

## Tesis de Posgrado

# Aspectos geométricos y topológicos de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvo

Domenech, Graciela

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Domenech, Graciela. (1991). Aspectos geométricos y topológicos de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2452\\_Domenech.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2452_Domenech.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Domenech, Graciela. "Aspectos geométricos y topológicos de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvo". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1991. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2452\\_Domenech.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2452_Domenech.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

Reg. n° 2452

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

# Aspectos geométricos y topológicos de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvo

Autora: Graciela Domenech

Director: Mario Castagnino

Tesis para acceder al Doctorado en Ciencias Físicas

Noviembre de 1991

Tesis.  
2452  
g. 2

*a Pancho,  
a Amalia, Edgardo,  
Jorge y Lucía*

## RESUMEN

Hemos estudiado algunos aspectos de la cuantificación de la gravedad. Utilizando la teoría de concomitantes, encontramos un teorema que generaliza el teorema de Weyl, resolviendo rigurosa y unívocamente el problema del lagrangiano de las teorías semiclásicas.

Estudiamos, también haciendo uso de la teoría de concomitantes, expresiones para el valor renormalizado del campo escalar al cuadrado en cuatro y seis dimensiones.

Finalmente nos ocupamos de las modificaciones que producen los cambios de topología en la teoría de campos. Hallamos las soluciones de la ecuación de campo, las funciones de Green y el valor renormalizado del tensor de energía-impulso, para el caso de observadores acelerados cualesquiera en un espacio-tiempo en el que se han realizado identificaciones antipodales. Relacionamos el problema de la norma nula de los elementos de la base de Fock con la presencia de horizontes de eventos y la periodicidad de las funciones de Green con la existencia de simetría esférica.

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Una de las paradojas de la física moderna es que dos de las teorías más exitosas tanto para la descripción de los fenómenos como para su comprensión: la Relatividad General (RG) cuando se trata de construir una imagen cosmológica y la Mecánica Cuántica (MQ) cuando se estudia el mundo microscópico, no encuentran manera de conciliarse para dar cuenta adecuadamente del dominio en el que ambas tienen que participar: el dominio de validez de la gravedad cuántica (GQ). No existe una teoría unificada, vale decir, que en un mismo marco describa cuánticamente a las cuatro interacciones conocidas y ni siquiera una teoría que, aún renunciando a esta pretensión de simplicidad y unidad de enfoque, permita obtener predicciones cuánticas con sentido (no divergentes) para el campo gravitatorio en presencia de materia. El fracaso en la reunión de las dos teorías dificulta la comprensión de problemas tales como la descripción de los primeros instantes del universo, del final catastrófico de los colapsos estelares o de las explosiones de agujeros negros. En una palabra, de todos aquellos procesos de muy alta energía o para los que la RG predice la ocurrencia de singularidades en el espacio-tiempo (ET), singularidades cuya estructura o aún cuya existencia misma podría estar condicionada por aspectos cuánticos desconocidos. También fenómenos cuánticos más elementales como la producción de pares requieren una explicación para el caso en que ocurren en un ET de fondo aún clásico pero curvo.

Uno de los primeros problemas que aparecen al intentar la unificación de la RG con la MQ es la gran diferencia tanto conceptual como de estructura entre ambas: en cualquier teoría cuántica de campos –formuladas todas ellas como es sabido en el marco de la Relatividad Especial– el campo se propaga sobre un fondo espacio-temporal fijo: el ET de

Minkowski. En la RG, en cambio, el campo que se propaga y el fondo sobre el cual lo hace están representados ambos por el campo gravitatorio ya que, debido a su rol de tensor métrico del ET, es él al mismo tiempo el intermediario encargado de propagar una fuerza –la fuerza gravitatoria– y de especificar la geometría del fondo sobre el cual esa fuerza se propaga. Esto en cuanto a la diferencia de estructura entre ambas teorías.

En lo que se refiere a los problemas conceptuales, que son muchos, baste como ejemplo mencionar el siguiente: aún teniendo una formulación matemática satisfactoria para la GQ, a ella le caben por lo menos dos interpretaciones. La primera es la interpretación de partícula, muy en consonancia con la MQ habitual y que supone toda la teoría de observables. En ella, la métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  se descompone en un “fondo” de Minkowski representado por la métrica plana  $\eta_{\mu\nu}$  más una “desviación” de la geometría a partir de esta métrica plana representada por el tensor  $h_{\mu\nu}(x)$ . Así,

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(x)$$

Esta descomposición permite recuperar la existencia de un fondo plano con todas las simetrías del grupo de Poincaré que son útiles para la MQ relativista (de Relatividad Especial) y con ellas, la existencia de marcos de referencia privilegiados y, en consecuencia, una adecuada definición de partícula a partir de  $h_{\mu\nu}(x)$ . Sin embargo, puede hacerse gran número de objeciones a esta descomposición. Entre ellas, qué nos asegura que la variedad tenga propiedades métricas parecidas al ET de Minkowski como para que admita semejante descomposición, ya que la cuantificación así propuesta supone que  $h_{\mu\nu}(x)$  es una perturbación a la métrica plana. Más aún, al hacer un tratamiento perturbativo como éste, las potencias de la constante de Newton que aparecen en el desarrollo implican la pérdida de predictividad de la teoría. Este tema será tratado en el capítulo II. Por otro lado, para poder hacer la descomposición en la práctica es necesario que la variedad tenga propiedades topológicas semejantes a la del ET plano. Pero la topología es algo totalmente indeterminado en RG. De este tema nos ocuparemos en el capítulo IV.

Si no se hace esta descomposición pero se insiste en considerar a la métrica como representante de alguna clase de partícula y entonces el gravitón –la partícula no masiva

de spin 2- se considera interactuando consigo misma en el caso de la gravedad libre en la forma habitual en que interactúan las partículas en teorías no lineales, el hecho de no contar *a priori* con un grupo de simetrías que juegue el rol del grupo de Poincaré sabotea la elección de un único tiempo con lo que se pierde la definición natural de frecuencias positivas y negativas para la descomposición del campo y, en consecuencia, la unicidad de los operadores de creación y aniquilación. Distintos conjuntos de estos operadores implican en general distintas definiciones para el vacío y los estados de partícula y, por lo tanto, distintos espacios de Fock.

Por otra parte, la otra interpretación posible para  $g_{\mu\nu}(x)$ , la interpretación de campo, proviene de la generalización al caso de infinito número de grados de libertad y métrica no necesariamente euclídea para las hipersuperficies de tipo espacial del planteo de la MQ ordinaria para un sistema de número finito de grados de libertad. En la formulación de Schrödinger de la MQ se busca una representación de las relaciones de conmutación canónicas sobre operadores hermíticos en un espacio de Hilbert y se trata de resolver la ecuación de Schrödinger para el vector que representa al estado del sistema. Las soluciones son funciones complejas de cuadrado integrable respecto de la medida de Lebesgue y la función de onda se interpreta de tal forma que, si el sistema está en el estado  $\Psi(q_i)$ , entonces la integral de su módulo al cuadrado  $|\Psi(q_i)|^2$  da la densidad de probabilidad de que una medición hecha sobre la configuración del sistema resulte  $q_i$ .

