

Tesis de Posgrado

Reflexión y refracción en cristales birrefringentes monoaxiales

Perez, Liliana Inés

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Perez, Liliana Inés. (1990). Reflexión y refracción en cristales birrefringentes monoaxiales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2388_Perez.pdf

Cita tipo Chicago:

Perez, Liliana Inés. "Reflexión y refracción en cristales birrefringentes monoaxiales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2388_Perez.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Física - Laboratorio de Optica

REFLEXION Y REFRACCION EN CRISTALES
BIRREFRINGENTES MONOAXIALES

por *Liliana Inés Perez*

Director de Tesis: Prof. Dra. María C. Simon

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTORA EN
CIENCIAS FISICAS

1990

*Tesis.
2388.
p. 2.*

Laura Mariano

Ana Sebastián

AGRADECIMIENTOS

Es imposible dar las gracias a todos los que han contribuido en la realización de esta tesis. Sin algunos hubiera sido imposible, sin otros hubiera sido muy dificultoso, sin muchos muy aburrida. Por lo tanto todos hicieron que esta empresa fuera realmente agradable.

Agradezco a

...mis padres quienes desde siempre se esforzaron para que yo pudiera concretar mis anhelos personales, estudiantiles y profesionales. En esta etapa, como siempre, me brindaron su apoyo incondicional no sólo dándome ánimo cuando las circunstancias externas parecían querer superarme, sino también colaborando con el cuidado de mis hijos.

...mi marido quien me brindó su comprensión y esfuerzo y me reemplazó en todos los momentos en que yo no podía realizar mis tareas hogareñas, ya de por sí con él compartidas, relegando a veces su propio trabajo.

...el personal del Jardín Maternal "La Casa de los Niños", en especial a Juana, Elsa, Alejandra, Marta, Cristina, María y Teresa, quienes me ayudaron más que de costumbre en la crianza de Ani y Sebi.

...muchos de los usuarios de la P.C. y en especial a Rubén Waischenker quien me salvó "más de muchas veces" de un sumario administrativo por pelearme con el procesador de pa-

labras.

...Héctor Kelly, Rubén Contreras, Roberto Delellis, Angel González, Horacio Bruzzzone y Graciela Gnavi de quienes guardo un grato recuerdo como profesores o docentes auxiliares durante el ciclo de la Licenciatura, no sólo por el entusiasmo con que me transmitieron sus conocimientos sino también por su calidez humana y adecuados consejos.

...mis compañeros de Laboratorio 2 Mirta, Guillermo y Susana por realizar parte de las tareas docentes que me correspondían para que pudiera redactar en un tiempo razonable.

...todos los integrantes del Laboratorio de Optica que de una u otra manera me allanaron el camino. A Hanns por la confianza depositada en mí al darme la posibilidad de integrarme al Grupo de Optica y por el apoyo para que pudiera recuperar algunos años profesionalmente perdidos. A María Teresa y Rodolfo para quienes la realización de esta tesis ha sido también una meta y que incondicionalmente no sólo me ofrecieron y brindaron su de por sí escaso tiempo sino también adecuadas sugerencias y fructíferas discusiones (acaloradas a veces pero siempre amistosas) durante estos años. A Marta por el esmero con que realizó todos los dibujos y gráficos, y la paciencia con la que hizo casi innumerables cambios. A Angela quien no sólo me ayudó en el aprendizaje del procesador sino también me ofreció su nueva y querida adquisición y se dedicó con muchísimo afecto y esmero a revisar el original.

Si bien todos estos aportes han sido muy importantes, hay uno que ha sido imprescindible: el de María. Ante todo mi agradecimiento profundo como mujer por su sincera comprensión y aceptación de los lugares que ocupan mi familia y la física en mi vida aunque ello la perjudicara más de una vez por el lento o desparejo ritmo de mi trabajo. Y no menor es mi agradecimiento como Directora de Tesis por haberme brindado todo en el momento adecuado: conocimientos, ayuda, lecturas críticas y sugerencias constructivas.

Grandemente apreciado por todos los hombres es el diamante, y muchas son las alegrías que tesoros similares nos traen, tales como piedras preciosas y perlas...pero él, quien por otro lado, prefiere el conocimiento de fenómenos poco usuales a estas delicias, él espero, no tendrá menos alegría con un nuevo tipo de cuerpo, esto es, un cristal transparente recientemente traído a nosotros de Islandia, el cual quizá es una de las más grandes maravillas que la naturaleza ha producido... .

Conforme mi investigación de este cristal proseguía apareció un fenómeno maravilloso y extraordinario: los objetos que se miran a través del cristal no muestran, como en el caso de otros cuerpos transparentes, una imagen refractada única, sino que aparecen dobles.

Erasmus Bartholinus

1669

(en "Optica" por Hecht y Zajac)

INDICE

INTRODUCCION	4
CAPITULO I : ONDAS PLANAS EN MEDIOS ANISOTROPOS MONOAXIALES	10
I.1 Propagación de ondas planas	11
I.2 Reflexión y refracción de ondas planas	21
I.2.1 Sistemas de coordenadas	21
I.2.2 Condiciones de igualdad de las fases sobre la superficie de discontinuidad	24
I.2.3 Velocidad de fase de la onda refractada extraordinaria	25
CAPITULO II : REFLEXION Y REFRACCION EXTERNAS	29
II.1 Campos asociados a las ondas que se propagan en los dos medios	31
II.1.1 Ondas que se propagan en el medio isotropo	32
II.1.2 Ondas que se propagan en el medio birrefringente monoaxial	35

II.2 Resolución de las condiciones de contorno sobre la superficie de separación	39
II.3 Coeficientes de reflexión y transmisión	41
II.3.1 Coeficientes de reflexión	43
II.3.2 Coeficientes de reflexión para una interfase aire-calcita	47
II.3.3 Coeficientes de transmisión	51
II.4 Casos de simetría	57
II.4.1 El plano de incidencia es perpendicular al plano definido por \check{x} y \check{z}_s	57
II.4.2 El eje óptico es paralelo al plano de incidencia	60
II.4.3 El eje óptico es paralelo a la interfase y perpendicular al plano de incidencia	64
II.4.4 El eje óptico es perpendicular a la interfase	65
 CAPITULO III: REFLEXION TOTAL EXTERNA	 67
III.1 Condición de reflexión total externa	68
III.2 Ecuaciones de las superficies que contienen a las normales a los frentes de onda incidentes que sufren reflexión total externa	75
III.2.1 Reflexión total ordinaria	75

III.2.2 Reflexión total extraordinaria	76
III.3 Relación entre reflexión total externa e interna extraordinarias	81
CAPITULO IV : INDICE DE REFRACCION EXTRAORDINARIO	87
IV.1 Estudio del índice de refracción extraordinario	88
IV.2 Ondas evanescentes asociadas a la reflexión total externa	99
IV.2.1 Reflexión total e índice de refracción	100
IV.2.2 Flujo de energía en las ondas evanescentes	108
CONCLUSIONES	114
REFERENCIAS	118

El descubrimiento de E. Bartholinus en 1669 del fenómeno de doble refracción en la calcita llevó a C. Huygens a extender ingeniosamente su famosa construcción para determinar la dirección de los dos frentes de onda refractados en una interfase medio isótropo-calcita. Consideró que la superficie de propagación de la luz en la calcita no era una esfera sino una cierta combinación de una esfera y un elipsoide de revolución oblado¹.

En 1816 J. B. Biot², con una posición netamente particu- lista, postula la existencia de dos tipos distintos de luz corpuscular que se pueden propagar en un material birrefrin- gente, que corresponden a la onda ordinaria y extraordina- ria. Haciendo uso de las construcciones geométricas de Fresnel, obtenidas a partir de la concepción ondulatoria de Huygens, consigue expresar en forma explícita las fórmulas que dan los rayos refractados en función del incidente para interfaces formadas por un medio isótropo y uno birrefrin- gente.

Pero fue sólo a partir de la aceptación de la naturaleza electromagnética de la luz, a fines del siglo pasado, que se comenzaron a describir en forma más completa todos los fenó- menos conocidos relacionados con medios birrefringentes. Las únicas hipótesis necesarias para su descripción son la vali- dez de las ecuaciones de Maxwell, de las condiciones de con- torno y de las relaciones constitutivas tensoriales entre los

campos.

El problema de trazado de rayos extraordinarios en cristales monoaxiales ha sido tratado de diferentes formas por muchos autores durante la últimas décadas. Así, por ejemplo, en 1962 O.N. Stavroudis³ obtuvo la dirección del rayo extraordinario en función de la del ordinario. W. Swindell⁴, en 1975, propuso un cálculo más directo, pero estos trabajos estaban basados en la construcción de Huygens. Posteriormente otros autores como R.M.A. Azzam⁵ y M. Elshazly-Zaghlouf⁶, a partir de una formulación matricial para medios estratificados, obtuvieron coeficientes de reflexión y transmisión para interfases medio dieléctrico-cristal birrefringente para algunos casos particulares en los cuales la superficie de separación o el plano de incidencia coinciden con algún plano de simetría del cristal. Con la teoría desarrollada por ellos tampoco pueden describirse algunos fenómenos asociados a estos tipos de interfases.

En 1983, M.C. Simon⁷ desarrolló una manera totalmente analítica para resolver el problema basada exclusivamente en las ecuaciones de Maxwell. En trabajos sucesivos^{8,9} mostró que la refracción extraordinaria en cristales birrefringentes puede tratarse mediante un índice de refracción que depende de la dirección de incidencia y de las características del medio isótropo y del cristal birrefringente. La formulación propuesta divide al cálculo en tres etapas:

1) Por medio de una ecuación bicuadrática, se calcula el índice de refracción extraordinario como función del ángulo de incidencia.

2) Usando la ley de Snell y el índice de refracción obtenido en la etapa anterior, se obtiene la dirección de la normal al frente de onda refractado.

3) Conocida ya la normal al frente de onda, se calcula la dirección del rayo

Este método tiene la ventaja de reducir el problema de la refracción extraordinaria a la ley de Snell con un índice de refracción variable y a la obtención del rayo a partir de la normal al frente de onda por medio de una relación sencilla. Además las fórmulas son fáciles de expresar vectorialmente de forma tal que son independientes del sistema de coordenadas.

Para estudiar el fenómeno de refracción y reflexión externa en cristales monoaxiales no magnéticos ni absorbentes se aplicará este formalismo y se completará para determinar los coeficientes de reflexión y transmisión. Además se extenderá el concepto de índice de refracción extraordinario al plano complejo, para describir el fenómeno de reflexión total.

En el Capítulo I se introduce suscintamente al formalismo propuesto para la propagación de ondas electromagnéticas en medios anisótropos monoaxiales no magnéticos ni absorben-

tes y para la solución de la reflexión y refracción para interfaces medio isótropo-cristal monoaxial.

En el Capítulo II se obtienen los campos asociados a las ondas reflejada y refractadas, cuando una onda plana polarizada linealmente incide desde un medio isótropo sobre un cristal monoaxial. Se calculan los coeficientes de reflexión y transmisión para geometrías totalmente arbitrarias y se hace el análisis de casos particulares, que muestran que las fórmulas generales reproducen las simetrías esperadas. También se obtienen fórmulas explícitas para estos casos, algunos de los cuales han sido calculados por otros autores.

La condición de reflexión total externa ordinaria y extraordinaria es analizada en el Capítulo III, obteniendo las superficies que contienen a los rayos que inciden con el ángulo límite de reflexión total. Se comparan además las zonas de reflexión total externa e interna, cuando el índice del medio isótropo es intermedio entre los índices principales del cristal, comprobando la complementariedad de las mismas.

En el Capítulo IV se hace un estudio detallado del índice de refracción extraordinario. Se muestra que la resolución de la ecuación bicuadrática asociada al índice lleva a valores anómalos del mismo: índices complejos o con valores fuera del intervalo establecido por los índices principales del cristal. Se comprueba que estas anomalías aparecen cuando el rayo incidente sufre reflexión total. El índice de refrac-

ción complejo, que se obtiene para cristales no absorbentes, revela algunas características de las ondas excitadas en la reflexión total. Se muestra también que este índice complejo es coherente con el formalismo de la propagación de ondas que se deriva de las ecuaciones de Maxwell y que las características de las ondas evanescentes que se obtienen son físicamente aceptables.

CAPITULO

ONDAS PLANAS EN MEDIOS ANISOTROPOS MONOAXIALES

I.1 PROPAGACION DE ONDAS PLANAS

Las variaciones espacio-temporales de los vectores intensidad de campo eléctrico \vec{E} , desplazamiento eléctrico \vec{D} , inducción magnética \vec{B} e intensidad de campo magnético \vec{H} dadas por las ecuaciones de Maxwell junto con las relaciones constitutivas, describen en forma completa la propagación de la luz a través de un medio de propiedades electromagnéticas conocidas. La expresión de dichas ecuaciones en ausencia de cargas y corrientes es^{1,10}:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Como se considerarán medios anisótropos no absorbentes, existe un sistema de coordenadas privilegiado propio del cristal z_1, z_2, z_3 , denominado sistema de ejes principales, en el cual el tensor dieléctrico $\bar{\epsilon}$ es diagonal. Además se limitará el estudio a medios monoaxiales lo que significa que dos de los elementos del tensor serán iguales. En el

sistema de ejes principales la relación entre las componentes de los vectores desplazamiento e intensidad de campo eléctrico es

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix} \vec{E} \quad (I.5)$$

pudiendo definir, como es usual, las velocidades de fase principales mediante la relación

$$u_j = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon_j}} \quad (I.6)$$

e índices de refracción principales

$$n_j = \frac{c}{u_j} \quad (I.7)$$

donde $j = 1, 2, 3$ indica el eje principal correspondiente, μ la constante de inducción magnética del medio y c la velocidad de la luz en el vacío.

Como se considerarán cristales no magnéticos, la relación entre el vector inducción magnética e intensidad de campo magnético estará dada por

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (I.8)$$

donde μ_0 es la constante de inducción magnética del vacío.

Proponiendo además soluciones en ondas planas para los campos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{i\varphi} \quad (\text{I.9})$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D} e^{i\varphi} \quad (\text{I.10})$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} e^{i\varphi} \quad (\text{I.11})$$

siendo

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \{ \vec{N} \cdot \vec{r} - ut \}, \quad (\text{I.12})$$

u la velocidad de fase, λ la longitud de onda y \vec{N} el vector normal al frente de onda, las ecuaciones de Maxwell toman las siguientes expresiones

$$\vec{N} \times \vec{E} = -u \vec{D} \quad (\text{I.13})$$

$$\vec{N} \times \vec{H} = \mu_0 u \vec{D} \quad (\text{I.14})$$

$$\vec{N} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\vec{N} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{I.16})$$

La dirección del rayo correspondiente a la onda que se propaga en el medio birrefringente está determinada por la dirección del flujo de energía. Como el flujo de energía está asociado al vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (\text{I.17})$$

se define el versor rayo como

$$\check{R} = \frac{\check{\mathcal{E}}}{|\check{\mathcal{E}}|} \quad (\text{I.18})$$

Reemplazando (I.14) en (I.13) se obtiene la relación entre los vectores desplazamiento e intensidad de campo eléctrico

$$\check{\mathcal{E}} = \mu_0 u^2 \check{D} + (\check{N} \cdot \check{\mathcal{E}}) \check{N} \quad (\text{I.19})$$

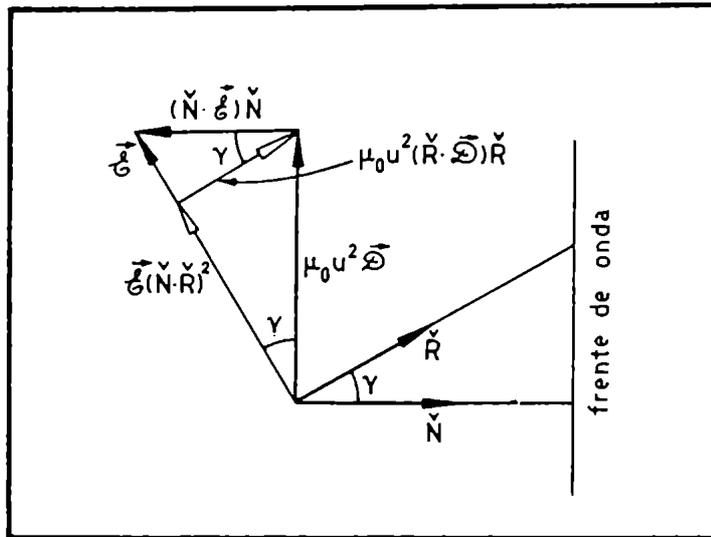


Figura 1 : Diagrama de los vectores que describen la onda plana en el plano normal al vector $\check{\mathcal{E}}$.

De las ecuaciones (I.13)-(I.19) se obtienen las relaciones geométricas entre los vectores \check{N} , \check{R} , \check{D} , $\check{\mathcal{E}}$ y $\check{\mathcal{E}}$ que se sintetizan en la Figura 1, donde $\cos \gamma = (\check{N} \cdot \check{R})$.

A partir de las expresiones (I.5), (I.6) y (I.19) se obtiene la relación, en el sistema principal $z_1 z_2 z_3$, entre las componentes del desplazamiento eléctrico y de la normal al frente de onda⁷

$$(u^2 - u_j^2) (\check{D} \cdot \check{z}_j) + \left[\sum_{i=1}^3 u_i^2 N_i D_i \right] (\check{N} \cdot \check{z}_j) = 0 \quad (I.20)$$

Este sistema de ecuaciones homogéneas tendrá solución no trivial si se anula el determinante de sus coeficientes. Para un medio birrefringente monoaxial, con velocidades principales $u_1 = u_2 = u_o$ y $u_3 = u_e$, la expresión correspondiente es

$$(u^2 - u_o^2) \left\{ \left[1 - (\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 \right] (u^2 - u_o^2) + (\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 (u^2 - u_e^2) \right\} = 0 \quad (I.21)$$

En consecuencia, para cada dirección de avance del frente de onda \check{N} , existen dos velocidades de propagación posibles en el cristal, que se denominarán u' y u'' , siendo

$$u'^2 = u_o^2 \quad (I.22)$$

$$u''^2 = \left[1 - (\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 \right] u_o^2 + (\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 u_e^2 \quad (I.23)$$

correspondiendo los valores negativos de u' y u'' a un

avance del frente de onda en sentido opuesto. De (I.22) y (I.23) surge que el eje óptico del cristal es el z_3 , pues esa es la dirección de propagación en la cual las dos posibles velocidades de fase coinciden. Como la velocidad de propagación u' es la misma en todas direcciones, el frente de onda es esférico. De (I.20) y (I.22) las relaciones entre las componentes del vector desplazamiento correspondiente a esta onda llamada ordinaria son

$$\left. \begin{aligned} \frac{\check{D}' \cdot \check{z}_1}{\check{D}' \cdot \check{z}_2} &= - \frac{\check{N} \cdot \check{z}_2}{\check{N} \cdot \check{z}_1} \\ \check{D}' \cdot \check{z}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I.24)}$$

De esta última expresión y de la relación entre las componentes principales de los vectores desplazamiento e intensidad de campo eléctrico en el sistema de ejes principales se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\check{E}' \cdot \check{z}_1}{\check{E}' \cdot \check{z}_2} &= - \frac{\check{N} \cdot \check{z}_2}{\check{N} \cdot \check{z}_1} \\ \check{E}' \cdot \check{z}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I.25)}$$

De estas expresiones surge que el vector desplazamiento

correspondiente a la onda ordinaria está contenido en el plano perpendicular al eje óptico y que los vectores desplazamiento e intensidad de campo eléctrico tienen la misma dirección.

En cambio la segunda solución de (I.21), u'' , depende de la dirección de propagación de la onda cuyo frente tiene forma de elipsoide de revolución. De (I.20) y (I.23) la relación entre las componentes del vector desplazamiento que corresponde a esta onda llamada extraordinaria resulta

$$\left. \begin{aligned} \frac{\check{D}'' \cdot \check{z}_1}{\check{D}'' \cdot \check{z}_2} &= \frac{\check{N} \cdot \check{z}_1}{\check{N} \cdot \check{z}_2} \\ \frac{\check{D}'' \cdot \check{z}_3}{\check{D}'' \cdot \check{z}_2} &= \frac{(\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 - 1}{(\check{N} \cdot \check{z}_2)(\check{N} \cdot \check{z}_3)} \end{aligned} \right\} \text{(I.26)}$$

mientras que la relación entre las componentes del vector intensidad de campo eléctrico a partir de la expresiones (I.5) y (I.6) resulta

$$\left. \begin{aligned} \frac{\check{E}'' \cdot \check{z}_1}{\check{E}'' \cdot \check{z}_2} &= \frac{\check{N} \cdot \check{z}_1}{\check{N} \cdot \check{z}_2} \\ \frac{\check{E}'' \cdot \check{z}_3}{\check{E}'' \cdot \check{z}_2} &= \frac{u_o^2}{u_o^2} \frac{(\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 - 1}{(\check{N} \cdot \check{z}_2)(\check{N} \cdot \check{z}_3)} \end{aligned} \right\} \text{(I.27)}$$

De (I.24)-(I.27) es fácil ver que \vec{D}'' y \vec{E}'' son perpendiculares a \vec{D}' y \vec{E}' respectivamente y que están contenidos en el plano formado por \vec{N} y \vec{z}_3 .

La dirección del flujo de energía no coincide en general con la dirección de avance del frente de onda. Esto puede comprobarse fácilmente reemplazando (I.14) en (I.17), pues el vector de Poynting resulta

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 u} \left\{ (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{N} - (\vec{N} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right\} \quad (I.28)$$

Por otra parte, la relación entre el versor rayo \vec{R} y la normal al frente de onda \vec{N} puede darse en función de las componentes de ésta, de las velocidades principales y de la velocidad de propagación de la onda en el cristal monoaxial. A partir de la Figura 1 se obtiene

$$\mu_0 u^2 \vec{D} = \vec{E} (\vec{N} \cdot \vec{R})^2 + \mu_0 u^2 (\vec{R} \cdot \vec{D}) \vec{R} \quad (I.29)$$

y

$$\mu_0 u^2 (\vec{R} \cdot \vec{D}) = - (\vec{N} \cdot \vec{E}) (\vec{R} \cdot \vec{N}) \quad (I.30)$$

De (I.19), (I.29) y (I.30) se obtienen las componentes principales del versor rayo

$$R_j = N_j (\vec{N} \cdot \vec{R}) \left\{ 1 + \frac{u^2 \left[1 - \frac{1}{(\vec{N} \cdot \vec{R})^2} \right]}{u_j^2 - u^2} \right\} \quad (I.31)$$

Definiendo¹⁰

$$g^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2}{(u_i^2 - u^2)^2}} \quad (\text{I.32})$$

resulta

$$(\check{N} \cdot \check{R})^2 = \frac{u^4}{u^4 + g^2} \quad (\text{I.33})$$

Reemplazando (I.32) y (I.33) en (I.31) se obtiene la relación entre \check{R} y \check{N}

$$R_j = N_j \left[u^2 + \frac{g^2}{u^2 - u_j^2} \right] \sqrt{\frac{1}{u^4 + g^2}} \quad (\text{I.34})$$

Si en el cristal monoaxial la velocidad de propagación del frente de onda es $u' = u_o$, rayo y normal coincidirán. Si en cambio, la onda se propaga con velocidad de fase u'' ((I.23)), la relación será

$$\check{R}'' = \frac{1}{F_n^2} \left\{ u_o^2 \check{N} + (u_o^2 - u^2) (\check{N} \cdot \check{z}_3) \check{z}_3 \right\} \quad (\text{I.35})$$

siendo F_n^2 un factor de normalización dado por

$$F_n^2 = \left[1 - (\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 \right] u_o^4 + (\check{N} \cdot \check{z}_3)^2 u^4 \quad (\text{I.36})$$

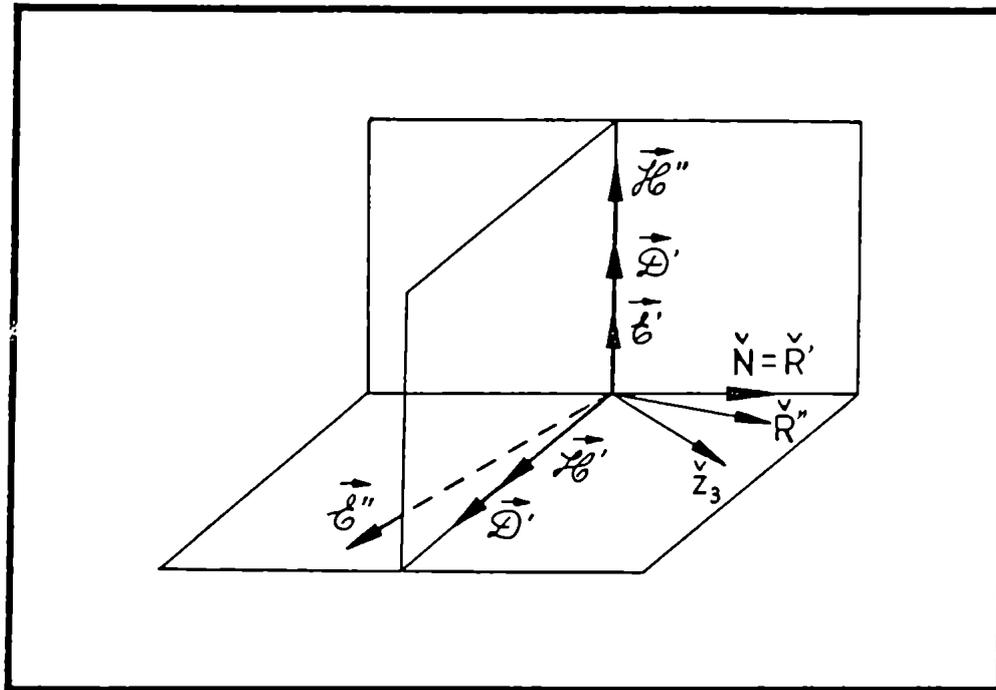


Figura 2 : Campos ordinarios \vec{E} , \vec{D} , \vec{E}' y extraordinarios \vec{E}'' , \vec{D}'' , \vec{E}''' asociados a una dirección de avance del frente de onda \vec{N} y direcciones de los versores rayo \vec{R}' y \vec{R}'' correspondientes. (z_3 es el eje óptico).

