Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Análisis espectral e interpretación de señales magnetotelúricas

Moyano, Carlos Emilio

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Moyano, Carlos Emilio. (1990). Análisis espectral e interpretación de señales magnetotelúricas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2366_Moyano.pdf

Cita tipo Chicago:
Moyano, Carlos Emilio. "Análisis espectral e interpretación de señales magnetotelúricas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2366_Moyano.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

INFORME sobre la tesis de doctorado:

ANALISIS ESPECTRAL E INTERPRETACIÓN DE SENALES MAGNETOTELURICAS
Presentada por:

Carlos Emilio Moyano

El trabajo de investigación presentado versa sobre el método de prospección magnetotelúrica, metodo cuyo propósito es inferir la distribución de conductividades subyacentes a un área de la tierra a partir de la medición del campo electromagnético de orígen externo (magnetosférico e ionosférico) sobre esa área. Como la distribución espacial de las fuentes que producen esas variaciones es desconocida y el rango de frecuencias en los que se lo que se mide está, odviamente, aco= tado son varias las hipótesis previas que deben hacerse para po- der aplicar el método.

El objetivo de la presente Tesis fué la discución y estimación de la validez de esas hipótesis y su eventual modi- ficación a fin de intentar conferir mayor precisión al método.

Es de destacarse que la metodología empleada incluye desarrollos originales tanto respecto de los experimentos numéricos encarados para la investigación de la validez y precisión de los metodos de inversión de los espectros MT y de los métodos de análisis expectral de los datos, como respecto al experimento mismo .Dentro de éste marco considero que el lic. Mo= yano ha mostrado destacadas condiciones , no solo para innovar dentro del campo de la física matemática y computacional, sino también para adecuarse a las condiciones adversas en que realizó los aspectos experimentales mostrando una creatividad exepcional para resolver los problemas concretos que se le fueron presen- tando en el desarrollo del mismo, en este contexto deseo mencio- nar el método que propuso para la estimación de la función de

transferencia de bobinas de inducción, el cual , a pesar de ser conocido en otras áreas experimentales, no había sido nunca utilizado en el contexto del método MT, y facilita la obtención de datos más precisos a frecuencias altas, lo que le confiere interés dentro del área de la geosísica aplicada.

Respecto de los aspectos teóricos, los resultados de la presente Tesis permiten delimitar las condiciones de validez de la hipótesis de fuente finita y muestran la importancia de incluir la conductosfera en los métodos de inversión de los espectros MT, Además se introducen experimentos numéricos originales como herramientas para el estudio de la aplicabilidad y precisión de nuevos metodos de análisis de series temporales a los datos MT, lo cual es de importancia futura inmediata dado que , como se desprende también de los resultados de la presente Tesis, la precisión del método MT reposa de manera sustancial sobre la obtención de un método matemático más adecuado que los utilizados hasta el presente para el análisis espectral de los datos.

Además de las cualidades mostradas por él doctorando que he destacado arriba y que se manifiestan claramente en los resultados mencionados es digno de destacarse la autonomía iniciativa y alto grado de perseverancia por el demostrada manifiesta en el hecho de que su lugar habitual de trabajo se encuentra en la ciudad de Mendoza, ámbito en el cual ha desarrollado gran parte del contenido de su Tesis. Esto me conduce a no finalizar éste imforme sin antes expresar la profunda satisfacción que este heho me produce puesto que me ha permitido colaborar, desde Buenos Aires, con el dearrollo del área de investigación de mi especialidad en otra de las provincias Argentinas.

Silvia Duhau

SILVIA DUHAU

Profesora asociada regular

Buenos aires, 25 de setiembre de 1990.

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Análisis Espectral e Interpretación de Señales Magnetotelúricas

por

Carlos Emilio Moyano

Directora de Tesis

Prof. Dra. Silvia Noemie Duhau

Julio 1990

- 2366 -
ej. 2

Trabajo de Tesis presentado para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

Agradecimientos:

Esta tesis fué posible con el concurso inapreciable de las siguientes personas e instituciones:

-Silvia Duhau por su confianza, sus correctos comentarios y su profundo conocimiento del mundo físico y sobre todo por su libertad para hacer.

-Ana Osella, coautora de trabajos de investigación, por su apoyo y su compañerismo.

-Elsa Cortina, por sus excelentes cursos de posgrado.

-Alfredo Louro, Cristina Aspiazu, Alejandro de la Torre Matías de la Vega, Alicia Favetto y Peter Alexander por su compañerismo y aliento en esta larga etapa.

-Marilú Zambrano de Ledesma y Clodomiro Ledesma, constantes soportes durante mi estadía en Buenos Aires.

-Toda la familia Lamarque, queridos tíos y primos.

-Mi familia, que soportó con entereza estos años de semi-alejamiento.

-La dirección del Cricyt-Me y los integrantes de la Unidad de Investigación Geofísica: Manuel Mamaní, Enrique Borzotta y Arturo Maidana.

-El CONICET, por su permiso para desarrollar parte de mis tareas en Buenos Aires mientras durara el desarrollo de la tesis.

-Todos los que me creyeron.

Resumen

Este trabajo trata de la influencia que tienen en magnetotelúrica (MT), el tamaño de la fuente, la conductosfera y el análisis espectral.

En el capítulo uno, luego de la introducción, en que se describe el método magnetotelúrico, se trata el problema MT en una dimensión y las hipótesis simplificatorias en que está basado el mismo. Se presentan las curvas con que se trabaja en MT, o sea la resistividad y la fase para una estructura tabular de dos capas. A continuación se considera la relevancia del análisis espectral en MT pues es muy común trabajar en el dominio de las frecuencias. Se considera a continuación la dimensión finita de la fuente y se introduce el concepto de conductosfera.

En el capítulo dos se considera la influencia del tamaño de la fuente y de la conductosfera en los sondeos MT, para ello se revisa el análisis de Price, 1950, y se considerea un ejemplo uni-dimensional, que se podría considerar típico de las resistividades en función de la profundidad. Se estudia el modelo directo y las propiedades asintóticas de un semiespacio de resistividad constante. Luego se consideran distintas profundidades de conductosfera con fuente infinita, estudiando el modelo elegido anteriormente y una estructura tabular de dos capas. Se estudia la influencia de la conductosfera en el modelo inverso, para el modelo de cinco capas considerado. El capítulo finaliza con una comparación entre semiespacio infinito de resistividad constante y fuente finita con una estructura tabular de dos capas con conductosfera y fuente infinita.

En el capítulo tres se realiza un experimento numérico consistente en simular una medición MT en la superficie del modelo de tierra de cinco capas considerado. En base a esto se prueban dos analizadores espectrales, uno de máxima entropía y uno basado en la transformada rápida de Fourier. A fin de calibrar los variómetros de inducción utilizados en una medición se presenta en el apéndice uno un método de calibración basado en la inyección de señales de banda ancha y la medición de las entradas y salidas de los instrumentos. El capítulo tres finaliza con el análisis de las mediciones de campo.

Por último en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones y sugerencias para futuros trabajos.

INDICE

CAPITULO 1. El método de prospección magnetotelúrico. Descripción de algunos problemas.....1

1.1. Introducción.....1

1.2. El Método Magnetotelúrico. Fenómenos involucrados...5

1.3. El problema magnetotelúrico en una dimensión.....9

1.4. Análisis espectral.....17

1.5. Hipótesis de dimensión infinita de las fuentes.....19

1.6. Influencia de la conductosfera en la magnetotelúrica.....21

CAPITULO 2. Influencia de la conductosfera y del tamaño finito de la fuente en sondeos MT.....23

2.1. Introducción.....23

2.2. Análisis del tamaño finito de la fuente.....26

2.2.1. El modelo teórico.....26

2.2.2. Extensión a varias capas.....29

2.2.3. Aplicación y resultados.....31

2.3. Influencia de la conductosfera en sondeos MT.....47

2.3.1. Modelo directo: tierra de cinco capas.....48

2.3.2a. Modelo directo: estructura tabular de dos capas.....61

2.3.2b. Modelo directo: estructura tabular de dos capas, curvas de nivel.....69

2.3.3. El problema inverso.....73

CAPITULO 3. Análisis espectral en MT. Comparación de métodos. 90

3.1. Introducción.....90

3.2. Análisis Espectral.....93

3.2a. El método de Welch.....96

3.2b. El estimador espectral de máxima entropía.....97

3.3. Cálculo de las series sintéicas magnetotelúricas..100

3.3a. Serie Magnética.....100

3.3b. Modelo de tierra. La serie eléctrica.....103

3.4. Análisis espectral de las serie sintéticas.....107

3.5. Aplicación a mediciones.....113

Capítulo 4. Conclusiones.....121

Apéndice 1. Estimación de la función de transferencia de una bobina de inducción.....124

A.1. Introducción.....124

A.2. Estimación de la función de transferencia de un filtro digital.....127

A.3. Aplicación a sistemas analógicos en grandes períodos.....132

A.3.a. El experimento.....133

A.3b. Determinación de la función de transferencia de instrumentos.....136

Referencias.....142

Capítulo 1.

El método de prospección magnetotelúrico. Descripción de algunos problemas.

1.1. Introducción.

El conocimiento de las estructuras internas de la tierra y de la distribución de sus constituyentes es, si se quiere, una tarea multidisciplinaria. Las evidencias de su constitución interna provienen de múltiples fuentes y disciplinas:

-La geología, permite inferir estructuras subyacentes a través de modelos basados en datos de superficie, controlados a veces por perforaciones.

-En cuanto a la información que se puede obtener a partir de las propiedades físicas de la materia, entre las disciplinas geofísicas que intervienen para tal fin, podemos mencionar a las que miden o estiman propiedades termodinámicas de la materia, como la densidad o cantidades relacionadas con ella (p. ej. velocidad del sonido) como la gravimetría, la sísmica, o la sismología, con alcances de unos 40 Km, 10 Km y hasta 3000 km respectivamente, con este último método se ha podido inferir la presencia del núcleo terrestre. La magnetometría, a través de la medición de la magnetización permanente de la capa magneto-activa permite explorar hasta unos aproximadamente 25 km de profundidad, (que corresponden a grandes rasgos al límite Curie) determinando contrastes de susceptibilidad magnética.

-En cuanto a las propiedades eléctricas (básicamente la conductividad) de la materia (variaciones geomagnéticas, métodos

electromagnéticos), se puede obtener información hasta profundidades que dependen de la frecuencia de la onda utilizada; con las señales de origen externo se obtiene información desde la superficie hasta alrededor de los 1000 km mientras que las variaciones seculares, de origen interno, dan información inclusive del núcleo terrestre.

Está claramente establecido que para las capas de menor profundidad, los métodos sísmicos dan una información muy detallada de las interfaces presentes. Esto se ve muy claramente en cuencas sedimentarias, que han sido muy exploradas por este método debido a su potencial interés petrolero, en que la velocidad de propagación de las ondas acústicas es una función creciente de la profundidad; ésto, intuitivamente, es de esperar porque las capas mas profundas han estado mas comprimidas que las superficiales y son por lo tanto mas densas. Sin embargo, existen casos en zonas de sobrecorrimientos, por ejemplo en las zonas de formación de montañas en que, debido a desplazamientos, se observan masas rocosas de mayor velocidad sobre materiales de menor velocidad, otro caso sería el de áreas cubiertas por basaltos, en la Argentina están presentes en la cuenca Chaco-paranaense y en áreas volcánicas del sur de Mendoza.

En estos casos los ecos de las señales sísmicas artificiales enviadas desde la superficie, son de muy difícil recepción, no permitiendo obtener información de capas inferiores; particularizando para el caso de la exploración de petróleo, el método sísmico puede ser complementado con otros métodos mas accesibles en cuanto a costo. Es aquí donde los métodos

electromagnéticos, en particular el magnetotelúrico (MT), pese a no tener en la actualidad la resolución del sísmico, al medir, o permitir estimar la distribución de conductividades del subsuelo, aparece como complementario de éste (Anderson y Pelton, 1986).

Además en zonas no conocidas y donde se debe hacer un reconocimiento previo de una zona extensa también es de gran utilidad por su bajo costo de ejecución, por ejemplo en la cuenca de Paraná en el sur de Brasil (Stanley y otros, 1985).

También son objeto de estudio por este tipo de metodología las áreas geotérmicas debido al contraste de resistividades provocadas por las diferencias de temperaturas (Schwarz y otros, 1982, Baldis y otros, 1983).

Por último, también, es muy útil como un importante medio de exploración estructural de la corteza terrestre, y en estudios tectónicos, (Jones y otros, 1988 en la cordillera sudeste de Canadá, Schwarz y otros, 1984 en la cordillera norte de Argentina, Chile, Bolivia, y Duhau y Favetto, 1990).

En este capítulo se presentan los problemas que trataremos en esta tesis. En el parágrafo 1.2 se introduce brevemente el efecto de penetración de ondas de baja frecuencia en la tierra y su correlato, los campos medidos en la interfase tierra- aire, o sea el método magnetotelúrico.

En el parágrafo 1.3 deduciremos las fórmulas que gobiernan el problema MT en una dimensión. Puesto que nuestro objetivo no es el estudio de ninguna estructura en particular, sino que es el análisis del método mismo, no trataremos en esta tesis el

problema bi-dimensional ni el tridimensional. En el parágrafo 1.4 trataremos los problemas que se presentan al hacer el análisis espectral de las señales, se muestra un ejemplo bastante conocido que demuestra las ventajas que en principio tiene un método de análisis espectral paramétrico sobre uno clásico. En el parágrafo 1.5 se considera la hipótesis de dimensión infinita de la fuente, indicando algunas de las dimensiones características que tienen algunas fuentes en la ionosfera y en el 1.6 hablamos brevemente sobre la influencia de la conductosfera en la magnetotelúrica, definiendo este primer concepto a través de un gran contraste de resistividades que explican las variaciones geomagnéticas de largo período (mayores que una por hora).

1.2. El Método magnetotelúrico. Fenómenos involucrados.

El método de prospección magnetotelúrico, está basado en la medición simultánea sobre la superficie de la tierra de las variaciones del campo geomagnético y de la diferencia de potencial eléctrico asociada a estas variaciones.

Los períodos de estas fluctuaciones se extienden desde milisegundos hasta varios años. Los períodos menores que 1 seg son producidos por actividad eléctrica en tormentas atmosféricas, que estan principalmente ubicadas en los trópicos. Los períodos mayores que 1 segundo resultan del desplazamiento de partículas ionizadas en la atmósfera superior, generados por la actividad solar y por el movimiento relativo de la tierra, el sol y la luna. Dependiendo de su período estas así llamadas micropulsaciones, han sido clasificadas en pulsaciones Pc regulares (0.2 a 600 seg), pulsaciones irregulares (1 a 150 seg) y pulsaciones tipo perlas (0.3 - 3 seg); estas últimas relacionadas a auroras.

La mayor parte del ruido o señal magnética que alcanza la tierra por debajo de 1 Hz y hasta 10^{-5} Hz es debido al flujo de corrientes en las capas ionizadas que rodean la tierra, las de aún mas baja frecuencia están originadas en fluctuaciones de las corrientes que circulan en el interior de la tierra.

La Fig. 1.1, tomada de Serson, 1973, ilustra la amplitud de las variaciones naturales de la componente horizontal del campo geomagnético en función de la frecuencia. Los diferentes fenómenos atmosféricos, ionosféricos, etc., varían con la latitud

distintas maneras. La figura 1 muestra entonces una media mundial; ademas se grafica en esta figura el campo eléctrico correspondiente a una tierra hipotética de resistividad constante e igual a 30 Ωm. Se observa, para períodos mas cortos que una hora, un decremento de potencia para períodos decrecientes. Esto es lo que se conoce como "espectro de ruido rojo" (mayor potencia hacia frecuencias menores); mientras que el espectro del campo eléctrico (o telúrico) asociado se comporta mas como un proceso de ruido blanco (igual potencia en distintos rangos de frecuencia).

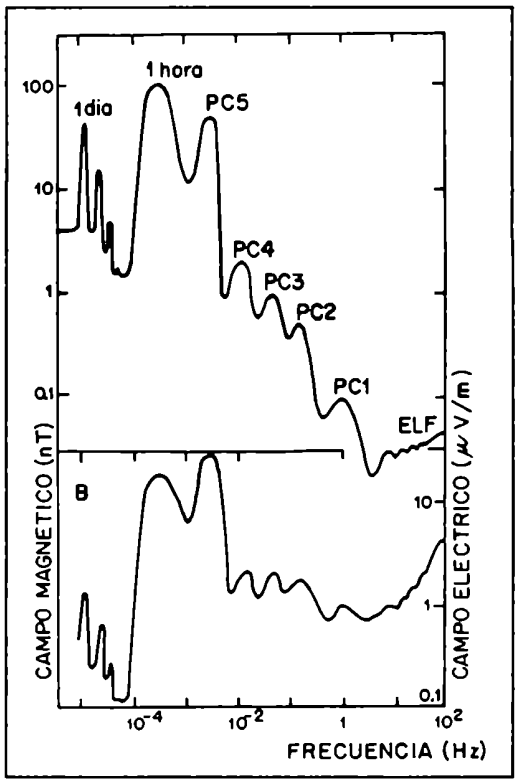


Figura 1.1 Campo magnético en nanotesla y campo eléctrico en microvolts /metro en función de la frecuencia.

Las variaciones del campo geomagnético medidas en la superficie terrestre fueron utilizadas, con algunas simplificaciones por Cagniard (1953), para la proposición de un método de prospección (la magnetotelúrica ó MT), capaz de estimar la conductividad del subsuelo.

En la Tabla I se muestra la profundidad de penetración (espesor de skin) para una tierra supuesta plana, isótropa y de una resistividad constante de 30 Ωm; esta tabla da una idea del orden de magnitud de las frecuencias utilizadas y de las profundidades de penetración que estas alcanzan, y también

Tabla I

f [Hz]	δ[m]	T[seg]
1000	87.6	10^{-3}
1	2770.	1
10^{-3}	87611.	10^{3}
10^{-5}	876117.	10^{5}

muestra las posibilidades del método en cuanto a prospección y a su vez las potencialidades en el análisis de estructuras profundas del subsuelo.

La idea de Cagniard fue la de aprovechar este efecto, distinta penetración para diferentes frecuencias, para inferir la distribución de conductividades en el interior terrestre. Su técnica supone la incidencia sobre la superficie terrestre de una onda electromagnética plana y supone además que la tierra es horizontal y homogénea lateralmente.

La relación de las intensidades entre campo eléctrico y magnético es una cantidad que tiene las dimensiones de impedancia y es función de las propiedades eléctricas del medio. Si esta impedancia $Z_{ab} = E_a/H_b$ (a y b son direcciones perpendiculares entre sí), es calculada para una serie de frecuencias, se obtiene la impedancia como función de la frecuencia (función de transferencia entre E y H) lo que a su vez provee información sobre el perfil de conductividades eléctricas en función de la profundidad. Cuando las propiedades de la tierra son isotrópicas los campos **E** y **H** son mutuamente perpendiculares.

Una vez obtenida la impedancia (compleja) de la onda a través de algún método de análisis espectral, que será descripto después en el capítulo 3, comienza la tarea de inferir que distribución de conductividades dará la misma respuesta que la

1.3. El problema magnetotelúrico en una dimensión

Como ya se dijo el objetivo de la magnetotelúrica es estimar la distribución de conductividades en el interior de la tierra a partir de mediciones de los campos electromagnéticos en su superficie.

Las ecuaciones de Maxwell, que describen los campos electromagnéticos en un medio conductor son,en el SI,

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \\ &\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \\ &\nabla \times \mathbf{E}=0 \\ &\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \qquad 1.1$$

donde **E**, **B**, **J**, y **D** tienen los significados usuales, estas ecuaciones tienen solución si se dispone de las ecuaciones constitutivas del medio, que supondremos lineal y que ligan los campos

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{J}_v=\sigma\mathbf{E} \qquad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \qquad 1.1a$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio, ε su permeabilidad eléctrica y σ su conductividad.

Hagamos una evaluación de las propiedades físicas μ, ε y σ para distintos minerales presentes en la tierra.

La tabla II presenta las permeabilidades magnéticas relativas a las del vacío para diversos minerales (Keller y Frischknecht, 1966); entre las rocas de la corteza, las que contienen mas porcentaje volumétrico de magnetita, son los basaltos (4%), lo que lleva la permeabilidad de las mismas a $\mu_{basalto}/\mu_0=1,0417$. Podemos entonces en principio considerar en primera aproximación a la permeabilidad magnética de los

constituyentes de la corteza terrestre como igual a la del vacío, que es la aproximación normalmente usada en magnetotelúrica. Veamos ahora que sucede con la permitividad eléctrica.

Tabla II Permeabilidad magnética relativa a la del vacío.

Mineral	μ/μ_0
Magnetita	5.00
Pirrotita	2.55
Ilmenita	1.55
Hematita	1.053
Pirita	1.0015
Rutilo	1.0000035
Anhidrita	0.999987
Calcita	0.999987
Fluorita	0.999975
Cuarzo	0.999985
Hornblenda	1.00015

En la tabla III se pueden observar los valores de la permitividad eléctrica ε para diferentes minerales y para algunas frecuencias de interés; como vemos los valores son todos del mismo orden de magnitud, si además suponemos que tanto la permeabilidad magnética μ del medio (igual a la del vacío μ_0) como la permitividad eléctrica ε del medio no son funciones de las coordenadas o del tiempo, tomando rotor en las dos últimas ecuaciones de (1.1), reemplazando y teniendo en cuenta la (1.1a)

Tabla III Constante dieléctrica en picofaradios/metro para diferentes minerales

Roca	Constante dieléctrica 100 Hz	1 Khz
Dolomita	105.0	85.6
Caliza	91.8	82.9
Arenisca	52.5	51.5
Diorita	63.9	58.5
Gabro	133.0	102.0
Granito	75.0	66.9
Silimatita	86.0	80.8
Hornblenda	91.5	87.8
Serpentinita	89.8	69.0

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \mu_0 \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{vmatrix} E \\ H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad 1.2$$

Esta es la ecuación general de ondas. Note que si el primer término es despreciable tenemos una ecuación de difusión; este es realmente el caso en MT y en audio-magnetotelúrica. Para verlo mas claro supongamos que los campos varían con frecuencia angular w, es decir,

$$\begin{vmatrix} E \\ H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E(x) \\ H(x) \end{vmatrix} e^{-iwt}, \qquad 1.3$$

donde x es el vector posición, entonces la 1.2 resulta en

$$[\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon w^2 (1+\frac{i\sigma}{\varepsilon w})] \begin{vmatrix} E \\ H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad 1.4$$

y tendríamos difusión en los casos en que $\sigma \gg \varepsilon w$, vamos a ponernos en las peores condiciones; para una onda incidente de frecuencia alta (audio) 1000Hz, una resistividad alta de $5x10^4$ Ωm y un valor de la constante dieléctrica $\varepsilon \approx 8.9x10^{-11}$ $[Fm^{-1}]$, se obtiene que $\sigma \approx 100\ \varepsilon w$.

En este caso, y en todos los casos prácticos de interés para la prospección, sólo las corrientes de conducción son importantes.

Para estimar la distribución de conductividades en el subsuelo aprovechando este fenómeno (ondas incidentes en la superficie terrestre), Cagniard, 1953, hizo las siguientes hipótesis simplificatorias:

-Incidencia de ondas perpendicular a la superficie terrestre[1].

-Fuente de estas ondas de dimensión infinita.

-Tierra homogénea, libre de fuentes e isotrópica lateralmente es decir $\sigma=f(z)$.

Supongamos además que nos referimos al sistema de coordenadas geomagnéticas usuales es decir, eje x hacia el Norte, eje y hacia el este y eje z hacia abajo, las derivadas respecto de x y de y los campos E y H se anularán en el laplaciano de la (1.3) resultando en las ecuaciones de Helmholtz homogéneas

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right] \begin{vmatrix} E \\ H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad 1.5$$

donde $k^2 = iw\mu_0\sigma$, entonces $k=(iw\mu_0\sigma)^{1/2}=(w\mu_0\sigma/2)^{1/2}(1+i)=1/\delta(1+i)$, donde $\delta=(w\mu_0\sigma/2)^{-1/2}$ es la profundidadd de penetración de los campos, o espesor de skin.

Bajo estas suposiciones los campos solo tienen componentes según los ejes x e y, las soluciones a estas ecuaciones tienen la forma

$$F(z) = (A\, e^{kz} + B\, e^{-kz}) \qquad 1.6$$

estas soluciones representan una onda de difusión hacia abajo y una onda dispersada hacia arriba, después de un poco de álgebra se obtiene la siguiente relación entre los campos:

$$\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = \frac{iw\mu_0}{k} \frac{Ae^{kz}+Be^{-kz}}{Ae^{kz}-Be^{-kz}} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \end{vmatrix} \qquad 1.7$$

---

[1]Esta suposición esta justificada ya que dentro de la tierra la propagación de las ondas es muy cerca de la normal a la superficie debido al contraste de resistividad tierra-aire.

La impedancia del medio, $Z=E_x/H_y=-E_y/H_x$ es una cantidad escalar compleja que depende de las propiedades eléctricas de la tierra.

Para resolver la (1.5) en el caso de una tierra estratificada se aplican las condiciones de contorno usuales:

a) La componente tangencial de **E** es continua a traves de la interface.

b) La componente tangencial de **H** es continua a traves de la interface.

c) La componente normal de **H** es continua a traves de la interface.

Estas condiciones de contorno permiten eliminar A y B llevando a la formula de recurrencia,

$$Z(0)=iw\mu_0/k[k_1h_2+th^{-1}\{k_1/k_2\coth(k_2h_2+th^{-1}[k_2/k_3\ldots th^{-1}\{k_{n-2}/k_{n-1}\coth(k_{n-2}h_{-2}+th^{-1}[k_{n-1}/k_n])\}\ldots])\}], \qquad 1.8$$

donde k_j y h_j denotan la constante de propagación (n° de onda) y el espesor de la capa j-ésima respectivamente.

Nótese que según (1.6) el producto escalar de los dos campos es nulo, es decir que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$. Esta característica denota que la propagación de ondas dentro de la tierra conductora se da segun el modo transverso electromagnético TEM.

Para el caso de un semiespacio conductor de conductividad σ la expresión para la impedancia se reduce a

$$Z=E_x/H_y=iw\mu_0/k, \qquad 1.9$$

reemplazando a k por su valor,

$$Z(T)=(w\mu_0\rho)^{1/2}\ e^{i\pi/4} \qquad 1.10$$

donde $\rho = 1/\sigma$ es la resistividad del medio. Vemos aquí que en la superficie del semiespacio conductor el campo eléctrico está adelantado al campo magnético por $\pi/4$. De la (1.10) se puede determinar la resistividad del semiespacio en función de los campos medidos en superficie por

$$\rho_a=1/\sigma_a=(w\mu_0)^{-1}\ |Z|^2 \qquad 1.11$$

la que, para las unidades prácticas de mV/Km, nT y frecuencia $f=w/2\pi$ se reduce a

$$\rho_a=0.2T|Z|^2 \qquad 1.12$$

Por extensión llamamos resistividad aparente a la ecuación (1.11) donde esta vez Z es el cociente de los campos, aunque la estructura subyacente no sea un semiespacio conductor (por ejemplo una tierra en capas).

Otra circunstancia que hay que tener en cuenta es que si reemplazamos al conductor uniforme por una estructura en dos capas, el adelanto de fase de **E** respecto de **H**, difiere normalmente de 45°. Si la capa superior es un conductor mejor que el semiespacio inferior ($\rho_1 < \rho_2$) y su espesor h es menor que el espesor de skin δ_1, la fase cae por debajo de 45°. Si la capa inferior es mejor conductor la fase excede a 45° (ver p.e. Fischer, 1985).

En la figura 1.2 se representa una estructura tabular de dos capas. Supongamos $\rho_2 > \rho_1$, en ese caso (Fischer y otros, 1985), la excursión principal de la resistividad aparente supera a $_1$ cuando

$$T > (8h1/10^3)^2/10\,\rho_1 \qquad 1.12a$$

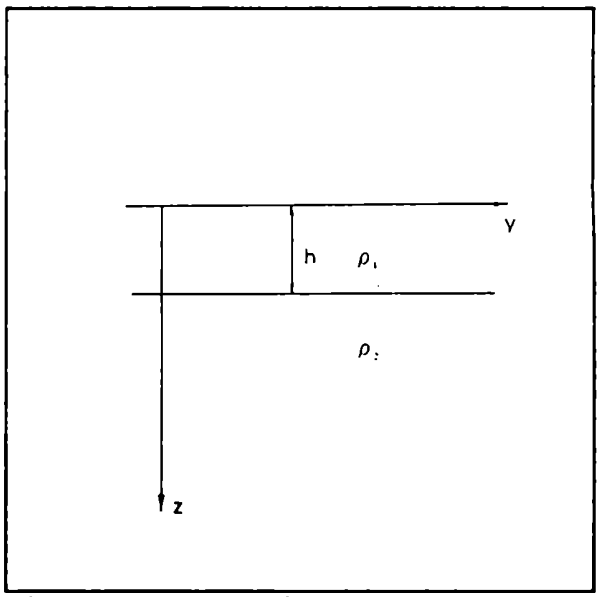


Figura 1.2 Diagrama de una tierra compuesta de una estructura tabular de dos capas.

mientras que la excursión principal de la fase cambia de mayor a 45° a menor que 45° cuando

$$T > (4h_1/10^3)\ /10\,\rho_1, \qquad 1.12b$$

ver figura 1.3.

De (1.12a,b) se ve que la fase precede a la resistividad aparente por un factor 4 en T. Esto significa que si se va desde períodos cortos hacia períodos largos, la fase es sensible a los estratos profundos antes que la resistividad aparente.

En la figura 1.3 se observan el comportamiento de la resistividad aparente y de la fase con el período para la estructura tabular de la figura anterior a la cual se han asignado los siguientes valores de resistividades de las dos

capas: ρ_1=100Ωm y ρ_2=10Ωm. Analizando el comportamiento de la resistividad aparente, vemos, que luego de su valor inicial de 10Ωm ésta presenta una pequeña excursión hacia valores inferiores a ρ_1, que en realidad es una oscilación amortiguada hacia períodos menores, y luego comienza a aumentar hacia períodos mayores; lo mismo sucede para la fase, pero en sentido inverso, creciendo en períodos, hay un ligero aumento de fase, luego una disminución considerable y luego un lento retorno a 45°.

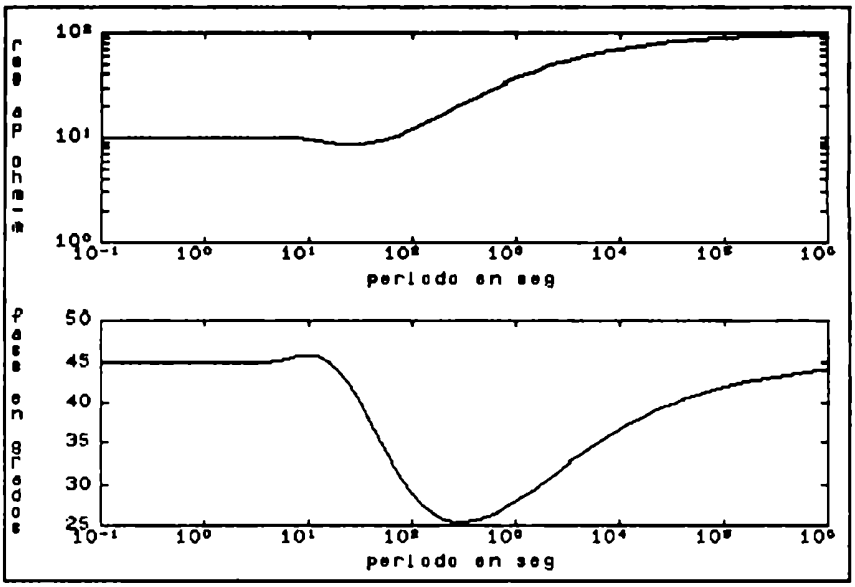


Figura 1.3 Curvas de resistividad aparente (superior) y de fase (inferior) en función del período para la estructura de la figura 1.2.

1.4 Análisis Espectral

Las señales registradas son el resultado de fenómenos múltiples superpuestos cuyas frecuencias y amplitudes cubren un amplio rango; como hemos visto en el punto 1.2 la descripción es muy simple para la incidencia de una onda monocromática, y por lo tanto para una superposición de ondas monocromáticas. Luego el análisis espectral de las señales intervinientes es de fundamental importancia para la interpretación física del fenómeno.

Los métodos espectrales usuales en la disciplina magnetotelúrica suponen que los procesos que se analizan son débilmente estacionarios de orden 2, es decir que los momentos estadísticos del proceso, o sea la media y la varianza, no son afectados al correr los tiempos de observación por una cantidad específica hacia adelante o hacia atrás. El método mas notorio es el del periodograma, que se calcula usando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Sin embargo las señales MT no responden a este tipo de procesos y su relación señal-ruido, es variable con el tiempo, existiendo intervalos donde la señal es alta y otros donde es baja. Luego es mandatorio utilizar otras técnicas de análisis espectral que permitan tratar series de tiempo cortas. Se ensayará en esta tesis el método de la máxima entropía, ya utilizado por otros autores en otros temas de Geofísica y que permite analizar series cortas de datos. Esto se basa en el hecho de que las señales incidentes tienen nivel variable en función del tiempo.

En la figura 1.4, tomada de Ulrych, 1972, se muestra el caso extremo de media sinusoide contaminada por ruido, y sus estimadores espectrales de máxima entropía, figura 1.4c y el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier, figura 1.4a. Queda marcado en este caso la capacidad del estimador de máxima entropía para estimar correctamente el espectro de series cortas de datos.

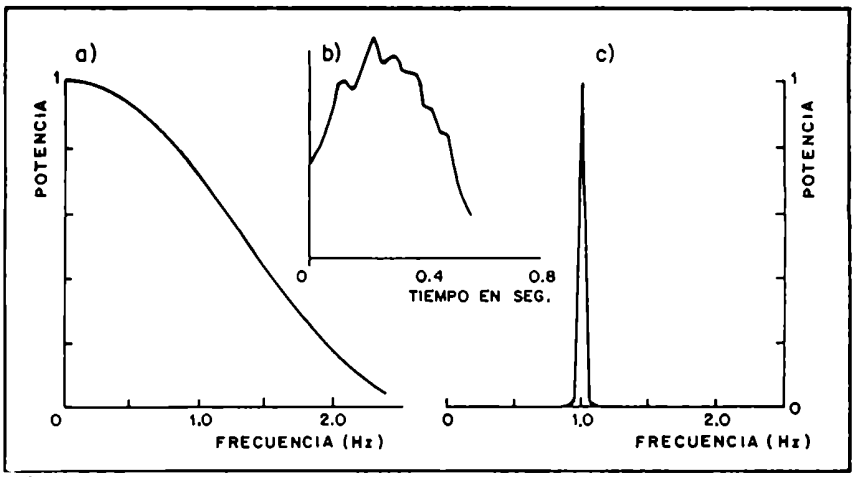


Figura 1.4 Espectro de potencias de la señal graficada en b) a través de la Transformada de Fourier a) y a través de Máxima Entropía c).

1.5 Hipótesis de dimensión infinita de las fuentes.

Como se ha dicho anteriormente las fuentes se originan en la magnetosfera, ionosfera y atmósfera terrestre y son por lo tanto de dimensión finita de manera que no está fundamentado a priori, que la aproximación de onda plana implícita en el método MT sea adecuada. En particular las variaciones geomagnéticas diarias, que penetran hasta la conductosfera (zona de alta conductividad en el límite entre el manto superior y manto inferior terrestre, que será introducida en el parágrafo 1.6) son de origen ionosférico y su dimensión es bien conocida tanto por estudios teóricos como experimentales de la ionosfera (ver por ejemplo Duhau y Osella, 1982).

Tabla IV Valores caracteristicos de k

k (m^{-1})	Observaciones
0	Onda plana
$7.6.10^{-7}$	Sistema de corrientes ionosféricas a latitudes medias
$7.6.10^{-5}$	Sistema de corrientes ionosféricas en el Ecuador

Para caracterizar esta dimensión supondremos que existe una circulación de corrientes a la altura de 100 km[2] en la ionosfera de este a oeste y que las dimensiones características de este sistema están dadas por el numero de onda k. Si k=0 la fuente tiene dimension infinita, en la tabla II se presentan algunos

[2]En realidad las corrientes Sq circulan entre 100 y 110 km, la conductividad máxima de la región E de la ionosfera está a 107 km de altura.

valores característicos de k. A pesar de que es muy conocido el hecho que las fuentes externas tienen tamaño finito el método MT no tiene en cuenta este efecto. Por lo tanto en el parágrafo 2.2 se presenta una discusión de este fenómeno.

1.6 Influencia de la conductosfera en la magnetotelúrica.

Se define el manto como la parte de la tierra que se extiende desde la discontinuidad de Mohorovicic a una profundidad de 35-50km hasta el núcleo, a 2900km.

Estos límites estan bien marcados por fuertes discontinuidades de velocidad obtenidas por métodos sísmicos (Horton, 1965).

La curva de conductividades en función de la profundidad fue estimada por Lahiri y Price, 1939, Mc Donald, 1957, Price, 1970.

A partir de estudios de las variaciones geomagnéticas en bajas frecuencias (entre un ciclo/mes y un ciclo/día), se ha podido estimar la conductividad eléctrica de la corteza y del manto. Esto se muestra en la figura 1.5 (Price, 1970).

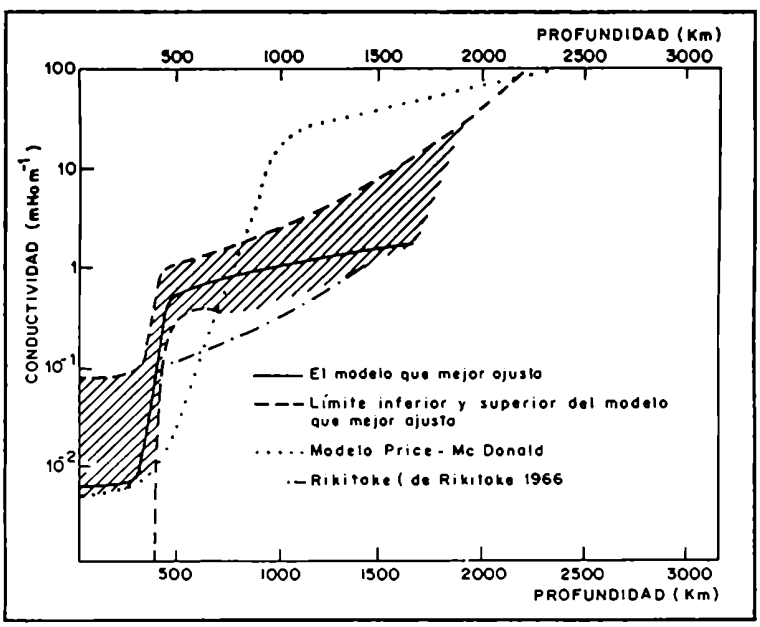


Figura 5 Conductividad eléctrica del manto superior, distintos modelos.

Como vemos los modelos que representan a la conductividad en función de la profundidad establecen un fuerte gradiente de conductividades entre 500 y 1000km. Este hecho ha llevado a

llevado a acuñar el término de conductosfera para esta interfase manto superior-manto inferior (Eckhardt y otros, 1963).

Los métodos de inversión normalmente usados no consideran la existencia de la conductosfera a aproximadamente 650 km de profundidad y tampoco tienen en cuenta la dimensión finita de la fuente.

En esta tesis se investiga la influencia de la conductosfera, además como fué mencionado en el parágrafo 1.5, la influencia de la dimensión finita de la fuente sobre la estimación de las conductividades de capas superficiales. Esto será desarrollado en el capítulo 2. Para ello haremos aquí un uso extenso de experimentos numéricos, haciendo variar la profundidad de la conductosfera entre valores encontrados (200-900 km, Duhau y Osella, 1985) y calculando luego los modelos directos con conductosfera y sin conductosfera.

La influencia en el modelado inverso no es despreciable y es tratada en detalle en el capítulo 2, subparágrafo 2.3.3.

Capítulo 2

Influencia de la conductosfera y del tamaño finito de la fuente en sondeos MT.

2.1 Introducción.

Hemos visto en el capítulo anterior que la profundidad de penetración de las ondas está en relación inversa con la frecuencia de las mismas. Es por ello que cuando se busca información somera (de poca profundidad) o sea de frecuencias altas se ignora totalmente la estructura subyacente y es muy común suponer que una capa resistiva, que representaría el basamento cristalino, se extiende hasta el infinito.

La magnetotelúrica está poco menos que considerada como un arte entre los prospectores, entran en su práctica problemas que están considerados como resueltos hace mucho tiempo, como el del análisis espectral, tema que trataremos en el próximo capítulo, o el de la inversión uni-dimensional, en ese sentido nadie podría discutir que existen una buena cantidad de métodos de inversión uni-dimensional por ejemplo Fischer y otros, 1981. Sin embargo, en la actualidad se siguen proponiendo métodos de inversión uni-dimensional, puesto que con los actuales no se satisfacen todos los problemas, justamente aquí hemos encontrado que existe un efecto numérico que lleva a estimaciones erróneas de la estructura uni-dimensional.

En este capítulo, entonces, vamos a considerar un efecto que, como comentáramos en la introducción, normalmente no es

tenido en cuenta en el modelado inverso en magnetotelúrica. Este es la influencia que tiene en el rango de frecuencias de MT la presencia de la conductosfera o interface manto superior-manto inferior, que dependiendo de los lugares de la tierra oscila entre 200 y 900 km de profundidad (ver p.e. Duhau y Osella, 1985). Veremos que esta capa hace sentir sus efectos, sobre todo en la interpretación, ya que los programas de inversión tienden a distribuir los errores en todo el rango espectral medido.