La teoría de campos se obtiene generalizando esto mismo <sup>[1]</sup> : se elige un conjunto normal de funciones  $\{e_i\}$  que sea base de  $R^3$ . Se desarrollan en ella el campo  $\Phi(\vec{x}, t)$  y su variable conjugada  $\Pi(\vec{x}, t)$ , se imponen luego las infinitas relaciones de conmutación canónicas y se obtiene al final una función  $\Psi$  de infinitas variables que satisface la ecuación de Schrödinger. Pero los vectores de estado serán funcionales de los elementos del espacio de configuración clásico (que ahora son funciones) y los cambios de la MQ ordinaria a la teoría cuántica de campos (TQC) serán fundamentalmente los reemplazos de variables por funciones, de funciones por funcionales y de derivadas parciales por derivadas funcionales. Habrá, en consecuencia, también una interpretación probabilística. Sin embargo, esta ingenua generalización adolece de graves problemas. Para comenzar, todo su proceso

matemático no está bien definido: no hay un análogo para infinitas dimensiones de la medida de Lebesgue, no está claro cuáles son las funciones de  $\mathbb{R}^3$  que pueden formar parte del espacio de configuración clásico, no se tiene un producto interno definido en el espacio de configuración que se conserve durante la evolución del sistema <sup>[2]</sup>. Peor aún: dado que no hay una elección única del tiempo, ¿cómo se podría saber cuál es el producto interno que hay que definir para que se conserve durante la evolución temporal?. Por su parte, la falta de un producto interno definido positivo indica que no siempre es definido positivo el cuadrado de la norma de la función de onda y por tanto, tampoco la probabilidad es una función definida positiva, con lo que todo pierde sentido. Si se intenta además escribir el lagrangiano de Einstein en forma explícita, se observa inmediatamente que la teoría involucra en realidad a dos tensores y no a uno: nos referimos a  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$ , uno el inverso del otro, lo que convierte a la teoría en no polinómica salvo que se admita la descomposición en un fondo y una perturbación o alguna forma de parametrización <sup>[3]</sup>.

Nos encontramos además con el problema de que tratar a la materia en RG es esencialmente distinto a tratarla evolucionando sobre un fondo plano (Minkowski) fijo como hace la TQC habitual. Cuando el fondo es curvo, los aspectos cinemáticos y dinámicos se confunden, por lo que resulta que no está claro qué es lo que hay que cuantificar ni a qué nivel hay que hacerlo. Se dispone, para comenzar, de un conjunto de puntos. Estos puntos matemáticos deben ponerse en relación con los eventos físicos del ET. Este conjunto debe estar dotado de alguna topología. Y debe estar dotado además de una estructura diferenciable que lo haga una variedad diferenciable. Si se trata de gravedad libre, se definirá un tensor métrico sobre esta variedad de tal forma que satisfaga las ecuaciones de Einstein <sup>[1]</sup>. Si además hay campos de materia, como es deseable en toda cosmología, habrá que decidir cómo se realiza el acople entre materia y gravedad. A estos temas nos referiremos en los capítulos II y III. La primera cuestión es, entonces, ¿a qué nivel habrá que cuantificar?. Lo que habitualmente se hace —en el caso de gravedad libre— es fijar todo salvo la métrica: se dice cuál es la variedad (en general riemanniana y con topología trivial) y el tensor métrico se considera como un operador definido sobre ella.

Casi todas las opiniones coinciden en que este procedimiento es demasiado grosero y que la cuantificación debería realizarse a un nivel más fundamental: J. Wheeler insiste en la necesidad de cuantificar la topología –que consecuentemente se convierte en una variable <sup>[4]</sup> – y R. Penrose en que es el ET mismo el que debe ser cuantificado para lo que trabaja con twistores <sup>[5,6]</sup> . Sin embargo, además de considerar a estas posibilidades, sería deseable obtener el máximo de información de las vías ya exploradas: la métrica es clásica y descrita por la RG (de nuevo una variedad riemanniana con topología trivial) y la fuente de las ecuaciones de Einstein es el tensor de energía-impulso de los campos cuánticos de materia elegido con algún criterio. ¿ Cuándo vale esta aproximación? Es sencillo ver que es un buen límite en las regiones en que el tensor de curvatura  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  es tal que cualquiera de sus componentes cumple

$$\max(|R_{\rho\sigma}^{\mu\nu}|) < c^3/16\pi G\hbar \equiv l_p^{-2}$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz,  $G$  la constante de Newton,  $\hbar$  la constante de Planck y  $l_p \sim 10^{-32}cm$  la longitud de Planck. Esta es la teoría cuántica de campos en el ET curvo o teoría semiclásica, aceptada como límite de la “buena” teoría cuántica completa.

Podríamos resumir brevemente todos los problemas diciendo que la cuantificación fracasa porque no sabemos qué hay que cuantificar: si sólo la métrica, si también la topología o el ET, ni a qué nivel hay que hacerlo; o porque no usamos la acción correcta aunque sepamos que la acción de Einstein es la adecuada para describir los fenómenos clásicos; o porque no tenemos una teoría unificada para describir a la vez materia y gravedad. O a nivel semiclásico, porque habiendo fijado todo y tratando de estudiar sólo las modificaciones que la materia provoca sobre la métrica de fondo –*back reaction*–, nos encontramos con una constante dimensional en la acción que complica las cosas.

El propósito de esta tesis es brindar una modesta colaboración en la comprensión de algunos de estos problemas: cuál es el lagrangiano correcto, por lo menos a nivel semiclásico, cómo tratar a la constante gravitatoria que tiene dimensiones; cuáles son algunas de las posibles modificaciones a la topología y qué relaciones tienen estas modificaciones con el observador; cuál es la adecuada fuente cuántica para las ecuaciones de Einstein al estudiar

la influencia de la fuente sobre la geometría, cuál es el valor de expectación de vacío del campo fuente al cuadrado. La tesis está organizada como sigue: en el capítulo II estudiamos bajo hipótesis muy generales la forma de la acción gravitatoria para las teorías semiclásicas. En el capítulo III, nos ocupamos de la forma de la fuente a las ecuaciones de Einstein. El capítulo IV está dedicado a las modificaciones introducidas por los cambios en la topología. El capítulo V resume los resultados obtenidos.

## CAPITULO II

### LA ACCIÓN GRAVITATORIA DE LAS TEORÍAS SEMICLÁSICAS

#### II.1 Introducción

La RG brinda una descripción clásica consistente de los fenómenos gravitatorios y existe gran acuerdo entre sus predicciones y los resultados experimentales. Pero presenta grandes problemas cuando se trata de cuantificarla. Estos problemas, que ya aparecen en la cuantificación del campo gravitatorio sin fuentes, se tornan críticos al intentar acoplar los campos de materia a la RG libre: en este caso aparecen divergencias aún a primer orden en el desarrollo en potencias de la constante de Planck  $\hbar$ . Se culpa generalmente por estos problemas a la constante de acople con dimensiones por la que es necesario multiplicar al lagrangiano lineal en la curvatura para conseguir que la acción sea adimensional. Se culpa también al tratamiento diferente que se hace de los campos de materia y del campo gravitatorio, o sea, la falta de una teoría unificada.

#### II.2 Las teorías geométricas de campo unificado

La RG relaciona la estructura métrica del universo con su contenido de materia. El campo gravitatorio, que tiene como fuente a la materia, es a su vez el que determina la curvatura del ET. Al formularla en presencia de fuentes, la RG es una mezcla de descripción geométrica para el campo gravitatorio y descripción fenomenológica para el campo electromagnético y los campos de materia. Surge entonces inmediatamente la cuestión de si es

sólo la gravedad la que puede describirse en términos geométricos o si esto es también posible para la materia. El mismo Einstein, al describir al electromagnetismo en el marco de la RG, comenta que el acoplamiento mínimo no resulta teóricamente satisfactorio porque “sería preferible una teoría en la cual el campo gravitatorio y el electromagnético no se introdujeran como estructuras lógicamente distintas”, haciendo particular referencia a los trabajos de Weyl<sup>[7]</sup>.

Las teorías de campo unificado tal como fueron formuladas originalmente, o sea, sin incluir a las interacciones débiles y fuertes, pretenden salvar la heterogeneidad en las descripciones de la gravitación y el electromagnetismo reuniéndolo en un solo campo cuyas ecuaciones representan las nuevas condiciones impuestas sobre la geometría. Pero los diez coeficientes independientes de la métrica son necesarios y suficientes para describir, en una variedad riemanniana de cuatro dimensiones, al campo gravitatorio. Si queremos agregar, entonces, al electromagnetismo, es necesaria la presencia de más parámetros, ya sea ampliando la definición de la métrica, permitiendo cualquier conexión para flexibilizar la definición de desplazamiento paralelo de un vector a lo largo de un contorno cerrado infinitesimal, aumentando el número de dimensiones de la variedad como se hace por ejemplo en las teorías estilo Kaluza-Klein<sup>[8]</sup> o a través del agregado de otros campos para describir a la gravedad que se ligan geoméricamente con los campos de materia, tal el ejemplo de las teorías de supergravedad (SG)<sup>[9]</sup>.