Es decir, el rayo difiere de la normal extraordinaria en un vector con dirección del eje óptico cuyo sentido dependerá únicamente de las características positivas o negativas del cristal y del signo de $(\check{N} \cdot \check{z}_3)^{\theta}$.

En la Figura 2 se observan las direcciones de los campos ordinarios y extraordinarios y las direcciones de los versores rayos asociados, para una dirección de avance del frente de onda y del eje óptico z_3 .

I.2 REFLEXION Y REFRACCION DE ONDAS PLANAS

La existencia de dos posibles velocidades de propagación para una dada dirección de avance del frente de onda da lugar a la doble refracción cuando una onda plana incide sobre la superficie de separación formada por un medio isótropo y un cristal birrefringente. Para cada una de las velocidades de fase u' y u'' existirá una dirección de propagación \check{N}' y \check{N}'' y versores rayo \check{R}' y \check{R}'' , respectivamente.

En lo que sigue se obtienen las fórmulas que permiten calcular las direcciones de la normal al frente de onda y del rayo extraordinarios en función de las características ópticas de la interfase y de la dirección de incidencia. El desarrollo es el propuesto por María C. Simon en "Ray tracing formulas for monoaxial optical components" (1983)⁷ y cuya forma vectorial fue publicada por María C. Simon y Rodolfo M. Echarri en 1986⁸.

I.2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Es necesario hacer uso de dos sistemas de coordenadas: el sistema x, y, z que caracteriza a la interfase y el sistema de los ejes principales del cristal z_1, z_2, z_3 donde el versor \check{z}_3 corresponde a la dirección del eje óptico. Se elige al

versor \vec{x} como normal a la superficie, en el sentido de avance de las ondas incidentes. Como, por las propiedades de simetría de los cristales monoaxiales, dos de los ejes principales son arbitrarios y además la superficie de discontinuidad está unívocamente determinada por su normal, sin pérdida de generalidad es posible hacer coincidir uno de los

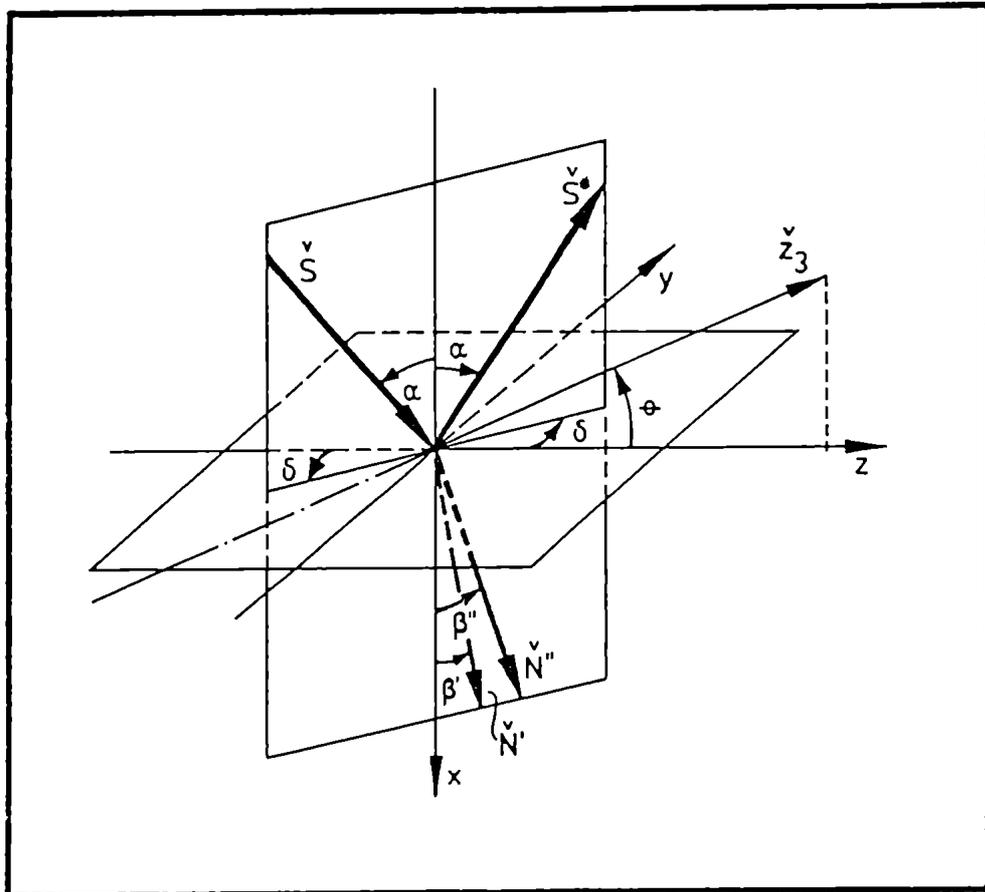


Figura 3 : Sistema de coordenadas y normales a los frentes de onda. z es el eje óptico, S el rayo incidente, S* el rayo reflejado, N' la normal al frente de onda refractado ordinario y N'' la normal al frente de onda extraordinario. Para $x < 0$ el medio es isótropo y para $x > 0$ el medio es birrefringente monoaxial.

ejes principales con uno de los del sistema de la superficie. En forma arbitraria se elige que z_2 coincida con el eje y y en consecuencia el eje óptico z_3 está contenido en el plano formado por el eje z y la normal a la superficie \check{n} (Figura 3).

Así definidos, la relación entre ambos sistemas está dada por las siguientes ecuaciones

$$\check{x} = \check{n} \quad (I.37)$$

$$\check{y} = \frac{1}{f_n} (\check{z}_3 \times \check{n}) \quad (I.38)$$

$$\check{z} = \frac{1}{f_n} \left\{ \check{n} \times (\check{z}_3 \times \check{n}) \right\} \quad (I.39)$$

donde el factor de normalización es

$$f_n = |\check{z}_3 \times \check{n}| = \sqrt{1 - (\check{z}_3 \cdot \check{n})^2} \quad (I.40)$$

Desarrollando el doble producto vectorial en (I.39) se obtiene

$$\check{z} = \frac{1}{f_n} \left\{ \check{z}_3 - (\check{z}_3 \cdot \check{n}) \check{n} \right\} \quad (I.41)$$

Las componentes de cualquier vector genérico $\vec{\Omega}$ en el sistema de ejes principales y en el de la superficie están relacionados por

$$\begin{pmatrix} (\check{n} \cdot \check{z}_1) \\ (\check{n} \cdot \check{z}_2) \\ (\check{n} \cdot \check{z}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & 0 & -(\check{n} \cdot \check{z}_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ (\check{n} \cdot \check{z}_3) & 0 & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\check{n} \cdot \check{x}) \\ (\check{n} \cdot \check{y}) \\ (\check{n} \cdot \check{z}) \end{pmatrix} \quad (\text{I.42})$$

I.2.2 CONDICIONES DE IGUALDAD DE LAS FASES SOBRE LA SUPERFICIE DE DISCONTINUIDAD

Sean \check{S} el rayo incidente, \check{S}^* el rayo reflejado, \check{N}' la normal al frente de onda refractado ordinario y \check{N}'' la normal al frente de onda refractado extraordinario. Se denotará con u a la velocidad de fase de las ondas en el medio isótropo y con u' y u'' a las de las ondas ordinaria y extraordinaria, respectivamente, que se propagan en el cristal. Los campos correspondientes al rayo incidente serán designados $\check{D}, \check{E}, \check{H}$; al reflejado $\check{D}^*, \check{E}^*, \check{H}^*$; al refractado ordinario $\check{D}', \check{E}', \check{H}'$ y al refractado extraordinario $\check{D}'', \check{E}'', \check{H}''$.

En la interfase, la variación temporal de los campos reflejados y transmitidos es la misma que la de los campos incidentes, y en consecuencia

$$\check{S} \cdot \check{y} = \check{S}^* \cdot \check{y} \quad \check{S} \cdot \check{z} = \check{S}^* \cdot \check{z} \quad (\text{I.43})$$

$$\frac{\check{S} \cdot \check{y}}{u} = \frac{\check{N}' \cdot \check{y}}{u'} \quad \frac{\check{S} \cdot \check{z}}{u} = \frac{\check{N}'' \cdot \check{z}}{u''} \quad (\text{I.44})$$

$$\frac{\check{S} \cdot \check{y}}{u} = \frac{\check{N}'' \cdot \check{y}}{u''} \quad \frac{\check{S} \cdot \check{z}}{u} = \frac{\check{N}'' \cdot \check{z}}{u''} \quad (\text{I.45})$$

Las fórmulas (I.43) corresponden a la ley de reflexión y las (I.44) y (I.45) a la ley de refracción. La (I.44) es la ley de Snell pues la velocidad de fase u' no depende, como se ha visto en (I.1), de \check{N}' y es igual a la velocidad de fase ordinaria u_0 . La fórmula (I.45) corresponde a una ley de Snell generalizada donde u'' depende de la dirección de la normal al frente de onda \check{N}'' . Para resolver esta última ecuación se necesita encontrar una relación que permita conocer la velocidad de fase extraordinaria en función de la onda incidente y de las características del cristal.

I.2.3 VELOCIDAD DE FASE DE LA ONDA REFRACTADA EXTRAORDINARIA

Escribiendo $(\check{N}'' \cdot \check{z})$ en función de las componentes de \check{N}'' en el sistema de ejes principales, las ecuaciones (I.45) resultan

$$(\check{N}'' \cdot \check{z}_2) = \frac{u''}{u} (\check{S} \cdot \check{y}) \quad (\text{I.46})$$

$$-(\check{N}'' \cdot \check{z}_1)(\check{n} \cdot \check{z}_3) + (\check{N}'' \cdot \check{z}_3)f_n = \frac{u''}{u} (\check{S} \cdot \check{z}) \quad (\text{I.47})$$

Definiendo la velocidad de fase extraordinaria relativa

$$w = \frac{u''}{u} \quad (\text{I.48})$$

y la birrefringencia b del cristal

$$b = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u^2} \quad (\text{I.49})$$

la ecuación (I.23) se convierte en

$$w^2 = \frac{u_e^2}{u^2} + b(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 \quad (\text{I.50})$$

De (I.46), (I.47), (I.50) y de la condición de normalización de \check{N}'' , surge la relación entre la velocidad de fase extraordinaria relativa y el rayo incidente dadas las características del cristal y la orientación del eje óptico respecto a la superficie de separación^{7,8}

$$A w^4 - B w^2 + C = 0 \quad (\text{I.51})$$

donde

$$A = \left[1 + b(\check{S} \cdot \check{z})^2 + b(\check{S} \cdot \check{y})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right]^2 - 4b(\check{S} \cdot \check{z})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (\text{I.52})$$

$$B = 2 \left[1 + b(\check{S} \cdot \check{z})^2 + b(\check{S} \cdot \check{y})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] \left[b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \frac{u_e^2}{u^2} \right] - 4b \frac{u_e^2}{u^2} (\check{S} \cdot \check{z})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (\text{I.53})$$

$$C = \left[b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \frac{u_0^2}{u^2} \right]^2 \quad (\text{I.54})$$

De la ecuación (I.51) surgen dos posibles valores para la velocidad de fase extraordinaria ya que w es definida positiva. De ellos sólo uno representa la velocidad físicamente posible. El segundo valor aparece porque en el desarrollo de la ecuación bicuadrática (I.51) se pierde la información de los signos de la componente de la normal extraordinaria en la dirección de la normal a la superficie $(\check{N}'' \cdot \check{x})$ y del producto $b(\check{S} \cdot \check{x})(\check{n} \cdot \check{z}_3)(\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}'' \cdot \check{x})$. Para recuperar esta información se puede recurrir a un método geométrico (construcción de Huygens) o a uno algebraico. Este último consiste en calcular, a partir de los valores de w obtenidos, los valores de las normales extraordinarias correspondientes y elegir la autoconsistente con (I.23).

A partir de (I.48), y por analogía con los medios isótropos, se puede considerar que la inversa de w representa un índice de refracción extraordinario n'' relativo al del medio isótropo n

$$\frac{1}{w} = \frac{n''}{n} \quad (\text{I.55})$$

donde n'' depende de la dirección de incidencia \check{S} , de la bi-

refringencia n de la orientación del eje óptico respecto
la superficie (z, z') y del índice de refracción de medio
isótropo.

CAPITULO I

REFLEXION Y REFRACCION EXTERNAS

Es bien conocido que los coeficientes de reflexión y transmisión para una interfase formada por dos medios isótropos, se obtienen a partir de las condiciones de contorno descomponiendo los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida en dos direcciones o modos de polarización: paralela y perpendicular al plano de incidencia. Se logra así relacionar las amplitudes en forma independiente para cada modo. Pero, en el caso en que el segundo medio sea un material birrefringente, la polarización de las ondas refractadas es independiente de la polarización de la onda incidente y la de la reflejada no depende únicamente de ella, por lo que no existe una separación en modos paralelo y perpendicular al plano de incidencia.

En este capítulo se presenta la resolución general de las condiciones de contorno para una interfase medio isótropo-cristal birrefringente monoaxial cuando una onda plana incide desde el medio isótropo sobre el cristal. Se calculan también los coeficientes de reflexión y transmisión postulando una polarización perpendicular o paralela al plano de incidencia para la onda incidente y teniendo en cuenta la polarización de las ondas reflejada y refractadas¹¹. Además, partiendo de las fórmulas generales, se calculan los coeficientes de reflexión y transmisión para casos con simetría.

II.1 CAMPOS ASOCIADOS A LAS ONDAS QUE SE PROPAGAN EN LOS DOS MEDIOS

Como se ha visto en I.2, las direcciones y velocidades de propagación de las ondas reflejada y refractadas se obtienen de la condición de igualdad de las fases sobre la superficie de discontinuidad. Por lo tanto en este capítulo se consideran sólo las amplitudes de los campos involucrados. Las condiciones de contorno sobre la superficie de separación de dos medios no magnéticos están dadas por

$$(\vec{D} \cdot \vec{x}) + (\vec{D}^* \cdot \vec{x}) = (\vec{D}' \cdot \vec{x}) + (\vec{D}'' \cdot \vec{x}) \quad (\text{II.1})$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{y}) + (\vec{E}^* \cdot \vec{y}) = (\vec{E}' \cdot \vec{y}) + (\vec{E}'' \cdot \vec{y}) \quad (\text{II.2})$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{z}) + (\vec{E}^* \cdot \vec{z}) = (\vec{E}' \cdot \vec{z}) + (\vec{E}'' \cdot \vec{z}) \quad (\text{II.3})$$

$$(\vec{H} \cdot \vec{x}) + (\vec{H}^* \cdot \vec{x}) = (\vec{H}' \cdot \vec{x}) + (\vec{H}'' \cdot \vec{x}) \quad (\text{II.4})$$

$$(\vec{H} \cdot \vec{y}) + (\vec{H}^* \cdot \vec{y}) = (\vec{H}' \cdot \vec{y}) + (\vec{H}'' \cdot \vec{y}) \quad (\text{II.5})$$

$$(\vec{H} \cdot \vec{z}) + (\vec{H}^* \cdot \vec{z}) = (\vec{H}' \cdot \vec{z}) + (\vec{H}'' \cdot \vec{z}) \quad (\text{II.6})$$

De estas seis ecuaciones sólo cuatro son independientes ya que dos cualesquiera de ellas pueden ser deducidas de las restantes usando las ecuaciones de Maxwell y proponiendo soluciones en ondas planas.

Para simplificar la resolución de las condiciones de contorno se eligen como datos una o dos componentes del vector desplazamiento eléctrico de las ondas incidente, reflejada y refractadas y se escriben todas las otras componentes en función de éstas. Se tratarán en forma separada las ondas que se propagan por el medio isótropo y las que lo hacen por el cristal monoaxial.

II.1.1 ONDAS QUE SE PROPAGAN POR EL MEDIO ISOTROPO

Se propagan por el medio isótropo la onda incidente y la onda reflejada. Como no se conoce su polarización se deben dar por conocidas dos componentes. Arbitrariamente se eligen las componentes \check{y} y \check{z} del vector desplazamiento eléctrico. Como el medio es isótropo, la relación entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico es

$$\vec{E} = \mu_0 u^2 \vec{D} \quad (\text{II.7})$$

siendo u la velocidad de fase de la onda en el medio isótropo. A partir de esta ecuación y de las (I.9)-(I.16) se obtienen las expresiones que relacionan las componentes de los campos asociados a la onda incidente

$$(\vec{D} \cdot \check{x}) = \rho(\vec{D} \cdot \check{y}) + \eta(\vec{D} \cdot \check{z}) \quad (\text{II.8})$$

$$(\check{K}.\check{x}) = \mu_0 u^2 \left[\rho(\check{D}.\check{y}) + \eta(\check{D}.\check{z}) \right] \quad (\text{II.9})$$

$$(\check{K}.\check{y}) = \mu_0 u^2 (\check{D}.\check{y}) \quad (\text{II.10})$$

$$(\check{K}.\check{z}) = \mu_0 u^2 (\check{D}.\check{z}) \quad (\text{II.11})$$

$$(\check{H}.\check{x}) = u \left[\eta\beta(\check{D}.\check{y}) - \rho\beta(\check{D}.\check{z}) \right] \quad (\text{II.12})$$

$$(\check{H}.\check{y}) = u \left[-\eta\rho\beta(\check{D}.\check{y}) - \frac{1 - \rho^2\beta^2}{\beta}(\check{D}.\check{z}) \right] \quad (\text{II.13})$$

$$(\check{H}.\check{z}) = u \left[\frac{1 - \eta^2\beta^2}{\beta}(\check{D}.\check{y}) + \eta\rho\beta(\check{D}.\check{z}) \right] \quad (\text{II.14})$$

donde

$$\beta = (\check{S}.\check{x}) \quad (\text{II.15})$$

$$\rho = - \frac{(\check{S}.\check{y})}{(\check{S}.\check{x})} \quad (\text{II.16})$$

$$\eta = - \frac{(\check{S}.\check{z})}{(\check{S}.\check{x})} \quad (\text{II.17})$$

y \check{S} es el versor normal al frente de onda (Figura 3).

Como la onda reflejada se propaga por el mismo medio que la onda incidente, las relaciones entre las componentes de sus campos \check{E}^* , \check{D}^* y \check{H}^* difieren sólo en los signos de β , ρ y η , que cambian porque cambia el signo de la componente según x de la normal al frente de onda. Escribiendo explícitamente las relaciones correspondientes se tiene

$$(\check{D}^* \cdot \check{x}) = -\rho(\check{D}^* \cdot \check{y}) - \eta(\check{D}^* \cdot \check{z}) \quad (\text{II.18})$$

$$(\check{E}^* \cdot \check{x}) = \mu_0 u^2 \left[-\rho(\check{D}^* \cdot \check{y}) - \eta(\check{D}^* \cdot \check{z}) \right] \quad (\text{II.19})$$

$$(\check{E}^* \cdot \check{y}) = \mu_0 u^2 (\check{D}^* \cdot \check{y}) \quad (\text{II.20})$$

$$(\check{E}^* \cdot \check{z}) = \mu_0 u^2 (\check{D}^* \cdot \check{z}) \quad (\text{II.21})$$

$$(\check{H}^* \cdot \check{x}) = u \left[\eta\beta(\check{D}^* \cdot \check{y}) - \rho\beta(\check{D}^* \cdot \check{z}) \right] \quad (\text{II.22})$$

$$(\check{H}^* \cdot \check{y}) = u \left[\eta\rho\beta(\check{D}^* \cdot \check{y}) + \frac{1 - \rho^2\beta^2}{\beta}(\check{D}^* \cdot \check{z}) \right] \quad (\text{II.23})$$

$$(\check{H}^* \cdot \check{z}) = u \left[-\frac{1 - \eta^2\beta^2}{\beta}(\check{D}^* \cdot \check{y}) - \eta\rho\beta(\check{D}^* \cdot \check{z}) \right] \quad (\text{II.24})$$

II.1.2 ONDAS QUE SE PROPAGAN POR EL MEDIO BIRREFRINGENTE MONOAXIAL

Las ondas que se propagan por el medio anisótropo son: la onda refractada ordinaria con dirección de avance \check{N}' y velocidad de fase u_o y la onda refractada extraordinaria con dirección \check{N}'' y velocidad de fase u'' . Esta velocidad de fase está relacionada con \check{N}'' , de acuerdo a (I.23), mediante la ecuación

$$u''^2 = u_o^2 + (u_o^2 - u_o^2) (\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 \quad (\text{II.25})$$

Además las amplitudes de las componentes principales del campo y del desplazamiento eléctrico de la onda extraordinaria que se propaga en un cristal monoaxial no magnético ni absorbente, con velocidades de fase principales $u_1 = u_2 = u_o$ y $u_3 = u_o$, se relacionan según (I.5) y (I.6) mediante

$$(\check{E}'' \cdot \check{z}_1) = \mu_o u_o^2 (\check{D}'' \cdot \check{z}_1) \quad (\text{II.26})$$

$$(\check{E}'' \cdot \check{z}_2) = \mu_o u_o^2 (\check{D}'' \cdot \check{z}_2) \quad (\text{II.27})$$

$$(\check{E}'' \cdot \check{z}_3) = \mu_o u_o^2 (\check{D}'' \cdot \check{z}_3) \quad (\text{II.28})$$

Las polarizaciones de las ondas refractadas están deter-

minadas por las relaciones entre las componentes principales del vector desplazamiento eléctrico o intensidad de campo eléctrico y las componentes principales del versor normal al frente de onda según las relaciones (I.24)-(I.27). Para la onda ordinaria estas relaciones son

$$\left. \begin{aligned} (\check{D}' \cdot \check{z}_1) &= - \frac{(\check{N}' \cdot \check{z}_2)}{(\check{N}' \cdot \check{z}_1)} (\check{D}' \cdot \check{z}_2) \\ (\check{D}' \cdot \check{z}_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II.29)}$$

$$\left. \begin{aligned} (\check{E}' \cdot \check{z}_1) &= - \frac{(\check{N}' \cdot \check{z}_2)}{(\check{N}' \cdot \check{z}_1)} (\check{E}' \cdot \check{z}_2) \\ (\check{E}' \cdot \check{z}_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II.30)}$$

y para la extraordinaria

$$\left. \begin{aligned} (\check{D}'' \cdot \check{z}_1) &= \frac{(\check{N}'' \cdot \check{z}_1)}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_2)} (\check{D}'' \cdot \check{z}_2) \\ (\check{D}'' \cdot \check{z}_3) &= \frac{(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 - 1}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_2) (\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} (\check{D}'' \cdot \check{z}_2) \end{aligned} \right\} \text{(II.31)}$$

$$\left. \begin{aligned} (\check{E}'' \cdot \check{z}_1) &= \frac{(\check{N}'' \cdot \check{z}_1)}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_2)} (\check{E}'' \cdot \check{z}_2) \\ (\check{E}'' \cdot \check{z}_3) &= \frac{u_o^2}{u_o^2} \frac{(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 - 1}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_2) (\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} (\check{E}'' \cdot \check{z}_2) \end{aligned} \right\} \text{(II.32)}$$

Haciendo uso de estas relaciones se pueden escribir todas las componentes de los campos refractados en función de la componente según el eje y del vector desplazamiento. De las ecuaciones (I.13)-(I.16), (II.29)-(II.32) y haciendo uso de la rotación inversa a la (I.42), se obtienen las expresiones de las amplitudes de los campos en el sistema de la superficie en función de la componente y del desplazamiento eléctrico.

