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , siendo  $\eta^{\mu\nu}$  el tensor métrico de Minkowski.

Puesto que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, el espacio vectorial de soluciones de (4.1.1) tiene dimensión 2. Una base de soluciones está dada por las familiares ondas planas

$$u_k(x) = e^{-i\omega t + i k x} \quad \text{y su complejo conjugado} \quad (4.1.2)$$

donde  $\omega \equiv +(k^2 + m^2)^{1/2}$ , siendo  $k \equiv |k|$  donde  $k$  es un vector en  $n-1$  dimensiones.

Los modos (4.1.2) tienen la propiedad de ser autofunciones del operador  $\partial/\partial t$ :

$$(\partial/\partial t) u_k(x) = -i \omega u_k(x) \quad (4.1.3a)$$

$$(\partial/\partial t) u_k^*(x) = i \omega u_k^*(x) \quad (4.1.3b)$$

Los modos  $u_k$  y  $u_k^*$  son llamados modos de frecuencias positiva y negativa, respectivamente.

Aunque a partir de la base  $\{u_k, u_k^*\}$  se puede construir otras bases posibles para el espacio de soluciones de (4.1.1), las propiedades (4.1.3) hacen a aquella privilegiada, ya que aparece asociada de una manera natural a la

coordenada temporal. El hecho de que exista una base privilegiada, respecto del tiempo, es una consecuencia de las propiedades de simetría del espacio de Minkowski: la invariancia de esta geometría frente a desplazamientos temporales.

#### 4.2. Transformaciones de Bogolubov.

Consideremos un campo escalar  $\phi(x)$  que satisface a la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo:

$$[\square + m^2 + \xi R(x)] \phi(x) = 0 \quad (4.2.1)$$

donde  $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ ,  $m$  es la masa de los cuantos de campo,  $R(x)$  es el escalar de curvatura y  $\xi$  es la constante de acoplamiento del campo con la curvatura.

Igual que en el espacio de Minkowski, podemos encontrar una base  $(u_k, u_k^*)$  para el espacio vectorial de soluciones de la Ec. (4.2.1) y hacerla ortonormal en el producto interno (3.1.10):

$$\langle u_k, u_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \langle u_k^*, u_j^* \rangle = -\delta_{kj}, \quad \langle u_k, u_j^* \rangle = 0 \quad (4.2.2)$$

donde el índice de  $u_k$  representa todas las cantidades necesarias para especificar los modos.

Cuando se cuantifica el campo,  $\phi(x)$  es desarrollado en la base  $(u_k, u_k^*)$ , usando como coeficientes operadores de aniquilación ( $a_k$ ) y de creación ( $a_k^\dagger$ ):

$$\phi(x) = \sum_k [ a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x) ] \quad (4.2.3)$$

y son requeridas para los operadores  $a_k$  y  $a_k^\dagger$  las reglas de conmutación

usuales:

$$[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}, \quad [a_k, a_j] = [a_k^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (4.2.4)$$

El operador número de partículas en el modo  $k$  está dado por:

$$N_k = a_k^\dagger a_k \quad (4.2.5)$$

Como de costumbre, el espacio de Fock puede ser construido a partir del estado de vacío  $|0\rangle$  por aplicación de los operadores de creación. El estado de vacío cumple la propiedad de ser aniquilado por todos los operadores  $a_k$

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \forall k \quad (4.2.6)$$

En el espacio de Minkowski, se dispone de un criterio para elegir una base de soluciones privilegiada (las ondas planas) de la ecuación de campo, entre las infinitas posibles; también es posible privilegiar una base en espacios-tiempos que posean alguna simetría particular (concretamente, que tengan algún vector de Killing temporal). Sin embargo, en un espacio-tiempo arbitrario, no existen, en principio, criterios para privilegiar alguna base respecto de otra, y entonces, en principio, cualquier base es apropiada para desarrollar el campo. El hecho relevante es que el estado de vacío *depende* de la elección de esa base, como veremos a continuación.

Consideremos otra base ortonormal del espacio de soluciones de la ecuación de campo,  $(\bar{u}_k, \bar{u}_k^*)$ :

$$\langle \bar{u}_k, \bar{u}_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \langle \bar{u}_k^*, \bar{u}_j^* \rangle = -\delta_{kj}, \quad \langle \bar{u}_k, \bar{u}_j^* \rangle = 0 \quad (4.2.7)$$

En esta base, el campo se desarrolla como:

$$\phi(x) = \sum_k [\bar{a}_k \bar{u}_k(x) + \bar{a}_k^\dagger \bar{u}_k^*(x)] \quad (4.2.8)$$

donde los operadores  $\bar{a}_k^\dagger$  y  $\bar{a}_k$  verifican relaciones de conmutación análogas a las (4.2.4). No hay por qué suponer que el estado de vacío  $|\bar{0}\rangle$  asociado con la nueva base sea equivalente al asociado con la base anterior. El nuevo estado de vacío cumplirá ser aniquilado por todos los operadores  $\bar{a}_k$

$$\bar{a}_k |\bar{0}\rangle = 0, \quad \forall k \quad (4.2.9)$$

El operador número de partículas en el modo  $k$  asociado con la nueva base será:

$$\bar{N}_k = \bar{a}_k^\dagger \bar{a}_k \quad (4.2.10)$$

Puesto que ambas bases se encuentran relacionadas por una transformación lineal, podemos escribir:

$$\bar{u}_k = \sum_j (\alpha_{kj} u_j + \beta_{kj} u_j^*) \quad (4.2.11)$$

donde los coeficientes  $\alpha_{kj}$  y  $\beta_{kj}$  son conocidos como coeficientes de Bogolubov y la transformación (4.2.11) es llamada transformación de Bogolubov, [91]. Los coeficientes de Bogolubov no son arbitrarios sino que deben conservar la ortonormalidad de la base. Bajo esta condición es fácil probar que, [67]:

$$\sum_m (\alpha_{km} \alpha_{jm}^* - \beta_{km} \beta_{jm}^*) = \delta_{kj} \quad (4.2.12)$$

$$\sum_m (\alpha_{km} \beta_{jm} - \beta_{km} \alpha_{jm}) = 0 \quad (4.2.13)$$

Igualando los desarrollos (4.2.3) y (4.2.8) y utilizando (4.2.11), podemos obtener las relaciones entre los operadores de creación y aniquilación asociados con ambas bases:

$$a_k = \sum_j (\alpha_{jk} \bar{a}_j + \beta_{jk}^* \bar{a}_j^\dagger) \quad (4.2.14)$$

o bien sus inversas:

$$\bar{a}_k = \sum_j (\alpha_{kj}^* a_j + \beta_{kj}^* a_j^\dagger) \quad (4.2.15)$$

Claramente, el valor de expectación del operador número de partículas en el modo  $k$ ,  $N_k$ , en el estado de vacío  $|0\rangle$  es 0. Calculemos ahora el valor de expectación del operador  $N_k$  en el estado  $|\bar{0}\rangle$ , haciendo uso de (4.2.14):

$$\begin{aligned} \langle \bar{0} | N_k | \bar{0} \rangle &= \langle \bar{0} | a_k^\dagger a_k | \bar{0} \rangle = \sum_{j,m} \alpha_{jk}^* \alpha_{mk} \langle \bar{0} | \bar{a}_j^\dagger \bar{a}_m | \bar{0} \rangle + \\ &+ \sum_{j,m} \alpha_{jk}^* \beta_{mk}^* \langle \bar{0} | \bar{a}_j^\dagger \bar{a}_m^\dagger | \bar{0} \rangle + \sum_{j,m} \beta_{jk} \alpha_{mk} \langle \bar{0} | \bar{a}_j \bar{a}_m | \bar{0} \rangle + \\ &+ \sum_{j,m} \beta_{jk} \beta_{mk}^* \langle \bar{0} | \bar{a}_j \bar{a}_m^\dagger | \bar{0} \rangle \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

De las 4 sumatorias que aparecen en el segundo miembro de (4.2.16), las 3 primeras son nulas en virtud de la propiedad (4.2.9). Sólo la cuarta sumatoria es no nula, quedando entonces

$$\langle \bar{0} | N_k | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{jk}|^2 \quad (4.2.17)$$

La relación (4.2.17) significa que el vacío  $|\bar{0}\rangle$  asociado a los modos  $\bar{u}_k$  contienen  $\sum_j |\beta_{jk}|^2$  partículas en el sentido de los modos  $u_k$ .

Por supuesto, no toda transformación de Bogolubov altera el espacio de Fock. Esto último ocurre siempre que sea  $\beta_{jk} \neq 0$ .

### 4.3. Creación de Partículas a partir de la Curvatura.

Como hemos visto en la sección anterior, diferentes bases de soluciones de la ecuación de campo tienen asociados estados de vacío que son, en general, en un espacio-tiempo curvo arbitrario, no equivalentes. Aparece entonces el problema de determinar cuál es el vacío "físico".

Para lograr una clara comprensión del problema, podemos tener en cuenta dos posturas:

a) La noción de vacío sólo puede ser definida en aquellos casos en los cuales existe alguna simetría o cuando hay regiones "in" y "out", y no en el caso general. Claramente, se trata del punto de vista más conservador. Se sabe, de la teoría de campos en el espacio de Minkowski, que el vacío no tiene sentido en todas las circunstancias: no podemos definir vacío en una teoría con interacciones mientras ésta está presente. Análogamente, no se puede definir vacío para campos interactuantes con la gravedad, si la



gravedad (es decir, la geometría) no tiene algunas simetrías particulares o regiones "in" y "out". Así, el concepto de partícula es de utilidad muy restringida en el espacio-tiempo curvo [115].

b) El concepto de vacío puede ser definido para una geometría general en la aproximación semiclásica a la gravedad cuántica. Por supuesto, ésta es la postura menos conservadora. En realidad, estamos trabajando con un campo en interacción con la gravedad, pero las ecuaciones de campo se mantienen lineales (recordemos que, usualmente, la teoría de campos en interacción no tiene ecuaciones de campo lineales). En consecuencia, existen bases de soluciones y, alguna base particular puede relacionarse con la noción de vacío.

En esta tesis, desarrollaremos el punto de vista (b) usando el criterio de diagonalización del Hamiltoniano, con la peculiaridad de que la noción de vacío estará asociada con el fluido de observadores considerado. Por otra parte, dado un determinado fluido de observadores, el vacío podrá ser diferente a distintos tiempos, dando origen al fenómeno de creación de partículas a lo largo del tiempo. Este tratamiento, para el campo escalar, puede ser encontrado en la Ref. [72] y en el Cap. 6 de esta tesis, mientras que para el caso del campo electromagnético pueden verse las Ref. [92] y [93] y el Cap. 7 de esta tesis.

## CAPITULO 5

### EL ROL DE LOS OBSERVADORES EN LA TEORIA CUANTICA DE CAMPOS EN ESPACIOS CURVOS

El concepto de observador que realiza una medición se encuentra en las bases mismas de la Física. Sin embargo, su importancia ha ido cambiando a lo largo del tiempo y se vuelve crucial, a nuestro entender, cuando se estudian campos cuánticos en un espacio curvo.

#### 5.1. Observadores y Campos Clásicos.

El papel desempeñado por los observadores en la Teoría de Campos ha ido cambiando a medida que se fueron incorporando nuevos fenómenos y concepciones teóricas. En la Teoría Electromagnética de Maxwell del siglo XIX el campo eléctrico era considerado como una entidad física independiente del estado de movimiento del observador que la mide; esto es, se creía que el valor de intensidad de campo eléctrico, en cierto punto del espacio, producido por una carga eléctrica en reposo no cambiaría si el observador se moviese. Por otra parte, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas parecía, en ese marco, como relativa a cierto observador (fijo al llamado *éter luminífero*).

Esta situación fue invertida a comienzos de nuestro siglo por Einstein al analizar el campo electromagnético en el marco de la Teoría de la Relatividad Especial. En esta interpretación, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas es la misma en relación a todos los observadores inerciales y los valores de intensidad de los campos eléctricos y magnéticos dependen del sistema de referencia desde el cual se miden. Así por ejemplo, un observador en reposo respecto de una carga eléctrica percibe solamente su campo Coulombiano, pero si se encuentra en

movimiento uniforme en relación a la carga percibe una superposición de campos eléctrico y magnético, [94].

Queda claro, que en este esquema el rol del observador se vuelve más relevante y que existe una prescripción para relacionar las mediciones de los distintos observadores.

La introducción de la Relatividad General para describir el campo electromagnético clásico, no cambia cualitativamente este estado de cosas. En el marco de la Relatividad General las ecuaciones de campo son escritas de manera covariante respecto de las transformaciones generales de cartas "geométricas" y las intensidades de campo dependen del sistema "físico" de observadores, [94]. Igual que en la Relatividad Especial, en la Relatividad General sigue existiendo una prescripción clara para relacionar las mediciones clásicas de los diferentes sistemas de observadores.

## **5.2. Observadores y Campos Cuánticos.**

La introducción de los campos cuánticos confiere al sistema de observadores un papel mucho más importante que en el caso de los campos clásicos. En efecto, en una teoría cuántica tiene particular importancia el llamado espacio de Fock, o espacio de estados cuánticos del sistema, el cual se construye a partir del estado de vacío  $|0\rangle$ . Mientras uno se restrinja a un espacio-tiempo plano y a observadores inerciales, la definición del estado de vacío no presenta inconvenientes, ya que se caracteriza por ser autoestado de autovalor nulo de todos los operadores de simetría de la teoría. Si los observadores no son inerciales, la teoría pierde, en general, las simetrías y la definición del estado de vacío se vuelve ambigua. Lo mismo ocurre cuando se trabaja en un espacio curvo genérico.

De esta manera, dado un espacio curvo, el vacío pasa a ser un concepto asociado al sistema de observadores en consideración, y lo que es vacío para un dado sistema de observadores puede contener partículas para otro.

Este fenómeno, conocido como relatividad del vacío, está bien estudiado en la literatura para el caso de un campo escalar y de observadores en movimiento uniformemente acelerado sobre un espacio de Minkowski: el vacío de Minkowski es percibido por tales observadores como un baño térmico con temperatura proporcional a la aceleración, [57]. También se ha encontrado este efecto para un campo escalar en dimensión arbitraria del espacio-tiempo, [122], [123], encontrándose un curioso efecto de inversión de la estadística para dimensión impar, y para campos de spines  $1/2$  y  $1$ , [116], [120], [121], [124].

### 5.3. Sistema de Referencia Físico [95].

En Relatividad General, un sistema de referencia físico es un fluido de observadores que se mueve libremente, de modo que el conjunto de sus trayectorias espacio-temporales cubren todo el espacio-tiempo. Cada observador tiene un reloj que mide  $x^0$ , una función arbitraria del tiempo propio, continua y creciente. Si cada observador es etiquetado con tres números  $x^1, x^2, x^3$ , que son constantes sobre cada línea de fluido, entonces el conjunto de las cuatro cantidades  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  constituye una carta geométrica particular.

Si el fluido es irrotacional, existen hipersuperficies globales ortogonales a las líneas de fluido [96]. La existencia de tales hipersuperficies induce una foliación del espacio-tiempo y permite redefinir el tiempo medido por cada observador de manera que coincidan sobre cada hipersuperficie. Este tiempo, parece el candidato más razonable para jugar el rol de tiempo asociado con el sistema de observadores y será denominado *tiempo natural*,  $t$ , [72]. Así, el tiempo  $t$  aparece naturalmente asociado al fluido. Una carta definida por  $(t, x^1, x^2, x^3)$  será llamada una *carta adaptada*. De esta manera, el fluido de observadores (sistema de referencia físico) permite dar sentido a las nociones de tiempo y espacio en la variedad  $Y$ ,

como veremos más adelante, participa en la definición del Hamiltoniano de la teoría. La carta adaptada aparece asociada de manera natural al fluido de observadores aunque, por supuesto, cualquier carta geométrica puede usarse para escribir las ecuaciones.

Es importante notar, por otra parte, que la caracterización que hemos dado del tiempo natural no lo define unívocamente, ya que cualquier transformación del tipo  $t \rightarrow \bar{t} = F(t)$ , que no involucre a las coordenadas espaciales  $x^1, x^2, x^3$ , define un nuevo tiempo natural. Además, la carta adaptada admite redefiniciones de las coordenadas  $x^1, x^2, x^3$  que no involucren a la coordenada temporal  $t$ .

El tiempo natural puede ser utilizado para caracterizar a las líneas de fluido como  $x^\mu = x^\mu(t)$ . El vector  $V^\mu = dx^\mu/dt$  es tangente a tales líneas, y puede usarse para definir la "dirección del tiempo" en cada punto del fluido.

En la carta adaptada, son nulas las componentes  $g^{0i}$  del tensor métrico, y el vector  $V_\mu$  adopta la forma simple:

$$V^\mu = (1,0,0,0) \quad V_\mu = (g_{00},0,0,0) \quad (5.3.1)$$

Esta última expresión muestra claramente que  $V_\mu$  es un vector de Weyl de peso 1. Un vector de Weyl de peso 1/2 puede obtenerse calculando el vector unitario asociado a  $V_\mu$ :  $U^\mu = V^\mu/|V^\mu|$ , que en la carta adaptada se escribe:

$$U^\mu = ((g_{00})^{-1/2},0,0,0) \quad U_\mu = ((g_{00})^{1/2},0,0,0) \quad (5.3.2)$$

con la propiedad de transformación conforme:

$$\tilde{U}_\mu = \lambda^{1/2} U_\mu \quad \tilde{U}^\mu = \lambda^{-1/2} U^\mu \quad (5.3.3)$$

Este vector  $U_\mu$  posee, entonces, la propiedad de transformación correcta para ser considerado como el campo de Weyl auxiliar  $U_\mu$  con el que se construyó la conexión conforme en la sección (2.2).

Aunque en el marco de la Relatividad General las ecuaciones pueden ser formuladas en cualquier carta geométrica, la utilización de una carta adaptada al fluido de observadores permite simplificar la expresión de ciertas magnitudes. Un ejemplo de esto es el caso del tensor métrico y las ecuaciones (5.3.1) y (5.3.2). En el Apéndice 3 presentamos diversos entes geométricos de interés cuando son expresados en una carta adaptada.

## CAPITULO 6

### DIAGONALIZACION DEL HAMILTONIANO CAMPO ESCALAR

Debido al problema de la ambigüedad en la definición del estado de vacío en el espacio-tiempo curvo se hace necesario introducir algún criterio para seleccionar cuál es el estado de vacío en cada tiempo asociado con el sistema de observadores. Tal criterio será requerir que el operador Hamiltoniano tenga una estructura diagonal, tal como ocurre en el espacio de Minkowski. En este capítulo trataremos el caso, más sencillo, del campo escalar, aunque nuestro interés está centrado en el caso del campo electromagnético, que será motivo del próximo capítulo.

#### 6.1. Hamiltoniano.

Vamos a considerar un campo escalar  $\phi(x)$  de masa  $m$  y acoplamiento mínimo ( $\xi = 0$ ). El motivo de esta última restricción obedece a que la diagonalización para  $m \neq 0$  sólo resulta sencilla en ese caso, [97].

En el caso que estamos estudiando la invariancia conforme no es requerida ya que se trata de un campo masivo.

La diagonalización del Hamiltoniano ha sido utilizada frecuentemente en la literatura, pero sin hacer referencia al observador, [30], [41], [42], [43], [24], [25], [44], [45], [46], [98]. En nuestra filosofía, el modelo de partícula depende del observador, el cual participa en la propia definición del Hamiltoniano. Así, definimos el Hamiltoniano del campo como:

$$H_{\Sigma} = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} V^{\mu} d\sigma^{\nu} \quad (6.1.1)$$

donde  $V^{\mu}$  es el vector tangente a la línea de fluido de observadores y  $T_{\mu\nu}$  es

el tensor de energía-momento del campo. Es importante notar que el operador  $H_\Sigma$  resulta, así definido, invariante conforme, [99].

Según esta definición, el Hamiltoniano depende de la superficie de integración  $\Sigma$  y además del fluido de observadores vía el vector  $V^\mu$ . En una carta adaptada al fluido de observadores  $V^\mu$  está dado simplemente por (5.3.1). Si además se utiliza como superficie de integración a una donde el tiempo natural sea constante, se tiene

$$d\sigma^\mu = (g_{00}^{-1/2} d\Sigma, 0, 0, 0) \quad (6.1.2)$$

donde  $d\Sigma$  es el elemento de hipersuperficie asociado con la métrica tridimensional  $g_{ij}$ :

$$d\Sigma = [-\det(g_{ij})]^{1/2} d^3\vec{x} \quad (6.1.3)$$

de modo que, en la carta adaptada, el Hamiltoniano se escribe:

$$H_\Sigma = \int_\Sigma T_{00} g_{00}^{-1/2} d\Sigma \quad (6.1.4)$$

Es bueno aclarar que (6.1.1) es dependiente del observador a través de  $V_\mu$ , pero es invariante respecto de los cambios de carta geométrica ya que está escrita en lenguaje covariante. Es precisamente gracias a esta covariancia que podemos calcularlo en una carta que nos resulte cómoda (la adaptada).

La acción de un campo escalar masivo es:

$$S = (1/2) \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) \quad (6.1.5)$$

y como es usual, el tensor de energía-momento se define mediante la derivada funcional de la acción respecto de la métrica, [94]:



$$T_{\mu\nu} = (2/\sqrt{-g}) \delta S / \delta g^{\mu\nu} \quad (6.1.6)$$

El resultado de calcular esta expresión a partir de la acción (6.1.5) conduce a, [67]:

$$T_{\mu\nu} = [(1/2) - \xi] (\phi_{,\mu} ; \phi_{,\nu}) + [\xi - (1/4)] g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\phi_{,\alpha} ; \phi_{,\beta}) - \xi (\phi ; \phi_{,\mu\nu}) + \xi g_{\mu\nu} (\phi ; \square\phi) + [\xi(R_{\mu\nu} - (R/2)g_{\mu\nu}) + (m^2/2) g_{\mu\nu}] \phi^2 \quad (6.1.7)$$

que en el caso de acoplamiento mínimo ( $\xi=0$ , el único que estudiaremos) es:

$$T_{\mu\nu} = (1/2) (\phi_{,\mu} ; \phi_{,\nu}) - (1/4) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\phi_{,\alpha} ; \phi_{,\beta}) + (m^2/2) g_{\mu\nu} \phi^2 \quad (6.1.8)$$

En la carta adaptada, sólo la componente  $T_{00}$  es necesaria para definir  $H_{\Sigma}$ , y su expresión es:

$$T_{00} = (1/2) \dot{\phi}^2 - (1/4) g_{00} g^{ij} (\phi_{,i} ; \phi_{,j}) + (m^2/2) g_{00} \phi^2 \quad (6.1.9)$$

Reemplazando (6.1.9) en (6.1.4) se tiene:

$$H_{\Sigma} = (1/2) \int_{\Sigma} d^3\vec{x} \sqrt{\gamma} g_{00}^{-1/2} (\dot{\phi}^2 - g_{00} g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + m^2 g_{00} \phi^2) \quad (6.1.10)$$

donde hemos llamado  $\gamma = -\det(g_{ij})$ . Integrando por partes el segundo término de la integral y usando el teorema de Gauss para eliminar una divergencia, obtenemos:

$$H_{\Sigma} = (1/2) \int_{\Sigma} d^3\vec{x} \sqrt{\gamma} g_{00}^{-1/2} [\dot{\phi}^2 + \sqrt{g_{00}/\gamma} \phi \partial_i (\sqrt{g_{00} \gamma} g^{ij} \phi_{,j}) + m^2 g_{00} \phi^2] \quad (6.1.11)$$

Tal es la forma que toma el Hamiltoniano  $H_{\Sigma}$  en la carta adaptada.