Numerosos han sido los intentos realizados en la dirección de unificación. Podemos mencionar como ejemplos representativos clásicos a la teoría generalizada de la gravitación de Einstein<sup>[10]</sup> que utilizaba una métrica de componentes complejas para describir conjuntamente a la gravitación y el electromagnetismo relacionando a la parte antisimétrica de la métrica, es decir  $g_{[\mu\nu]}$ , con el tensor de Maxwell. Sin embargo, se puede mostrar que  $g_{[\mu\nu]}$  no puede representar fotones y que es más bien un campo auxiliar del estilo de los que frecuentemente aparecen en SG<sup>[11,12]</sup>. Una propuesta alternativa es la teoría de Weyl que amplía la conexión para contener al electromagnetismo<sup>[13]</sup>. Así se agrega a la idea de arbitrariedad en el sistema de coordenadas establecida por la RG otra propuesta referida a la relatividad de la medida, idea que diera origen a las teorías de *gauge*. Pero los

resultados que predice la teoría de Weyl no son independientes de la historia del sistema [14]. Por ejemplo, las líneas de los espectros de emisión de dos átomos dependen, según ella, de sus ubicaciones y trayectorias previas, lo que se contradice con que estas líneas son muy bien definidas y no varían para fuentes con historias muy diferentes. Surge así la pregunta de si es posible sólo con el campo gravitatorio y el electromagnético construir una teoría que sea satisfactoria, tanto a nivel clásico como cuántico. Ejemplo de intentos más cercanos de incorporar al electromagnetismo a nivel de la conexión en teorías no métricas son los trabajos de N. Batakis [15,16]. Pero para hacerlo debe agregar, además, un campo escalar con unidades tales que restaure las correctas unidades a la conexión y esto a su vez hace imposible que ese campo tenga término cinético en el lagrangiano. Esta crítica es extensiva a todas las teorías que tratan de extender la conexión más allá de la de Weyl: es sencillo mostrar que si se pide que el campo escalar pueda tener término cinético en el lagrangiano, lo que es imprescindible si estamos pidiendo que todos los campos compartan un nivel de igualdad de roles, la conexión afín más general sin constantes dimensionales que puede escribirse con la métrica, el vector electromagnético y el campo escalar tiene como parte simétrica a la conexión de Weyl.

El tener presentes a estos problemas que mencionamos y que históricamente aparecieron al intentar describir en forma unificada y geométrica al campo gravitatorio y los campos de materia, sugiere que la búsqueda de la forma en que se combinan debe hacerse directamente a nivel de la densidad lagrangiana. Más aún, si sólo se suman los lagrangianos individuales imponiendo la clase de acople en el lagrangiano (o equivalentemente en las ecuaciones de movimiento) se está imponiendo también la trayectoria: hemos mostrado en trabajos independientes de esta tesis que acoplar mínimamente por ejemplo campos escalares o de spin 1/2 es obligar a las partículas a recorrer geodésicas [17,18].

¿Qué sucede si se olvida por un instante el origen geométrico de la RG y se pretende describir a la gravitación como a una interacción cualquiera, o sea, se piensa en tratar a todos los campos en igualdad de condiciones pero sin privilegiar a los argumentos geométricos? Lo primero que se observa es que, de las tres pruebas clásicas de la RG que por supuesto no pueden dejarse de lado –vale decir: corrimiento al rojo, precesión del perihelio de Mercurio

y deflexión de la luz al pasar cerca de un cuerpo masivo como el sol— se sigue que la fuerza gravitatoria es de largo alcance, obedece a la ley de la inversa del cuadrado de la distancia, es atractiva y acopla con igual intensidad a cualquier tipo de materia (principio de equivalencia débil). Utilizando un lenguaje de diagramas de Feynman, puede buscarse con estas hipótesis cuál es la partícula mediadora de la interacción gravitatoria que responde a estas características y se encuentra que es una partícula no masiva de spin 2 <sup>[19,20,21]</sup>. S. Weinberg ha mostrado también que al armar los diagramas de interacción gravitatoria entre partículas deben existir vértices gravitón-gravitón —o sea, la teoría es necesariamente no lineal—. Más aún, se puede ver que esta clase de intercambio implica al principio de equivalencia débil <sup>[22]</sup>. Dado que estos vértices ~~existen~~ existen necesariamente, puede intentarse construir la teoría puramente gravitatoria a partir de ellos. El resultado <sup>[23]</sup> es que a nivel árbol, o sea a nivel clásico, sin sumas sobre energías virtuales arbitrariamente altas, se obtiene una suma infinita de términos que describen la autointeracción del campo de spin 2, cada uno multiplicado por su correspondiente potencia de  $\kappa$  que al sumarlos resultan en el lagrangiano de Einstein <sup>[24]</sup> ( $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $G$  la constante de Newton). Sumar todos los posibles diagramas a nivel árbol da un resultado único y que además coincide con la RG. La RG debe entonces ser el límite clásico de la gravedad cuántica. (Este resultado no es trivial. Vale como anécdota recordar la apuesta que Wheeler y Penrose perdieron en 1971 contra A. Salam por asegurar que M. Duff —quien estaba por entonces calculando la suma de diagramas de Feynman— no podría con ella reobtener la solución de Schwarzschild y sus singularidades <sup>[3]</sup>.) Contando con una única acción clásica y observando que ella entra en la categoría de las teorías de *gauge* no abelianas —la RG es invariante por el grupo de cambio general de coordenadas (c.g.c.)— es posible aplicarle los métodos usuales de cuantificación para esas teorías: cuantificación covariante, ruptura de la simetría de *gauge* y su restauración vía los campos fantasmas. Luego habría que prestar atención a la zona de muy altas energías, zona de interés de la gravedad cuántica. Como es bien sabido, el resultado de este programa no es para nada satisfactorio. Nuestra pregunta es entonces concretamente: ¿cuál es la correcta acción cuántica que tiene como límite de bajas energías a la RG y que no presenta sus problemas en la etapa de cuantificación?

Dado que el enfoque del problema de la gravedad libre desde los puntos de vista “particulista” y geométrico conduce al mismo lagrangiano clásico y dado que también la materia puede ser descripta adecuadamente en forma geométrica –siendo sus distintos multipletes representaciones adecuadas sobre los operadores de los grupos de simetrías que incluyen a las partículas y a los campos mediadores de sus interacciones– nos parece adecuado enfocar desde la geometría la búsqueda de la densidad lagrangiana correcta o, por lo menos, aproximaciones a ella.

### II.3 El problema de la constante con dimensiones

La densidad lagrangiana de Hilbert-Einstein es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} R$$

donde  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3$ ) es el tensor métrico,  $g$  su determinante y  $R$  el escalar de curvatura. Puede sumarse a ella el término  $-(\lambda/2)\sqrt{-g}$  para incluir a la constante cosmológica. Este lagrangiano necesita ser multiplicado por una constante con dimensiones para que la acción que con él se construya resulte adimensional. La RG, por su parte, prescribe cuál es la constante correcta: es la inversa de  $\kappa^2$ , siendo  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $G$  la constante de Newton. Estamos trabajando en el sistema natural de unidades en el que vale

$$c = \hbar = 1, \quad [\kappa^2] = l^{-2}$$

donde  $l$  indica unidades de longitud. La aparición de una constante con dimensiones en la acción dificulta la construcción de una teoría cuántica predictiva –vale decir, finita o renormalizable– de la gravitación por la acción descripta [25].