Las relaciones resultantes para la onda ordinaria son

$$\check{D}' = \left[\rho' \check{x} + \check{y} + \eta' \check{z} \right] (\check{D}' \cdot \check{y}) \quad (\text{II.33})$$

$$\check{E}' = \left[\delta' \check{x} + u_0^2 \check{y} + \lambda' \check{z} \right] \mu_0 (\check{D}' \cdot \check{y}) \quad (\text{II.34})$$

$$\check{H}' = \left[\alpha' \check{x} + \beta' \check{y} + \gamma' \check{z} \right] (\check{D}' \cdot \check{y}) \quad (\text{II.35})$$

con

$$\rho' = \frac{-f_n^2 (\check{N}' \cdot \check{y})}{(\check{N}' \cdot \check{x}) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.36})$$

$$\eta' = \frac{f_n (\check{N}' \cdot \check{y})(\check{x} \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}' \cdot \check{x}) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.37})$$

$$\delta' = u_0^2 \rho' \quad (\text{II.38})$$

$$\lambda' = u_0^2 \eta' \quad (\text{II.39})$$

$$\alpha' = u_0 f_n \frac{(\check{x} \cdot \check{z}_3) - (\check{N}' \cdot \check{x})(\check{N}' \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}' \cdot \check{x}) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.40})$$

$$\beta' = \frac{-u_0 f_n (\check{N}' \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{y})}{(\check{N}' \cdot \check{x}) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.41})$$

$$\gamma' = u_0 \frac{f_n^2 - (\check{N}' \cdot \check{z}_3)^2 + (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{x})}{(\check{N}' \cdot \check{x}) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.42})$$

Para la onda extraordinaria se obtiene

$$\check{D}'' = [\rho'' \check{x} + \check{y} + \eta'' \check{z}] (\check{D}'' \cdot \check{y}) \quad (\text{II.43})$$

$$\check{E}'' = [\sigma'' \check{x} + u_0^2 \check{y} + \lambda'' \check{z}] \mu_0 (\check{D}'' \cdot \check{y}) \quad (\text{II.44})$$

$$\check{H}'' = [\alpha'' \check{x} + \beta'' \check{y} + \gamma'' \check{z}] (\check{D}'' \cdot \check{y}) \quad (\text{II.45})$$

con

$$\rho'' = \frac{(\check{N}'' \cdot \check{x})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}'' \cdot \check{y})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.46})$$

$$\eta'' = \frac{-f_n^2 + (\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}'' \cdot \check{x})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)}{f_n (\check{N}'' \cdot \check{y})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.47})$$

$$\delta'' = \frac{u_o^2 (\check{N}'' \cdot \check{x})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3) - u''^2 (\check{x} \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}'' \cdot \check{y})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.48})$$

$$\lambda'' = \frac{u_o^2 \left[(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 - 1 \right] - u_o^2 (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{N}'' \cdot \check{x}) + u''^2 (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2}{f_n (\check{N}'' \cdot \check{y})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.49})$$

$$\alpha'' = \frac{-u'' f_n}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.50})$$

$$\beta'' = \frac{u'' \left[(\check{N}'' \cdot \check{x}) - (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3) \right]}{f_n (\check{N}'' \cdot \check{y})(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.51})$$

$$\gamma'' = \frac{u'' (\check{x} \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)} \quad (\text{II.52})$$

II.2 RESOLUCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO SOBRE LA SUPERFICIE DE SEPARACION

Como las direcciones de las normales a los frentes de onda, las velocidades de fase y la relación entre las

normales y los rayos son conocidas (ver I.2.2), del sistema (II.1)-(II.6) sólo cuatro ecuaciones son independientes. Las cuatro condiciones de contorno elegidas para resolver son

$$(\vec{D} \cdot \vec{x}) + (\vec{D}^* \cdot \vec{x}) = (\vec{D}' \cdot \vec{x}) + (\vec{D}'' \cdot \vec{x}) \quad (\text{II.53})$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{y}) + (\vec{E}^* \cdot \vec{y}) = (\vec{E}' \cdot \vec{y}) + (\vec{E}'' \cdot \vec{y}) \quad (\text{II.54})$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{z}) + (\vec{E}^* \cdot \vec{z}) = (\vec{E}' \cdot \vec{z}) + (\vec{E}'' \cdot \vec{z}) \quad (\text{II.55})$$

$$(\vec{H} \cdot \vec{y}) + (\vec{H}^* \cdot \vec{y}) = (\vec{H}' \cdot \vec{y}) + (\vec{H}'' \cdot \vec{y}) \quad (\text{II.56})$$

Reemplazando en este sistema de ecuaciones las expresiones de las componentes de los campos incidente, reflejado y refractados dados por (II.8), (II.10), (II.11), (II.13), (II.18), (II.20), (II.21), (II.23), (II.33)-(II.35) y (II.43)-(II.45) se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones para las incógnitas $(\vec{D}^* \cdot \vec{y})$, $(\vec{D}^* \cdot \vec{z})$, $(\vec{D}' \cdot \vec{y})$ y $(\vec{D}'' \cdot \vec{y})$. Las soluciones de dicho sistema son

$$(\vec{D}' \cdot \vec{y}) = \frac{NB_2 - MA_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \quad (\text{II.57})$$

$$(\vec{D}'' \cdot \vec{y}) = \frac{MA_1 - NB_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \quad (\text{II.58})$$

$$(\check{D}^* \check{y}) = \frac{u_0^2}{u^2} \frac{N(B_2 - B_1) - M(A_2 - A_1)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} - (\check{D} \check{y}) \quad (\text{II.59})$$

$$(\check{D}^* \check{z}) = \frac{1}{u^2} \frac{\lambda' (NB_2 - MA_2) + \lambda'' (MA_1 - NB_1)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} - (\check{D} \check{z}) \quad (\text{II.60})$$

donde

$$A_1 = \rho \eta \beta^2 u_0^2 + (1 - \rho^2 \beta^2) \lambda' - \beta \beta' u \quad (\text{II.61})$$

$$A_2 = \rho \eta \beta^2 u_0^2 + (1 - \rho^2 \beta^2) \lambda'' - \beta \beta'' u \quad (\text{II.62})$$

$$B_1 = \rho u_0^2 + \eta \lambda' + \rho' u^2 \quad (\text{II.63})$$

$$B_2 = \rho u_0^2 + \eta \lambda'' + \rho'' u^2 \quad (\text{II.64})$$

$$M = 2u^2 \left[\rho (\check{D} \check{y}) + \eta (\check{D} \check{z}) \right] \quad (\text{II.65})$$

$$N = 2u^2 \left[\rho \eta \beta^2 (\check{D} \check{y}) + (1 - \rho^2 \beta^2) (\check{D} \check{z}) \right] \quad (\text{II.66})$$

II.3 COEFICIENTES DE REFLEXION Y TRANSMISION

Los coeficientes de reflexión y transmisión se definen,

como en el caso isótropo, para una determinada polarización del haz incidente (paralela o perpendicular al plano de incidencia) de manera que ellos sean representativos no sólo de la amplitud sino también de la polarización de las ondas reflejada y transmitidas. En los cristales monoaxiales, la existencia de una dirección preferencial, z_3 , lleva no sólo a que la polarización de las ondas refractadas esté determinada por z_3 , sino también a que no se puedan separar las amplitudes de los campos asociados a la onda reflejada y a las transmitidas en modos de polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia. Esto puede verse claramente de (II.57)-(II.66), ya que los coeficientes $\rho', \lambda', \beta', \rho'', \lambda''$ y β'' dependen de la dirección del eje óptico (Ver (II.36), (II.39), (II.41), (II.46), (II.49) y (II.51)).

Para poder definir coeficientes de reflexión y transmisión para un modo de polarización de la onda plana incidente, se introduce un sistema de coordenadas x', y', z' característico del plano de incidencia y relacionado con el sistema de la superficie por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\text{sen } \delta \\ 0 & \text{sen } \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{II.67})$$

II.3.1 COEFICIENTES DE REFLEXION

A partir de (II.59),(II.60),(II.67) y la relación entre intensidad de campo y desplazamiento eléctricos (II.7), se pueden obtener las componentes del campo eléctrico reflejado \vec{E}^* en las direcciones perpendicular y paralela al plano de incidencia, en función de las componentes del campo eléctrico incidente \vec{E} . Sean E_s y E_s^* las componentes perpendiculares, y E_p y E_p^* las componentes paralelas al plano de incidencia de los campos incidente y reflejado (Figura 4).

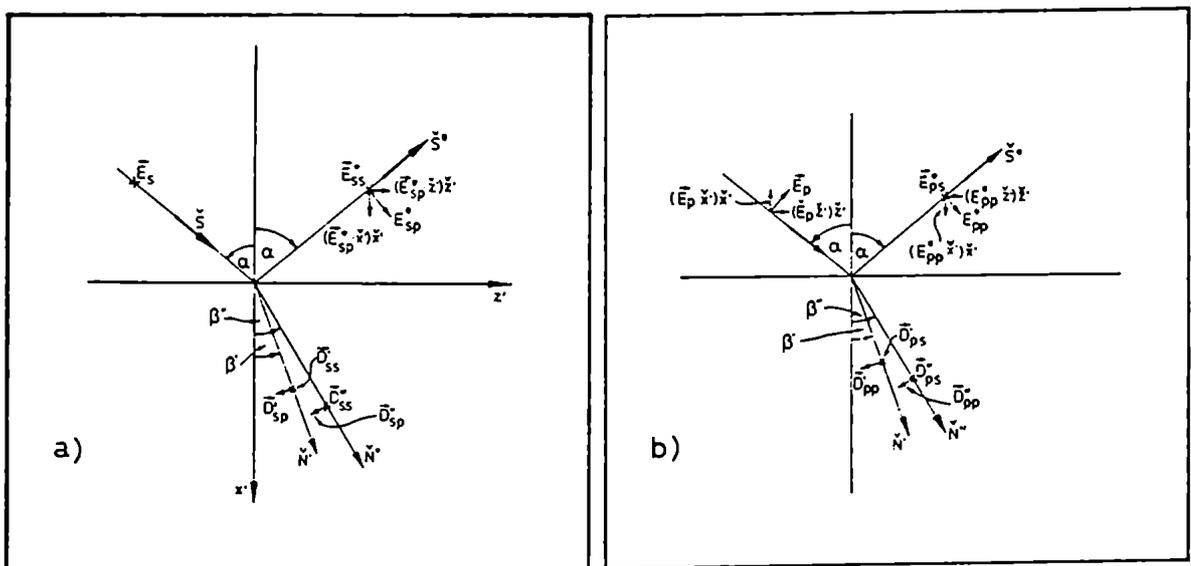


Figura 4 :Plano de incidencia y campos para una onda plana linealmente polarizada a) perpendicular y b) paralelamente al plano de incidencia.

La componente paralela al plano de incidencia del campo

reflejado será suma de las contribuciones debidas al campo incidente paralelo y perpendicular

$$E_p^* = E_{pp}^* + E_{sp}^* \quad (\text{II.68})$$

Análogamente, la componente perpendicular del campo reflejado es

$$E_s^* = E_{ss}^* + E_{ps}^* \quad (\text{II.69})$$

La relación entre las componentes paralelas y perpendiculares reflejadas e incidentes resulta

$$E_p^* = \left\{ \frac{2(u_o^2 \text{sen } \delta + \lambda' \cos \delta)(A_2 \text{tg } \alpha + B_2 \cos \delta)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} - \frac{2(u_o^2 \text{sen } \delta + \lambda'' \cos \delta)(A_1 \text{tg } \alpha + B_1 \cos \delta)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} - 1 \right\} E_p + \left\{ \frac{2 \text{sen } \delta \cos \alpha}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[B_1 (u_o^2 \text{sen } \delta + \lambda'' \cos \delta) - B_2 (u_o^2 \text{sen } \delta + \lambda' \cos \delta) \right] \right\} E_s \quad (\text{II.70})$$

$$\begin{aligned}
E_o^* = & \left\{ \frac{2 \operatorname{sen} \delta \cos \alpha}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[B_1 (u_o^2 \cos \delta - \lambda \operatorname{sen} \delta) - \right. \right. \\
& \left. \left. - B_2 (u_o^2 \cos \delta - \lambda' \operatorname{sen} \delta) \right] - 1 \right\} E_s + \\
& + \left\{ \frac{2 \cos \alpha (u_o^2 \cos^2 \delta - \lambda' \operatorname{sen} \delta) (A_2 \operatorname{tg} \alpha + B_2 \cos \delta)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \right. \\
& \left. - \frac{2 \cos \alpha (u_o^2 \cos^2 \delta - \lambda'' \operatorname{sen} \delta) (A_1 \operatorname{tg} \alpha + B_1 \cos \delta)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \right\} E_s
\end{aligned}
\tag{II.71}$$

donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 están definidos por (II.61)-(II.64), λ' por (II.39), λ'' por (II.49), α es el ángulo de incidencia y δ el ángulo que forma el plano de incidencia con el plano que contiene al eje óptico y a la normal a la superficie de separación .

De (II.70) y (II.71) se hace evidente que en general el campo reflejado tendrá componentes perpendicular y paralela al plano de incidencia, aún cuando el campo incidente esté polarizado en alguna de estas direcciones. Esto da lugar a la definición de cuatro coeficientes de reflexión

$$R_{oo} = \frac{E_{ss}^*}{E_o}
\tag{II.72}$$

$$R_{sP} = \frac{E_{sP}^*}{E_s} \quad (\text{II.73})$$

$$R_{PP} = \frac{E_{PP}^*}{E_P} \quad (\text{II.74})$$

$$R_{Ps} = \frac{E_{Ps}^*}{E_P} \quad (\text{II.75})$$

En consecuencia, la relación entre las amplitudes de los campos eléctricos reflejado e incidente resulta

$$\begin{pmatrix} E_s \\ E_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ss} & R_{Ps} \\ R_{sP} & R_{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s \\ E_P \end{pmatrix} \quad (\text{II.76})$$

Como E_P y E_P^* son definidos positivos y

$$E_P = \frac{(\vec{E}_P \cdot \check{\mathcal{J}}')}{\cos \alpha} = \frac{(\vec{E}_P \cdot \check{\mathcal{X}}')}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{II.77})$$

$$E_P^* = \frac{(\vec{E}_P^* \cdot \check{\mathcal{J}}')}{\cos \alpha} = - \frac{(\vec{E}_P^* \cdot \check{\mathcal{X}}')}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{II.78})$$

se podrían haber definido los coeficientes de reflexión a partir de las componentes \mathcal{X}' , difiriendo en un signo de los coeficientes definidos a partir de la componente \mathcal{J}' ¹².

II.3.2 COEFICIENTES DE REFLEXION PARA UNA INTERFASE AIRE-CALCITA

Efectuando los cálculos para la interfase aire-calcita ($n = 1$, $n_o = 1.6584$, $n_e = 1.4865$) se obtienen las curvas correspondientes a R_{ss} , R_{ps} , R_{pp} y R_{sp} en función del ángulo de incidencia para orientaciones del eje óptico y plano de incidencia arbitrarios (Figuras 5 y 6)

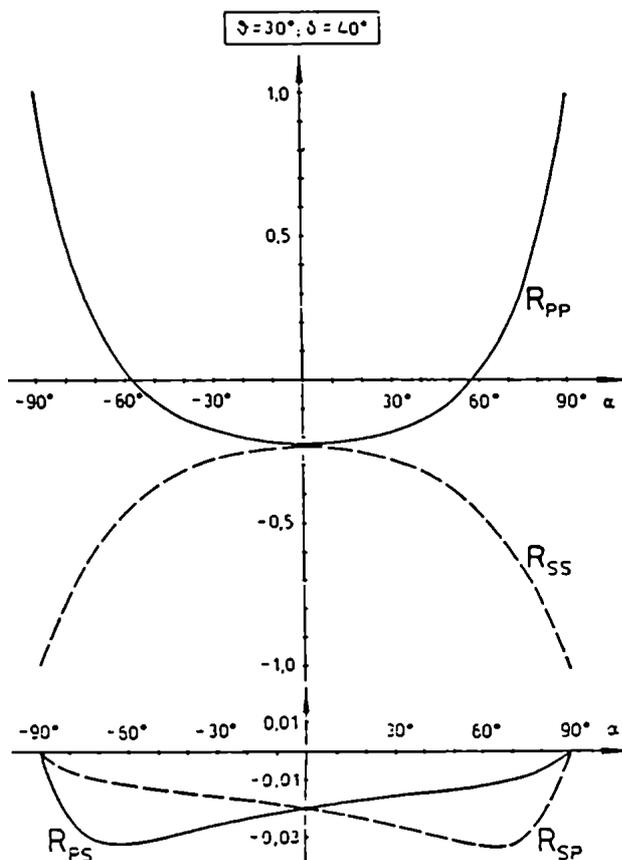


Figura 5: coeficientes de reflexión para una interfase aire-calcita con $\vartheta = 30^\circ$ y $\delta = 40^\circ$.

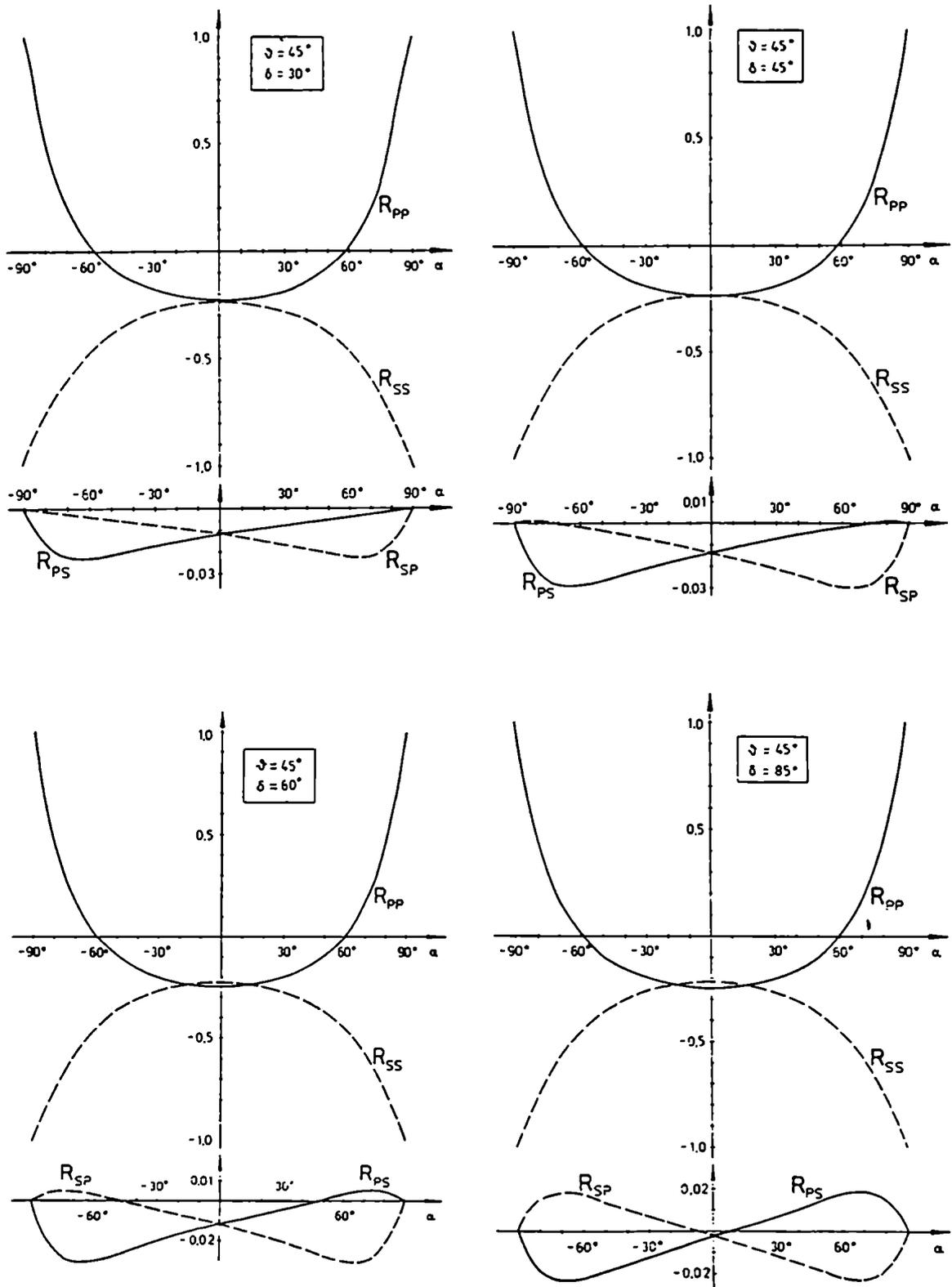


Figura 6: coeficientes de reflexión para una interfaz aire-calcita con $\theta = 45^\circ$ y diferentes valores de δ .

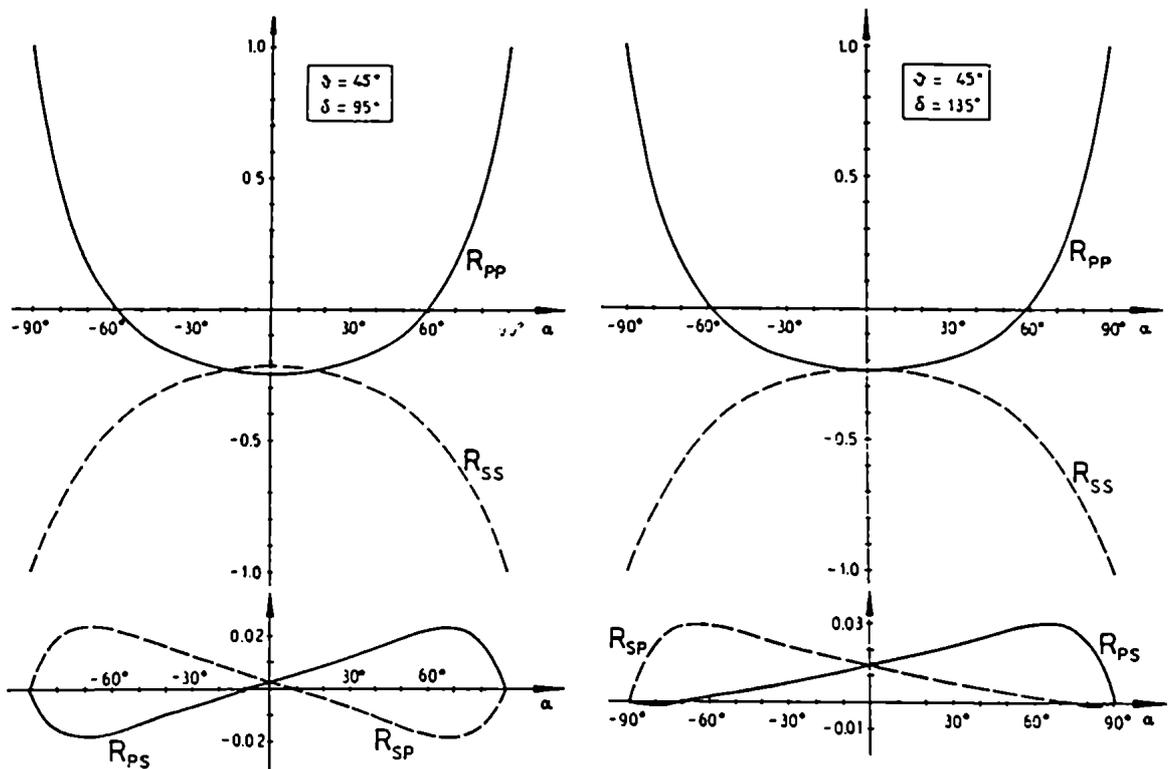


Figura 6 (continuación)

De las mismas resulta

$$R_{ss}(-\alpha, \delta) = R_{ss}(\alpha, \delta) \quad (\text{II.79})$$

$$R_{pp}(-\alpha, \delta) = R_{pp}(\alpha, \delta) \quad (\text{II.80})$$

$$R_{sp}(-\alpha, \delta) = R_{ps}(\alpha, \delta) \quad (\text{II.81})$$

$$R_{ss}(\alpha, \delta) = R_{ss}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.82})$$

$$R_{pp}(\alpha, \delta) = R_{pp}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.83})$$

$$R_{ps}(-\alpha, \delta) = -R_{ps}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.84})$$

$$R_{sp}(-\alpha, \delta) = -R_{sp}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.85})$$

$$R_{sp}(\alpha=0^\circ, \delta) = R_{ps}(\alpha=0^\circ, \delta) \quad (\text{II.86})$$

Además para incidencia rasante ($\alpha \rightarrow 90^\circ$) se obtiene el mismo resultado que para medios isótropos: el campo reflejado sufre un desfase de π respecto del incidente. En cambio para incidencia normal ($\alpha=0^\circ$) existe una pequeña diferencia entre R_{ss} y R_{pp} debido a que la polarización de la onda incidente no es la misma con respecto a la dirección del eje óptico.