## 6.2. El Operador $\mathcal{H}^2$ y el Producto Interno $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$ .

La inspección de la expresión (6.1.11) del Hamiltoniano nos sugiere la introducción del siguiente operador:

$$\mathcal{H}^2 = \sqrt{g_{00}/\mathcal{V}} \partial_i (\sqrt{g_{00}\mathcal{V}} g^{ij} \partial_j) + m^2 g_{00} \quad (6.2.1)$$

el cual permite escribir (6.1.11) de una manera más compacta:

$$H_{\Sigma} = (1/2) \int_{\Sigma} d^3\vec{x} \sqrt{\mathcal{V}} g_{00}^{-1/2} (\dot{\phi}^2 + \phi \mathcal{H}^2 \phi) \quad (6.2.2)$$

De esta manera aparecen diferenciadas en el integrando las partes correspondientes a la derivación temporal, por un lado, y la derivación respecto de las coordenadas espaciales que está tenida en cuenta por  $\mathcal{H}^2$ .

El operador  $\mathcal{H}^2$  es autoadjunto (ver Apéndice 4) en el siguiente producto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$  definido en el espacio de soluciones de la ecuación de campo, y que es semejante a aquél utilizado en la mecánica cuántica para ortonormalizar las funciones de onda:

$$(u, v)_{\Sigma} = \int_{\Sigma} d^3\vec{x} (\mathcal{V}/g_{00})^{1/2} u^* v \quad (6.2.3)$$

donde  $u$  y  $v$  son soluciones arbitrarias de la ecuación de campo.

Por medio de este producto interno, la expresión de  $H_{\Sigma}$  se vuelve todavía más compacta:

$$H_{\Sigma} = (1/2) \{ (\dot{\phi}^*, \dot{\phi})_{\Sigma} + (\phi^*, \mathcal{H}^2 \phi)_{\Sigma} \} \quad (6.2.4)$$

Las soluciones de la ecuación de campo son ortonormalizadas mediante el

producto interno  $\langle , \rangle$  definido por (3.1.10), que en la carta adaptada es:

$$\langle u, v \rangle = i \int_{\Sigma} d^3 \vec{x} (\mathcal{H}/g_{00})^{1/2} (\dot{u}^* v - u^* \dot{v}) \quad (6.2.5)$$

El producto interno  $\langle , \rangle$  es independiente de la superficie  $\Sigma$  sobre la cual se realiza la integración (así, la ortonormalidad de las soluciones se conserva al pasar de una superficie a otra). Por el contrario, el producto interno  $( , )_{\Sigma}$  sí depende de  $\Sigma$  (de ahí la dependencia del Hamiltoniano con  $\Sigma$ ).

Es inmediato, a partir de sus respectivas definiciones relacionar ambos productos internos:

$$\langle u, v \rangle = i (\dot{u}, v)_{\Sigma} - i (u, \dot{v})_{\Sigma} \quad (6.2.6)$$

El requerimiento de que la base de soluciones  $(u_k, u_k^*)$  de la ecuación de campo sea ortonormal se traduce en las condiciones:

$$\langle u_k, u_{k'} \rangle = -\delta_{kk'} \quad (6.2.7a)$$

$$\langle u_k^*, u_{k'} \rangle = 0 \quad (6.2.7b)$$

las que, teniendo en cuenta la relación (6.2.6) pueden ser expresadas en términos del producto interno  $( , )_{\Sigma}$ :

$$( \dot{u}_k, u_{k'} )_{\Sigma} - ( u_k, \dot{u}_{k'} )_{\Sigma} = i \delta_{kk'} \quad (6.2.8a)$$

$$( \dot{u}_k^*, u_{k'} )_{\Sigma} - ( u_k^*, \dot{u}_{k'} )_{\Sigma} = 0 \quad (6.2.8b)$$

Es útil notar que la utilización del operador  $\mathcal{H}^2$  permite también escribir la ecuación de campo de una manera en que las operaciones de derivación respecto del tiempo aparecen bien separadas de las de derivación respecto

de las coordenadas espaciales. En efecto, la ecuación de campo es:

$$(\square + m^2 - \xi R)\phi = 0 \quad (6.2.9)$$

la que, utilizando  $\mathcal{H}^2$  se escribe como,

$$\mathcal{H}^2 \phi = - (1/\sqrt{\gamma/g_{00}})(\sqrt{\gamma/g_{00}} \phi)' \quad (6.2.10)$$

Así, en el primer miembro de (6.2.10) sólo aparecen derivadas respecto de  $\vec{x}$ , mientras que en el segundo miembro sólo aparecen derivadas respecto de  $t$ .

### 6.3. Diagonalización del Hamiltoniano.

Cuando se cuantifica el campo  $\phi$ , éste puede desarrollarse en una base de soluciones  $\{u_k, u_k^*\}$  de la ecuación de campo, usando como coeficientes a operadores de aniquilación y creación como lo muestra la Ec. (4.2.3). Si tal desarrollo es reemplazado en la expresión (6.2.4) para  $H_{\Sigma}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} H_{\Sigma} = & (1/2) \sum_{kk'} a_k^{\dagger} a_{k'} [(\dot{u}_k, \dot{u}_{k'})_{\Sigma} + (u_k, \mathcal{H}^2 u_{k'})_{\Sigma}] + \text{c.h.} \\ & + (1/2) \sum_{kk'} a_k a_{k'} [(\dot{u}_k^*, \dot{u}_{k'})_{\Sigma} + (u_k^*, \mathcal{H}^2 u_{k'})_{\Sigma}] + \text{c.h.} \\ & + (1/2) \sum_k [(\dot{u}_k, \dot{u}_k)_{\Sigma} + (u_k, \mathcal{H}^2 u_k)_{\Sigma}] \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

donde c.h. indica el conjugado hermitico de la sumatoria inmediata precedente.

Podemos distinguir dos partes en esta expresión de  $H_{\Sigma}$ : la que incluye al

operador  $a_k^\dagger a_k$  junto con la característica última sumatoria (divergente en el espacio de Minkowski) y el resto, que incluye a los operadores del tipo  $a_k a_{k'}$ ,  $a_k^\dagger a_{k'}^\dagger$  y los productos  $a_k^\dagger a_{k'}$  con  $k' \neq k$ . La primera es análoga a la que aparece en el Hamiltoniano que conocemos de la teoría de campos en el espacio de Minkowski, y la llamaremos *parte diagonal* de  $H_\Sigma$ . La segunda es la denominada *parte no-diagonal* de  $H_\Sigma$ . Nuestro criterio para seleccionar la base de soluciones que dá el "buen" modelo de partícula sobre cada superficie de Cauchy  $\Sigma$  será que los datos de Cauchy  $u_k|_\Sigma$  y  $\dot{u}_k|_\Sigma$  sobre  $\Sigma$  de tal base anulen la parte no-diagonal de  $H_\Sigma$ . A partir de (6.3.1), esto equivale a las condiciones:

$$(\dot{u}_k^*, \dot{u}_{k'})_\Sigma + (u_k^*, \mathcal{H}^2 u_{k'})_\Sigma = 0 \quad (6.3.2a)$$

$$(\dot{u}_k, \dot{u}_{k'})_\Sigma + (u_k, \mathcal{H}^2 u_{k'})_\Sigma = \Lambda_k \delta_{kk'} \quad (6.3.2b)$$

donde  $\Lambda_k$  es una constante sobre  $\Sigma$ . Resumiendo, la base de soluciones asociada a cada superficie  $\Sigma$  será aquella cuyos datos de Cauchy sobre  $\Sigma$  diagonalizan  $H_\Sigma$ , es decir que cumplen las Ec. (6.3.2) y que además satisfacen las relaciones de ortonormalidad, es decir las Ec. (6.2.8).

Puesto que el operador  $\mathcal{H}^2$  es autoadjunto en el producto interno  $(,)_\Sigma$  existe una base completa de autofunciones  $\psi_k^{(\Sigma)}(\vec{x})$  definidas sobre  $\Sigma$  que son ortonormales en el mismo. Por brevedad, las denotaremos simplemente como  $\psi_k$ , omitiendo la dependencia respecto de la superficie  $\Sigma$  y de las variables espaciales  $\vec{x}$  sobre dicha superficie. Estas autofunciones son determinadas, para cada  $\Sigma$ , como solución de la siguiente ecuación de autovalores:

$$\mathcal{H}^2 \psi_k = (E_k)^2 \psi_k \quad (6.3.3)$$

donde  $(E_k)^2$  es el autovalor (constante) correspondiente, el cual puede

probarse que es real y definido positivo (ver Apéndice 4). Igual que para las autofunciones, para no recargar la notación no indicamos la dependencia en  $\Sigma$  de  $\mathcal{H}^2$  y  $(E_k)^2$ .

Tomando el complejo conjugado de la Ec. (6.3.3) y teniendo en cuenta que  $\mathcal{H}^2$  y  $(E_k)^2$  son reales obtenemos:

$$\mathcal{H}^2 \Psi_k^* = (E_k)^2 \Psi_k^* \quad (6.3.4)$$

lo cual significa que  $\Psi_k^*$  también es autofunción de  $\mathcal{H}^2$  y con el mismo autovalor que  $\Psi_k$ . En consecuencia, combinando linealmente las  $\Psi_k$  y sus conjugadas sin violar la ortonormalidad podemos obtener una nueva base. El índice  $k$  que rotula las funciones de la base puede ser elegido de manera que sea:

$$\Psi_k^* = \Psi_{-k} \quad (6.3.5)$$

De esta manera, la ortonormalidad de las funciones  $\Psi_k$  se escribe, simplemente:

$$(\Psi_k, \Psi_{k'})_\Sigma = \delta_{kk'} \quad (6.3.6)$$

donde  $k$  y  $k'$  son ahora positivos o negativos.

Intentaremos encontrar los datos de Cauchy  $u_k|_\Sigma$  y  $\dot{u}_k|_\Sigma$  de la base de soluciones de la ecuación de campo que dá el modelo físico de partícula asociado a la superficie  $\Sigma$ , haciendo el ansatz, [100], de que dichos datos son proporcionales a las autofunciones  $\Psi_k$ , es decir:

$$u_k|_\Sigma = A_k \Psi_k \quad (6.3.7a)$$

$$\dot{u}_k|_\Sigma = B_k \Psi_k \quad (6.3.7b)$$

siendo  $A_k$  y  $B_k$  constantes a determinar para que se satisfagan las condiciones (6.2.8) y (6.3.2). Si reemplazamos las igualdades (6.3.7) en las condiciones (6.2.8) y (6.3.2), teniendo en cuenta (6.3.4) y (6.3.6), obtenemos las siguientes relaciones a satisfacer para  $A_k$  y  $B_k$ :

$$B_k^* A_k - A_k^* B_k = i \quad (6.3.8a)$$

$$B_k A_{-k} - A_k B_{-k} = 0 \quad (6.3.8b)$$

$$B_k B_{-k} + A_k A_{-k} (E_k)^2 = 0 \quad (6.3.8c)$$

$$|B_k|^2 + |A_k|^2 (E_k)^2 = \Lambda_k \quad (6.3.8d)$$

Puesto que existe un factor de fase arbitrario en la solución, no se pierde generalidad si tomamos que  $A_k$  es real:

$$A_k^* = A_k \quad (6.3.9)$$

Entonces, de la Ec. (6.3.8a) se obtiene:

$$\text{Im}(B_k) = -1/(2A_k) \quad (6.3.10)$$

Introduciendo este último valor en (6.3.8b) llegamos a:

$$\text{Im}^2(B_{-k}) = \text{Im}^2(B_k) \quad (6.3.11)$$

$$\text{Re}(B_{-k}) \text{Im}(B_{-k}) = \text{Re}(B_k) \text{Im}(B_k) \quad (6.3.12)$$

de donde se deduce que,

$$B_{-k} = \pm B_k \quad (6.3.13)$$

y entonces, a partir de (6.3.10) se sigue que,

$$A_{-k} = \pm A_k \quad (6.3.14)$$

Pero en esta última expresión podemos elegir arbitrariamente el signo, por ejemplo el + , ya que esta elección corresponde a un factor de fase constante irrelevante. Así, tomamos, sin pérdida de generalidad:

$$A_{-k} = A_k \quad B_{-k} = B_k \quad (6.3.15)$$

Por otra parte, a partir de la Ec. (6.3.8c) se desprende que  $B_k$  debe ser imaginario puro, ya que  $A_k$  y  $E_k$  son reales:

$$B_k = -i/(2A_k) \quad (6.3.16)$$

y entonces reemplazando (6.3.16) en (6.3.8c), obtenemos:

$$A_k = 1/\sqrt{2E_k} \quad (6.3.17)$$

y entonces, desde (6.3.16) se sigue que,

$$B_k = -i\sqrt{2E_k}/2 \quad (6.3.18)$$

Finalmente, reemplazando los valores dados por (6.3.17) y (6.3.18) en (6.3.8d) obtenemos la relación entre  $\Lambda_k$  y  $E_k$ :

$$\Lambda_k = E_k \quad (6.3.19)$$

Resumiendo, los datos de Cauchy sobre  $\Sigma$  que diagonalizan el Hamiltoniano



$H_{\Sigma}$  son:

$$u_k|_{\Sigma} = (1/\sqrt{2E_k}) \Psi_k \quad (6.3.20a)$$

$$\dot{u}_k|_{\Sigma} = (-i \sqrt{2E_k}/2) \Psi_k \quad (6.3.20b)$$

donde las funciones  $\Psi_k$  se determinan resolviendo la ecuación de autovalores (6.3.3). Conocidos, de esta manera, los datos de Cauchy, las soluciones de frecuencias positivas  $u_k(t, \vec{x})$  asociadas a la superficie  $\Sigma$  pueden ser obtenidas resolviendo la ecuación de campo.

No es hocioso recordar que, en general, la base que diagonaliza  $H_{\Sigma}$  no será la misma que la que diagonaliza  $H_{\Sigma'}$ , y puesto que  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  representan dos tiempos diferentes tendremos el fenómeno de creación de partículas a lo largo del tiempo.

En cuanto al Hamiltoniano  $H_{\Sigma}$ , toma la forma,

$$H_{\Sigma} = \sum_k E_k a_k^{\dagger} a_k + (1/2) \sum_k E_k \quad (6.3.21)$$

donde reconocemos la estructura que nos es familiar de la teoría de campos cuánticos libres en el espacio-tiempo plano. En efecto, la primera sumatoria representa una colección de partículas en diferentes modos descritos por el índice  $k$ , y donde el autovalor  $E_k$  desempeña el rol de energía de cada cuanto. La segunda suma, que representa una energía de punto cero, en general divergente, puede ser eliminada mediante los métodos de renormalización del tensor energía-momento explicados, por ejemplo, en la Ref. [67].

#### 6.4. Minimización de la Energía.

El Hamiltoniano es el operador cuántico correspondiente a la energía del campo, y es interesante notar que la base de soluciones que diagonaliza el

Hamiltoniano es la misma que minimiza la energía.

Tal energía estará dada por la cantidad  $\langle 0, \Sigma | H_{\Sigma} | \Sigma, 0 \rangle$ , donde  $|\Sigma, 0\rangle$  es el estado de vacío asociado con  $\Sigma$ . Teniendo en cuenta la Ec. (6.3.1), tendremos:

$$\langle 0, \Sigma | H_{\Sigma} | \Sigma, 0 \rangle = (1/2) \sum_k \{ (\dot{u}_k, \dot{u}_k)_{\Sigma} + (u_k, \mathcal{H}_{\Sigma}^2 u_k)_{\Sigma} \} \quad (6.4.1)$$

ya que sólo contribuye a la expresión la tercera de las sumas de (6.3.1).

Por otra parte, consideraremos, igual que hicimos en el proceso de diagonalización de  $H_{\Sigma}$ , que los datos de Cauchy sobre  $\Sigma$  de las soluciones de frecuencia positiva son proporcionales a las autofunciones de  $\mathcal{H}_{\Sigma}^2$ , es decir que los datos de Cauchy tienen la forma (6.3.7). Entonces, tenemos:

$$\langle 0, \Sigma | H_{\Sigma} | \Sigma, 0 \rangle = (1/2) \sum_k \{ |B_k|^2 + (E_k)^2 |A_k|^2 \} \quad (6.4.2)$$

Puesto que ahora sólo estamos interesados en la minimización de la energía, los coeficientes  $A_k$  y  $B_k$  que aparecen en (6.4.2) deberán cumplir las Ec.(6.3.8a,b) que corresponden a la ortonormalización y no las (6.3.8c,d) que tienen que ver con la diagonalización de  $H_{\Sigma}$ . Como se vió en §6.3, podemos tomar  $A_k$  real, valiendo entonces la Ec. (6.3.10) que dá la parte imaginaria de  $B_k$  en términos de  $A_k$ . No obstante debe tenerse en cuenta que ya no podemos asegurar, a priori, que  $B_k$  sea imaginario puro, ya que la Ec. (6.3.16) se apoya en la Ec. (6.3.8c) que ahora no podemos usar.

Por lo tanto tenemos,

$$\langle 0, \Sigma | H_{\Sigma} | \Sigma, 0 \rangle = (1/2) \sum_k \{ (\text{Re } B_k)^2 + (1/4 A_k^2) + (E_k)^2 A_k^2 \} \quad (6.4.3)$$

Puesto que deseamos minimizar esta expresión, queda claro que debe tomarse,

$$\text{Re } B_k = 0 \quad (6.4.4)$$

Con lo que la expresión a minimizar es,

$$\langle 0, \Sigma | H_\Sigma | \Sigma, 0 \rangle = (1/2) \sum_k \{ (1/4 A_k^2) + (E_k)^2 A_k^2 \} \quad (6.4.5)$$

La expresión bajo el signo de suma tiende a  $+\infty$  tanto para  $A_k \rightarrow 0$  como para  $A_k \rightarrow \infty$ , y puede verse fácilmente que tiene un mínimo para:

$$A_k = \pm 1/\sqrt{2E_k} \quad (6.4.6)$$

con lo cual se obtiene para  $B_k$ , a partir de (6.3.16) y (6.4.4):

$$B_k = \pm (-i \sqrt{2E_k}/2) \quad (6.4.7)$$

Puesto que es irrelevante el signo que elijamos en (6.4.6,7), ya que corresponde a un factor de fase constante en la solución, tomando el signo + obtenemos las soluciones (6.3.17,18) que son las que diagonalizan  $H_\Sigma$ .

Así, la base que diagonaliza el Hamiltoniano es la misma que minimiza la energía, [72].

Es de notar que el vacío que diagonaliza el Hamiltoniano o minimiza la energía no es siempre totalmente satisfactorio. Puede, por ejemplo, conducir a un valor de expectación de vacío del tensor energía-momento  $T_{\mu\nu} = \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$  que no sea renormalizable por los métodos habituales. Un vacío satisfactorio debe cumplir también esta propiedad, [101].

## CAPITULO 7

### DIAGONALIZACION DEL HAMILTONIANO CAMPO ELECTROMAGNETICO

Este capítulo será dedicado a la obtención del modelo de partícula para el fotón en espacio curvo, utilizando el criterio de diagonalizar el Hamiltoniano. La exposición seguirá, *mutatis mutandi*, los lineamientos expuestos en el Cap. 6 para el caso del campo escalar. Abordamos también el tema de la definición de transversalidad y longitudinalidad de los fotones en espacio curvo y cómo los fotones no-físicos son eliminados del formalismo.

#### 7.1. Hamiltoniano.

Igual que para el caso escalar consideramos un Hamiltoniano  $H_{\Sigma}$  dado por (6.1.1), el cual, como se ha dicho, depende del fluido de observadores considerado a través del campo de vectores  $V^{\mu}$  que caracteriza a tal fluido. Por supuesto,  $T_{\mu\nu}$  es ahora el tensor de energía-impulso para el campo electromagnético.

Es importante tener presente que, puesto que  $H_{\Sigma}$  es un escalar, es invariante por cambio de carta geométrica, pero no así por cambio de observador. En la carta adaptada al sistema de observadores la expresión de  $H_{\Sigma}$  es la dada por (6.1.4), sólo que ahora puede ser considerado que  $g_{00} = 1$  gracias a la invariancia conforme de la teoría. Entonces,

$$H_{\Sigma} = \int_{\Sigma} T_{00} d\Sigma \quad (7.1.1)$$

donde el elemento de hipersuperficie  $d\Sigma$  asociado a la métrica tridimensional  $g_{ij}$  está dado por (6.1.3).

Trabajaremos con el campo electromagnético en el gauge temporal (ver §3.5), de manera que en la carta adaptada sólo las componentes espaciales del 4-vector potencial  $A^\mu$  son consideradas como variables dinámicas en la acción, mientras que  $A_0$  es eliminada como variable dinámica por la condición de gauge (3.5.2).

La acción del campo es:

$$S = -(1/4) \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.1.2)$$

El tensor  $T_{\mu\nu}$  se obtiene como derivada funcional de la acción  $S$  del campo por medio de la Ec. (6.1.6), obteniéndose:

$$T_{\mu\nu} = g^{\omega\sigma} [ (1/4) g^{\epsilon\rho} g_{\mu\nu} - \delta^\epsilon_\mu \delta^\rho_\nu ] F_{\epsilon\omega} F_{\rho\sigma} \quad (7.1.3)$$

de donde, la componente  $T_{00}$  es,

$$T_{00} = -(1/2) g^{ij} \dot{A}_i \dot{A}_j + (1/2) (g^{ij} g^{km} - g^{im} g^{kj}) \overset{*}{\nabla}_k A_i \overset{*}{\nabla}_m A_j \quad (7.1.4)$$

En la última expresión el símbolo  $\overset{*}{\nabla}$  indica la derivada covariante asociada con la parte espacial de la métrica,  $g_{ij}$ . Por otra parte, la utilización de  $\overset{*}{\nabla}$  aquí es irrelevante pues  $T_{\mu\nu}$  es una expresión independiente de la conexión, como lo muestra (7.1.3); sin embargo, nos será útil más adelante.

Así, el Hamiltoniano es,

$$H_\Sigma = (1/2) \int_\Sigma d^3x \sqrt{-g} [-g^{ij} \dot{A}_i \dot{A}_j + (1/2) (g^{ij} g^{km} - g^{im} g^{kj}) \overset{*}{\nabla}_k A_i \overset{*}{\nabla}_m A_j] \quad (7.1.5)$$

Si ahora usamos la identidad,

$$(g^{ijgkm} - g^{imgkj}) \overset{*}{\nabla}_k A_l \overset{*}{\nabla}_m A_j = \overset{*}{\nabla}_k [(g^{ijgkm} - g^{imgkj}) A_l \overset{*}{\nabla}_m A_j] - (g^{ijgkm} - g^{imgkj}) A_l \overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_m A_j \quad (7.1.6)$$

y tenemos en cuenta que el primer término del segundo miembro es una divergencia, (7.1.5) se escribe:

$$H_{\Sigma} = (1/2) \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g} [-g^{ij} \dot{A}_i \dot{A}_j - A_l \overset{*}{\nabla}^m \overset{*}{\nabla}_m A_l + A_l \overset{*}{\nabla}^j \overset{*}{\nabla}^i A_j] \quad (7.1.7)$$

## 7.2. El operador $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ y el Producto Interno $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$ .

Igual que en el caso escalar, la expresión (7.1.7) del Hamiltoniano del campo electromagnético en la carta adaptada puede ser escrita de manera más conveniente si introducimos el siguiente operador:

$$(\mathcal{H}^2)_{ij} = g_{ij} \overset{*}{\nabla}^m \overset{*}{\nabla}_m - \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i \quad (7.2.1)$$

con el cual (7.1.7) puede escribirse como,

$$H_{\Sigma} = -(1/2) \int_{\Sigma} d^3\vec{x} \sqrt{-g} [g^{ij} \dot{A}_i \dot{A}_j + A_l (\mathcal{H}^2)^{lj} A_j] \quad (7.2.2)$$

También introducimos un producto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$  que es la generalización natural, para el caso vectorial, del dado por (6.2.3):

$$(f_i, g_l)_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} d^3\vec{x} \sqrt{-g} f_i^* g_l \quad (7.2.3)$$

con el cual, la expresión de  $H_{\Sigma}$  puede ponerse como,

$$H_{\Sigma} = (1/2) [(\dot{A}_i^*, \dot{A}_i)_{\Sigma} + (A_l^*, (\mathcal{H}^2)^{lj} A_j)_{\Sigma}] \quad (7.2.4)$$

que es una expresión análoga a la (6.2.4) del caso escalar.

El operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  no sólo es útil para escribir de una manera conveniente el Hamiltoniano del campo; también aparece de manera natural en las ecuaciones de campo. En efecto, las ecuaciones de campo son las (3.5.3), las que usando  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  se escriben como,

$$(\mathcal{H}^2)_{ij} A_j = - \ddot{A}_i - (\ln \sqrt{-g}) \dot{A}_i + g^{km} \dot{g}_{mi} \dot{A}_k \quad (7.2.5)$$

Por otra parte, es fácil mostrar que,

$$(\mathcal{H}^2)_{ij} A_j = \nabla_j F^{ji} = (1/\sqrt{-g}) \partial_j (\sqrt{-g} F^{ji}) \quad (7.2.6)$$

lo que muestra que  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  puede escribirse de manera que sólo involucre derivadas ordinarias respecto de las coordenadas espaciales. De esta manera, en las ecuaciones de campo (7.2.5) aparecen en el primer miembro solamente derivadas respecto de las coordenadas espaciales y en el segundo sólo derivadas respecto del tiempo.

Las soluciones de las ecuaciones de campo son ortonormalizadas mediante el producto interno  $\langle , \rangle$  dado por (3.5.4), que en la carta adaptada se escribe:

$$\langle f_\mu , g_\mu \rangle = -i \int_{\Sigma} (g^i f_i^* - f_i^* g^i) d\Sigma \quad (7.2.7)$$

Este producto es, por supuesto, independiente de la superficie de Cauchy  $\Sigma$  utilizada para realizar la integración, y puede ser relacionado con el producto interno  $( , )_{\Sigma}$  por,

$$\langle f_i , g_i \rangle = i ( \dot{f}_i , g_i )_{\Sigma} - i ( f_i , \dot{g}_i )_{\Sigma} \quad (7.2.8)$$

Análogamente al caso escalar, puede probarse (ver Apéndice 4) que el operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  es autoadjunto respecto del producto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$  en el sentido de que,

$$(f_i, (\mathcal{H}^2)_{ij} g_j)_{\Sigma} = ((\mathcal{H}^2)_{ji} f_i, g_j)_{\Sigma} \quad (7.2.9)$$

donde es importante notar que en cada miembro los índices de  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  aparecen intercambiados.

Entonces, por tratarse de un operador autoadjunto, es posible encontrar una base de autofunciones  $(\Psi_i(k; \vec{x}))$ , donde el índice  $k$  distingue entre diferentes autofunciones, definida sobre la superficie de Cauchy  $\Sigma$  y ortonormal en el producto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$ :

$$(\Psi_i(k), \Psi_i(k'))_{\Sigma} = \delta_{kk'} \quad (7.2.10)$$

donde las autofunciones  $\Psi_i(k; \vec{x})$  son autofunciones de  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ :

$$(\mathcal{H}^2)_{ij} \Psi_j = E^2(k) \Psi_i \quad (7.2.11)$$

siendo  $E^2(k)$  el autovalor, constante, correspondiente a la autofunción  $\Psi_i(k)$ . La denominación  $E^2$  obedece a que en el Apéndice 4 probamos que estos autovalores son reales y no-negativos.

Aunque no se lo indica explícitamente, para no recargar la notación, todos los elementos que figuran en la Ec. (7.2.11) (el operador, las autofunciones y el autovalor) están asociados a la superficie  $\Sigma$ .

Dado que  $E^2$  y  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  son reales, si  $\Psi_i(k)$  es autofunción de  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  con autovalor  $E^2$ ,  $\Psi_i^*(k)$  también lo es y con el mismo autovalor, y dado que es posible elegir la rotulación de las autofunciones de modo que sea:



$$\Psi_i(-k) = \Psi_i^*(k) \quad (7.2.12)$$

podemos agregar, a la condición de ortonormalidad (7.2.10):

$$(\Psi_i^*(k), \Psi_i(k')) = (\Psi_i(-k), \Psi_i(k')) = \delta_{-kk'} \quad (7.2.13)$$

o considerar que en la (7.2.10) los  $k$  son positivos y negativos.

### 7.3. Diagonalización del Hamiltoniano.

Se trata ahora de encontrar cuál es la base de soluciones de la ecuación de campo  $\{u_i(k, \lambda; x), u_i^*(k, \lambda; x)\}$  que diagonaliza el Hamiltoniano (7.2.4). Los índices  $k, \lambda$  rotulan diferentes elementos de la base, pero  $\lambda$  se ha reservado para describir diferentes estados de polarización. El campo  $A_i$  se escribe en términos de esta base como:

$$A_i = \sum_{k, \lambda} \{ a_{k\lambda} u_i(k, \lambda) + a_{k\lambda}^\dagger u_i^*(k, \lambda) \} \quad (7.3.1)$$

donde  $a_{k\lambda}$  y  $a_{k\lambda}^\dagger$  son los correspondientes operadores de aniquilación y creación de partículas del tipo  $k, \lambda$ , respectivamente.

Introduciendo este desarrollo en la expresión (7.2.4) de  $H_\Sigma$ , se tiene:

$$\begin{aligned} H_\Sigma = & (1/2) \sum_{kk', \lambda\lambda'} \{ a_{k\lambda}^\dagger a_{k'\lambda'} [(\dot{u}_i(k, \lambda), \dot{u}_i(k', \lambda'))_\Sigma + (u_i(k, \lambda), (\mathcal{L}^2)^{ij} u_j(k', \lambda'))_\Sigma] + \\ & + a_{k\lambda} a_{k'\lambda'} [(\dot{u}_i^*(k, \lambda), \dot{u}_i^*(k', \lambda'))_\Sigma + (u_i^*(k, \lambda), (\mathcal{L}^2)^{ij} u_j(k', \lambda'))_\Sigma] + \text{c.h.} + \\ & + (1/2) \sum_{k\lambda} \{ (\dot{u}_i(k, \lambda), \dot{u}_i(k, \lambda))_\Sigma + (u_i(k, \lambda), (\mathcal{L}^2)^{ij} u_j(k, \lambda))_\Sigma \} \quad (7.3.2) \end{aligned}$$

La determinación de tal base será realizada a través de los datos de Cauchy  $u_i|_\Sigma$  y  $\dot{u}_i|_\Sigma$  de las soluciones de frecuencia positiva sobre la

superficie  $\Sigma$  a la cual está asociado el Hamiltoniano.

Siguiendo los lineamientos utilizados en el Capítulo 6 intentaremos encontrar estos datos de Cauchy postulando que son proporcionales a las autofunciones de  $(\mathcal{H}^2)^{ij}$ :

$$u_i(k, \lambda; x)|_{\Sigma} = A(k, \lambda) \Psi_i(k; \vec{x}) \quad (7.3.3a)$$

$$\dot{u}_i(k, \lambda; x)|_{\Sigma} = B(k, \lambda) \Psi_i(k; \vec{x}) \quad (7.3.3b)$$

donde los coeficientes de proporcionalidad  $A(k, \lambda)$  y  $B(k, \lambda)$  deberán ser determinados a partir de que se satisfagan las condiciones de ortonormalidad de la base de soluciones en el producto interno  $\langle , \rangle$  y la estructura diagonal para el Hamiltoniano.

El requerimiento de base ortonormal se escribe como,

$$\langle u_i(k, \lambda), u_j(k', \lambda') \rangle = -\delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.4a)$$

$$\langle u_i^*(k, \lambda), u_j(k', \lambda') \rangle = 0 \quad (7.3.4b)$$

que utilizando la relación (7.2.8) puede expresarse en términos del producto interno  $( , )_{\Sigma}$ :

$$( \dot{u}_i(k, \lambda), u_j^*(k', \lambda') )_{\Sigma} - ( u_i(k, \lambda), \dot{u}_j^*(k', \lambda') )_{\Sigma} = i \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.5a)$$

$$( \dot{u}_i^*(k, \lambda), u_j(k', \lambda') )_{\Sigma} - ( u_i^*(k, \lambda), \dot{u}_j(k', \lambda') )_{\Sigma} = 0 \quad (7.3.5b)$$

Por otra parte, el requerimiento de una estructura diagonal para  $H_{\Sigma}$  es,

$$( \dot{u}_i^*(k, \lambda), \dot{u}_i(k', \lambda') )_{\Sigma} + ( u_i^*(k, \lambda), (\mathcal{H}^2)^{ij} u_j(k', \lambda') )_{\Sigma} = 0 \quad (7.3.6a)$$

$$( \dot{u}_i(k, \lambda), \dot{u}_i(k', \lambda') )_{\Sigma} + ( u_i(k, \lambda), (\mathcal{H}^2)^{ij} u_j(k', \lambda') )_{\Sigma} = \Lambda_{k\lambda} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.6b)$$

donde  $\Lambda_{k\lambda}$  es una constante sobre  $\Sigma$  a ser determinada.

Entonces, los datos de Cauchy de las soluciones de frecuencia positiva deben ser determinados cumpliendo las Ec. (7.3.5) y (7.3.6).

Si reemplazamos (7.3.3) en (7.3.5) y (7.3.6), teniendo en cuenta las condiciones (7.2.10 a 13) se obtienen las siguientes ecuaciones para los coeficientes A y B:

$$2 \operatorname{Im} [A^*(k, \lambda) B(k, \lambda)] = -1 \quad (7.3.7a)$$

$$A(-k, \lambda) B(k, \lambda) - B(-k, \lambda) A(k, \lambda) = 0 \quad (7.3.7b)$$

$$B(k, \lambda) B(-k, \lambda) + E^2(k, \lambda) A(k, \lambda) A(-k, \lambda) = 0 \quad (7.3.7c)$$

$$|B(k, \lambda)|^2 + E^2(k, \lambda) |A(k, \lambda)|^2 = \Lambda_{k\lambda} \quad (7.3.7d)$$

Como puede verse, estas ecuaciones son idénticas (salvo por el agregado del índice  $\lambda$ ) a las correspondientes para el caso escalar (cfr. Ec.(6.3.8)).

Para el caso en que  $E^2 \neq 0$ , el tratamiento es idéntico al hecho en el caso escalar. Así, eligiendo el factor de constante arbitrario para que A sea real, arribamos a (ver Ec. (6.3.9 a 20):

$$\Lambda_{k\lambda} = E(k, \lambda) \quad (7.3.8)$$

$$u_1(k, \lambda)|_{\Sigma} = (1/\sqrt{2E(k, \lambda)}) \Psi_1(k, \lambda) \quad (7.3.9a)$$

$$(E^2 \neq 0)$$

$$\dot{u}_1(k, \lambda)|_{\Sigma} = (-i \sqrt{E(k, \lambda)/2}) \Psi_1(k, \lambda) \quad (7.3.9b)$$

Tales son los datos de Cauchy buscados, pero sólo para el caso  $E^2 \neq 0$ , lo que queda claro observando que la expresión (7.3.9a) diverge para  $E = 0$ . El tratamiento del caso  $E = 0$  requiere algo más de cuidado. En ese caso se tiene para las Ec. (7.3.7),

$$2 A(k) \operatorname{Im} B(k) = -1 \quad (7.3.10a)$$

$$B(k) = 0 \quad (E = 0) \quad (7.3.10b)$$

$$|B(k)|^2 = \Lambda_k \quad (7.3.10c)$$

donde hemos considerado nuevamente  $A(k)$  real. Queda claro que la Ec. (7.3.10b) no puede cumplirse al mismo tiempo que la (7.3.10a). Lo que ocurre en este caso, es que la diagonalización del Hamiltoniano no es compatible con la ortonormalidad de las funciones de la base. Si la base es ortonormal, necesariamente debe subsistir una parte extradiagonal en el Hamiltoniano asociada con los modos que tienen  $E = 0$ . Como veremos más adelante, los modos con  $E = 0$  corresponden a los fotones longitudinales, y recurriremos a un mecanismo especial para eliminarlos.

Las expresiones (7.3.8) y (7.3.9) permiten escribir para  $H_{\Sigma}$ :

$$H_{\Sigma} = \sum_{k\lambda} E(k,\lambda) a_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda} + (1/2) \sum_{k\lambda} E(k,\lambda) + H_{\Sigma}(E=0) \quad (7.3.11)$$

La primera sumatoria representa un conjunto de fotones con modos de polarización del tipo  $E \neq 0$  (transversales, ver el próximo §), siendo  $E(k,\lambda)$  la energía de cada cuanto. La segunda suma es el característico término, en general divergente, que también aparece en el espacio-tiempo plano y que, como se sabe, puede eliminarse mediante renormalización [67]. Además, aparece un tercer término asociado con los modos  $E = 0$  (longitudinales, ver el próximo §) que será analizado en §7.5.

#### **7.4. Ley de Gauss. Transversalidad y Longitudinalidad de los Fotones.**

En el espacio de Minkowski, la condición de transversalidad que poseen los fotones es asegurada por el cumplimiento de una de las ecuaciones de Maxwell, la llamada Ley de Gauss  $\partial^{\mu} F_{\mu 0} = 0$ . Sin embargo, cuando

trabajamos en el gauge temporal, la Ley de Gauss es perdida como ecuación de campo, y en consecuencia cabe esperar la aparición de fotones longitudinales (no físicos), los que pueden ser removidos mediante un mecanismo especial, [680].

En el espacio curvo carecemos, en general, de un criterio que nos permita decir cuando un modo es longitudinal o transversal, ya que el espacio-tiempo no presenta las simetrías del caso Minkowskiano. No obstante, es razonable llamar a un modo *transversal* cuando dicho modo obedezca a la Ley de Gauss:

$$\nabla^\mu F_{\mu 0} = 0 \quad (7.4.1)$$

Consideremos la ecuación de autovalores (7.2.11) para el operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  y apliquemos el operador  $\nabla^i$  a ambos miembros de dicha ecuación,

$$\nabla^i (\mathcal{H}^2)_{ij} \psi_j = E^2 \nabla^i \psi_i \quad (7.4.2)$$

A partir de la Ec. (7.2.1) es fácil ver que,

$$\nabla^i (\mathcal{H}^2)_{ij} A_j = (\nabla^i \nabla_j - \nabla_j \nabla^i) F_{ji} = 2 F_{ij} R^{ij} = 0 \quad (7.4.3)$$

donde la última expresión es idénticamente nula puesto que el tensor de Ricci  $R_{ij}$  es simétrico y  $F_{ij}$  es antisimétrico. En consecuencia, se sigue que:

$$E^2 \nabla^i \psi_i = 0 \quad (7.4.4)$$

De la última igualdad se sigue que para los modos con  $E \neq 0$  debe ser  $\nabla^i \psi_i = 0$  y para aquellos modos con  $E = 0$  ninguna condición pesa sobre  $\nabla^i \psi_i$ .

Consideremos aquellos modos con  $E \neq 0$ , para los cuales los datos de

Cauchy sobre  $\Sigma$  de las soluciones de frecuencia positiva están dados por (7.3.9) Aplicando a ambos miembros de estas ecuaciones el operador  $\nabla^*_{\nu i}$ , resulta:

$$\nabla^*_{\nu i} u_{\nu} |_{\Sigma} = 0 \quad (7.45a)$$

$$(E \neq 0)$$

$$\nabla^*_{\nu i} \dot{u}_{\nu} |_{\Sigma} = 0 \quad (7.45b)$$

y teniendo en cuenta que  $\nabla^{\mu} F_{\mu 0} = \nabla^*_{\nu i} \dot{A}_{\nu}$  se sigue que,

$$\nabla^{\mu} F_{\mu 0} |_{\Sigma} = 0 \quad (E \neq 0) \quad (7.46)$$

De esta manera, vemos que la Ley de Gauss vale, sobre  $\Sigma$ , para los modos con  $E \neq 0$ , mientras que esto no ocurre para aquellos con  $E = 0$ . En este sentido, podemos decir que los modos caracterizados por  $E \neq 0$  son *transversales*, mientras que aquellos con  $E = 0$  son *longitudinales*.

No debe perderse de vista que la validez de la Ley de Gauss dada por la Ec. (7.4.6) es sobre la superficie  $\Sigma$ , es decir a un tiempo dado, y puede ser violada cuando la solución evoluciona en el tiempo. En consecuencia, aunque preparemos un estado carente de modos longitudinales en el instante inicial, es necesario asegurar que a otro tiempo, los fotones que eran transversales para el observador al tiempo inicial no sean interpretados como longitudinales para el observador a otro tiempo.

La eliminación de los modos no físicos será objeto del próximo §.

## 7.5. Eliminación de los Fotones Longitudinales.

Como hemos visto en §7.4 los modos con  $E = 0$  corresponden a los fotones longitudinales, los cuales son grados de libertad espúreos y deben ser eliminados del formalismo. Por otra parte, en §7.3 vimos que estos modos presentan la patología de no permitir la diagonalización del Hamiltoniano ya que aparece una contradicción con las relaciones de ortonormalidad de dichos modos.

Para resolver estos problemas generalizaremos un artificio ya utilizado en el espacio de Minkowski que consiste, en esencia, en introducir en los modos longitudinales un parámetro que, al final de los cálculos se hace tender a cero, cancelando así la parte longitudinal del Hamiltoniano, [680]. Consideremos entonces las Ec. (7.3.10) que valen para los datos de Cauchy sobre  $\Sigma$  de las soluciones de frecuencia positiva de los modos longitudinales, y tomemos,

$$B(k) = -i \sigma \sqrt{k} b(\Sigma) \quad (7.5.1)$$

donde el factor  $\sqrt{k}$  ha sido introducido por razones dimensionales, siendo las unidades de  $k$  las inversas de una longitud. El factor real  $b(\Sigma)$  es adimensional y puede depender de la superficie de Cauchy a la cual está asociado  $H_{\Sigma}$ . En cuanto a  $\sigma$ , es un parámetro adimensional que se hará tender a cero al final de los cálculos, de manera de recuperar la validez de la Ec. (7.3.10b).

A partir de (7.3.10a) se tiene, teniendo en cuenta (7.5.1),

$$A(k) = [2 \sigma \sqrt{k} b(\Sigma)]^{-1} \quad (7.5.2)$$

y desde (7.3.10c):

$$\Lambda_k = \sigma^2 k b^2(\Sigma) \quad (7.5.3)$$

De esta manera, la parte del Hamiltoniano asociada con los modos longitudinales es proporcional a  $\sigma^2$  y, por lo tanto, desaparece en el límite  $\sigma \rightarrow 0$ . Este mecanismo permite, entonces, eliminar los fotones longitudinales asociados con la superficie  $\Sigma$ .

Vale la pena mencionar que el factor  $b(\Sigma)$  que aparece en las ecuaciones anteriores queda, por el momento, arbitrario, ya que ninguna condición es estipulada sobre él. En lo que sigue aprovecharemos esa arbitrariedad fijando  $b(\Sigma)$  para asegurar que si partimos de un estado sin fotones longitudinales para el observador sobre  $\Sigma$ , el mismo estado no presente fotones longitudinales para el observador sobre  $\Sigma'$ .

Nos restringiremos ahora al caso en que, en la carta adaptada, el tensor métrico puede descomponerse en la forma, [102]:

$$g_{ij}(t, \vec{x}) = -f(t) A_{ij}(\vec{x}) \quad (7.5.4a)$$

$$g^{ij}(t, \vec{x}) = -f^{-1}(t) A^{ij}(\vec{x}) \quad (7.5.4b)$$

siendo  $f(t)$  una función del tiempo natural únicamente y  $A_{ij}(\vec{x})$  una función sólo de  $\vec{x}$ .

Con este tipo de métrica, el operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  resulta independiente de la superficie de Cauchy a la cual se encuentra asociado, es decir:

$$(\mathcal{H}^2)_{ij}(\Sigma) = (\mathcal{H}^2)_{ij}(\Sigma') \quad (7.5.5)$$

Queda entonces claro que las autofunciones de  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  serán esencialmente las mismas para todo  $\Sigma$ . Sin embargo, estas autofunciones son ortonormalizadas a través del producto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$  que depende de  $\Sigma$ , y esto introduce en las autofunciones un factor de normalización distinto



para cada  $\Sigma$ . Es fácil ver que tal factor es  $f^{-1/4}(\tau)$  donde  $\tau$  es el tiempo correspondiente a  $\Sigma$ , así que se puede escribir, para la ecuación de autovalores,

$$(\mathcal{L}^2)_{ij} \psi_j(\Sigma) = E^2 \psi_i(\Sigma) \quad (7.5.6a)$$

la solución,

$$\psi_i(\Sigma)(\vec{x}) = f^{-1/4}(\tau) \phi_i(\vec{x}) \quad (7.5.6b)$$

donde las funciones  $\phi_i(\vec{x})$  sí son independientes de  $\Sigma$ .

Por otra parte, el ascenso del índice en  $\psi_j$  introduce un factor extra  $-1/f(\tau)$  y, en consecuencia,  $E^2$  también posee este factor, pudiéndose escribir como,

$$E^2 = p^2/f(\tau) \quad (7.5.7)$$

siendo  $p$  una constante.

Separando las variables en la forma:

$$A_i(t, \vec{x}) = T(t) S_i(\vec{x}) \quad (7.5.8)$$

y teniendo en cuenta que,

$$(\ln \sqrt{-g})^\cdot = (3/2)(\ln f)^\cdot \quad (7.5.9)$$

$$g^{km} \dot{g}_{mi} = \delta^k_i (\ln f)^\cdot \quad (7.5.10)$$

las ecuaciones de campo se escriben como,

$$-f(t) (\mathcal{L}^2)_{ij} S_j = f(t) T^{-1} [ \ddot{T} + (\ln \sqrt{f}) \dot{T} ] S_i(\vec{x}) \quad (7.5.11)$$

y puesto que el primer miembro sólo depende de  $\vec{x}$ , se sigue que,

$$f(t) T^{-1} [ \ddot{T} + (\ln \sqrt{f}) \dot{T} ] = -p^2 \quad (p = \text{const.}) \quad (7.5.12)$$

que es la ecuación de la parte temporal  $T(t)$  de la solución.

Para los modos longitudinales ( $p = 0$ ), la Ec. (7.5.12) puede ser integrada exactamente. En efecto, para  $p = 0$  es,

$$\ddot{T} + (\ln \sqrt{f}) \dot{T} = 0 \quad (7.5.13)$$

que puede reordenarse como,

$$(\ln \dot{T})' = (\ln f^{-1/2})' \quad (7.5.14)$$

y se integra elementalmente, dando

$$T_{\Sigma}(t) = a \int_{\tau}^t f^{-1/2}(t) dt + c \quad (7.5.15)$$

siendo  $a$  y  $c$  constantes de integración a determinarse dando los datos Cauchy sobre la superficie  $\Sigma$ .

Si ahora usamos los datos de Cauchy (7.5.1) y (7.5.2) y llamamos  $\tau$  al tiempo correspondiente a la superficie  $\Sigma$ , se obtienen los siguientes valores para las constantes de integración:

$$a = -i\sigma\sqrt{k} b(\tau) \sqrt{f(\tau)} \quad (7.5.16)$$

$$c = [2\sigma\sqrt{k} b(\tau)]^{-1} \quad (7.5.17)$$

De manera que la parte temporal de la solución asociada con  $\Sigma$  es,

$$T_{\Sigma}(t) = [-i\sigma\sqrt{k} b(\tau) f^{1/2}(\tau)] \int_{\tau}^t f^{-1/2}(t) dt + [2\sigma\sqrt{k} b(\tau)]^{-1} \quad (7.5.18)$$

La solución temporal  $T_{\Sigma'}(t)$  asociada a otra superficie  $\Sigma'$  tendrá la misma forma que (7.5.18) con el reemplazo  $\tau \rightarrow \tau'$ , siendo  $\tau'$  el tiempo correspondiente a  $\Sigma'$ . Puesto que la parte espacial de las soluciones asociadas a ambas superficies difieren solamente en el factor  $f^{-1/4}(\tau)$  que aparece en (7.5.6b), podemos buscar la transformación de Bogolubov que relaciona ambas soluciones como,

$$f^{-1/4}(\tau) T_{\Sigma}(t) = \alpha f^{-1/4}(\tau') T_{\Sigma'}(t) + \beta f^{-1/4}(\tau') T_{\Sigma'}^*(t) \quad (7.5.19)$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  los coeficientes de Bogolubov introducidos en §4.2.