El problema de la constante con dimensiones está relacionado con el ya mencionado el problema de que en la acción gravitatoria participan dos tensores y no uno. El tratamiento perturbativo del campo implica su descomposición en una métrica plana de fondo  $\eta^{\mu\nu}$  más

una perturbación  $h^{\mu\nu}$  que debe ir multiplicada por la constante  $\kappa$  para que la suma tenga unidades adecuadas. O sea, la descomposición es

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu}$$

Pero entonces la inversa  $g_{\mu\nu}$  y también el determinante  $g$ , se convierten en una suma infinita de potencias de  $\kappa$ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \kappa h_{\mu\nu} + \kappa^2 h_{\mu\alpha} h_{\nu}^{\alpha} + O(\kappa^3)$$

en donde ahora no tiene importancia la posición de los índices ya que ellos suben y bajan con  $\eta_{\mu\nu}$ . Construídos con estos elementos los diagramas de Feynman para la autointeracción entre los gravitones representados por  $h_{\mu\nu}$  y restituida la unitariedad de la matriz de *scattering* que se pierde por la invariancia de *gauge* de la teoría –por ejemplo, en el *gauge* de coordenadas armónicas  $h_{\mu\nu}$  cumple que  $\partial_{\lambda}(h_{\beta}^{\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\lambda}h) = 0$  con  $h \equiv h_{\alpha}^{\alpha}$ –, se encuentra que el número de divergencias es ilimitado. Esto se debe a la dependencia cuadrática respecto del momento en las funciones de vértice de los gravitones, que a su vez provienen del hecho de que el lagrangiano de Einstein es cuadrático en las derivadas primeras del campo. En la sección II.5 mostraremos que cabe culpar por esta divergencia superficial aparente a las dimensiones de  $l^2$  de la constante de Newton que hace que una amplitud adimensional de orden  $G^n$  diverja como  $G^n p^{2n}$ : más vértices y *loops* presentes en el diagrama implican mayor grado de divergencia. La forma de evitar el crecimiento del número de términos divergentes sería contar con una constante de acople con dimensiones de  $(\text{masa})^{\alpha}$  con  $\alpha \geq 0$  lo que debe ser descartado ya que, para la gravedad, la constante de acoplamiento es necesariamente la de Newton <sup>[26]</sup>. La invariancia de *gauge* reduce el grado de divergencia en algunos casos, por ejemplo en la electrodinámica cuántica, pero no en el caso de la gravedad libre.

Este no es el único ejemplo en que la presencia de una constante con dimensiones arruina el proceso de renormalización que elimina las divergencias de la teoría. Otro caso bien conocido es el de la teoría de Weinberg-Salam para las interacciones débiles: a energías menores de 100 GeV en el sistema centro de masa, su acción puede aproximarse por una

“acción efectiva” con un término de cuatro fermiones que interactúan en un vértice cuya constante, la constante de Fermi  $G_F \sim 1,02310^{-5} m_{\text{protón}}^2$ , tiene dimensiones de  $l^2$ . A esta “acción de Fermi” utilizada para bajas energías en lugar de la acción completa de Weinberg-Salam corresponden resultados perturbativos en potencias de  $G_F$  no renormalizables. En vista de las similitudes formales entre los problemas de la acción de Fermi y la de Einstein, S. Adler propuso que, al igual que la teoría de Fermi puede ser considerada como una “teoría efectiva” en la que se ha integrado sobre los bosones intermediarios a la verdadera teoría que contiene constantes adimensionales, otro tanto ocurriría con la acción de Einstein que podría ser considerada como la “acción efectiva” de la verdadera teoría desconocida. Este proyecto de principios de la década del '80 no prosperó, sin embargo, debido a que no fue encontrada la acción microscópica que condujera a la RG con la correcta constante de Newton, al contrario de lo que sí sucedió con el lagrangiano de Fermi, cuya constante pudo ser escrita en función de los parámetros de la teoría de las interacciones débiles como

$$G_F = \sqrt{2} g/8M_W \quad \text{con} \quad g = e/\text{sen}\theta_W$$

donde  $\theta_W$  es el ángulo de Weinberg,  $e$  la carga del electrón y  $M_W$  la masa del bosón de gauge  $W$ . El resultado de Adler para la gravedad conducía, por el contrario, a que la interacción gravitatoria era repulsiva. [27]

El hecho de que los vértices con gravitones –en los que se encuentra la constante con dimensiones– provoquen divergencias ultravioletas, estropea todos los cálculos también en los diagramas en los que intervienen los campos de materia, ya que la interacción gravitatoria y en consecuencia las correcciones radiativas si se está cuantificando, está siempre presente cuando hay dos partículas. Una manera de intentar eludir el problema es utilizando teorías alternativas a la RG, pero que la incluyan ya que esta teoría es el buen límite de bajas energías, y que no contengan constantes dimensionales.

La forma más conocida de escribir a la RG sin constantes dimensionales es al modo de Brans-Dicke [28,29]. La teoría de Brans y Dicke está basada en la idea de Mach de que el fenómeno de la inercia debe provenir de aceleraciones respecto de la distribución general de masa del universo. Las masas inerciales de las partículas elementales no serían así

constantes fundamentales sino más bien representarían la interacción de las partículas con cierto campo cósmico. Pero las masas de las partículas se miden por sus aceleraciones en el campo gravitatorio –proporcionales a la constante de Newton  $G$ – por lo que puede pensarse que es  $G$  la que debe estar relacionada con el valor medio de un campo que represente de alguna forma la influencia de toda la materia presente en el universo. Brans y Dicke propusieron que ese campo fuera un campo escalar sin masa  $\varphi$ : los otros campos de spin entero sin masa conocidos, vale decir la métrica  $g_{\mu\nu}$  y el vector potencial electromagnético  $A_\mu$ , transmiten interacciones de largo alcance por lo que puede esperarse que otro tanto haga  $\varphi$ . La ecuación covariante más simple que puede escribirse para ese campo escalar es

$$\square\varphi = 4\pi\lambda T_{\mu M}^{\mu} \quad (1)$$

donde  $\lambda$  es una constante de acoplamiento y  $T_M^{\mu\nu}$  el tensor de energía-impulso de toda la materia.  $T_M^{\mu\nu}$  incluye todo menos gravedad y campo  $\varphi$ . Brans y Dicke sugirieron que la forma correcta de las ecuaciones de Einstein se obtiene reemplazando  $\kappa^{-1}$  por  $\varphi$  donde  $\varphi$  cumple (1) y agregando un tensor de energía impulso  $T_{\mu(\varphi)}^{\nu}$  del campo  $\varphi$  a las fuentes del campo gravitatorio. Así,

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\varphi^2 T_M^{\mu\nu} + T_{(\varphi)}^{\mu\nu}$$

Esta ecuación de Einstein modificada es derivable de una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g}[-\varphi^2 R + 4\omega g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu}] \quad (2)$$

donde  $\omega$  es una constante.

Dado que una constante con dimensiones trae dificultades al intentar cuantificar cualquier teoría, teniendo presente la idea de Brans y Dicke y observando que, por ejemplo en el caso del decaimiento beta, el reemplazo de la constante de Fermi con dimensiones por un campo mediador convirtió a la teoría en renormalizable, en nuestro intento de aproximarnos a un correcto lagrangiano para la gravedad sin fuentes por métodos geométricos, no permitiremos la presencia de constantes con dimensiones. Para reobtener a la RG bastará hacer luego  $\varphi^2 = \kappa^{-2}$  al estilo Brans-Dicke.

## II.4 La teoría de concomitantes y el análisis dimensional

Para la construcción de densidades lagrangianas resulta natural recurrir a la clásica teoría de concomitantes que estudia la forma general de los entes matemáticos que dependen de las variables de campo y sus derivadas y unir a ellas el análisis dimensional. Esto es así porque las ecuaciones de movimiento para los distintos campos que intervienen en la formulación lagrangiana de una teoría pueden obtenerse aplicando un principio variacional a la acción construída con la densidad lagrangiana correspondiente, que es función de los campos y sus derivadas. El resultado de la aplicación del principio variacional son las ecuaciones de Euler-Lagrange y se ha mostrado <sup>[30]</sup> que esas expresiones son operadores tensoriales de concomitancia.