Otros autores (Price, 1950, Srivastava, 1965), han considerado la posible influencia del tamaño de la fuente en la interpretación de los sondeos MT (ver p.e. Review de Marianne Mareschal, 1986), antes de comenzar con el análisis de la influencia de la conductosfera, vamos a extender un poco el análisis del efecto del tamaño finito de la fuente, tomando dos modelos de resistividades en función de la profundidad; uno de cinco capas que se extiende hasta grandes profundidades y otro que es un semiespacio infinito de resistividad constante. Desarrollaremos este tema en el parágrafo 2.2.

Vamos a mostrar en el parágrafo 2.3 de este capítulo que las diferencias que se encuentran entre considerar o no la presencia de la conductosfera en el modelo directo, son comparables a (o mayores) que las correcciones que se deben aplicar por efecto del tamaño de la fuente. Daremos las curvas que permiten determinar, para una dada profundidad de la conductosfera, el período en que se produce una diferencia entre las curvas sin conductosfera y con conductosfera mayor que un determinado porcentaje; encontraremos que en realidad esta capa influye de manera muy notable aún en el rango usual de MT (10^{-2}-

10^3 s)

Además, y esto es muy importante, estableceremos mediante un ejemplo las diferencias que se encuentran aplicando métodos usuales de inversión. Esto demuestra que los métodos de inversión utilizados, propagan el error desde las frecuencias mas bajas hacia las mas altas.

2.2. Análisis del tamaño finito de la fuente.

Como se expresó en el capítulo 1, las hipótesis en que está basado el método MT son:

a) Fuente externa uniforme

b) Tierra estratificada horizontalmente.

En realidad la hipótesis a) no se cumple puesto que las fuentes pueden ser ionosféricas, magnetosféricas o atmosféricas, las longitudes características de estos fenómenos son de 200km a 2000km en el electrochorro auroral, 700 km para el electrochorro ecuatorial y aproximadamente 10.000 km para el sistema de corrientes de dimensión global.

Veremos en lo que sigue el cálculo de la respuesta de una tierra estratificada horizontalmente de varias capas.

2.2.1. El modelo teórico.

Consideramos un conductor que ocupe un semiespacio $Z>0$, de tal manera que su contorno es el plano $Z=0$ y un sistema de corrientes que circule en la región $Z<h<0$, mientras la región intermedia $0>Z>h$ es un dieléctrico perfecto. Este problema fué resuelto por Price, 1962,; nosotros vamos a tomar la formulación dada por Srivastava, 1965, considerando las corrientes de desplazamiento nulas.

La ecuación vectorial de Helmholtz, en este caso, la derivamos de la (1.4.) y es

$$[\nabla^2 - i w \mu_0 \sigma] \begin{vmatrix} E \\ H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad 2.1$$

En el caso de una tierra estratificada horizontalmente, la conductividad solo es función de la profundidad Z, obtenemos de la (1.1) que $\mathbf{V} \cdot j = 0$, por lo tanto

$$\sigma(z) \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + E_z \frac{\sigma(z)}{z} = 0 \qquad 2.2$$

pero las corrientes verticales son nulas, porque las capas de igual conductividad son paralelas a la superficie, luego $E_z=0$ y entonces

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \qquad 2.3$$

Además consideremos la parte de campo eléctrico de la (2.1)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = i w \sigma \mu_0 \mathbf{E} \qquad 2.4$$

proponemos para **E** una solución del tipo

$$\mathbf{E} = e^{iwt} Z(z) \mathbf{F}(x,y), \qquad 2.5$$

donde

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right). \qquad 2.6$$

Obtenemos, si consideramos que $j_z=0$ las siguientes ecuaciones para P y para Z(z):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \nu^2 P = 0 \qquad 2.7$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} = \{\nu^2 + \mu_0 i w \sigma(z)\}\ Z \qquad 2.8$$

cuya solución es, considerando que $\sigma(z)$ es constante

$$Z(z) = Ae^{\theta z} + Be^{-\theta z} \qquad 2.9$$

con

$$\theta^2 = \nu^2 + \mu_0 i w \sigma \qquad 2.10$$

Al campo eléctrico, de acuerdo a la (2.5) lo escribimos

$$E = e^{iwt}\ Z(z)\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right) \qquad 2.11$$

y el campo magnético correspondiente se encuentra a partir de la (1.1),

$$iwH = -e^{iwt}\ \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial y}, \nu^2 Zp\right) \qquad 2.12$$

Sustituyendo (2.9) en (2.11) y (2.12) y tomando el cociente entre las componentes E_x y H_y se obtiene:

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{iw\mu_0}{\theta}\ \frac{Ae^{\theta z} + Be^{-\theta z}}{Ae^{\theta z} - Be^{-\theta z}} \qquad 2.13$$

Esta ecuación da la relación de impedancias a cualquier profundidad dentro del conductor. Nótese que la dependencia de la morfología de la fuente está parametrizada en $\theta(\nu)$. La

relación entre las componentes de campo em está dada por

$$\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} = - \frac{i w \mu_0}{\theta} \frac{(Ae^{\theta z} + Be^{-\theta z})}{(Ae^{\theta z} - Be^{-\theta z})} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \end{vmatrix} \qquad 2.14$$

De la cual se deduce la resistividad aparente y la fase.

A la ecuación 2.13 la podemos expresar como

$$\frac{E_x}{H_y} = - \frac{i w \mu_0}{\theta_1} \coth \left[\theta_1 z_1 - \ln(A/B)^{1/2}\right] \qquad 2.15$$

si evaluamos la (2.15) para dos profundidades distintas podemos simplificar las constantes A y B, resultando una ecuación que vincula la impedancia al borde de una capa con la de la siguiente.

2.2.2 Extensión a varias capas

En el caso de una tierra en capas con interfaces planas se aplican las condiciones de contorno usuales que son:

i) la componente tangencial de **E** es continua en la interface,

ii) la componente tangencial de **H** es continua en la interface, y

iii) la componente normal de **H** es continua en la interface.

Con estas condiciones de contorno, y el hecho de que se considera la conductividad constante en cada capa se pueden eliminar las constantes A y B como se dijo en el parágrafo

anterior en la (2.15) y se llega a la fórmula recursiva (Srivastava 1965),

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{iw\mu_0}{\theta_1} \coth \{\theta_1 h_1 + \coth^{-1} [\frac{\theta_1}{\theta_2} \coth \{\theta_2 h_2 + \coth^{-1} (\frac{\theta_2}{\theta_3} \ldots$$

$$\ldots \coth \{\frac{\theta_{n-2}}{\theta_{n-1}} \coth (\theta_{n-1} h_{n-1} + \coth^{-1} \theta_{n-1}/\theta_n)] \qquad 2.16$$

finalmente, se calcula la resistividad aparente

$$\rho_a = \frac{1}{(w\mu_0)} \frac{|E_x|^2}{|E_y|^2} = \frac{1}{(w\mu_0)^{-1}} |Z|^2 \qquad 2.17$$

y la fase como

$$\Phi = \mathrm{artan}(\mathrm{Im}(Z)/\mathrm{Re}(Z)) \qquad 2.18$$

donde Z esta vez indica la impedancia.

2.2.3 Aplicación y resultados

Una vez implementado en computadora el algoritmo de cálculo de la resistividad aparente y de la fase, se consideraron los siguientes modelos, que se presentan en la figura 2.1 y que son:

- una tierra de cinco capas, y
- un semiespacio infinito de resistividad constante.

Para cada uno de los modelos se calculó la influencia del tamaño de la fuente en las curvas de resistividad aparente y de fase.

Ya que las fuentes pueden ser ionosféricas o magnetosféricas, la longitud característica que indica el tamaño de la fuente ha sido variada entre los siguientes valores, dentro del rango esperado por los campos naturales.

$\lambda_0=0$ $\lambda_1=10^{-8}\ m^{-1}$ $\lambda_2= 10^{-7}\ m^{-1}$

$\lambda_3=7,6.10^{-7}\ m^{-1}$ $\lambda_4=7,6.10^{-6}\ m^{-1}$ $\lambda_5=7,6.10^{-5}\ m^{-1}$

El valor λ_0 corresponde a un campo externo uniforme, λ_3 corresponde a un sistema de corrientes de dimensión global como en el caso de las variaciones geomagnéticas diarias (Osella y Duhau, 1983) y λ_5 representa al valor mas grande de λ que contribuye apreciablemente en la descripción de un sistema localizado de corrientes tal como el electrochorro (Price, 1962).

En todos los casos supondremos la no existencia de una capa conductora última o conductosfera, esto será tratado con más detalle en el parágrafo siguiente.

En la figura 2.2 se observan los gráficos de resistividad aparente en función del período para ν_j, $j=1,...,5$. En este diagrama la presencia de capas conductoras se manifiesta a través de una disminución de la curva, por el contrario las capas resistivas están presentes en un aumento de la resistividad aparente a medida que se crece en período. En las curvas en fase las capas resistivas por abajo de capas conductoras se presentan como una amplia excursión a fases menores que 45°, y las capas conductoras a la inversa, en el caso de la figura 2.4, la segunda capa conductora (40 Ω m) no era de espesor suficiente como para hacer subir la fase a valores mayores que 45°; este cambio en fase es mas sensible, es decir que se detecta a menores periodos para la fase que para la resistividad aparente tal cual hemos visto en el parágrafo 1.6.

La figura 2.3 muestra también la variación de la resistividad aparente, esta vez en un gráfico en perspectiva, donde el eje x es el parámetro ν, el eje y el tiempo y el eje z la resistividad aparente, todas las escalas son logarítmicas.

Este diagrama en realidad es equivalente al diagrama anterior con las siguientes diferencias, en principio se trata de un estereograma (Bertin, 1970), donde se observan las curvas de resistividad aparente en función del período para una variación más fina del parámetro ν, en la figura anterior la representábamos como diferentes curvas. El hecho de representar a cada curva un poco corrida respecto de la anterior, hace aparecer como un dibujo en tres dimensiones.

Los valores mas cercanos al lector (en la perspectiva) corresponden a tamaño de la fuente pequeña como podría ser el electrochorro ecuatorial y los mas alejados corresponden a fuente uniforme, o sea la aproximación de Cagniard; como se puede apreciar con los anteriores criterios, el efecto del tamaño de la fuente es el de modificar la parte de mas bajas frecuencias, haciendo aparecer una capa conductora inexistente, recordemos que en los sondeos MT, se adquieren datos hasta un determinado período, de tal manera que una disminución de resistividad (o aumento de fase) se interpreta como capa conductora; a medida que la fuente es mas pequeña, ν_3, ν_4, la última capa resistiva se ve desdibujada y llegando al valor extremo de ν_5, esta última capa ya no existe. Sucede en este caso como si se apantallara la capacidad del método MT de "ver" las capas mas profundas.

En la figura 2.4 podemos observar el comportamiento de la fase con el período, notamos aquí que el efecto en fase es mucho mas marcado que en resistividades aparentes y comienza a menores períodos, tal como era de esperar por la (1.12a,b) y la figura 2.5 es un estereograma donde se aprecia el mismo efecto para una variación gradual del tamaño de la fuente. Hemos invertido en este caso el eje para tener mayor claridad en la presentación.

Vamos a considerar ahora un semiespacio infinito de resistividad constante, en ese caso la (2.16) se reduce a (cuando $h_1 \to \infty$):

$$Z=\frac{E_x}{H_y} = \frac{i w \mu_0}{\theta_1}, \qquad 2.19$$

donde

$$\theta_1 = \sqrt{(\nu^2 + \mu_0 i w \sigma_1)}. \qquad 2.20$$

Si $\nu = 0$, o sea cuando se cumple la hipótesis de fuente uniforme, la impedancia es

$$Z = \sqrt{i}\ \sqrt{(w\mu_0 \rho_1)} \qquad 2.21$$

y la resistividad aparente es

$$\rho_a = \frac{1}{w\mu_0} |Z|^2 \qquad 2.22$$

y la fase es $\pi/4$ ($\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$).

Si $\nu \neq 0$, el comportamiento asintótico para períodos largos ($w \to 0$) de la (2.19), es

$$Z \ \alpha\ \frac{iw\mu_0}{} = \frac{i2\pi\mu_0}{T} \qquad 2.23$$

y la fase es $\pi/2$ (i).

En escala logarítmica, la resistividad aparente en función del periodo aparece como una recta de pendiente negativa, mientras que la fase pasa de 45° a 90°.

La zona de cambio entre resistividad aparente constante y pendiente lineal, está dada por la relación entre los dos términos

$$\frac{\nu^2 \rho_1}{\mu_0 i w} = \frac{\nu^2 \rho_1 T}{\mu_0 i 2\pi} = \text{cte.} \qquad 2.24$$

O sea que para un mismo tamaño de la fuente es diferente el período en que esta comienza a tener influencia, según como sea la resistividad del medio, en las figuras 2.6a,b,c,d se pone de manifiesto la influencia del tamaño de la fuente en la resistividad aparente y en la fase de un semiespacio infinito de resistividad constante para dos valores de esta última es decir ρ_s = 100 Ω m (Fig. 2.6a,b) y de ρ_s = 1000Ωm (figuras 2.6c,d); así, comparando la figura 2.6a (ρ_s = 100 Ωm) con la figura 2.6c (ρ_s = 1000 Ωm) observamos que la primera es menos afectada por el tamaño de la fuente que la segunda curva; es decir que la influencia del tamaño de la fuente es mas marcada para resistividades mayores, lo cual es de esperar, porque las ondas penetran mas en medios mas resistivos. Nuevamente en estos diagramas se pone de manifiesto que la fase es mas sensible que la resistividad aparente.

Observando estos resultados se llega a la conclusión, ya obtenidas por Srivastava,1965, de que el efecto de la longitud de onda se lo puede suponer como despreciable cuando se hacen determinaciones de distribución de densidad moderadas en regiones someras (10 a 20 km) de profundidad.

Se ve también que el efecto es mas notorio en fase que en resistividad aparente y que además se observa a frecuencias mayores.

Hemos contribuído con los estereogramas (Bertin, 1970) o sea los diagramas en perspectiva, que dan una visualización mejor del efecto.

Además al considerar los casos de un semiespacio infinito de resistividad constante, hemos encontrado que el comportamiento de la resistividad aparente y de la fase es similar al analizar con fuente infinita una estructura tabular de dos capas, como veremos en el subparágrafo 2.3.3a.

En el parágrafo que sigue, aplicaremos la misma metodología para considerar el efecto de la conductosfera o capa conductora última en las sondeos MT.

Figura 2.1: Modelo de cinco capas utilizado y modelo de semiespacio para dos resistividades.

Figura 2.2: Resistividad aparente, $_a$, como función del período, T, mostrando el efecto de tamaño de la fuente, , para los valores mencionados en el texto (ver pag 31). La curva sólida corresponde a fuente uniforme (=0).

Figura 2.3: Diagrama en perspectiva de la resistividad aparente para diferentes tamaños de la fuente.

Figura 2.4: Fase en grados en función del período, mostrando el efecto del tamaño de la fuente , para los mismos valores que en la figura 2.2

Figura 2.5: Diagrama en perspectiva de la fase para distintos tamaños de la fuente.
El eje ha sido cambiado de signo a fin de mostrar con mayor claridad el efecto.

Figura 2.6a,b,c,d Diagramas en perspectiva de la resistividad aparente y de la fase para un semiespacio infinito de resisitividades aparentes $_a$ =100 Ω m, y $_a$ = 1000 Ω m.

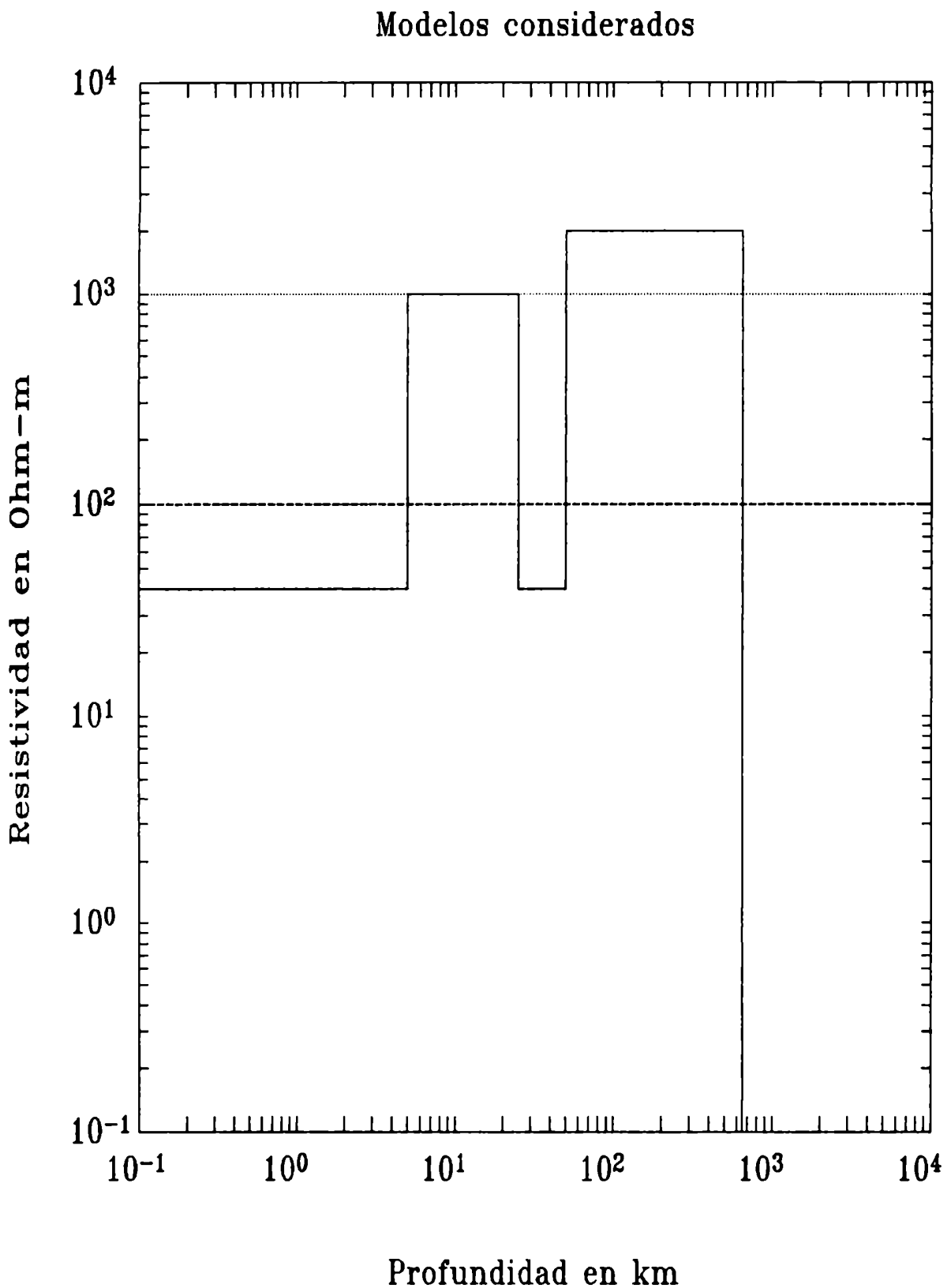

Modelos considerados
Resistividad en Ohm-m
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Profundidad en km

Figura 2.1

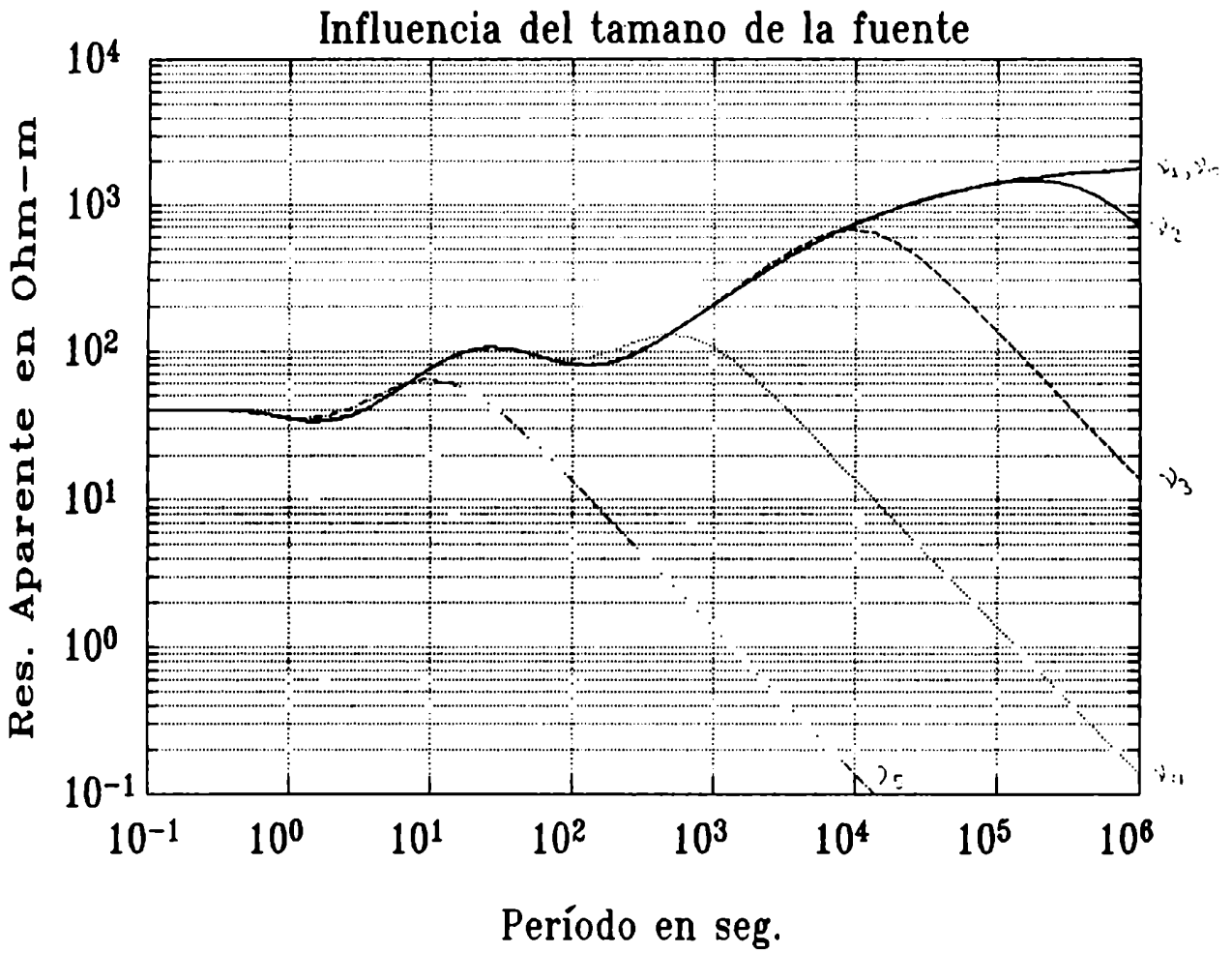

Influencia del tamano de la fuente
Res. Aparente en Ohm-m
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
Período en seg.

Figura 2.2

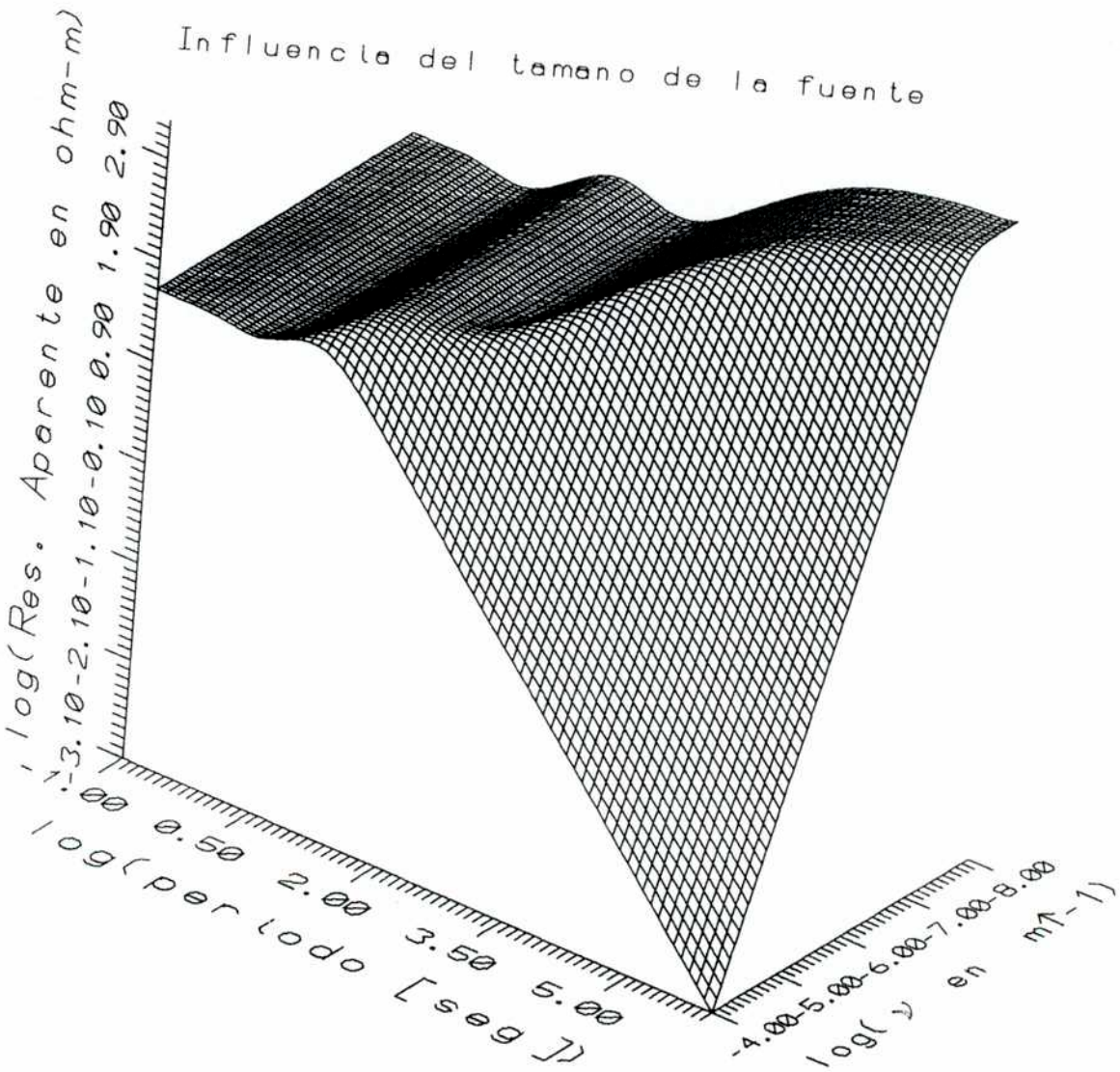

Influencia del tamano de la fuente
log(Res. Aparente en ohm-m)
-3.10 -2.10 -1.10 -0.10 0.90 1.90 2.90
-1.00 0.50 2.00 3.50 5.00
log(periodo [seg])
-4.00 -5.00 -6.00 -7.00 -8.00
log(ν en m^-1)

Figura 2.3

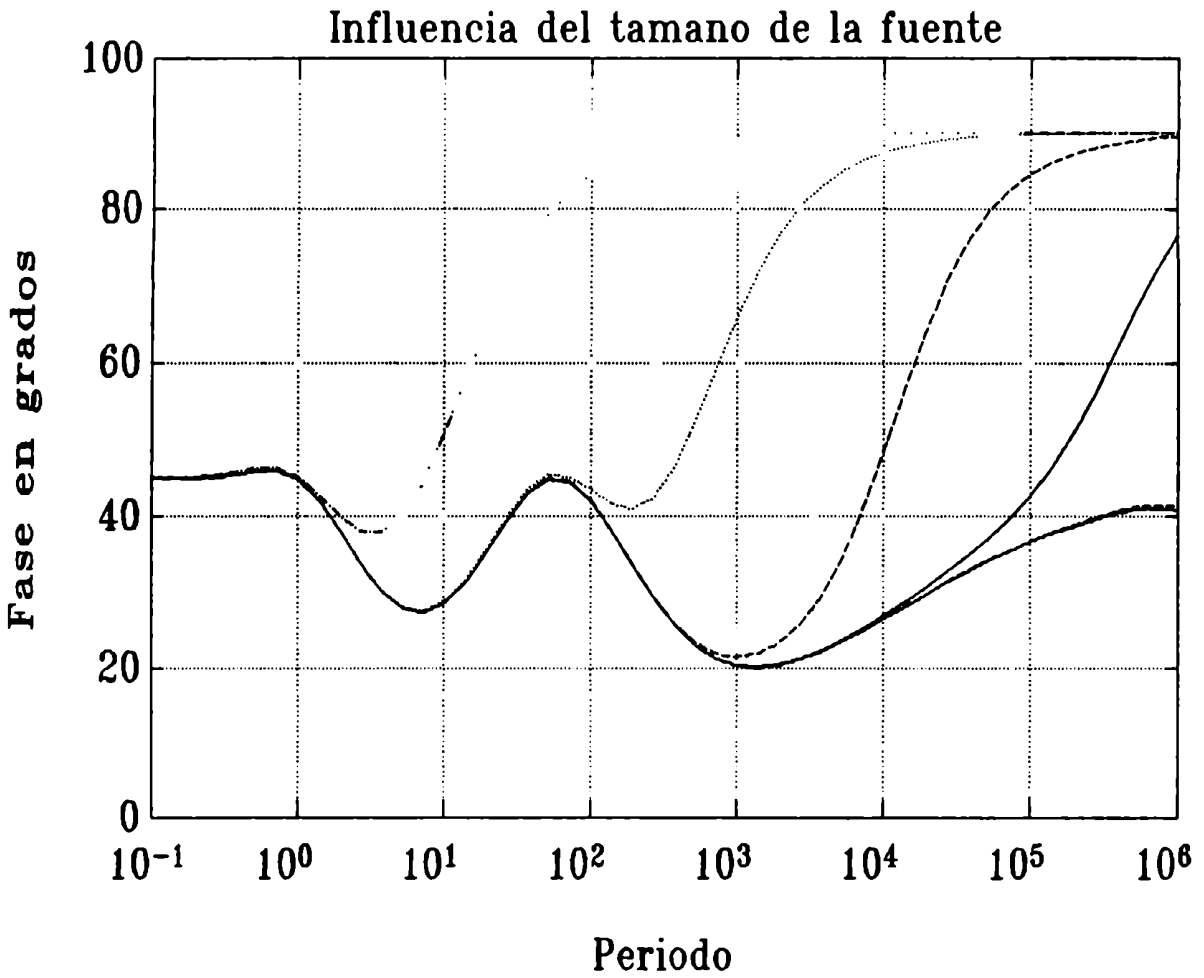

Influencia del tamano de la fuente
100
80
60
40
20
0
Fase en grados
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
Periodo

Figura 2.4

Influencia del tamano de la fuente en la fase

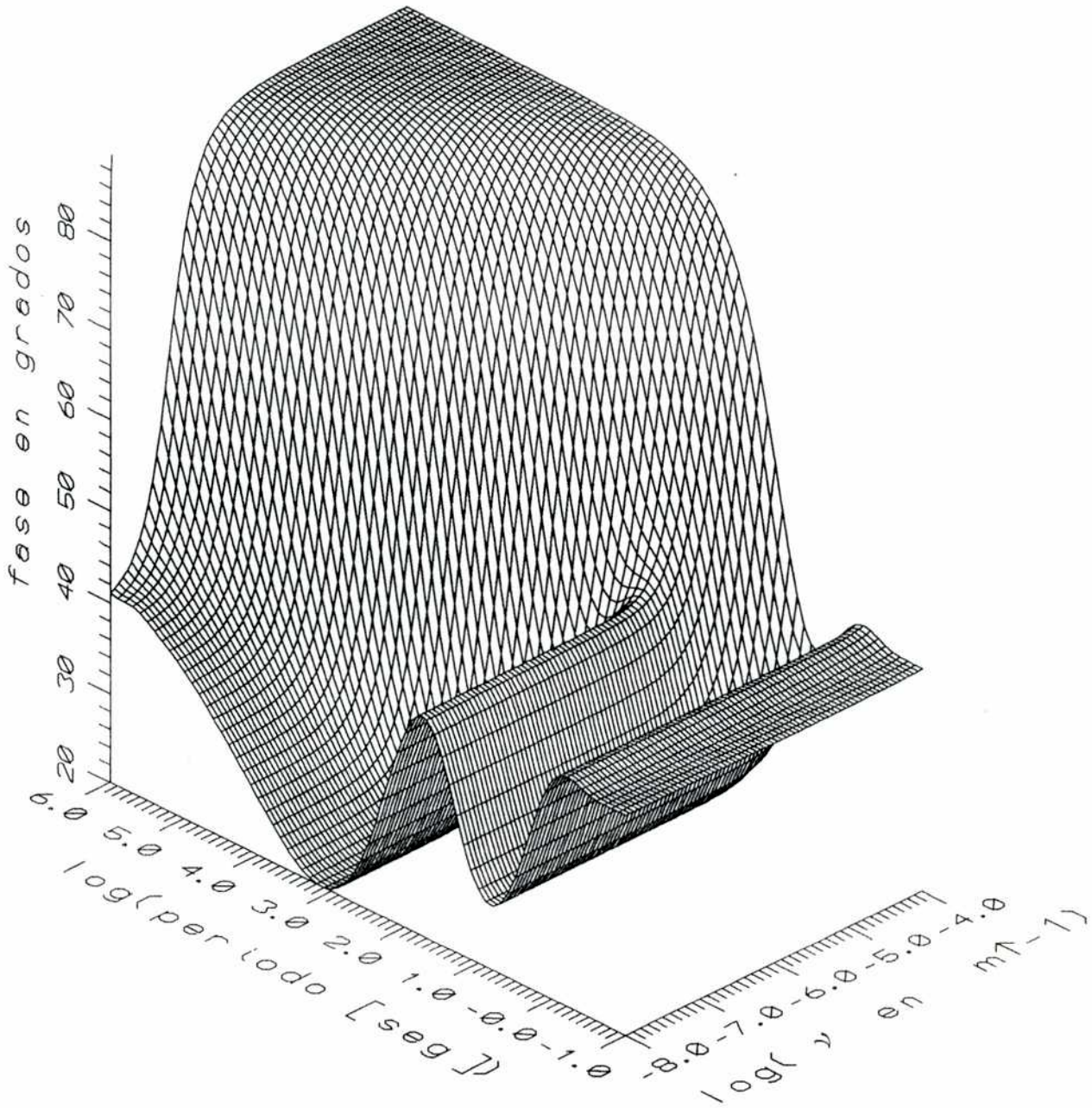


Figura 2.5

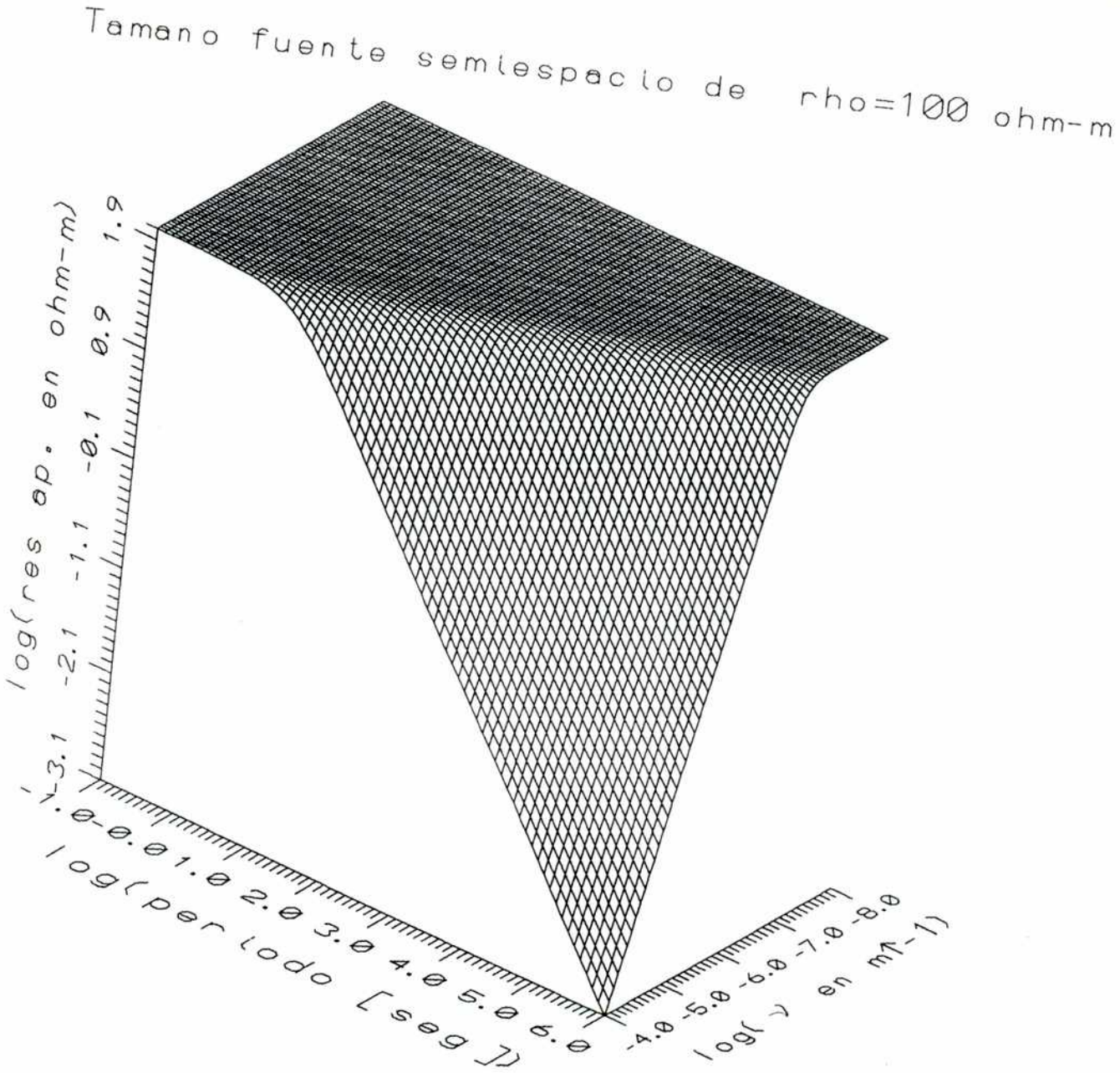

Tamano fuente semiespacio de rho=100 ohm-m
log(res ap. en ohm-m)
-3.1 -2.1 -1.1 -0.1 0.9 1.9
log(periodo [seg])
-1.0 -0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0
log(γ en m^-1)
-4.0 -5.0 -6.0 -7.0 -8.0