Cuando el haz incidente está polarizado en forma paralela al plano de incidencia, existe un ángulo de incidencia para el cual se anula R_{pp} . Pero como R_{sp} es distinto de cero existe rayo reflejado. Existe en consecuencia un ángulo de incidencia α_{SB} llamado, por analogía con el caso de medios dieléctricos absorbentes, ángulo de pseudo-Brewster^o para el cual la intensidad del rayo reflejado

$$R_p^2 = R_{pp}^2 + R_{ps}^2 \quad (\text{II.87})$$

es mínima. Como puede verse de la Figura 7, este ángulo varía poco con el plano de incidencia y no es simétrico con respecto a $\delta=90^\circ$, o lo que es equivalente, no es exactamente el mismo para ángulos de incidencia positivos y negativos. Esto se debe al carácter asimétrico de R_{ps} respecto del ángulo de incidencia.

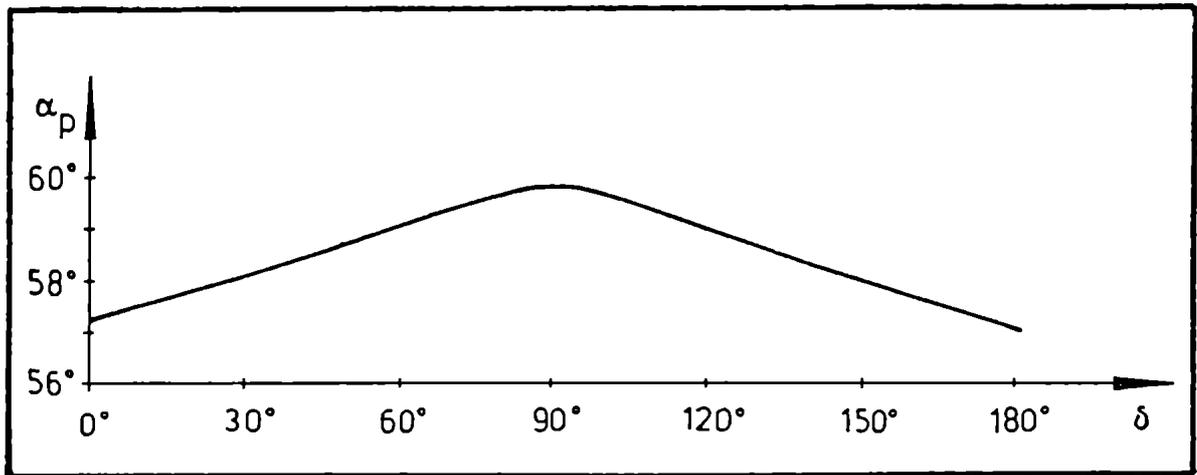


Figura 7: Ángulo de pseudo-Brewster en función de δ para una interfase aire-calcita y $\theta=45^\circ$.

II.3.3 COEFICIENTES DE TRANSMISION

Como se ha visto en I.1, las polarizaciones de las ondas que se pueden propagar en un cristal monoaxial, en una

dada dirección, son perpendiculares entre sí y están unívocamente determinadas por dicha dirección de avance del frente de onda y por las propiedades ópticas del cristal. Cuando una onda plana se refracta en una interfase medio isotropo-cristal monoaxial, las dos ondas transmitidas no tienen la misma dirección de propagación y en consecuencia los campos asociados a las ondas ordinaria y extraordinaria no son ortogonales. En cambio, la polarización de cada onda transmitida estará determinada por su dirección de propagación y por las propiedades ópticas del cristal, y será independiente de la polarización de la onda que incide sobre la superficie de separación (ver (II.30) y (II.32)). Sin embargo, las amplitudes de las ondas refractadas dependerán no sólo de la amplitud de la onda incidente sino también de su polarización. En consecuencia, se definen cuatro coeficientes de transmisión correspondientes a los dos posibles modos de polarización de la onda incidente y a las dos ondas transmitidas (ordinaria y extraordinaria)

$$T_{so} = \frac{E'}{E_s} \quad (\text{II.88})$$

$$T_{s\circ} = \frac{E''}{E_s} \quad (\text{II.89})$$

$$T_{p0} = \frac{E'}{E_p} \quad (\text{II.90})$$

$$T_{pe} = \frac{E''}{E_p} \quad (\text{II.91})$$

donde E' y E'' son los módulos de las amplitudes de los campos ordinario y extraordinario respectivamente.

Las curvas de las figuras 8 y 9 muestran cómo varían

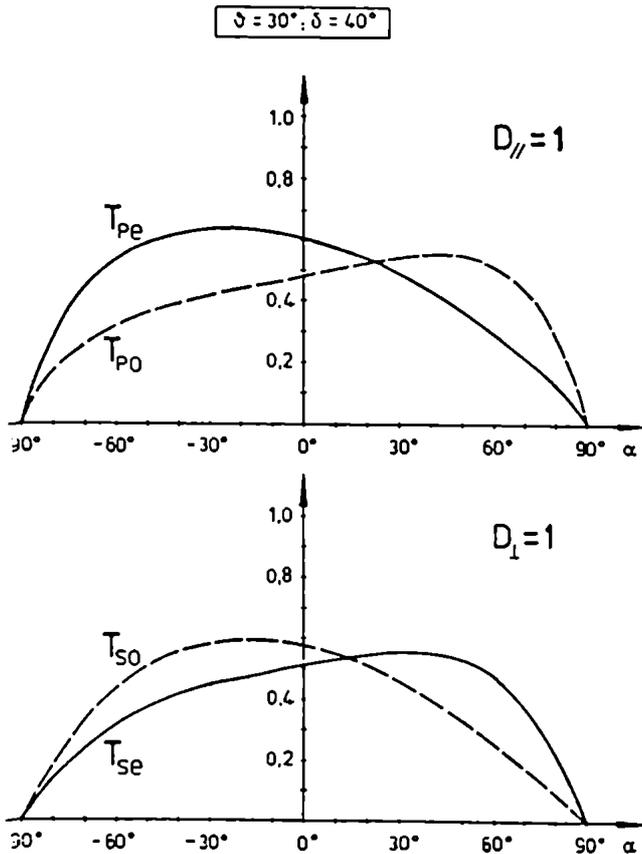


Figura 8 : Coeficientes de transmisión para una interfase aire-calcita con $\vartheta = 30^\circ$ y $\delta = 40^\circ$.

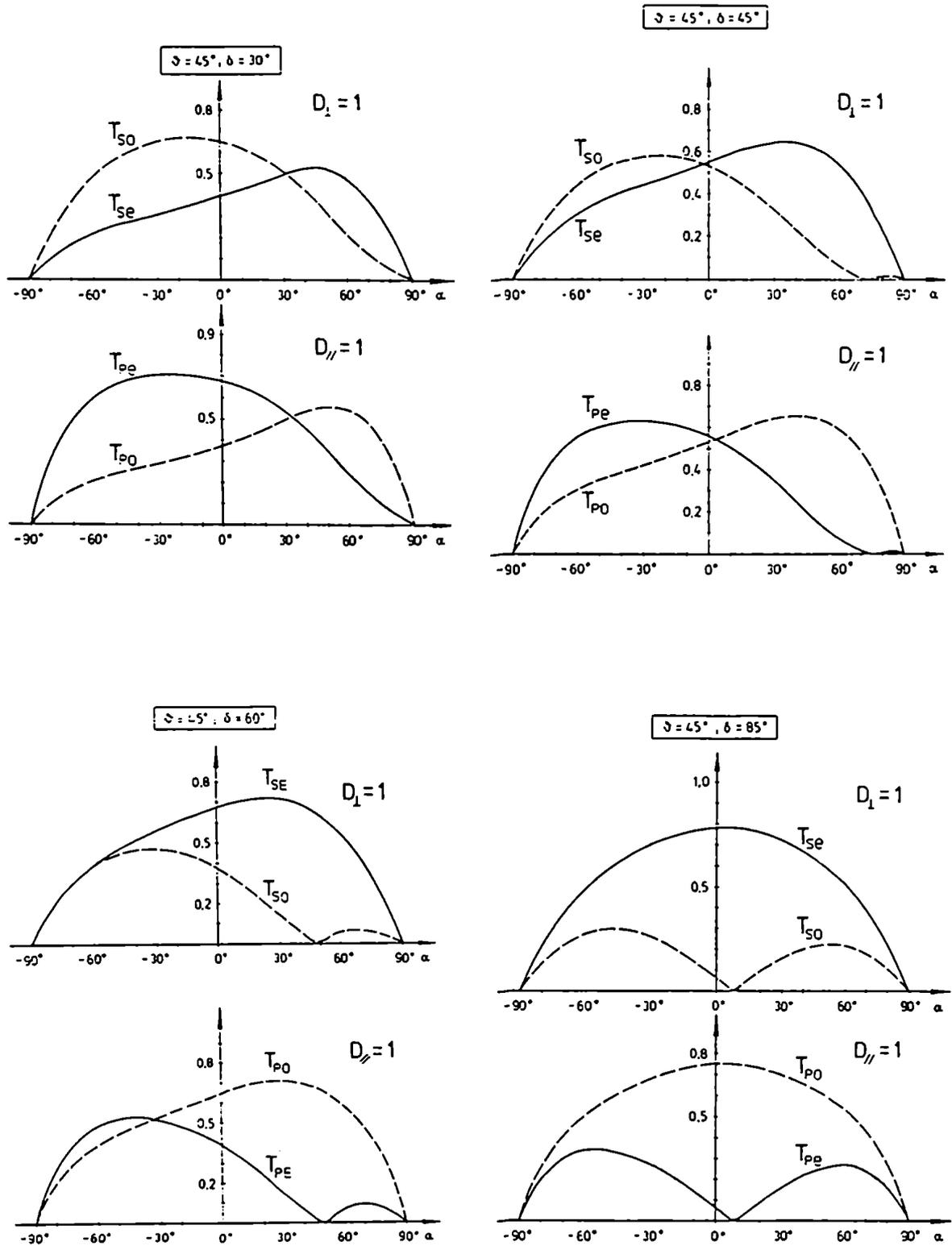


Figura 9 : Coeficientes de transmisión para una interfase aire-calcita con $\vartheta = 45^\circ$ y diferentes valores de δ .

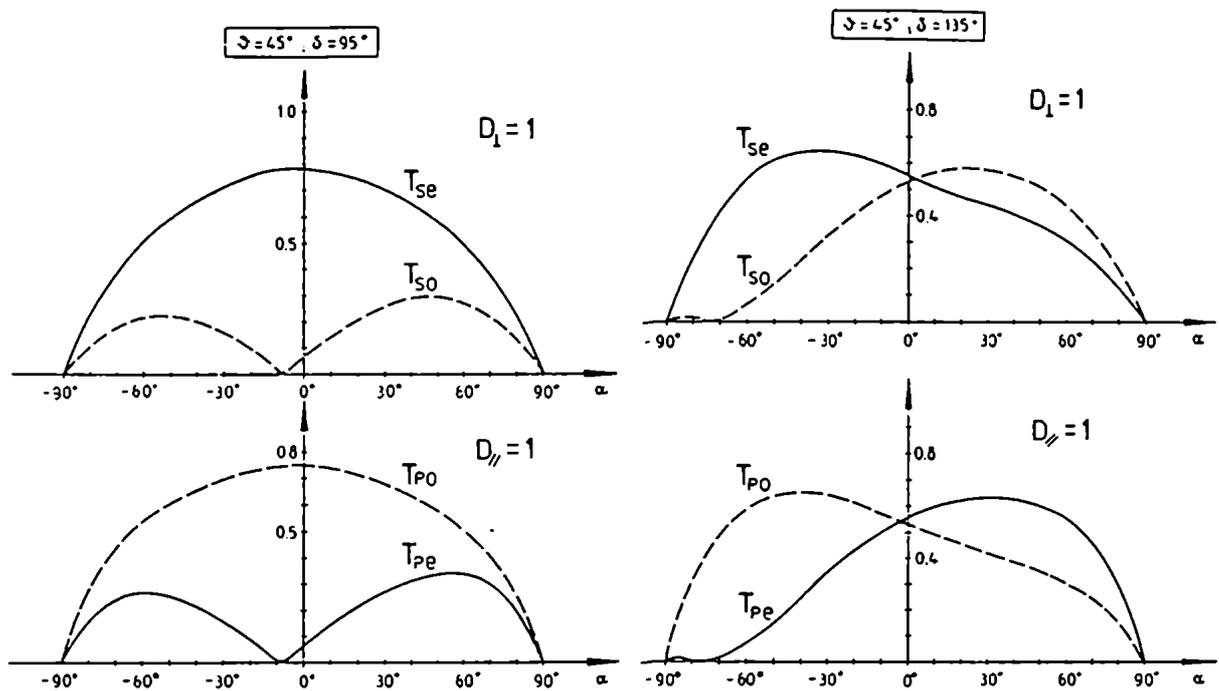


Figura 9 (continuación)

estos coeficientes con el ángulo de incidencia para una interfase aire-calcita y distintos planos de incidencia. El fuerte carácter asimétrico de las curvas se debe a la dirección preferencial del eje óptico.

Sin embargo, existe cierta simetría con respecto al plano de incidencia. De la figura 9 se observa

$$T_{se}(-\alpha, \delta) = T_{se}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.92})$$

$$T_{so}(-\alpha, \delta) = T_{so}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.93})$$

$$T_{p_o}(-\alpha, \delta) = T_{p_o}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.94})$$

$$T_{p_o}(-\alpha, \delta) = T_{p_o}(\alpha, 180^\circ - \delta) \quad (\text{II.95})$$

Han sido resueltas las condiciones de contorno para una interfase medio isótropo-cristal monoaxial y calculados los coeficientes de reflexión y transmisión. Estos fueron definidos para los modos de polarización propios de los medios isótropos: paralelo y perpendicular al plano de incidencia. Como los modos característicos de la propagación de ondas planas en medios anisótropos monoaxiales son el modo ordinario y el extraordinario, la polarización de la onda incidente no afecta la polarización de las ondas refractadas; sólo determina las amplitudes relativas de las mismas. En el caso general se encontró que la polarización del rayo reflejado no coincide con la del rayo incidente y esto está contemplado en la definición de cuatro coeficientes de reflexión. Las curvas obtenidas muestran que independientemente de la dirección del eje óptico, los coeficientes R_{ss} y R_{pp} son simétricos respecto al ángulo de incidencia. En cambio, las correspondientes a los coeficientes de transmisión muestran un carácter fuertemente asimétrico.

II.4 CASOS DE SIMETRÍA

Los resultados presentados hasta aquí corresponden a planos de incidencia que no coinciden con ningún plano de simetría. Si bien es posible determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para estos casos a partir de las fórmulas generales, es interesante determinar en forma explícita algunos de ellos.

II.4.1 PLANO DE INCIDENCIA PERPENDICULAR AL PLANO DEFINIDO POR LA NORMAL A LA SUPERFICIE Y EL EJE OPTICO

En este caso el ángulo δ es igual a $\pi/2$, lo que implica

$$(\check{S} \cdot \check{\mathcal{J}}) = (\check{S}^* \cdot \check{\mathcal{J}}) = (\check{N}' \cdot \check{\mathcal{J}}) = (\check{N}'' \cdot \check{\mathcal{J}}) \quad (\text{II.96})$$

La velocidad de fase de la onda extraordinaria resulta, a partir de (I.51)

$$u''^2 = \frac{u_o^2 + (u_o^2 - u_e^2)(\check{x} \cdot \check{z}_3)^2}{u^2 + (u_o^2 - u_e^2)(\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 (\check{S} \cdot \check{y})^2} u^2 \quad (\text{II.97})$$

Se obtienen entonces expresiones explícitas para los coeficientes de reflexión a partir de (II.70) y (II.71)

$$R_{pp} = \frac{u^2 f_n^2 F_4 C_1 + u_o (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 (\check{S} \cdot \check{y})^2 C_3 F_1}{u_o (\check{S} \cdot \check{y})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 C_3 F_3 + u^2 f_n^2 C_4 F_4} \quad (\text{II.98})$$

$$R_{ps} = -R_{sp} = \frac{2(\check{S} \cdot \check{x}) u_o u^2 f_n (\check{x} \cdot \check{z}_3) (\check{S} \cdot \check{y}) G_1}{u_o (\check{S} \cdot \check{y})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 C_3 F_3 + u^2 f_n^2 C_4 F_4} \quad (\text{II.99})$$

$$R_{ss} = \frac{u_o (\check{S} \cdot \check{y})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 C_2 F_3 + u^2 f_n^2 C_4 F_2}{u_o (\check{S} \cdot \check{y})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 C_3 F_3 + u^2 f_n^2 C_4 F_4} \quad (\text{II.100})$$

con

$$C_1 = -u(\check{S} \cdot \check{x}) + u_o (\check{N}' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.101})$$

$$C_2 = u_o (\check{S} \cdot \check{x}) - u(\check{N}' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.102})$$

$$C_3 = u_o (\check{S} \cdot \check{x}) + u(\check{N}' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.103})$$

$$C_4 = u(\check{S} \cdot \check{x}) + u_o (\check{N}' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.104})$$

$$F_1 = -u''u(\check{S} \cdot \check{x}) + u_o^2 (\check{N}'' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.105})$$

$$F_2 = u''(\check{S} \cdot \check{x}) - u(\check{N}'' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.106})$$

$$F_3 = u''u(\check{S} \cdot \check{x}) + u_o^2 (\check{N}'' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.107})$$

$$F_4 = u''(\check{S} \cdot \check{x}) + u(\check{N}'' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.108})$$

$$G_1 = u_o (\check{N}'' \cdot \check{x}) - u''(\check{N}' \cdot \check{x}) \quad (\text{II.109})$$

y

$$(\check{N}' \cdot \check{x})^2 = 1 - \frac{u_o^2}{u^2} (\check{S} \cdot \check{y})^2 \quad (\text{II.110})$$

$$(\check{N}'' \cdot \check{x}) = 1 - \frac{u''^2}{u^2} (\check{S} \cdot \check{y})^2 \quad (\text{II.111})$$

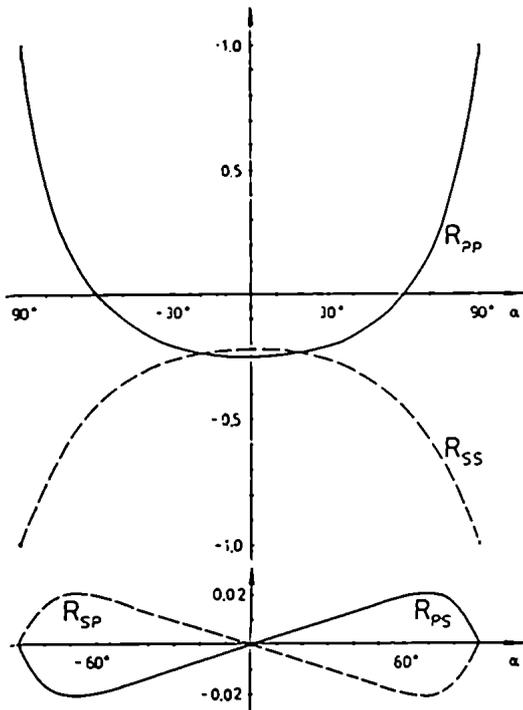


Figura 10 : Coeficientes de reflexión para una interfase aire-calcita con $\vartheta=45^\circ$ y $\delta=90^\circ$.

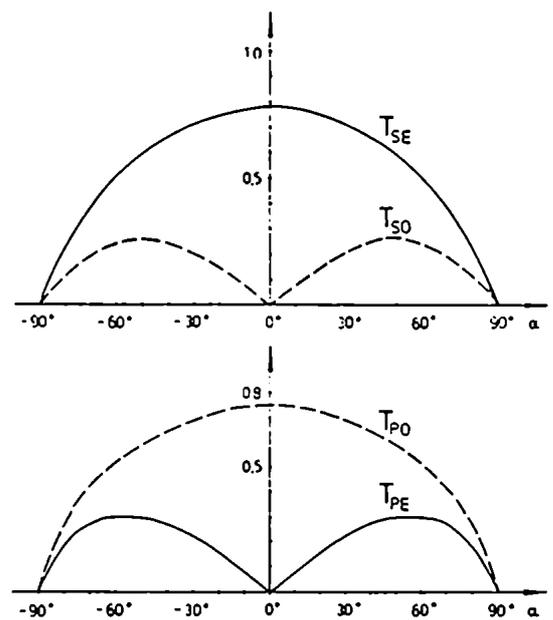


Figura 11 : Coeficientes de transmisión para una interfase aire-calcita con $\vartheta=45^\circ$ y $\delta=90^\circ$.

Usando las fórmulas particulares o las generales, para δ muy próximo a 90° ($\delta=89.999^\circ$), se obtienen las curvas de las figuras 10 y 11 para una interfase aire-calcita. El carácter simétrico es coherente con el hecho de que el plano definido por \tilde{x} y \tilde{z}_s sea un plano de simetría. Además puede verse que para incidencia normal a la interfase los coeficientes de reflexión resultan

$$R_{PP}(\alpha=0^\circ) = \frac{n - n_o}{n + n_o} \quad (\text{II.112})$$

$$R_{s_s}(\alpha=0^\circ) = \frac{n - n''}{n + n''} \quad (\text{II.113})$$

$$R_{p_s}(\alpha=0^\circ) = R_{s_p}(\alpha=0^\circ) = 0 \quad (\text{II.114})$$

donde n'' corresponde al índice de refracción extraordinario para incidencia normal, que está dado por

$$n'' = \frac{n_o}{\sqrt{1 + \left[\frac{n_e^2}{n_o^2} - 1 \right] \text{sen}^2 \vartheta}} \quad (\text{II.115})$$

II.4.2 EJE OPTICO PARALELO AL PLANO DE INCIDENCIA

En este caso se anulan las componentes según el eje y de todas las normales a los frentes de onda

$$(\check{S} \cdot \check{y}) = (\check{S}^* \cdot \check{y}) = (\check{N}' \cdot \check{y}) = (\check{N}'' \cdot \check{y}) = 0 \quad (\text{II.116})$$

y por lo tanto se anulan los denominadores de las ecuaciones (II.31) y (II.32).