### La teoría de concomitantes

La teoría de concomitantes surge con el teorema de Weyl <sup>[13]</sup> que establece que la densidad lagrangiana más general que puede escribirse con la métrica y sus derivadas hasta el segundo orden y que es lineal en ellas es

$$\mathcal{L} = a\sqrt{-g}R + b\sqrt{-g}$$

vale decir, el lagrangiano de la RG.

La noción intuitiva de concomitantes tensoriales es sencilla de exponer en los casos elementales: decimos que un tensor es concomitante de otros tensores si existe una relación funcional independiente del sistema de coordenadas que vincula las componentes del tensor en cuestión con las componentes de los otros tensores. Por ejemplo: si  $A_\mu$  son las componentes de un vector covariante y  $B^\mu$  las de un vector, entonces,

$$\mathcal{L} = A_\mu B^\mu$$

es un escalar concomitante del vector y del covector. Esto quiere decir que existe una función  $f$  de  $2n$  variables ( $n$  la dimension del espacio)

$$\mathcal{L} = f(B^1, \dots, B^n, A_1, \dots, A_n)$$

que en este caso es

$$f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n$$

Es claro que esta función no depende del sistema de coordenadas elegido.

Para la construcción de densidades lagrangianas nos interesaran los escalares que sean concomitantes de los campos y sus derivadas. Mostraremos el procedimiento general con algunos ejemplos sencillos:

- i) Supongamos que  $\mathcal{L}$  es un escalar concomitante de un tensor simétrico, no singular, de componentes  $g_{\mu\nu}$ , es decir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) \quad (3)$$

Si hacemos un cambio de coordenadas

$$x'^{\rho} = x'^{\rho}(x^{\sigma}) \quad (4)$$

como  $\mathcal{L}$  es un escalar, será

$$\mathcal{L}(g'_{\mu\nu}) = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) \quad (5)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu}\right) = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) \quad (6)$$

Llamando

$$B_{\rho}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \quad (7)$$

podemos escribir

$$\mathcal{L}(B_{\rho}^{\mu} B_{\sigma}^{\nu} g_{\mu\nu}) = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) \quad (8)$$

Considerando todos los cambios de coordenadas posibles es claro que las  $B_{\mu\rho}$  recorren todas las matrices invertibles. Podemos entonces derivar la ec. (8) respecto de  $B_{\alpha\beta}$ , con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g'_{\rho\sigma}} \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\rho}^{\beta} B_{\sigma}^{\nu} g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g'_{\rho\sigma}} B_{\rho}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\sigma}^{\beta} g_{\mu\nu} = 0 \quad (9)$$

ya que el segundo miembro de la ec. (8) no depende de  $B_\beta^\alpha$ . Haciendo

$$B_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$$

en la ec. (9) resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\beta\sigma}} g_{\alpha\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\beta}} g_{\mu\alpha} = 0 \quad (10)$$

ecuaciones llamadas identidades de invariancia <sup>[31]</sup>. Por la simetría del tensor  $g_{\mu\nu}$  esto se reduce a

$$2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\beta\sigma}} g_{\alpha\sigma} = 0 \quad (11)$$

y como  $g_{\alpha\sigma}$  es invertible,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\beta\sigma}} = 0 \quad (12)$$

de donde se deduce que el escalar concomitante del tensor métrico es una constante.

ii) Supongamos ahora que  $\mathcal{L}$  es también concomitante de las primeras derivadas parciales de  $g_{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (13)$$

Procediendo igual que en el caso anterior

$$\mathcal{L}(B_\alpha^\mu B_\beta^\nu g_{\mu\nu}; B_{\alpha\rho}^\mu B_{\beta\sigma}^\nu g_{\mu\nu} + B_\alpha^\mu B_{\beta\rho}^\nu g_{\mu\nu} + B_\alpha^\mu B_\beta^\nu B_\rho^\sigma g_{\mu\nu,\sigma}) = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (14)$$

donde

$$B_{\alpha\rho}^\mu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\rho} \quad (15)$$

Derivando la ec. (14) respecto de  $B_{\delta\tau}^\gamma$  y haciendo

$$B_\delta^\gamma = \delta_\delta^\gamma$$

resulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\rho}} \delta_\gamma^\mu \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\delta \delta_\rho^\tau + \delta_\alpha^\tau \delta_\rho^\delta) \delta_\beta^\nu g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\rho}} \delta_\alpha^\mu \delta_\gamma^\nu \frac{1}{2} (\delta_\beta^\delta \delta_\rho^\tau + \delta_\beta^\tau \delta_\rho^\delta) g_{\mu\nu} = 0 \quad (16)$$

es decir

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\delta\nu,\tau}} g_{\gamma\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\tau\nu,\delta}} g_{\gamma\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\delta,\tau}} g_{\mu\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\tau,\delta}} g_{\mu\gamma} = 0 \quad (17)$$

que por razones de simetría se reduce a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\delta\nu,\tau}} g_{\gamma\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\tau\nu,\delta}} g_{\gamma\nu} = 0 \quad (18)$$

o sea, como  $g_{\mu\nu}$  es invertible

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\delta\nu,\tau}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\tau\nu,\delta}} = 0 \quad (19)$$

Cambiando índices en la ec. (19) podemos escribir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\nu\delta,\tau}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\tau\delta,\nu}} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\delta\tau,\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\nu\tau,\delta}} = 0 \quad (21)$$

y haciendo ec. (19) + ec. (20) - ec. (21) resulta

$$2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\nu\tau,\delta}} = 0 \quad (22)$$

o sea  $\mathcal{L}$  no depende de  $g_{\mu\nu,\tau}$ . Como tampoco dependía de  $g_{\mu\nu}$  resulta que el escalar concomitante del tensor métrico y sus derivadas primeras es también una constante.

iii) Si ahora consideramos derivadas de orden dos, entonces los resultados anteriores ya no valen. Por ejemplo, podemos escribir

$$\mathcal{L} = R = g^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} \quad (23)$$

donde  $\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$  es el tensor de curvatura. Y este es un escalar del tipo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\rho}; g_{\mu\nu,\rho\sigma}) \quad (24)$$

Este no es, obviamente, el único escalar que puede escribirse con la métrica hasta sus derivadas segundas. Más aún, la forma general de los escalares como los de la ec. (24) no es conocida.

## El análisis dimensional

En el caso de las teorías físicas hay una condición adicional que puede pedirse sobre los concomitantes: que por un cambio de escala se transformen de manera adecuada. S. J. Aldersley ha estudiado <sup>[32]</sup> las condiciones bajo las cuales el análisis dimensional puede aplicarse a teorías gravitatorias formuladas en condiciones muy generales, suponiendo que el ET es una variedad diferenciable. El resultado que obtuvo –y que nosotros aplicaremos al estudio de invariantes que pueden construirse con todos los campos bosónicos– es que las cantidades físicamente relevantes de una teoría relativista de la gravitación deben ser invariantes por un grupo uno-paramétrico de transformaciones de escala. Sus argumentos están basados en las premisas del análisis dimensional: cualquier teoría debe ser dimensionalmente consistente y las variables físicas de la teoría deben estar dimensionalmente en concordancia con los observables a que se refieren.