Figura 2.6a

Tamano fuente semiespacio de rho=100 ohm-m

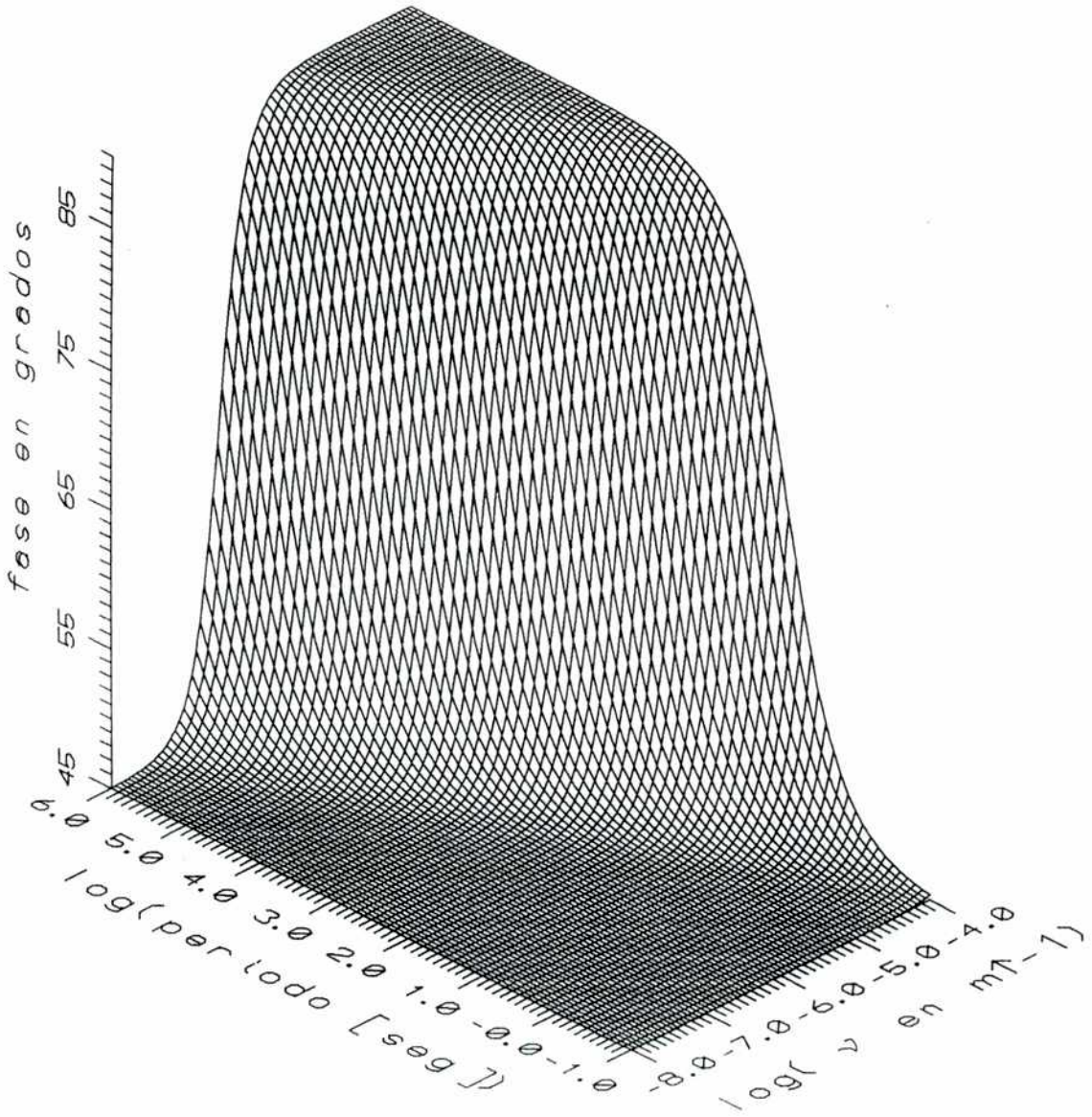


Figura 2.6b

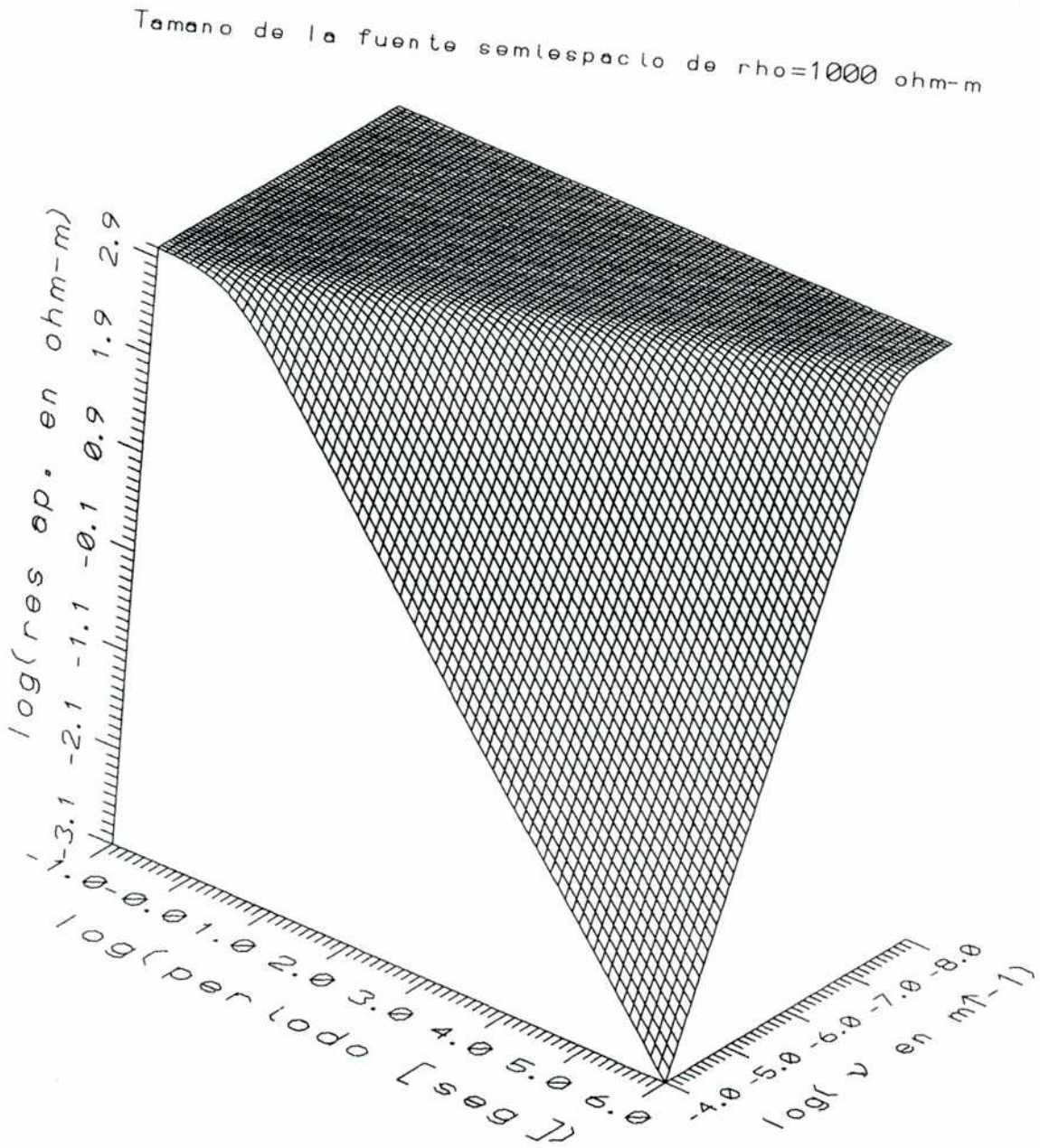

Tamano de la fuente semiespacio de rho=1000 ohm-m
log(res ap. en ohm-m)
-3.1 -2.1 -1.1 -0.1 0.9 1.9 2.9
0.0 0.0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0
log(periodo [seg])
-4.0 -5.0 -6.0 -7.0 -8.0
log(ν en m^-1)

Figura 2.6c

Tamano fuente semiespacio de rho=1000 ohm-m

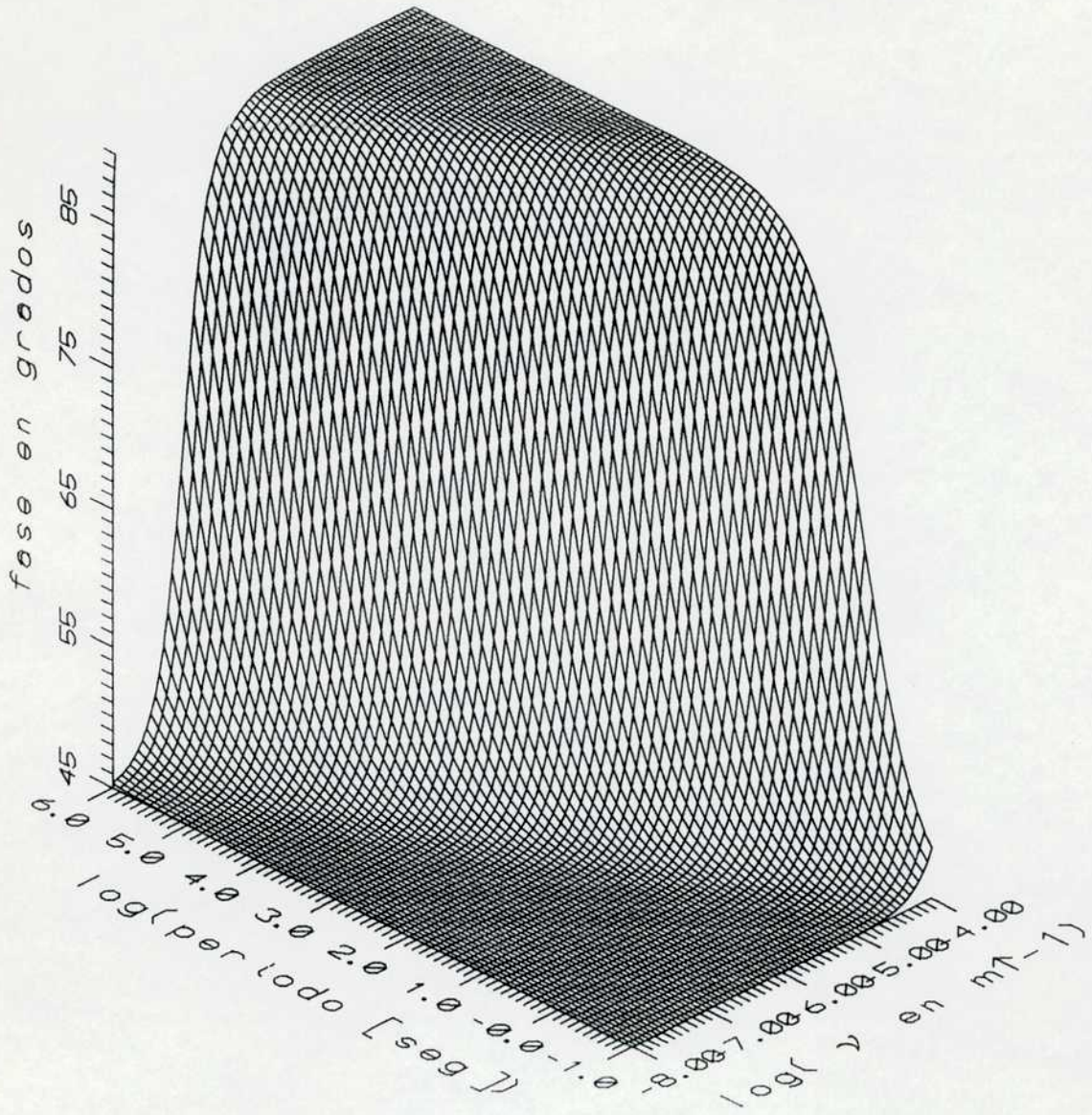


Figura 2.6d

2.3 Influencia de la conductosfera en sondeos MT

Como la mayoría de los sondeos en MT se realizan con el objetivo de obtener información ya sea de cuencas sedimentarias o información estructural de la corteza, es decir como máximo hasta 40 km de profundidad no se tiene normalmente en cuenta la presencia de una capa altamente conductora subyacente, o conductosfera, que coincidiría con el cambio de fase entre manto superior y manto inferior y que se puede encontrar entre 200 y 900 km de profundidad en distintas partes de la tierra, por ejemplo, al norte del ecuador de dip en Perú la conductosfera se encuentra a 450 km de profundidad mientras que al sur está a 200 km, presentando una discontinuidad lateral muy grande (Osella y Duhau,1985), y al sur del ecuador geomagnético en Africa entre 800 y 900 km (Duhau y Osella, 1984) (Osella, Duhau y Moyano, 1986a).

Sin embargo son diferentes los resultados que se obtienen al considerar o no la existencia de esta capa muy conductora de resistividad menor que 1 Ω m y que la podemos considerar como nula o muy pequeña frente a las resistividades que se encuentran usualmente a pequeñas profundidades, (Schmucker, 1985).

En este parágrafo consideraremos el mismo modelo de cinco resistividades del parágrafo anterior y evaluaremos también este efecto para dos resistividades distintas de una estructura tabular de dos capas. Finalmente realizaremos un modelado inverso, es decir, trataremos de ajustar en el sentido de cuadrados mínimos los resultados del modelo directo, o sea la

resistividad aparente y la fase en función del período del modelo original, por distintos modelos de una capa menos, en los cuales se considera o no la presencia de la conductosfera.

2.3.1 Modelo directo: Tierra de cinco capas.

Hemos utilizado los modelos de la figura 2.1, o sea el modelo de cinco capas y dos modelos de una estructura tabular de dos capas donde la capa subyacente es la conductosfera (ρ_c=0.1Ωm), cuya profundidad hemos variado entre los valores p_c=200 km y p_c=40.000 km, a este último número, equivalente a no presencia de la conductosfera lo hemos tomado por razones puramente numéricas, para asegurar que la conductosfera no influyera en los cáculos; a diferencia con la sección anterior vamos a considerar aquí fuente uniforme, es decir ν= 0 en la (2.15).

En la figura 2.7a hemos graficado la resistividad aparente en función del período para los siguientes valores de profundidad de la conductosfera; p_c=200,300,650,900 km e infinito. En curva llena se observa el correspondiente a este último valor, que es coincidente con la curva de trazo lleno de la figura 2.2 (ν= 0).

Vamos ahora a considerar la zona del espectro (en períodos), que se utiliza normalmente en los sondeos MT, esta es, desde subaudio, 10^{-1} seg (10 hz), hasta 10^{4} seg, observamos que no hay variación apreciable dentro de las primeras dos décadas, es decir hasta 10 segundos y recién hacia el final de

la tercera década, un poco menos que 100 segundos, la variación es apreciable en la escala que hemos hecho el gráfico.

Por lo tanto hemos ampliado en la figura 2.7b la banda de períodos entre 10^2 y 10^4 segundos. Además, en muchos casos de exploración superficial, el mayor período que se mide es de 10^3 segundos. En esos casos, la curva llena, que no considera la conductosfera, está sistemáticamente por abajo de las curvas que sí la incluyen. Si medimos hasta 10^4 segundos se compensan los errores, pero la diferencia es muy grande.

De manera análoga al parágrafo anterior, presentamos las curvas de resistividad aparente en función del período, en la figura 2.7c, para una variación más fina del parámetro p, todas las escalas son logarítmicas; en la perspectiva, el valor más cercano representa la conductosfera a muy baja profundidad (100km), y el valor más lejano, 50.000 km de profundidad. El rango de períodos es entre 10^{-1} seg y 10^6 seg. Las dos escalas que forman la red son de setenta y un puntos equiespaciados en el logaritmo en base diez de cada variable (profundidad,tiempo), el eje z es el logaritmo en base diez de la resistividad aparente.

En las curvas de la figura 2.8a se representa la fase en función del período para distintas profundidades de la conductosfera. Nuevamente vemos que la separación entre las curvas comienza a notarse para períodos menores que para la resistividad aparente, siendo evidente esta separación ya para digamos cincuenta segundos.

En la figura 2.8b, se aprecia una ampliación de la figura 2.8a, en la banda espectral de interés en MT. Obsérvese que en todo el rango (10^2 - 10^4 seg) las variaciones de fase son apreciables.

En la figura 2.8c, mostramos el comportamiento de la fase en función del período, donde la escala del eje z es lineal y hemos rotado la figura de manera de apreciar mejor el efecto de tercera dimensión. El eje de profundidad en la perspectiva corresponde al logaritmo decimal de la profundidad, siendo el más cercano al lector el valor de 50000 km y el más lejano corresponde a p_c=100km. El eje del tiempo, también logarítmico, corre de derecha a izquierda y va desde 10^{-1} seg hasta 10^6 formando una red de 71 puntos equi-espaciados logarítmicamente.

Resumiendo entonces, hemos visto mediante un ejemplo que en una situación que podríamos considerar como común (la distribución de resistividad en función de la profundidad), la influencia de la profundidad a que se encuentra la conductosfera no es despreciable ni en resistividad aparente ni en fase en el rango de frecuencias MT.

Tabla 2.1 Modelo Sintético

Resistividad Ωm	Profundidad en km
450	0.1
50	0.5
28	3.5
45	10.5
10000	∞

Este efecto no es normalmente tenido en cuenta en la literatura p.ej., en la tabla 2.1, se muestra un modelo usado por

Fischer y otros, 1981; o un ejemplo mas reciente, un modelo unidimensional, utilizado por Jones y otros , 1988, donde tampoco se tiene en cuenta esta influencia. Tampoco es de nuestro conocimiento , que al hacer modelado bidimensional directo (Kaikkonen, 1986), se tenga en cuenta este efecto.

Sin embargo, los equipos comerciales modernos de MT, dan como resultados varianzas para las determinaciones de la resistividad aparente y de la fase que oscilan entre un 1% y un 20%, como se muestra en la figura 2.9, que es el resultado de una medición real efectuada por un equipo de la firma Phoenix Geophysics Ltd .

Es entonces necesario tener en cuenta la presencia de esta capa. En lo que sigue veremos su efecto para un semiespacio de resistividad constante.

Figura 2.7a: Resisitividad aparente en función del período en escala logarítmica para distintas profundidades de la conductosfera, $p_c=\infty$, línea sólida, p_c= 900 km, línea punteada, p_c=650 km, línea de trazos, p_c=300 km, línea de puntos y trazos y p_c=200 km, de nuevo línea sólida (curva inferior).

Figura 2.7b: Detalle de la figura anterior, resaltando la diferencia para las distintas profundidades en la banda de períodos mas usual en MT.

Figura 2.7c: Diagrama en perspectiva de la resistividad aparente en función del período, para distintas profundidades. En la perspectiva, el punto más cercano al lector corresponde al origen de las coordenadas, o sea al menor valor en períodos y al menor valor en la p_c (profundidad de la conductosfera).

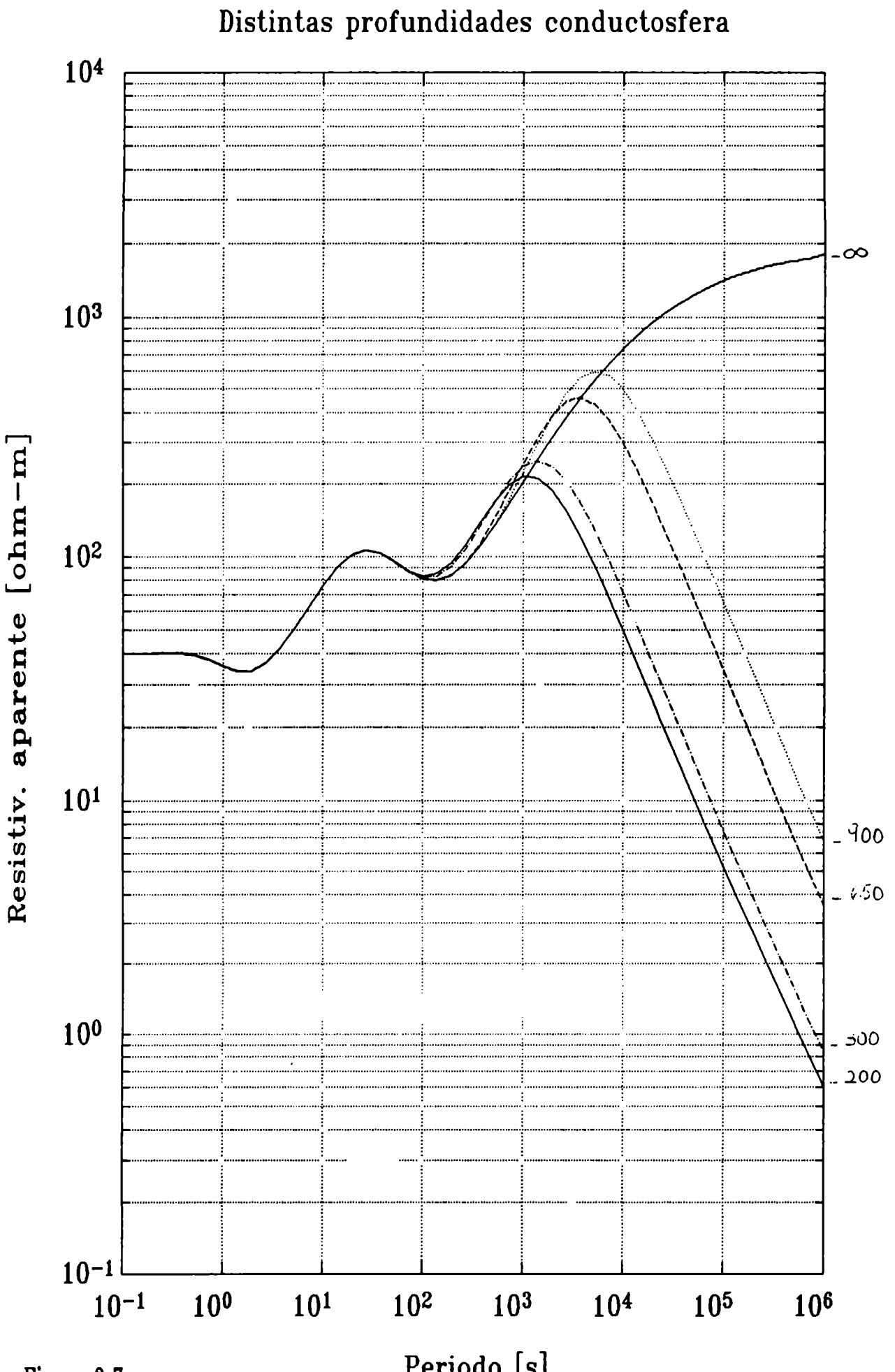

Distintas profundidades conductosfera
Resistiv. aparente [ohm-m]
Periodo [s]
10^{4}
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
-∞
-900
-650
-500
-200

Figura 2.7a

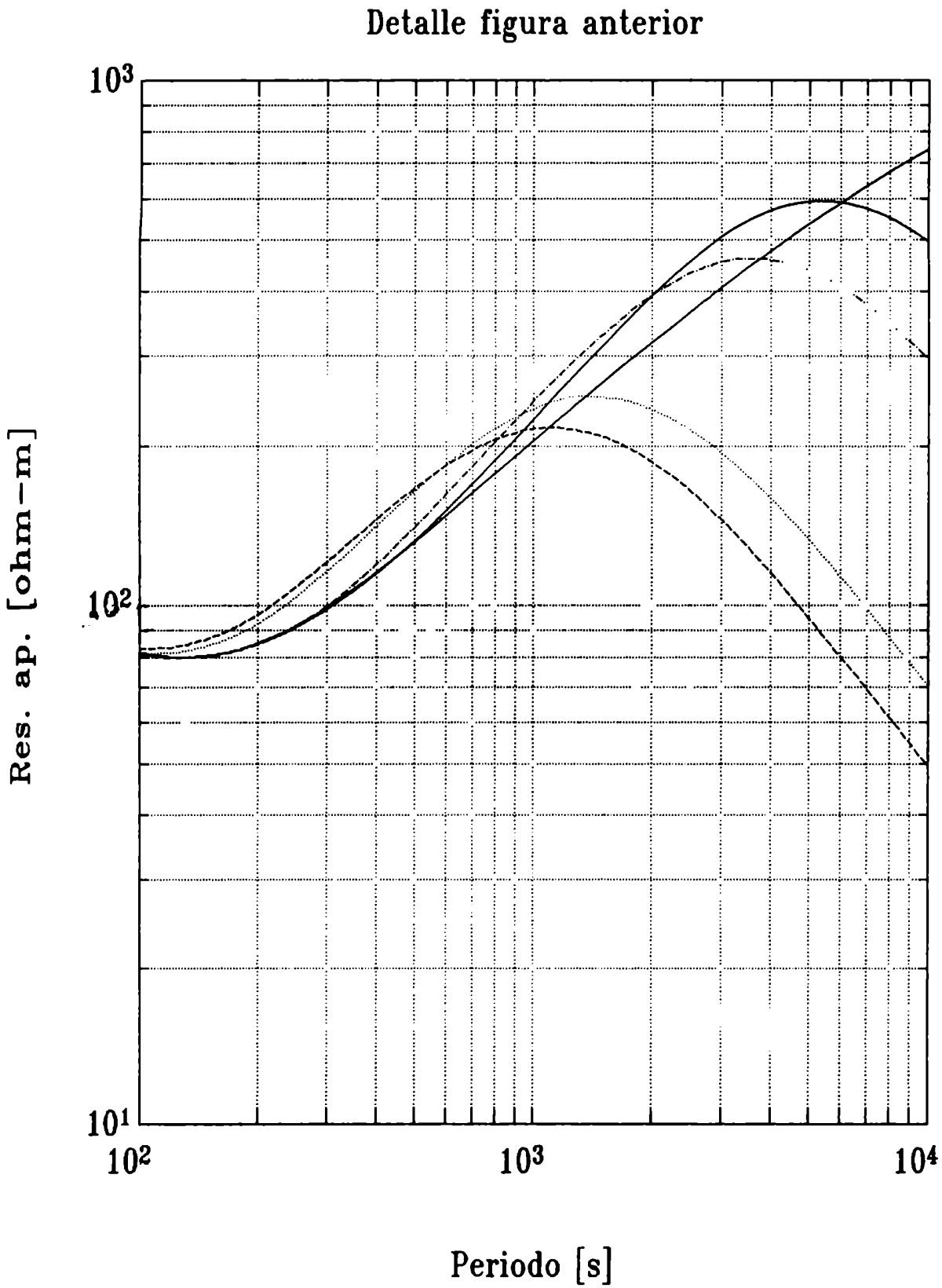

Detalle figura anterior
10^3
10^2
10^1
Res. ap. [ohm-m]
10^2
10^3
10^4
Periodo [s]

Figura 2.7b

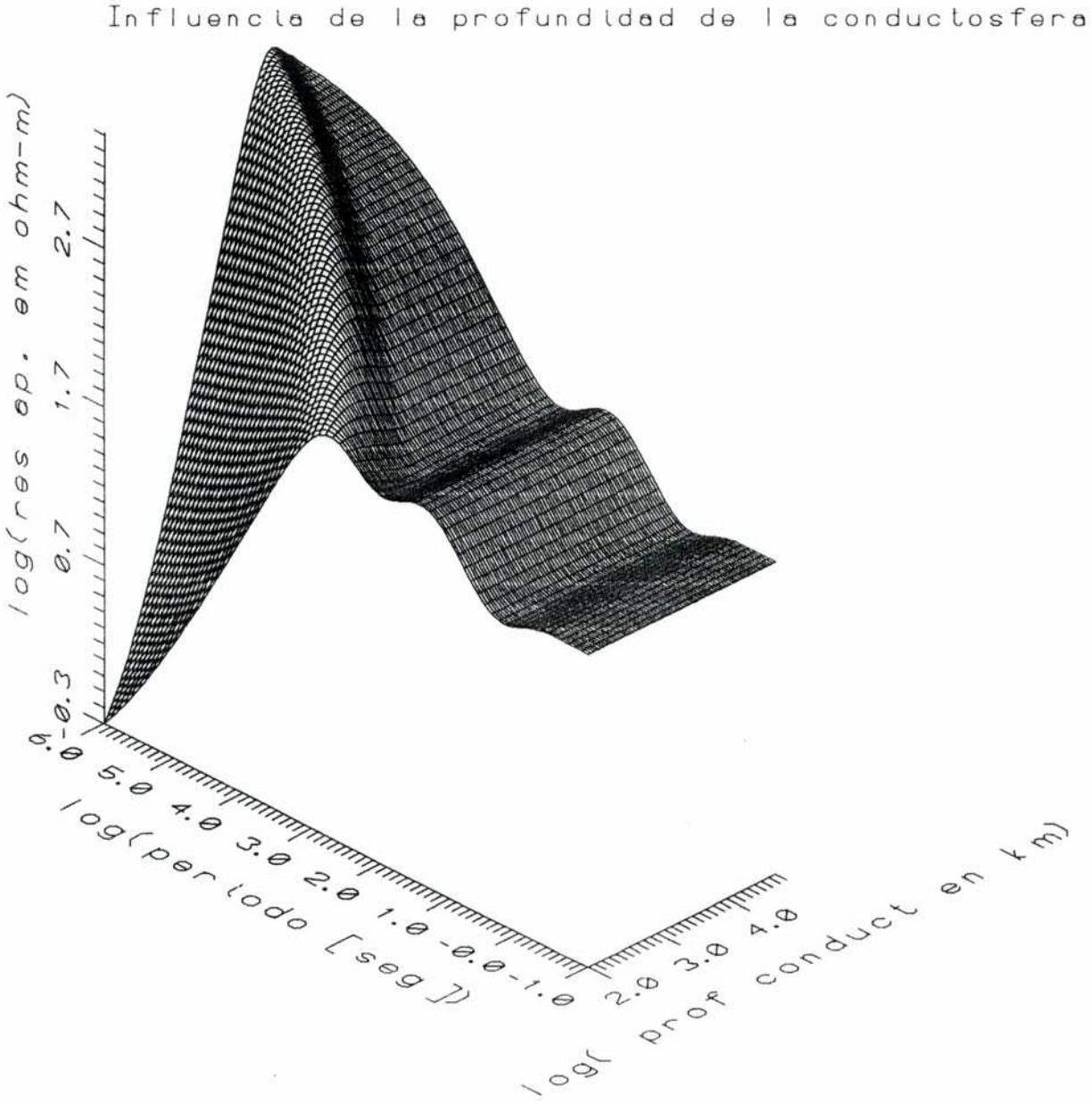

Influencia de la profundidad de la conductosfera
log(res ap. en ohm-m)
-0.3
0.7
1.7
2.7
6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0 -0.0 -1.0
log(periodo [seg])
2.0 3.0 4.0
log(prof conduct en km)

Figura 2.7c

Figura 2.8a: Fase en función del período para distintas profundidades de la conductosfera, $p_c=\infty$, línea sólida, p_c= 900 km, línea punteada, p_c=650 km, línea de trazos, p_c=300 km, línea de puntos y trazos y p_c=200 km, de nuevo línea sólida (curva superior).

Figura 2.8b: Detalle de la figura anterior en la banda espectral de mayor interés en MT.

Figura 2.8c: Diagrama en perspectiva de la fase en función del período, hemos rotado el dibujo y hemos invertido el eje de la profundidad de la conductosfera a fin de presentar una mejor perspectiva del efecto; como en el caso de la figura 2.7c, se ha dividido el plano x,y en una cuadrícula de 71 puntos por 71 puntos en escala logaritmica de la profundidad de la conductosfera y del período. Obsérvese que la fase luego de llegar a un valor máximo cercano a 90 grados tiende a disminuir para períodos grandes.

Figura 2.9: Resultados de una medición de la resistividad aparente, realizado con un sistema comercial. Se grafica el logaritmo en base diez de la resistividad aparente en función del logaritmo de la frecuencia , en la tabla de la parte inferior de la figura y bajo las columnas %SD se leen los valores de desviación estándar con que fué estimada la resistividad aparente.

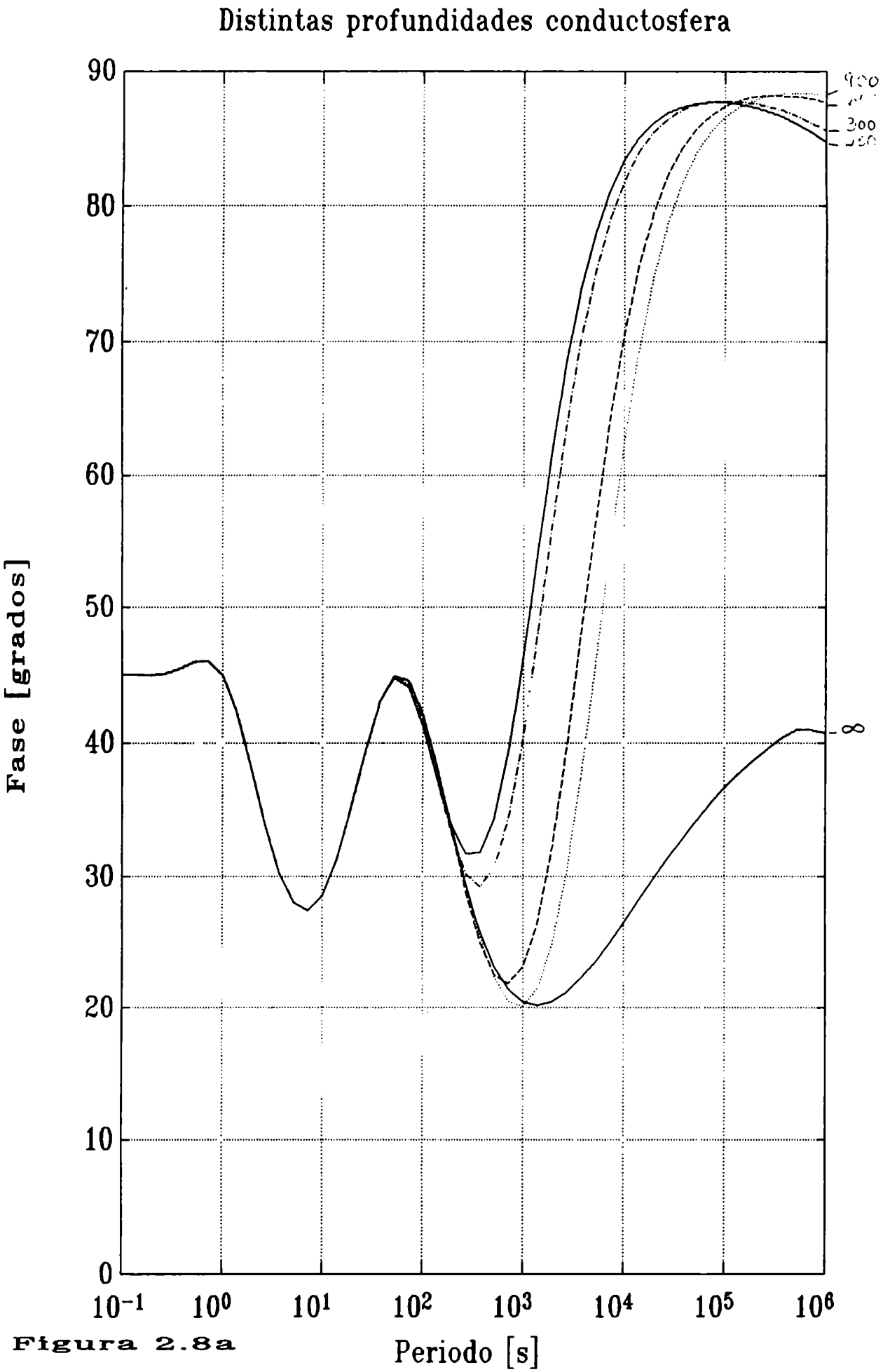

Distintas profundidades conductosfera
Fase [grados]
Periodo [s]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}
900
300
∞

Figura 2.8a

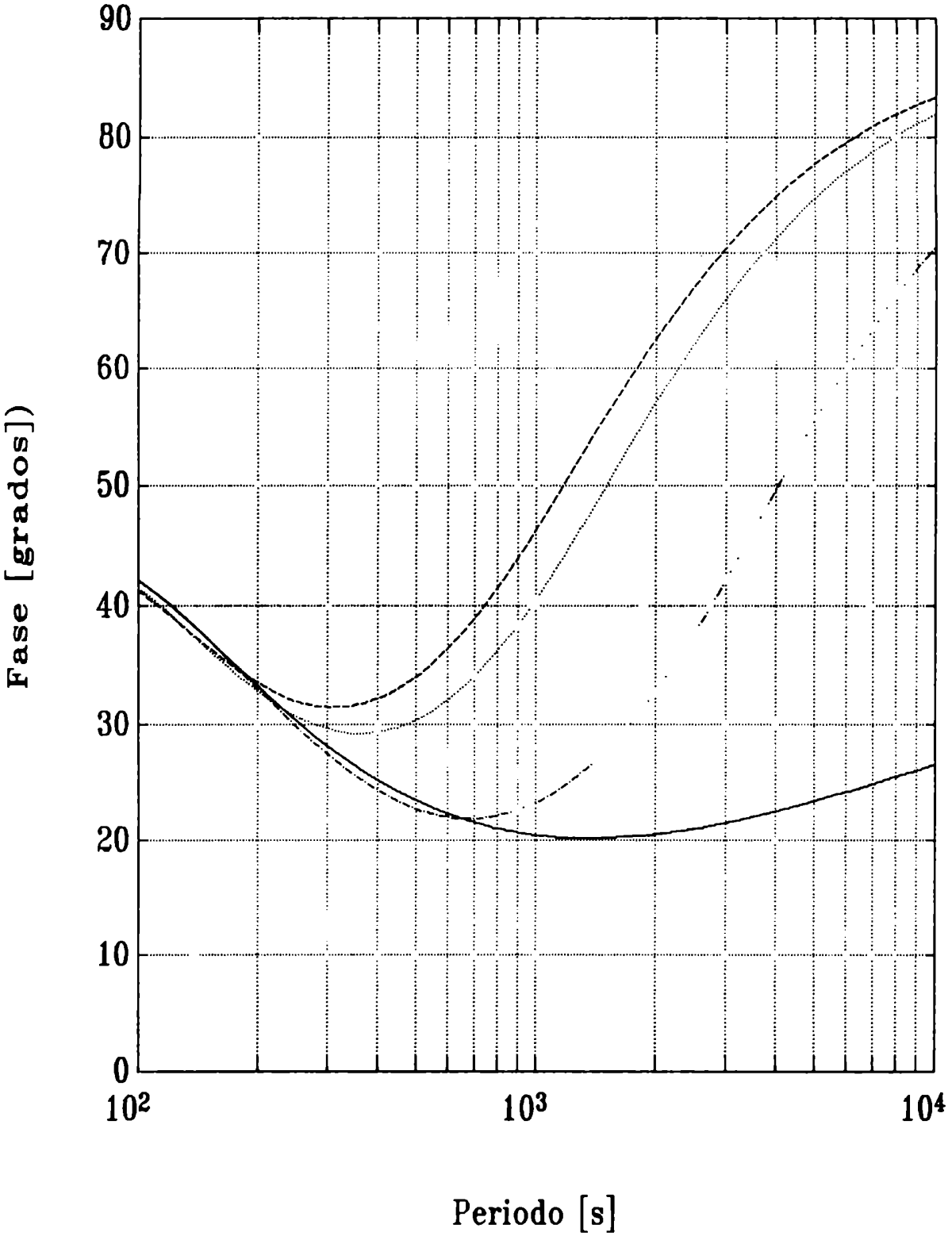


Figura 2.8b

Influencia de la prof cond en la fase

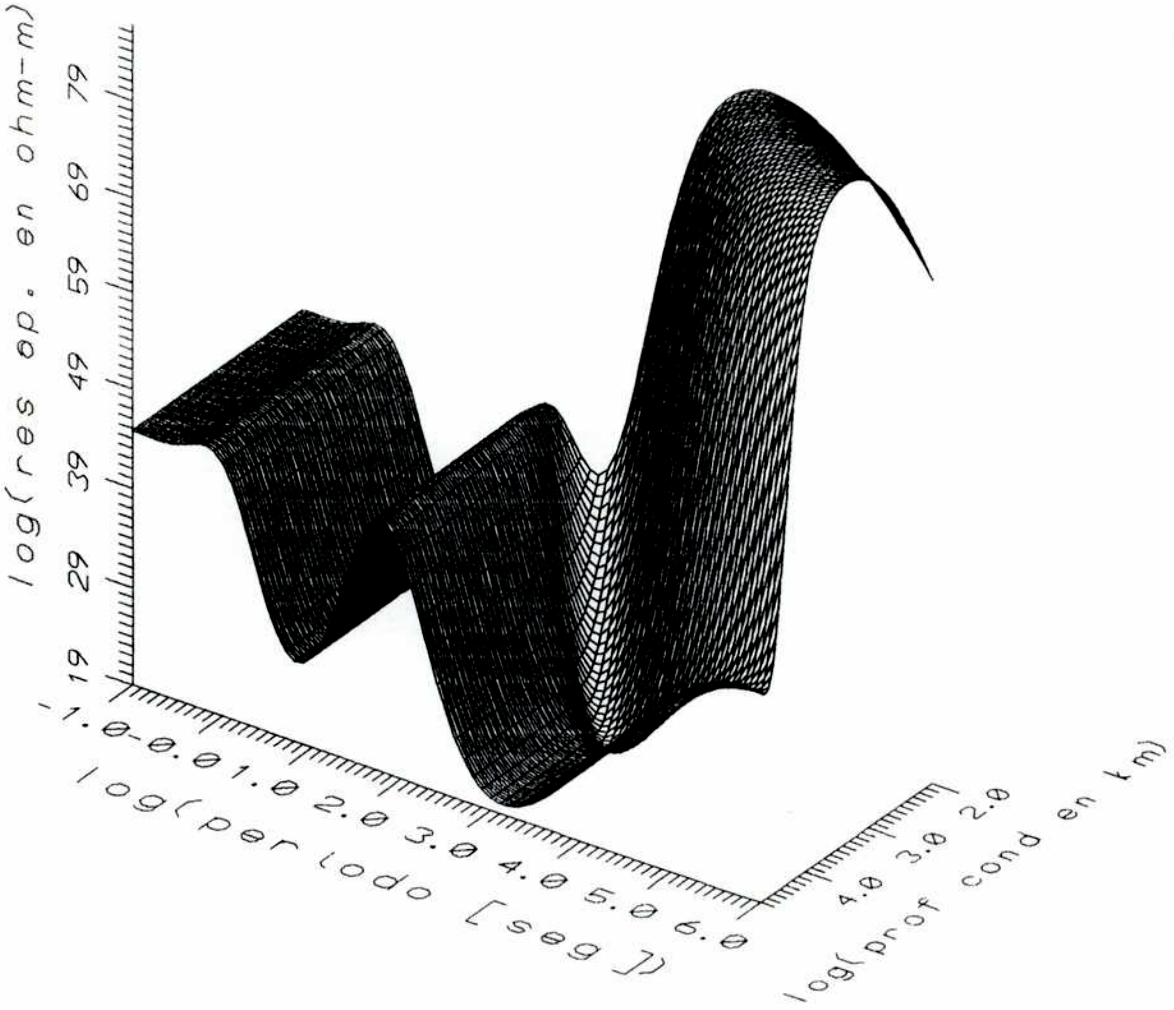
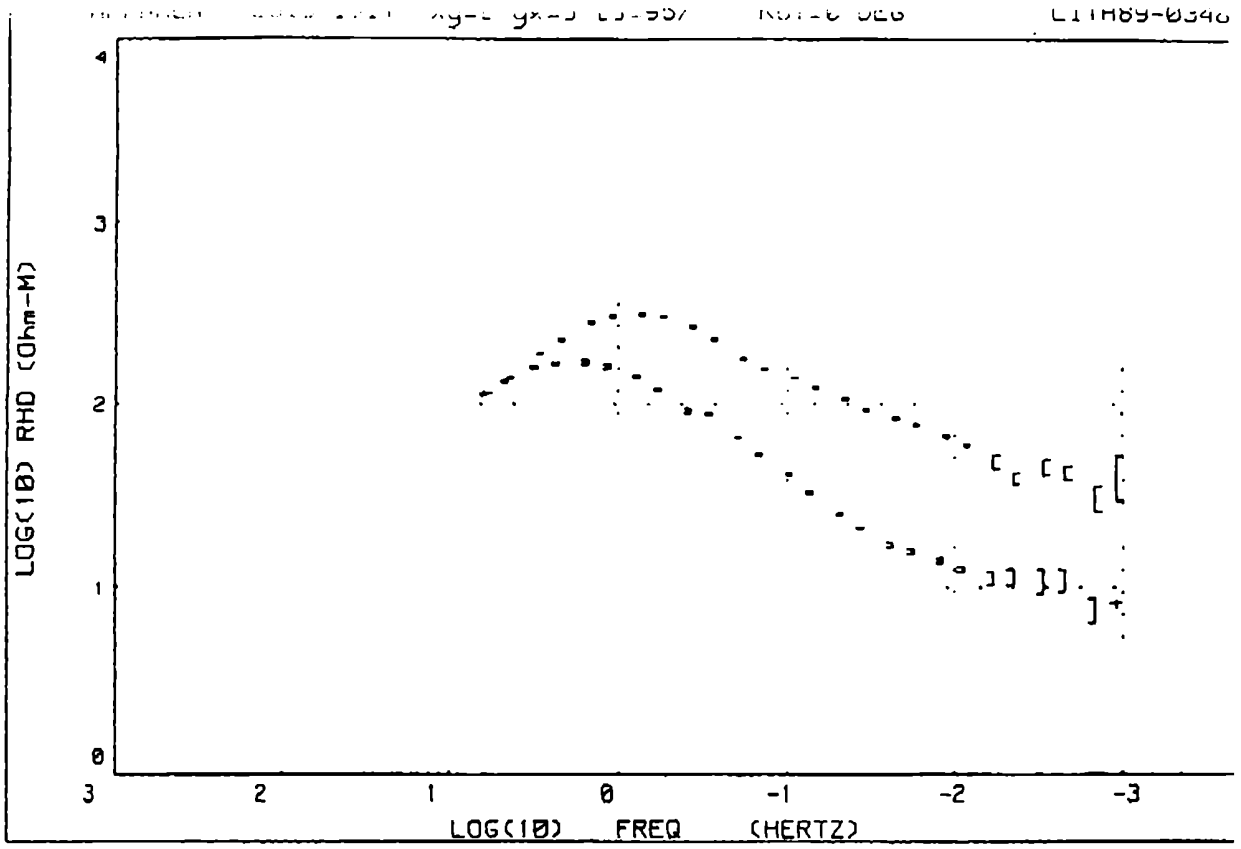


Figura 2.8c



APPARENT RESISTIVITIES AND PERCENT STANDARD DEVIATIONS

F#	STKS	RHOxy	%SD	RHOyx	%SD	F#	STKS	RHOxy	%SD	RHOyx	%SD
1	1992	60.2	1.6	76.0	3.5	21	2100	269.2	0.7	91.5	1.2
2	1992	55.7	1.4	70.4	2.1	22	2100	226.4	0.6	86.9	0.8
3	996	58.7	1.0	71.3	1.3	23	1000	177.2	0.4	65.6	0.6
4	996	56.3	0.9	69.7	1.3	24	1000	155.4	0.4	53.4	0.6
5	498	52.5	1.1	73.3	2.0	25	480	139.1	0.5	40.8	0.8
6	498	53.3	1.3	73.1	2.2	26	480	122.0	0.6	33.4	0.8
7	1332	43.7	1.2	66.9	1.1	27	228	105.6	0.9	25.0	1.3
8	1332	40.7	1.0	66.0	1.3	28	228	93.2	0.8	21.2	1.1
9	666	40.0	1.6	67.3	1.8	29	228	83.3	0.8	17.2	1.5
10	666	48.6	1.2	67.6	2.0	30	228	76.7	0.7	15.9	1.6
11	333	59.6	1.7	72.8	2.3	31	104	66.1	1.6	14.0	2.2
12	333	75.4	1.6	78.2	2.3	32	104	59.5	1.4	12.5	2.1
13	36202	113.3	0.2	112.7	0.3	33	48	48.4	5.2	11.2	6.3
14	36202	140.4	0.2	133.5	0.4	34	48	38.9	4.7	11.5	6.7
15	17926	189.2	0.3	156.7	0.5	35	18	45.3	6.9	10.8	10.6
16	17926	227.6	0.3	167.1	0.6	36	18	42.3	6.0	10.9	9.4
17	8850	282.2	0.5	169.2	1.2	37	3	30.3	10.2	7.6	10.7
18	8850	308.7	0.7	160.6	1.4	38	3	39.4	20.0	8.3	99.9
19	4320	318.8	0.9	141.2	1.7	39	0	0.0	0.0	0.0	0.0
20	4320	303.9	0.7	119.9	1.3	40	0	0.0	0.0	0.0	0.0

AUG 18 '89 12:23 PAGE.006

Figura 2.9

2.3.2a Modelo directo: Estructura tabular de dos capas.