Si consideramos que el campo al tiempo  $\tau$  se encuentra en el estado de vacío  $|0\rangle$ , en particular el valor de expectación del operador número de fotones longitudinales es nulo a ese tiempo. El valor de expectación del operador número de fotones longitudinales asociados al tiempo  $\tau'$  en el estado  $|0\rangle$  está dado por  $|\beta|^2$  (ver Ec. (4.2.17)). Usando las expresiones de  $T_{\Sigma}(t)$  dada por (7.5.18) y la análoga para  $T_{\Sigma'}(t)$ , un breve cálculo permite obtener:

$$\alpha_k = [b^2(\tau') f^{1/2}(\tau') + b^2(\tau) f^{1/2}(\tau)] / 2b(\tau) b(\tau') f^{1/4}(\tau) f^{1/4}(\tau') - \\ -i\sigma^2 k b(\tau) b(\tau') f^{1/4}(\tau) f^{1/4}(\tau') \int_{\tau}^{\tau'} f^{-1/2}(t) dt \quad (7.5.20a)$$

$$\beta_k = [b^2(\tau') f^{1/2}(\tau') - b^2(\tau) f^{1/2}(\tau)] / 2b(\tau) b(\tau') f^{1/4}(\tau) f^{1/4}(\tau') - \\ - i\sigma^2 k b(\tau) b(\tau') f^{1/4}(\tau) f^{1/4}(\tau') \int_{\tau}^{\tau'} f^{-1/2}(t) dt \quad (7.5.20b)$$

de donde se obtiene,

$$|\beta_k|^2 = [b^2(\tau') f^{1/2}(\tau') - b^2(\tau) f^{1/2}(\tau)]^2 / 4b^2(\tau) b^2(\tau') f^{1/2}(\tau) f^{1/2}(\tau') + \\ + \sigma^4 k^2 b^2(\tau) b^2(\tau') f^{1/2}(\tau) f^{1/2}(\tau') \left( \int_{\tau}^{\tau'} f^{-1/2}(t) dt \right)^2 \quad (7.5.21)$$

Esta expresión dá el valor de expectación del número de fotones longitudinales en el modo  $k$ , según el observador a tiempo  $\tau'$  cuando el campo se encuentra en el estado de vacío según el observador al tiempo  $\tau$ , es decir el número de fotones longitudinales de modo  $k$  creados a partir del vacío entre los tiempos  $\tau$  y  $\tau'$ . Puede observarse que la expresión (7.5.21) es simétrica respecto de  $\tau$  y  $\tau'$  como tiene que ocurrir en general, y que además se verifica la relación:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (7.5.22)$$

de acuerdo con la propiedad (4.2.12) de los coeficientes de Bogolubov. Observemos que en (7.5.21) se distinguen claramente dos términos de diferente naturaleza. Uno de ellos (el segundo) es proporcional a  $\sigma^4$ , y en consecuencia desaparece al tomar el límite  $\sigma \rightarrow 0$ . El primero no depende de  $\sigma$  ni de  $k$  y por lo tanto no desaparece tomando  $\sigma \rightarrow 0$  dando origen a igual creación de fotones longitudinales a partir del vacío para todos los valores de  $k$ . Puesto que deseamos evitar tal efecto, es razonable elegir el parámetro  $b(\tau)$ , hasta el momento arbitrario, de tal manera que el primer

término sea nulo. Para que esto sea así debe cumplirse,

$$b^2(\tau') f^{1/2}(\tau') - b^2(\tau) f^{1/2}(\tau) = 0 \quad (7.5.21)$$

de manera que, a menos de un factor irrelevante independiente de  $\Sigma$ , debe ser:

$$b(\tau) = f^{-1/4}(\tau) \quad (7.5.22)$$

Con esta elección del parámetro  $b(\tau)$  el número de fotones longitudinales creados desde el vacío entre  $\tau$  y  $\tau'$  y del tipo  $k$  es:

$$|\beta_k|^2 = \sigma^4 k^2 \left( \int_{\tau}^{\tau'} f^{-1/2}(t) dt \right)^2 \quad (7.5.23)$$

que tiende a cero para  $\sigma \rightarrow 0$ , evitando así la aparición de fotones longitudinales a todo tiempo. Sin embargo, la creación de fotones transversales a partir del vacío puede estar presente, y el cálculo de tal creación no puede expresarse de manera general ya que la Ec. (7.5.12) no puede ser integrada elementalmente para  $p \neq 0$ .

## 7.6. Minimización de la Energía.

Igual que en el caso escalar, tiene interés mostrar, para el campo electromagnético, que la base de soluciones que implementa la diagonalización del Hamiltoniano es la misma que la que minimiza la energía del campo.

Puesto que los coeficientes  $A_k$  y  $B_k$  que determinan los datos de Cauchy obedecen a las mismas ecuaciones en los casos del spin 0 (ver Ec.(6.3.8a,b)) y spin 1 (ver Ec.(7.3.7a,b)), no repetiremos la demostración, la cual puede verse en §6.4 para el campo escalar.

Sí vale la pena decir que la única diferencia entre los dos casos es que en el electromagnético el autovalor  $E_k$  puede tomar el valor 0, que como vimos está asociado con los (no-físicos) fotones longitudinales. Sin embargo, como se mostró en §7.5, estos modos participan en  $H_2$  con un factor  $\sigma^2$ , y como al final de los cálculos se hace  $\sigma \rightarrow 0$  dan una contribución nula a  $H_2$ , por lo que su inclusión en el cálculo de la minimización de la energía se hace innecesaria.

## CAPITULO 8

### EJEMPLOS

En este capítulo aplicaremos la teoría expuesta en diversos casos particulares que presentan interés. Concentraremos nuestra atención en el caso electromagnético, [92], [93]. Para el caso del campo escalar puede verse la Ref. [72].

#### 8.1. Separación de Variables.

Como se ha dicho en §7.5, cuando la métrica en la carta adaptada toma la forma (7.5.4) las ecuaciones de campo admiten la separación de variables, de modo que las soluciones pueden escribirse como el producto de una función dependiente del tiempo por otra dependiente de las coordenadas espaciales como muestra (7.5.8).

Por otra parte, puesto que el operador  $(\mathcal{L}^2)_{ij}$  no depende, en este caso, de  $\Sigma$ , sus autofunciones correspondientes a diferentes  $\Sigma$  sólo difieren en un factor de normalización y lo mismo ocurre con sus autovalores:

$$\psi_i(\Sigma)(\vec{x}) = f^{-1/4}(\tau) \phi_i(\vec{x}) \quad (8.1.1)$$

$$E^2 = k^2/f(\tau) \quad (8.1.2)$$

siendo  $k$  una constante y  $\tau$  el tiempo asociado a  $\Sigma$ .

La parte temporal  $T(t)$  de las soluciones obedece la ecuación (7.5.12):

$$\ddot{T} + (\ln \sqrt{f}) \dot{T} + [k^2/f(t)] T = 0 \quad (8.1.3)$$

con los datos de Cauchy para las soluciones de frecuencia positiva dadas por (7.3.9), que teniendo en cuenta (8.1.2) son

$$T(k,\lambda)|_{\Sigma} = f^{1/4}(\tau) / \sqrt{2k} \quad (8.1.4)$$

$$\dot{T}(k,\lambda)|_{\Sigma} = -i f^{-1/4}(\tau) \sqrt{k/2} \quad (8.1.5)$$

y la expresión del Hamiltoniano es,

$$H_{\Sigma} = f^{-1/2}(\tau) \sum_k k (a_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda} + 1/2) \quad (8.1.6)$$

## 8.2. $V^{\mu}$ es un vector de Killing en un entorno de $\Sigma$ .

Cuando el vector  $V_{\mu}$ , tangente a las trayectorias del fluido de observadores es un vector de Killing en un entorno de la superficie  $\Sigma$  sobre la cual se diagonaliza el Hamiltoniano, la métrica, en la carta adaptada, es independiente del tiempo natural  $t$ , [103].

En este caso, la ecuación que determina  $T(t)$ , la parte temporal de la solución, es (8.1.3) con  $f(t) = 1$ :

$$\ddot{T} + k^2 T = 0 \quad (8.2.1)$$

y los datos de Cauchy (8.1.4,5) son los mismos para todas las superficies  $t = \text{const.}$ ,

$$T(k,\lambda)|_{\Sigma} = 1 / \sqrt{2k} \quad (8.2.2a)$$

$$\dot{T}(k,\lambda)|_{\Sigma} = -i \sqrt{k/2} \quad (8.2.2b)$$

lo cual significa que las soluciones de frecuencia positiva tienen la parte temporal de la forma,

$$T(k,\lambda ; t) = (1 / \sqrt{2k}) e^{-ikt} \quad (8.2.3)$$



La parte transversal del Hamiltoniano toma entonces la forma,

$$H_{\Sigma} = \sum_{k\lambda} k a_{k\lambda}^{\dagger} a_{k\lambda} + (1/2) \sum_k k \quad (8.2.4)$$

En este caso, no hay creación de fotones a lo largo del tiempo, ya que al no tener la métrica una dependencia temporal, el Hamiltoniano se diagonaliza con la misma base a todo tiempo. Tenemos, en consecuencia, una única definición de frecuencia positiva en todo el espacio-tiempo.

Este caso incluye a los observadores de Minkowski y de Rindler en el espacio-tiempo plano, a los observadores comovientes en las métricas de Schwarzschild [104] y la de Einstein estática [105], [98], y también a los observadores de Killing en el espacio de de Sitter.

### 8.3. Vacío Conforme.

La propiedad de invariancia conforme de la teoría expuesta para el campo electromagnético permite obtener directamente el estado de vacío cuando se trata el caso de una métrica que es conforme a otra cuyo vacío asociado es conocido. En efecto, consideremos dos espacios-tiempos diferentes tales que en cada uno de ellos hay un sistema de observadores. Eventualmente, ambos espacios-tiempos podrían ser el mismo en donde se consideran dos flujos de observadores. Supongamos que, cuando se utilizan las respectivas cartas adaptadas, los tensores métricos de ambos espacios-tiempos,  $g_{\mu\nu}$  y  $g'_{\mu\nu}$ , están vinculados por una transformación conforme:

$$g'_{\mu\nu}(x) = \lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (8.3.1)$$

En tal caso, podemos pensar que  $g'_{\mu\nu}(x)$  no es la métrica de otra variedad

sino que es la métrica de la misma variedad a la que corresponde  $g_{\mu\nu}$ , a la que se le ha practicado una transformación conforme, es decir

$$g'_{\mu\nu}(x) = \tilde{g}_{\mu\nu}(x) \quad (8.3.2)$$

Por otra parte, recordamos que el Hamiltoniano  $H_\Sigma$  y el potencial  $A_i$  son objetos de Weyl de peso 0,

$$\tilde{H}_\Sigma[\tilde{\Phi}_i] = H_\Sigma[\Phi_i] \quad \tilde{\Phi}_i = \Phi_i \quad (8.3.3)$$

En consecuencia, si  $(\Phi_i(k,\lambda); \Phi_i^*(k,\lambda))$  es la base que diagonaliza el Hamiltoniano en la métrica  $g_{\mu\nu}$ , la misma base también diagonaliza el Hamiltoniano en la métrica  $g'_{\mu\nu}$ . Así, el concepto bien conocido de vacío conforme, puede ser definido en el caso del campo no masivo de spin 1 de manera análoga en que se lo hace para el caso del campo de spin 0, [63], [106], [107].

#### 8.4. Fluido Geodésico en un Universo de Robertson-Walker.

Un caso de mucho interés en problemas cosmológicos, en donde puede aplicarse la idea de vacío conforme, es el caso del universo de Robertson-Walker.

Si consideramos el fluido geodésico de observadores, en la carta adaptada la métrica toma la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [ d\chi^2 + \rho^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) ] \quad (8.4.1)$$

donde la función  $\rho(\chi)$  toma diferentes formas según que la parte espacial de la métrica sea cerrada, plana o hiperbólica:

$$\rho(\chi) \begin{cases} = \sin \chi & 0 \leq \chi \leq 2\pi & \text{espacialmente cerrada (K=1)} \\ = \chi & 0 \leq \chi \leq \infty & \text{espacialmente plana (K=0)} \\ = \sinh \chi & 0 \leq \chi \leq \infty & \text{espacialmente hiperbólica (K=-1)} \end{cases}$$

Aprovechando que el tiempo natural no está unívocamente determinado, introducimos el *tiempo conforme*  $\eta$ ,

$$t \rightarrow \eta: \quad d\eta = a^{-1}(t) dt \quad (8.4.2)$$

que también es un tiempo natural y, como es bien conocido, esta transformación permite escribir la métrica conforme a la de Minkowski o la del universo estático. Como los vacíos de estos espacios-tiempos son conocidos, podemos extenderlos al caso en estudio usando el vacío conforme.

A título ilustrativo, mostremos la forma explícita de la parte temporal de las soluciones de frecuencia positiva, dadas por

$$T^{(\Sigma)}(k, \lambda; t) = \sqrt{a(\tau)/2k} e^{-ik\eta} \quad (8.4.3)$$

donde las soluciones correspondientes a diferentes superficies de Cauchy sólo difieren en el factor de normalización. Las transformaciones de Bogolubov que relacionan entre sí tales bases no mezclan frecuencias positivas con negativas y en consecuencia, es claro que no hay creación de partículas a lo largo del tiempo, es decir,

$$|\Sigma, 0\rangle = |\Sigma', 0\rangle \quad (8.4.4)$$

En efecto, tenemos un único vacío conforme obtenido directamente desde el vacío del espacio-tiempo plano o desde un universo estático.

### 8.5. Observadores de Rindler.

Un ejemplo importante, encontrado con mucha frecuencia en la literatura [57], [67] es el de un fluido de observadores en movimiento uniformemente acelerado en el referencial propio, en el espacio de Minkowski, el cual es conocido como fluido de observadores de Rindler. Eligiendo en esta sección las unidades de manera que  $G = \hbar = c = k$  (constante de Boltzmann) = 1, y considerando que la aceleración ocurre a lo largo del eje  $x$ , la relación entre las coordenadas de Rindler  $(\eta, \xi, y, z)$  y las de Minkowski  $(t, x, y, z)$  está dada por, [108], [109],

$$t = \pm \xi \operatorname{sh} \eta \quad x = \pm \xi \operatorname{ch} \eta \quad (8.5.1)$$

con el signo superior válido para  $(t, x)$  en  $R^+$  ( $x > |t|$ ) y el inferior para  $(t, x)$  en  $R^-$  ( $x < -|t|$ ). Las líneas  $\xi = \text{const.}$  corresponden a las trayectorias de los observadores acelerados. En coordenadas de Rindler la métrica toma la forma,

$$ds^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 - dy^2 - dz^2 \quad (8.5.2)$$

En este caso la determinación de los modos de frecuencia positiva resulta trivial, ya que ambos fluidos poseen vectores de Killing temporales:  $\partial/\partial t$  para el fluido de Minkowski y  $\partial/\partial \eta$  para el de Rindler. Nuestro interés se centra en determinar el contenido de partículas que los observadores acelerados adjudican al campo electromagnético, cuando éste se encuentra en el estado de vacío desde el punto de vista de los observadores minkowskianos. Para ello deberemos obtener la transformación de Bogolubov entre las bases asociadas a ambos fluidos, y es importante notar que, a fin de hallar tal relación, las soluciones correspondientes a ambos conjuntos de observadores deberán estar referidas a la misma carta

geométrica y al mismo gauge. El cálculo será realizado en el gauge de Candelas y Deutsch (GCD), que es un gauge de Lorentz con una condición de gauge adicional (ver condiciones (8.5.12)).

En un espacio-tiempo plano la ecuación para el 4-potencial  $A_\mu$  es,

$$\square A^\mu - \nabla^\mu (\nabla_\nu A^\nu) = 0 \quad (8.5.3)$$

donde  $\square = \nabla^\nu \nabla_\nu$ , y si imponemos la condición de gauge de Lorentz,

$$\nabla_\nu A^\nu = 0 \quad (8.5.4)$$

se reduce, simplemente, a,

$$\square A^\mu = 0 \quad (8.5.5)$$

Pero la condición de Lorentz (8.5.4) no especifica completamente el gauge.

En efecto, si hacemos una transformación de gauge,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \nabla_\mu \Lambda \quad (8.5.6)$$

se sigue que,

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu} A^{\mu} + \square \Lambda \quad (8.5.7)$$

de manera que, para no violar la condición de Lorentz, la función  $\Lambda$  deberá cumplir,

$$\square \Lambda = 0 \quad (8.5.8)$$

Si convenimos en llamar  $a,b,c,$  a los índices bidimensionales que recorren los valores  $(\eta, \xi)$  e  $i,j,k, \dots$  a los que recorren los valores  $(y,z)$ , resulta que frente a la transformación de gauge (8.5.6) es,

$$\nabla_j A_j \rightarrow \nabla_j A_j + \nabla^2 \Lambda \quad (8.5.9)$$

siendo  $\nabla^2 = (\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$  el laplaciano asociado a las 2 coordenadas no sujetas a aceleración. Como la dependencia de los modos respecto de las coordenadas  $(y,z)$  puede ser explicitada como  $\exp(\vec{k} \cdot \vec{x})$ , donde  $\vec{k} = (k_y, k_z)$  y  $\vec{x} = (y,z)$ , se sigue que eligiendo la función  $\Lambda$  como,

$$\Lambda = i k_j A_j / k^2 \quad (8.5.10)$$

obtenemos la condición suplementaria,

$$\nabla_j A_j = 0 \quad (8.5.11)$$

Si recordamos la condición de Lorentz (8.5.4), y además tenemos en cuenta que puede ser especificado el gauge agregando la (8.5.11), tenemos

finalmente, las siguientes condiciones de gauge:

$$\nabla_a A^a = 0 \quad a = \eta, \xi \quad (8.5.12a)$$

$$\nabla_j A^j = 0 \quad j = y, z \quad (8.5.12b)$$

Estas relaciones, implican que las soluciones de Rindler para  $A_\mu$  pueden ser escritas en términos de dos escalares  $\Psi$  y  $\phi$ , [116], como,

$$A_a = \epsilon_{ab} \nabla^b \Psi \quad (8.5.13a)$$

$$A_j = \epsilon_{jk} \nabla^k \phi \quad (8.5.13b)$$

donde  $\epsilon_{ab} = \xi \epsilon_{jk}$ , siendo  $\epsilon_{jk}$  el tensor antisimétrico de rango 2 dado por  $\epsilon_{yy} = -\epsilon_{zz} = 1$ ,  $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0$ , y los escalares  $\Psi$  y  $\phi$  obedecen a la ecuación de Klein-Gordon no masiva,

$$\square \Psi = \square \phi = 0 \quad (8.5.14)$$

De esta manera, las soluciones para el caso vectorial pueden expresarse mediante las del caso escalar, las que tienen la forma,

$$\phi \sim e^{-i\Omega\eta + i\vec{k} \cdot \vec{x}} K_{i\Omega}(k\xi) \quad , \quad \text{con } \Omega > 0 \text{ y } k = |\vec{k}| \quad (8.5.15)$$

siendo  $K_{i\Omega}(k\xi)$  las funciones de Bessel modificadas de orden imaginario.

En notación vectorial, las relaciones (8.5.13) son,

$$A_\mu \sim (-\xi \partial_\xi \Psi, -\xi^{-1} \partial_\eta \Psi, -\partial_z \phi, \partial_y \phi) \quad (8.5.16)$$

y dado que  $\Psi$  y  $\phi$  son campos escalares independientes entre sí, dan origen, vía (8.5.16), a dos soluciones vectoriales independientes, es decir a dos

modos de polarización, que podemos elegir tomando  $\Psi=0$  en uno y  $\Phi=0$  en el otro,

$$A_\mu(1) \sim (0, 0, -\partial_z \Phi, \partial_y \Phi) \quad (8.5.17a)$$

$$A_\mu(2) \sim (-\xi \partial_\xi \Psi, -\xi^{-1} \partial_\eta \Psi, 0, 0) \quad (8.5.17b)$$

las que reemplazando las soluciones (8.5.15) toman la forma,

$$A_\mu(1) \sim (0, 0, -ik_z, ik_y) e^{-i\Omega\eta + i\vec{k}\cdot\vec{x}} K_{10}(k\xi) \quad (8.5.18a)$$

$$A_\mu(2) \sim (-\xi \partial_\xi K_{10}(k\xi), -i\Omega \xi^{-1} K_{10}(k\xi), 0, 0) e^{-i\Omega\eta + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (8.5.18b)$$

Para ortonormalizar estos modos debemos recurrir al producto interno adaptado al gauge de Lorentz:

$$\langle f^\mu, g_\mu \rangle = -i \int (g^\mu \nabla_\nu f_\mu^* - f_\mu^* \nabla_\nu g^\mu) d\sigma^\nu \quad (8.5.19)$$

y, si tenemos en cuenta que en la métrica (8.5.2) las únicas componentes no nulas de la conexión son  $\Gamma^\eta_{\eta\xi} = \xi^{-1}$ ,  $\Gamma^\xi_{\eta\eta} = \xi$  e integramos sobre una hipersuperficie  $\eta = \text{const.}$ , el producto interno toma la forma explícita,

$$\langle f^\mu, g_\mu \rangle = -i \int [(g^\mu \partial_\eta f_\mu^* - f_\mu^* \partial_\eta g^\mu) + 2\xi^{-1} (f_\eta^* g_\xi - g_\eta f_\xi^*)] \xi^{-1} d\xi dy dz \quad (8.5.20)$$

donde si se consideran las soluciones asociadas con los observadores de la región  $R^+$ , la integración sobre  $\xi$  debe hacerse entre 0 y  $+\infty$ .

En el Apéndice 6 pueden verse los detalles matemáticos del cálculo de las integrales que aparecen en la normalización de los modos. Los modos de Rindler, ya ortonormalizados, correspondientes a los observadores acelerados de la región  $R^+$  son,



$$\begin{aligned}\phi_{\mu}(1, \Omega, \vec{k}) &= i[2\pi k \sqrt{\pi \Omega} \Gamma(i\Omega)]^{-1} K_{i\Omega}(k\xi)(0, 0, -k_z, k_y) e^{-i\Omega\eta + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \phi_{\mu}(2, \Omega, \vec{k}) &= i[2\pi k \sqrt{\pi \Omega} \Gamma(i\Omega)]^{-1} (\xi \partial_{\xi} K_{i\Omega}(k\xi), -i\Omega \xi^{-1} K_{i\Omega}(k\xi), 0, 0) e^{-i\Omega\eta + i\vec{k} \cdot \vec{x}}\end{aligned}\quad (8.5.21)$$

Notemos que cada modo está rotulado con tres índices: la frecuencia de Rindler  $\Omega$  y las dos componentes del vector  $\vec{k}$ . Vayamos ahora a la obtención de los modos de Minkowski. Si los escribimos en la carta de Minkowski como,

$$r_{\mu}(b, \vec{k}, k_x) = [2(2\pi)^3 \omega]^{-1/2} q_{\mu}(b, \vec{k}, k_x) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - k_x x)} \quad (8.5.22)$$

donde  $\omega = \sqrt{k^2 + k_x^2}$ ,  $b=1,2$  describiendo los dos modos de polarización y  $q_{\mu}$  es un vector independiente de  $x^{\mu}$ , resulta que las condiciones de gauge (8.5.12) imponen las siguientes relaciones para  $q_{\mu}$ :

$$\vec{k} \cdot \vec{q} = 0 \quad (8.5.23a)$$

$$q_0 = -k_x q_x / \omega \quad (8.5.23b)$$

donde  $\vec{q}$  es el correspondiente 2-vector en el plano  $(y,z)$ . Por otro lado, las condiciones de ortonormalidad en el producto interno equivalen a que  $q_{\mu}$  sea unitario:

$$q^{\mu}(b, \vec{k}, k_x) q_{\mu}(b, \vec{k}, k_x) = -1 \quad (8.5.24)$$

Entonces, elegimos los modos de polarización tomando en un caso  $q_0 = 0$  (y en consecuencia  $q_x = 0$ ) y en el otro  $\vec{q} = 0$ , es decir:

$$q_{\mu}(1, \vec{k}, k_x) = (0, 0, -n_z, n_y) \quad (8.5.25a)$$

$$q_{\mu}(2, \vec{k}, k_x) = k^{-1}(k_x, -\omega, 0, 0) \quad (8.5.25b)$$

donde  $n_y, n_z$  son las componentes del vector unitario en la dirección de  $\vec{k}$ .