Para aplicar el análisis dimensional a la RG hay que tener en cuenta que en las teorías relativistas los conceptos de espacio y tiempo están ligados debido al tratamiento cuadridimensional que es geoméricamente inevitable: la idea de longitud de arco

$$\text{longitud de arco} = \int_{\text{evento1}}^{\text{evento2}} ds$$

es fundamental y la coordenada temporal y las espaciales pueden intercambiar sus roles si se realiza un cambio general de coordenadas (por ejemplo una transformación de Lorentz). Esto diferencia a las teorías relativistas de las que no lo son. El factor de proporcionalidad que interviene en las transformaciones es la velocidad de la luz  $c$  y es razonable, en consecuencia, elegir  $c = 1$  para relacionar las dimensiones que se asignan a las longitudes y al tiempo. Esta elección no es compulsiva, pero simplifica todo el tratamiento ulterior. Con  $c = 1$ , las unidades de longitud  $l$  y de tiempo  $t$  son las mismas, por ejemplo, unidades de longitud. Para elegir las unidades de masa tenemos dos opciones: relacionar las unidades de masa con las de longitud a través de la constante gravitatoria  $G$  (unidades geometrizadas) o a través de la constante de Planck  $\hbar$  (unidades naturales). Aldersley utiliza en su trabajo  $G=1$  por lo que las unidades de masa son proporcionales a las de longitud,  $[m] = [l]$ . Por razones que se aclararán en su momento, nosotros preferimos las unidades naturales

( $\hbar = 1$ ) para las que  $[m] = [l^{-1}]$ . Elegidas las unidades de longitud, tiempo y masa, todas ellas en función de las de longitud, sólo resta decir qué regla usaremos para nuestras mediciones, lo que equivale a elegir una escala, una elección particular de unidades de longitud en términos de la cual haremos nuestras mediciones. Necesitamos luego algún observable que relacione a la teoría con las cantidades medibles y, tal como Aldersley señala, en una teoría gravitatoria la elección natural es el intervalo que, en términos de la métrica y las coordenadas locales, se escribe

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Ahora tenemos distintas posibilidades: asignar unidades a la métrica o a las coordenadas. Si bien en principio esa elección es arbitraria, el asignar unidades a la métrica y dejar  $[x^\mu] = l^0$  complica innecesariamente los cálculos. Por ejemplo, en coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ , la métrica es –en unidades geométricas–

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}[-(1 - 2m/r), (1 - 2m/r)^{-1}, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta]$$

Entonces,

$$[g_{11}] = [g_{22}] = 1, \quad [g_{33}] = [g_{44}] = l^2$$

Conviene, pues, asignar unidades a las coordenadas. Esto no quita generalidad al tratamiento: es sencillo probar <sup>[32]</sup> que dada cualquier carta  $(U, x)$  sobre una variedad espacio-temporal es siempre posible realizar una transformación de coordenadas a una nueva carta  $(U, \underline{x})$  tal que todas las coordenadas  $\underline{x}^\mu$  tengan unidades de longitud y, en consecuencia, todas las componentes del tensor métrico sean adimensionales.

Elegida la escala de medición, podemos transformarla en una nueva escala con sólo multiplicarla por un número real positivo  $\lambda$ . Tal transformación de escala induce una transformación sobre las cantidades  $\psi$  con dimensiones presentes en la teoría: si  $[\psi] = l^\alpha$  y hacemos un cambio de escala  $\lambda$ , entonces  $\psi$  se transforma en  $\lambda^\alpha \psi$ . La posibilidad de cambiar de escala indica simplemente que podemos elegir cuál regla patrón usamos para nuestras mediciones. La autoconsistencia de la teoría respecto del análisis dimensional expresa que las relaciones entre sus variables serán las mismas no importa con qué regla hayamos medido. Éste es el grupo uno-paramétrico de transformaciones por el cual la teoría

es invariante. Y la invariancia de la teoría ante este grupo es de fundamental utilidad en la reducción del número de concomitantes posibles que intervendrán en el lagrangiano.

Para satisfacer los requerimientos del análisis dimensional sólo se admitirán como funciones posibles de las cantidades físicas las que se comporten ante una transformación de escala de razón  $\lambda$  siguiendo la siguiente relación: si  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  tienen dimensiones  $l^{\alpha_1}, l^{\alpha_2}, \dots, l^{\alpha_n}$  las funciones  $f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  de dimensiones  $[f] = l^\alpha$  que con ellas puedan formarse cumplirán:

$$\lambda^\alpha f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = f(\lambda^{\alpha_1} \psi_1, \lambda^{\alpha_2} \psi_2, \dots, \lambda^{\alpha_n} \psi_n) \quad (25)$$

Esta es la única restricción que se impone. Ella impide la presencia de constantes con dimensiones en la teoría, tema sobre el que volveremos inmediatamente. Un monomio satisface esta propiedad, también una suma de monomios.

Aldersley demuestra en su trabajo los siguientes dos teoremas:

- 1 Sea  $A^{\mu\nu}$  un tensor de clase  $C^2$  concomitante de la métrica y sus derivadas hasta cualquier orden

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta, \gamma_i} \dots; g_{\alpha\beta, \gamma_1 \dots \gamma_n}) \quad \text{con } \alpha > 1$$

tal que sus dimensiones son  $[A^{\mu\nu}] = l^{-2}$  y sea que se satisface la condición (25) —que en verdad es un axioma de la teoría—. Entonces, para una variedad de cuatro dimensiones vale que

$$A^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}R \quad \text{con } G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad \text{y } a, b \text{ constantes}$$

$R$  es el escalar de curvatura y  $T^{\mu\nu}$  es tal que  $\delta\mathcal{L}/\delta g_{\mu\nu} = 8\pi G/c^4 \sqrt{-g} T^{\mu\nu}$  con  $\mathcal{L}$  el lagrangiano.

- 2 Sea  $\mathcal{L}$  una densidad escalar de clase  $C^2$  concomitante de la métrica y sus derivadas hasta cualquier orden

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta, \gamma_i} \dots; g_{\alpha\beta, \gamma_1 \dots \gamma_n}) \quad \text{con } \alpha > 1$$

tal que sus dimensiones son  $[\mathcal{L}] = l^{-2}$  y sea que se satisface el axioma (25) . Entonces, en una variedad de cuatro dimensiones vale que

$$\mathcal{L} = a\sqrt{-g}R \quad \text{con} \quad a = \text{constante}$$

Aldersley utiliza para ambas demostraciones argumentos como los hasta aquí descritos más el teorema de Lovelock [33]: Si  $A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}(g_{\rho\sigma}; g_{\rho\sigma,\alpha}; g_{\rho\sigma,\alpha\beta})$  es un concomitante tensorial que satisface  $A^{\mu\nu}_{;\sigma} = 0$ , entonces –en una variedad de cuatro dimensiones–

$$A^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}$$

Si se hubiera permitido la presencia de constantes con dimensiones en  $\mathcal{L}$ , por ejemplo  $\beta$  con  $[\beta] = l^\sigma$ , dado que no existen propiedades de diferenciabilidad de  $\mathcal{L}$  con respecto a  $\beta$  –y lo mismo vale para cualquier tensor, no sólo para la densidad  $\mathcal{L}$ – hubiera resultado imposible realizar todo el análisis que hemos mostrado al comienzo del presente párrafo.

Si en lugar de elegir dos constantes universales con dimensiones que relacionan longitudes, tiempos y masas tal como ha hecho Aldersley utilizando  $c$  y  $\kappa^2$ , o como haremos nosotros con  $c$  y  $\hbar$ , se considerara que existen tres constantes universales, por ejemplo  $c$ ,  $\kappa^2$  y  $N$  con  $[N] = l^\alpha$ ,  $\alpha \neq 0$ , esto conduciría a que la escala de longitud  $l$  es proporcional a sí misma, cumpliéndose la relación

$$l = \beta N l^{1-\alpha}$$

donde  $\beta$  es una constante sin dimensiones, un c-número. Si quisiéramos hacer  $N=1$ , deberíamos fijar la escala de longitudes, que se convertiría así en una escala absoluta.

La restricción de evitar constantes con dimensiones en la teoría, salvo las mencionadas dos y no más constantes universales que relacionan las unidades de longitud, tiempo y masa recién descrita, no interfiere para nada en nuestro tratamiento del problema de encontrar adecuadas densidades lagrangianas para los campos bosónicos, ya que –por las razones descritas en II.2– no permitiremos constantes con dimensiones en nuestro lagrangiano

y consideraremos a la constante gravitatoria como una variable que sólo podrá hacerse constante en casos particulares.