Vamos a considerar ahora el caso de una estructura tabular de dos capas, para dos resistividades distintas de la capa superior (100Ωm y 1000Ωm); la capa inferior siempre será de 0.1 Ωm.

En este caso tenemos una estructura tabular de dos capas en que la capa inferior , conductosfera, es mucho mas conductora que la capa superior.

Esta estructura de dos capas es un tema que ha sido tratado por diversos autores, vamos a particularizar para nuestro caso el tratamiento de Kaufman y Keller, 1981.

En este caso, la resistividad aparente está dada por la (2.16), con n=2, es decir;

$$Z=\frac{iw\mu_0}{\theta_2}\coth\left\{\theta_1 h_1+\coth^{-1}\frac{\theta_1}{\theta_2}\right\} \qquad 2.25$$

como hemos supuesto fuente uniforme ($\nu=0$),

$\theta_1=\sqrt{(i\mu_0 w/\rho_1)}$ y $\theta_2=\sqrt{(i\mu_0 w/\rho_2)}$, $\theta_1/\theta_2=\sqrt{(\rho_2/\rho_1)}$, $w=2\pi/T$, explicitando la dependencia con el período y haciendo uso de la identidad $\coth(x+\coth^{-1}(y))=\mathrm{th}(x+\mathrm{th}^{-1}(y))$ la (2.25) queda expresada como

$$Z=\sqrt{(i\mu_0\rho_1 2\pi)}\sqrt{(1/T)}\,\mathrm{th}\left\{\sqrt{(2\pi\mu_0 i)}\frac{1}{\sqrt{T}\sqrt{\rho_1}}.h_1+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}}\right)\right\} \qquad 2.26$$

y la resistividad aparente queda expresada entonces por

$$\rho_a = \rho_1 \left| th \left\{ \sqrt{2\pi\mu_0 i} \frac{1}{\sqrt{T}\sqrt{\rho_1}} \cdot h_1 + th^{-1} \frac{(\sqrt{\rho_2})}{\sqrt{\rho_2}} \right| ^2 \right. \qquad 2.27$$

En la tabla 2.2, hemos resumido el comportamiento asintótico de la fase y de la resistividad aparente para los cases extremos del período, la fase la obtenemos de la (2.26), cuando T->0, $1/\sqrt{T} \to \infty$ y $th(\infty)=1$, luego $Z=\sqrt{i}\sqrt{(\mu_0 \rho_1 2\pi)}\sqrt{(1/T)}$, y la fase es

Tabla 2.2 Comportamiento asintótico de la fase y de la resistividad aparente para la estructura tabular de dos capas.

T	Φ	Res. ap.
->0	45°	ρ_1
->∞	45°	ρ_2

$$\underset{T\to 0}{\phi} = \text{arctang}\left(\frac{Imag(\sqrt{i})}{Re\sqrt{i}}\right) = \pi/4 \qquad 2.28a$$

Cuando T->∞, el primer sumando dentro del argumento de la tangente hiperbólica en la (2.26) tiende a cero y la fase entonces

$$\underset{T\to\infty}{\phi} = \text{arctang}\left(\frac{Im(\sqrt{i})}{Re(\sqrt{i})}\right) = \pi/4. \qquad 2.28b$$

Para frecuencias intermedias , en las cuales podemos despreciar el segundo sumando,

$$\phi = \text{fase de } [\ \sqrt{(i\mu_0 \rho_1 2\pi)}\sqrt{(1/T)}\, th\{\ \sqrt{i}\ \sqrt{(2\pi\mu_0/\rho_1)}.h_1/\sqrt{T}\}].$$

Si aceptamos que en algun momento T es grande de manera de poder aproximar th(x) por x y así tener un orden de magnitud del comportamiento en un período intermedio

$$\phi = \text{fase de } [\sqrt{(i\mu_0 \rho_1 2\pi)}\sqrt{(1/T)}\sqrt{i}\sqrt{(2\pi\mu_0/\rho_1)}.h_1/\sqrt{T}]$$
$$\approx \text{fase de } [i\ 2\pi\mu_0 h_1/\sqrt{T}] = \pi/2. \qquad 2.28c$$

Consideremos ahora la resistividad aparente; si $T \to 0$ el primer término del sumando en el argumento de la tangente hiperbólica en la 2.27 es mucho mayor que el segundo, y $th(x)=1$, cuando $x \to \infty$, luego $\rho_a = \rho_1$, (2.29a); si por el contrario $T \to \infty$, predomina el segundo término de la suma y la (2.27) se expresa como

$$\rho_a = \rho_1\ \rho_2/\rho_1. \qquad 2.29b$$

Si ahora dejamos los dos términos, ver por ej. Kaufman y Keller, 1976, pag. 78, la resistividad aparente tiende a ρ_1 cuando $T \to 0$ de forma oscilatoria amortiguada, que es lo que se observa en las figuras 2.9a y 2.9c. En las figuras 2.9.a,b mostramos el comportamiento de la resistividad aparente y de la fase para ρ_1=100Ωm y en las figuras 2.9c,d para ρ_1=1000Ωm, vemos que a medida que crece el período la resistividad aparente se mantiene constante y luego cae como 1/T, después de una breve excursión hacia valores mayores que ρ_1. La fase luego de presentar una pequeña excursión hacia valores menores que 45°, presenta una gran excursión que lleva la fase casi hasta 90°, para retornar luego para muy largos períodos hacia 45°.

Figura 2.9a: Diagrama en perspectiva del log de la resistividad aparente en función del log del período y en función del log de la profundidad de la conductosfera en km para una estructura tabular de dos capas con resistividad de la capa superior ρ_1=100Ωm. Hágase el ejercicio de ir de mayores períodos a menores para notar como la resistividad aparente crece hasta valores mayores que ρ_1 para luego acercarse en forma oscilatoria a este valor.

Figura 2.9b: Diagrama de fase en función de las variables descriptas en el epígrafe de la figura 2.9a. Nótese como la fase, si se crece en períodos vale 45°, luego observa una excursión hacia valores menores que 45°, luego una gran excursión que lleva a la fase casi a valer 90° y luego cae hacia 45°.

Figura 2.9c: Idem figura 2.9a, pero para una resistividad ρ_1=1000Ωm. Obsérvese como la influencia de la conductosfera se manifiesta para un rango de períodos mayor que en el caso anterior (figura 2.9a).

Figura 2.9d: Idem figura 2.9b, pero para una resistividad ρ_1=1000Ωm.

Estructura tabular dos capas, superior=100ohm-m

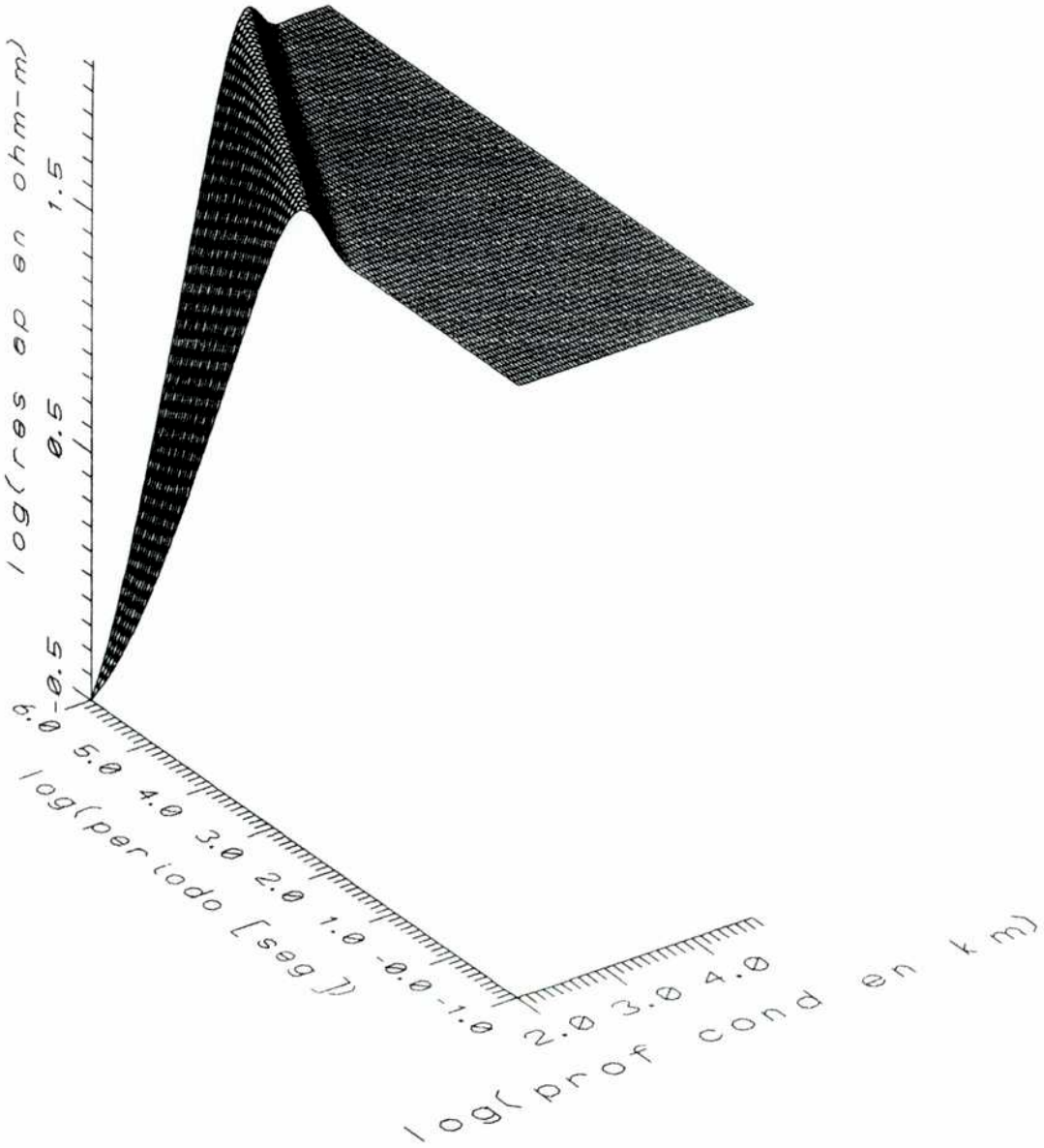


Figura 2.9a

Estructura tabular dos capas, superior=100ohm-m

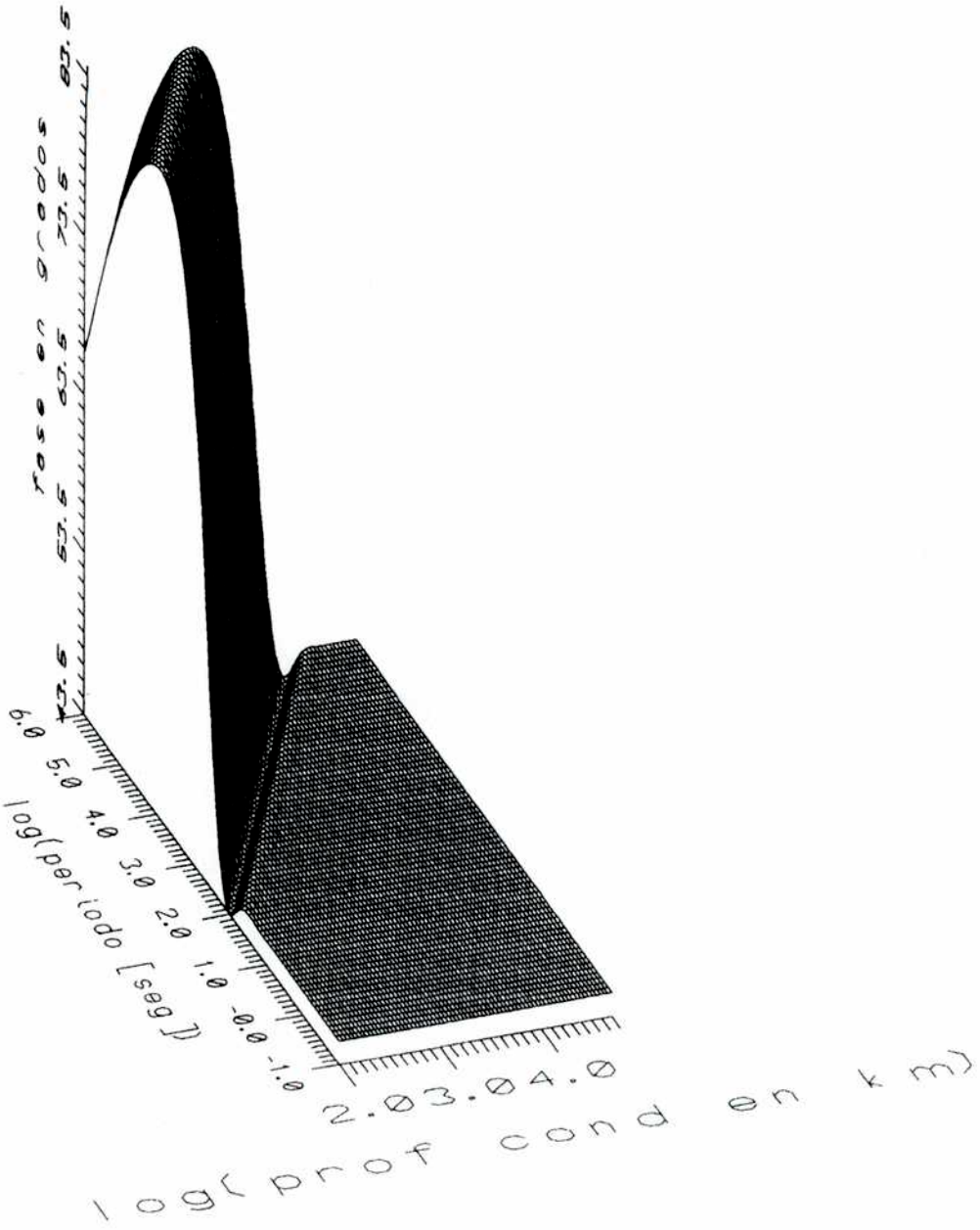


Figura 2.9b

Estructura tabular dos capas, superior=1000ohm-m

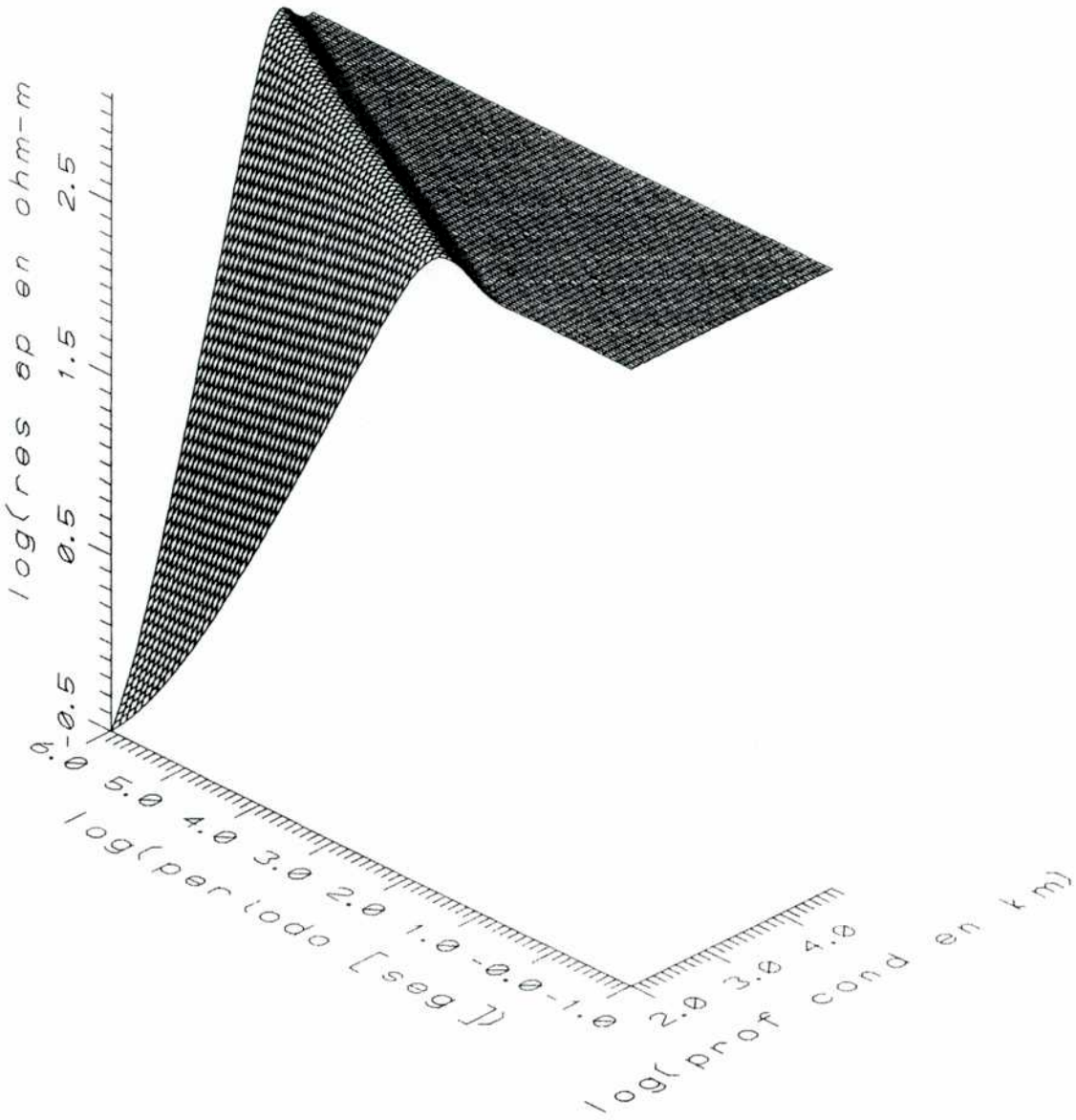


Figura 2.9c

Estructura tabular dos capas, superior=1000ohm-m

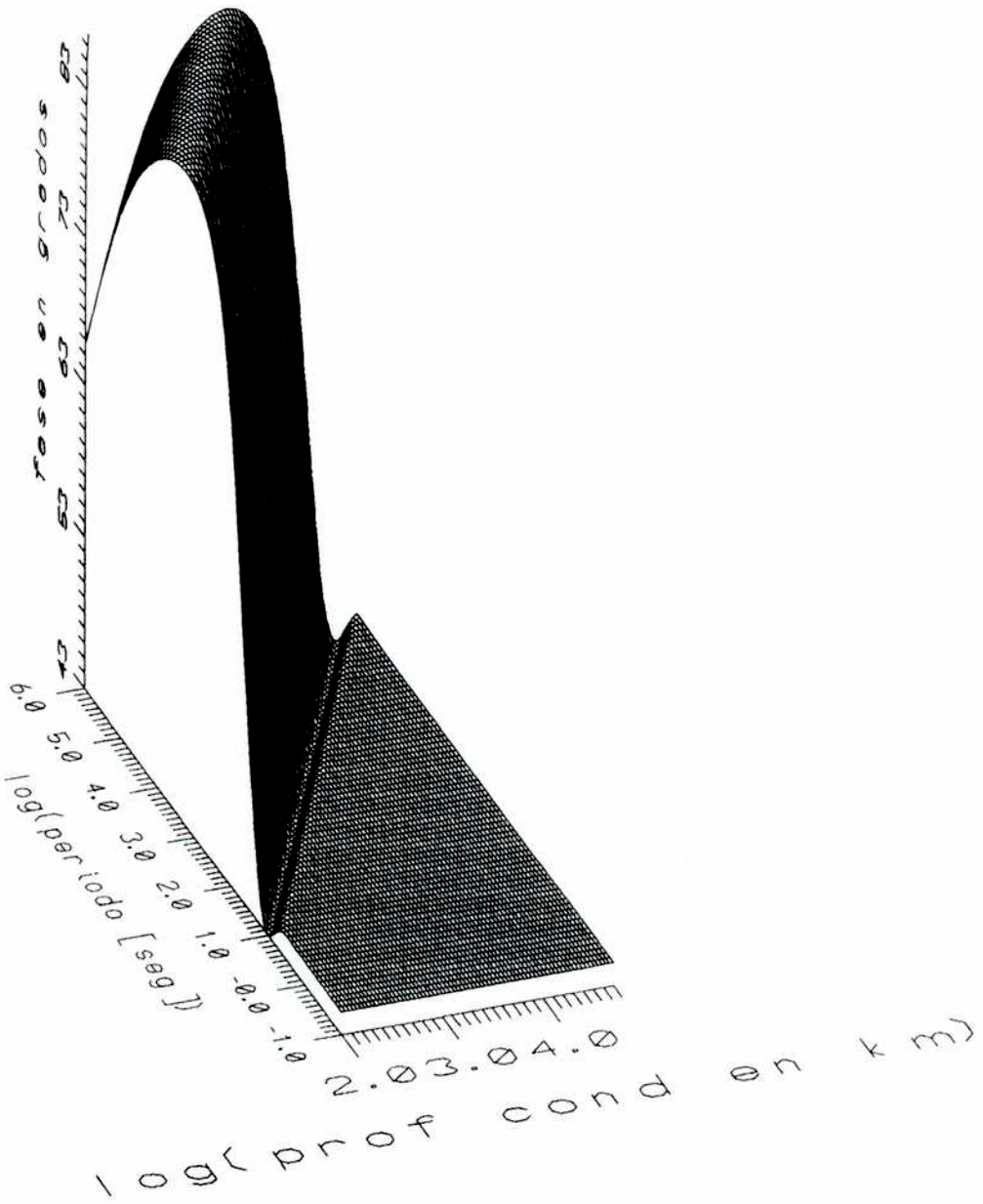


Figura 2.9d

2.3.2b Modelo Directo: Estructura tabular de dos capas, curvas de nivel.

Una manera de cuantificar la influencia de la conductosfera, que podría ser de utilidad al prospector es dar una curva en el plano período- profundidad de la conductosfera, para la cual, la resistividad aparente es menor que la de la capa superior en un determinado porcentaje.

Estas curvas, que resultan ser rectas en el diagrama $\log_{10}(T)$ (eje y) vs $\log_{10}(p_c)$ (eje x), se dan en la figura 2.10a para resistividad de la capa superior igual a 100Ωm.

Para aclarar como se utiliza este nomograma vamos a hacer un ejemplo: Si la conductosfera se encuentra por ejemplo a 500km lo cual puede ser conocido por otro método, como sería si se conociera por las variaciones geomagnéticas diarias y si la calidad de mi medición es tal que puedo estimar la resistividad aparente con un 1% de error, el hecho de considerar la existencia de la conductosfera, va a alterar mi medición a partir de aproximadamente 250seg., si mi error de estimación es del 20%, la conductosfera hará sentir un efecto a partir de 500 segundos, etc. En la figura 2.10b se observa el efecto cuando la resistividad de la capa superior es de ρ_1=1000Ωm, que como vemos extiende su influencia a un rango de períodos mas grande, como es de esperar, puesto que hay mayor penetración en mayor resistividad y la onda incidente "ve" la conductosfera desde períodos menores.

Figura 2.10a: Curvas de nivel en el plano logaritmo del período (eje y) - logaritmo de profundidad de la conductosfera (eje x). Las líneas rectas en el ángulo superior izquierdo corresponden a 80Ωm, 85Ωm, 90Ωm, 95Ωm, 99Ωm y 100Ωm, de izquierda a derecha y son las que deben ser consideradas, porque corresponden a la excursión mayor de la resistividad aparente (ver texto).

Figura 2.10b. Idem figura anterior, pero con resistividad de la primera capa ρ_1=1000Ωm.

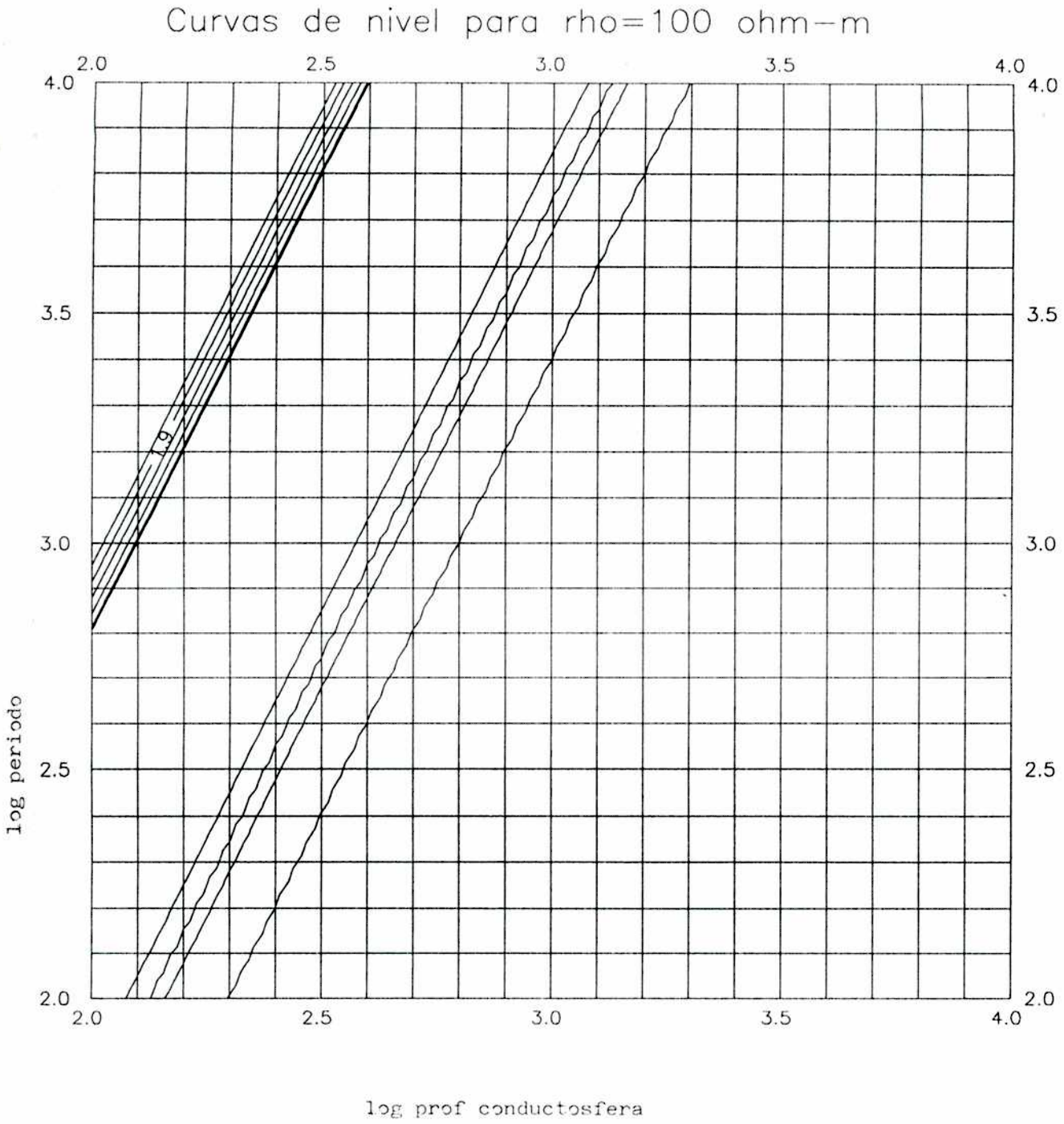

Curvas de nivel para rho=100 ohm-m
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
log periodo
log prof conductosfera

Figura 2.10a

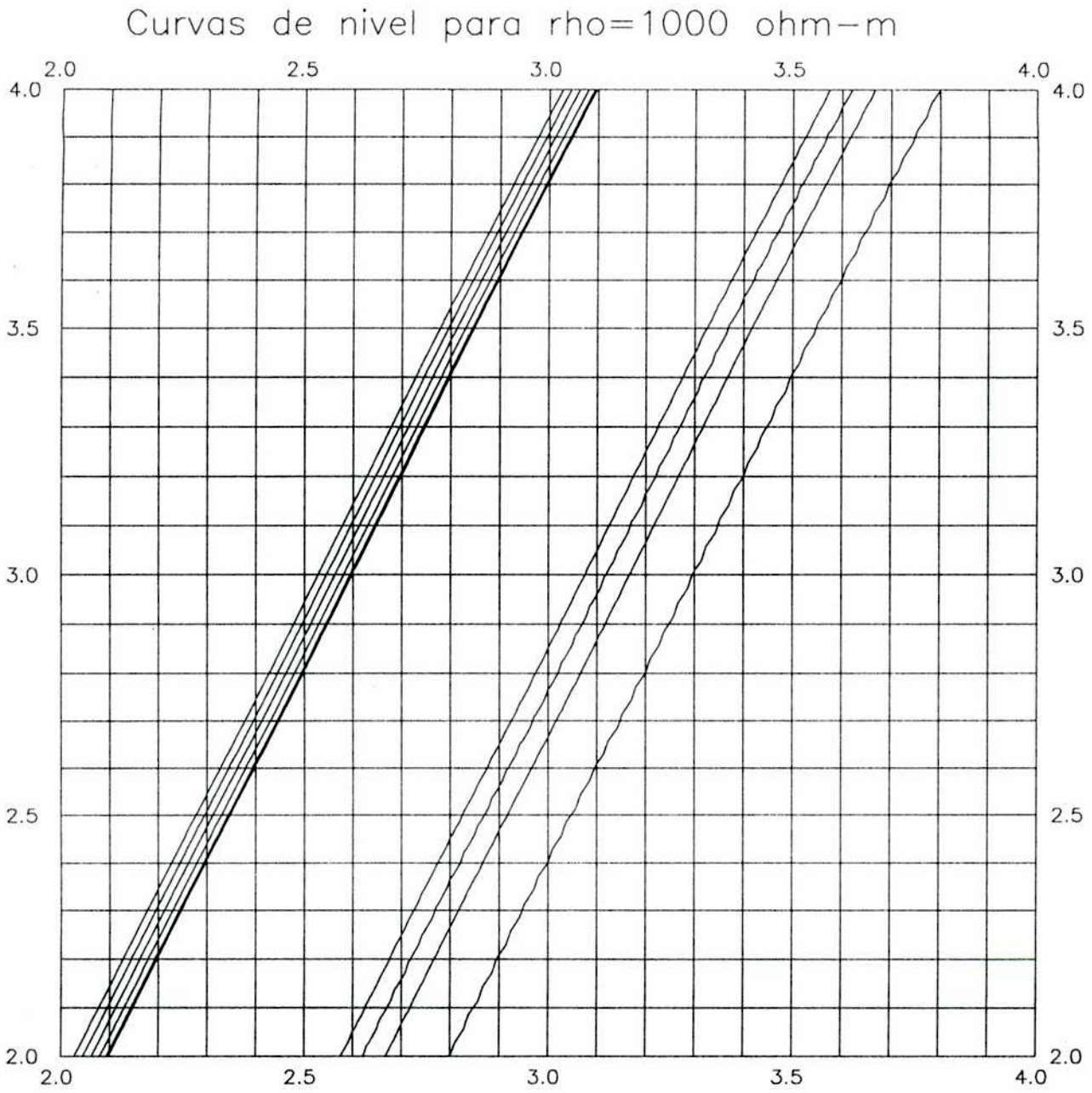


Figura 2.10b

2.3.3 El problema inverso

Se habla del problema directo cuando se tienen parámetros de un modelo, un modelo y se predicen los datos o resultados de una medición, en el problema inverso sin embargo, se dispone de los resultados de la medición (datos), el modelo, y lo que se busca es la determinación de los parámetros del modelo (Menke, 1984). Luego el cometido del problema inverso, es dar información sobre los parámetros numéricos no conocidos y no sobre el modelo en sí. En este subparágrafo nos dedicaremos a establecer la influencia de la conductosfera en la determinación de los parámetros (esencialmente resistividad y espesor de las capas) que constituyen el problema uni-dimensional.

Es muy diferente el comportamiento en tiempo de las curvas de resistividad aparente y de fase en función del período para el caso de considerar o no la presencia de la conductosfera, tal cual hemos visto en el parágrafo anterior (figuras 2.7a,b,c, 2.8a,b,c, 2.9a,b,c,d).

Para evaluar en cuanto nos equivocamos al no tener en cuenta esta capa conductora haremos el siguiente experimento numérico; vamos a suponer que a los datos obtenidos de una medición hipotética (que serán en realidad los resultados de un modelo teórico en el cual se considera la conductosfera), los vamos a ajustar en el sentido de cuadrados mínimos por una curva que no tenga conductosfera. Esto equivale a ajustar un modelo con una capa menos.

La técnica mas usual en el análisis de datos MT, cuando se trata de ajustar la teoría con las observaciones, es la de cuadrados mínimos. En geofísica en general, los parámetros no intervienen en forma lineal en las observaciones teóricas por lo cual se debe hacer un desarrollo en series de Taylor, y descartar todos los términos de orden superior al primero. Un esquema de este tipo ha sido publicado por Marquardt, 1963. En éste trabajo utilizaremos un algoritmo que minimiza

$$s(p) = (y - g)^T C_n^{-1} (y - g) + (p - \mu)^T C_m^{-1} (p - \mu) \qquad 2.18$$

donde g es el vector de observaciones teórica, y el de observaciones reales C_n la matriz de covarianza, p el vector de parámetros y μ el valor esperado de los parámetros. Dado que g es no-lineal en los parámetros, se lo aproxima por su desarrollo en series de Taylor y se realiza un procedimiento iterativo partiendo de una estimación inicial de los parámetros. El procedimiento fué tomado de Pous, Marcuello and Queralt, 1987.

Con este procedimiento vamos a realizar la estimación de los parámetros de distintos modelos en base a datos sintéticos.

Supondremos que la tierra es unidimensional y está formada por cinco capas, incluyendo la conductosfera. En este caso, cuando la incidencia de las ondas sobre la superficie terrestre es perpendicular y las ondas son planas, la respuesta de la tierra está dada por la (2.15) donde $\nu=0$. Los parámetros del modelo, que llamaremos modelo original, están graficados en escala logarítmica en la figura 2.11a, las observaciones teóricas

para estos parámetros (la resistividad aparente en función del período), en la figura 2.11b .

Para simular la medición real, supondremos que ésta está limitada a una banda de períodos, esta banda será desde 1s hasta 10^6, 10^4, y 10^3 segundos respectivamente.

Frente a la curva de resisitividades aparentes y de fases en función del período, se pueden hacer algunas estimaciones de los parámetros iniciales, básicamente de resistividades y profundidades a partir del ábaco introducido por Fournier, 1965. En la figura 2.12 se reproduce uno de tales ábacos, que consiste en un gráfico tetralogarítmico; las líneas inclinadas en sentido desde arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha son líneas de igual espesor de skin y las inclinadas de arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda son líneas de E/H=cte. La coordenada x es el período y la coordenada y la resistividad aparente.

Una primera identificación que se puede realizar es la cantidad de capas, en el caso de la figura 2.12 se ve que son cinco capas, dadas por la excursión principal de la resistividad aparente; si la resistividad aparente crece estamos en presencia de una transición entre capa conductora a resistiva (cf. fig 1.3) y a la inversa para períodos crecientes, a la capa mas superficial sigue una capa resistiva, luego una capa conductora, otra resistiva y la capa conductora final.

-A la primera capa se le asigna el valor de resistividades con que empieza el ábaco (de izquierda a la derecha).

-Se da una cota mínima a la resistividad de cada una de las capas en la medida que se prolonga asintóticamente la curva como si no

existieran las capas subyacentes.

-Los espesores se toman como la diferencia entre espesores de skin entre los mínimos y los máximos de la curva.

En el ábaco se han graficado los datos del modelo y se ha deducido por experiencia en el uso del mismo, que profundidades y que resistividades tiene el modelo citado; estos valores, que se dan en la tabla 2.2, son los valores iniciales que se utilizaron en el problema inverso. Del ábaco se pueden estimar, la conductancia longitudinal (espesor/resistividad) de las capas mas conductoras, espesor de las capas resistivas y resistividad mínima de las mismas (Rokityansky, 1982).

Tabla 2.3 Modelos inciales deducidos del ábaco para distintos rangos de períodos.

Rango	períodos	Resistividad	Profundidad
		ΩM	km
	$0.1-10^6$s	40	0-3.2
		800	3.2-20
		80	20-40
		2000	40-550
		<1	550-∞
	$0.1-10^4$s	100	0-3.2
		800	3.2-20
		80	20-40
		2000	40-∞
iii	$0.1-10^3$s	100	0-3.2
		800	3,2-20
		80	20-40
		2000	40-∞

Figura 2.11a. Parámetros del modelo original, ya utilizado anteriormente (figura 2.1) , se grafica en escala logarítmica la resistividad de cada estrato en función de la profundidad, aunque la escala comienza en un km se debe entender que la primera capa comienza en la superficie.