Resolviendo el sistema de ecuaciones (I.20) con la condición $(\check{N} \cdot \check{z}_2) = 0$, se obtiene que en el sistema de ejes principales, el vector desplazamiento de la onda ordinaria tiene sólo componente z_2 no nula y el de la onda extraordinaria está contenido en el plano $z_1 z_3$ tal que

$$(\check{D}'' \cdot \check{z}_1) = - \frac{(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}'' \cdot \check{z}_1)} (\check{D}'' \cdot \check{z}_3) \quad (\text{II.117})$$

Resolviendo las condiciones de contorno en el sistema de la superficie, la relación entre los campos reflejado, refractados e incidente resulta

$$(\check{E}^* \cdot \check{y}) = \frac{u_o (\check{S} \cdot \check{x}) - u (\check{N}' \cdot \check{x})}{u_o (\check{S} \cdot \check{x}) + u (\check{N}' \cdot \check{x})} (\check{E} \cdot \check{y}) \quad (\text{II.118})$$

$$(\check{E}^* \cdot \check{z}) = \frac{\lambda'' (\check{N}'' \cdot \check{x}) - u u'' (\check{S} \cdot \check{x})}{\lambda'' (\check{N}'' \cdot \check{x}) + u u'' (\check{S} \cdot \check{x})} (\check{E} \cdot \check{z}) \quad (\text{II.119})$$

$$(\check{E}' \cdot \check{y}) = \frac{2 u_o (\check{S} \cdot \check{x})}{u_o (\check{S} \cdot \check{x}) + u (\check{N}' \cdot \check{x})} (\check{E} \cdot \check{y}) \quad (\text{II.120})$$

$$(\check{E}'' \cdot \check{z}) = \frac{2 \lambda'' (\check{N}'' \cdot \check{x})}{\lambda'' (\check{N}'' \cdot \check{x}) + u u'' (\check{S} \cdot \check{x})} (\check{E} \cdot \check{z}) \quad (\text{II.121})$$

siendo u'' la velocidad de fase extraordinaria dada por (I.23),

$$\lambda'' = u_o^2 + (u_o^2 - u_o'^2) (\check{x} \cdot \check{z}_3) \frac{(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}'' \cdot \check{x})} \quad (\text{II.122})$$

$$(\check{N}'' \cdot \check{z}_3) = (\check{x} \cdot \check{z}_3)(\check{N}'' \cdot \check{x}) + f_n(\check{N}'' \cdot \check{z}) \quad (\text{II.123})$$

$$(\check{N}'' \cdot \check{x})^2 = 1 - \left[\frac{u''}{u} \right]^2 (\check{S} \cdot \check{z})^2 \quad (\text{II.124})$$

y

$$(\check{N}' \cdot \check{x})^2 = 1 - \left[\frac{u_o}{u} \right]^2 (\check{S} \cdot \check{z})^2 \quad (\text{II.125})$$

Como la componente y de los campos corresponde a campos perpendiculares al plano de incidencia y la componente z a campos paralelos, se obtiene en este caso la separación en modos característica de los medios isótropos, correspondiendo entonces que R_{ps} , R_{sp} , T_{po} y T_{so} sean nulos.

Los coeficientes de reflexión y transmisión se obtienen a partir de (II.118)-(II.121) y resultan

$$R_{ss} = \frac{u_o (\check{S} \cdot \check{x}) - u (\check{N}' \cdot \check{x})}{u_o (\check{S} \cdot \check{x}) + u (\check{N}' \cdot \check{x})} \quad (\text{II.126})$$

$$R_{pp} = \frac{\lambda'' (\check{N}'' \cdot \check{x}) - uu'' (\check{S} \cdot \check{x})}{\lambda'' (\check{N}'' \cdot \check{x}) + uu'' (\check{S} \cdot \check{x})} \quad (\text{II.127})$$

$$T_{so} = \frac{2 u_o (\check{S} \cdot \check{x})}{u_o (\check{S} \cdot \check{x}) + u (\check{N}' \cdot \check{x})} \quad (\text{II.128})$$

$$T_{pe} = \frac{2\lambda''(\check{N}'' \cdot \check{x})}{\lambda''(\check{N}'' \cdot \check{x}) + uu''(\check{S} \cdot \check{x})} \quad (\text{II.129})$$

Cuando la onda incidente tiene polarización perpendicular al plano de incidencia, sólo existe la onda refractada ordinaria, ya que ésta tiene polarización perpendicular al eje óptico. Como el rayo ordinario cumple con las leyes de la refracción comunes de los medios isótropos, R_{ss} y T_{so} coinciden con los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a una interfase formada por dos medios isótropos con índices de refracción $n = c/u$ y $n_o = c/u_o$.

Cuando la onda incidente tiene polarización paralela al plano de incidencia, sólo existe onda refractada extraordinaria, pero las expresiones de R_{pp} y T_{pe} no coinciden con las correspondientes a los medios isótropos porque el rayo extraordinario no cumple con las leyes de la refracción propias de esos medios. Sin embargo para incidencia normal se obtiene

$$R_{pp} = \frac{n - n''}{n + n''} \quad (\text{II.130})$$

con

$$n'' = \frac{1}{\sqrt{u_o^2 + (u_o^2 - u_e^2)(\check{x} \cdot \check{z}_3)^2}} \quad (\text{II.131})$$

que corresponde al coeficiente de reflexión para el modo paralelo en una interfase formada por dos medios isótropos de índices n y n'' . A partir de (II.126)-(II.129) o de las fórmulas generales para δ muy próximo a cero ($\delta = 0.001^\circ$) se obtienen las curvas de las figuras 12 y 13 para la interfase aire-calcita.

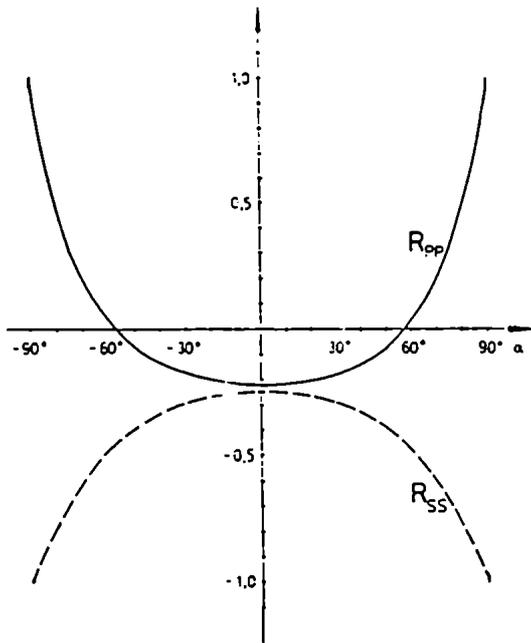


Figura 12 : coeficientes de reflexión para una interfase aire-calcita con $\vartheta=45^\circ$ y $\delta=0^\circ$.

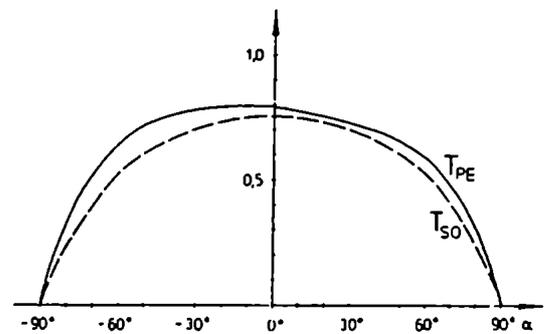


Figura 13 : coeficientes de transmisión para una interfase aire-calcita con $\vartheta=45^\circ$ y $\delta=0^\circ$.

II.4.3 EJE OPTICO PARALELO A LA INTERFASE Y PERPENDICULAR AL PLANO DE INCIDENCIA.

En este caso $\delta=\pi/2$ y $\vartheta=0$, lo que implica que

$$\left. \begin{aligned} (\check{x} \cdot \check{z}_3) &= 0 \\ (\check{S} \cdot \check{j}) &= (\check{S}^* \cdot \check{j}) = (\check{N}' \cdot \check{j}) = (\check{N}'' \cdot \check{j}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{(II.132)}$$

Reemplazando las ecuaciones (II.132) en la fórmulas generales se obtiene

$$R_{ps} = R_{sp} = 0 \quad \text{(II.133)}$$

$$R_{ss} = \frac{n \cos \alpha - \sqrt{n_o^2 - n^2 \text{sen}^2 \alpha}}{n \cos \alpha + \sqrt{n_o^2 - n^2 \text{sen}^2 \alpha}} \quad \text{(II.134)}$$

$$R_{pp} = \frac{n \sqrt{n_o^2 - n^2 \text{sen}^2 \alpha} - n_o^2 \cos \alpha}{n \sqrt{n_o^2 - n^2 \text{sen}^2 \alpha} + n_o^2 \cos \alpha} \quad \text{(II.135)}$$

II.4.4 EJE OPTICO PERPENDICULAR A LA INTERFASE

Reemplazando $(\check{x} \cdot \check{z}_3) = 1$ en las fórmulas generales se obtiene

$$R_{ps} = R_{sp} = 0 \quad \text{(II.136)}$$

$$R_{ss} = \frac{n \cos \alpha - \sqrt{n_o^2 - n^2 \text{sen}^2 \alpha}}{n \cos \alpha + \sqrt{n_o^2 - n^2 \text{sen}^2 \alpha}} \quad \text{(II.137)}$$

$$R_{pp} = \frac{n \sqrt{n_o^2 - n^2 \sin^2 \alpha} - n_o n_o \cos \alpha}{n \sqrt{n_o^2 - n^2 \sin^2 \alpha} + n_o n_o \cos \alpha} \quad (\text{II.138})$$

Los resultados obtenidos para los dos últimos casos de simetría coinciden con los coeficientes calculados por M.Elshazly-Zaghloul y R.M.A.Azzam⁶ si se considera que el R_{pp} calculado por estos autores está definido a partir de la componente x' de los campos (ecuaciones (II.77) y (II.78)).

CAPITULO (II)

REFLEXION TOTAL EXTERNA

Cuando la luz incide sobre una interfase medio isótropo-cristal monoaxial y los índices de refracción de los medios tienen valores apropiados, puede observarse el fenómeno de reflexión total el cual es bien conocido para medios isótropos. En el caso de los cristales monoaxiales, este fenómeno presenta algunas características curiosas debido a la variación del índice de refracción extraordinario con el ángulo de incidencia y a la diferencia entre las direcciones de avance de la onda y del rayo.

En este capítulo se obtendrá la condición de reflexión total externa a partir de la condición física de rayo rasante¹³, y la relación entre reflexión total interna¹⁴ y externa.

III.1 CONDICION DE REFLEXION TOTAL EXTERNA

Hay reflexión total externa cuando el rayo que incide sobre una superficie de discontinuidad se refleja de modo que toda la energía incidente esté en el rayo reflejado y no exista rayo refractado. De la óptica de los medios isótropos se sabe que este fenómeno puede ocurrir cuando la luz incide desde el medio de mayor índice de refracción. Y a partir de la ley de Snell,

$$n \operatorname{sen} \alpha = n' \operatorname{sen} \beta \quad (\text{III.1})$$

con $n' < n$, se obtiene la siguiente condición de reflexión total

$$\text{sen } \alpha \geq \frac{n'}{n} \quad (\text{III.2})$$

En los medios anisótropos deben cumplirse las mismas condiciones físicas para que se produzca reflexión total. Para el rayo ordinario, la relación es sencilla pues se comporta como una onda en un medio isótropo y

$$\text{sen } \alpha'_T = \frac{n_o}{n} \quad (\text{III.3})$$

siendo α'_T el ángulo límite de reflexión total ordinaria y n_o el índice principal ordinario.

Pero para el rayo extraordinario no se obtiene una relación tan sencilla como la (III.3) para el valor de α pues el índice de refracción depende de la dirección del rayo refractado, y por lo tanto del incidente, y la dirección del rayo refractado no coincide con la normal al frente de onda.

Si α_T es el valor límite de α a partir del cual se produce reflexión total extraordinaria, por lo dicho anteriormente este ángulo tiene que cumplir con la relación

$$\text{sen } \alpha_T = \frac{n''(\beta''_{RR})}{n} \text{sen } \beta''_{RR} \quad (\text{III.4})$$

donde β''_{RR} es el ángulo de refracción para la normal al

frente de onda extraordinario cuando el rayo correspondiente es rasante, y $n''(\beta''_{RR})$ es el índice de refracción correspondiente a esta dirección del frente de onda refractado.

La expresión de n'' en función de la dirección del frente de onda refractado, cuyo versor normal es \check{N}'' , puede obtenerse directamente de la expresión para la velocidad de fase relativa u''/u ((I.48)-(I.50), (I.55))

$$u''^2 = u_o^2 + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 \quad (\text{III.5})$$

El índice de refracción extraordinario n'' resulta

$$n'' = \frac{n_o}{\sqrt{1 + b^*(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2}} \quad (\text{III.6})$$

siendo n_o el índice principal extraordinario del cristal birrefringente y

$$b^* = \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \quad (\text{III.7})$$

La componente de la normal al frente de onda en la dirección del eje óptico se obtiene a partir de (I.42) en función de sus componentes en el sistema de la superficie. Si β'' es el ángulo de refracción de la normal y ϕ el que forma

el plano de incidencia con el eje z (Figura 3), resulta

$$(\check{N}'' \cdot \check{z}_3) = \cos \beta'' (\check{x} \cdot \check{z}_3) + \text{sen } \beta'' \cos \delta (\check{z} \cdot \check{z}_3) \quad (\text{III.8})$$

Reemplazando esta expresión en (III.6) cuando β'' corresponde a rayo rasante, el índice extraordinario resulta

$$n''(\beta''_{RR}) = \frac{n_o}{\sqrt{1 + b^* \left\{ (\check{z}_3 \cdot \check{x}) \cos \beta''_{RR} + (\check{z} \cdot \check{z}_3) \text{sen } \beta''_{RR} \cos \delta \right\}^2}} \quad (\text{III.9})$$

Reemplazando (III.9) en (III.4) resulta

$$\text{sen } \alpha_T = \frac{n_o / n}{\sqrt{1 + \cotg^2 \beta''_{RR} + b^* \left\{ (\check{z}_3 \cdot \check{x}) \cotg \beta''_{RR} + (\check{z} \cdot \check{z}_3) \cos \delta \right\}^2}} \quad (\text{III.10})$$

El ángulo β''_{RR} se puede determinar a partir de la expresión de \check{R}'' (I.35)

$$\check{R}'' = \frac{1}{f_n} \left\{ \check{N}'' + \left[\frac{n_o^2}{n^2} - 1 \right] (\check{N}'' \cdot \check{z}_3) \check{z}_3 \right\} \quad (\text{III.11})$$

donde f_n es el factor de normalización (I.36)

$$f_n = \sqrt{1 + \left[\frac{n_o^4}{n_e^4} - 1 \right] (\check{N}'' \cdot \check{z}_g)^2}, \quad (\text{III.12})$$

y de la condición de rayo rasante

$$(\check{R}'' \cdot \check{x}) = 0 \quad (\text{III.13})$$

Resulta entonces de (III.11) y (III.13)

$$(\check{N}'' \cdot \check{x}) + b^* (\check{N}'' \cdot \check{z}_g) (\check{z}_g \cdot \check{x}) = 0 \quad (\text{III.14})$$

Escribiendo las componentes de \check{N}'' en función de los ángulos β''_{RR} y δ se obtiene

$$\cotg \beta''_{RR} = \frac{-b^* (\check{z}_g \cdot \check{z}) (\check{z}_g \cdot \check{x}) \cos \delta}{1 + b^* (\check{z}_g \cdot \check{x})^2} \quad (\text{III.15})$$

de donde resulta que β''_{RR} puede ser mayor o menor que $\pi/2$ según sean la birrefringencia y el ángulo que forma el eje óptico con la superficie de separación positivos o negativos. Reemplazando (III.15) en (III.10) se obtiene la expresión para el ángulo de reflexión total extraordinaria:

$$\text{sen } \alpha_T = \frac{n_o/n}{\sqrt{1 + \frac{b^* (\check{z}_3 - \check{\beta})^2 \cos^2 \delta}{1 + b^* (\check{z}_3 - \check{\alpha})^2}}} \quad (\text{III.16})$$

Los ángulos de reflexión total externa ordinaria y extraordinaria dados por (III.3) y (III.16) corresponden, respectivamente, a la ausencia de refracción ordinaria y extraordinaria en el cristal monoaxial. La diferencia más notable entre ambos casos es la variación de α_T con el ángulo δ y con la orientación del eje óptico respecto de la superficie de discontinuidad en la reflexión total extraordinaria.

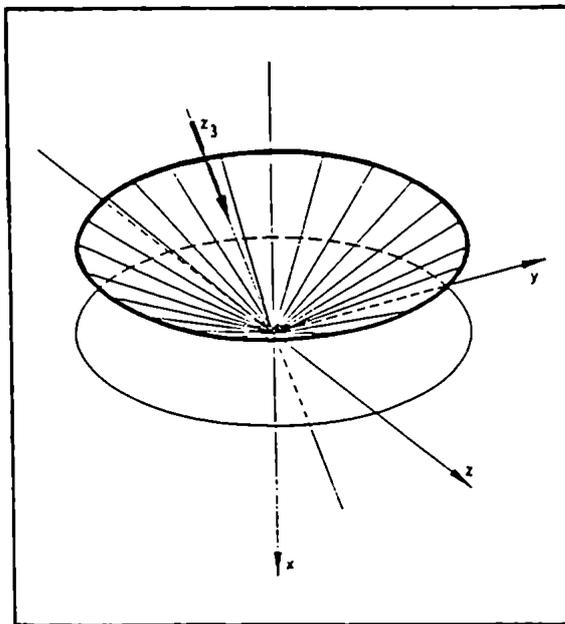


Figura 14 : Superficie cónica que delimita la zona de reflexión total externa ordinaria para $n=1.755$ y $n_o=1.6584$.

III.2 ECUACIONES DE LAS SUPERFICIES QUE CONTIENEN A LAS NORMALES A LOS FRENTE DE ONDA INCIDENTES QUE SUFREN REFLEXION TOTAL EXTERNA

III.2.1 REFLEXION TOTAL ORDINARIA

Como se ha visto en III.1, el rayo ordinario puede sufrir reflexión total externa cuando el índice principal ordinario del cristal es menor que el del medio isótropo. Como el ángulo de reflexión total en este caso es independiente de la orientación del cristal, la ecuación de la superficie que contiene a las normales a los frentes de onda incidentes que sufren reflexión total, corresponde a un cono con simetría de revolución (Figura 17).

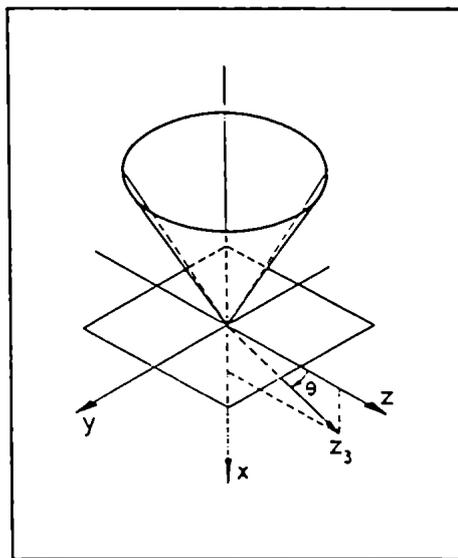


Figura 17 : Superficie que delimita la zona de reflexión total ordinaria.

III.2.2 REFLEXION TOTAL EXTRAORDINARIA

Como se ha visto en III.1, el ángulo de reflexión total extraordinaria depende de la orientación del cristal y, en consecuencia, la superficie que contiene a las normales a los frentes de onda incidente no tiene simetría de revolución. Para determinar la forma de dicha superficie se debe estudiar la ecuación que relaciona las distintas componentes de la normal al frente de onda incidente.

A partir de la condición de igualdad de las fases (I.45)

$$\frac{\check{S} \cdot \check{y}}{u} = \frac{\check{N}'' \cdot \check{y}}{u''} \quad \frac{\check{S} \cdot \check{z}}{u} = \frac{\check{N}'' \cdot \check{z}}{u''} \quad , \quad (\text{III.17})$$

de la expresión del ángulo de reflexión total externa (III.16) y de la condición de normalización para el rayo incidente, resulta

$$-(\check{S} \cdot \check{x})^2 + \frac{(\check{S} \cdot \check{y})^2}{f} + \frac{(\check{S} \cdot \check{z})^2}{g} = 0 \quad (\text{III.18})$$

con

$$f = \frac{1}{\frac{\check{c}^2}{\check{c}_o^2} - 1} \quad (\text{III.19})$$

y

$$g = \frac{1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2}{\frac{n^2}{n_0^2} - b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - 1} \quad (\text{III.20})$$

que es la ecuación de una superficie cónica de sección elíptica cuya directriz será el eje x , y o z dependiendo de los signos de los coeficientes f y g de la ecuación (III.18). Los casos posibles son:

$$1) f > 0 \text{ y } g > 0 \quad (\text{III.21})$$

En función de los índices principales del cristal y de la orientación del cristal, la situación (III.21) corresponde a

$$n > n_0 \quad (\text{III.22})$$

y

$$n^2 > n_0^2 \left[1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] \quad (\text{III.23})$$

En consecuencia, para que la directriz de la superficie cónica formada por las normales a los frentes de onda incidentes sea el eje x , la relación de índices de refracción debe ser (III.22) para cristales positivos y (III.23) para negativos. Además, para los cristales positivos, el eje mayor de la sección elíptica está sobre el eje y y para negativos sobre el eje z (Figuras 18 a-b).

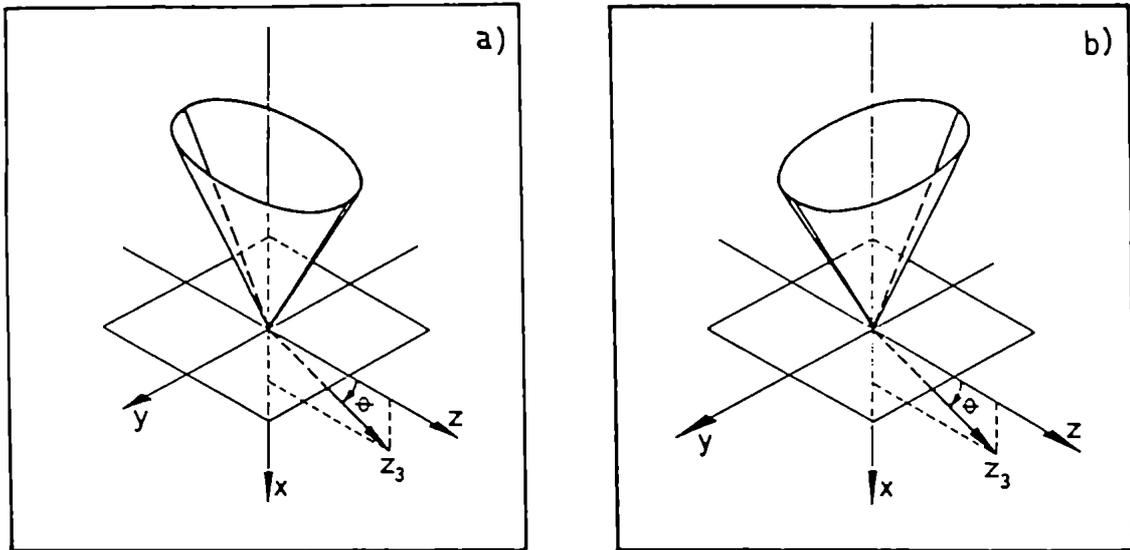


Figura 18 : Superficies que delimitan las zonas de reflexión total externa extraordinaria para
 a) cristal negativo y $n^2 > n_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 + n_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2$
 b) cristal positivo y $n > n_o$

2) $f > 0$ y $g < 0$

(III.24)

Sólo puede darse este tipo de superficie en el caso de cristales negativos. La condición (III.22) en función de los índices de refracción se convierte en

$$n_o < n^2 < n_o^2 \left[1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] \quad (III.25)$$

Corresponde a un cono cuya directriz coincide con el

eje y y el eje mayor de su sección es paralela al eje z (Figura 19 a).

$$3) f < 0 \text{ y } g > 0 \quad (\text{III.26})$$

Esta superficie sólo puede aparecer para cristales positivos. Su directriz corresponde al eje z y el eje mayor de su sección es paralela al eje y (Figura 19 b). La relación de índices (III.26) corresponde a

$$n_e > n^2 > n_o^2 \left[1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] \quad (\text{III.27})$$

De lo expuesto surge que cuando el índice de refracción del medio isótropo tiene un valor intermedio entre los índices principales n_e y n_o , la reflexión total puede no aparecer para todos los planos de incidencia, y la superficie que contiene a los rayos que inciden con el ángulo de reflexión total se divide en dos hojas. Los valores de δ para los que hay reflexión total externa se obtienen de (III.16) y de la condición $\text{sen } \alpha_T \leq 1$. Resulta entonces

$$\cos^2 \delta \leq \frac{\left(\frac{n_e^2}{n^2} - 1 \right) \left[1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right]}{b^* (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2} \quad (\text{III.28})$$

si el cristal es negativo. Para cristales positivos vale la misma relación invirtiendo el signo de la desigualdad.