### Obtención del lagrangiano de Einstein

Como ejemplo sencillo del uso de la teoría de concomitantes unida al análisis dimensional, mostraremos el cálculo del lagrangiano de Einstein. Usando las unidades habituales de RG que hacen  $c = \kappa = 1$  y admitiendo que el lagrangiano se debe obtener a partir del escalar de la ec. (24) resulta que ese escalar debe tener dimensiones de  $l^{-2}$ . Esto significa que, por un cambio de escala de razón  $\lambda$ , debe ser

$$\mathcal{L}(g_{\mu\nu}; \lambda g_{\mu\nu,\sigma}; \lambda^2 g_{\mu\nu,\sigma\rho}) = \lambda^2 \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\sigma}; g_{\mu\nu,\sigma\rho}) \quad (26)$$

Derivando la ec. (26) respecto de  $\lambda$  obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} g_{\mu\nu,\sigma} + 2\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\rho}} g_{\mu\nu,\sigma\rho} = 2\lambda \mathcal{L} \quad (27)$$

y derivando la ec. (27) otra vez respecto de  $\lambda$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma} \partial g_{\alpha\beta,\gamma}} g_{\mu\nu,\sigma} g_{\alpha\beta,\gamma} + 2\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma} \partial g_{\alpha\beta,\gamma\delta}} g_{\mu\nu,\sigma} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} \\ & + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\rho}} g_{\mu\nu,\sigma\rho} + 2\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\rho} \partial g_{\alpha\beta,\gamma}} g_{\mu\nu,\sigma\rho} g_{\alpha\beta,\gamma} \\ & + 4\lambda^2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\rho} \partial g_{\alpha\beta,\gamma\delta}} g_{\mu\nu,\sigma\rho} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 2\mathcal{L} \end{aligned} \quad (28)$$

Haciendo  $\lambda \rightarrow 0$  en la ec. (28) resulta

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma} \partial g_{\alpha\beta,\gamma}} g_{\mu\nu,\sigma} g_{\alpha\beta,\gamma} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\rho}} g_{\mu\nu,\sigma\rho} = 2\mathcal{L} \quad (29)$$

Usando un sistema de coordenadas normal, o sea, un sistema en el cual

$$g_{\mu\nu,\sigma} = 0 \quad (30)$$

$$g_{\mu\nu,\sigma\rho} = -\frac{1}{3}(\mathbf{R}_{\mu\sigma\nu\rho} + \mathbf{R}_{\nu\sigma\mu\rho}) \quad (31)$$

resulta en la ec. (29) que

$$2\mathcal{L} = 2\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma}(g_{\alpha\beta})\mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (32)$$

donde  $\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma}(g_{\alpha\beta})$  son todos los tensores de tipo (4,0) concomitantes del tensor métrico. Estos tensores están calculados <sup>[30]</sup> y son

$$\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma} = ag^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + bg^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + cg^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + \frac{d}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (33)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes. Usando en la ecuación (32) las simetrías de estos tensores y las identidades de Bianchi, resulta en definitiva que

$$\mathcal{L} = aR$$

siendo  $a$  una constante numérica. En conclusión, la densidad lagrangiana más general que puede construirse con el tensor métrico y sus derivadas hasta segundo orden es la densidad lagrangiana de Einstein.

## II.5 Construcción de la densidad lagrangiana lineal en la curvatura para los campos bosónicos

En una etapa introductoria hemos considerado densidades lagrangianas sólo lineales en la curvatura, aunque para cualquier dimensión del ET y sin imponer restricciones físicas sobre el tipo de acoplamiento entre los campos, pensando siempre en que las restricciones aparecieran luego por consideraciones geométricas. Dentro de este contexto nuestras hipótesis son:

- i) La densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  depende de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , del vector potencial electromagnético  $\mathbf{A}_\mu$  y de un campo escalar  $\varphi$ . Este último jugará al final distintos roles y sólo se le impone que en el sistema de unidades que estamos usando tenga dimensiones inversas de longitud para hacer posible la presencia de su término cinético en el

lagrangiano. Eventualmente  $\varphi$  podrá representar una constante para que reaparezca la constante gravitatoria cuando sea necesario como en la teoría de Brans-Dicke.

- ii) No permitiremos constantes dimensionales debido a que, como se ha dicho, conducen por lo general a teorías no renormalizables.
- iii) La densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  debe contener sólo las derivadas que aparecen en la ec. (34) y debe ser, en esta primera etapa, lineal en las derivadas segundas de la métrica por razones de simplicidad.

En el párrafo II.7 se admitirán potencias de cualquier grado del campo gravitatorio y sus derivadas. Permitiremos sólo derivadas primeras de  $\mathbf{A}_\mu$  y  $\varphi$  para que resulten ecuaciones de campo de segundo orden para ellos y segundas derivadas de  $g_{\mu\nu}$  porque naturalmente queremos que la RG esté incluida en este tratamiento y porque, como se ha visto en el párrafo anterior no es posible construir un concomitante que no sea una constante con sólo la métrica y sus primeras derivadas parciales. De todas formas, la acción de Hilbert es degenerada y en consecuencia las ecuaciones para el campo gravitatorio que de ella derivan son de segundo orden aunque la densidad lagrangiana es del mismo orden.

- iv) Unidades: usamos unidades naturales  $c = \hbar = 1$ . La acción es así adimensional y se puede construir con ella la funcional generatriz sin agregar constantes con dimensiones.

Las unidades correctas de  $\varphi$  y de  $\mathbf{A}_\mu$  se obtienen observando las unidades de sus términos cinéticos en el lagrangiano:

$$[\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] = [\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}] = l^{-4}$$

con  $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$  y  $[\partial_\mu] = [\partial/\partial x^\mu] = l^{-1}$

Con esto:

$$[S] = 1, \quad [g_{\mu\nu}] = 1, \quad [\mathcal{L}] = l^{-4}$$

$$[\varphi] = [\mathbf{A}_\mu] = l^{-1}, \quad [\kappa] = l^{-1}$$

Con estas hipótesis, sea  $\mathcal{L}$  la densidad lagrangiana concomitante del tensor métrico, del potencial electromagnético (o sea, en un lenguaje preciso, un covector), de un campo escalar y de sus derivadas hasta el orden indicado en la ec. (34)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\rho}; g_{\mu\nu,\rho\sigma}; \mathbf{A}_\mu; \mathbf{A}_{\mu,\nu}; \varphi; \varphi_{,\mu}) \quad (34)$$

Usando la condición iii) y las dimensiones de los campos que se señalan en iv), se ve que al hacer un cambio de escala de razón  $\lambda$  en  $\mathcal{L}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; \lambda g_{\mu\nu,\alpha}; \lambda^2 g_{\mu\nu,\alpha\beta}; \lambda \mathbf{A}_\mu; \lambda^2 \mathbf{A}_{\mu,\nu}; \lambda \varphi; \lambda^2 \varphi_{,\mu}) &= \lambda^4 \mathcal{L} \\ &= \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\alpha}; g_{\mu\nu,\alpha\beta}; \mathbf{A}_\mu; \mathbf{A}_{\mu,\nu}; \varphi; \varphi_{,\mu}) \end{aligned} \quad (35)$$