Así, los modos normalizados de Minkowski, expresados en la carta de Minkowski se escriben como,

$$f_{\mu}(1, \vec{k}, k_x) = [2(2\pi)^3\omega]^{-1/2} (0,0,-n_z,n_y) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - k_x x)} \quad (8.5.26a)$$

$$f_{\mu}(2, \vec{k}, k_x) = [2(2\pi)^3\omega]^{-1/2} k^{-1}(k_x, -\omega, 0, 0) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - k_x x)} \quad (8.5.26b)$$

quedando rotulados por las 3 componentes del impulso  $(k_x, \vec{k})$ .

Como ya hemos mencionado, para obtener los coeficientes de Bobolubov que relacionan los modos de Minkowski con los de Rindler, es menester que ambos modos estén expresados en el mismo gauge y en la misma carta geométrica. Pasando, los modos de Minkowski (8.5.26) a la carta de Rindler en  $R^+$ , tenemos,

$$f_{\mu}(1, \vec{k}, k_x) = [2(2\pi)^3\omega]^{-1/2} (0,0,-n_z,n_y) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - k_x x)} \quad (8.5.27a)$$

$$f_{\mu}(2, \vec{k}, k_x) = [2(2\pi)^3\omega]^{-1/2} k^{-1}(\xi k_x \text{ch}\eta - \xi \omega \text{sh}\eta, k_x \text{sh}\eta - \omega \text{ch}\eta, 0, 0) \\ \times e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - k_x x)} \quad (8.5.27b)$$

Por supuesto, podríamos obtener expresiones semejantes para los modos de Minkowski referidos a la carta de Rindler en la región  $R^-$ , pero no será necesario a fin de obtener el espectro de partículas detectado por los observadores acelerados de  $R^+$ .

Estamós ahora en condiciones de obtener la relación entre los modos de Rindler (8.5.21) y los de Minkowski (8.5.27),

$$f_{\mu}(b', k') = \sum_b \int \{ \alpha_{b',b}(k', k) \phi_{\mu}(b, k) + \beta_{b',b}(k', k) \phi_{\mu}^*(b, k) \} dk \quad (8.5.28)$$

donde, por brevedad hemos designado con  $k \equiv (\Omega, \vec{k})$  al conjunto de índices que caracteriza a los modos de Rindler y con  $k' \equiv (k_x, \vec{k})$  a los

correspondientes de los modos de Minkowski. En general, los índices primados corresponderán a los modos de Minkowski y los sin primar a los de Rindler. Tomando productos internos en (8.5.28) obtenemos, para los coeficientes de Bogolubov,

$$\alpha_{b'b}(k',k) = -\langle \phi_{\mu}(b,k); f_{\mu}(b',k') \rangle \quad (8.5.29a)$$

$$\beta_{b'b}(k',k) = -\langle \phi_{\mu}^*(b,k); f_{\mu}(b',k') \rangle \quad (8.5.29b)$$

Claramente los coeficientes de Bogolubov serán matrices de 2X2, dado que los índices discretos b y b' toman valores sobre los dos posibles modos de polarización independientes. Sin embargo, un breve cálculo muestra que los términos extradiagonales de estas matrices son nulos:  $\alpha_{2'1} = \beta_{2'1} = 0$ .

En virtud de la forma de los modos de Rindler y de Minkowski, el cálculo de los coeficientes de Bogolubov consiste en la evaluación de transformadas de Fourier de expresiones en las que aparecen las funciones  $K_{1\Omega}$  y potencias de sus argumentos,

$$K_{m,n} = \int_0^{\infty} d\xi e^{ik_x \xi} \xi^{-n} K_{1\Omega-m}(k\xi) \quad (8.5.30)$$

donde m y n son enteros no negativos. La evaluación de estas integrales puede verse en detalle en el Apéndice 6. Comencemos por  $\alpha_{1'1}$  y  $\beta_{1'1}$ ; el resultado de la evaluación de los productos internos es,

$$\alpha_{1'1} = [2\pi\Gamma(-i\Omega)(\Omega\omega)^{1/2}]^{-1} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) (\omega K_{0,0} + \Omega K_{0,1}) \quad (8.5.31a)$$

$$\beta_{1'1} = [2\pi\Gamma(i\Omega)(\Omega\omega)^{1/2}]^{-1} \delta(\vec{k}' + \vec{k}) (-\omega K_{0,0} + \Omega K_{0,1}) \quad (8.5.31b)$$

Reemplazando los valores de las integrales,

$$\begin{aligned}
K_{0,0} &= \pi(2\omega \operatorname{sh} \Omega \pi)^{-1} \left[ \left[ (\omega - k_x)/k \right]^{-1} \Omega e^{\pi \Omega / 2} - \left[ (\omega - k_x)/k \right] \Omega e^{-\pi \Omega / 2} \right] \\
K_{0,1} &= \pi(2\Omega \operatorname{sh} \Omega \pi)^{-1} \left[ \left[ (\omega - k_x)/k \right]^{-1} \Omega e^{\pi \Omega / 2} + \left[ (\omega - k_x)/k \right] \Omega e^{-\pi \Omega / 2} \right]
\end{aligned} \tag{8.5.32}$$

obtenemos,

$$\alpha_{1,1} = (2\pi)^{-1} (\Omega/\omega)^{1/2} \Gamma(i\Omega) \left[ (\omega - k_x)/k \right]^{-1} \Omega e^{\pi \Omega / 2} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \tag{8.5.33a}$$

$$\beta_{1,1} = (2\pi)^{-1} (\Omega/\omega)^{1/2} \Gamma(-i\Omega) \left[ (\omega - k_x)/k \right] \Omega e^{-\pi \Omega / 2} \delta(\vec{k}' + \vec{k}) \tag{8.5.33b}$$

Vayamos ahora al cálculo de los coeficientes de Bogolubov asociados con los modos de polarización tipo 2, es decir  $\alpha_{2,2}$  y  $\beta_{2,2}$ . La evaluación del producto interno entre los modos tipo 2 conduce a,

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,2} &= i[2\pi k^2 \Gamma(-i\Omega)]^{-1} (\omega/\Omega)^{1/2} \int_0^\infty d\xi e^{ik_x \xi} \left\{ (1 - \Omega k_x \omega^{-1} - 1) \xi^{-1} \partial_\xi K_{1\Omega} + \right. \\
&\quad \left. + ik_x \partial_\xi K_{1\Omega} - (1 - \Omega k_x \omega^{-1} + \Omega^2) \xi^{-2} K_{1\Omega} - \Omega \omega \xi^{-1} K_{1\Omega} \right\}
\end{aligned} \tag{8.5.34}$$

donde por brevedad hemos omitido el argumento en las funciones  $K_{1\Omega} \equiv K_{1\Omega}(k\xi)$ . Las derivadas de las  $K_{1\Omega}$  pueden eliminarse haciendo uso de la identidad,

$$\partial_\xi K_{1\Omega}(k\xi) = -k K_{1\Omega}(k\xi) - \Omega \xi^{-1} K_{1\Omega}(k\xi) \tag{8.5.35}$$

con lo que (8.5.34) toma la forma,

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,2} &= i[2\pi k^2 \Gamma(-i\Omega)]^{-1} (\omega/\Omega)^{1/2} \left\{ k(-1 - \Omega k_x \omega^{-1} + 1) K_{1,1} + ikk_x K_{1,0} + \right. \\
&\quad \left. + \Omega(i - \Omega)(1 - k_x/\omega) K_{0,2} - \Omega(\omega - k_x) K_{0,1} \right\}
\end{aligned} \tag{8.5.36}$$

donde las transformadas  $K_{m,n}$  están dadas por,

$$K_{1,1} = \Omega [2k(i\Omega - 1)]^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \{ (\omega - k_x)[(\omega - k_x)/k]^{-1} \Omega e^{\pi\Omega/2} - (\omega + k_x)[(\omega - k_x)/k] \Omega e^{-\pi\Omega/2} \}$$

$$K_{1,0} = -i\Omega(2\omega k)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \{ (\omega - k_x)[(\omega - k_x)/k]^{-1} \Omega e^{\pi\Omega/2} + (\omega + k_x)[(\omega - k_x)/k] \Omega e^{-\pi\Omega/2} \}$$

$$K_{0,2} = [2(1 + \Omega^2)]^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \{ (ik_x + \Omega\omega)[(\omega - k_x)/k]^{-1} \Omega e^{\pi\Omega/2} + (ik_x + \Omega\omega)[(\omega - k_x)/k] \Omega e^{-\pi\Omega/2} \}$$

$$K_{0,1} = (1/2) |\Gamma(i\Omega)|^2 \{ [(\omega - k_x)/k]^{-1} \Omega e^{\pi\Omega/2} + [(\omega - k_x)/k] \Omega e^{-\pi\Omega/2} \} \quad (8.5.37)$$

de donde, reemplazando en (8.5.36), y después de algunas simplificaciones algebraicas, obtenemos

$$\alpha_{2,2} = (2\pi)^{-1} (\Omega/\omega)^{1/2} \Gamma(i\Omega) [(\omega - k_x)/k]^{-1} \Omega e^{\pi\Omega/2} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (8.5.38a)$$

es decir, el mismo resultado que para  $\alpha_{1,1}$ . Haciendo los cálculos correspondientes, obtenemos para  $\beta_{2,2}$ :

$$\beta_{2,2} = (2\pi)^{-1} (\Omega/\omega)^{1/2} \Gamma(-i\Omega) [(\omega - k_x)/k] \Omega e^{-\pi\Omega/2} \delta(\vec{k}' + \vec{k}) \quad (8.5.38b)$$

Queda así claro que el espectro observado para ambos modos de polarización es el mismo. Vayamos ahora al problema determinar el espectro de partículas que corresponde a los coeficientes de Bogolubov del tipo (8.5.33). La relación entre los operadores de aniquilación de partículas de Minkowski  $a_k$  y los correspondientes  $b_k$  de Rindler es,

$$b_k = \int dk' \{ a_{k'} \alpha(k', k) + a_{k'}^\dagger \beta^*(k', k) \} \quad (8.5.39)$$

donde hemos omitido el índice que discrimina los modos de polarización a fin de no recargar la notación. Reemplazando las expresiones obtenidas para los coeficientes de Bogolubov, tenemos

$$b(\Omega, \vec{k}) = \int dk_x d\vec{k}' \{ (2\pi)^{-1} (\Omega/\omega)^{1/2} \Gamma(i\Omega) [(\omega - k_x)/k]^{-i\Omega} e^{\pi\Omega/2} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) a(k_x, \vec{k}) \\ + (2\pi)^{-1} (\Omega/\omega)^{1/2} \Gamma(-i\Omega) [(\omega - k_x)/k]^{i\Omega} e^{-\pi\Omega/2} \delta(\vec{k}' + \vec{k}) a^\dagger(k_x, \vec{k}) \} \quad (8.5.40)$$

Resulta conveniente definir el operador,

$$d(\sigma, \Omega, \vec{k}) = (2\Omega \text{sh}\pi\Omega)^{1/2} (2\pi)^{-1} \Gamma(-\sigma i\Omega) k^{-\sigma i\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \omega^{-1/2} (\omega - k_x)^{\sigma i\Omega} a(k_x, \vec{k}) \quad (8.5.41)$$

donde  $\sigma$  puede tomar los valores  $+1$  y  $-1$ , con lo que (8.5.40) toma la forma,

$$b(\Omega, \vec{k}) = (2\text{sh}\pi\Omega)^{-1/2} \{ e^{\pi\Omega/2} d(+, \Omega, \vec{k}) + e^{-\pi\Omega/2} d^\dagger(-, \Omega, -\vec{k}) \} \quad (8.5.42)$$

Es inmediato comprobar, a partir de su definición (8.5.41) que  $d(\sigma, \Omega, \vec{k})$  es un operador de aniquilación de partículas de Minkowski. En efecto, aniquila el vacío de Minkowski, y cumple la correcta relación de conmutación,

$$d(\sigma, \Omega, \vec{k}) |0_M\rangle = 0 \quad , \quad \forall \sigma, \Omega, \vec{k} \\ [d(\sigma, \Omega, \vec{k}), d^\dagger(\sigma', \Omega', \vec{k}')] = \delta\sigma\sigma'\delta(\Omega - \Omega')\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (8.5.43)$$

Es entonces sencillo calcular el valor de expectación del número de partículas de Rindler,  $N(\Omega, \vec{k}) = b^\dagger(\Omega, \vec{k}) b(\Omega, \vec{k})$ , percibido cuando el campo se encuentra en el estado de vacío de Minkowski,

Vemos así, que el vacío de Minkowski presenta, desde el punto de vista de los observadores de Rindler y en el GCD, una distribución planckiana de partículas de spin 1, en cada modo de polarización, y con temperatura  $T_0 = 1/2\pi$ .

Puede llamar la atención que la aceleración del observador no aparezca en la expresión (8.5.44), pero debe tenerse en cuenta que la temperatura  $T_0$  es una temperatura global, asociada con todo el fluido de observadores. La temperatura  $T$  percibida por el observador acelerado con aceleración  $a$  está dada por la relación de Tolman, [110], [111], [112],

$$T = T_0 / \sqrt{g_{00}} = 1/2\pi \sqrt{g_{00}} \quad (8.5.45)$$

y como de (8.5.2) es  $g_{00} = \xi^2$ , y la coordenada  $\xi$  parametriza a observadores de aceleración  $a = \xi^{-1}$ , se sigue que la temperatura percibida por cada observador es,

$$T = a/2\pi \quad (8.5.46)$$

Es importante notar que Candelas y Deutsch, [116], calcularon el valor de expectación del tensor energía-momento del campo electromagnético percibido por el observador acelerado, cuando el campo está en el estado de vacío de Minkowski y encontraron un espectro térmico, pero no Planckiano,

$$T_{\mu\nu} \sim -\frac{a^4}{\pi^2} \int_0^\infty d\Omega \Omega^3 (1 + \Omega^{-2}) (e^{2\pi\Omega} - 1)^{-1} \text{diag}(-1, 1/3, 1/3, 1/3) \quad (8.5.47)$$

Este fenómeno, de que la distribución del valor de expectación del número de partículas tiene una forma planckiana, mientras que el del tensor energía-momento tiene forma térmica pero no planckiana, ha sido explicado por Takagi [117] sobre la base de la densidad de estados asociada con el detector. En efecto, el espectro de energía se aparta, de la forma planckiana debido a la aparición del factor  $(1+\Omega^{-2})$ , denominado la "densidad de estados reducida" asociada al detector, [121], [124], [66], [125]. Por otra parte, esta diferencia entre las distribuciones de partículas y de energía no es privativa del caso electromagnético; también aparece cuando se estudia el campo escalar en dimensión arbitraria  $n$  del espacio-tiempo [122], [123], [117], en tal caso la densidad de estados reducida se obtiene recursivamente como:

$$d_n(\Omega) = [1 + (n/2 - 2)^2 \Omega^{-2}] d_{n-2}(\Omega), n \geq 4, d_2 = d_3 = 1 \quad (8.5.48)$$

Claramente  $d_4(\Omega) = 1$ , pero esto no es así para  $n > 4$ . Aparece, además, el curioso fenómeno de que si  $n$  es impar el espectro del número de partículas no cambia, pero el de energía se vuelve del tipo Fermi-Dirac, mientras que para  $n$  par es del tipo Bose-Einstein [117] (con las correcciones debidas a  $d_n(\Omega)$ ). Esta aparente inversión de la estadística también ha sido obtenida para el campo de spin 1/2 [126]. En general, el factor de densidad de estados reducida dependerá del spin del campo y de la dimensión del espacio-tiempo. Un análisis más detallado de la densidad de estados del detector, y su relación con la geometría de la variedad de Rindler y de otros espacio-tiempos estáticos puede encontrarse en [127].

En síntesis, el cálculo de los coeficientes de Bogolubov nos ha conducido a un espectro de partículas planckiano, mientras que el espectro de energía se aparta de la forma planckiana debido a la aparición del factor de



densidad de estados reducida.

En unidades ordinarias (8.5.46) se escribe,

$$T = \hbar a / 2\pi k_B c = (4 \times 10^{-23} \text{ } ^\circ\text{K cm}^{-1} \text{ seg}^2) a \quad (8.5.49)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $c$  la velocidad de la luz. Entonces, para percibir un espectro térmico de, por ejemplo  $4 \text{ } ^\circ\text{K}$ , la aceleración del observador debería tener el enorme valor de  $10^{23} \text{ cm/seg}^2$ . Por otra parte, a partir del principio de equivalencia, esta relación entre temperatura y aceleración impone un límite al descenso de la temperatura dentro de un campo gravitacional. Así, para la superficie de la Tierra, en donde la aceleración de la gravedad es de aproximadamente  $10^3 \text{ cm/seg}^2$ , este límite es de  $4 \times 10^{-20} \text{ } ^\circ\text{K}$  que, aunque se encuentra más allá de las posibilidades experimentales accesibles en la actualidad, es mayor que cero.

## CONCLUSIONES

Hemos establecido un formalismo que describe un campo electromagnético cuantificado en interacción con el campo gravitacional y con las siguientes propiedades:

- a) La teoría está enmarcada dentro de la aproximación semiclásica a la gravedad cuántica, es decir que el campo electromagnético está cuantificado pero el gravitatorio permanece clásico.
- b) El campo electromagnético es concebido como un campo no masivo de spin 1. Como tal tiene, en principio, 4 grados de libertad, de los cuales solamente 2 son físicos. Los grados de libertad no-físicos son eliminados, uno *a priori* mediante la condición de gauge temporal (§3.5), y otro *a posteriori* (modo longitudinal) haciendo tender a cero un parámetro introducido a tal efecto (§7.5). En consecuencia, sólo aparecen fotones transversales.
- c) El formalismo es invariante conforme, como se acepta generalmente para campos no masivos, lo cual es asegurado explícitamente mediante la introducción de herramientas matemáticas apropiadas (derivada conforme, producto interno, etc.).
- d) El operador Hamiltoniano de la teoría depende del observador vía el vector  $V^{\mu}$  que caracteriza al fluido de observadores (§7.1).
- e) La teoría está planteada para un espacio-tiempo arbitrario y para observadores en general con pocas restricciones: el espacio-tiempo debe ser globalmente hiperbólico para que existan superficies de

Cauchy globales y el fluido de observadores debe ser irrotacional para que existan hipersuperficies ortogonales a las líneas de fluido. Esta última propiedad del fluido de observadores es la que hace posible introducir la noción de tiempo (tiempo natural, §5.3).

- f) La ambigüedad en la definición de las soluciones de frecuencia positiva, característica de la teoría cuántica de campos en espacio curvo, es resuelta mediante el criterio de diagonalización del Hamiltoniano (§7.3). Aunque este criterio ha sido utilizado muchas veces con anterioridad por otros autores, la novedad consiste en que aquí tratamos con un Hamiltoniano dependiente del observador. Esto hace que la definición de frecuencia positiva sea dependiente del observador, y consecuentemente el estado de vacío del campo también.
- g) Los datos de Cauchy que determinan las soluciones de frecuencia positiva son obtenidos resolviendo una ecuación de autovalores para el operador  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  (§7.3). Puesto que este operador es en general diferente para cada superficie de Cauchy, lo mismo ocurre con la descomposición en frecuencias positivas y negativas. De esta manera, el modelo de partícula obtenido puede ser diferente tiempo a tiempo dando lugar al fenómeno de creación de partículas a lo largo del tiempo. El modelo de partícula depende, entonces, del observador y del tiempo.
- h) El estado de polarización de los fotones no puede ser relacionado con la dirección de propagación como en el espacio plano ya que en el espacio curvo se carece, en general, de tantas simétrías. La condición de gauge, que elimina a priori un grado de libertad, es implementada considerando cero la proyección del campo  $A_\mu$  sobre la velocidad del fluido de observadores  $U_\mu$  (gauge temporal). La teoría pueda ser formulada

satisfactoriamente, y el observador juega el doble rol de definir el Hamiltoniano y el gauge. Por otra parte, la transversalidad debe referirse al cumplimiento de la Ley de Gauss, y esto tiene estrecha relación con los autovalores,  $E^2$ , del operador  $(\mathcal{L}^2)_{ij}$ :  $E^2 > 0$  corresponde a modos transversales y  $E^2 = 0$  a modos longitudinales (§7.4).

Dado que el modelo de partícula cambia instante a instante, lo mismo puede ocurrir con el concepto de modo longitudinal, y si el campo se encuentra en un estado carente de fotones longitudinales al tiempo  $t$ , no es evidente que al tiempo  $t'$  no aparezcan fotones longitudinales. Sin embargo, hemos calculado los correspondientes coeficientes de Bogolubov, para el caso en que la separación de variables es posible, y hemos demostrado que puede elegirse el valor de un parámetro arbitrario para que la creación de modos longitudinales no ocurra (§7.5).

- i) La base de soluciones que diagonaliza el Hamiltoniano es la misma que minimiza la energía, definida como el valor de expectación del Hamiltoniano en el estado de vacío (§7.6), tal como ocurre para el campo escalar (§6.4).
  
- j) La aplicación de nuestro formalismo a diversos casos particulares produce resultados ya conocidos en la literatura para el caso escalar. Así, cuando existe un vector de Killing en un entorno de la superficie de Cauchy  $\Sigma$  se obtiene como vacío asociado a  $\Sigma$  el vacío de Killing (§8.2). Cuando la métrica en carta adaptada está vinculada por medio de una transformación conforme a otra de la cual se conoce el vacío, se aplica el concepto de vacío conforme (§8.3). Por ejemplo, en el universo de Robertson-Walker y para un fluido geodésico, que es conforme a la métrica de Minkowski, la aplicación del vacío conforme nos da un único vacío para todo el espacio-tiempo (§8.4).

Además, vimos en §8.5 que un observador uniformemente acelerado en el espacio de Minkowski, percibe el vacío electromagnético de Minkowski como un espectro energético térmico, aunque no planckiano, de fotones con la temperatura de Unruh-Davies,  $T = \hbar a / 2\pi k c$ . Sin embargo, en el gauge de Candelas y Deutsch, el espectro asociado al número de partículas es planckiano. La diferencia entre los espectros, de energía y de partículas, reside en la distorsión generada por el factor de densidad de estados reducida.

Por último, es importante mencionar que, para que una teoría de campos cuánticos sea consistente, debe ser predictiva, en el sentido de poder predecir los valores de magnitudes observables experimentalmente.

Como se sabe, es típico de las teorías de campo la aparición de cantidades infinitas cuando se intentan calcular los valores de diversas entidades de interés, tales como el tensor energía-momento. Estos infinitos son transformados en cantidades dotadas de sentido físico mediante algún esquema de renormalización. Puesto que este tópico no ha sido encarado en la presente tesis, está claro que debería estudiarse si nuestro modelo de fotón en el espacio curvo conduce a una teoría renormalizable. Si esto fuera así, dispondríamos de un modelo consistente para estudiar la influencia cuántica de la gravitación sobre el campo electromagnético para las regiones en donde la aproximación semiclásica tiene validez.

## Apéndice 1 :

### Unicidad de $\Lambda_\mu$

En este apéndice demostraremos que, en 4 dimensiones, la variación conforme de la conexión spinorial queda unívocamente determinada por las condiciones (3.2.18) y (3.2.24) y está dada por la Ec. (3.2.25).