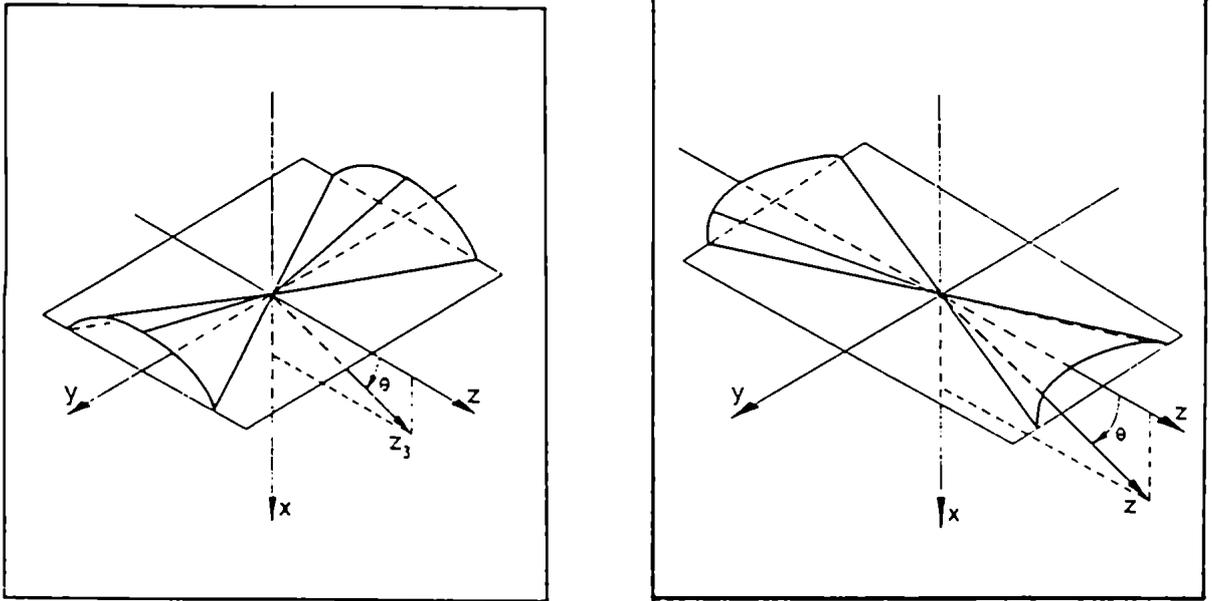


Figura 19 : Superficies que delimitan las zonas de reflexión total externa extraordinaria para
a) cristal negativo y $n_o^2 < n^2 < n_o^2 (\check{z}_3 - \check{\beta})^2 + n_o^2 (\check{z}_3 - \check{x})^2$
b) cristal positivo y $n_o^2 > n^2 > n_o^2 (\check{z}_3 - \check{\beta})^2 + n_o^2 (\check{z}_3 - \check{x})^2$

Además de (III.18) surge que sólo en el caso en que el eje óptico sea perpendicular a la superficie de separación ($\vartheta=90^\circ$), la sección del cono resulta circular.

Existen dos casos de degeneración. En el caso de cristales monoaxiales negativos aparece cuando

$$n^2 = n_o^2 \left[1 + b^* (\check{z}_3 - \check{x})^2 \right] \quad (\text{III.29})$$

y para positivos cuando

$$n = n_o \quad (\text{III.30})$$

En estos casos las superficies cónicas se reducen a un

par de planos perpendiculares a los planos xy y xz , respectivamente (Figuras 20 a-b).

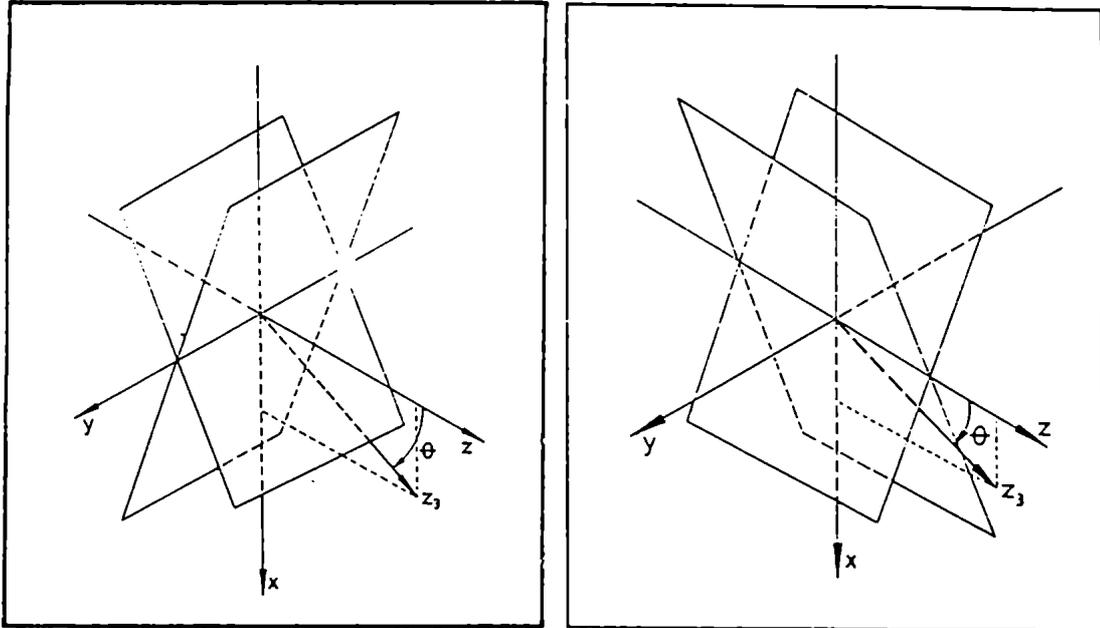


Figura 20 : Superficies que delimitan las zonas de reflexión total externa extraordinaria para
a) cristal negativo y $n^2 = n_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{j})^2 + n_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2$
b) cristal positivo y $n = n_o$

III.3 RELACION ENTRE REFLEXION TOTAL EXTERNA E INTERNA EXTRAORDINARIA

La reflexión total interna extraordinaria puede ocurrir cuando el índice del medio isótropo es menor que el mayor de los índices principales del cristal¹⁴, mientras que la reflexión total externa sólo cuando el índice del medio isótropo es mayor que el menor de los índices principales.

Es de interés comparalas para el caso en que el índice del medio isótopo esté comprendido entre los índices principales del cristal.

El ángulo de reflexión total interna, γ''_T , se obtiene a través de la ecuación bicuadrática¹⁴

$$A_T \operatorname{sen}^4 \gamma''_T + B_T \operatorname{sen}^2 \gamma''_T + C_T = 0 \quad (\text{III.31})$$

con

$$A_T = b^2 \cos^4 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{j})^4 + 2b \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{j})^4 \left[b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - 1 \right] + \left[1 + b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right]^2 \quad (\text{III.32})$$

$$B_T = 2 \left\{ b \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{j})^2 \left[\frac{n^2}{n_o^2} - b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] - \left[1 + b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] \left[\frac{n^2}{n_o^2} + b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right] \right\} \quad (\text{III.33})$$

$$C_T = \left[\frac{n^2}{n_o^2} + b(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right]^2 \quad (\text{III.34})$$

En la figura 21 se representa la superficie que contiene a las normales a los frentes de onda que inciden con γ''_T si el índice del medio isótopo tiene un valor intermedio entre n_o y n_e . Comparando dicha figura con la figura 16 se

observa que los valores de δ para los que existe reflexión total interna son complementarios de los correspondientes a la reflexión total externa. Esto se puede demostrar calculando los valores de δ para los cuales hay reflexión total interna. La condición de existencia de ángulo límite para la reflexión interna conforme a (III.31) es

$$\Delta_T = B_T^2 - 4A_T C_T \geq 0 \quad (\text{III.35})$$

obteniéndose

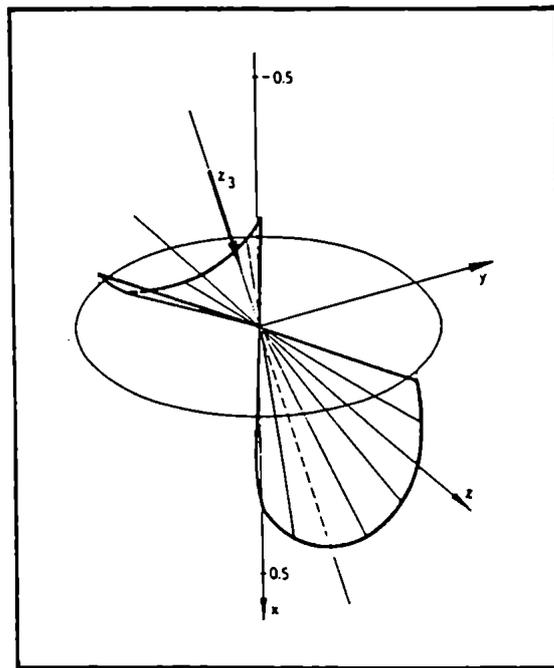


Figura 21 : Superficie que contiene a las normales a los frentes de onda que sufren reflexión total interna extraordinaria para un cristal negativo y

$$n_o^2 < n^2 < n_o^2 (\check{z}_g \cdot \check{\beta})^2 + n_o^2 (\check{z}_g \cdot \check{\alpha})^2.$$

$$\cos^2 \delta \geq \frac{\left[\frac{n_o^2}{n^2} - 1 \right] \left[1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right]}{b^* (\check{z}_3 \cdot \check{j})^2} \quad (\text{III.36})$$

para cristales negativos. Para positivos vale la misma expresión pero invirtiendo el sentido de la desigualdad. Se obtuvo entonces que la condición (III.35) es la complementaria de la (III.28), es decir que la reflexión total interna ocurre para aquellos planos de incidencia para los cuales no hay reflexión total externa, estando el índice del medio isótropo comprendido entre los índices principales del cristal.

Si se denota con δ^* al valor de δ que delimita las zonas de reflexión total interna y externa, se tiene que

$$\cos^2 \delta^* = \frac{\left[\frac{n_o^2}{n^2} - 1 \right] \left[1 + b^* (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 \right]}{b^* (\check{z}_3 \cdot \check{j})^2} \quad (\text{III.37})$$

El ángulo δ^* es el ángulo que delimita las zonas de reflexión total externa e interna cuando se consideran las normales a los frentes de onda. Si se tienen en cuenta los rayos, el límite de reflexión total interna cambia porque los rayos no coinciden con las normales a los frentes de onda (Figura 22). Para rayo rasante la relación entre el ángulo

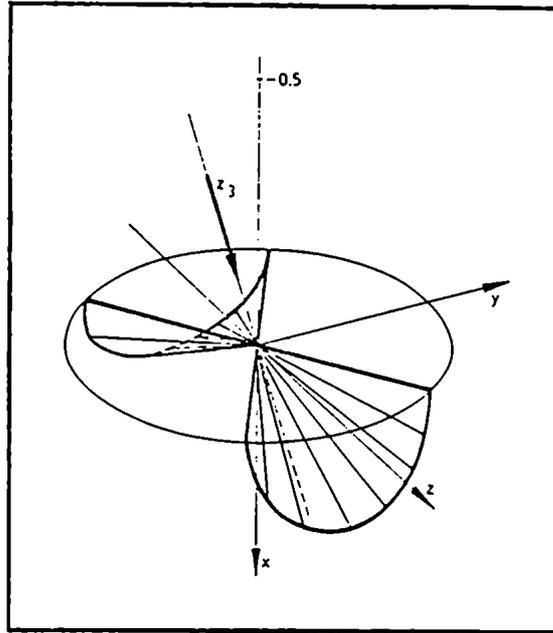


Figura 22 : Superficie que contiene a los rayos que sufren reflexión total interna extraordinaria para un cristal negativo y

$$n_o^2 < n^2 < n_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 + n_e^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2.$$

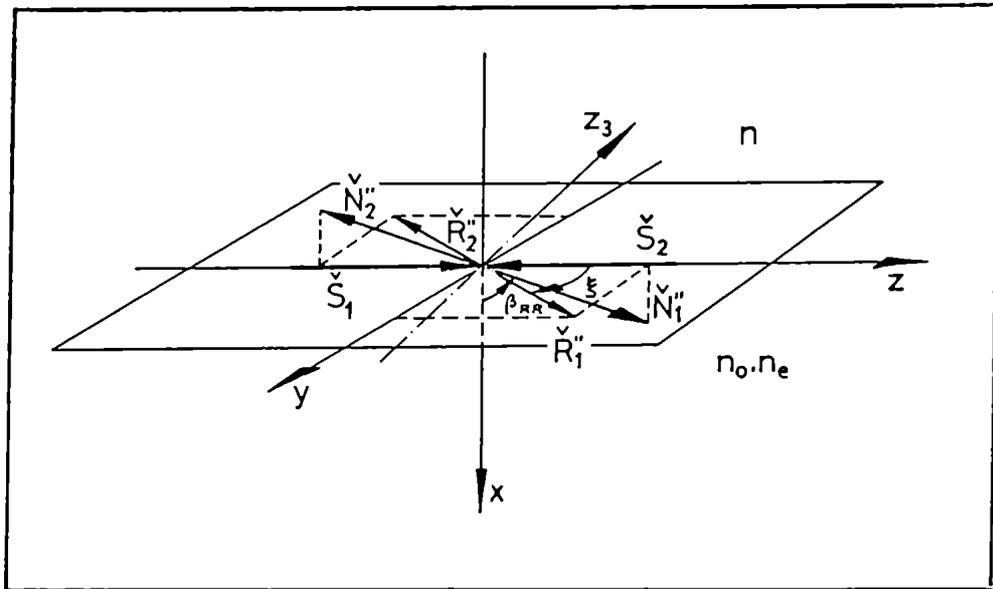


Figura 23 : Geometría de la reflexión total extraordinaria cuando el rayo incidente sobre el cristal es rasante (S_1 y S_2). N_1, N_2 y R_1, R_2 representan las correspondientes ondas y rayos refractados.

lo δ para la normal al frente de onda y δ_R para el rayo es

$$\operatorname{tg} \delta_R = \left\{ 1 - \frac{n_o^2}{n_e^2} b^* (\tilde{z}_3 \cdot \tilde{j})^2 \right\} \operatorname{tg} \delta \quad (\text{III.38})$$

En efecto, cuando el rayo incidente sobre el cristal es rasante en $\delta = \delta^*$ (ó $\delta = \delta^* + \pi$), α vale $\pi/2$ (ó $-\pi/2$) y la normal al frente de onda refractado extraordinario forma un ángulo β_{RR} (ó $\beta_{RR} - \pi$) con la normal a la superficie en el mismo plano. El rayo refractado asociado es rasante pero ubicado en δ_R^* . Simétricamente, cuando el rayo incidente desde el cristal es rasante en δ_R^* , le corresponde una normal extraordinaria con γ_T'' (ó $\gamma_T'' - \pi$) ubicada en el plano δ^* (Figura 23).

Efectuando los cálculos para calcita, $\vartheta = 45^\circ$ y $n = 1.550$ resultan

$$\delta^* = 30.9^\circ \qquad \delta_R^* = 33.9^\circ \qquad \beta_{RR_1} = \gamma_{T_1}'' = 84.7^\circ$$

$$\delta^* = 210.9^\circ \qquad \delta_R^* = 213.9^\circ \qquad \beta_{RR_2} = \gamma_{T_2}'' = -95.3^\circ$$

En consecuencia, cuando el índice del medio isótropo tiene un valor intermedio entre los índices principales del cristal monoaxial y existe reflexión total sólo para algunos planos de incidencia, las zonas de reflexión total externa e interna son complementarias.

CAPITULO

INDICE DE REFRACCION EXTRAORDINARIO

Como se ha visto en el Capítulo I, en una interfase dieléctrico-cristal monoaxial, la dirección de la normal al frente de onda refractado extraordinario se obtiene aplicando la ley de Snell con un índice de refracción que depende de la dirección de incidencia y de las propiedades ópticas de ambos medios.

En este capítulo se verá que el índice de refracción extraordinario puede tomar valores complejos para ciertas direcciones de incidencia cuando el índice del medio isótropo n es mayor que el menor de los índices principales del cristal n_o y n_e . Además, para ciertas simetrías particulares de la dirección del eje óptico o del plano de incidencia se obtienen valores del índice extraordinario mayores que el índice principal mayor o menores que el menor del cristal¹³. Estos comportamientos anómalos pueden interpretarse coherentemente a través de la reflexión total externa¹⁵.

IV.1 ESTUDIO DEL INDICE DE REFRACCION EXTRAORDINARIO

El índice de refracción extraordinario n'' se obtiene conociendo la dirección del haz incidente sobre el cristal, el índice de refracción del medio isótropo n y las propiedades ópticas del cristal (n_o , n_e y dirección del eje óptico z_3 respecto a la normal a la superficie de separación) mediante las expresiones (I.51)-(I.54)

$$A w^4 - B w^2 + C = 0 \quad (\text{IV.1})$$

siendo

$$A = \left[1 + b(\check{S}.\check{\rho})^2 + b(\check{S}.\check{y})^2 (\check{z}_3.\check{x})^2 \right]^2 - 4b(\check{S}.\check{\rho})^2 (\check{z}_3.\check{\rho})^2 \quad (\text{IV.2})$$

$$B = 2 \left[1 + b(\check{S}.\check{\rho})^2 + b(\check{S}.\check{y})^2 (\check{z}_3.\check{\rho})^2 \right] \left[b(\check{z}_3.\check{x})^2 + \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \right] - 4b \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 (\check{S}.\check{\rho})^2 (\check{z}_3.\check{\rho})^2 \quad (\text{IV.3})$$

$$C = \left[b(\check{z}_3.\check{x})^2 + \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{IV.4})$$

$$b = n^2 \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n_0'^2} \right) \quad (\text{IV.5})$$

y

$$w = \frac{n}{n''} = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \quad (\text{IV.6})$$

Para estudiar la variación de n'' con la dirección de incidencia y con las propiedades ópticas de ambos medios, conviene analizar por separado los discriminantes

$$\Delta_1 = B^2 - 4AC \quad (\text{IV.7})$$

y

$$\Delta_2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{IV.8})$$

Como los coeficientes A y C son siempre positivos y, para $b > -1$ (como ocurre para todos los cristales conocidos) también lo es el coeficiente B, el discriminante Δ_2 es positivo. Las anomalías aparecen al estudiar el discriminante Δ_1 dado por (IV.7). Reemplazando en ésta las expresiones de los coeficientes (IV.2)-(IV.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & 16b^2 \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 (\check{\gamma} \cdot \check{z}_3)^2 (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 (\check{S} \cdot \check{\gamma})^2 \left\{ -(\check{S} \cdot \check{\gamma})^2 \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 - \right. \\ & - (\check{S} \cdot \check{y})^2 \left[\left[\frac{n}{n_o} \right]^2 (\check{\gamma} \cdot \check{z}_3)^2 + (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 \right] + \\ & \left. + \left[1 + b \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (IV.9)$$

El discriminante se anula si se cumple alguna de las siguientes condiciones

$$* (\check{\gamma} \cdot \check{z}_3) = 0 \quad (IV.10)$$

$$* (\check{x} \cdot \check{z}_3) = 0 \quad (IV.11)$$

$$* (\check{S} \cdot \check{\gamma}) = 0 \quad (IV.12)$$

$$\begin{aligned} * & -(\check{S} \cdot \check{\gamma})^2 \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 - (\check{S} \cdot \check{y})^2 \left[\left[\frac{n}{n_o} \right]^2 (\check{\gamma} \cdot \check{z}_3)^2 + (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 \right] + \\ & + \left[1 + b \left[\frac{n}{n_o} \right]^2 (\check{x} \cdot \check{z}_3)^2 \right] \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Las dos primeras relaciones expresan que el discriminante se anula cuando el eje óptico es perpendicular o paralelo a la superficie de separación. La tercera establece un plano de incidencia para el cual se anula el discriminante cualquiera sea el ángulo ϑ que forme el eje óptico con la superficie de separación. La ecuación (IV.13), en cambio depende de la dirección del eje óptico y de la dirección de incidencia. Esta última condición también difiere de las otras tres pues el discriminante no sólo se anula sino que puede hacerse negativo, obteniéndose valores complejos para el índice de refracción extraordinario. Expresando la dirección de incidencia en función de los ángulos α y δ (Figura 24), resulta

$$(\check{S}.\check{z}) = \text{sen } \alpha \cos \delta \quad (\text{IV.14})$$

$$(\check{S}.\check{y}) = \text{sen } \alpha \text{ sen } \delta \quad (\text{IV.15})$$

Teniendo en cuenta estas relaciones, la condición de discriminante nulo (IV.13) se convierte en

$$\text{sen } \alpha_T = \frac{n_o/n}{\sqrt{1 + \frac{b^* (\check{z}_3.\check{z})^2 \cos^2 \delta}{1 + b^* (\check{z}_3.\check{x})^2}}} \quad (\text{IV.16})$$

con

$$b^* = \left[\frac{n_e}{n_o} \right]^2 - 1 \quad (\text{IV.17})$$

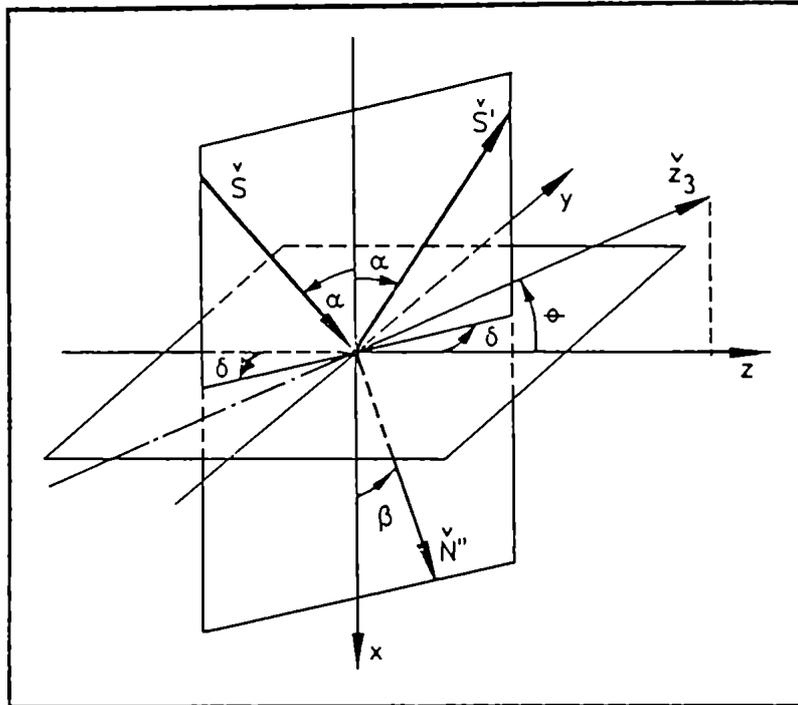


Figura 24 : Sistemas de coordenadas. El plano $y\check{z}$ es la superficie de discontinuidad. Para $x < 0$ el medio es isótropo de índice n y para $x > 0$ es anisótropo de índices principales n_o y n_e .

y donde se ha introducido el símbolo α_T para denotar el ángulo para el cual el discriminante Δ_1 se anula pues su expresión coincide con la del ángulo de reflexión total extraordinaria dada por (III.16). Es decir, que la condición de reflexión total

$$\text{sen } \alpha \geq \frac{n_o/n}{\sqrt{1 + \frac{b^* (\check{z}_s - \check{z})^2 \cos^2 \delta}{1 + b^* (\check{z}_s - \check{x})^2}}} \quad (\text{IV.18})$$

es equivalente a la condición de discriminante nulo o negativo. En este caso el índice extraordinario resulta ser un número complejo.