Figura 2.11b. Curva de resistividad aparente en función del período para el modelo de la figura 2.11a., también en escala logarítmica.

Figura 2.12. Abaco tetralogarítmico, Fournier, 1965. Las líneas que van de izquierda arriba a derecha abajo son de igual espesor de skin, las que van a la inversa son de E/H=cte, el eje x es el período y el eje y la resistividad aparente. Las estimaciones de resistividad se realizan prolongando las curvas como si no existieran las capas inferiores. Las estimaciones de espesor de las capas se realizan como la diferencia entre las profundidades de skin entre los máximos y los mínimos de las curvas

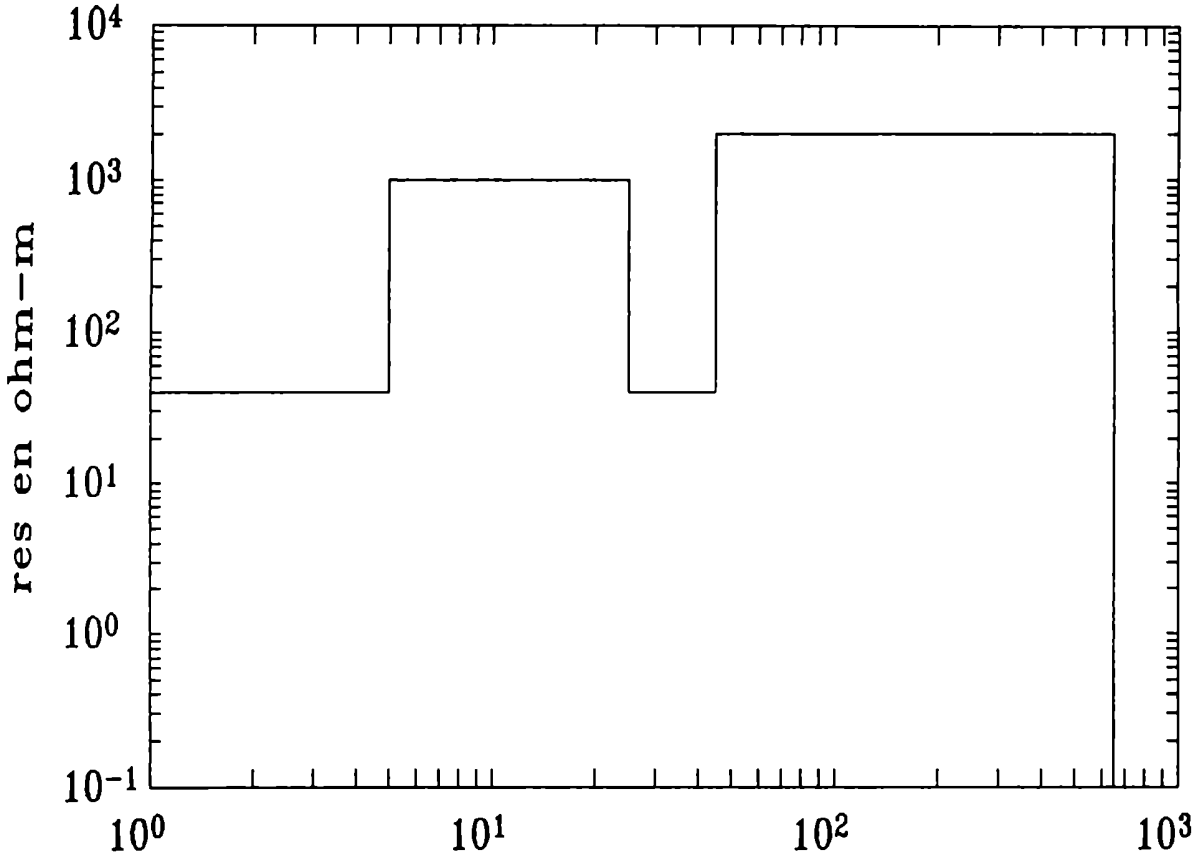


Figura 2.11a

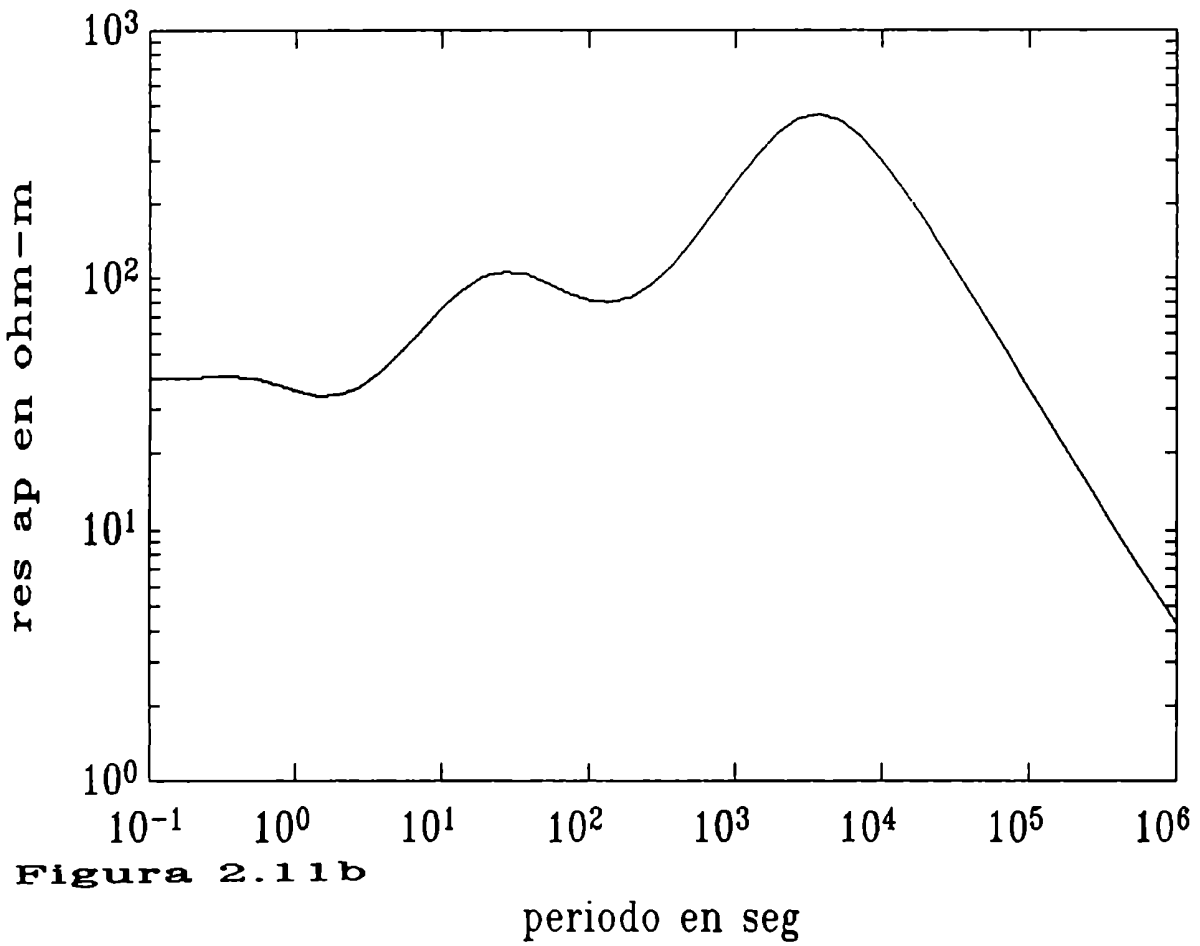


Figura 2.11b

ABAQUE DES SOLUTIONS DU SYSTEME $\rho = 0{,}2.\,T.\left(\frac{E}{H}\right)^2$; $h = \frac{\sqrt{10.\rho.T.}}{\delta}$

(établies en suivant la méthode L. Cagniard)

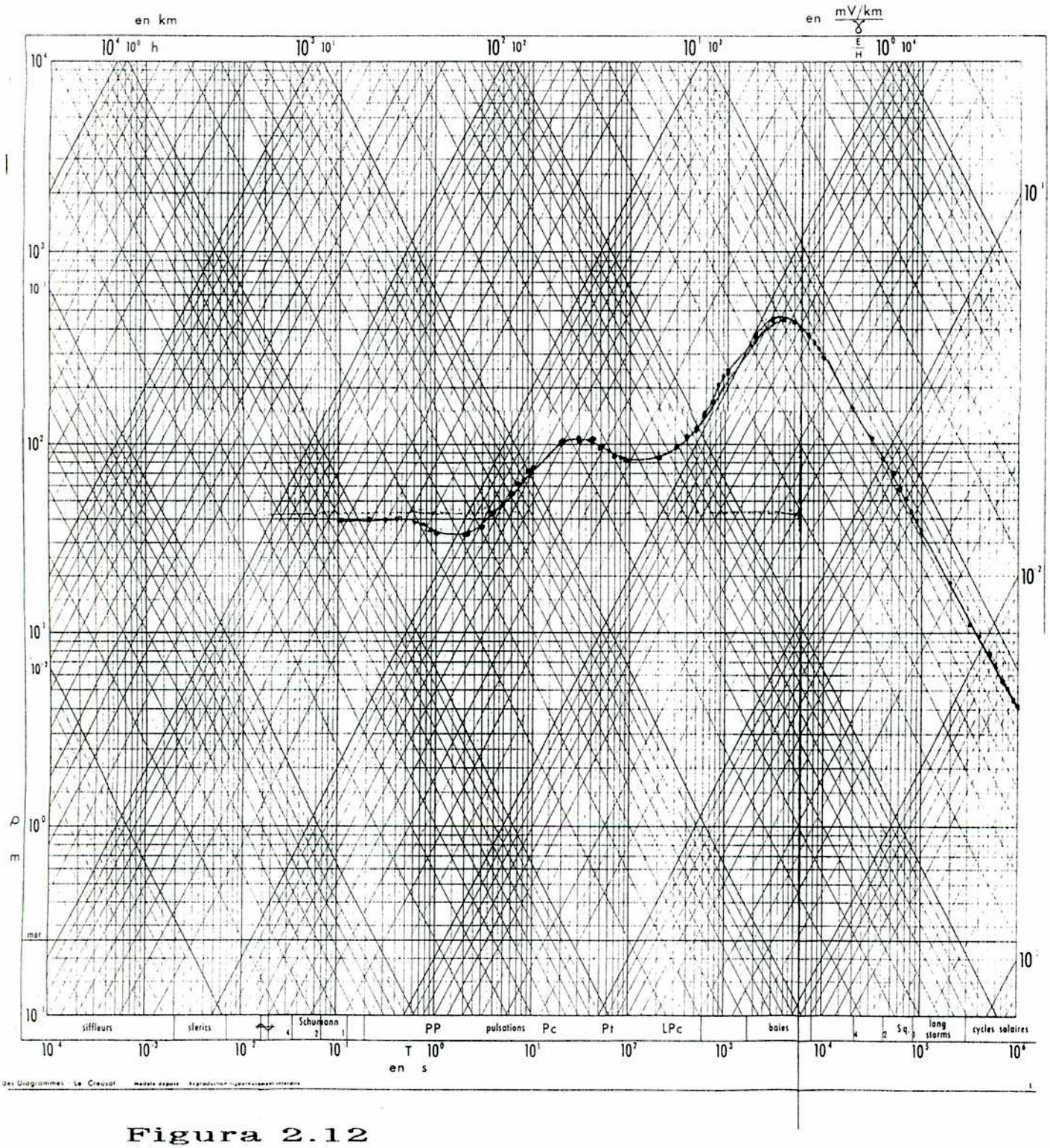


Figura 2.12

En el primer caso (todo el rango de períodos), como ya dijimos, tenemos dos capas conductoras superficiales, dos resistivas y una capa conductora final. A medida que bajamos el rango, (por que realmente para obtener períodos de 10^5 segundos no es fácil), la última capa conductora se desdibuja y se tendería a pensar que ésta no existe, luego propondríamos un modelo tal como dos capas conductoras y dos resistivas, es decir, un modelo sin conductosfera.

Trataremos ahora los distintos rangos de períodos:

-Rango i). Vamos entonces a considerar todos los datos, y vamos a ignorar la presencia de conductosfera, es decir, partiremos de un modelo inicial de dos capas conductoras y dos capas resistivas. En definitiva hemos intentado modelar con cuatro capas, un modelo que originalmente es de cinco. Con estos datos iniciales, entramos entonces al procedimiento de inversión, que como resultado da resistividades y profundidades del modelo de cuatro capas, estos resultados se ven en las figuras 2.13a (perfil de resistividades) y 2.13b (resistividad aparente calculada = observaciones teóricas del modelo resultante de la inversión, junto con los resultados del modelo verdadero).

En la figura 2.13a, se ve el modelo original junto con el modelo final después de la inversión; como podemos apreciar, el programa de inversión, al minimizar los cuadrados trazó la mejor curva posible, aproximó mejor la conductosfera, es decir, "fabricó" una conductosfera y con las otras tres capas ajustó lo mejor posible las capas mas superficiales. Evidentemente el modelo resultante deja mucho que desear.

Figura 2.13a. Modelo original (línea llena) y resultado de la inversión con un modelo de cuatro capas (línea de trazos).

Figura 2.13b. Resistividad aparente en función del período para los modelos de la figura anterior, el análisis fué realizado hasta 10^6 segundos, o sea todo el rango de períodos disponible.

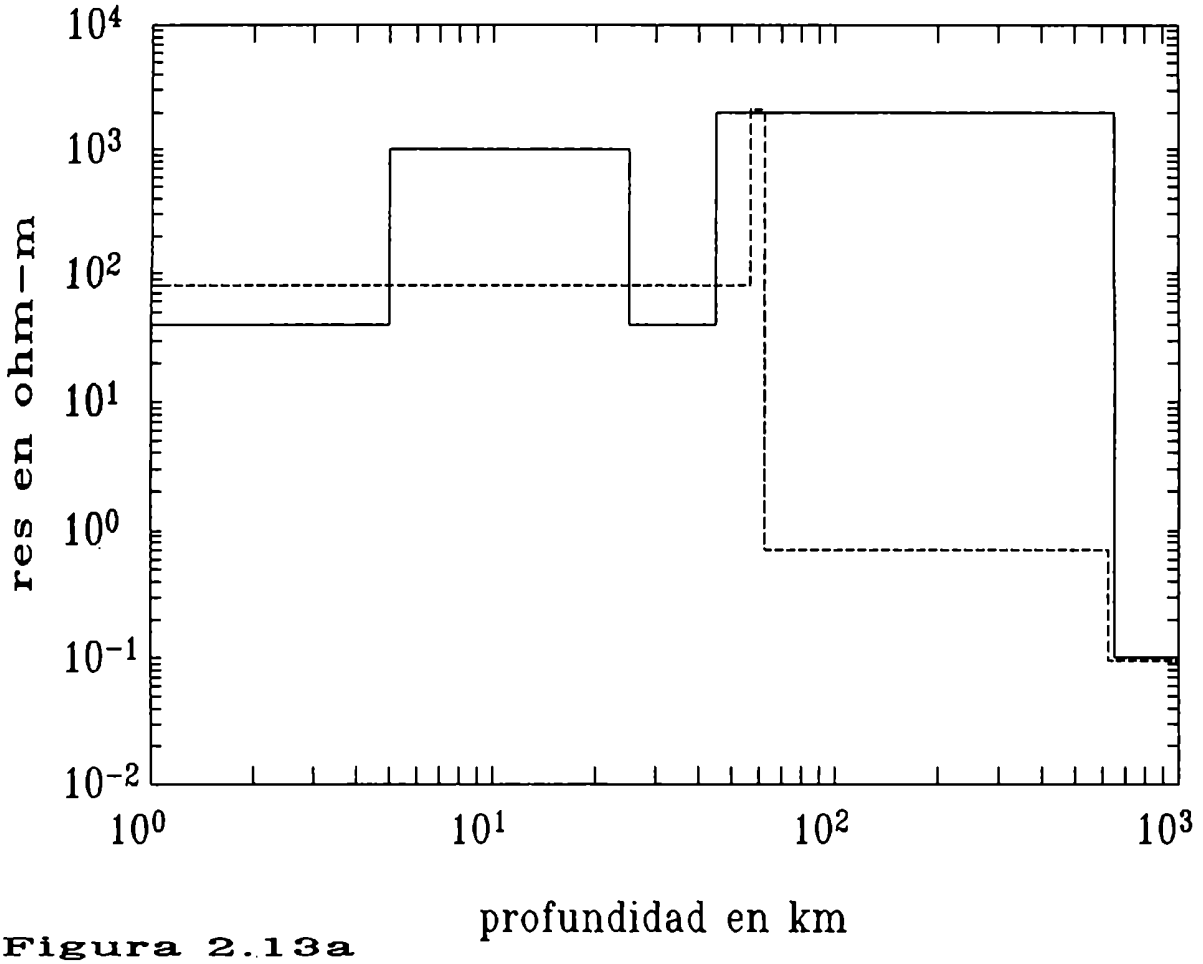


Figura 2.13a

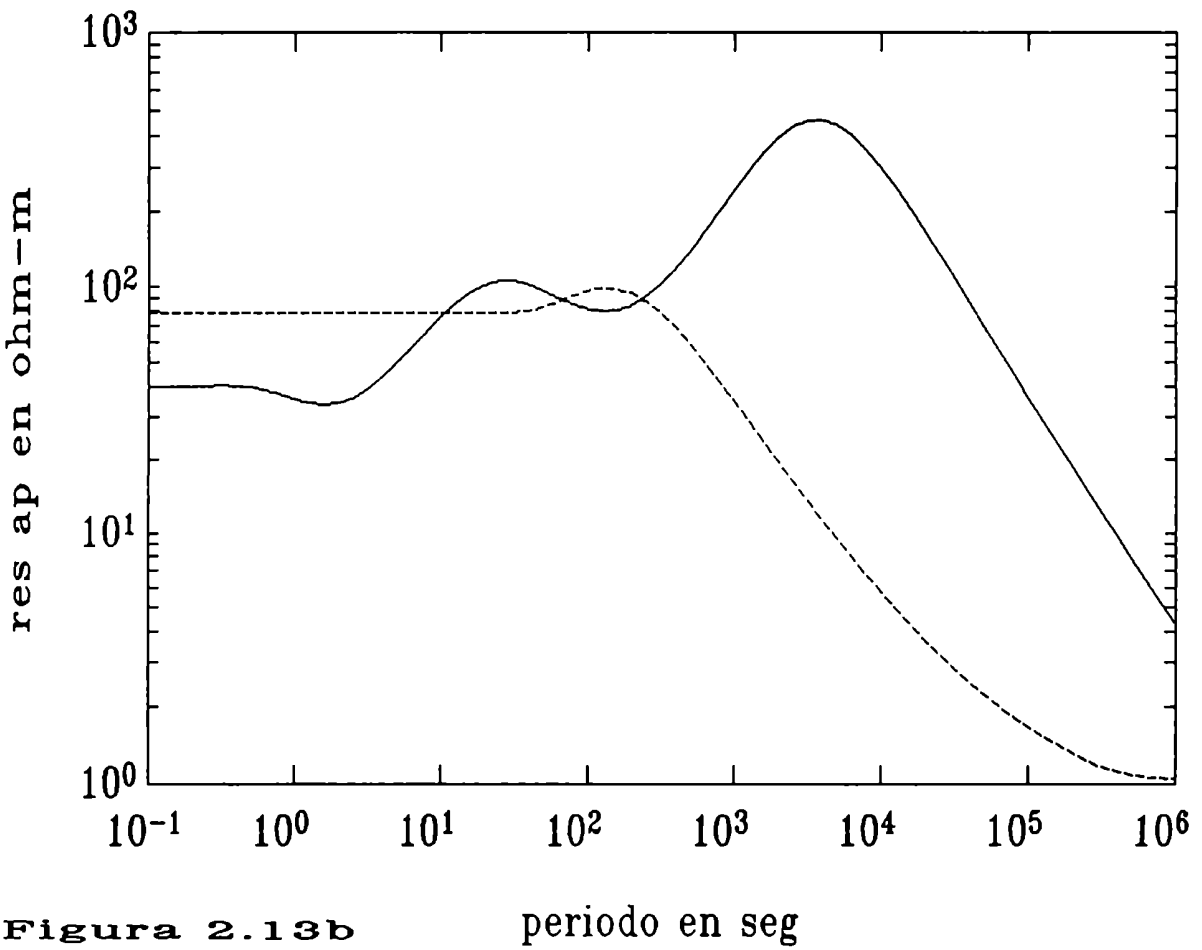


Figura 2.13b

-Rango ii. Luego hemos simulado lo que se obtendría al medir hasta 10^4 segundos, es decir que los datos de entrada son los mismos que en el caso anterior exceptuando el rango de datos entr 10^4 y 10^6 segundos y hemos ejecutado el procedimiento de inversión . A los resultados los hemos graficado en la figura 2.14.a (modelo original y final de cuatro capas) y en la 2.14.b, (resistividades aparentes correspondientes). Evidentemente, el ajuste entre resistividades aparentes es mejor que en el caso anterior.

Debemos mencionar que el ajuste por cuadrados mínimos tiene en cuenta las resistividades aparentes y también las fases, simplemente que no presentamos aquí el ajuste en fases para no abundar en gráficos.

-Rango iii. Cuando consideramos los datos solamente hasta 10^3 segundos, llegamos a las figuras 2.15.a y 2.15.b. Como vemos, el modelo final obtenido es bastante aproximado, pero observamos que hasta las capas mas cercanas a la superficie han alterado su espesor y su resistividad. Vemos también, que el programa de inversión ha distribuido el error en todo el rango espectral, lo cual dió lugar a que se diferencien la capas superficiales.

Ahora supondremos que por algún otro medio, se conozca en la zona, la profundidad de la conductosfera. En ese caso, tendríamos nuestros datos, tomados hasta 10^3 segundos, y además sabríamos que conductosfera tiene la profundidad correcta.

Realizando la inversión bajo estas nuevas condiciones obtenemos los resultados que se muestran en las figuras 2.16a y 2.16b, como vemos el ajuste es muy bueno y además son casi

indistinguibles en la escala del gráfico las curvas de resistividades aparentes.

Para determinar cuán bien ajusta el procedimiento, se comenzaron las iteraciones con un modelo bastante alejado al original y, utilizando todo el rango de períodos, se observó que el modelo resultante convergía a un modelo muy cercano al real. Este resultado no ha sido graficado, por coincidir los valores.

Resumiendo, hemos considerado el problema unidimensional inverso y la influencia que en él tiene la presencia de la conductosfera. El hecho de no considerar esta capa, lleva a gruesos errores de interpretación.

Hemos demostrado a través de un ejemplo, que considerando esta capa, solo son necesarios los datos hasta 10^3 segundos para obtener un buen modelo. Esto llevaría a un acortamiento de las campañas de medición, con su consiguiente ahorro en costos y a una mejor precisión de los resultados de los mismos.

Como se ve en las figuras 2.7a,b,c y 2.8 a,b,c la diferencia entre considerar o no la presencia de la conductosfera está concentrada en los períodos mas altos, sin embargo los métodos de inversión tienden a distribuir el error en todo el espectro, como se observan en las figuras 2.14b, 2.15b luego el problema, aunque circunscripto físicamente al rango de períodos mayores que , digamos 100 segundos, se hace notar a períodos menores por el efecto numérico citado. Es de hacer notar que se debe tener en cuenta este efecto, diseñando métodos de inversión que comiencen a ajustar capas de arriba hacia abajo.

Figura 2.14a. Modelo original (línea llena) y resultado de la inversión con un modelo de cuatro capas (línea de trazos).

Figura 2.14b. Resistividad aparente en función del período para los modelos de la figura anterior, el análisis fué realizado hasta 10^4 segundos.

Figura 2.15a. Modelo original (línea llena) y resultado de la inversión con un modelo de cuatro capas (línea de trazos). Esta vez se consideraron los datos hasta 10^3 segundos. El modelo es ya bastante cercano al verdadero.

Figura 2.15b. Resistividad aparente en función del período para los modelos de la figura anterior.

Figura 2.16a. Modelo original (línea llena) y resultado de la inversión (línea de trazos) cuando se consideraron los datos hasta 10^3 segundos, pero esta vez se añadió un aquinta capa (conductosfera). Prácticamente los modelos son indistinguibles en la escala del gráfico.

Figura 2.16b. Resistividades correspondientes a los modelos anteriores; modelo original(línea de puntos), modelo de inversión (línea llena).

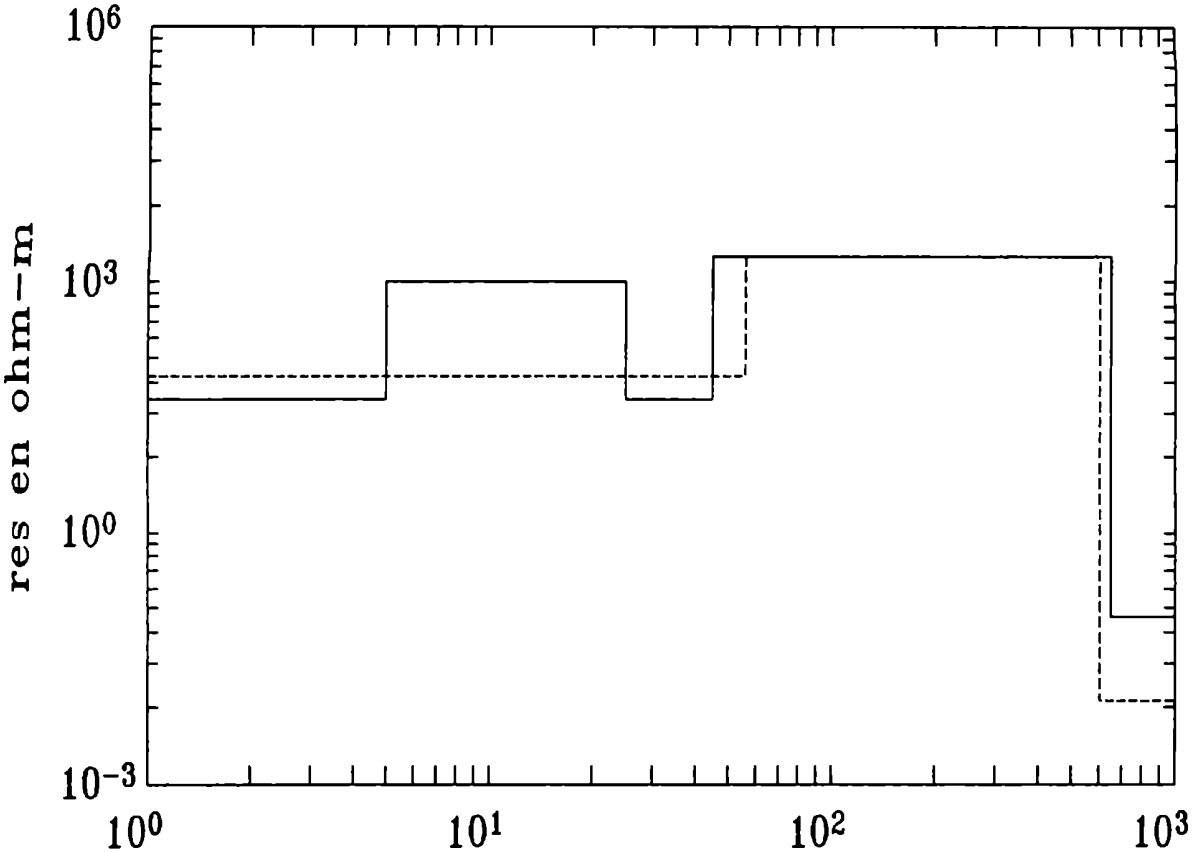
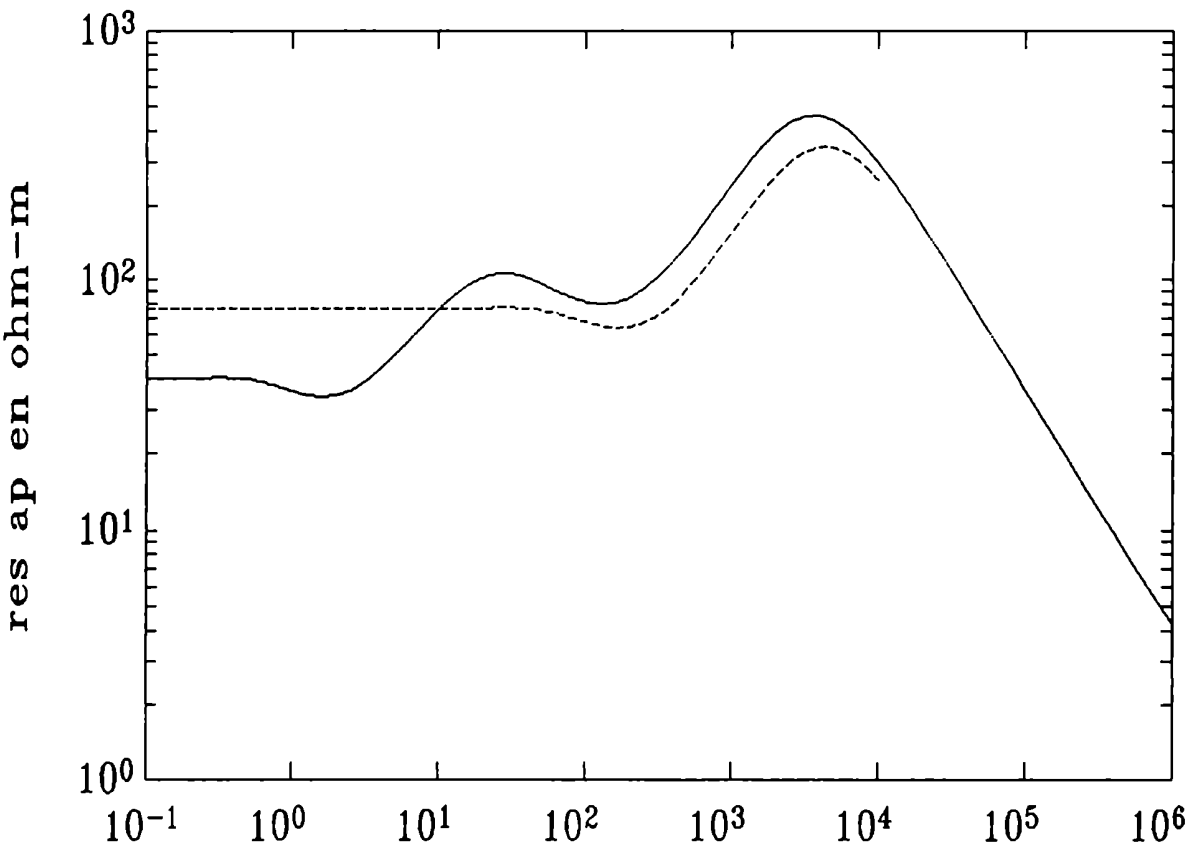


Figura 2.14a

profundidad en km



periodo en seg

Figura 2.14b

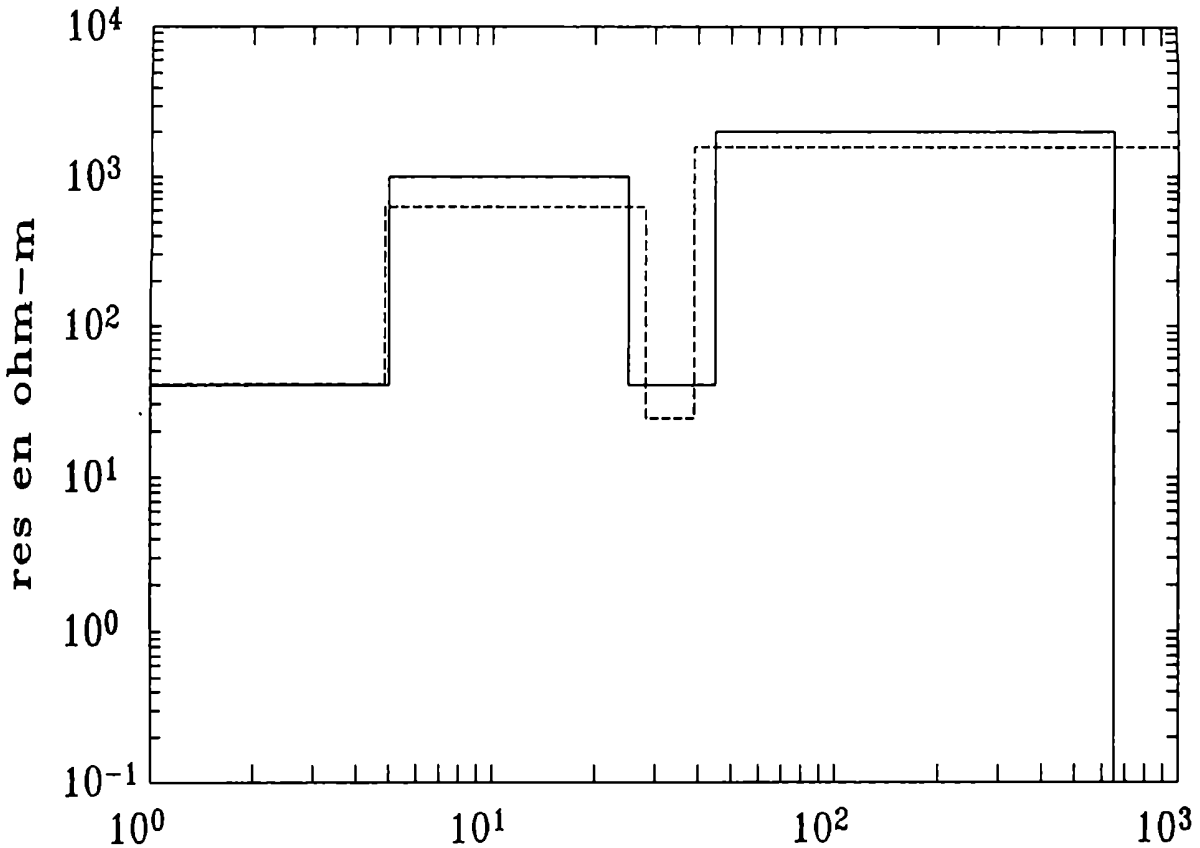
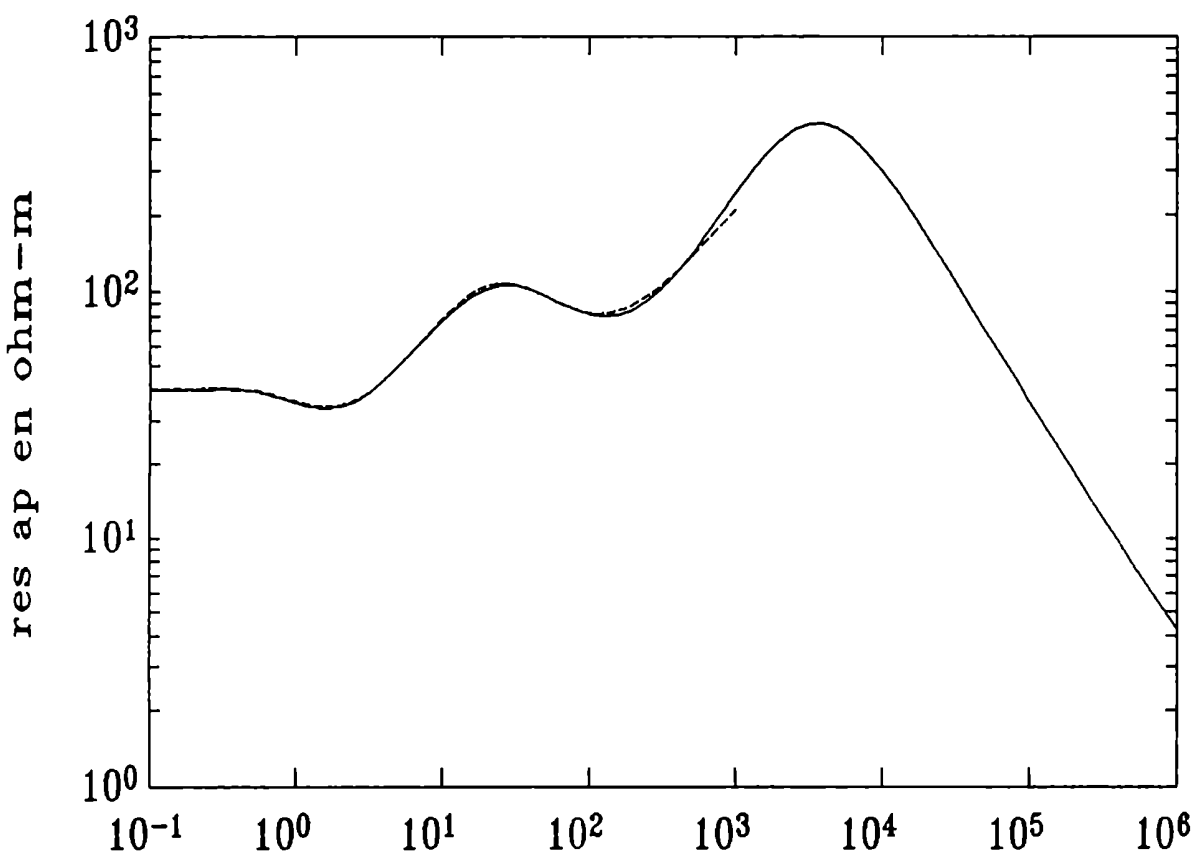


Figura 2.15a

profundidad en km



periodo en seg

Figura 2.15b

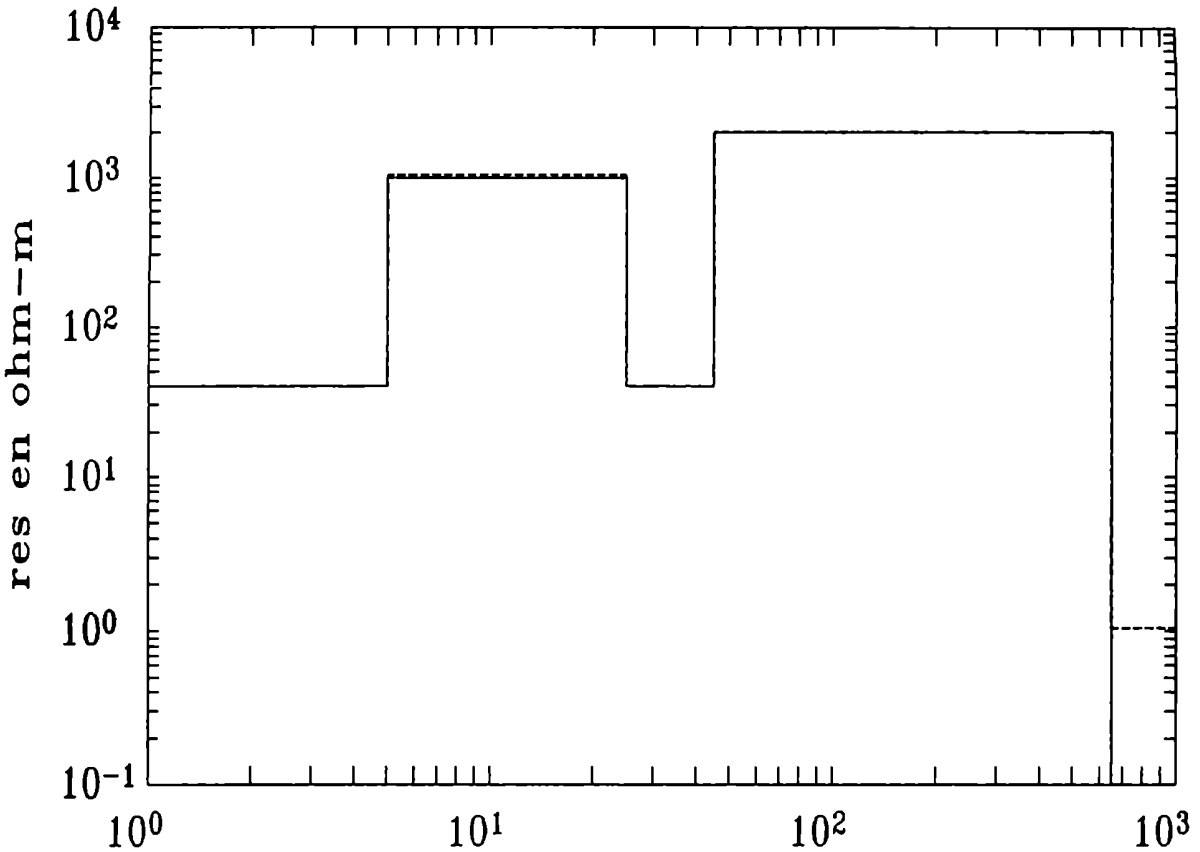


Figura 2.16a profundidad en km

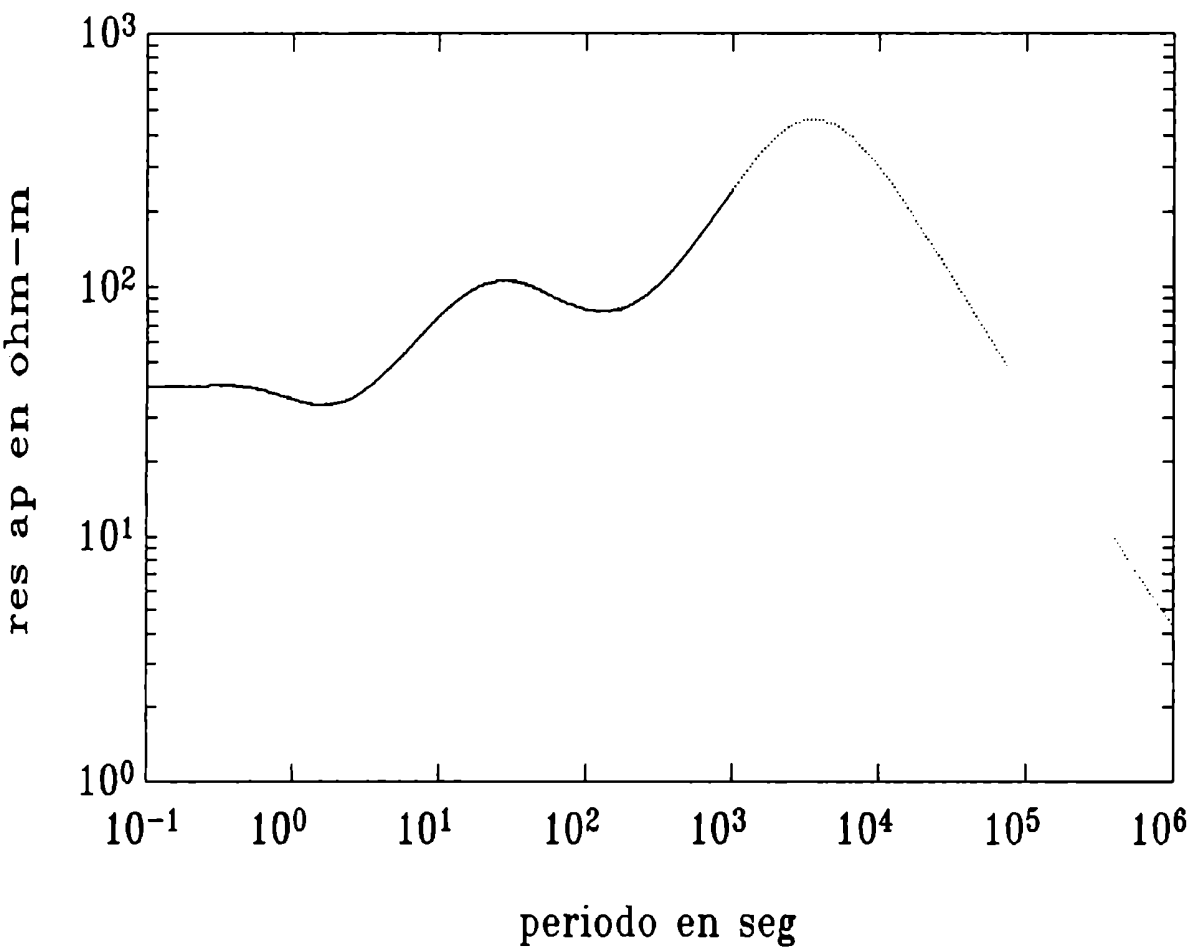


Figura 2.16b

2.3.3a El problema inverso: Tamaño de la fuente.