Nos interesa entonces encontrar la expresión más general de una matriz de  $4 \times 4$  que satisface las siguientes propiedades:

$$[\Lambda_\mu, \gamma^\mu] = 0 \quad (A1.1)$$

$$[\Lambda_\mu, \gamma_\nu] = (1/2)(\gamma_\mu g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} \gamma_\rho) \nabla^\rho \ln \lambda \quad (A1.2)$$

donde  $[ , ]$  y  $\{ , \}$  indican el conmutador y anticonmutador, respectivamente.

Las matrices de Dirac  $\gamma_\mu$  cumplen la relación

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2 g_{\mu\nu} \quad (A1.3)$$

Cualquier matriz de  $4 \times 4$  puede ser expresada en términos de 16 matrices de  $4 \times 4$  linealmente independientes, por ejemplo las siguientes  $\Gamma^A$ :

$$\Gamma^A = (1, \gamma^5, -i\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, -i\sigma^{\mu\nu}) \quad (A = 1, 2, \dots, 16) \quad (A1.4)$$

donde  $1$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$  y  $\sigma^{\mu\nu}$  y  $\gamma^5$  están definidas como

$$\sigma^{\mu\nu} = (1/2) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (A1.5)$$

$$\gamma^5 = (-i/4! \sqrt{-g}) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \quad (A1.6)$$

siendo  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$  el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico ( $\epsilon^{0123} =$

+1). Las matrices  $\Gamma^A$  forman la base de un álgebra de Clifford [113] y el desarrollo de una matriz cualquiera en esa base es conocido como expansión de Clifford. Así, para una matriz  $M$  de  $4 \times 4$  se tiene:

$$M = \sum_A C_A \Gamma^A \quad (A1.7)$$

donde los coeficientes  $C_A$  están dados como

$$C_A = (1/4) \text{Tr} (M \Gamma_A) \quad (A1.8)$$

(las matrices  $\Gamma_A$  se definen como las  $\Gamma^A$  con los índices abatidos por la métrica  $g_{\mu\nu}$ ).

Las propiedades algebraicas de las  $\Gamma^A$  se desprenden de las de las  $\gamma^\mu$ , y mientras no consideremos derivadas segundas de la métrica, podemos trabajar en un sistema de coordenadas localmente inercial, obedeciendo en tal caso las matrices de Dirac a la relación algebraica (A1.3) pero donde  $g_{\mu\nu}$  es sustituido por el tensor de Minkowski.

Algunas propiedades importantes de las  $\Gamma^A$  son:

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\Gamma^A) &= 0 \quad ; \quad (\forall A \neq 1) \\ \Gamma^A \Gamma_A &= I \\ \text{Tr} (\Gamma^A \Gamma_A) &= 4 \delta^A_B I \end{aligned} \quad (A1.9)$$

Postulemos para  $\Lambda_\mu$  un desarrollo de Clifford con coeficientes a determinar:

$$\Lambda_\mu = a_\mu I + b_\mu \gamma^5 - i c_{\mu\nu} \gamma^\nu + d_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma^5 - i E_{\mu\rho\nu} \sigma^{\rho\nu} \quad (A1.10)$$

Claramente, para valuar los coeficientes de este desarrollo introduciendo

las condiciones (A1.1) y (A1.2), se hace necesario conocer los anticonmutadores y conmutadores de las  $\Gamma^A$  con las matrices de Dirac. El cálculo es en algunos casos directo y en otros bastante tedioso, y da:

$$\begin{aligned}
 [1, \gamma_\mu] &= 2 \gamma_\mu \\
 [\gamma^5, \gamma_\mu] &= 2 \gamma^5 \gamma_\mu \\
 [\gamma_\nu, \gamma_\mu] &= -2 \sigma_{\mu\nu} \\
 [\gamma_\nu \gamma^5, \gamma_\mu] &= -2 \sigma_{\mu\nu} \gamma^5 \\
 [\sigma_{\rho\nu}, \gamma_\mu] &= 2i g_{\omega\delta} \epsilon^{\rho\omega\mu\delta} \gamma_\omega \gamma^5 \\
 [1, \gamma_\mu] &= 0 \\
 [\gamma^5, \gamma_\mu] &= 0 \\
 [\gamma_\nu, \gamma_\mu] &= 2 \sigma_{\mu\nu} \\
 [\gamma_\rho \gamma^5, \gamma_\nu] &= 2 \gamma^5 \sigma_{\rho\nu} = -i g_{\mu\delta} g_{\epsilon\eta} \epsilon^{\mu\delta\rho\eta} \sigma_{\mu\epsilon} \\
 [\sigma_{\rho\epsilon}, \gamma_\nu] &= 2 (g_{\rho\nu} \gamma_\epsilon - g_{\epsilon\nu} \gamma_\rho)
 \end{aligned} \tag{A1.11}$$

Entonces, obtenemos para los coeficientes los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 a_\mu &= 0 \\
 b_\mu &= -g_{\mu\delta} \epsilon^{\nu\epsilon\delta} E_{\epsilon\rho\nu} \\
 c_\mu &= 0 \\
 d_\mu &= 0 \\
 c_{\mu\sigma} \delta^\nu_\epsilon - c_{\mu\epsilon} \delta^\nu_\sigma + (g_{\sigma\delta} g_{\epsilon\eta} - g_{\epsilon\delta} g_{\sigma\eta}) \epsilon^{\nu\delta\eta} d_{\mu\rho} &= 0 \\
 E_{\mu}{}^\nu{}_\varphi - E_{\mu\varphi}{}^\nu &= (i/4) (g_{\eta\mu} \partial^\nu \ln \lambda - \delta^\nu_\mu \partial_\varphi \ln \lambda)
 \end{aligned} \tag{A1.12}$$

La primera observación es que, puesto que en la expansión de Clifford de  $\Lambda_\mu$  el tensor  $E_{\mu\rho\nu}$  aparece contraído con  $\sigma_{\rho\nu}$ , sólo es relevante su parte antisimétrica en  $\rho, \nu$ , pudiendo tomar, entonces:

$$E_{\mu\nu\rho} = (i/8) (g_{\mu\rho} \partial_\nu \ln \lambda - g_{\mu\nu} \partial_\rho \ln \lambda) \tag{A1.13}$$



y entonces resulta para  $b_\mu$ , de (A1.12):

$$b_\mu = 0 \quad (A1.14)$$

Por otra parte, contrayendo sobre los índices  $\nu, \sigma$  en (A1.12) donde aparece  $c_{\mu\nu}$ , podemos vincular  $c_{\mu\nu}$  con  $d_{\mu\nu}$ :

$$c_{\mu\epsilon} = (2/3) g_{\nu\psi} g_{\epsilon\delta} \epsilon^{\nu\psi\delta} d_{\mu\psi} \quad (A1.15)$$

de donde se deduce que  $c_{\mu\nu}$  es idénticamente nulo, pues  $g_{\nu\psi}$  es simétrico mientras que  $\epsilon^{\nu\psi\delta}$  es antisimétrico:

$$c_{\mu\nu} = 0 \quad (A1.16)$$

Ahora bien, la penúltima de las (A1.12) puede entonces ser escrita como

$$\epsilon^{\nu\sigma\epsilon} d_{\mu\psi} = 0 \quad (A1.17)$$

y multiplicando esta última por  $\epsilon_{\nu\sigma\epsilon}$  (habida cuenta que  $\epsilon_{\nu\sigma\epsilon} \epsilon^{\nu\sigma\epsilon} = -6\delta_{\nu\sigma}$ ) se sigue que:

$$d_{\mu\nu} = 0 \quad (A1.18)$$

Resumiendo estos resultados, los coeficientes de la expansión de Clifford de  $\Lambda_\mu$  quedan unívocamente determinados como

$$a_\mu = b_\mu = 0$$

$$c_{\mu\nu} = d_{\mu\nu} = 0 \tag{A1.19}$$

$$E_{\mu\rho\nu} = -(i/8) (g_{\mu\rho} \partial_\nu \ln \lambda - g_{\mu\nu} \partial_\rho \ln \lambda)$$

y reemplazando estos valores en la expansión (A1.10), tenemos:

$$\Lambda_\mu = -(1/4) \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \ln \lambda \tag{A1.20}$$

con lo que queda demostrada nuestra afirmación.

## Apéndice 2 :

### Magnitudes Características de un Fluido y Versor Temporal

Aquí pasaremos revista a las cantidades geométricas que caracterizan el comportamiento de un fluido, [96]. En el caso de un fluido cualquiera  $U_\mu$  debe ser considerado como el vector unitario tangente a las líneas de fluido. En el caso del fluido de observadores sobre el espacio-tiempo  $U_\mu$  juega el rol de versor temporal, que indica la dirección del tiempo en cada punto de la variedad.

Introduciremos el *vector curvatura*  $C_\mu$ :

$$C_\mu = U^\nu \nabla_\nu U_\mu \quad (\text{A2.1})$$

el *tensor de Killing*  $K_{\mu\nu}$ :

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu U_\nu + \nabla_\nu U_\mu \quad (\text{A2.2})$$

y el *tensor de vorticidad*  $\Omega_{\mu\nu}$ :

$$\Omega_{\mu\nu} = \nabla_\mu U_\nu - \nabla_\nu U_\mu \quad (\text{A2.3})$$

Por otra parte, introducimos el proyector temporal  $T_{\mu\nu}$  y el proyector espacial  $E_{\mu\nu}$ :

$$T_{\mu\nu} = U_\mu U_\nu \quad ; \quad E_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu \quad (\text{A2.4})$$

Así, la parte espacial de un tensor arbitrario  $A_{\mu\nu}$  es:

$$\bar{A}_{\mu\nu} = E_{\mu}^{\alpha} E_{\nu}^{\beta} A_{\alpha\beta} \quad (\text{A2.5})$$

de donde es fácil obtener que

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\mu\nu} &= K_{\mu\nu} - U_{\mu} C_{\nu} - U_{\nu} C_{\mu} \\ \bar{\Omega}_{\mu\nu} &= \Omega_{\mu\nu} - U_{\mu} C_{\nu} - U_{\nu} C_{\mu} \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

Un fluido se dice *geodésico* cuando  $C_{\mu} = 0$  e *irrotacional* si  $\bar{\Omega}_{\mu\nu} = 0$ . Además, puede ser probado que esta última condición es equivalente a la existencia de hipersuperficies globales ortogonales a las líneas de fluido si el espacio-tiempo es simplemente conexo [96].

En el caso en que  $\Omega_{\mu\nu} = 0$  el fluido es geodésico e irrotacional. Cuando  $\bar{K}_{\mu\nu} = 0$  el fluido se dice *rígido según Born* [114]. En el caso  $K_{\mu\nu} = 0$  el fluido es geodésico y rígido y  $U_{\mu}$  es un campo de vectores de Killing.

Cuando el fluido es irrotacional ( $\bar{\Omega}_{\mu\nu} = 0$ ) existe una carta adaptada donde  $x^i = \text{constante}$  sobre cada línea de fluido y  $g_{0i} = 0$ . Por otro lado, es interesante notar que si utilizamos la derivada conforme definida en términos del vector  $U_{\mu}$ , la parte espacial del tensor de vorticidad se escribe simplemente como:

$$\bar{\Omega}_{\mu\nu} = D_{\mu} U_{\nu} - D_{\nu} U_{\mu} \quad (\text{A2.7})$$

Entonces, para poder dar un significado a la noción de *tiempo*, el rotor conforme de  $U_{\mu}$  debe ser nulo:

$$D_{\mu} U_{\nu} - D_{\nu} U_{\mu} = 0 \quad (\text{A2.8})$$

Otra propiedad interesante del vector  $U_{\mu}$  es que su divergencia conforme es idénticamente nula:

$$D_{\mu} U^{\mu} = 0 \quad (\text{A2.9})$$

En efecto,

$$\begin{aligned} D_{\mu} U^{\mu} &= \nabla_{\mu} U^{\mu} + (3/2) Q_{\mu} U^{\mu} \\ &= \nabla_{\mu} U^{\mu} + (3/2) U^{\mu} [2U_{\rho} \nabla^{\rho} U_{\mu} - (2/3) U_{\mu} \nabla^{\rho} U_{\rho}] \\ &= 3U_{\rho} U^{\mu} \nabla^{\rho} U_{\mu} = 0 \end{aligned}$$

(la última igualdad se sigue en virtud de la unitariedad de  $U_{\mu}$ ).

La expresión (A2.9) es un caso particular de la propiedad más general siguiente:

$$D^{\mu p} (U_{\mu 1} U_{\mu 2} \dots U_{\mu p} \dots U_{\mu n}) = 0 \quad \forall n \quad (1 \leq p \leq n) \quad (\text{A2.10})$$

La demostración de (A2.10) es mediante inducción sobre  $n$ . En efecto, la proposición (A2.10) vale para  $n = 1$ , por (A2.9). Ahora consideremos, sin pérdida de generalidad, la expresión a probar:

$$D^{\mu 1} (U_{\mu 1} U_{\mu 2} \dots U_{\mu n}) = 0 \quad (\text{A2.11})$$

la cual suponemos válida  $\forall n \leq h$ , es decir:

$$D^{\mu 1} (U_{\mu 1} U_{\mu 2} \dots U_{\mu h}) = 0 \quad (\text{A2.12})$$

Calculemos ahora:

$$D^{\mu 1} (U_{\mu 1} U_{\mu 2} \dots U_{\mu h} U_{\mu h+1}) = U_{\mu 1} U_{\mu 2} \dots U_{\mu h} D^{\mu 1} U_{\mu h+1} + U_{\mu h+1} D^{\mu 1} (U_{\mu 1} U_{\mu 2} \dots U_{\mu h})$$

El segundo sumando del segundo miembro es nulo por la hipótesis inductiva (A2.12), mientras que en el primer sumando se puede introducir  $U_{\mu,1}$  bajo el símbolo de derivación dado que la afirmación vale para  $n = 1$ . Entonces obtenemos para este primer sumando:

$$U_{\mu,1} U_{\mu,2} \dots U_{\mu,h} D_{\mu,1} (U_{\mu,1} U_{\mu,h+1})$$

que es nulo si asumimos que la proposición que intentamos probar vale para  $n = 2$ , con lo que se completa la demostración.

Por último, vale la pena mencionar que la validez de (A2.10) hace imposible expresar al vector  $Q_{\mu}$ , que interviene en la derivada conforme, por medio de derivadas conformes de  $U_{\mu}$ . Esto es así pues si se reemplaza en (2.2.13) las derivadas covariantes en términos de derivadas conformes se obtiene una identidad.

## Objetos Geométricos en Carta Adaptada

Aquí daremos las expresiones que toman las componentes de diversos entes geométricos cuando se las refiere a una carta adaptada al fluido de observadores.

Primeramente, recordemos que llamamos carta adaptada a una carta en que las coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$  son tales que  $x^1, x^2, x^3$  son constantes sobre cada línea de fluido y  $t$ , que denominamos tiempo natural, es constante sobre cada hipersuperficie ortogonal a dichas líneas. Por otra parte, para que tales hipersuperficies existan es necesario y suficiente que el fluido sea irrotacional. En una carta adaptada el tensor métrico tiene la propiedad:

$$g_{0i} = 0 \tag{A3.1}$$

A partir de esta propiedad pueden obtenerse las componentes de la conexión Riemanniana  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ , dada por (2.1.8), en términos de las componentes no nulas del tensor métrico:  $g_{00}$  y  $g_{ij}$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0\mu} &= (\ln \sqrt{g_{00}})_{,\mu} \\ \Gamma^k_{00} &= -(1/2)g^{kj} g_{00,j} \\ \Gamma^0_{kj} &= -(2g_{00})^{-1} \dot{g}_{kj} \\ \Gamma^k_{0j} &= (1/2) g^{km} \dot{g}_{mj} \\ \Gamma^i_{jk} &= (1/2) g^{im} (g_{mk,j} + g_{mj,k} - g_{jk,m}) \end{aligned} \tag{A3.2}$$

donde el punto  $\dot{\phantom{x}}$  indica la derivada respecto del tiempo natural  $t$ .

Otras relaciones útiles, válidas en carta adaptada son:

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{\mu k} &= (1/2) g^{km} g_{km,\mu} = [ \ln (\sqrt{-g/g_{00}}) ]_{,\mu} \\ g_{km} \Gamma^m_{00} &= - (1/2) g_{00 ,k}\end{aligned}\tag{A3.3}$$

Si además tenemos la condición  $g_{00} = 1$  diremos que la carta adaptada es unitaria. Si la teoría es invariante conforme y el fluido irrotacional, siempre podemos trabajar en una carta adaptada unitaria sin pérdida de generalidad. En tal carta, las componentes no nulas de la conexión son, simplemente:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{kj} &= -(1/2) \dot{g}_{kj} \\ \Gamma^k_{0j} &= (1/2) g^{km} \dot{g}_{mj} \\ \Gamma^i_{jk} &= (1/2) g^{im} (g_{mk ,j} + g_{mj ,k} - g_{jk ,m})\end{aligned}\tag{A3.4}$$

Otro caso de interés es aquel en que las componentes del tensor métrico se expresan, en la carta adaptada, como producto de una función dependiente de  $t$  por otra dependiente de  $\vec{x}$  (métrica descomponible):

$$\begin{aligned}g_{00}(t, \vec{x}) &= r(t) h(\vec{x}) \\ g_{ij}(t, \vec{x}) &= -f(t) A_{ij}(\vec{x})\end{aligned}\tag{A3.5}$$

En tal caso las componentes de la conexión se escriben:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= (1/2)(\ln r) \dot{\phantom{r}} \\ \Gamma^0_{0k} &= (1/2)(\ln h)_{,k} \\ \Gamma^k_{00} &= (1/2) r A^{kj} h_{,j} \\ \Gamma^0_{kj} &= (\dot{f}/2hr) A_{kj} \\ \Gamma^k_{0j} &= \delta^k_j (\ln \sqrt{f}) \dot{\phantom{f}} \\ \Gamma^i_{jk} &= (1/2) A^{im} (A_{mk ,j} + A_{mj ,k} - A_{jk ,m})\end{aligned}\tag{A3.6}$$



Finalmente, si la métrica es descomponible y además la carta adaptada es unitaria ( $g_{00} = 1$ ), tenemos las expresiones (A3.6) pero con  $r = h = 1$ :

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{kj} &= (\dot{f}/2) A_{kj} \\ \Gamma^k_{0j} &= \delta^k_j (\ln \sqrt{f})' \\ \Gamma^i_{jk} &= (1/2) A^{im} (A_{mk,j} + A_{mj,k} - A_{jk,m})\end{aligned}\tag{A3.7}$$

En carta adaptada el versor temporal  $U^\mu$  es simplemente:

$$U^\mu = ((g_{00})^{-1/2}, 0, 0, 0)\tag{A3.8}$$

En cuanto al campo vectorial  $Q_\mu$  definido por (2.2.13) y utilizado para introducir la conexión conforme, toma en  $n=4$  y en carta adaptada la forma:

$$\begin{aligned}Q_0 &= (-1/3) [\ln(\sqrt{-g/g_{00}})]' \\ Q_k &= -(\ln g_{00})_{,k}\end{aligned}\tag{A3.9}$$

Es útil notar que si trabajamos en una carta adaptada unitaria, de las expresiones (A3.9) se deduce que las componentes  $Q_k$  son todas nulas. En tal carta:

$$\begin{aligned}Q_0 &= (-1/3) [\ln(\sqrt{-g})]' \\ Q_k &= 0\end{aligned}\tag{A3.10}$$

Consideremos ahora un vector  $A_\mu$  de peso de Weyl  $p$ , tal que en la carta adaptada unitaria tiene componentes:

$$A^\mu = (0, \vec{A})\tag{A3.11}$$

Las componentes espaciales de la derivada conforme de  $A_\mu$  serán:

$$D_J A_I = \nabla_J A_I - Q^k_{IJ} A_k + p Q_J A_I \quad (\text{A3.12})$$

donde  $Q^k_{IJ}$  está dado en términos de  $Q^k$  por medio de (2.2.5):

$$\begin{aligned} Q^k_{IJ} &= (1/2) (\delta^k_I Q_J + \delta^k_J Q_I - g_{IJ} Q^k) \\ &= 0 \quad (\text{en la carta adaptada unitaria}) \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

Si además el peso  $p$  es 0 se sigue que:

$$D_J A_I = \nabla_J A_I \quad (\text{A3.14})$$

El vector potencial del campo electromagnético en el gauge temporal cumple justamente estas condiciones: tiene peso 0 y cumple (A3.11) en la carta adaptada unitaria. De modo que, para este vector, y mientras sólo estemos interesados en las componentes espaciales, la derivada conforme coincide con la derivada covariante ordinaria.

## Apéndice 4:

### Espectro de los Operadores $\mathcal{H}^2$ y $(\mathcal{H}^2)_{ij}$

En el proceso de diagonalización del Hamiltoniano hemos utilizado extensamente los operadores diferenciales  $\mathcal{H}^2$  y  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  para el campo escalar y electromagnético, respectivamente. Una propiedad que resulta crucial en el formalismo es que estos operadores son autoadjuntos en sus correspondientes productos internos  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$  y que sus autovalores son no negativos. En este apéndice abordaremos la demostración de tales propiedades.

#### A4. 1. El operador $\mathcal{H}^2$ .

Consideremos el operador diferencial  $\mathcal{H}^2$  definido por la Ec. (6.2.1) y el producto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$  dado por (6.2.3). Demostraremos que  $\mathcal{H}^2$  es autoadjunto respecto de  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma}$ , es decir que vale la propiedad

$$(u, \mathcal{H}^2 v)_{\Sigma} = (\mathcal{H}^2 u, v)_{\Sigma} \quad (\text{A4.1.1})$$

donde  $u$  y  $v$  son soluciones arbitrarias de la ecuación de campo (6.2.9).

Un breve cálculo usando (6.2.1) y (6.2.3) muestra que,

$$\begin{aligned} (u, \mathcal{H}^2 v)_{\Sigma} - (\mathcal{H}^2 u, v)_{\Sigma} &= \int_{\Sigma} d^3x [u^* \partial_i (\sqrt{\gamma} g_{00} g^{ij} \partial_j v) - v \partial_i (\sqrt{\gamma} g_{00} g^{ij} \partial_j u^*)] \\ &= \int_{\Sigma} d^3x \partial_i [\sqrt{\gamma} g_{00} g^{ij} (u^* \partial_j v - v \partial_j u^*)] = 0 \end{aligned}$$

donde la última integral es nula en virtud del Teorema de Gauss. En

consecuencia, vale la propiedad (A4.1.1) y  $\mathcal{H}^2$  es autoadjunto en  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ . Dado que  $\mathcal{H}^2$  es autoadjunto, se deduce, como es sabido, que sus autovalores son reales y que autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales. Veamos que se puede decir respecto del signo de los autovalores. Sea  $K$  un autovalor de  $\mathcal{H}^2$  correspondiente a una autofunción  $u$ , entonces:

$$K = (u, \mathcal{H}^2 u)_\Sigma = \int_\Sigma d^3x [u^* \partial_i (\sqrt{|g_{00}}|} g^{ij} \partial_j u + m^2 \sqrt{|g_{00}}|} u^* u)]$$

e integrando por partes el primer término del integrando y eliminando una divergencia mediante el teorema de Gauss, tenemos

$$K = \int_\Sigma d^3x \sqrt{|g_{00}}|} [-g^{ij} \partial_i u^* \partial_j u + m^2 u^* u] \quad (\text{A4.1.2})$$

Puesto que  $g_{ij}$  es una métrica definida negativa, se sigue que

$$-g^{ij} \partial_i u^* \partial_j u \geq 0 \quad (\text{A4.1.3})$$

y dado que estamos considerando el caso  $m \neq 0$ , resulta que el integrando de (A4.1.2) es positivo en cualquier punto, de donde

$$K > 0 \quad (\text{A4.1.4})$$

es decir que los autovalores de  $\mathcal{H}^2$  son positivos.