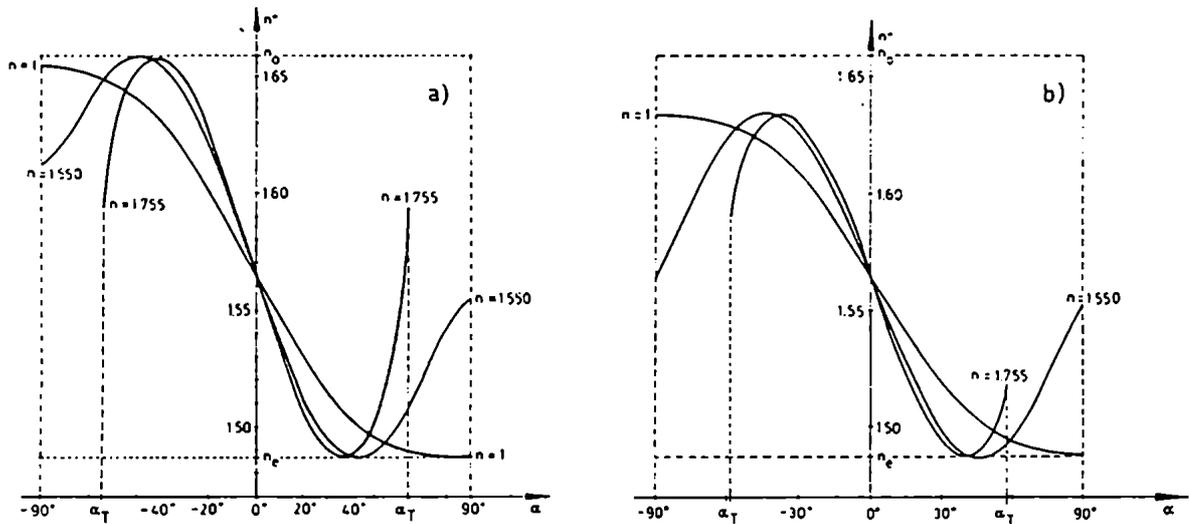


Figura 25 : Índice de refracción extraordinario en función del ángulo de incidencia y del índice de refracción del medio isótropo para calcita ($n_o = 1.4865$, $n_e = 1.6584$), $\vartheta = 45^\circ$ y a) $\delta = 0^\circ$, b) $\delta = 30^\circ$.

En las figuras 25 y 26 se muestran las variaciones de n'' con el ángulo de incidencia para calcita y cuarzo para $\vartheta = 45^\circ$ y dos posibles planos de incidencia. Para la calcita e índice del medio isótropo $n = 1$ ó $n = 1.550$ las curvas se extienden a lo largo de todos los ángulos de incidencia posibles, pero si $n = 1.755$ la curva se corta en $\alpha = 63.8^\circ$ si $\delta = 0^\circ$ y en $\alpha = 57.9^\circ$ si $\delta = 30^\circ$ pues a partir de estos valores el índice se hace complejo.

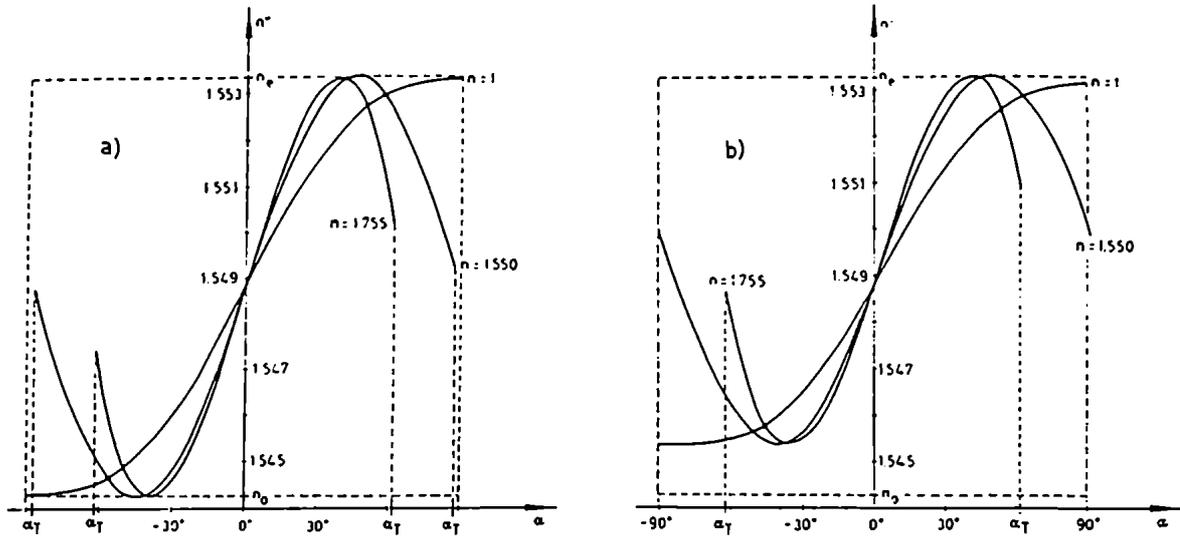


Figura 26 : Índice de refracción extraordinario en función del ángulo de incidencia y del índice de refracción del medio isótropo para cuarzo ($n_o = 1.54425$, $n_e = 1.55336$), $\vartheta = 45^\circ$ y a) $\delta = 0^\circ$, b) $\delta = 90^\circ$.

Para el cuarzo e índice de refracción del medio isótropo $n = 1.550$, la curva se corta en $\alpha = 61.9^\circ$ si $\delta = 0^\circ$ pero no existe ángulo de reflexión total si $\delta = 30^\circ$. En cambio, si el índice del medio isótropo es 1.755, las curvas se cortan en $\alpha = 87.7^\circ$ si $\delta = 0^\circ$ y en $\alpha = 62.0^\circ$ si $\delta = 30^\circ$.

Por otra parte, cuando se cumple la condición (IV.10), es decir que el eje óptico forma un ángulo $\vartheta = 90^\circ$ con la superficie de separación, el valor del índice extraordinario resulta

$$n'' = n_o \sqrt{1 + b \sin^2 \alpha} \quad (\text{IV.19})$$

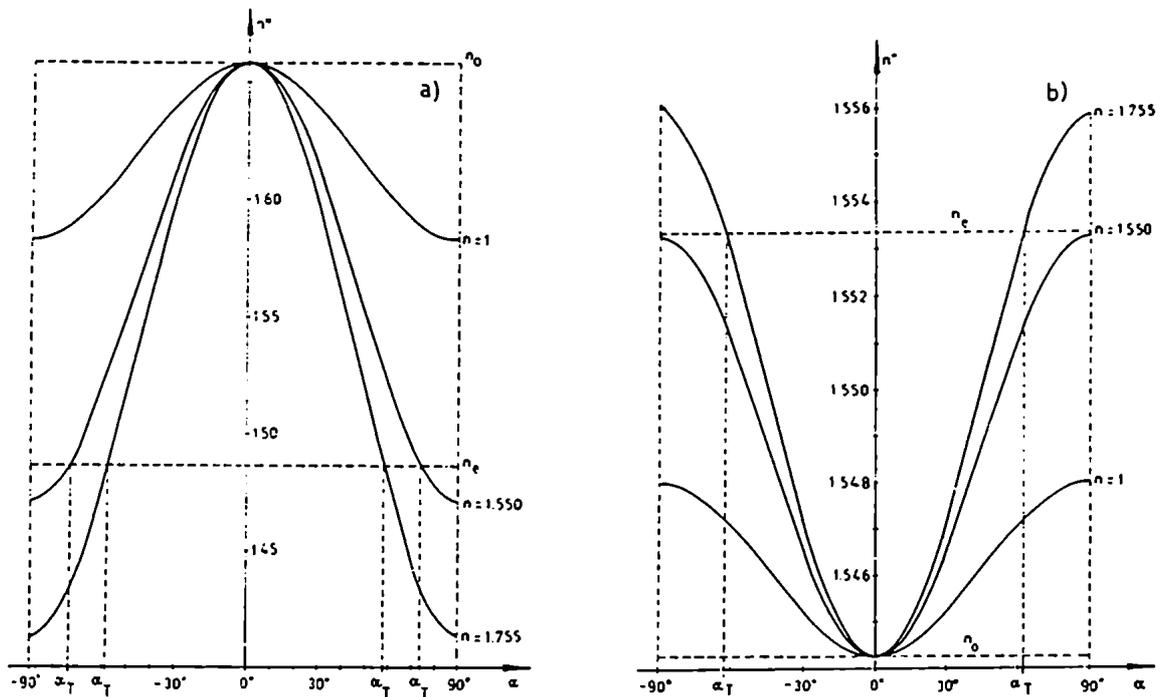


Figura 27 : Índice de refracción extraordinario en función del ángulo de incidencia para $\vartheta=90^\circ$
 a) Calcita : $n'' < n_o$ para $\alpha > \alpha_T$
 b) Cuarzo : $n'' > n_o$ para $\alpha > \alpha_T$

lo que es coherente con la simetría de revolución alrededor del eje óptico propia de los cristales monoaxiales. De esta expresión surge también que n'' puede tomar valores superiores a n_o si el cristal es positivo e inferiores al mismo si el cristal es negativo. Sin embargo, de (IV.18) y (IV.19) surge que el ángulo de incidencia que corresponde a estos valores anómalos del índice es mayor que el de reflexión total (Figura 27), siendo

$$\text{sen } \alpha_T = \frac{n_o}{n} \quad (\text{IV.20})$$

Quando el eje óptico es paralelo a la superficie de discontinuidad, la ecuación para n'' es

$$n'' = n_o \sqrt{1 - b \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \delta} \quad (\text{IV.21})$$

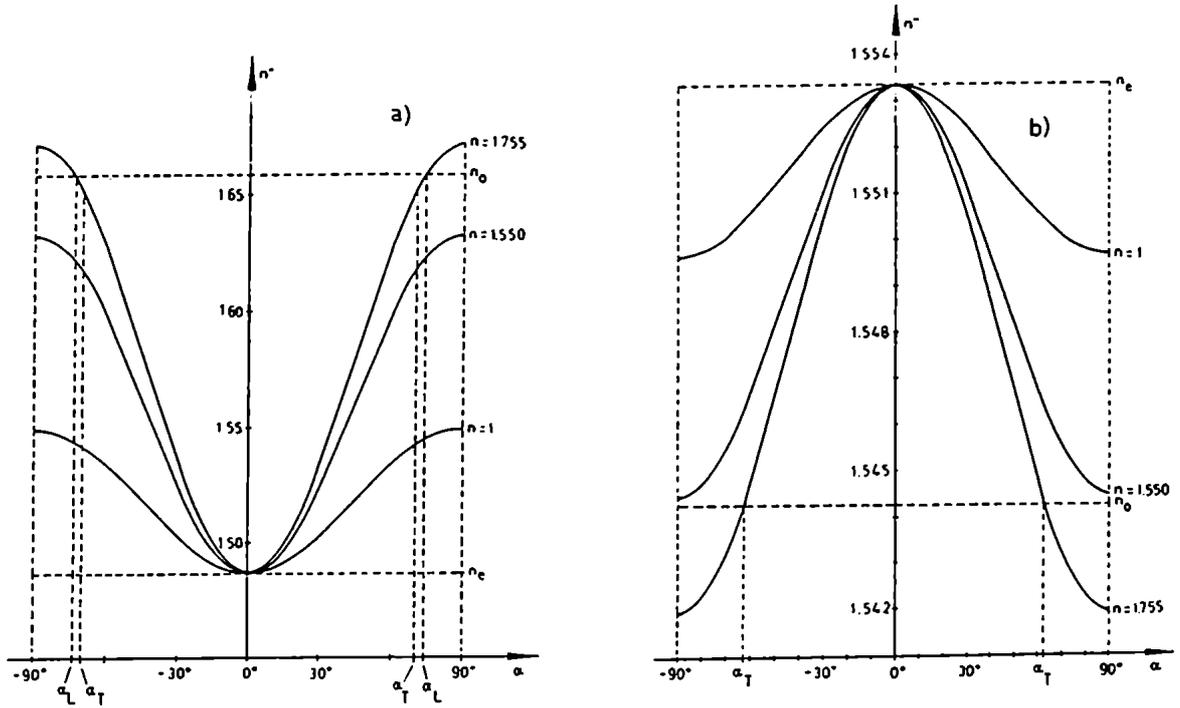


Figura 28 : Índice de refracción en función del ángulo de incidencia para $\delta=10^\circ$ y $\vartheta=0^\circ$
a) Calcita : $n'' > n_o$ para $\alpha > \alpha_L = 73.6^\circ$ con $\alpha_T = 70.3^\circ$
b) Cuarzo : $n'' < n_o$ para $\alpha > \alpha_L = 63.8^\circ$ con $\alpha_T = 61.7^\circ$

y para el ángulo de reflexión total

$$\operatorname{sen} \alpha_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{n_o}\right)^2 + b \cos^2 \delta}} \quad (\text{IV.22})$$

De (IV.21) se obtiene que para ángulos mayores que cierto α_L , el índice extraordinario es mayor que el índice principal ordinario para cristales negativos y menor para cristales positivos. Sin embargo α_L es siempre mayor o igual que α_T , por lo que el índice extraordinario de comportamiento anómalo no corresponde a ninguna refracción y por lo tanto no conduce a contradicciones físicas. En la figura 28 se representa el índice n'' para $\vartheta = 0^\circ$.

Si el plano de incidencia es perpendicular al plano formado por el eje óptico y la normal a la superficie de discontinuidad, es decir $\delta = 90^\circ$, se cumple la condición (IV.12) y el discriminante se anula para todo valor de α . La fórmula para el índice es entonces más simple, obteniéndose de (IV.1)-(IV.6)

$$n'' = \sqrt{\frac{n_o^2 + n^2 b^* \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \vartheta}{1 + b^* \text{sen}^2 \vartheta}} \quad (\text{IV.23})$$

Este índice puede tomar valores superiores a n_o si el cristal es positivo e inferiores si es negativo (Figura 29). Pero como en los casos anteriores, esto no conduce a ninguna contradicción pues ocurre para ángulos mayores que el de reflexión total, siendo

$$\text{sen } \alpha_T = \frac{n_o}{n} \quad (\text{IV.24})$$

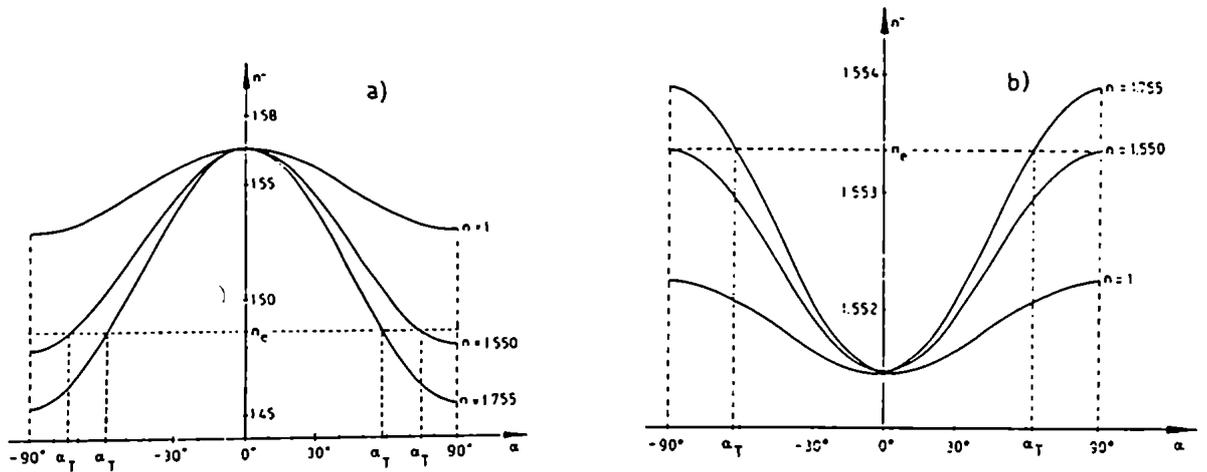


Figura 29: Índice de refracción en función del ángulo de incidencia para $\delta=90^\circ$ y $\vartheta=45^\circ$
a) Calcita : $n'' < n_e$ para $\alpha > \alpha_T$; $\alpha_T = 57.9^\circ$ si $n=1.755$
 $\alpha_T = 73.5^\circ$ si $n=1.550$
b) Cuarzo : $n'' > n_e$ para $\alpha > \alpha_T$; $\alpha_T = 62.3^\circ$ si $n=1.755$

El análisis del discriminante de la ecuación para el índice de refracción extraordinario pone en evidencia ciertos comportamientos anómalos: índices complejos o con valores fuera del intervalo establecido por n_o y n_e . Pero como el índice toma estos valores cuando hay reflexión total, no están asociados a ondas planas homogéneas que se propagan en el cristal.

IV.2 ONDAS EVANESCENTES ASOCIADAS A LA REFLEXION TOTAL EXTERNA.

En la sección anterior se vio que, salvo en algunos casos de simetría, en la zona de reflexión total externa el índice de refracción extraordinario que se obtiene para cristales monoaxiales no absorbentes resulta complejo. Este índice revela algunas características de las ondas evanescentes excitadas en la reflexión total. En medios isótropos no absorbentes pueden ser descritas mediante un ángulo de refracción complejo¹ o un índice de refracción imaginario¹⁶. En los medios anisótropos, la relación entre el índice y el ángulo de refracción, dada a partir de (I.50) y (I.55) por

$$\left(\frac{n}{n''}\right)^2 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 + b(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2, \quad (\text{IV.25})$$

sugiere diferencias geométricas con las ondas evanescentes en medios isótropos. Además, es bien conocido que en el formalismo de la propagación de ondas electromagnéticas en medios isótropos, un índice de refracción complejo es una característica de los medios absorbentes.

En esta sección se muestra que el índice de refracción complejo, obtenido para cristales no absorbentes, es coherente con el formalismo de la propagación de ondas electromagnéticas y que las ondas evanescentes que se obtienen son

físicamente aceptables. Los desarrollos matemáticos se limitarán al caso particular en que el plano de incidencia contenga al eje óptico, pues en este plano las características de las ondas evanescentes surgen con toda claridad y el cálculo es sencillo. Además, como sólo interesa el caso en que el rayo refractado es extraordinario, se supondrá que la polarización de la onda incidente es tal que el vector eléctrico \vec{E} es paralelo al plano de incidencia y en consecuencia no hay rayo refractado ordinario.

IV.2.1 REFLEXION TOTAL E INDICE DE REFRACCION

Cuando el eje óptico está contenido en el plano de incidencia, la expresión para el ángulo de reflexión total externa se reduce a

$$\text{sen}^2 \alpha_T = \left[\frac{n_o}{n} \right]^2 (1 + b^* \text{sen}^2 \vartheta) \quad (\text{IV.26})$$

y para el ángulo que forma la normal extraordinaria con la normal a la superficie (Ver (III.15))

$$\text{cotg } \beta_{RR} = \frac{-b^* \cos \vartheta \text{ sen } \vartheta}{1 + b^* \text{sen}^2 \vartheta} \quad (\text{IV.27})$$

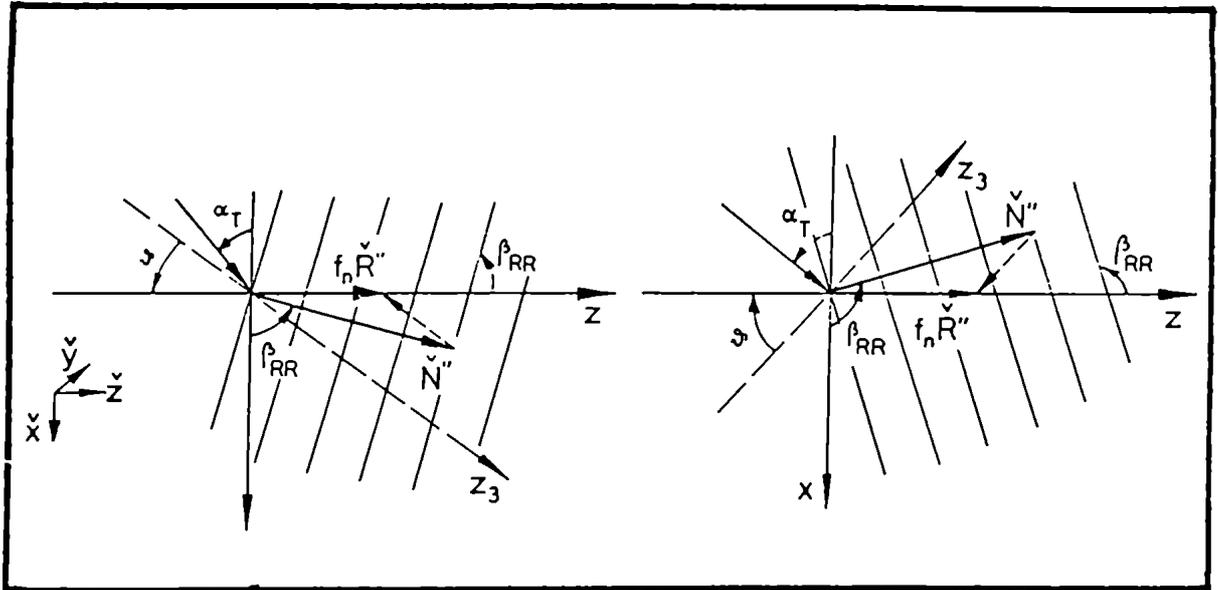


Figura 30 : Posibles direcciones del frente de onda refractado extraordinario cuando la onda incide sobre el cristal con el ángulo de reflexión total para un cristal negativo.

De esta ecuación resulta, como se ha visto en (III.1), que β_{RR} puede ser mayor o menor que $\pi/2$ según sean b^* y ϑ positivos o negativos (Figura 30).

La relación entre α_T y β_{RR} está dada por la ley de Snell generalizada

$$n \operatorname{sen} \alpha_T = n'' \operatorname{sen} \beta_{RR} \quad (\text{IV.28})$$

donde n'' está dado por la ecuación bicuadrática (IV.1) y cuya expresión en función de los índices de refracción es

$$A\left(\frac{n}{n''}\right)^4 - B\left(\frac{n}{n''}\right)^2 + C = 0 \quad (\text{IV.29})$$

En este caso particular de eje óptico contenido en el plano de incidencia, los coeficientes (IV.2)-(IV.4) en función del ángulo de incidencia y del ángulo que forma el eje óptico con la superficie de separación se reducen a

$$A = (b \operatorname{sen}^2 \alpha + 1)^2 - 4b \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \vartheta \quad (\text{IV.30})$$

$$B = 2(b \operatorname{sen}^2 \alpha + 1) \left[b \operatorname{sen}^2 \vartheta + \frac{n^2}{n_e^2} \right] - 4b \left(\frac{n}{n_e} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \vartheta \quad (\text{IV.31})$$

$$C = \left[b \operatorname{sen}^2 \vartheta + \frac{n^2}{n_e^2} \right]^2 \quad (\text{IV.32})$$

Como se ha visto en IV.1, cuando el ángulo de incidencia es mayor que el de reflexión total, las soluciones de (IV.29) son complejas, obteniéndose

$$n''^2 = \frac{n^2 B}{2C} \pm i \frac{n^2 \Delta}{2C} \quad (\text{IV.33})$$

donde

$$\Delta = \sqrt{4AC - B^2} \quad (\text{IV.34})$$

Para determinar el significado físico de este índice de refracción complejo se analizan las soluciones en ondas planas para la onda refractada extraordinaria

$$\vec{E}'' = \vec{E}'' e^{i\varphi''} \quad (\text{IV.35})$$

$$\vec{D}'' = \vec{D}'' e^{i\varphi''} \quad (\text{IV.36})$$

$$\vec{H}'' = \vec{H}'' e^{i\varphi''} \quad (\text{IV.37})$$

con

$$\varphi'' = k_0 n'' (\vec{N}'' \cdot \vec{r}) - \omega t \quad (\text{IV.38})$$

donde k_0 es el número de onda en el vacío y en general

$$(\vec{N}'' \cdot \vec{r}) = x \cos \beta'' + z \operatorname{sen} \beta'' \quad (\text{IV.39})$$

donde β'' está dado en función de α mediante la ley de Snell

$$n \operatorname{sen} \alpha = n'' \operatorname{sen} \beta'' \quad (\text{IV.40})$$

Reemplazando (IV.40) en (IV.39) y ésta en (IV.38) se obtiene

$$\varphi'' = z k_0 n \operatorname{sen} \alpha + x k_0 \sqrt{n''^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} - \omega t \quad (\text{IV.41})$$

Si n'' es complejo, se tiene

$$\sqrt{n''^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \equiv g_1 + i g_2 \quad (\text{IV.42})$$

y la fase se puede escribir

$$\varphi'' = \beta k_0 n \sin \alpha + \alpha k_0 g_1 + i \alpha k_0 g_2 - \omega t \quad (\text{IV.43})$$

Es decir, que la fase está compuesta por tres términos además del término temporal. El primer término representa la propagación paralela a la interfase y el tercero la atenuación de la onda perpendicular a la interfase. El segundo término, que aparece también en los medios absorbentes pero no en dieléctricos isótropos, es el que corresponde a la propagación perpendicular a la interfase.