Aprovechando el hecho de que el comportamiento de la resistividad aparente y de la fase cuando se analizaba la influencia del tamaño de la fuente en un semiespacio infinito es similar a cuando, con fuente uniforme se analiza una estructura tabular de dos capas, vamos a realizar en este subparágrafo la siguiente experiencia:

-Generaremos datos sintéticos con un tamaño de la fuente como el electrochorro ecuatorial.

-Ajustaremos un modelo de dos capas suponiendo fuente uniforme.

Los resultados de este ejemplo se grafican en la figura 2.17a y 2.17b. En este caso el efecto de la fuente es equivalente al de una capa altamente conductora situada a 13 km de profundidad.

Figura 2.17a. Modelo de un semiespacio de resistividad constante (línea llena), pero con tamaño de la fuente equivalente a la del electrochorro ecuatorial. Con línea de trazos se observa el modelo resultante de la inversión con una estructura tabular de dos capas.

Figura 2.17b. Resistividad aparente en función del período para tamaño de la fuente finita y semiespacio infinito de resistividad constante (línea llena) y resultado de la inversión de estos datos con una estructura tabular de dos capas (línea de trazos.

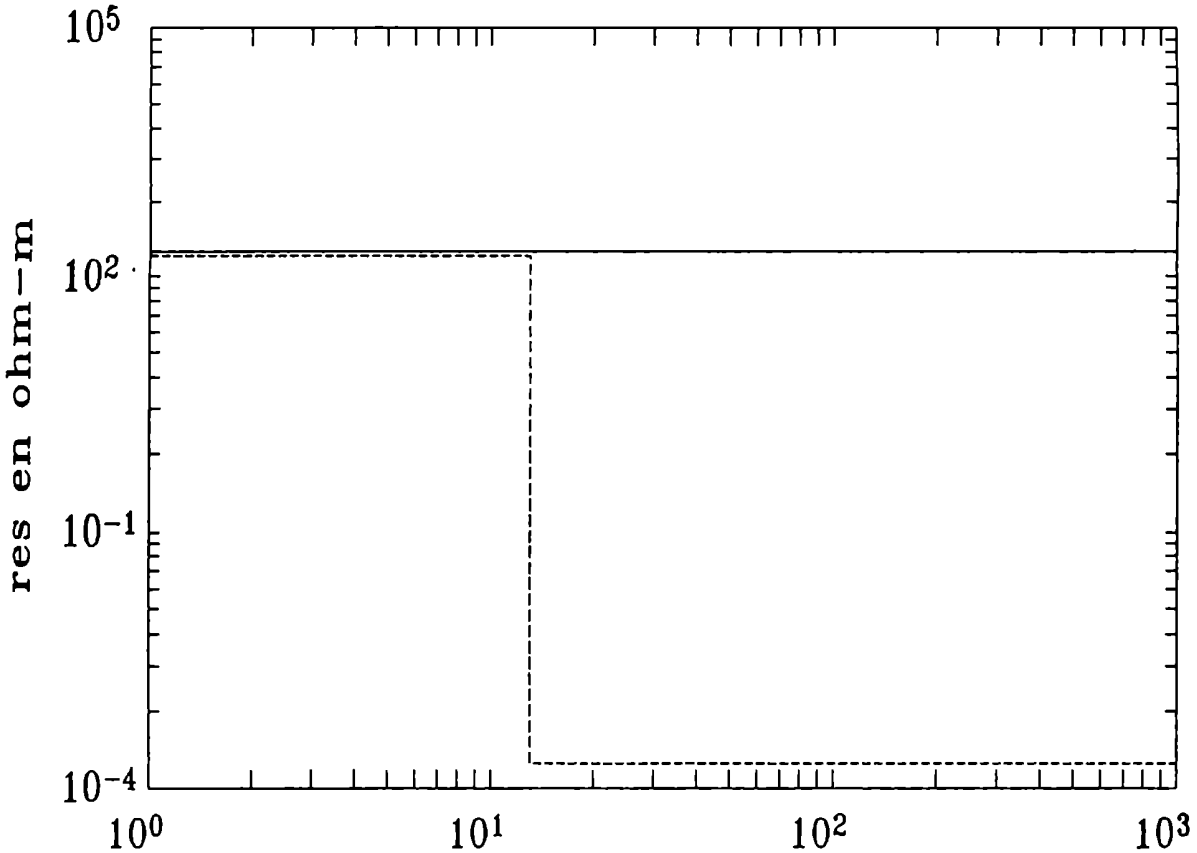
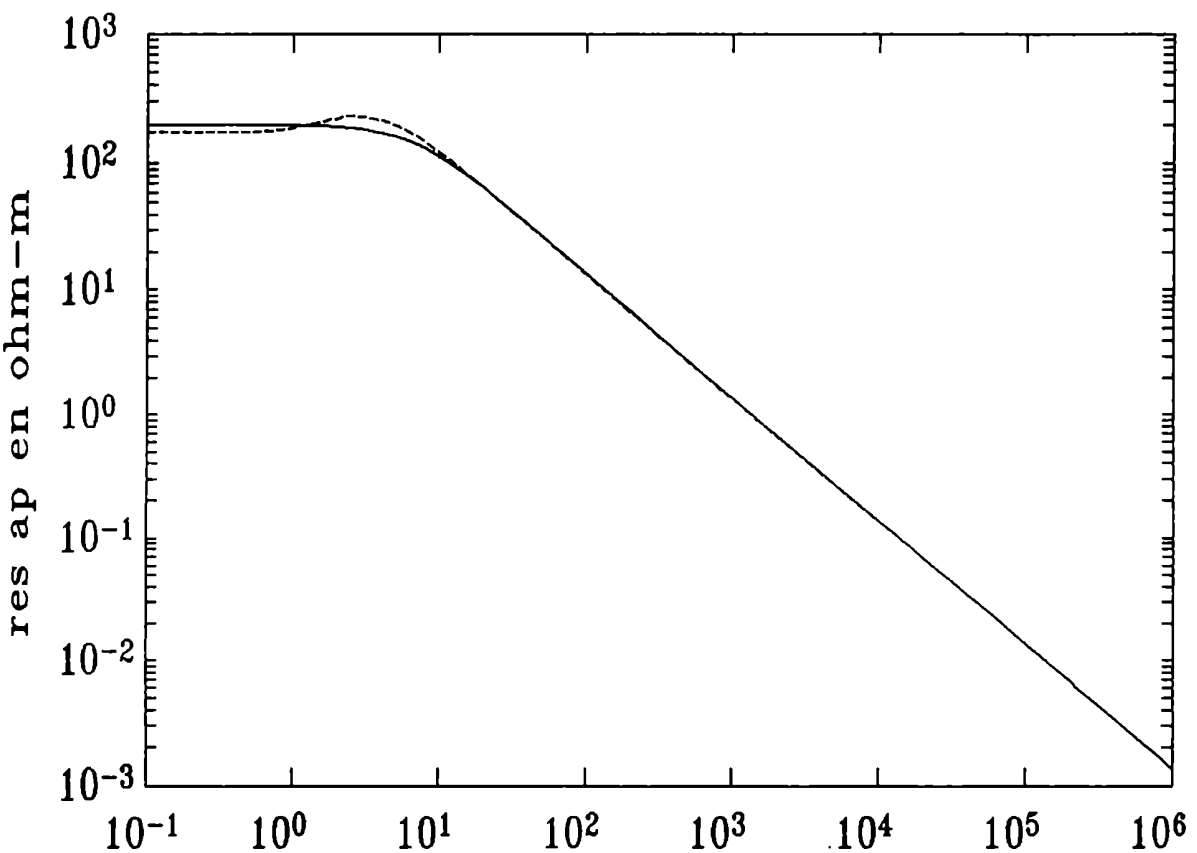


Figura 2.17a

profundidad en km



periodo en seg

Figura 2.17b

Capítulo 3.

Análisis Espectral en MT. Comparación de métodos.

3.1 Introducción:

En este capítulo nos dedicaremos al tema del análisis espectral; en particular, aplicado a la Magnetotelúrica. Nos referiremos al caso del problema uni-dimensional, y en particular trataremos el problema de la estimación de la resistividad aparente.

El método de sondeo MT, tal cual ha sido descripto en los capítulos 1 y 2 da como resultado mediciones de los campos eléctrico y magnético; las señales registradas cubren un amplio rango, tanto en frecuencias como en amplitudes y requieren un análisis espectral de las series temporales obtenidas de las mediciones para extraer conclusiones físicas.

La resistividad aparente para el caso unidimensional está dada por la ecuación (1.11),

$$\rho_a = \frac{1}{\sigma} = (w\mu_0)^{-1} |E_x|^2 / |H_y|^2 = (w\mu_0)^{-1} |Z|^2 . \qquad 1.11$$

Para estimar los espectros de las componentes de campo E_x y H_y, se utilizan en general estimadores espectrales no paramétricos basados en el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT). El más conspicuo de estos estimadores es el periodograma. Este es un estimador espectral inconsistente, es decir sesgado

y cuya varianza no tiende a cero cuando el número de observaciones tiende a infinito, como veremos en el subparágrafo 3.2a, entonces, para disminuir esta varianza, se aplican ventanas a los datos y además, los periodogramas de distintos sectores de datos se promedian (método de Welch,1967), lo cual implica que se deban analizar sectores grandes de datos simultáneamente.

Hemos visto en el capítulo anterior la influencia que tiene en los sondeos MT la conductosfera y también la necesidad de estimar bien los espectros, o relaciones derivadas de éstos como son la resistividad aparente y la fase por lo menos hasta 10^3 segundos; una técnica como la citada, que implique promediaciones sobre distintos sectores de datos, puede llevar a ingentes esfuerzos en una campaña de medición, además, como las señales MT y correspondientemente su relación señal-ruido, tienen amplitudes distintas entre diferentes sectores de datos, sería conveniente considerar separadamente aquellos sectores de datos donde esta relación es alta.

Debido al hecho experimental que estos intervalos son muchas veces cortos, las restricciones impuestas por el método de Welch requieren incluír en un solo análisis sectores de alta y baja relación señal ruido. Por lo tanto hemos utilizado el método de entropía máxima (MEM), que es capaz de analizar segmentos cortos de datos y que será descripto en el subparágrafo 3.2b.

Radosky y otros (1976), verificaron la superioridad de MEM sobre el estimador de Blackman-Tukey y sobre métodos que utilizan la transformada discreta de Fourier al analizar el espectro de micropulsaciones obtenido durante una subtormenta geomagnética,

lo cual es un caso de un proceso débilmente estacionario de orden uno.

En este capítulo trataremos la teoría de los métodos de análisis espectral que vamos a considerar en el parágrafo 3.2, luego vamos a simular las series eléctricas y magnéticas (parágrafo 3.3) que surgirían de una medición en la superficie de un modelo de tierra unidimensional; después compararemos la técnica MEM de estimación espectral (algoritmo de Burg) con el método de Welch al analizar estas series sintéticas y evaluar de esta manera, su adecuación para la estimación de espectros en magnetotelúrica. Finalmente trataremos un caso real.

3.2 Análisis espectral

Una serie de tiempo discreta $\{x_m\}=\{x_1, x_2,..., x_m\}$, es un conjunto de observaciones hechas a intervalos de tiempo equidistantes Δt, $2\Delta t...,N\Delta t$.(ver por ejemplo Haykin, 1979). Obtenemos una serie de este tipo cuando se cuando se muestrean señales analógicas con un intervalo de muestreo Δt. Los valores futuros de las series solo pueden ser descriptos en términos de una distribución de probabilidades.

Una serie estadística de tiempo representa una realización particular de un proceso estocástico, que es un fenómeno que se desarrolla en el tiempo de acuerdo a leyes probabilísticas.

Un proceso débilmente estacionario de orden q es aquel en el que los momentos estadísticos hasta orden q dependen sólo de las diferencias de tiempo.

Definimos la media de un proceso estocástico como,

$$\mu_x(u)=E[x_m], \qquad 3.1$$

donde E es el operador esperanza matemática, y la función de autocorrelación como

$$R_x(m,n)=E[x_{m+m}\ x_n^*], \qquad 3.2$$

el asterisco denota conjugación compleja.

En el caso de un proceso débilmente estacionario de orden dos, la media $\mu_m(n)$ y la función de autocorrelación $R_x(m,n)$ son

independientes del origen del tiempo, es decir $\mu_x(n)=\mu_x=cte$; la función de autocorrelación cuando la media del proceso es cero, lo cual es muy frecuente en el tipo de procesos que se analizan en MT es

$$R_x(m,n)=R_x(n)=C_x(m), \qquad 3.3$$

esta última es la definición de la función de autocovarianza $C_x(m)$.

La función $R_x(m)$ definida por la (3.2) da una descripción en el dominio del tiempo del estadístico de segundo orden de un proceso débilmente estacionario de orden dos.

La densidad espectral y la función de autocorrelación son una la transformada de Fourier de la otra; o sea

$$S_x(w)=\Delta t\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m)\ e^{(-iwm\ t)} \qquad 3.4$$

Ahora cuando intentamos estimar un parámetro de un proceso aleatorio, contamos con una cantidad finita de datos de una sola secuencia, o sea que tenemos N valores 0,1,...,N-1 a partir de los cuales podremos estimar algún parámetro (Oppenheim y Schafer, 1975, cap 11); al ser la serie x_m una variable aleatoria y ser $\hat{\alpha}$ (estimador del parámetro alfa) una función de estas variables es a su vez una variable aleatoria, con una función de densidad de probabilidad caracterizada (aproximadamente) por su valor esperado y su varianza. Se define el sesgo de un estimador como

$$\text{sesgo}=\alpha-E[\hat{\alpha}] \qquad 3.5$$

donde α= valor verdadero del parámetro, y la varianza por

$$\text{var}[\hat{\alpha}]=E[(\alpha-E(\hat{\alpha}))^2]=\sigma_{\hat{\alpha}}^2. \qquad 3.6$$

Un estimador es consistente si tanto su sesgo como su varianza tienden a cero cuando cuando el número de observaciones es grande.

Una estimación del espectro de potencias es

$$I_N(w)=\sum_{m=-(n-1)}^{N-1} C_x(m)\ e^{-iwm} \qquad 3.7$$

que se puede demostrar que es igual a

$$I_n(w)=\frac{1}{N}\ |X(e^{iw})|^2 \qquad 3.8$$

donde

$$X(e^{iw})=\sum_{n=0}^{N-1} x(m)\ e^{-iwn} \qquad 3.9$$

El estimador $I_N(w)$, se denomina periodograma.

Si se evalúa la esperanza de $I_N(w)$, se ve que éste es un estimador sesgado del espectro de potencias $S_x(w)$ (ver Oppenheim y Schafer, 1975; p 542.). Su varianza está dada por

$$Var[I_n(w)] = \sigma \{1 + (\frac{sen(wN)}{N\ sen(w)})^2\}, \qquad 3.10$$

luego, la varianza no tiende a cero cuando N tiende a infinito. Entonces el periodograma no es un estimador consistente del espectro de potencias.

3.2a. El Método de Welch

Para reducir la varianza de los estimadores, es usual promediar sobre diferentes estimaciones independientes. El procedimiento de Welch, 1967, consiste en dividir los registros de datos en K=N/M registros de M muestras cada uno y definir K periodogramas modificados; a cada sector de datos se aplica una ventana v(m).

$$J_M^i(w) = \frac{1}{M\bar{U}} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x^{(i)}(m)v(m)e^{-jwn} \right|^2 \quad i=1,2,..,K \qquad 3.11$$

donde

$$U= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} v^2(n) \qquad 3.12$$

el estimador espectral de Welch es definido como

$$B_x^v(w)= \frac{1}{K} \sum_{i=j}^{K} J_M^{(i)}(w) \qquad 3.13$$

Se demuestra además, que la varianza tiende a cero como 1/K, luego al ser de varianza nula y tambien asintóticamnete insesgado es entonces asintóticamente consistente.

3.2b El estimador espectral de máxima entropía.

Hemos visto en el subparágrafo anterior, que la técnica de Welch involucra el uso de una ventana que se aplica a los datos, y hemos visto que tanto la varianza como el sesgo tienden a cero. Si la serie disponible está limitada en longitud, pueden llegar a surgir problemas si los requerimientos estadísticos para que la varianza sea pequeña no se puedan cumplir.

Además como indica la figura 1.4 en el periodograma de una sinusoide truncada el máximo espectral ocurre en frecuencia cero, cuando la longitud del segmento de datos es menor que 0.58 veces el período de la sinusoide.

El enfoque de máxima entropía consiste en generar un filtro único basado en la información contenida dentro de los datos disponibles, sin hacer suposiciones sobre el comportamiento de los datos fuera del intervalo considerado. El filtro es tal, que aplicado a la serie de entrada, tiene como salida ruido blanco. Al ser entonces, el espectro de salida una constante (en función de la frecuencia), el espectro de los datos de entrada es proporcional a la inversa del espectro del filtro.

La razón de entropía de un proceso gaussiano de banda limitada y media cero es igual a

$$h=\frac{1}{2}\ln(2B)+\frac{1}{4B}\int_{-B}^{B}\ln S(f)\,df \qquad 3.14$$

donde suponemos que la serie x_n está limitada a la banda de fecuencias $-B\leq f\leq B$.

Nuestro problema es encontrar un estimador $S_x(f)$ real y positivo de la densidad espectral $S_x(f)$ que sea estacionario respecto de los valores no conocidos de la autocorrelación y consistente con respecto a los valores conocidos.

Recordemos que el espectro es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación (3.3), luego la razón de entropía,

$$h=\frac{1}{4B}\int_{-B}^{B}\ln\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_x(m)\exp(-iwm\Delta t)\,df. \qquad 3.15$$

Por lo tanto, suponemos que se conocen 2M+1 valores de la función de autocorrelación y además que

$$\frac{\partial h}{\partial R_x(m)}=0, \qquad |m|\geq M+1 \qquad 3.16$$

esta última condición nos lleva a que el estimador $S_x(f)$ sea expresable como la inversa de una serie truncada de Fourier, luego, después de algo de álgebra llegamos a la expresión del estimador como

$$S_x(f)=\frac{P_M}{2B\left|1+\Sigma a_m\exp(-iwm\ t)\right|^2}; \qquad 3.17$$

P_M es la potencia de salida de un filtro de predicción de error de orden M y a_m, con m=0,1,1,...,M son los correspondientes coeficientes del filtro.

Una serie de tiempo siempre puede ser aproximada por un proceso autorregresivo de orden M de la forma

$$x(t)=\Sigma\ a(m)\ x(t-m) + e(t), \qquad 3.18$$

donde e(t) es una serie de ruido blanco. Tomando transformada z de la (3.18),

$$X(z)\{1-a_1 z^{-1}-a_2 z^{-2} -...-a_p z^{-p}\}=\varepsilon(z), \qquad 3.19$$

El estadístico de segundo orden $E(\varepsilon_t \varepsilon_s)=\sigma_\varepsilon{}^2\delta_{ts}$, entonces

$$|X(z)|^2=\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{2B|1+\Sigma\ a_m \exp(-iwm\ t)|^2} \qquad 3.20$$

evaluando la transformada z en el círculo unidad se obtiene la mitad del espectro de potencias y entonces el estimador autorregresivo del espectro de potencias de la serie es

$$S_{AR}(f)=\frac{2\sigma_\varepsilon{}^2}{|1-\Sigma\ a_m \exp(-iwm\ t)|^2} \qquad 3.21$$

lo que muestra la equivalencia entre los estimadores espectrales autorregresivos y de máxima entropía.

3.3 Cálculo de las series sintéticas magnetotelúricas.

El procedimiento que seguimos fué (Moyano y Osella, 1990): considerar una banda de frecuencias de la densidad espectral de potencias del campo geomagnético normalmente medido en latitudes medias; luego ajustar el espectro de un proceso ARMA a ese sector del espectro, tomando precauciones de que el modelo ajustado tenga sus raíces fuera del círculo unidad en el plano complejo, lo cual garantiza que una realización (o sea una serie de datos sintéticos obtenida con los parámetros del modelo anteriormente ajustado) de ese modelo sea estacionario e invertible. A continuación considerar esta serie, trasladar los datos al dominio de las frecuencias, multiplicarlas por la impedancia (compleja) calculada a partir de un modelo de tierra unidimensional y volver finalmente al dominio del tiempo.

Estos traslados entre dominio del tiempo y frecuencia y vice-versa se realizan utilizando la transformada rápidad de Fourier.

Obtenemos de esta manera dos series temporales, que tienen amplitudes y fases espectrales exactamente conocidas.

3.3a Serie Magnética

Hemos considerado la densidad espectral de potencias dadas por Serson (1973), la cual es reproducida en la Figura 1.1. El espectro teórico de un modelo ARMA (Box y Jenkins, 1976) se

ajustó , en el sentido de cuadrados mínimos, a la banda espectral entre .1Hz y .01Hz (una década en la escala logarítmica).

Hemos hecho los cáculos sobre un modelo ARMA(17,3) (orden 17 del polinomio autorregresivo y orden 3 de promedio móvil).Hemos elegido un modelo poco parsimonioso ex-profeso, como para que no hubiera dudas de que no fuera un modelo autorregresivo puro, pues en ése caso su ajuste por máxima entropía sería muy preciso (ver subparágrafo 3.2b). En cambio un modelo ARMA, en teoría (Box y Jenkins, 1976), es equivalente a un modelo AR de orden infinito. Su espectro teórico es

$$P_{ARMA}=\frac{2\sigma^2_a \; |1-\Sigma\theta_i \; \exp(-2\pi i f \; t)|^2}{|1-\Sigma\phi_i \; \exp(-2\pi i f \; t)|^2} \qquad 3.22$$

donde supusimos que la razón de muestreo es t=5 seg, θ_i son los parámetros promedio móvil (MA), ϕ_i los parámetros autorregresivos (AR), σ^2_a la variancia de ruido blanco y f la frecuencia.Requerimos que el modelo fuera estacionario e invertible. Por lo tanto los polinomios fueron expresados en forma factorizada es decir,

$$\theta(z)=\prod_{i=1}^{3} (1-Giz) \quad \text{MA} \quad y \qquad 3.23$$

$$\phi(z)=\prod_{i=1}^{17} (1-G'iz) \quad \text{AR}$$

donde $1/G_i$ y $1/G_i'$ son las raíces de los polinomios MA y AR. A fin de que éstos polinomios tuvieran sus raíces fuera del círculo unidad en el plano complejo, o sea que $|G_i|<1$ y $|G_i'|<1$ hemos seguido un procedimiento utilizado por Fougere, 1977. Se coloca G_i y $G'_i=U \sin(\delta_i)$ donde U es un número complejo con valor absoluto un poco menor que la unidad y δ_i cualquier ángulo real. Luego hemos determinado por ajuste no lineal de cuadrados mínimos los coeficientes G_i y G_i' en el mínimo de la suma de los cuadrados de la diferencia entre el espectro calculado del modelo y el espectro medido del campo magnético terrestre (Fig. 1.4), notémoslos por G_{io} y G_{io}'. A partir de estas inversas de las raíces, los parámetros ϕ_i y Θ_i en la ecuación (3.22) fueron obtenidos a través de la siguiente relación de recurrencia:

$$\phi_i^j = \phi_i^{j-1} - \phi_{i-1}^{j-1} G_{io} \qquad 3.24$$

donde ϕ_i^j es el coeficiente de orden i en el polinomio $\Pi_{i=1}^{j}(1-G_i z)$. Los parámetros del modelo ARMA, que hemos obtenidos de esta manera, son listados en la tabla I. El espectro de este modelo se muestra en la figura 3.1, donde hemos esta vez invertido el sentido del eje del tiempo respecto de la figura 1.4 para conservar la costumbre en MT, este es un espectro de banda ancha, donde sobre un fondo de ruido rojo, o sea que crece con el período, están sobrepuestos anchos picos espectrales, entonces si nosotros consideramos una realización de este modelo, estaremos seguros que la serie sintética obtenida, tendrá el espectro de la figura 3.1.

3.2 Modelo de Tierra. La serie eléctrica.

La impedancia compleja, la resistividad aparente y la fase fueron calculadas como una función del período para un modelo de tierra unidimensional de cuatro capas sobre un semiespacio conductor igual al modelo ya considerado en el sub-parágrafo 2.2.3 y para onda plana incidente verticalmente.

Tabla 3.1 Coeficientes Ar y MA del modelo ARMA(17,3) ajustado al espectro geomagnético

Orden	AR	MA	Orden	AR
1	3.61	2.87	10	.27
2	-5.14	-2.78	11	.05
3	4.26	.91	12	-.09
4	-3.33		13	.00
5	2.27		14	.00
6	-0.35		15	.00
7	-0.43		16	.00
8	0.17		17	.00
9	-0.29			

Una vez que obtuvimos los parámetros ARMA para el espectro magnético, realizamos el siguiente experimento numérico: Primero consideramos una realización de 1024 puntos de tal modelo, luego hemos transformado los datos al dominio de las frecuencias por medio de una transformada rápida de Fourier (fft) y los hemos multiplicado por la impedancia compleja para el modelo terrestre calculado a las frecuencias correspondientes, a continuación, al realizar una transformada rápida de Fourier inversa (ifft), hemos obtenido la serie eléctrica. Al espectro teórico del campo eléctrico lo hemos evaluado aplicando la formula de Cagniard (1.11), usando las resistividades aparentes calculadas para el modelo de tierra citado, obtenemos entoces dos series de tiempo que son mostradas en la figura 3.2, allí vemos como la serie magnética es mas "roja" que la serie eléctrica.

Figura 3.1. Espectro teórico del modelo ARMA, que fué ajustado al espectro promedio del campo geomagnético de la figura 1.4, entre 10 y 100 segundos. Obsérvese los anchos picos espectrales y la tendencia general del espectro a subir hacia frecuencias bajas (altos períodos).

Figura 3.2. Sector de la series sintéticas generadas con el modelo ARMA citado en el texto para la serie magnética (parte inferior de la figura) y mediante convolución de esta serie con la impedancia del medio para la serie eléctrica (parte superior). Nótese que la serie eléctrica tiene componentes de altas frecuencias más grandes que la serie magnética.

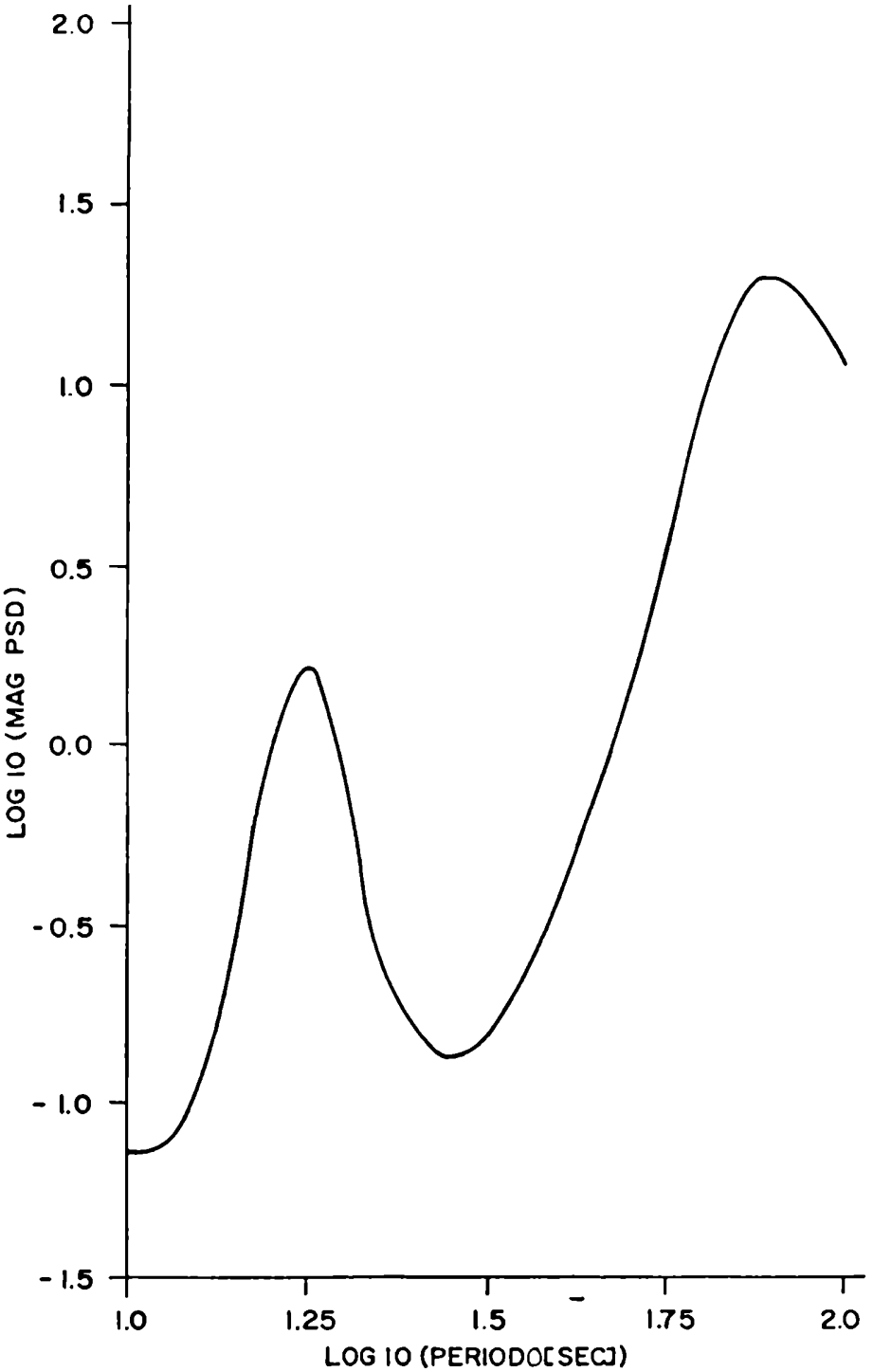
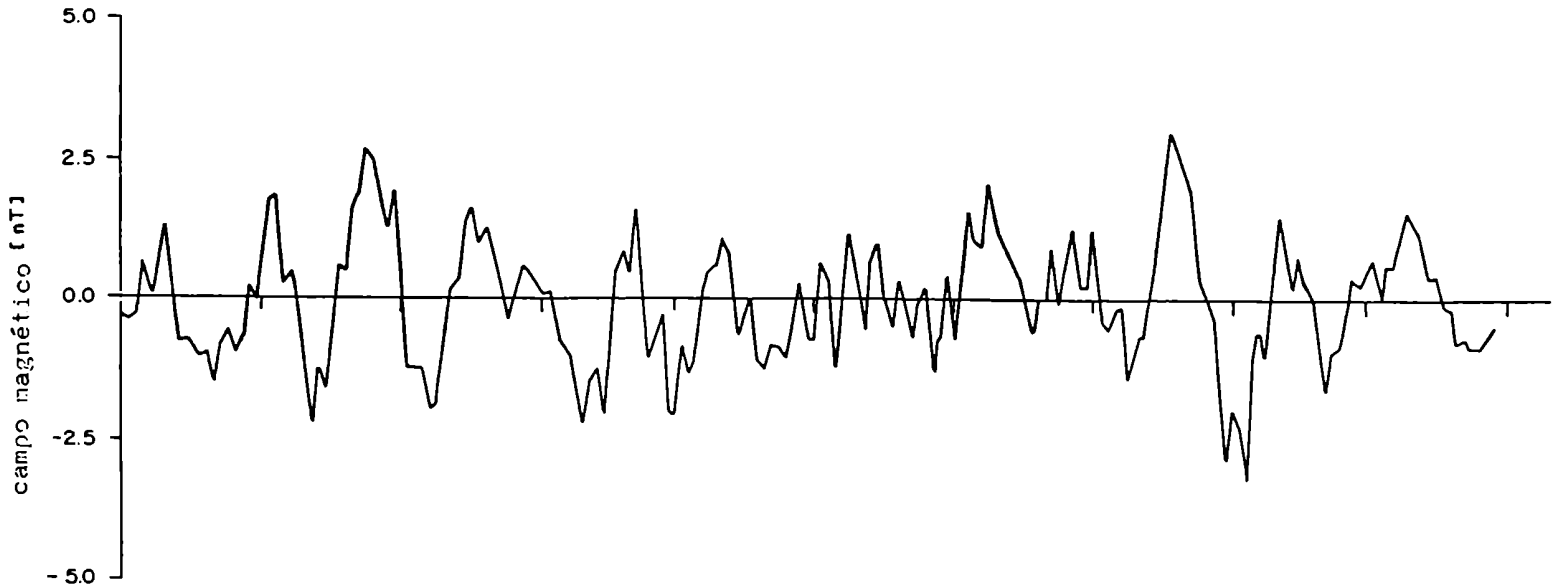

2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
LOG 10 (MAG PSD)
1.0
1.25
1.5
1.75
2.0
LOG 10 (PERIODO[SEC])

Figura 3.1

campo eléctrico [mv/Km]
20.
10.
0.
-10.
-20.


campo magnético [nT]
5.0
2.5
0.0
-2.5
-5.0

3.3 Análisis espectral de las series sintéticas.

Las series simuladas fueron analizadas espectralmente usando la técnica de Burg (código de Ulrich y Bishop, 1975) y por el método de Welch (subrutina FTFPS del paquete de subrutinas científicas IMSL). Hemos considerado 100 registros de N=64 valores cada uno. Para cada serie (corta), la longitud del filtro de predicción de error (PEF) fue elegido de tal manera de satisfacer el criterio de Akaike de error de predicción final (FPE) (Akaike,1969). Este criterio consiste en elegir como orden del polinomio autorregresivo ajustado a los datos, el que tiene mínima potencia de error (suma de los cuadrados de los errores). Si la longitud dada por el criterio anterior era mayor que N/3 (N=numero de datos de la serie total), hemos tomado como longitud del PEF el primer mínimo de la curva FPE vs orden del filtro de predicción de error. Esto evitaba la falta de suavidad que presenta el espectro cuando se utilizan PEF mas largos. Los espectros promedio se muestran en la figura 3.3 para la componente magnética y en la figura 3.4 para la componente eléctrica. El espectro teórico, también mostrado en figuras 3.3 y 3.4 son los espectros reales de las series, esto es, del modelo ARMA en el caso de la serie magnética y como se discutió en el parágrafo anterior para la serie de campo eléctrico. Es evidente de las figuras 3.3 y 3.4 que las estimaciones por MEM son mucho mejor al estimar el nivel y la ubicación de los anchos picos presentes en el espectro, mostrando sin embargo un ligero corrimiento en

espectro, mostrando sin embargo un ligero corrimiento en frecuencias, es decir sesgo en la estimación de frecuencias.

Las resistividades aparentes calculadas por MEM y por la técnica de Welch se muestran en la figura 3.5 junto con la curva teórica.

Las oscilaciones en las resistividades cerca del máximo de los espectros son producidos por la diferente ubicación de los picos espectrales en los espectros magnéticos y eléctricos, un hecho que viene de la estimación de los espectros; uno debe notar que los picos están en el mismo lugar en los procesos eléctricos y magnéticos.

La técnica de Burg (Chen y Stegen,1974), es muy sensible a la fase inicial de una sinusoide cuando se analizan segmentos muy cortos de un proceso armónico, presentando el apartamiento máximo del valor verdadero de la línea espectral cuando la fase inicial es alrededor de 45 grados. Si (por ejemplo) una línea espectral es estimada exactamente en la componente magnética luego uno debería esperar que la misma línea en la componente eléctrica estuviera falsamente estimada por que un proceso esta retrasado con respecto al otro por aproximadamente 45 grados. La técnica de Welch no estima la posición de las líneas espectrales muy bien pero el sesgo es en la misma dirección para ambas componentes, resultando entonces en una mejor aproximación a la resistividad aparente verdadera.

Figura 3.3. Espectro de potencias de la serie magnética (línea llena), Estimador de máxima entropía (linea de trazos) y estimador de Welch (línea de trazos y puntos.

Figura 3.4. Espectro de potencias de la serie eléctrica (línea llena), estimador de máxima entropía (línea de trazos y estimador de Welch (línea de trazos y puntos).

Figura 3.5. Resistividad aparente teórica y las estimaciones hechas por máxima entropía (línea de trazos) y por la técnica de Welch (línea de trazos y puntos).