#### A4. 2. El operador $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ .

Consideremos ahora el operador diferencial  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  definido por (7.2.1) y el producto interno  $(, )_{\Sigma}$  dado por (7.2.3). Puesto que el operador en estudio tiene índices tensoriales y no es simétrico, deberá tenerse especial cuidado en el orden en que tales índices aparecen. Si  $f_i$  y  $g_j$  son soluciones arbitrarias de las ecuaciones de campo, diremos que  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  es autoadjunto si cumple que,

$$(f_i, (\mathcal{H}^2)_{ij} g_j)_{\Sigma} = ((\mathcal{H}^2)_{ji} f_i, g_j)_{\Sigma} \quad (\text{A4.2.1})$$

Si usamos el teorema de Gauss para eliminar los términos de superficie, tenemos,

$$(f_i, (\mathcal{H}^2)_{ij} g_j)_{\Sigma} - ((\mathcal{H}^2)_{ji} f_i, g_j)_{\Sigma} = \int_{\Sigma} d\Sigma [(f_i^* g^{lj} \overset{\#}{\nabla}^m \overset{\#}{\nabla}_m g_j - f_i^* \overset{\#}{\nabla}_j \overset{\#}{\nabla}^i g_j - \\ - g_j g^{lj} \overset{\#}{\nabla}^m \overset{\#}{\nabla}_m f_i^* + g_j \overset{\#}{\nabla}^i \overset{\#}{\nabla}_j f_i^*)] = 0 \quad (\text{A4.2.2})$$

lo que prueba que  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  es autoadjunto respecto de  $(, )_{\Sigma}$ .

Siendo  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  autoadjunto, es inmediato probar, como de costumbre, que sus autovalores son reales y que dos autofunciones de diferentes autovalores son ortogonales entre sí.

Si ahora  $\psi_i$  es autofunción de  $(\mathcal{H}^2)_{ij}$  con autovalor  $K$ , se tiene:

$$K = (\psi_i, (\mathcal{H}^2)_{ij} \psi_j)_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} d\Sigma \psi_i^* (g^{lj} \overset{\#}{\nabla}^m \overset{\#}{\nabla}_m - \overset{\#}{\nabla}_j \overset{\#}{\nabla}^i) \psi_j = \\ = \int_{\Sigma} d\Sigma (\overset{\#}{\nabla}_j \psi_i^* \overset{\#}{\nabla}^j \psi_i - \overset{\#}{\nabla}_j \psi_i^* \overset{\#}{\nabla}^i \psi_j) \quad (\text{A4.2.3})$$

donde nuevamente usamos el teorema de Gauss para eliminar los términos

de superficie.

Dado que el integrando es un escalar usamos, localmente, un sistema de coordenadas (sin violar la condición de carta adaptada) en donde  $\nabla_i^*$  coincide con la derivada ordinaria  $\partial_i$ , y entonces,

$$\begin{aligned} \partial_j \psi_i^* \partial_j \psi_i - \partial_j \psi_i^* \partial_i \psi_j &= (1/2)(\partial_j \psi_i - \partial_i \psi_j)^* (\partial_j \psi_i - \partial_i \psi_j) = \\ &= (1/2) \sum_{i,j} |\partial_j \psi_i - \partial_i \psi_j|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A4.2.4})$$

de donde se sigue que,

$$K \geq 0 \quad (\text{A4.2.5})$$

es decir, que los autovalores de  $(\mathcal{L}^2)^{ij}$  son no negativos.

## Cálculo de algunas integrales

Este apéndice es de carácter matemático y está dedicado a tratar en detalle el cálculo de algunas integrales que aparecen en §8.5, cuando se encara la normalización de los modos de Rindler y el cálculo de los coeficientes de Bogolubov que vinculan tales modos con los de Minkowski.

Consideremos los dos modos de polarización de Rindler (no normalizados) descritos por (8.5.18). Los correspondientes productos internos, a partir de (8.5.20) son,

$$\langle A_{\mu}(1, \Omega, \vec{k}), A_{\mu}(1, \Omega', \vec{k}') \rangle = -(2\pi k)^2 (\Omega' + \Omega) \delta(\vec{k}' - \vec{k}) J_1(i\Omega, i\Omega') \quad (\text{A6.1a})$$

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu}(2, \Omega, \vec{k}), A_{\mu}(2, \Omega', \vec{k}') \rangle = & (2\pi k)^2 (\Omega' + \Omega) \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \{ J_1(i\Omega - 1, i\Omega' - 1) + \\ & + [i + 2(\Omega' + \Omega)^{-1}] [\Omega J_2(i\Omega, i\Omega' - 1) + \\ & + \Omega' J_2(i\Omega', i\Omega - 1) + 2i\Omega\Omega' J_3(i\Omega, i\Omega')] \} \end{aligned} \quad (\text{A6.1b})$$

donde los símbolos  $J_{\lambda}(\mu, \nu)$  son las integrales,

$$J_{\lambda}(\mu, \nu) \equiv \int_0^{\infty} dx x^{-\lambda} K_{\mu}(x) K_{\nu}(x) \quad (\text{A6.2})$$

Para valuar estas integrales tendremos en cuenta la identidad, [118],

$$\int_0^{\infty} dx x^{-\lambda} K_{\mu}(x) K_{\nu}(x) = [2^{-2-\lambda} / \Gamma(1-\lambda)] \Gamma[(1-\lambda+\mu+\nu)/2] \Gamma[(1-\lambda-\mu-\nu)/2] \times \\ \times \Gamma[(1-\lambda-\mu+\nu)/2] \Gamma[(1-\lambda+\mu-\nu)/2] \quad (\text{A6.3})$$

donde deben interpretarse estas expresiones en el sentido de las

distribuciones, ya que en general resultan divergentes. Comencemos con  $J_1(i\Omega, i\Omega')$ ,

$$\begin{aligned} J_1(i\Omega, i\Omega') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2^{-3+\epsilon}/\Gamma(\epsilon)] \Gamma[(\epsilon+i\Omega+i\Omega')/2] \Gamma[(\epsilon-i\Omega-i\Omega')/2] \times \\ &\quad \times \Gamma[(\epsilon-i\Omega+i\Omega')/2] \Gamma[(\epsilon+i\Omega-i\Omega')/2] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2^{-3+\epsilon}/\Gamma(\epsilon)] |\Gamma[(\epsilon+i\Omega+i\Omega')/2]|^2 |\Gamma[(\epsilon+i\Omega-i\Omega')/2]|^2 \end{aligned} \quad (A6.4)$$

y teniendo en cuenta que una representación de la función  $\delta$  es,

$$\delta(x) = (1/4\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\Gamma[(\epsilon+ix)/2]|^2 / \Gamma(\epsilon) \quad (A6.5)$$

y que  $\Omega, \Omega' > 0$ , se sigue que,

$$J_1(i\Omega, i\Omega') = (\pi/2) |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega) \quad (A6.6)$$

Vayamos ahora al cálculo de las integrales que aparecen en (A6.1b),

$$\begin{aligned} J_1(i\Omega-1, i\Omega'-1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2^{-3+\epsilon}/\Gamma(\epsilon)] \Gamma[(-2+\epsilon+i\Omega+i\Omega')/2] \Gamma[(2+\epsilon-i\Omega-i\Omega')/2] \times \\ &\quad \times |\Gamma[(\epsilon+i\Omega-i\Omega')/2]|^2 = \\ &= (\pi/2) \delta(\Omega' - \Omega) \Gamma(-1+i\Omega) \Gamma(1-i\Omega) \end{aligned}$$

y utilizando las propiedades de recurrencia de la función gamma,

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \quad (A6.7)$$

llegamos a,

$$J_1(i\Omega-1, i\Omega'-1) = (\pi/2) i\Omega (1-i\Omega)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega) \quad (A6.8)$$



De manera semejante a como se ha procedido en los casos anteriores, obtenemos,

$$J_2(i\Omega, i\Omega' - 1) = (\pi/4)(-1+i\Omega)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega) \quad (\text{A6.9})$$

y de aquí se desprende, entonces,

$$J_2(i\Omega', i\Omega - 1) = J_2(i\Omega, i\Omega' - 1) \quad (\text{A6.10})$$

Por último, el cálculo para  $J_3(i\Omega', i\Omega)$  arroja el resultado,

$$J_3(i\Omega, i\Omega') = (\pi/4)(1+\Omega^2)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega) \quad (\text{A6.11})$$

Entonces, reemplazando los valores encontrados (A6.6,8,9,10), en (A6.1) obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu}(1, \Omega, \vec{k}), A_{\mu}(1, \Omega', \vec{k}') \rangle &= \langle A_{\mu}(2, \Omega, \vec{k}), A_{\mu}(2, \Omega', \vec{k}') \rangle = \\ &= -\pi\Omega [2\pi k |\Gamma(i\Omega)|^2] \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta(\Omega' - \Omega) \end{aligned} \quad (\text{A6.12})$$

de donde se lee fácilmente los coeficientes de normalización, que resultan ser iguales, para ambos modos. Así, los dos modos de Rindler toman, una vez normalizados, la forma (8.5.21), a menos de factores de fase arbitrarios.

Ahora, vayamos a la determinación de las integrales  $K_{m,n}$  que aparecen al calcular los coeficientes de Bogolubov entre los modos de Rindler y Minkowski,

$$K_{m,n} = \int_0^{\infty} dx e^{ik_x x} x^{-n} K_{i\Omega-m}(kx) \quad (\text{A6.13})$$

En la ref. [118], pág. 712, se encuentra una expresión general para este tipo de integrales,

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} x^{\mu-1} K_{\nu}(\beta x) = \sqrt{\pi} (2\beta)^{\nu} (\alpha+\beta)^{-\mu-\nu} \Gamma(\mu+\nu) \Gamma(\mu-\nu) [\Gamma(\mu+1/2)]^{-1} \times \\ \times F(\mu+\nu, \nu+1/2, \mu+1/2, z) \quad (\text{A6.14})$$

donde hemos llamado  $z = (\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)$ . En la ref. [119], pág. 562, puede encontrarse la vinculación entre las funciones hipergeométricas F y las de Legendre, P, la que con nuestra notación se escribe,

$$F(\mu+\nu, \nu+1/2, \mu+1/2, z) = \Gamma(\mu+1/2) z^{1/4-\mu/2} (1-z)^{-\nu-1/2} P_{-\nu-1/2}^{1/2-\mu}(\alpha/\beta) \quad (\text{A6.15})$$

con lo que tenemos,

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} x^{\mu-1} K_{\nu}(\beta x) = (\pi/2\beta)^{1/2} (\alpha^2-\beta^2)^{1/4-\mu/2} \Gamma(\mu+\nu) \Gamma(\mu-\nu) P_{-\nu-1/2}^{1/2-\mu}(\alpha/\beta) \quad (\text{A6.16})$$

Para encontrar expresiones más explícitas de estas integrales, consideremos los casos particulares que nos interesan. Comencemos con  $\mu=0$ ; en tal caso (A6.16) adopta la forma,

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} x^{-1} K_{\nu}(\beta x) = (\pi/2\beta)^{1/2} (\alpha^2-\beta^2)^{1/4} \Gamma(\nu) \Gamma(-\nu) P_{-\nu-1/2}^{1/2}(\alpha/\beta) \quad (\text{A6.17})$$

y en [119], pág. 334 obtenemos la expresión,

$$P_{\nu}^{1/2}(x) = (x^2-1)^{-1/4} (2\pi)^{-1/2} \left\{ [x+(x^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2} + [x+(x^2-1)^{1/2}]^{-\nu-1/2} \right\} \quad (A6.18)$$

con lo que haciendo las identificaciones  $\alpha = -ik_x$ ,  $\beta = k$ ,  $\nu = i\Omega$ , y después de algunas simplificaciones algebraicas, llegamos a,

$$K_{0,1} = (1/2) |\Gamma(i\Omega)|^2 \left\{ e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega} + e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega} \right\} \quad (A6.19)$$

Para  $\mu = 1$  se procede de manera semejante, siendo (A6.16),

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} K_{\nu}(\beta x) = (\pi/2\beta)^{1/2} (\alpha^2-\beta^2)^{-1/4} \Gamma(1+\nu) \Gamma(1-\nu) P_{-\nu-1/2}^{-1/2}(\alpha/\beta) \quad (A6.20)$$

y en [119], pág. 334 encontramos el equivalente de la fórmula (A6.18),

$$P_{\nu}^{-1/2}(x) = (x^2-1)^{-1/4} (2/\pi)^{1/2} \left\{ [x+(x^2-1)^{1/2}]^{\nu+1/2} - [x+(x^2-1)^{1/2}]^{-\nu-1/2} \right\} / (2\nu+1) \quad (A6.21)$$

de donde, después de algunas operaciones, se obtiene,

$$K_{0,0} = (\Omega/2\omega) |\Gamma(i\Omega)|^2 \left\{ e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega} - e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega} \right\} \quad (A6.22)$$

Ahora es necesario tomar  $\mu = -1$  en (A6.16), de donde,

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} x^{-2} K_{\nu}(\beta x) = (\pi/2\beta)^{1/2} (\alpha^2-\beta^2)^{3/4} \Gamma(\nu-1) \Gamma(-\nu-1) P_{-\nu-1/2}^{3/2}(\alpha/\beta) \quad (A6.23)$$

donde la función P con índice superior 3/2, puede expresarse en términos de funciones P con índice 1/2, mediante la relación (ver [119], pág. 333),

$$P(x) = (x^2-1)^{-1/2} \left[ (\nu-\mu) x P(x) - (\nu+\mu) P(x) \right] \quad (A6.24)$$

y entonces, después de un cálculo algo extenso, pero sin complicaciones, llegamos a,

$$K_{0,2} = [2(1+\Omega^2)]^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \left[ e^{\pi\Omega/2} (ik_x + \Omega\omega) [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega} + e^{-\pi\Omega/2} (ik_x - \Omega\omega) [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega} \right] \quad (A6.25)$$

Ahora, tomemos las expresiones (A6.20) y (A6.21), pero con las identificaciones,  $\alpha = -ik_x$ ,  $\beta = k$ ,  $\nu = i\Omega - 1$ . Resulta,

$$K_{1,0} = (-i\Omega/2\omega) |\Gamma(i\Omega)|^2 \left[ e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega+1} + e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega-1} \right] \quad (A6.26)$$

Finalmente, para valuar  $K_{1,1}$ , nos servimos de (A6.17) y (A6.18) tomando los valores  $\alpha = -ik_x$ ,  $\beta = k$ ,  $\nu = i\Omega - 1$ , con lo que llegamos a,

$$K_{1,1} = (\Omega/2(i\Omega-1)) |\Gamma(i\Omega)|^2 \left[ e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega+1} - e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega-1} \right] \quad (A6.27)$$

De este modo, hemos obtenido los valores de todas las integrales necesarias para abordar la situación Rindler-Minkowski para el campo electromagnético, las cuales, para comodidad de uso, listamos a continuación.

$$J_{\lambda}(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} dx x^{-\lambda} K_{\mu}(x) K_{\nu}(x) \quad K_{m,n} = \int_0^{\infty} dx e^{ik_x x} x^{-n} K_{i\Omega-m}(kx)$$

$$J_1(i\Omega, i\Omega') = (\pi/2) |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega)$$

$$J_1(i\Omega-1, i\Omega'-1) = (\pi/2) i\Omega (1-i\Omega)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega)$$

$$J_2(i\Omega', i\Omega-1) = J_2(i\Omega, i\Omega'-1) = (\pi/4) (-1+i\Omega)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega)$$

$$J_3(i\Omega, i\Omega') = (\pi/4) (1+\Omega^2)^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 \delta(\Omega' - \Omega)$$

$$K_{0,0} = (\Omega/2\omega) |\Gamma(i\Omega)|^2 [e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega} - e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega}]$$

$$K_{0,1} = (1/2) |\Gamma(i\Omega)|^2 [e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega} + e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega}]$$

$$K_{0,2} = [2(1+\Omega^2)]^{-1} |\Gamma(i\Omega)|^2 [e^{\pi\Omega/2} (ik_x + \Omega\omega) [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega} + e^{-\pi\Omega/2} (ik_x - \Omega\omega) [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega}]$$

$$K_{1,0} = (-i\Omega/2\omega) |\Gamma(i\Omega)|^2 [e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega+1} + e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega-1}]$$

$$K_{1,1} = [\Omega/2(i\Omega-1)] |\Gamma(i\Omega)|^2 [e^{\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{-i\Omega+1} - e^{-\pi\Omega/2} [(\omega-k_x)/k]^{i\Omega-1}]$$

## GLOSARIO

En este glosario hemos incluido los principales símbolos que aparecen a lo largo de esta tesis. Se indica brevemente su significado y se remite a la Ec. o § correspondiente.

$a$	Constante de integración de los modos longitudinales, Ec.(7.5.15). También aceleración propia del observador, Ec. (8.5.46).
$a_\mu$	Coefficiente en la expansión de Clifford de $\Lambda_\mu$ , Ec. (A1.10).
$a(t)$	Radio del universo de Robertson-Walker, Ec. (8.4.1).
$a_k$	Operador de aniquilación de partículas escalares en el modo $k$ , Ec.(4.2.3).
$a_k^\dagger$	Operador de creación de partículas escalares en el modo $k$ , Ec.(4.2.3).
$a_{k\lambda}$	Operador de aniquilación de fotones en modo $k$ y tipo de polarización $\lambda$ , Ec. (7.3.1).
$a_{k\lambda}^\dagger$	Operador de creación de fotones en modo $k$ y tipo de polarización $\lambda$ , Ec. (7.3.1).
$A_\mu$	4-vector potencial del campo electromagnético, Ec. (3.3.2).
$\mathbb{A}$	Operador lineal que actúa sobre las matrices de $4 \times 4$ y aparece en la expresión de la conexión spinorial, Ec. (3.2.27).
$A_k$	Uno de los coeficientes que determinan los datos de Cauchy de las soluciones de frecuencia positiva para el campo escalar, Ec.(6.3.7a).
$A(k,\lambda)$	Uno de los coeficientes que determinan los datos de Cauchy de las soluciones de frecuencia positiva de la ecuación del campo electromagnético en modo $k$ y polarización $\lambda$ , Ec. (7.3.3.a).
$A_{ij}(\vec{x})$	Parte de la métrica dependiente de $\vec{x}$ cuando ésta tiene la forma (7.5.4).
$\bar{A}_{\mu\nu}$	Parte espacial de un tensor arbitrario $A_{\mu\nu}$ , Ec. (A2.5).
$\alpha$	Constante no nula que aparece en el Lagrangiano de Gupta-Bleuler, Ec.(3.4.2). También coeficiente de Bogolubov, Ec. (7.5.19).
$\alpha_{km}$	Coefficiente de Bogolubov, Ec. (4.2.11).
$b(\Sigma)$	Factor real y adimensional dependiente de $\Sigma$ que aparece en los modos longitudinales, Ec. (7.5.1).
$b_k$	Operador de aniquilación de partículas de Rindler, Ec. (8.5.39).
$b_\mu$	Coefficiente en la expansión de Clifford de $\Lambda_\mu$ , Ec. (A1.10).
$B_k$	Uno de los coeficientes que determinan los datos de Cauchy de las soluciones de frecuencia positiva para el campo escalar, Ec.(6.3.7b).
$B(k,\lambda)$	Uno de los coeficientes que determinan los datos de Cauchy de las soluciones de frecuencia positiva de la ecuación del campo electromagnético en modo $k$ y polarización $\lambda$ , Ec. (7.3.3.b).
$\beta$	Coefficiente de Bogolubov, Ec. (7.5.19).
$\beta_{km}$	Coefficiente de Bogolubov, Ec. (4.2.11).
$c$	Constante de integración de los modos longitudinales, Ec.(7.5.15). Velocidad de la

	luz, §1.1.
$C_A$	Coefficientes de la expansión de Clifford de cualquier matriz de $4 \times 4$ , Ec. (A1.7).
$C_\mu$	Vector curvatura, Ec. (A2.1).
c.h.	Conjugado hermitico.
$C_{\mu\nu}$	Coefficiente en la expansión de Clifford de $\Lambda_\mu$ , Ec. (A1.10).
$d\eta$	Elemento de volumen del espacio-tiempo, §2.1.
$d\sigma_\mu$	Elemento de superficie de una hipersuperficie de $n-1$ dimensiones, §2.1.
$d(\sigma, \Omega, \bar{\kappa}^*)$	Operador de Minkowski, Ec.(8.5.41).
$d_n(\Omega)$	Factor de densidad de estados reducida para un campo escalar en un espacio-tiempo de $n$ dimensiones, Ec. (8.5.48).
$d_{\mu\nu}$	Coefficiente en la expansión de Clifford de $\Lambda_\mu$ , Ec. (A1.10).
$\partial_\mu$	Derivada ordinaria.
$D_\mu$	Derivada conforme de un campo de Weyl, Ec. (2.2.7).
$S D_\mu$	Derivada conforme spinorial, Ec. (3.2.33).
$E_k^2$	Autovalor del operador $\mathcal{H}^2$ , Ec. (6.3.3) o del operador $(\mathcal{H}^2)^{ij}$ , Ec.(7.2.11).
$E_{\mu\nu}$	Proyector espacial, Ec. (A2.4).
$E_{\mu\rho\nu}$	Coefficiente en la expansión de Clifford de $\Lambda_\mu$ , Ec. (A1.10).
$f(t)$	Parte de la métrica dependiente de $t$ cuando ésta tiene la forma (7.5.4).
$F_{\mu\nu}$	Tensor campo electromagnético, Ec. (3.3.2).
$f_\mu(1)$	Uno de los dos modos electromagnéticos de Minkowski, Ec. (8.5.22).
$f_\mu(2)$	Uno de los dos modos electromagnéticos de Minkowski, Ec. (8.5.22).
$\mathbb{F}_{\mu\nu}$	Tensor conforme del campo electromagnético, Ec. (3.3.11).
$\phi$	Operador de campo escalar, Ec. (3.1.1). También coordenada angular de la métrica de Robertson-Walker, Ec. (8.4.1).
$\Phi_\mu(1)$	Uno de los dos modos electromagnéticos de Rindler, Ec. (8.5.21).
$\Phi_\mu(2)$	Uno de los dos modos electromagnéticos de Rindler, Ec. (8.5.21).
$\Psi_k$	Autofunción del operador $\mathcal{H}^2$ , Ec. (6.3.3).
$\Psi^i(k)$	Autofunción del operador $(\mathcal{H}^2)^{ij}$ , Ec. (7.2.11).
$g$	Determinante de $g_{\mu\nu}$ .
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico de la variedad.
$\gamma$	$-\det(g_{km})$ , Ec. (6.1.10).
$\gamma_\mu$	Matrices de Dirac, Ec. (3.2.1).
$\gamma^5$	Matriz integrante del álgebra de Clifford, Ec. (A1.6).
$\Gamma_\mu$	Conexión spinorial conforme, Ec. (3.2.31).
$\Gamma^A$	Base del álgebra de Clifford, Ec. (A1.4).
$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$	Conexión Riemanniana. Ec. (2.1.8).
$H_\Sigma$	Hamiltoniano, Ec. (6.1.1) y (7.1.1).
$\mathcal{H}^2$	Operador cuyas autofunciones y autovalores implementan la diagonalización del Hamiltoniano del campo escalar, Ec. (6.2.1).