En los medios dieléctricos isótropos, en la zona de reflexión total, se puede considerar que el índice toma un valor imaginario puro

$$n'' = i\nu \quad (\text{IV.44})$$

y la fase se puede escribir

$$\varphi_d'' = \beta k_0 n \sin \alpha + i \alpha k_0 \sqrt{\nu^2 + n^2 \sin^2 \alpha} - \omega t \quad (\text{IV.45})$$

que representa una atenuación en la dirección perpendicular a la interfase y una propagación paralela a la misma.

Cuando el índice de refracción es complejo (medios absorbentes o cristales no absorbentes en la reflexión total) o imaginario puro (medios isótropos no absorbentes en la reflexión total), las superficies de amplitud constante están dadas por

$$\alpha = \text{constante}$$

(IV.46)

y son por lo tanto planos paralelos a la interfase. Las superficies de fase constante no coinciden con las de amplitud constante. En los medios dieléctricos isótropos, las superficies de fase constante en la reflexión total son planos perpendiculares a la interfase (Figura 31). En los medios isótropos absorbentes¹⁰ las superficies de fase constante son planos que forman un cierto ángulo (que depende del ángulo de incidencia) con la normal a la superficie de separación.

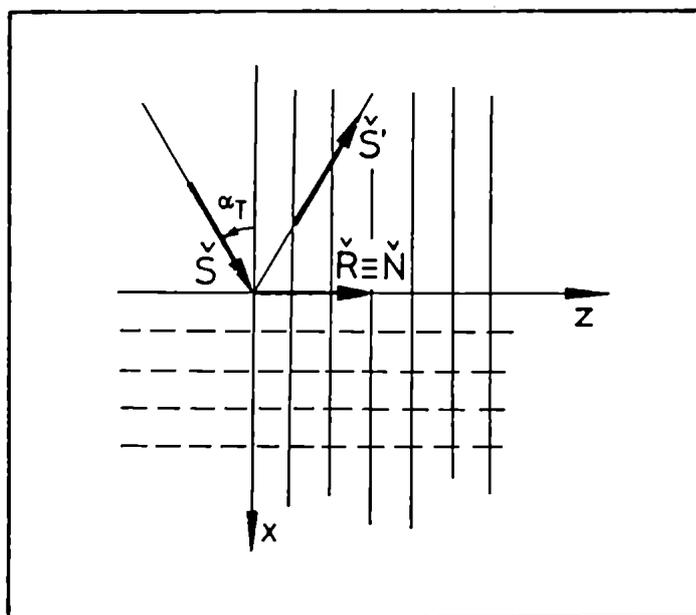


Figura 31 : Reflexión total en medios dieléctricos isótropos. Las líneas llenas representan superficies de fase constante, las líneas a trazos representan las superficies de amplitud constante.

Para describir lo que ocurre en la reflexión total en medios anisótropos monoaxiales no absorbentes, se necesita conocer explícitamente la expresión de φ'' en función del ángulo de incidencia y de las características del cristal. Reemplazando (IV.34) en (IV.42) se obtiene

$$g_1 + ig_2 = \sqrt{\left[\frac{n^2 B}{2 C} - n^2 \text{sen}^2 \alpha\right] \mp i \frac{n^2 \Delta}{2 C}} \quad (\text{IV.47})$$

de donde resulta

$$g_1^2 = \frac{n^2 B}{4 C} - \frac{n^2 \text{sen}^2 \alpha}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{n^2 B}{2 C} - n^2 \text{sen}^2 \alpha\right]^2 + \left[\frac{n^2 \Delta}{2 C}\right]^2} \quad (\text{IV.48})$$

$$g_2^2 = \frac{n^2 B}{4 C} + \frac{n^2 \text{sen}^2 \alpha}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{n^2 B}{2 C} - n^2 \text{sen}^2 \alpha\right]^2 + \left[\frac{n^2 \Delta}{2 C}\right]^2} \quad (\text{IV.49})$$

De estas relaciones surge que tanto la propagación de la onda como la atenuación, que están dadas por g_1 y g_2 , dependen de las partes real e imaginaria del índice.

Pero si la parte imaginaria se anula, es decir si $\Delta = 0$, entonces $g_2 = 0$ y no hay atenuación. Pero $\Delta = 0$ corresponde al ángulo límite de reflexión total α_T .

Si se reemplazan las ecuaciones (IV.30)-(IV.32) y (IV.34) en (IV.48) y (IV.49), se obtiene para ángulos mayo-

res que el de reflexión total

$$g_1 = \frac{n b^* \operatorname{sen} \alpha \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta}{1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta} \quad (\text{IV.50})$$

$$g_2 = \frac{n \sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \left[1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta\right]}}{1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta} \quad (\text{IV.51})$$

de donde resulta que la atenuación aumenta con el ángulo de incidencia α , y g_1 lo hace en módulo. Los signos posibles de g_1 corresponden a las posibilidades representadas en la figura 30.

De la ecuación (IV.43) se puede obtener el ángulo que forma el frente de onda con la interfase cuando la onda incide con un ángulo mayor o igual que el de reflexión total:

$$\frac{-k_0 g_1}{k_0 n \operatorname{sen} \alpha} = \frac{-b^* \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta} \quad (\text{IV.52})$$

El ángulo correspondiente es el ángulo β_{RR} definido en (IV.27) como el ángulo que forma la onda refractada cuando incide sobre el medio una onda con el ángulo de reflexión total. En consecuencia, las superficies de fase constante de las ondas evanescentes que se propagan en el cristal monoaxial no absorbente cuando el haz incidente sufre reflexión

total, forman un ángulo β_{RR} con la superficie de separación independientemente del ángulo de incidencia (Figura 32)

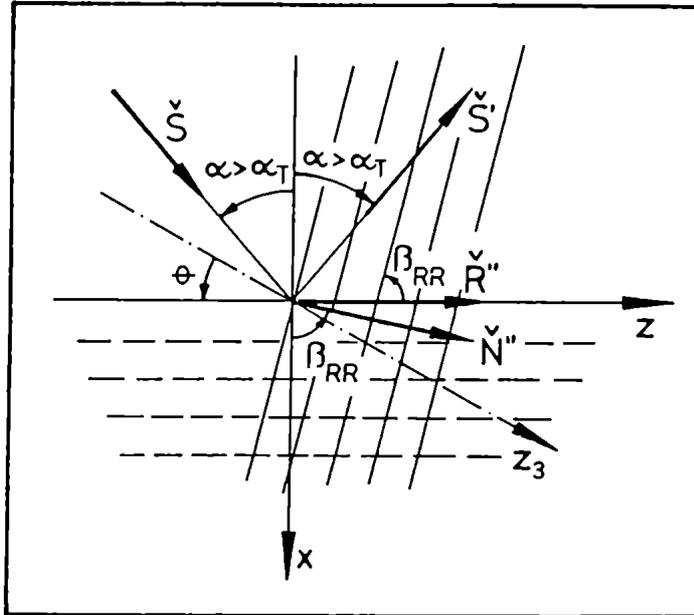


Figura 32 : Reflexión total externa en medios anisótropos monoaxiales. Las líneas llenas representan superficies de fase constante cuya inclinación es independiente del ángulo de incidencia para $\alpha > \alpha_T$. Las líneas a trazos representan superficies de amplitud constante.

IV.2.2 FLUJO DE ENERGIA EN LAS ONDAS EVANESCENTES

En los medios isótropos el flujo de energía de las ondas evanescentes es nulo en promedio temporal en la dirección perpendicular a la superficie de discontinuidad pero subsiste una oscilación de energía en esa dirección. En cambio, en la dirección paralela a la interfase, el promedio

temporal del flujo de energía es finito. Es decir, la energía no penetra en el segundo medio y fluye a lo largo de la superficie de separación en el plano de incidencia. En las ondas evanescentes en los cristales monoaxiales no absorbentes, el índice complejo da un flujo de energía algo distinto. Por tratarse de un material no absorbente, no debe haber un flujo neto en la dirección perpendicular a la interfase.

Para comprobar la compatibilidad de flujo de energía nulo en la dirección perpendicular a la interfase e índice de refracción complejo, se calculan las componentes del vector de Poynting. Como se postuló que el campo eléctrico incidente está polarizado paralelamente al plano de incidencia y éste contiene al eje óptico, los campos refractados son

$$\vec{D}'' = \check{x} D''_x + \check{z} D''_z \quad (\text{IV.53})$$

$$\vec{E}'' = \check{x} E''_x + \check{z} E''_z \quad (\text{IV.54})$$

$$\vec{H}'' = \check{y} H''_y \quad (\text{IV.55})$$

Las componentes del vector de Poynting \vec{S}'' resultan

$$S''_x = -\text{Re}(E''_z) \text{Re}(H''_y) \quad (\text{IV.56})$$

$$S''_y = 0 \quad (\text{IV.57})$$

$$S''_z = \text{Re}(E''_x) \text{Re}(H''_y) \quad (\text{IV.58})$$

donde Re significa "parte real de".

De las ecuaciones de Maxwell (I.1) y (I.2) y proponiendo las soluciones en ondas planas (IV.35)-(IV.37) con una fase dada por (IV.43), se obtiene

$$\mathcal{E}''_y = \frac{k_0}{\mu_0 \omega} \left[n \operatorname{sen} \alpha \mathcal{E}''_x - g_1 \mathcal{E}''_z - i g_2 \mathcal{E}''_z \right] \quad (\text{IV.59})$$

$$\mathcal{D}''_x = \frac{k_0}{\omega} n \operatorname{sen} \alpha \mathcal{E}''_y \quad (\text{IV.60})$$

$$\mathcal{D}''_z = \frac{k_0}{\omega} (g_1 + i g_2) \mathcal{E}''_y \quad (\text{IV.61})$$

Para obtener \mathcal{E}''_x y \mathcal{E}''_z se recurre a la ecuación (I.5) que relaciona las componentes principales de \vec{D} y \vec{E} . Aplicando las rotaciones necesarias resulta

$$\mathcal{E}''_x = \frac{\mu_0 c^2}{n_o^2} \left\{ \left[1 + b^* \cos^2 \vartheta \right] \mathcal{D}''_x + b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \mathcal{D}''_z \right\} \quad (\text{IV.62})$$

$$\mathcal{E}''_z = \frac{\mu_0 c^2}{n_o^2} \left\{ b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \mathcal{D}''_x + \left[1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta \right] \mathcal{D}''_z \right\} \quad (\text{IV.63})$$

Reemplazando (IV.60) y (IV.61) en estas últimas ecuaciones se obtiene

$$\mathcal{E}''_z = \frac{\mu_0 \omega}{k_0 n_o^2} \left[f_1 + i f_2 \right] \mathcal{E}''_y \quad (\text{IV.64})$$

$$\mathcal{E}_x'' = \frac{\mu_0 \omega}{k_0 n_o^2} [f_3 + i f_4] \mathcal{E}_y'' \quad (\text{IV.65})$$

con

$$f_1 = n b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \alpha - (1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta) g_1 \quad (\text{IV.66})$$

$$f_2 = -(1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta) g_2 \quad (\text{IV.67})$$

$$f_3 = (1 + b^* \cos^2 \vartheta) n \operatorname{sen} \alpha - b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta g_1 \quad (\text{IV.68})$$

$$f_4 = -b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta g_2 \quad (\text{IV.69})$$

Reemplazando las expresiones de g_1 y g_2 dadas en (IV.50) y (IV.51) se obtiene

$$f_1 = 0 \quad (\text{IV.70})$$

$$f_2 = -n \sqrt{\left(\frac{n}{n_o}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - (1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta)} \quad (\text{IV.71})$$

$$f_3 = \frac{n_o^2 n \operatorname{sen} \alpha}{n_o^2} \quad (\text{IV.72})$$

$$f_4 = - \frac{n b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \sqrt{\left(\frac{n}{n_o}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - (1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta)}}{(1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta)} \quad (\text{IV.73})$$

Por otra parte, a partir de (IV.48) y (IV.53) se obtiene la expresión para \mathcal{E}_y''

$$\mathcal{E}_y'' = H_y'' e^{-k_o g_2 x} (\cos \varphi_1'' + i \operatorname{sen} \varphi_1'') \quad (\text{IV.74})$$

con

$$\varphi'' = \beta k_0 z \operatorname{sen} \alpha + x k_0 g_1 - \omega t \quad (\text{IV.75})$$

Reemplazando (IV.74) en (IV.64) y (IV.65) y teniendo en cuenta (IV.62), se obtienen las expresiones de las componentes del vector de Poynting en función de la componente y del vector intensidad de campo magnético

$$\mathcal{P}_x = \frac{-\mu_0 \omega}{k_0 z^2} H_y''^2 e^{-2k_0 g_2 x} f_2 \cos \varphi_1'' \operatorname{sen} \varphi_1'' \quad (\text{IV.76})$$

$$\mathcal{P}_z = \frac{\mu_0 \omega}{k_0 z^2} H_y''^2 e^{-2k_0 g_2 x} \left\{ f_3 \cos^2 \varphi_1'' + f_4 \cos \varphi_1'' \operatorname{sen} \varphi_1'' \right\} \quad (\text{IV.77})$$

De estas últimas ecuaciones se ve inmediatamente que la componente del vector de Poynting en la dirección perpendicular a la interfase se anula en promedio temporal subsistiendo sólo una oscilación de energía. En la dirección paralela a la superficie de discontinuidad se obtiene un flujo neto de energía dado por el primer término de (IV.77) y una oscilación dada por el segundo. La oscilación de energía ocurre en planos con dirección respecto a la interfase dada por

$$-\frac{f_4}{f_2} = \frac{-b^* \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta}{(1 + b^* \operatorname{sen}^2 \vartheta)} \equiv \cotg \beta_{RR} \quad (\text{IV.78})$$

Es decir, la oscilación de energía es paralela al frente de onda para todos los ángulos de incidencia mayores o iguales que el de reflexión total.

Para el caso $b^* = 0$ las fórmulas obtenidas reproducen el caso isótropo. En este caso $\beta_{RR} = \pi/2$, es decir la normal al frente de onda es paralela a la interfase y la energía oscila en un plano perpendicular a la misma. En el caso de un cristal monoaxial con eje óptico paralelo o perpendicular a la superficie de discontinuidad ($\vartheta = 0$ ó $\vartheta = \pi/2$) resulta también $g_1 = 0$ lo que es coherente con que el discriminante se anule (ver (IV.10) y (IV.11)) obteniendo situaciones similares a las que se producen en medios isótropos.

Los desarrollos precedentes muestran que las ondas evanescentes que se producen en la zona de reflexión total externa en cristales monoaxiales no absorbentes difieren en general de las que se producen en medios isótropos no absorbentes fundamentalmente en la orientación de los frentes de onda, y de las que se producen en medios isótropos absorbentes en la independencia de la orientación de los frentes de onda del ángulo de incidencia y en la dirección del vector de Poynting asociado.

Informe de Tesis para Lilitiana Inés Perez

REFLEXION Y REFRACCION EN CRISTALES BIREFRINGENTES MONOAXIALES.

El objetivo de esta Tesis consistió en la ampliación del formalismo vectorial para la refracción y reflexión de luz en cristales monoaxiales al cálculo de las amplitudes y polarizaciones de los rayos y en una revisión y discusión de dicho formalismo en la zona de reflexión total.

Los desarrollos efectuados para ampliar la formulación vectorial al cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión dieron fórmulas analíticas para dichos coeficientes en el caso en que el eje óptico forma un ángulo arbitrario con la interfase. Este caso general no pudo resolverse con los métodos usuales que se limitan siempre a los casos especiales de simetría. Es justamente la forma vectorial de la polarización de las ondas y de sus direcciones de propagación la que permitió calcular los coeficientes de reflexión en función del ángulo de incidencia para una orientación arbitraria del eje óptico. Pues en ese caso los modos propios del cristal destruyen los modos propios de la interfase (paralelo y perpendicular al plano de incidencia).

Mediante el estudio del fenómeno de la reflexión total externa y su comparación con la reflexión total interna se encontraron algunas características peculiares de estos medios en los cuales las direcciones de rayo y normal al frente de onda no coinciden. También se muestra que la variación del índice de refracción



con la dirección de incidencia tiene como consecuencia que en una misma interfase (medio isótropo-cristal uniaxial) puede haber reflexión total externa e interna para distintos planos de incidencia. Por otra parte el formalismo utilizado muestra que en la zona de reflexión total el índice de refracción extraordinario es complejo aún en cristales no absorbentes. El análisis del significado físico de este índice complejo demuestra que dicho formalismo es coherente con la teoría electromagnética de la propagación de ondas por medios absorbentes y no absorbentes.

También se obtuvieron mediante ese estudio las propiedades más importantes de las ondas evanescentes en un cristal monoaxial. Esta Tesis muestra pues la coherencia del formalismo y el gran poder del mismo para construir una óptica de cristales birrefringentes sencilla y eficaz.


Prof. Dora María C. Simon

CONCLUSIONES

La formulación vectorial, desarrollada por M.C.Simon y R.M.Echarri, para la reflexión y refracción de una onda plana que incide sobre la superficie de un cristal monoaxial, de forma y orientación arbitrarias, permite calcular las direcciones de la normal al frente de onda y del rayo refractado extraordinarios. En dicho formalismo se calcula un índice de refracción extraordinario que depende de la dirección de incidencia y de las características del medio isótropo y del cristal birrefringente. Sin embargo, el cálculo de las amplitudes de los rayos involucrados en la reflexión y refracción externas requiere de una ampliación del formalismo, lo que se logró escribiendo en forma vectorial los campos involucrados y las condiciones de contorno. Las fórmulas obtenidas permitieron calcular, para orientaciones arbitrarias del eje óptico, los coeficientes de reflexión y transmisión. Los resultados obtenidos mostraron diferencias cualitativas entre medios isótropos y anisótropos monoaxiales para las polarizaciones de las ondas reflejadas y transmitidas. Por un lado, como los modos característicos de la propagación de ondas planas en cristales monoaxiales son el modo ordinario y el extraordinario, la polarización de la onda incidente no afecta las polarizaciones de las ondas refractadas; sólo influye en las amplitudes relativas de las mismas. Por otra parte y como consecuencia de dicha característica, se obtuvo que la polarización del rayo reflejado no coincide con la del rayo incidente

y no depende únicamente de ella.

También se aplicó el formalismo vectorial al fenómeno de reflexión total externa. Se encontró que el mismo tiene ciertas peculiaridades: el ángulo de reflexión total depende de la orientación relativa entre el eje óptico, la normal a la interfase y el plano de incidencia. Además, su existencia para todos, algunos o ningún plano de incidencia depende de la relación entre el índice del medio isótropo, los índices principales del cristal y la orientación del eje óptico respecto a la superficie de separación.

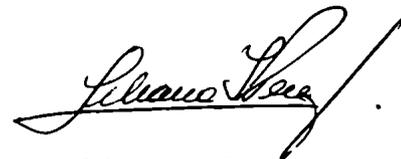
El estudio de la reflexión total también dio lugar a una revisión del formalismo vectorial mencionado, ya que en ella el índice de refracción extraordinario puede tomar valores complejos o fuera del intervalo determinado por los índices principales del cristal. Se mostró, empero, que dichos valores no llevan a ninguna contradicción física. La extensión al campo complejo del concepto de índices de refracción de medios no absorbentes, permitió conocer la estructura de las ondas evanescentes excitadas en la reflexión total y comparar sus características con las correspondientes en medios isótropos.

Se posee ahora una sólida base no sólo para extender al campo complejo el cálculo de las amplitudes en las zonas de reflexión total externa e interna, sino también para determinar el comportamiento de sistemas formados por materiales

birrefringentes, que actualmente son descriptos en forma aproximada (sistemas de multicapas, interferómetros de polarización). Será posible estudiar también el efecto Goos-Hänchen (desplazamiento longitudinal del rayo reflejado) y la existencia de un desplazamiento transversal.



Dra. María C. Simon



Liliana I. Perez

Buenos Aires, noviembre de 1990

REFERENCIAS

1. A. Sommerfeld, "Optics" en *Lectures on theoretical physics. Vol IV. Academic Press.*
2. J.B. Biot, "Traité de Physique Experimentale et Mathématique" A. Paris, Chez Deterville, Libraire, 1816. También en Monografía del Seminario "Temas de Optica II": "Biot y la luz" por R. Echarri.
3. O.N. Stavroudis, "Ray Tracing Formulas for uniaxial crystals". *J.O.S.A.* 52 (1962) 187.
4. W. Swindell, "Extraordinary ray and wave-tracing in uniaxial crystals". *Appl. Opt.* 14 (1975) 2298.
5. R.M.A. Azzam y N.M. Bashara, "Ellipsometry and Polarized Light". North-Holland, pag 354.
6. M. Elshazly-Zaghloul y R.M.A. Azzam, "Brewster and pseudo-Brewster angles of uniaxial crystal surfaces and their use for determination of optical properties". *J.O.S.A.* 72 (1982) 657.
7. M.C. Simon, "Ray tracing formulas for monoaxial optical components". *Appl. Opt.* 22 (1983) 354.
8. M.C. Simon y R.M. Echarri, "Ray tracing formulas for monoaxial optical components: vectorial formulation". *Appl. Opt.* 25 (1986) 1935.
9. M.C. Simon, "Refraction in biaxial crystals: a formula for the indices". *J.O.S.A. A* 4 (1987) 2201.

- 10.M.Born y E.Wolf, "*Principles of Optics*". 5^o Edición, Pergamon Press.
- 11.M.C.Simon y L.I.Perez, "*Reflection and transmission coefficients in uniaxial crystals*", *Journal of Modern Optics* (en prensa).
- 12.M.C.Simon, J.M.Simon y M.T.Garea, "*Phase shift in dielectric reflection*". *Appl.Opt.*26 (1987) 3871.
- 13.M.C.Simon y L.I.Perez, "*Total reflection in uniaxial crystals*", *Optik* 82, N^o 2 (1989) 37.
- 14.M.C.Simon y R.M.Echarri, "*Internal total reflection in monoaxial crystals*". *Appl.Opt.*26 (1987) 3878.
- 15.M.C.Simon y L.I.Perez, "*Evanescent waves in total reflection in uniaxial crystals*", *Optik* (en prensa).
- 16.L.Landau y D.Lifshitz, "*Electrodinámica de los Medios Continuos*" en *Curso de Física Teórica*, Vol.8 ,Reverté (1975).

Llegará una época en la que una investigación diligente y prolongada sacará a la luz cosas que hoy están ocultas... Muchos son los descubrimientos reservados para las épocas futuras, cuando se haya borrado el recuerdo de nosotros. Nuestro universo sería una cosa muy limitada si no ofreciera a cada época algo que investigar... La naturaleza no revela sus misterios de una vez para siempre.

*Séneca, Cuestiones naturales,
libro 7, siglo I*