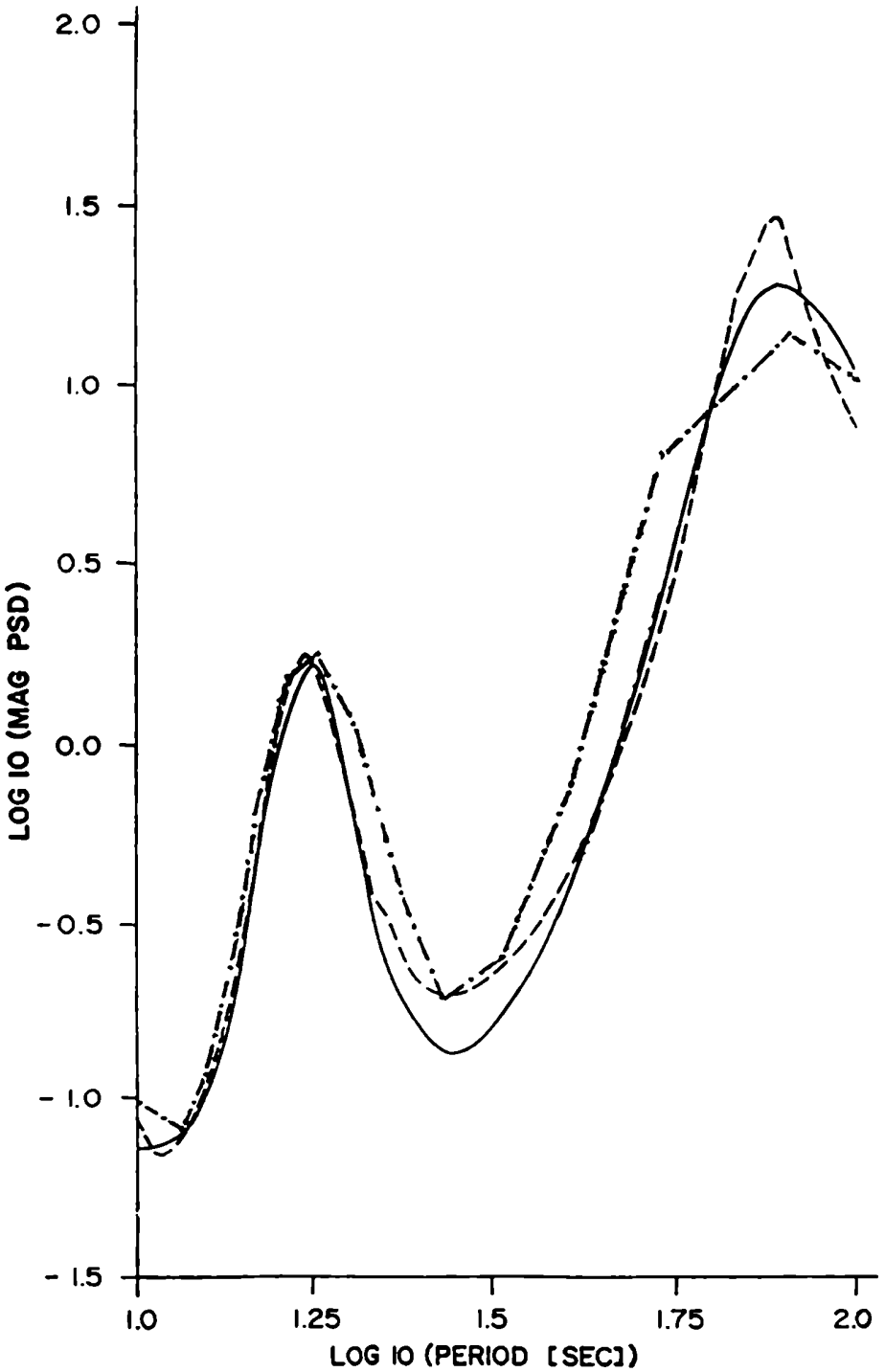

2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
- 1.0
- 1.5
LOG 10 (MAG PSD)
1.0
1.25
1.5
1.75
2.0
LOG 10 (PERIOD [SEC])

Figura 3.3

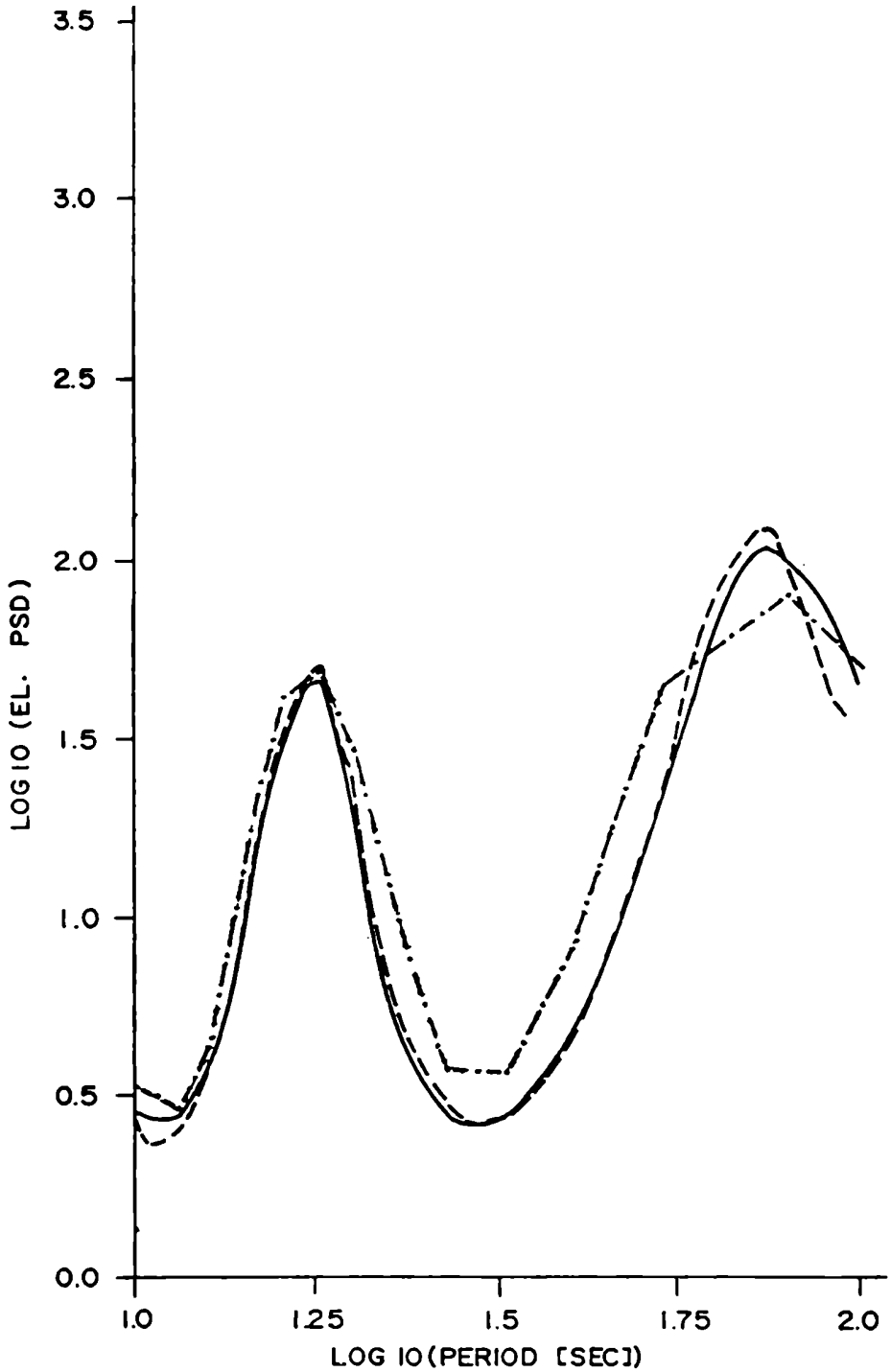

3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
LOG 10 (EL. PSD)
1.0
1.25
1.5
1.75
2.0
LOG 10(PERIOD [SEC])

Figura 3.4

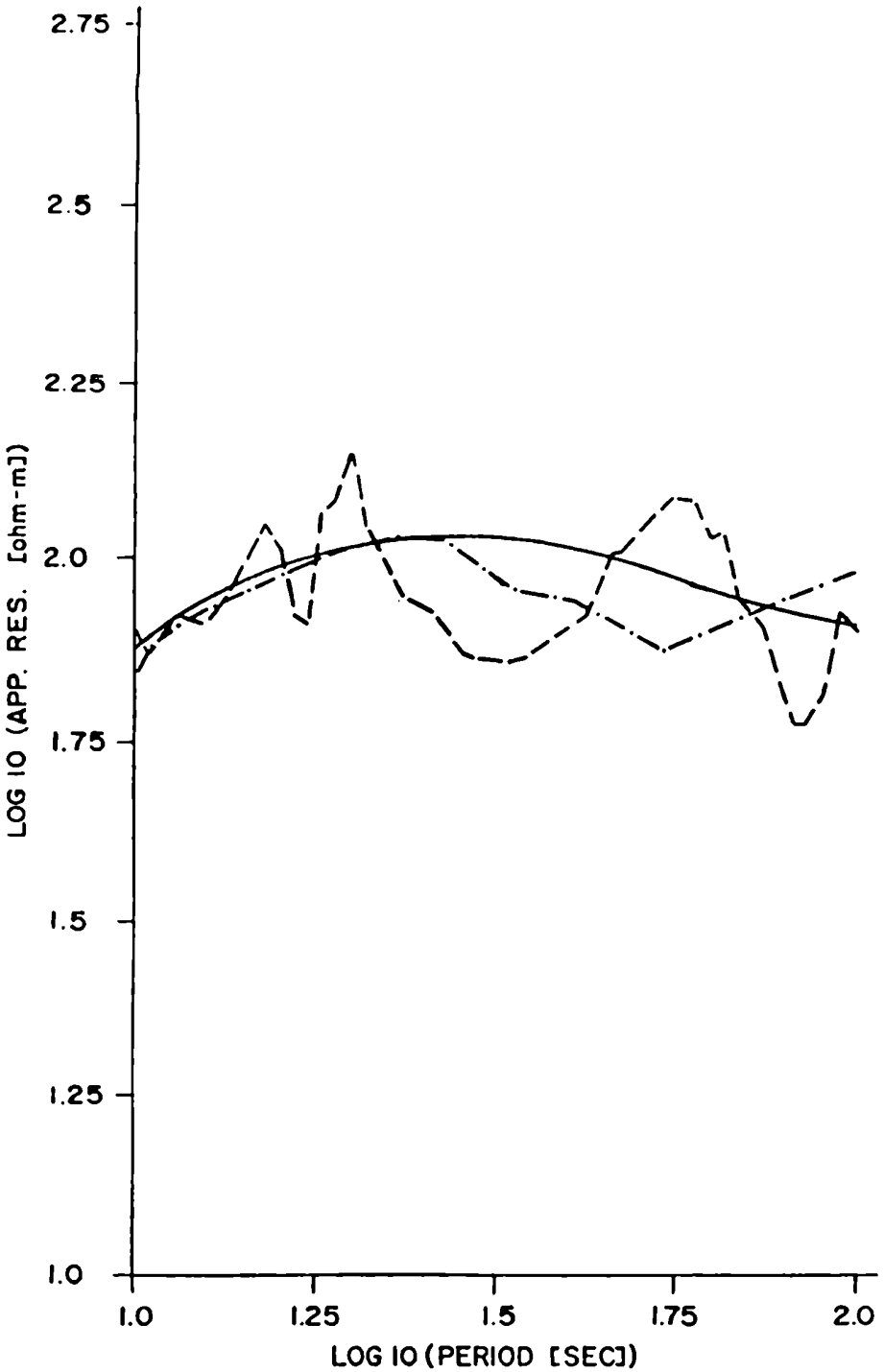

2.75
2.5
2.25
2.0
1.75
1.5
1.25
1.0
LOG 10 (APP. RES. [ohm-m])
1.0
1.25
1.5
1.75
2.0
LOG 10 (PERIOD [SEC])

Figura 3.5

3.4. Aplicación a mediciones.

Los métodos descritos en la sección precedente fueron aplicados por nosotros a series de datos MT tomados en Mendoza, Argentina (68°28' O, 33°04' S). Las variaciones de campo magnético fueron medidas usando una bobina de inducción de núcleo de alta permeabilidad en el sentido de la dirección Y (hacia el este) y el campo eléctrico según la dirección X (hacia el norte) usando electrodos de plomo. Las bobinas de inducción fueron calibradas en frecuencia, es decir se determinó su curva de respuesta en frecuencia según un procedimiento que se explica en el apéndice 1. Es conocido que para poder digitalizar una señal ésta debe ser de banda limitada y que la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble que la frecuencia máxima presente en la señal; a fin de cumplir con este requisito, las señales sufrieron un condicionamiento al ser filtradas con un filtro pasa-bajo analógico con frecuencia de corte a -3dB en 1/20 Hz (esto es el punto en que la señal se reduce a 0.67 de su valor en la parte plana del filtro); el filtro atenuaba 24 dB por octava y los datos fueron digitalizados con precisión de 12 bits, es decir una parte en 4096, cada 5 segundos.

Los datos se pueden dividir claramente en secciones de baja actividad y de alta actividad como se puede apreciar en la figura 3.6. Las curvas de resistividad aparentes obtenidas (figuras 3.7 y 3.8) muestran los dos casos, uno con alto y otro con baja energía en su espectro respectivamente. Aunque el nivel general de la resistividad aparente se mantiene, el caso de alta energía

presenta oscilaciones en los períodos en que aparecen las líneas espectrales. Debido al hecho de que los campos eléctricos y magnéticos tienen el mismo contenido espectral, concluímos que estas oscilaciones son debidas al sesgo en frecuencias inherente al método de máxima entropía, versión de Burg.

No nos ha sido posible implementar algún algoritmo que produzca un estimador insesgado (Ning y Nikias, 1986).

Podemos concluír que el método de la entropía máxima está adaptado para el tipo de señales que se observan en magnetotelúrica, siempre y cuando no aparezcan líneas en el espectro. Por lo tanto conviene usar el espectro de zonas quietas.

Figura 3.6. Campo eléctrico y magnético provenientes de una medición real que tuvo lugar en la finca de Titarelli, Mendoza, y que muestra una situación bastante común, donde observamos un sector baja agitación, luego uno de alta agitación con un paulatino retorno a baja agitación.

Figura 3.7. Análisis de un sector de baja agitación. a) Espectro de potencias de la señal eléctrica (curva sólida), y de la señal magnética (curva de trazos). b) Resistividad aparente.

Figura 3.8. Análisis de un sector de baja agitación. a) Espectro de potencias de la señal eléctrica (curva sólida), y de la señal magnética (curva de trazos). b) Resistividad aparente.

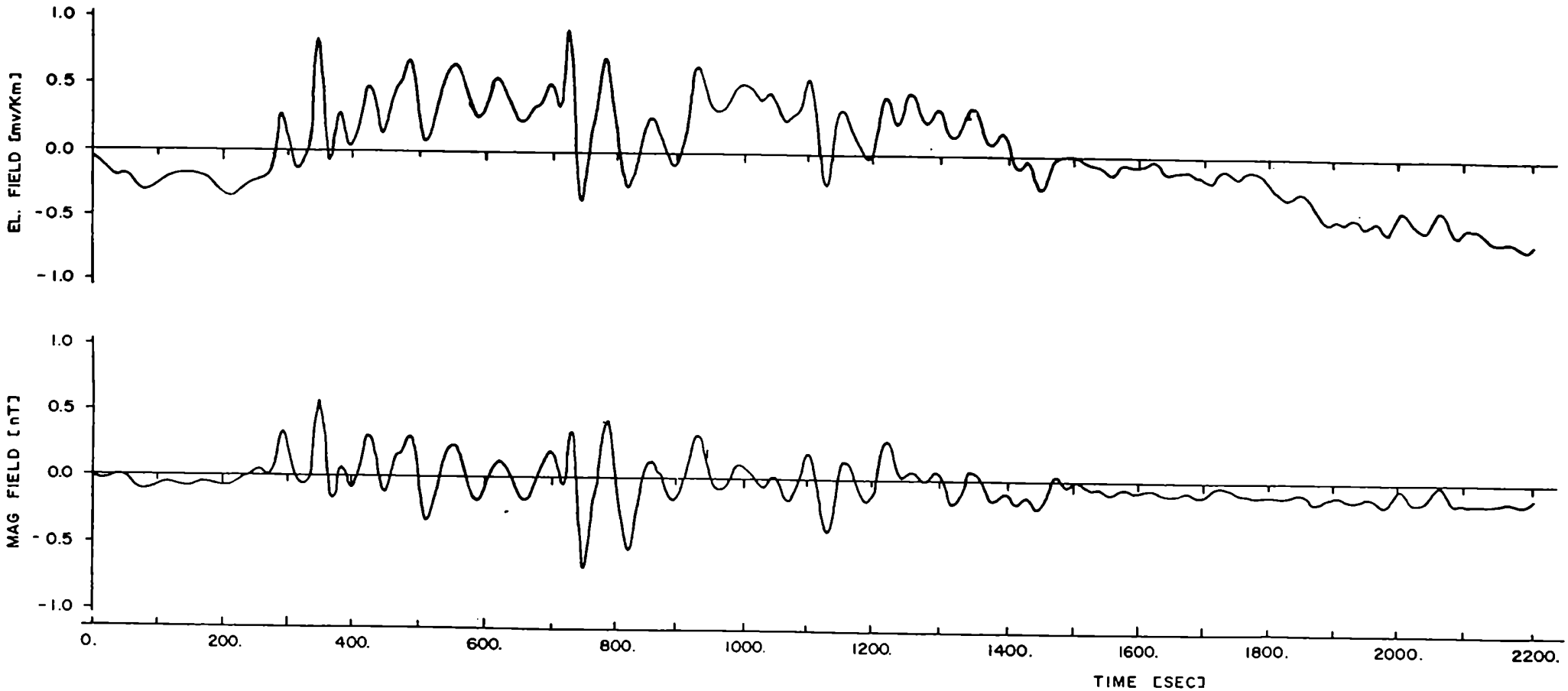

1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
EL. FIELD [mv/Km]
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
MAG FIELD [nT]
0.
200.
400.
600.
800.
1000.
1200.
1400.
1600.
1800.
2000.
2200.
TIME [SEC]

Figura 3.6

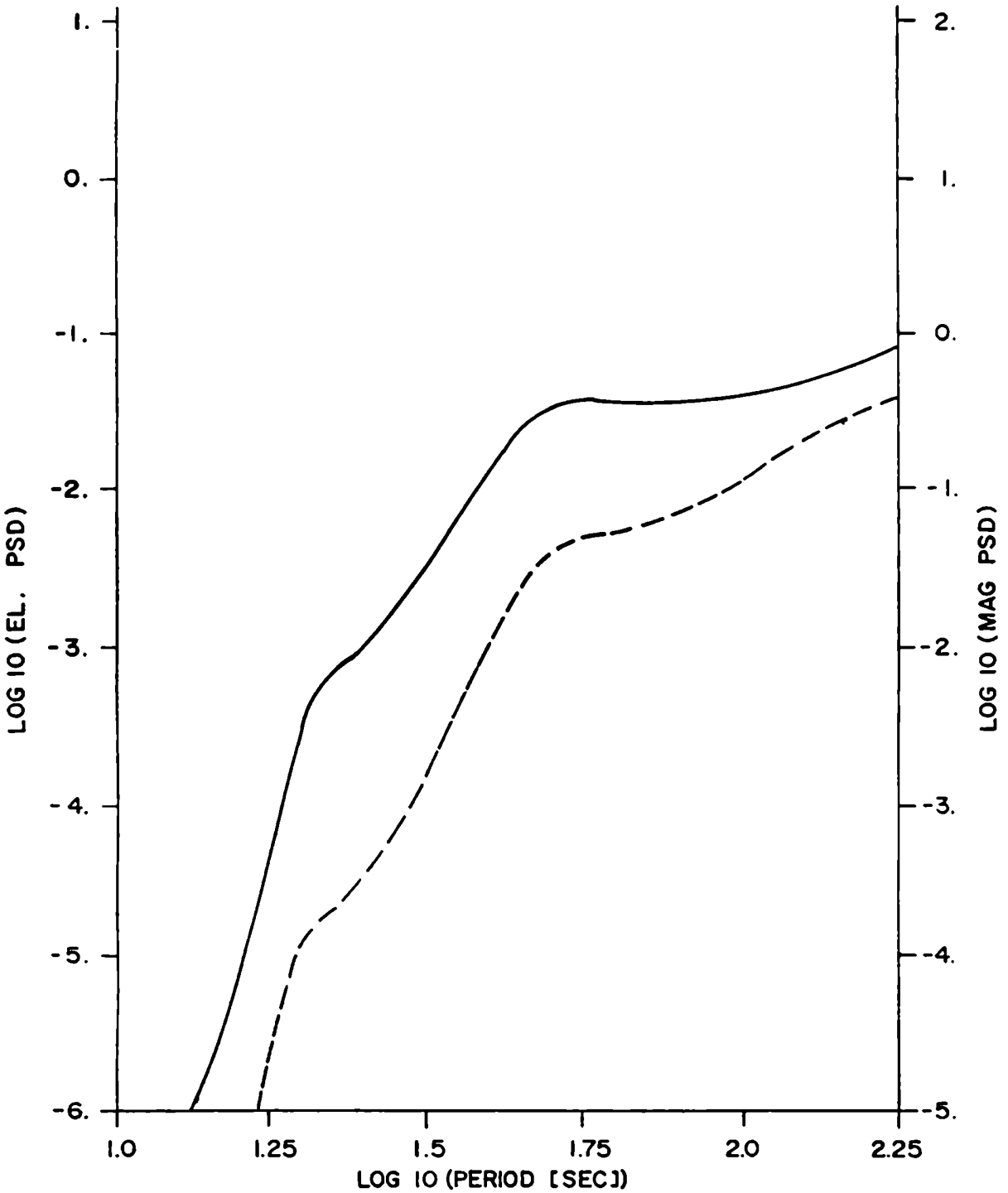

1.
0.
-1.
-2.
-3.
-4.
-5.
-6.
LOG 10 (EL. PSD)
2.
1.
0.
-1.
-2.
-3.
-4.
-5.
LOG 10 (MAG PSD)
1.0
1.25
1.5
1.75
2.0
2.25
LOG 10 (PERIOD [SEC])

Figura 3.7a

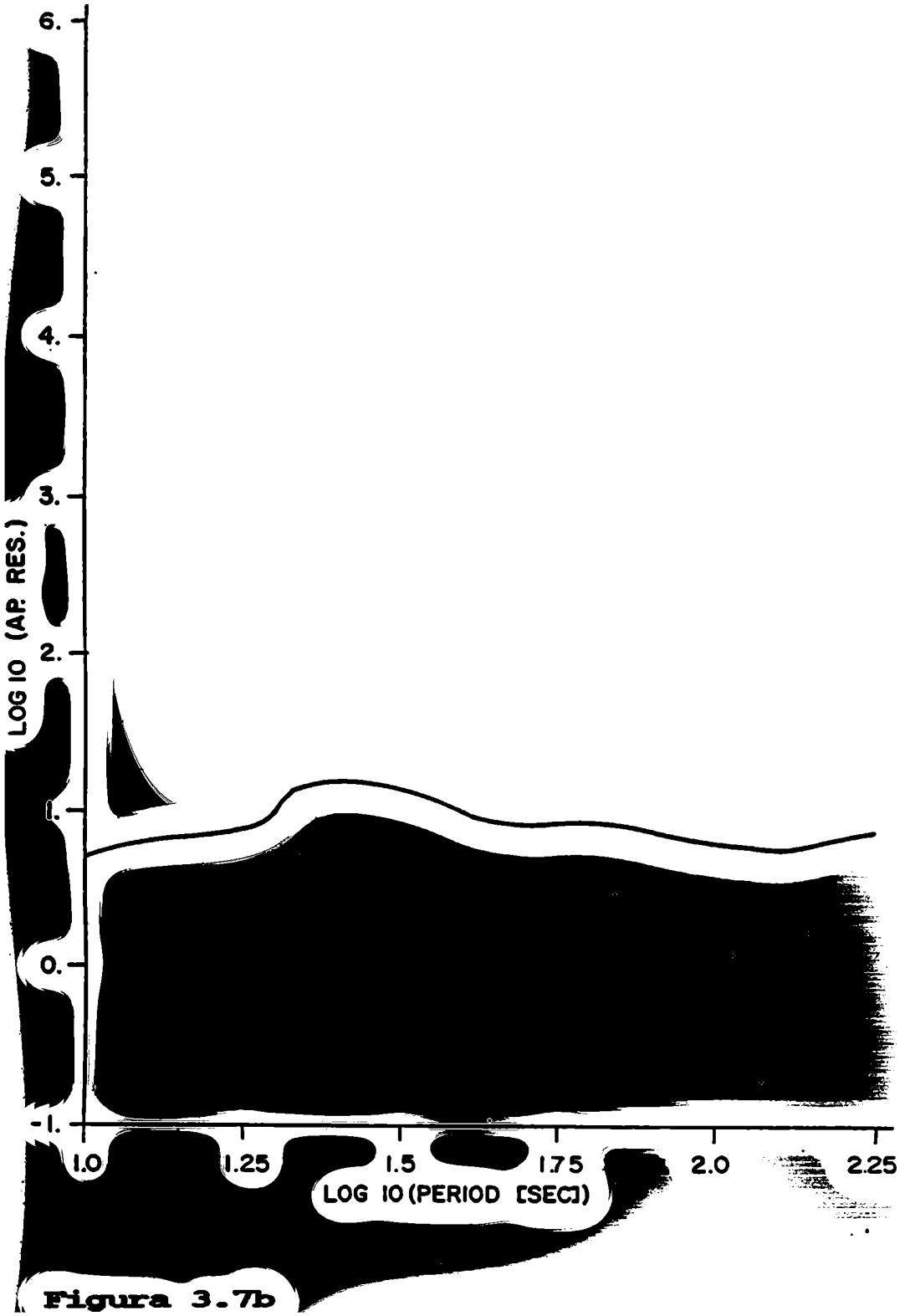


Figura 3.7b

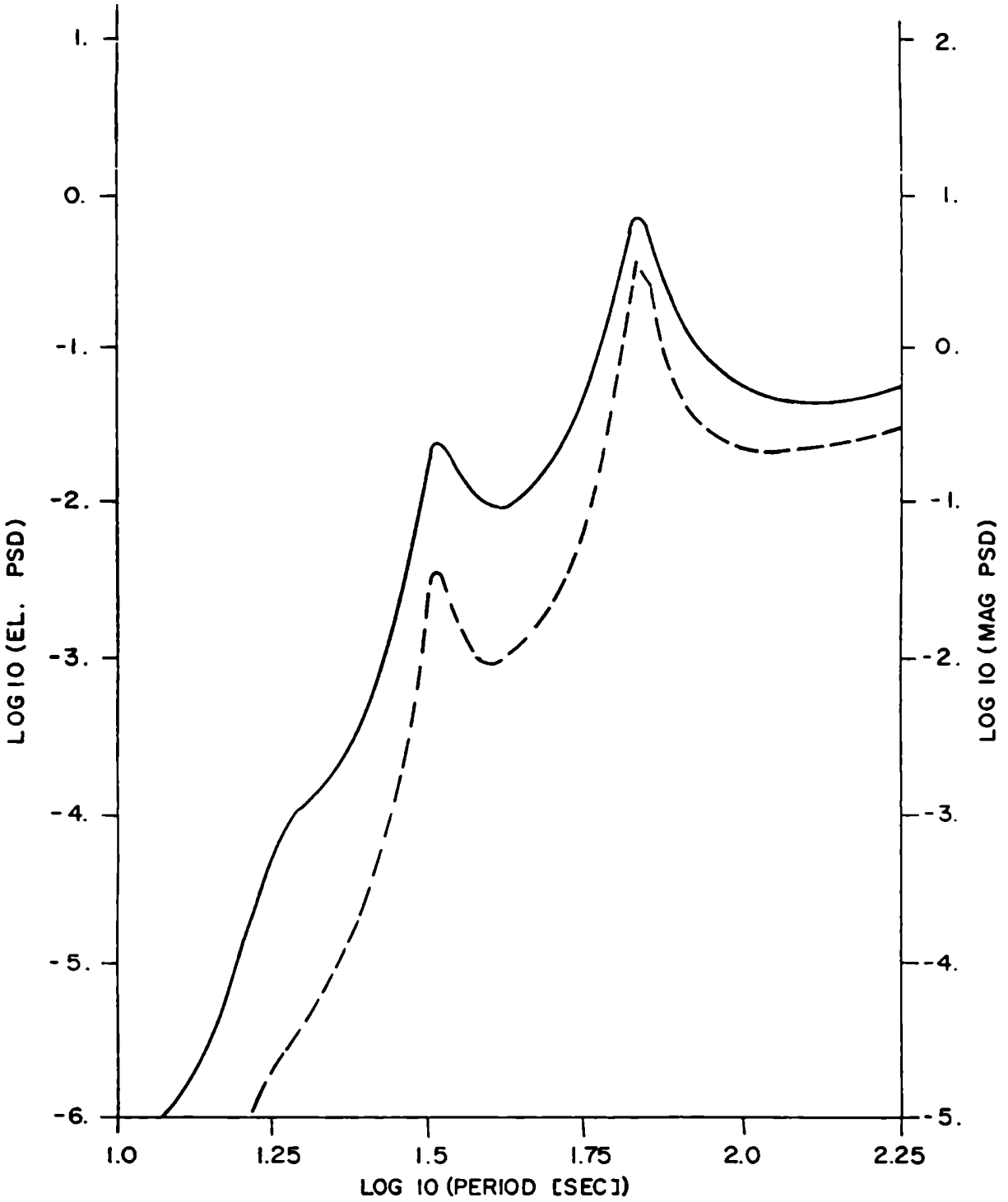

1.
0.
-1.
-2.
-3.
-4.
-5.
-6.
2.
1.
0.
-1.
-2.
-3.
-4.
-5.
LOG 10 (EL. PSD)
LOG 10 (MAG PSD)
1.0
1.25
1.5
1.75
2.0
2.25
LOG 10 (PERIOD [SEC])

Figura 3.8a

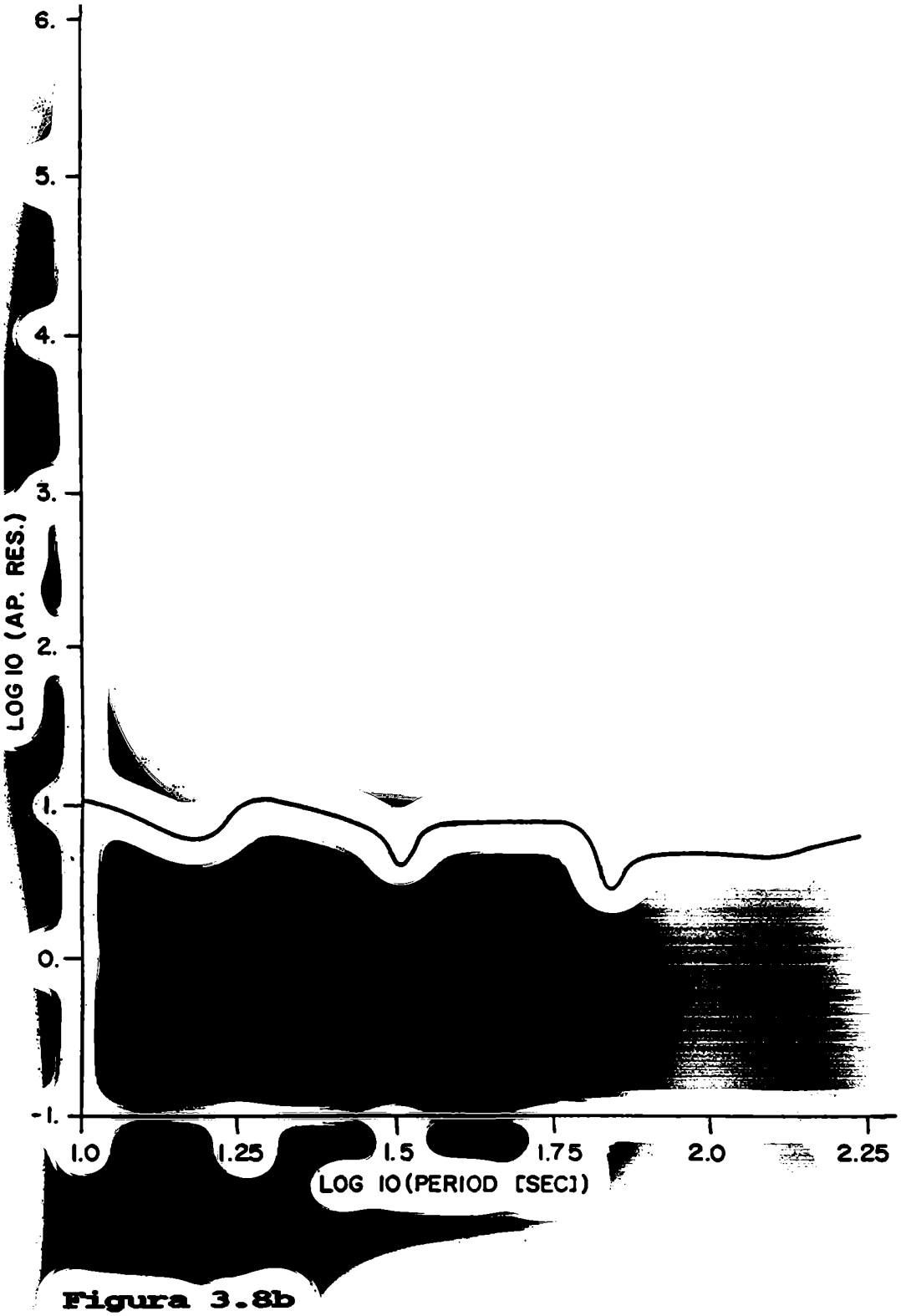


Figura 3.8b

Capítulo 4

Conclusiones.

El método magnetotelúrico esta finalizando su cuarta década desde su formalización como método de prospección por Cagniard,1953. Sin embargo hay cuestiones que no están aún resueltas, ni siquiera en el problema uni-dimensional. Una de estas cuestiones es la existencia de la conductosfera y otra es que no hay acuerdo aún sobre que métodos de análisis espectral deben ser usados para el tratamiento de los datos magnetotelúricos.

Hemos encontrado que en principio la influencia de esta capa conductora es marcada a partir de entre 10^2 y 10^3 segundos para el modelo de cinco capas considerado.

Notamos que los equipos modernos de MT y las nuevas técnicas de análisis, permiten determinar la resistividad aparente y la fase con menor error. Por lo tanto hemos aportado unos nomogramas que permiten determinar el período en el cual va a comenzar a influír la conductosfera en el problema directo cuando estamos estimando la resistividad aparente con un determinado error.

Sin embargo encontramos al tratar el problema inverso que la influencia de la conductosfera, que en principio está constreñida a valores de períodos grandes, se extiende por efectos numéricos a las capas superiores. Demostramos que el conocimiento de la profundidad de la conductosfera en la zona de estudio es necesario para una correcta interpretación de los

sondeos magnetotelúricos aún cuando estos sean superficiales, es decir hasta 10^3 segundos. Por lo tanto es recomendable realizar un estudio MT de largos períodos en la zona para realizar tareas de prospección.

Hemos utilizado el ábaco de Fournier, 1965, para, dado un conjunto de datos, sintéticos, estimar los parámetros iniciales de los modelos uni-dimensionales, antes de comenzar la inversión.

Luego hemos establecido la equivalencia entre el efecto que tiene en MT considerar tamaño de la fuente finita en un semiespacio de resistividad constante y considerar una estructura tabular de dos capas (capa superficial y conductosfera) y fuente infinita.

Luego hemos pasado a considerar el tema del análisis espectral en MT. Para ello realizamos un experimento numérico consistente en simular las series temporales que se obtendrían en la superficie de una tierra de cinco capas con el modelo utilizado anteriormente. Este es el aporte esencial del capítulo tres, pues permite calibrar los métodos de análisis de datos en MT. Su extensión posterior a situaciones bi-dimensional es trivial, pues basta considerar las impedancias tensoriales. Con estos "seudo-datos", hemos comparado los métodos de análisis espectral de Welch y el de máxima entropía, encontrando que MEM ajustaba mejor a las curvas individuales de cada espectro y que el método de Welch lo hacía mejor para la relación de los dos espectros (resistividad aparente).

A continuación, tema que fué considerado en el apéndice 1 hemos calibrado el instrumental en frecuencias introduciendo una

señal de ruido cuasi-blanco y relacionando la entrada con la salida se estimó la función de transferencia.

Luego, al analizar series de datos provenientes de mediciones, en las cuales era ostensible las variaciones de potencia de las señales, el análisis sólo pudo ser realizado con MEM.

El trabajo que se plantea para el futuro es extender el análisis de Moyano y Osella, 1990 a procesos multivariados y considerar la conductosfera en todo tipo de modelado, directo o inverso, sea este uni-dimensional, bi-dimensional o tri-dimensional.

Apéndice 1

Estimación de la función de transferencia de una bobina de inducción.

A.1. Introducción

Las señales que se miden en magnetotelúrica, tanto las variaciones de campo geomagnético como las de las campos eléctricos asociados a estas variaciones, cubren como dijimos anteriormente un amplio rango de períodos.

En particular, hemos considerado el rango 10^{-1}-10^{3} seg, dado que es muy usual en MT.

Este rango de frecuencias, en cuanto a lo que concierne a instrumentación, se ubica entre frecuencias de audio y corriente continua. En general es un rango espectral en el cual es difícil encontrar generadores, condicionadores de señal, etc.

Para determinar la respuesta en frecuencia de los instrumentos de medición en este rango, se utilizan normalmente generadores de ondas sinusoidales monocromáticas (Kanesewich, 1975, p 72). Este procedimiento es normalmente largo y tedioso y se requiere de un generador de ondas sinusoidales que al menos produzca una señal de 0.001Hz (una onda cada mil segundos).

Ahora bien, las señales que se registran son el resultado final de una cadena que normalmente incluye amplificadores y filtros, cada uno de ellos con su particular respuesta en frecuencia.

Esto lleva a que en muchos casos una particular disposición experimental, típicamente un amplificador con filtros notch y filtros pasabajos, que conforman la señal que se registra, no sea calibrada en fase y que la amplitud sólo se conozca en algunos puntos del espectro, haciéndose luego una interpolación (Fischer, 1980).

A pesar de que la fase está relacionada con la resistividad aparente a través de una transformación integral (Fischer; 1980), se necesita conocer la resistividad aparente en todo el rango espectral, lo cual normalmente no está disponible en una medición, puesto que está se realiza en una banda de frecuencias.

Presentamos entonces en este apéndice un método que es el de introducir en un equipo a calibrar una señal de ruido blanco y medir la salida (Moyano, 1990). Vamos a realizar unas variantes, considerando que estamos trabajando con frecuencias bajas.

En resumen una señal de banda limitada y espectro cuasi-blanco es inyectada a los instrumentos y la respuesta es medida. Estas señales (entrada y salida) son posteriormente digitalizadas y se obtiene un modelo paramétrico autorregresivo de la función de transferencia (amplitud y fase). Presentamos en este apéndice la obtención de la función de tranferencia de un filtro digital. Luego la comparación entre los resultados obtenidos por esta metodología y las curvas suministradas por el fabricante para el caso de un filtro anlógico comercial. Luego obtendremos la respuesta en frecuencias de un variómetro de inducción.

Esta técnica permite estimar simultáneamente la respuesta en un rango de frecuencias que abarcan dos décadas en escala logarítmica.

A.2. Estimación de la función de transferencia de un filtro digital.

En el procesamiento digital de señales, es común realizar un promedio móvil sobre los datos, para utilizar menos muestras que las que se adquirieron en una experiencia; esto cambia el espectro de las señales y es importante tener en cuenta este cambio. Hemos tratado en esta sección de estimar la respuesta de un filtro digital mediante el siguiente experimento numérico:

Se generan 1024 datos de entrada al filtro, distribuídos normalmente, mediante un generador de números seudoaleatorios incluído en un sistema producto de uso corriente (MATLAB), con varianza $\sigma=1.0061$ y media $x=-0.0037$.

Estos datos son filtrados con una "Box-Car" de ancho n, que consiste simplemente en efectuar un promedio móvil sobre n valores. Supongamos que la serie generada es $\{x_i\}$, la serie filtrada es:

$$y_i = 1/n \sum_{j=1}^{n} x_{j+i} \qquad i=n/2+1,\ldots,M-n/2 \qquad \text{A.1}$$

donde M es la cantidad de elementos de x_j. Esto es lo mismo que hacer la convolución de la serie $\{x\}$ con la serie $\{B\}=1,1,\ldots,1$ (Box-car de n valores). El espectro de la serie $\{y\}$ será el producto del espectro de la serie $\{x\}=cte(f)$ por el espectro de $\{B\}$

$$S_B(f)= \left| \frac{sen(wn)}{n\ sen(w)} \right|^2 \qquad \text{A.2}$$

con $w=2\pi f$. La raíz de la relación de los espectros será el módulo de la función de transferencia del sistema.

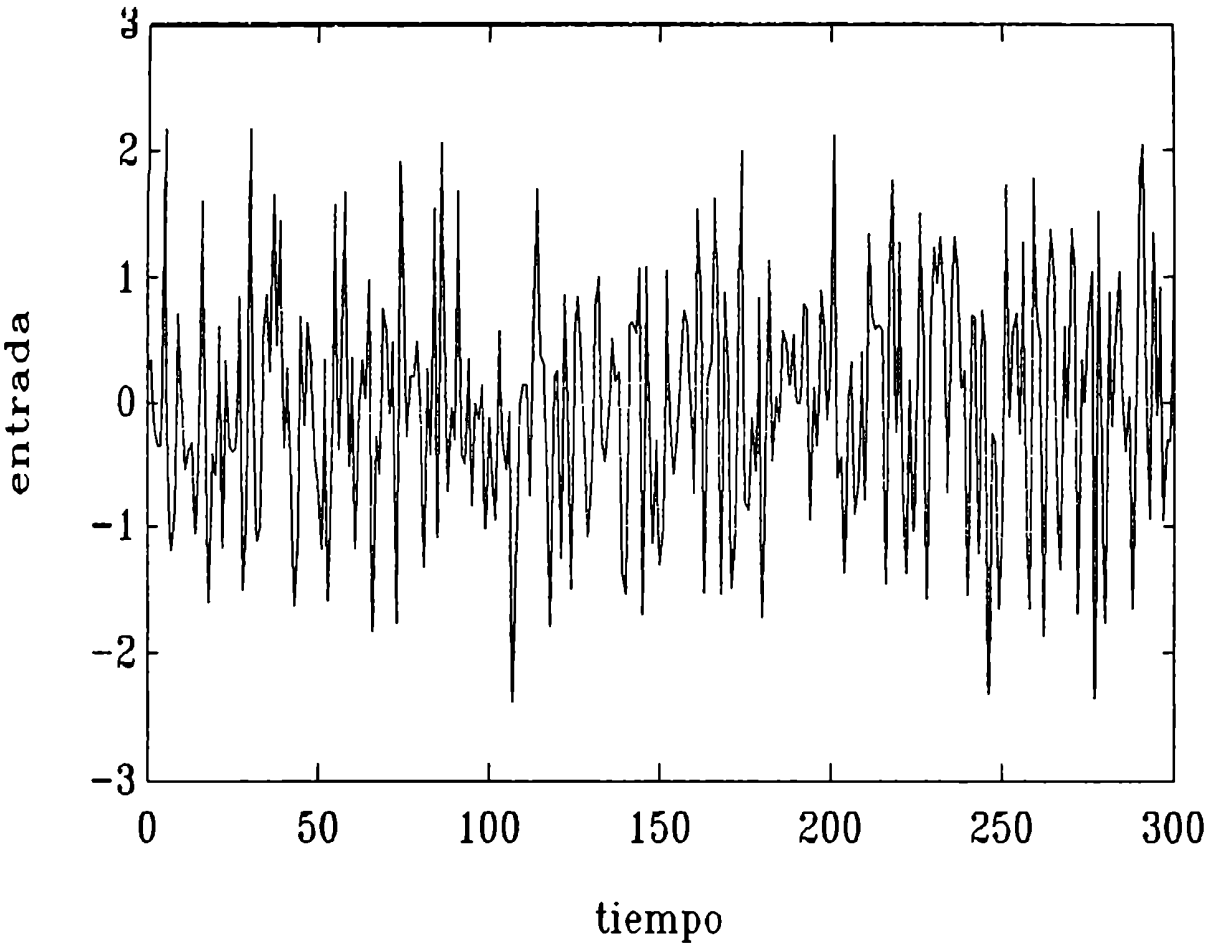
En la figura A.1 se muestra un detalle de la serie de entrada al sistema y la serie filtrada.