$(\mathcal{H}^2)^{ij}$	Operador cuyas autofunciones y autovalores implementan la diagonalización del Hamiltoniano del campo electromagnético, Ec. (7.2.1).
$\eta$	Tiempo conforme, Ec. (8.4.2). También tiempo de Rindler, Ec. (8.5.1).
$I$	Matriz identidad de $4 \times 4$ , Ec. (3.2.1).
$J_\lambda(\mu, \nu)$	Integrales que aparecen al normalizar los modos electromagnético de Rindler, Ap. 6.
$k$	Parámetro que rotula los modos. También $ \vec{k} $ , Ec. (8.5.15).
$\vec{k}$	2-vector impulso en el plano de las coordenadas no aceleradas, Ec. (8.5.15).
$k_B$	Constante de Boltzmann.
$K$	Escalar de curvatura conforme, Ec. (2.4.10).
$K_{i0}$	Función de Bessel modificada de índice imaginario.
$K_{m,n}$	Integrales que aparecen en el cálculo de los coeficientes de Bogolubov para el campo electromagnético en la situación Rindler-Minkowski, Ec. (8.5.30), (ver Ap. 6).
$K_{\mu\nu}$	Uno de los tensores que se obtiene por contracción de $K^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ , Ec. (2.4.5). También tensor de Killing, Ec. (A2.2).
$K'_{\mu\nu}$	Uno de los tensores que se obtiene por contracción de $K^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ , Ec. (2.4.6).
$K^*_{\mu\nu}$	Uno de los tensores que se obtiene por contracción de $K^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ , Ec. (2.4.7).
$K^{\rho}_{\mu\nu}$	Conexión conforme, Ec. (2.2.4).
$K^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$	Tensor de curvatura conforme, Ec. (2.4.1).
$L_p$	Longitud de Planck, §1.1.
$\mathcal{L}$	Densidad lagrangiana de los campos.
$\lambda$	Función arbitraria, definida positiva, que define una transformación conforme, Ec. (2.1.1).
$\Lambda$	Función que implementa una transformación de gauge, Ec. (8.5.6).
$\Lambda_k$	Coefficiente de la parte diagonal del Hamiltoniano, Ec. (6.3.2b) y (7.3.10c).
$\Lambda_{k\lambda}$	Coefficiente de la parte diagonal del Hamiltoniano del campo electromagnético para el modo $k$ y tipo de polarización $\lambda$ , Ec. (7.3.6b).
$\Lambda_\mu$	Variación conforme de la conexión conforme, Ec. (3.2.13).
$m$	Número de índices de un campo tensorial, Ec. (2.1.17). También masa del cuanto del campo escalar, Ec. (6.1.5).
$M$	Matriz arbitraria de $4 \times 4$ , Ec. (A1.7). Función que realiza una transformación de gauge, Ec. (A5.4).
$n$	Dimensión del espacio-tiempo.
$N_k$	Operador número de partículas en el modo $k$ , Ec. (4.2.5).
$\mathcal{N}$	matriz arbitraria de $4 \times 4$ , Ec. (3.2.27). Operador que define un gauge, Ec. (A5.1).
$\nabla_\mu$	Derivada covariante con conexión Riemanniana, Ec. (2.2.1).
$\nabla_m^*$	Derivada covariante asociada con la parte espacial de la métrica, Ec. (7.1.4).
$\Omega$	Frecuencia de Rindler, Ec. (8.5.15).
$\Omega_{\mu\nu}$	Tensor de vorticidad, Ec. (A2.3).
$\Omega^{\rho}_{\mu\nu}$	Conexión arbitraria, Ec. (2.2.2).



$\Omega^{*\rho}_{\mu\nu}$	Conexión arbitraria, Ec. (2.2.3).
$P^\mu_\nu$	Función de Legendre, Ec. (A6.15).
$\pi^\mu$	Momento conjugado, Ec. (3.3.3).
$q_\mu(b)$	Dos versores ( $b=1,2$ ) cuya elección define los modos de Minkowski, Ec.(8.5.24).
$Q_\mu$	Vector a través del cual se introduce la conexión conforme, Ec. (2.2.6).
$Q^\rho_{\mu\nu}$	Tensor que sumado a la conexión Riemanniana da la conexión conforme, Ec. (2.2.5).
$r$	Peso de Weyl de un campo de Weyl, Ec. (2.1.16).
$R$	Escalar de curvatura, Ec. (2.1.12).
$R^+$	Región $z >  t $ del espacio de Minkowski, §8.5.
$R^-$	Región $z < - t $ del espacio de Minkowski, §8.5.
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci, Ec. (2.1.10).
$R^\rho_{\mu\nu\sigma}$	Tensor de curvatura de Riemann, Ec. (2.4.3).
$\rho(\chi)$	Función que determina la topología de la métrica de Robertson-Walker, Ec. (8.4.1).
$S$	Acción, Ec. (2.1.13). También matriz no singular que implementa un cambio de base spinorial, Ec (3.2.3).
$S_j(\vec{x})$	Parte dependiente de $\vec{x}$ de las soluciones de la ecuación del campo electromagnético en el caso de separación de variables, Ec. (7.5.8).
$\sigma_\mu$	Conexión spinorial, Ec. (3.2.9a).
$\sigma_{\mu\nu}$	$(1/2) [\delta_\nu^\rho, \delta_\mu^\rho]$ , Ec. (3.2.32).
$\Sigma$	Superficie de Cauchy, Ec. (3.1.9).
$t$	Tiempo natural. Magnitud constante sobre las hipersuperficies ortogonales a las líneas del fluido de observadores, §5.3. Tiempo de Minkowski, §8.5.
$t_p$	Tiempo de Planck, §1.1.
$\tau$	Tiempo natural asociado a la superficie de Cauchy $\Sigma$ , Ec. (7.5.6b).
$T$	Temperatura percibida por el observador acelerado, Ec. (8.5.45).
$T_0$	Temperatura global asociada al fluido de Rindler, Ec. (8.5.45).
$T(t)$	Parte dependiente del tiempo, en el caso de separación de variables, de las soluciones de la ecuación del campo electromagnético Ec. (7.5.8).
$T_{\mu\nu}$	Tensor energía-momento, Ec.(6.1.7) y (7.1.3). También proyector temporal, Ec. (A2.4).
$\theta$	Coordenada angular de la métrica de Robertson-Walker, Ec. (8.4.1).
$u_k$	Integrante de la base de soluciones de la ecuación del campo escalar, Ec. (4.2.2).
$u_i(k,\lambda)$	Integrante de la base de soluciones de la ecuación del campo electromagnético para el modo $k$ y tipo de polarización $\lambda$ , Ec. (7.3.1).
$U^\mu$	Vector unitario tangente a las líneas del fluido de observadores, Ec. (5.3.2).
$V^\mu$	Campo de vectores que caracteriza al fluido de observadores, §5.3.
$\omega$	Frecuencia de Minkowski, Ec. (8.5.22).
$\vec{x}$	2-vector ( $y,z$ ) en el plano de las coordenadas no sometidas a aceleración, §8.5.
$x$	Coordenada en la dirección de la aceleración, Ec. (8.5.1).

$x^\mu$	Sistema de coordenadas en $n$ dimensiones ( $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ ).
$\chi$	Coordenada radial de la métrica de Robertson-Walker, Ec. (8.4.1).
$\xi$	Constante de acoplamiento del campo con la curvatura, Ec. (3.1.2). También coordenada espacial acelerada de la carta de Rindler, Ec. (8.5.1).
$\xi^*$	Acoplamiento conforme, Ec. (3.1.6).
$\Psi$	Las componentes de algún campo, en general, Ec. (2.1.13). También spinor contravariante, Ec. (3.2.4).
$\bar{\Psi}$	Adjunto de Dirac, Ec. (3.2.5).
$ 0_M\rangle$	Vacío de Minkowski, Ec. (8.5.43).
$\langle , \rangle$	Producto interno para ortonormalizar soluciones de una ecuación de campo, Ec. (3.1.9).
$( , )_\Sigma$	Productos internos dependientes de $\Sigma$ semejantes a los de la mecánica cuántica, respecto de los cuales $\mathcal{H}^2$ y $(\mathcal{H}^2)_{ij}$ son autoadjuntos, Ecs. (6.2.3) y (7.2.7).
$\{ , \}$	Anticonmutador.
$[ , ]$	Commutador.
$\hat{\phantom{x}}$	Cambio de base spinorial, Ec. (3.2.3).
$\sim$	Del orden de. Proporcional a.
$\tilde{\phantom{x}}$	Transformado conforme, Ec. (2.1.1).
$\dagger$	Adjunción.
$*$	Conjugación compleja.
$\cdot$	Derivada respecto del tiempo natural. Derivación ordinaria. Derivada covariante Riemanniana.

## ANOTACIONES

## REFERENCIAS

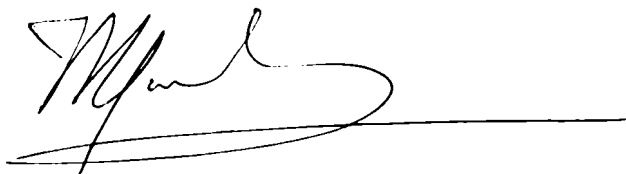
- [1] Bjorken J.D. & Drell S.D., *Relativistic Quantum Mechanics y Relativistic Quantum Fields* (Mac Graw-Hill, New York, 1965).
- [2] Weinberg S., Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [3] Salam A., *Weak and electromagnetic interactions* en *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almqvist, Forlag AB, Stockholm, 1968) p.367.
- [4] Marciano W. & Pagels H., Nature **79**, 479 (1979).
- [5] Georgi H. & Glashow S.L., Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).
- [6] Cline D.B. & Mills F.E. (eds.), *Unification of Elementary Forces and Gauge Theories* (Harwood Academic Publ., London, 1978).
- [7] Einstein A., Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 844 (1915).
- [8] Isham C.J., *An introduction to quantum gravity* en *Quantum Gravity: An Oxford Symposium*, eds. Isham C.J., Penrose R. & Sciama D.W. (Clarendon, Oxford, 1975).
- [9] Isham C.J., *Quantum gravity-an overview* in *Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium*, eds. Isham C.J., Penrose R. & Sciama D.W. (Clarendon, Oxford, 1981).
- [10] Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P. & Ferrara S., Phys. Rev. D. **13**, 3214 (1976).
- [11] Deser S. & Zumino B., Phys. Lett. **62B**, 335 (1976).
- [12] van Nieuwenhuizen P. & Freedman D.Z., eds. *Supergravity* (North Holland, Amsterdam, 1979).
- [13] Green M.B., Schwarz J.H. & Witten E., *Superstring Theory* (Cambridge University Press, London, 1987).
- [14] Planck M.K.E.L., Sitz. Deut. Akad. Wiss. Berlin (1899), K.I. Math.-Phys. Teach., 440.
- [15] Schiff L.I., *Quantum Mechanics* (Mc. Graw-Hill, New York, 1949).
- [16] Nambu Y., Phys. Lett., **26B**, 626 (1966).
- [17] Schrödinger E., Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 105 (1932).
- [18] Lichnerowicz A., Inst. Haut. Et. Sci. Publ. Math. **10**, 293 (1961).
- [19] Lichnerowicz A., Ann. Inst. Henri Poincaré **3**, 233 (1964).
- [20] Lichnerowicz A., Bull. Soc. Math. Fr. **92**, 11 (1964).
- [21] Parker L., Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
- [22] Parker L., Phys. Rev. D **3**, 346 (1971).
- [23] Fulling S.A., Phys. Rev. D **7**, 2850 (1973).
- [24] Castagnino M., Verbeure A. & Weder R.A., Phys. Lett. **8A**, 99 (1974).
- [25] Castagnino M., Verbeure A. & Weder R.A., Nuovo Cimento **26B**, 396 (1975).
- [26] Castagnino M., Gen. Relativ. Gravit. **9**, 101 (1978).
- [27] Schrödinger E., Physica (Utrecht) **6**, 899 (1939).
- [28] De Witt B., Phys. Rev. **90**, 357 (1953).
- [29] Takahashi Y. & Umezawa H., Nuovo Cimento **17**, 695 (1957).
- [30] Imamura T., Phys. Rev. **118**, 1430 (1960).

- [31] Parker L., *The Creation of Particles in an Expanding Universe*, Ph. D. Thesis, Harvard University (1966)(disponible en University Microfilms Library Service, Xerox Corp., Ann Arbor, Michigan, USA).
- [32] Parker L., Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
- [33] Parker L., Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
- [34] Sexl R.U. & Urbantke H.K., Acta Phys. Austriaca **26**, 339 (1967).
- [35] Sexl R.U. & Urbantke H.K., Phys. Rev. **179**, 1247 (1969).
- [36] Ashtekar A. & Magnon A., Proc. R. Soc. London **A346**, 375 (1975).
- [37] Ashtekar A. & Magnon A., C. R. Acad. Sci. Ser. A **281**, 875 (1975).
- [38] Hájíček P., Nuovo Cimento **33B**, 597 (1967).
- [39] Volovich I.V., Zagrebnov V.A. & Frolov V.P., Teor. & Math. Fiz. (USSR) **33**, 3 (Theor. & Math. Phys. **33**, 843 (1977)).
- [40] Martellini M., Sodano P. & Vitiello G., Nuovo Cimento **48A**, 341 (1978).
- [41] Grib A.A. & Mamaev S.G., Yad. Fiz. **10**, 1276 (1969) (Sov. J. Nucl. Phys. **10**, 722 (1970)).
- [42] Grib A.A. & Mamaev S.G., Yad. Fiz. **14**, 800 (1971) (Sov. J. Nucl. Phys. **14**, 450 (1972)).
- [43] Berger B., Phys. Rev. D **12**, 368 (1975).
- [44] Grib A.A., Mamaev S.G. & Mostepanenko V.M., Gen. Relativ Gravit. **7**, 535 (1976).
- [45] Grib A.A., Mamaev S.G. & Mostepanenko V.M., J. Phys. A: Gen. Phys. **13**, 2057 (1980).
- [46] Grib A.A., Mamaev S.G. & Mostepanenko V.M., *Quantum Effects in Strong External Fields* (Atomizdat, Moscow, 1976), en ruso.
- [47] Raine D.J. & Winlove C.P., Phys. Rev. D. **12**, 946 (1975).
- [48] Fulling S.A., Gen. Relativ. Gravit. **10**, 807 (1979).
- [49] Castagnino M. & Mazzitelli D., Phys. Rev. D **31**, 742 (1985).
- [50] Castagnino M., Foussats A., Laurá R. & Zandrón O., Nuovo Cimento **60A**, 138(1980).
- [51] Castagnino M., Ann. Inst. Henri Poincaré **35**, 55 (1981).
- [52] Foussats A., Laurá R. & Zandrón O., J. Math. Phys. **22**, 357 (1981).
- [53] De Witt, B.S., Phys. Rep. **C19**, 295 (1975).
- [54] Hawking S.W., Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [55] Hawking S.W., Sci. Am. **236**, 34 (1977).
- [56] Davies P.C.W., J. Phys. A: Gen. Phys. **8**, 365 (1975).
- [57] Unruh, W.G., Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [58] Hacyan S., Phys. Rev. D **33**, 3630 (1986).
- [59] Boyer T.H., Phys. Rev. A **18**, 1228 (1978).
- [60] Boyer T.H., Phys. Rev. A **18**, 1238 (1978).
- [61] Boyer T.H., Phys. Rev. D **29**, 1096 (1984).
- [62] Boyer T.H., Sci. Am., 1985 (8), 56 (1985).
- [63] Sanchez N., Phys. Lett. **87B**, 212 (1979).

- [64] Barshay S. & Troost W., Phys. Lett. **73B**, 437 (1978).
- [65] Hosoya A., Prog. Theor. Phys. **61**, 280 (1979).
- [66] Sciama D.W., Candelas P. & Deutsch D., Adv. Phys. **30**, 327 (1981).
- [67] Birrel N.D. & Davies P.C. *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [68] Audretsch J. & Spangehl P., Class. Quantum Grav. **2**, 733 (1985).
- [69] Audretsch J. & Spangehl P., Phys. Rev. D **33**, 997 (1986).
- [70] Audretsch J., R uger A. & Spangehl P., Class. Quantum Grav. **4**, 975 (1987).
- [71] Audretsch J. & Spangehl P., Phys. Rev. D **35**, 2365 (1987).
- [72] Castagnino M.A. & Ferraro R., Phys. Rev. D **34**, 497 (1986).
- [73] Castagnino M.A. & Sztrajman J.B., *Observer Dependent Photon Model in Temporal Gauge*, Proceedings of the VI Simposio Latino Americano de Relatividad y Gravitación, ed. Novello M. (World Scientific, Singapore, 1987).
- [74] Geroch R., J. Math. Phys. **11** 437 (1970).
- [75] Dieckmann J., J. Math. Phys. **29** 578 (1988).
- [76] Yano K., Journal of the Faculty of Science (Tokyo) **4**, 1 (1939).
- [77] Fulton T., Rohrlich F. & Witten L., Rev. Mod. Phys., **34**, 442 (1962).
- [78] Más exactamente, la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  debe transformarse como  $\tilde{\mathcal{L}} = \lambda^{-n/2} (\mathcal{L} + \nabla_\mu f^\mu)$ , donde  $f_\mu$  es una función vectorial arbitraria que tiende a cero suficientemente rápido en el infinito. En efecto, el término  $\nabla_\mu f^\mu = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} f^\mu]$  desaparece de la integral de acción usando el teorema de Gauss, y así la acción resulta invariante conforme.
- [79] Padmanabhan T., Class. Quantum Grav. **2**, L105 (1985).
- [80] Este tercer término podría ser incluido en  $Q_{\mu\nu}$  como  $r_{Q\nu} \delta^\mu_\nu$ , pero entonces la conexión conforme dependería del peso de Weyl del campo sobre el cual opera. Tendríamos, en tal caso, una conexión conforme distinta para cada peso de Weyl. Preferimos, en cambio, que  $Q_{\mu\nu}$  no tenga esa dependencia y agregar el tercer término como en (2.2.7).
- [81] Castagnino M.A. & Sztrajman J.B., J. Math. Phys. **27**, 1037 (1986).
- [82] Roman P., *Introduction to Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1969).
- [83] Loos G., Nuovo Cimento **30**, 901 (1963).
- [84] Creutz M., Ann. Phys. (NY) **117**, 471 (1979).
- [85] Gupta S.N., Proc. Phys. Soc. (London) **A63**, 681 (1950).
- [86] Bleuler K., Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).
- [87] Jauch J.M. & Rohrlich F., *The Theory of Photons and Electrons* (Reading, Mass, Addison-Wesley, 1955).
- [88] Bogolubov N.N. & Shirkov D.V., *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York, 1959).
- [89] Schweber S., *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row,

- New York, 1961).
- [90] Itzykson C. & Zuber J.B., *Quantum Field Theory* (Mc Graw-Hil, New York, 1980).
  - [91] Bogolubov N.N., Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 58 (Sov. Phys. JETP **7**, 51 (1958)).
  - [92] Castagnino M. & Sztrajman J., *Observer Dependent Quantum Vacua in Curved Space II*. Aceptado para su publicación en Phys. Rev. D (1988).
  - [93] Castagnino M. & Sztrajman J., *Observer Dependent Quantum Vacua in Curved Space III* Enviado a Phys. Rev. D (1989).
  - [94] Landau L.D. & Lifshitz E.M., *Teoría Clásica de los Campos* (Reverté, Bs. As., 1975).
  - [95] Incluimos la palabra "físico" para resaltar la diferencia de este concepto con la noción de carta "geométrica". Desde luego, la teoría puede formularse en cualquier carta geométrica, dado que el formalismo es invariante relativista. Sin embargo, algunas entidades (como el Hamiltoniano o el vacío) dependen del sistema de referencia físico, es decir el fluido de observadores, al que se los asocia y no de la carta en que son escritas.
  - [96] Cattaneo G., Nuovo Cimento **10**, 318 (1958).
  - [97] Deutsch D. & Najmi A.H., Phys. Rev. D **28**, 8 (1983).
  - [98] Ford L.H., Phys. Rev. D **14**, 3304 (1976).
  - [99] En efecto, de (6.1.6) se desprende que  $T_{\mu\nu}$  tiene peso de Weyl  $-1$ , a partir de (5.3.1)  $V_{\mu}$  tiene peso de Weyl  $1$ , y desde (2.1.7) el elemento de superficie  $d\sigma_{\mu}$  tiene peso  $2$ . Entonces, si tenemos en cuenta que el ascenso de cada índice reduce el peso en una unidad, resulta que  $H_{\Sigma}$  es invariante conforme, es decir  $\tilde{H}_{\Sigma} = H_{\Sigma}$ .
  - [100] Un tratamiento más general, que no consideraremos, sería representarlas como combinaciones lineales de las  $\phi_k$ .
  - [101] Castagnino M. & Chimento L., Phys. Rev. D **34**, 3676 (1986).
  - [102] Recordemos que, después de una conveniente transformación conforme, hemos tomado  $g_{00} = 1$ , de manera que las antiguas componentes  $g_{ij}$  han sido divididas por  $g_{00}(t, \mathbf{x})$ . Queda entonces claro que, para que (7.5.4)valga,  $g_{00}(t, \mathbf{x})$  tiene que poder escribirse como el producto de una función de  $t$  por otra de  $\mathbf{x}$  (ver Ref. [92]).
  - [103] Hawking S.W. & Ellis G.F.R., *The Large Scale Structure of Space Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
  - [104] Boulware D., Phys. Rev. D **11**, 1404 (1975).
  - [105] Ford L.H., Phys. Rev. D **11**, 3370 (1975).
  - [106] Sanchez N., Phys. Rev. D **24**, 2100 (1981).
  - [107] Brown M.R., Otewill A.C. & Siklos S.T.C., Phys. Rev. D, **26**, 1881 (1982).
  - [108] Rindler W., Am. J. Phys. **34**, 1174 (1966).
  - [109] Rindler W., *Essential Relativity* (Van Nostrand, New York, 1969).
  - [110] Tolman R.C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Clarendon, Oxford, 1934).
  - [111] Landau L.D. & Lifshitz E.M., *Statistical Physics* (Pergamon, London, 1958).
  - [112] Balazs N.L., Astrphys. J. **128**, 398 (1958).

- [113] Roman P., *Theory of Elementary Particles* (North-Holland, Amsterdam, 1960).
- [114] Born M., *Ann. Phys. (NY)* **30**, 1 (1909).
- [115] Davies P.C.W., *Particles do not Exist en Quantum Theory of Gravity*, ed. Christensen S.M. (Adam Higler, Bristol, 1984).
- [116] Candelas P. & Deutsch D., *Proc. R. Soc. Lond. A.* **354**, 79 (1977).
- [117] Takagi S., *Prog. Theor. Phys.* **74**, 1219 (1985).
- [118] Gradshteyn I.S. & Ryzhik I.M., *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, London, 1980)
- [119] Abramowitz M. & Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1970)
- [120] Candelas P. & Deutsch D., *Proc. R. Soc. Lond. A.* **362**, 251 (1978).
- [121] Hacyan S., *Phys. Rev. D* **32**, 3216 (1985).
- [122] Takagi S., *Prog. Theor. Phys.* **72**, 505 (1984).
- [123] Takagi S., *Prog. Theor. Phys.* **74**, 142 (1985).
- [124] Boyer T.H., *Phys. Rev. D* **21**, 2137 (1980).
- [125] Candelas P. & Sciama D.W., *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1372 (1977).
- [126] Takagi S., *Prog. Theor. Phys.* **74**, 501 (1985).
- [127] Ottewill A. & Takagi S., *Prog. Theor. Phys.* **77**, 310 (1987).






## **AGRADECIMIENTOS**

Esta tesis fue elaborada en base a trabajos realizados entre los años 1981 y 1988 como integrante del Grupo de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación, que dirige el Dr. Mario A. Castagnino en el Instituto de Astronomía y Física del Espacio, como parte del plan de investigación de una beca de iniciación del CONICET entre Abril de 1981 y Marzo de 1983 y en base a las tareas de investigación de un cargo de Profesor Adjunto en el Area Físicomatemática del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires desde el año 1985.

Quisiera agradecer al Dr. Castagnino por su responsable e idónea dirección, así como a los integrantes de su grupo por el ameno clima de trabajo, y en particular a los Drs. Juan P. Paz y Diego F. Mazzitelli por la amable colaboración mostrada en los extensos análisis de algunos tópicos .

Por otra parte, agradezco a las autoridades del Area Físicomatemática del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires, y muy especialmente a los Lic. Eduardo H. Flichman y Agustín M. Rela, quienes alentaron y facilitaron la prosecución de mi tarea de investigación.