En la figura A.2 observamos la respuesta teórica junto con la estimación espectral de Welch, que como ya habíamos visto que funciona bien para series largas. Como vemos, la coincidencia es muy buena.

Podemos concluír que la técnica en cuanto a la estimación de la función de transferencia del sistemas digitales funciona bien. En la siguiente sección veremos su aplicación en el caso de sistemas analógicos.

Figura A.1. Segmento de una realización de una serie de ruido blanco con distribución normal de varianza $\sigma=1$ y media cero (curva superior) y segmento de la serie luego de ser filtrada con una ventana Box-car de ancho diez unidades de tiempo (curva inferior).

Figura A.2. Respuesta en frecuencia de la Box-car teórica (línea sólida), y la calculada mediante el analizador espectral de Welch (línea de puntos).


3
2
1
0
-1
-2
-3
entrada
0
50
100
150
200
250
300
tiempo

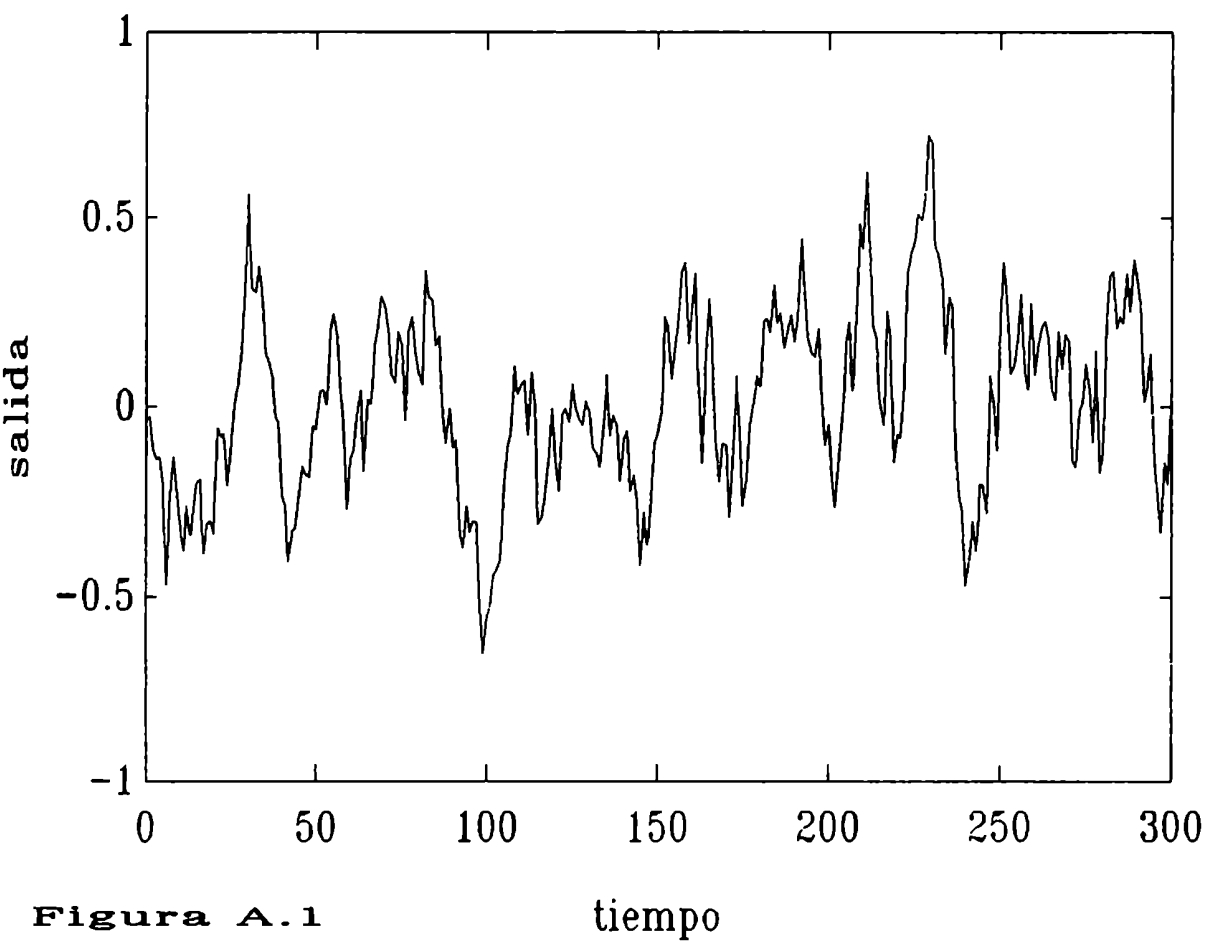

1
0.5
0
-0.5
-1
salida
0
50
100
150
200
250
300
tiempo

Figura A.1

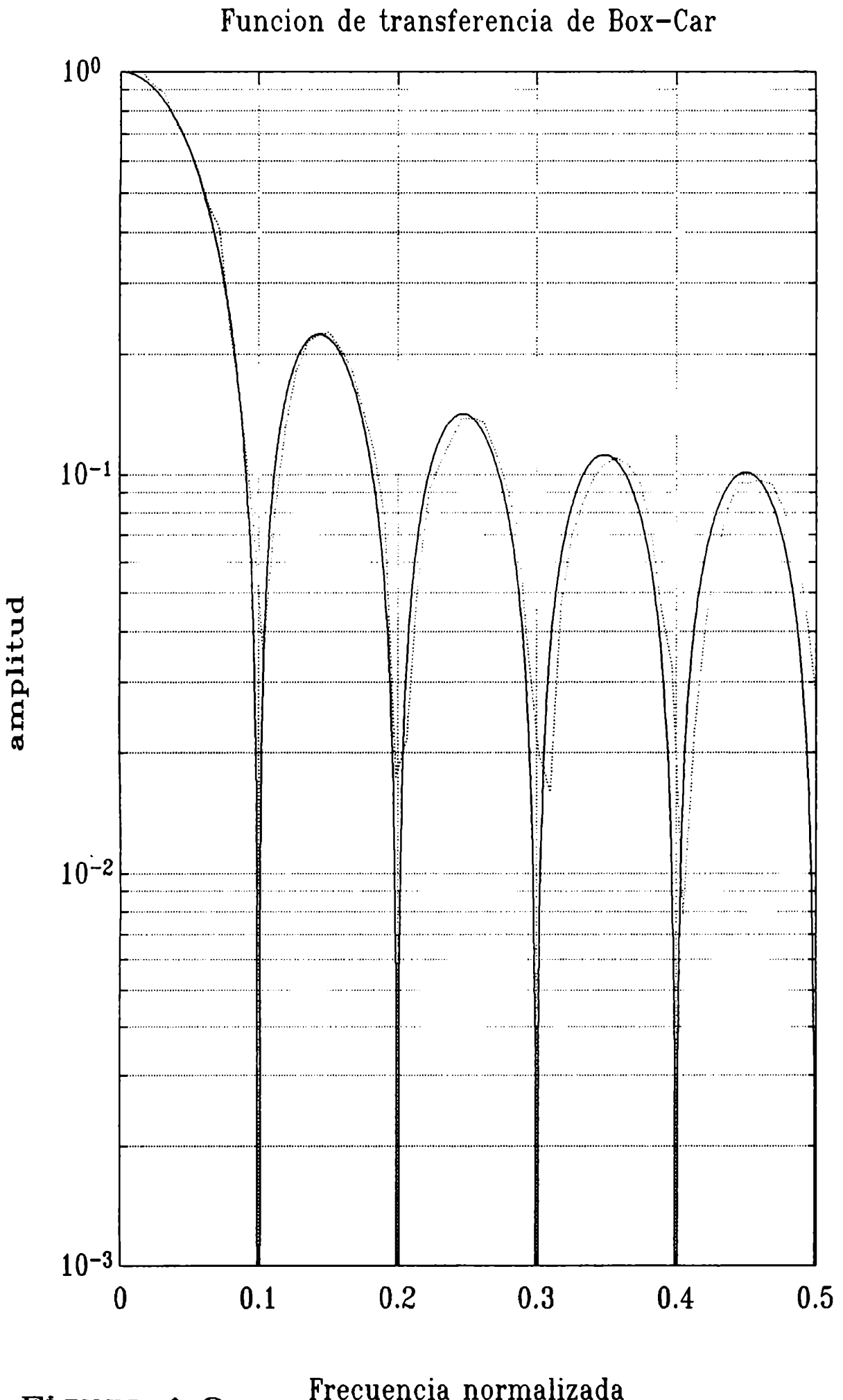

Funcion de transferencia de Box-Car
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
amplitud
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Frecuencia normalizada

Figura A.2

A.3 Aplicación a sistemas analógicos en grandes períodos.

En realidad el hecho de inyectar como señal de entrada un proceso de ruido blanco a fin de estimar la función de transferencia de un sistema, se ha utilizado en frecuencias de radio y la hemos visto señalada en Box y Jenkins, 1976, pp 379, por lo cual no se hace aquí ningún reclamo de originalidad respecto a la idea. De hecho en la actualidad hay analizadores de espectros comerciales que utilizan un procedimiento similar, ver por ejemplo especificaciones del HP 3582, (Hewlett Packard, 1990) aunque lamentablemente no llega en sus prestaciones al rango de frecuencias de interés nuestro.

El hecho de no poseer un aparato de estas características ni aún uno mucho mas caro y mas moderno, como por ejemplo el HP 3565 (Hewlett Packard, 1990) nos ha llevado a construir una disposición experimental, que por medio de una computadora personal tipo PC y una plaqueta conversora análogo-digital, digital-analógica, cumpliese el mismo objetivo a un costo mucho menor. En la sección A.3a describimos el experimento realizado y en la A.3b determinaremos la curva de repuesta en frecuencias de los instrumentos.

A.3a <u>El experimento:</u>

La serie x(n), realización de un modelo de ruido blanco con distribución normal y media cero, es transformada en señal analógica mediante un conversor D/A (ver figura A.3). Como es de interés para una posterior digitalización que esta señal sea de banda limitada la misma es filtrada mediante un filtro analógico pasabajos, para luego ser inyectada al sistema analógico a analizar. La posterior digitalización de la entrada y salida de este sistema resulta en dos series temporales y(n) e yy(n) que serán analizadas con ayuda de un estimador autoregresivo que estima los coeficientes de los polinomios, A y B, del modelo

$$A(q).yy(n)= B(q).y(n) + e(n)$$

por cuadrados mínimos, donde q^(-1) es el operador de retardo y e(n) es ruido blanco.

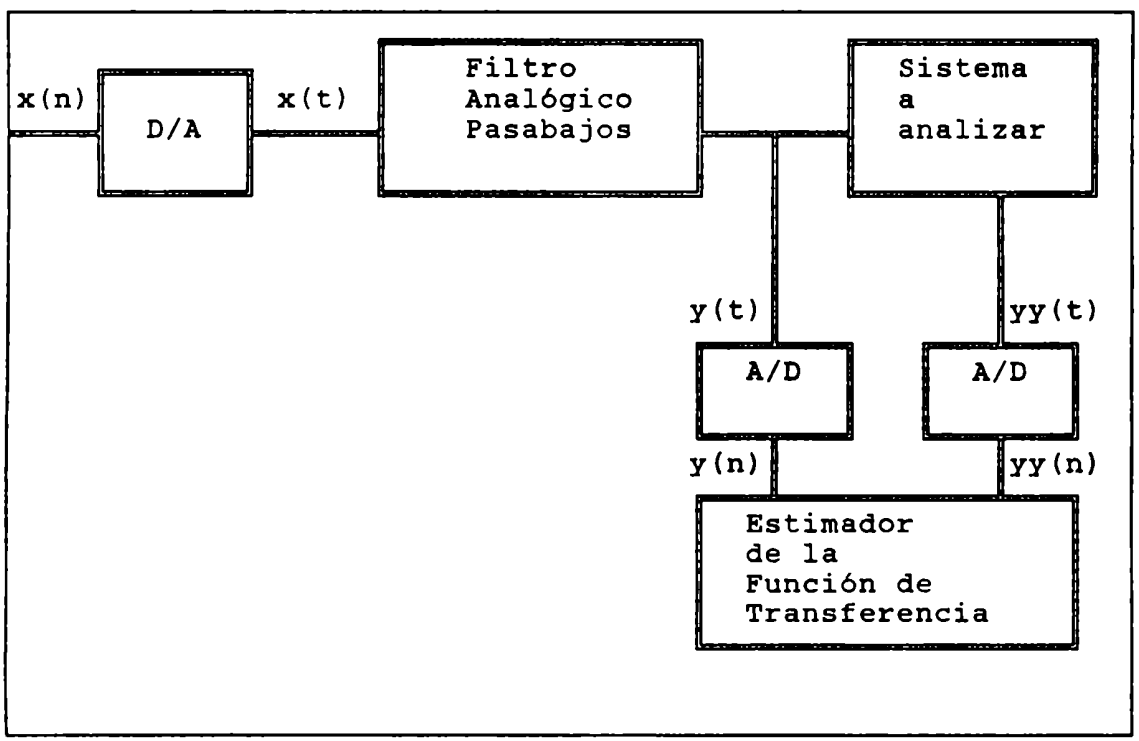


Figura A.3. Disposición experimental.

Como trataremos exclusivamente con observaciones de entradas y salidas en tiempo discreto, supondremos (Ljung, 1987) que la salida de un sistema $y(t)$ esta relacionada con la entrada $u(t)$ a través de

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\, u(t-k) \qquad \text{A.3}$$

o de manera mas general,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\, u(t-k) + e(t) \qquad t= 0,1,2... \qquad \text{A.4}$$

donde $g(k)$ es la respuesta impulsiva (o función de peso) del sistema, que consideraremos lineal, invariante en el tiempo y causal. El término $e(t)$ describe las perturbaciones al sistema, entre las cuales están incluídas ruido de medición y entradas no controlables. Si la entrada a la (A.1) es una sinusoide

$$u(t)=\cos wt \qquad \text{A.5}$$

obtenemos

$$y(t)=|g(e^{iwt})|\, \cos(wt+\phi) \qquad \text{A.6}$$

$$\phi=\arg(G(e^{iw})) \qquad \text{A.7}$$

donde

$$G(e^{iw})= \Sigma\, g(k)\, e^{iw(t-k)}, \qquad \text{A.8}$$

este número complejo es la función de transferencia del sistema en el punto $z=e^{iw}$, si variamos w entre $-\pi$ y π obtenemos la

función de frecuencia del sistema. El diagrama de Bode, consiste en graficar $\log|G(e^{iw})|$ y $\arg(G(e^{iw}))$ en función de $\log(w)$

A.3b Determinación de la función de transferencia de instrumentos.

De acuerdo al esquema de la sección anterior nuestro objetivo fue determinar el diagrama de Bode de una bobina de inducción, con un circuito de retroalimentación negativa, previo a ello, obtuvimos la respuesta de un filtro comercial, com comprobación de que el método funcionaba bien para el tratamiento de señales analógicas. Para ello hemos realizado el experimento de la sección A.3a sobre un filtro de condicionamiento de señal marca Kron-Hite. La respuesta en frecuencia se muestra en la figura A.4a para la amplitud y en la figura A.4b para la fase, junto con la curva dada por el fabricante. Hay un efecto sistemático presente en la fase, que atribuímos al aparato en sí, en principio puede existir este error en fase (Kron-Hite, 1978).

En la figura A.5a se presenta la curva de amplitud en función de la frecuencia para un variómetro de inducción, y en la figura A.5b la curva en fase. Las curvas A.5a y A.5b, son curvas compuestas de dos conjuntos de datos, que nos permitieron cubrir un rango de cuatro décadas.

Este esquema de trabajo es muy ágil e incluso permite la calibración in-situ, suponiendo que se lleve la computadora personal al campo, o sino permite la calibración a-posteriori en gabinete.

Figura A.4a. Diagrama de Bode (amplitud) para un filtro comercial operando como pasa-bajo en 1 seg. Con línea llena está graficada la función de transferencia obtenida, y con línea de trazos la curva dada por el fabricante.

Figura A.4b. Diagrama de Bode (fases) para el mismo filtro de la figura anterior. Con línea llena estágraficada la fase de la función de transferencia, y con línea de trazos la curva dada por el fabricante.

Figura A.5a. Diagrama de Bode (amplitud) para un variómetro de inducción. Para cada frecuencia está dada la cantidad de milivoltios a la salida por nanotesla de campo magnético de entrada.

Figura A.5b. Diagrama de Bode (fases) para el mismo variómetro de inducción de la figura anterior. Para cada frecuencia se indica el argumento de la función de transferencia.

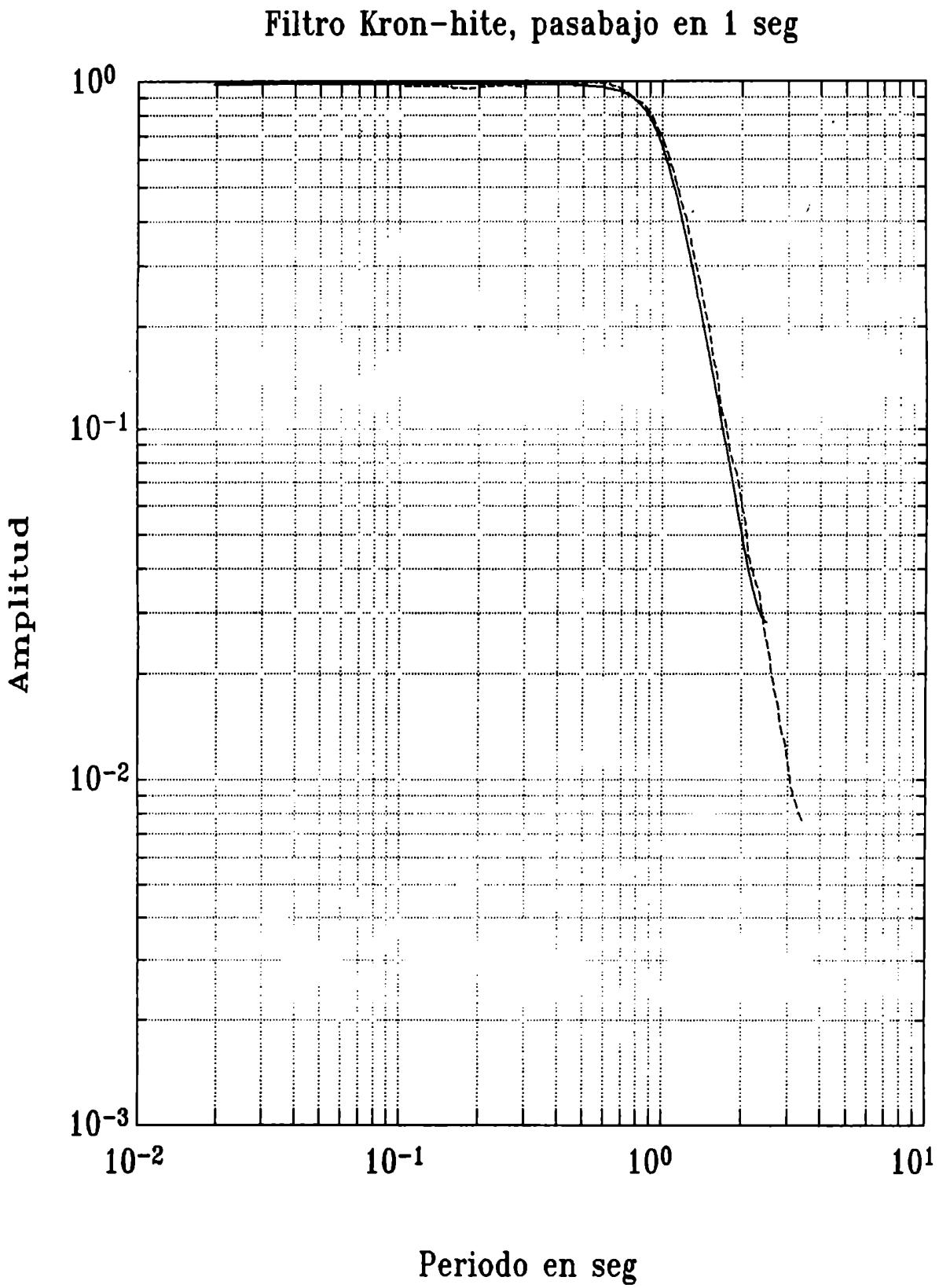

Filtro Kron-hite, pasabajo en 1 seg
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
Amplitud
10^{-2}
10^{-1}
10^0
10^1
Periodo en seg

Figura A.4a

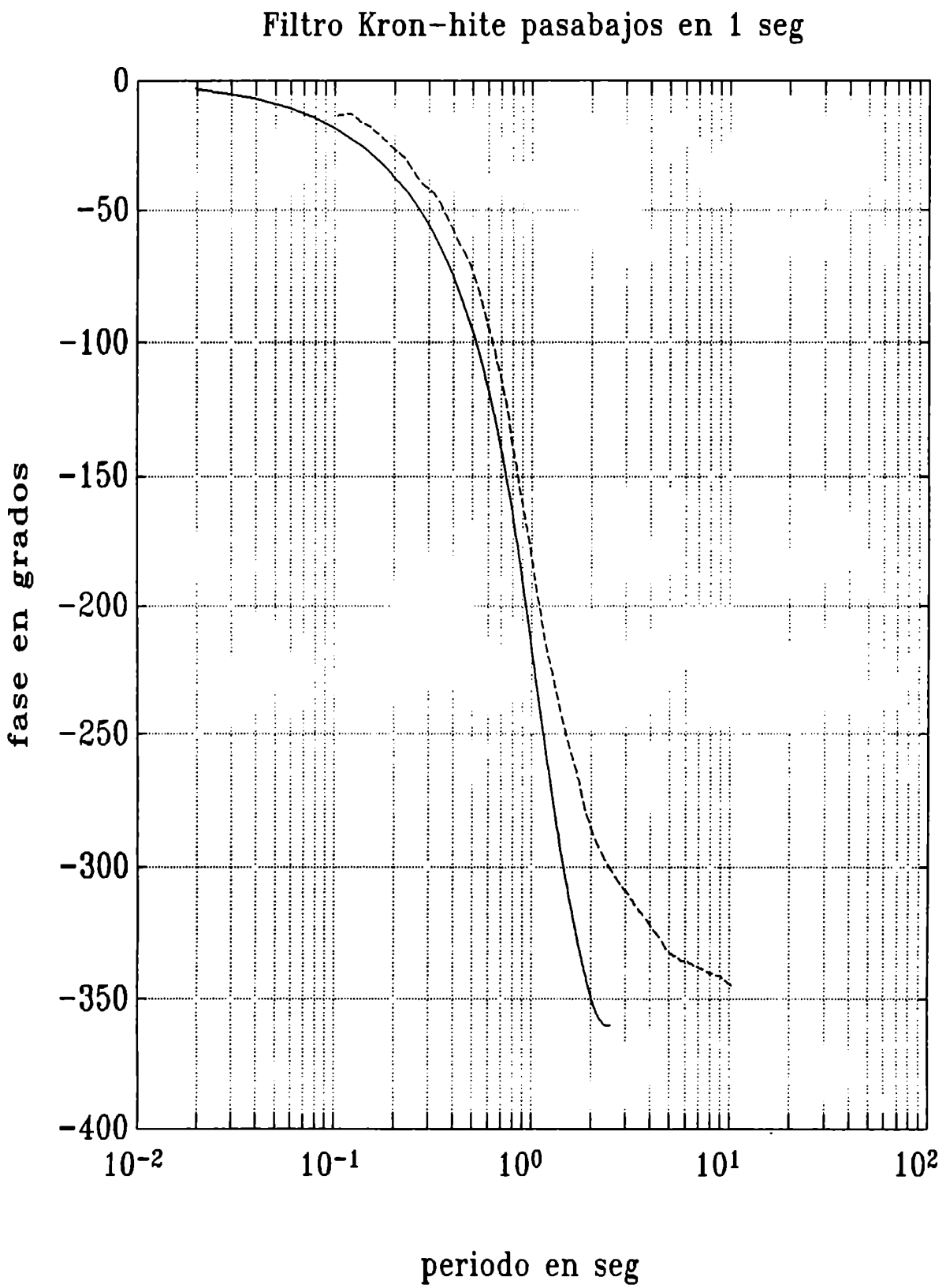

Filtro Kron-hite pasabajos en 1 seg
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
-400
fase en grados
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
periodo en seg

Figura A.4b

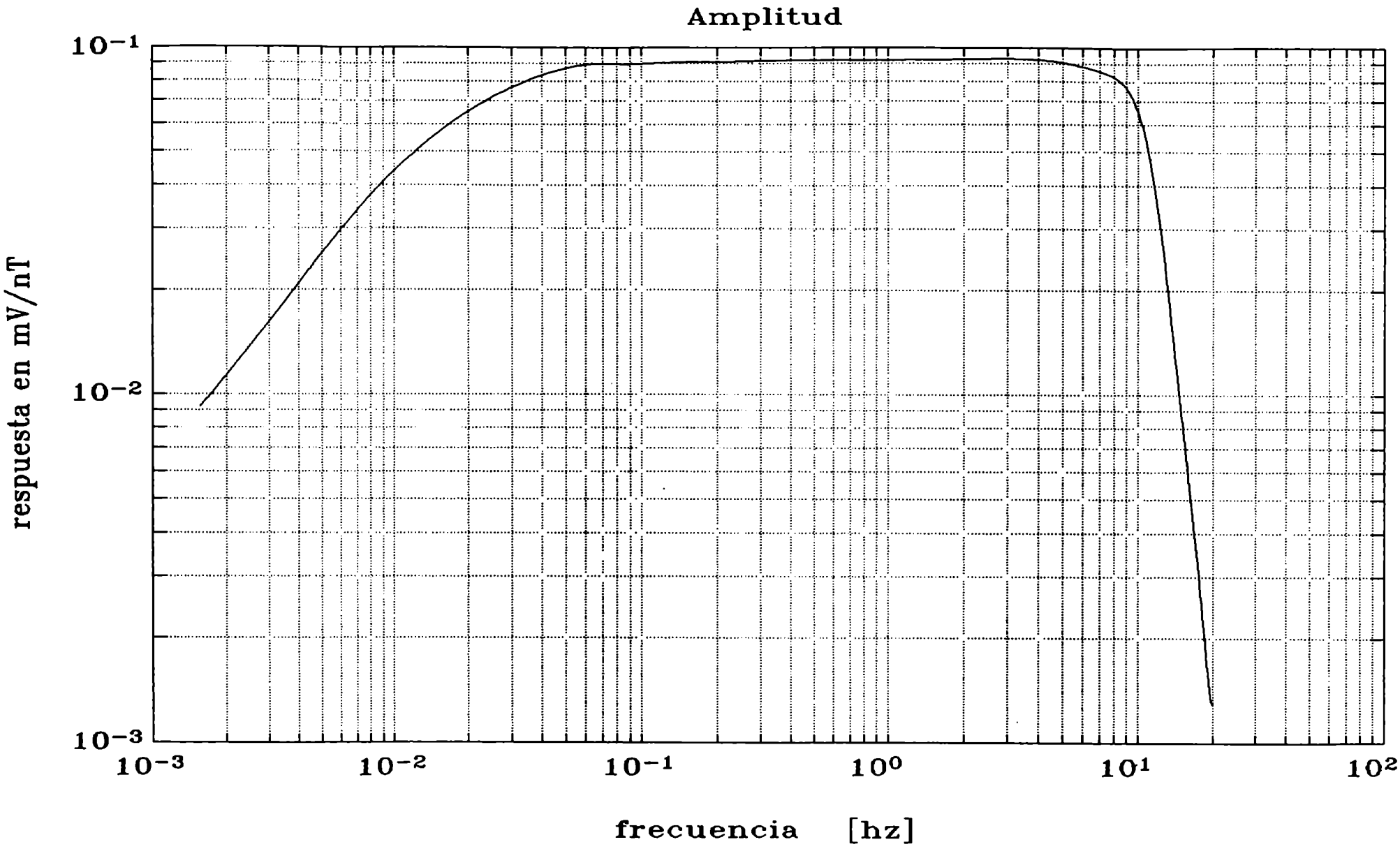

Amplitud
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
respuesta en mV/nT
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
frecuencia [hz]

Figura A.5a

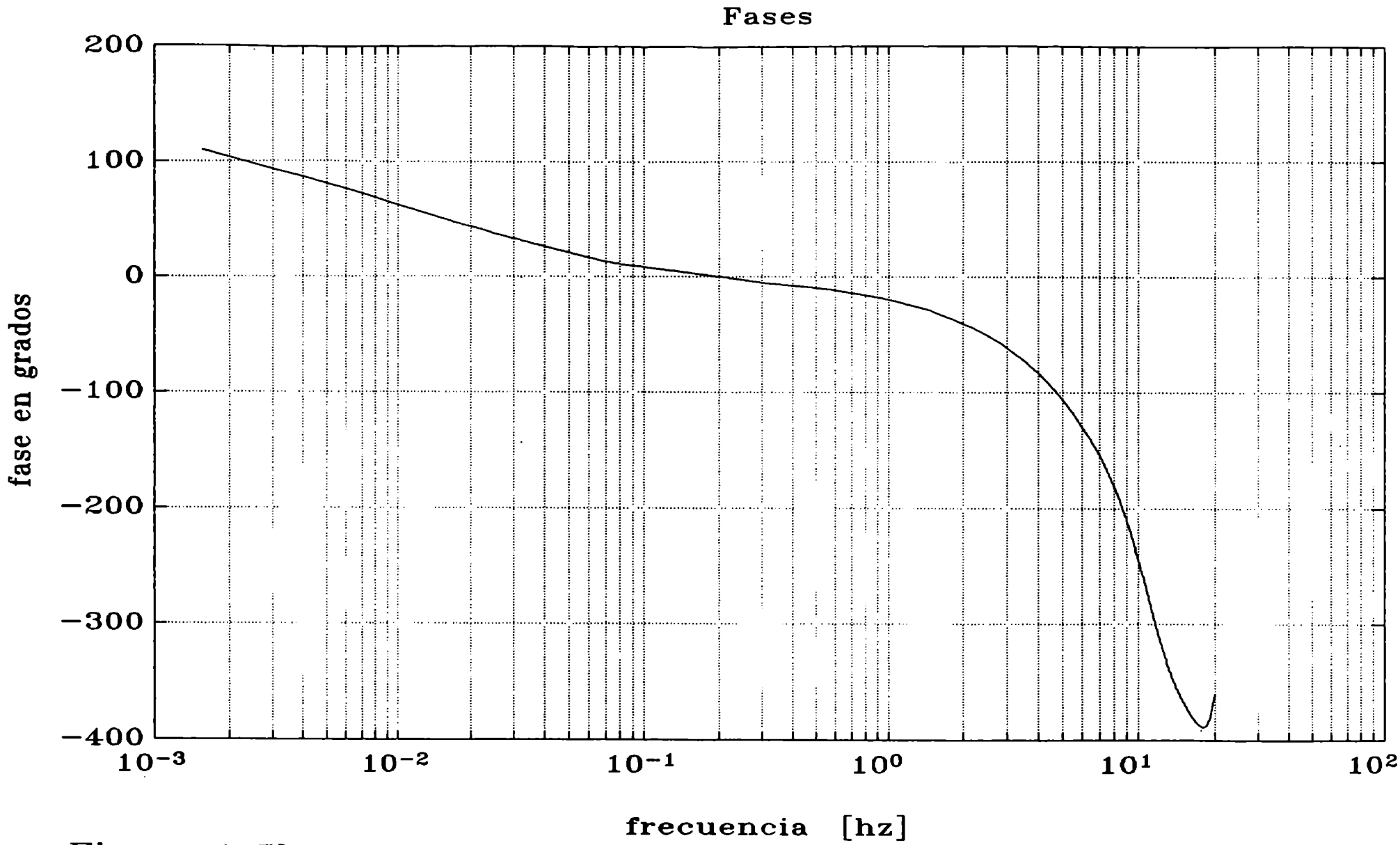

Fases
200
100
0
−100
−200
−300
−400
fase en grados
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
frecuencia [hz]

Figura A.5b

Referencias

Anderson, R. Pelton, W.,1985. MT exploration in volcanic cover, overthrust belts and rift zones. Presentado al 55° congreso anual de la SEG, Washington, DC.

Akaike, H., 1969, Fitting autoregressive models for prediction. Inst. Statistical Math., 21 : 243-247.

Bertin, Jacques, 1970. Semiologie graphique, les diagrammes, les reseaux, les cartes. Gauthier-Villars, Paris.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., 1976. Time series analysis, forecasting and control. Holden Day, San Francisco.

Cagniard, L.,1953. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. Geophysics, 18 : 605.

Chave, Alan D., Thomson, David J., Ander Mark E., 1987. On the robust estimation of power spectra, coherences, and transfer functions. J. Geophys. Res., 92 : 633-648.

Chave Alan D., Thomson David J., 1989. Some comments on magnetotelluric response function estimation. J. Geophys. Res. 94 N° B10.

Chen, W.Y. and Stegen, G.R., 1974. Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids. J. Geophys. Res., 79 : 3019-3022.

Duhau, S. and Osella, A. M., 1982. A correlation between E-region current and geomagnetic daily variation at equatorial latitudes. J. Geomag. Geoelect. 34,: 23.

Duhau, S. and Osella, A. M., 1983. The depth of the non-conducting layer at the nigerian dip equator. J. Geophys. Res., 88, A7 :5523-5535.

Duhau, S. and Osella, A. M. 1984. Depth of the non-conducting layer at central Africa. J. Geomag. Geoelect. 36 :113.

Duhau, S. y Osella A. M., 1985. Determinación de la profundidad de la capa no-conductora en Nigeria y Africa Central. Geoacta 12, N° 2, 167.

Duhau, S. and Favetto, A., 1990. The conductosphere depth at equatorial latitudes as determined from geomagnetic daily variations. Pure and Applied Geophysics, en prensa.

Eckhardt,D., Larner,K and Madden,T., 1963. Long-period magnetic fluctuations and mantle electrical conductivity estimates. J. Geophys. Res.,68 : 6279-6286.

Fischer, G., and Schnegg, P., A., 1980. The dispersion relations of the magnetotelluric response and their incidence on the inversion problem. Geophys. J. R. astr. Soc. 62 : 661-673.

Fischer, G., Schnegg, P.A., Peguiron, M. and Le Quang, B.V., 1981.An analytic one-dimensional magnetotelluric inversion scheme. Geophys. J.R. astr. Soc. 62 : 661-673.

Fougere, P.F., 1977. A solution to the problem of spontaneous line splitting in maximum entropy power spectrum analysis. J. Geophys. Res., 82 : 1051-1054.

Fournier, H., 1965. Abaque des solutions du système: $=0,2T(E/H)^2$; $h=\sqrt{(10 +T)}/8$ (établies en suivant la méthode L. Cagniard). Institut Physique du Globe Note n° 9.

Jones, A. G., 1988. Magnetotelluric observations along the LITHOPROBE southeastern canadian cordilleran transect. Geoph. Res. Lett., 15 Nº 7 : 677-680.

Jones, A. G., Chave, A. D. Egbert, G., Auld, D. and Bahr, K., 1989. A comparison of techniques for magnetotelluric

response function estimation. J. Geophys. Res., 94 N° B10 14201-14213.

Krohn-Hite Corporation. 1978. Digitally tuned variable filter 3320 series. Operating and maintenance manual. Bodwell Street. Avon, Mass. 02322.

Hewlett - Packardt. 1990. Catálogo general de instrumentos.

Horton, C., W., 1965. The electrical conductivity of the earth's mantle. Magnetism and the Cosmos. Nato Advanced Study Institute on Planetary and Magnetism. Oliver and Boyd. Edinburgh.

Kaikkonen, P., 1986. Numerical electromagnetic modelling including studies of characteristic dimensions: A review. Surveys in Geophysics 8 : 301-337.

Kaufman, A. A., and Keller, G. V., 1981. The magnetotelluric sounding method. Elsevier Scientific Publishing. Amsterdam.

Lahiri, B., N. and Price, A., T., 1939. Electromagnetic induction in non-uniforn conductors, and the determination of the conductivity of the earth from terrestrial magnetic variations. Phil. Trans. Roy. Soc. A, 237, : 509-540.

Mareschal, M., 1986. Modelling of natural sources of magnetospheric origin in the interpretation of regional induction studies: "A Review". Surveys in Geophysics 8 : 261-300 by D. Reidel Publishing Company.

Marquardt, D. W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. J. Soc. Indus Appl Math 11 : 431-441.

Menke, W., 1984. Geophysical data analysis: Discrete inverse theory.Academic Press, Orlando, Florida.

Moyano, C. E., Osella, A. M., 1986. Tratamiento de datos magnetotelúricos utilizando el método de la máxima entropía. Presentado a la XIVª Reunión científica de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodesta, Mendoza, Octubre.

Moyano, C. E., Osella A. M., 1990. A comparison of windows and maximum entropy methods for MT transfer function estimation. Phys Earth and Planetary Interiors, 60:62-67

Moyano, C. E., 1990. Transfer function estimation of MT instrumentation in low frequencies (0.005 - 10 Hz). Presentado en el "10tb Workshop on Electromagnetic induction in the earth", Ensenada, México, Agosto.

Ning, T. and Nikias, C.L., 1986. Multidimensional AR spectrum estimation: The optimum approach in the reflection coefficient domain. IEEE Trans. Acc. Speech and Sig. Proc. ASSP-34 : 1139-1152.

Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W., 1975. Digital signal processing. Prentice Hall. Englewood Cliffs. New Jersey.

Osella, A., M., y Duhau, S., 1983. The effect of the depth of the non-conducting layer on the induced magnetic field at the peruvian dip equator. J. Geomag. Geoelectr., 35, : 245.

Osella, A., M., Duhau, S. y Moyano, C., 1986a. Estudio de la anomalía en la distribución de la conductividad terrestre en la zona ecuatorial africana. Geoacta,13, N° 2: 291-298.

Osella, A. M., Duhau,S., Moyano, C. E., 1986b. Efecto producido por una fuente de dimensión finita en sondajes MT. Presentado a la XIVª Reunión Científica de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas, Mendoza, Octubre.

Osella, A.M. and Duhau, S., 1986. Analysis of the effect produced by lateral inhomogeneities in the upper mantle

in the peruvian region. Jour. Geomag and Geoelectr., 37 : 531-540.

Pous, J., Marcuello, A. and Queralt, P., 1987. Resistivity inversion with a priori information. Geoph. Prosp. 35 : 590-603.

Price, A.,T., 1962. The theory of magnetotelluric methods when the source field is considered. J. Geophys. Res, 67 : 1907-1918.

Price, A., T., 1970. The electrical conductivity of the earth.; Q. J. R. Astro Soc. 11 : 23-42.

Radosky, H.R., Zawalik, E.J. and Fougere, P., 1976. The superiority of maximum entropy power spectrum techniques applied to geomagnetic micropulsations. Phys. Earth Planet., Inter., 12 : 208-216.

Rokityansky,I.I.,1982. Geoelectromagnetic investigation of the earth's crust and mantle. Springer-Verlag.Berlin.

Schmucker, U., 1985. Lecture notes on EM response functions for a layered sphere and half space: their determination and interpretation. International Workshop on Data Processing. Bombay. India.

Serson,R., 1973. Instrumentation for induction studies in land. Phys Earth Planet Inter.,9 : 313-322.

Schwarz, G. Haak, V., Martínez, E. and Bannister, J.,1984. The electrical conductivity of the andean crust in northern Chile and southern Bolivia as inferred from magnetotelluric measurements. J. Geophysics 55:169-178

Srivastava,S., P., 1965. Method of interpretation of magnetotelluric data when source field is considered. J. Geophys. Res., 70 : 945-954.

Stanley, W. D., Saad, A. R. and Ohofugi, W., 1985. Regional magnetotelluric surveys in hidrocarbon exploration. Parana basin, Brazil. Bull Am. Assn. Petr. Geol., 69:346-360.

Tzanis, A., 1987. Investigations on the properties and estimation of earth response operators from EM sounding data.University of Edinburgh. PhD thesis.

Ulrych, T., J., 1972. Maximun entropy power spectrum of truncated sinusoids. J. Geophys. Res., 77 : 1396-1400.

Ulrych, T. and Jensen, O., 1974. Cross-spectral analysis using maximum entropy. Geophysics, 39 : 353-354.

Ulrych, T. J. and Bishop, T. N., 1975. Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. Rev. Geophys. Spa. Phys., 13 : 183-200.

Welch, P.D., 1967. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms . IEEE Trans. Audio Electroacoust., AU-15 : 70-73.