Derivando cuatro veces respecto de  $\lambda$ , haciendo tender  $\lambda \rightarrow 0$  y aplicando el teorema de reemplazo <sup>[34]</sup>, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^2 + \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\alpha \varphi + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{,\alpha} \\ &+ \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}_\beta + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_{\alpha;\beta} + \Lambda_1 \varphi^4 + \Lambda_1^\mu \mathbf{A}_\mu \varphi^3 \\ &+ \Lambda_2^\mu \varphi^2 \varphi_{,\mu} + \Lambda_1^{\mu\nu} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \varphi^2 + \Lambda_2^{\mu\nu} \mathbf{A}_{\mu;\nu} \varphi^2 + \Lambda_3^{\mu\nu} \varphi \varphi_{,\mu} \mathbf{A}_\nu \\ &+ \Lambda_4^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \Lambda_1^{\mu\nu\rho} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\rho \varphi + \Lambda_2^{\mu\nu\rho} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_{\nu;\rho} \varphi \\ &+ \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma + \Lambda_3^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_{\nu;\sigma} + \Lambda_4^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_{\mu;\nu} \mathbf{A}_{\rho;\sigma} \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $\Lambda_i^{\dots} = \Lambda_i^{\dots}(g_{\mu\nu})$  son densidades tensoriales <sup>[30]</sup>,  $\mathbf{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma$  es el tensor de Riemann y ; indica derivación covariante respecto de la conexión de Christoffel. Los concomitantes del tensor métrico en el caso general son conocidos <sup>[35,36]</sup>. Teniendo en cuenta esto obtenemos el siguiente

**TEOREMA:** si  $\mathcal{L}$  satisface la ec.(34) y también las hipótesis i) a iv), entonces para dimensión real de la variedad  $n > 2$  la densidad lagrangiana general es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Lambda_1 \varphi^2 R + \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} R_{\mu\nu\rho\sigma} A_\alpha A_\beta + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} R_{\mu\nu\rho\sigma} A_{\alpha;\beta} + \Lambda_2 \varphi^4 \\
& + \Lambda_1^{\mu\nu} \varphi^2 A_\mu A_\nu + \Lambda_2^{\mu\nu} \varphi^2 A_{\mu;\nu} + \Lambda_3^{\mu\nu} \varphi \varphi_{,\mu} A_\nu + \Lambda_4^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \\
& + \Lambda_1^{\mu\nu\rho} \varphi A_\mu A_{\nu;\rho} + \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu A_\nu A_{\rho;\sigma} + \Lambda_3^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\mu;\nu} A_{\rho;\sigma}
\end{aligned} \tag{37}$$

donde

$$\Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} = \sqrt{-g} [a_2 g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} + a_3 g^{\mu\alpha} g^{\nu\sigma} g^{\rho\beta} + a_4 g^{\mu\rho} g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta}]$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} = & \sqrt{-g} [a_5 g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta} + a_6^{\alpha\rho} g^{\nu\sigma} g^{\mu\beta} + a_7 g^{\mu\alpha} g^{\nu\sigma} g^{\rho\beta} \\
& + a_8 g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} g^{\nu\beta} + a_9 g^{\mu\rho} g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} + a_{10} \delta_4^n \varepsilon^{\alpha\nu\beta\sigma} g^{\mu\rho}]
\end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = a_1 \sqrt{-g}; \quad \Lambda_1^{\mu\nu} = a_{12} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

$$\Lambda_2 = a_{11} \sqrt{-g}; \quad \Lambda_2^{\mu\nu} = a_{13} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

$$\Lambda_3^{\mu\nu} = a_{14} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}; \quad \Lambda_1^{\mu\nu\rho} = a_{16} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \delta_3^n$$

$$\Lambda_4^{\mu\nu} = a_{15} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}; \quad \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma} = a_{17} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}$$

$$\Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} [a_{18} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + a_{19} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}]$$

$$\Lambda_3^{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} [a_{20} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + a_{21} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + a_{22} g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] + a_{23} \delta_4^n \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$a_i$  indican constantes numéricas.

## II.6 Análisis de la densidad lagrangiana obtenida.

Eligiendo adecuadamente el valor de las constantes  $a_i$  en la ec. (37) podemos obtener inmediatamente los lagrangianos de las teorías clásicas para los campos bosónicos acopladas en distintas formas –arbitrarias– a la RG.

Relatividad General: Basta tomar  $a_1 = -1$  en la ec. (37), los demás coeficientes nulos y pedir que el campo  $\varphi$  tome el valor  $\varphi = \kappa^{-1}$  para obtener el lagrangiano de Einstein de la RG.

La teoría de Brans-Dicke: El lagrangiano de esta teoría, que fuera mencionada en la sección II.2, se obtiene eligiendo  $a_2 = -1$ ,  $a_{15} = -4w$  con  $w$ =constante y los demás coeficientes iguales a cero.

Maxwell – Einstein: Es inmediato que la expresión obtenida (37) no cumple con el requerimiento de invariancia ante transformaciones de *gauge* del vector  $A_\mu$ . Por supuesto es posible hacer aparecer al lagrangiano de Maxwell sumado al de RG sencillamente eligiendo  $a_1 = -1/2$ ,  $a_{22} = -2\pi/137$ ,  $\varphi^2 = -\kappa^{-2}$  y todos los demás  $a_i = 0$ . Pero ésta debe ser una imposición adicional. Volveremos sobre este tema en la sección II.8 en la que mostraremos, para una teoría más general, que pedir invariancia de *gauge* de las ecuaciones de campo obligará al lagrangiano mismo a tomar una forma invariante. La imposición extra de que todos los  $a_i$  deben ser nulos no es la única dificultad con que nos encontramos. La siguiente es que resulta poco probable que la utilización de un lagrangiano como el de la ec. (37) vaya a resolver los problemas cuánticos del acoplamiento materia-gravedad. Esto está sugerido por el hecho de que si queremos reobtener las teorías que necesitamos por razones físicas, como es el caso del electromagnetismo recién mencionado, el acople se vuelve mínimo y la ec. (37) , para este caso, se convierte en

$$\mathcal{L} = \kappa^{-2} \sqrt{-g} R + e^2 \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

y, como vemos, aparece una constante dimensional. En la sección II.6 resumiremos brevemente el conocido problema de la divergencia de la teoría de Maxwell-Einstein, uno de los primeros problemas de la cuantificación de la gravedad, utilizando precisamente este ejemplo para aclarar las motivaciones de la búsqueda de una densidad lagrangiana muy general y los resultados a los que fuimos llegando.

La teoría de Weyl: Esta teoría fue descrita brevemente en la sección II.2 y también fueron mencionados sus inconvenientes. Sin embargo, se verá en II.7 que puede solucionar –por lo menos en primera aproximación– algunos problemas de la renormalización. La teoría de Weyl utiliza para describir la estructura métrica del ET una forma cuadrática  $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  como la RG pero utiliza, además, una forma lineal  $\phi_\mu dx^\mu$  y, en consecuencia, cuenta con dos tensores de curvatura. Uno es el habitual, construido ahora con la conexión

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) + \frac{\lambda}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\nu\sigma}\phi_\rho + g_{\rho\sigma}\phi_\nu - g_{\nu\rho}\phi_\sigma)$$

y otro es el tensor de “curvatura de distancia”

$$f_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi_\mu - \partial_\mu \phi_\nu$$

La acción que Weyl propone es cuadrática en ambos tensores –es la primera teoría de *gauge*– y  $f_{\mu\nu}$  puede identificarse con el tensor de intensidad de campo electromagnético si  $\phi_\mu$  corresponde al potencial vector  $A_\mu$ . Si se fija la unidad de medida –o sea, se elige un *gauge*– antes de variar la acción para obtener las ecuaciones de campo, el lagrangiano que se obtiene es <sup>[13]</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}R + c\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{-g}(1 - 3A_\mu A^\mu) \quad (38)$$

donde  $c$  es un número complejo y  $\lambda$  es la constante cosmológica. Esto no es más que la teoría de Maxwell-Einstein escrita en unidades gravitatorias:  $[c] = [\kappa] = 1$ ,  $[\lambda] = l^{-2}$ , salvo por un término cosmológico que el lagrangiano de Einstein puede contener como se ha visto en II.3. Para obtener este lagrangiano a partir de nuestra ec. (37) debemos cambiar las unidades a aquéllas en las que la ec. (37) está escrita, o sea,  $[c] = [\hbar] = 1$ ,  $[\kappa] = [\lambda] = l$ .

Como el vector potencial electromagnético tiene dimensiones de  $l^{-1}$  en unidades naturales, es necesario hacer el cambio  $A_\mu \rightarrow A_\mu/\kappa$  y de nuevo  $\kappa \sim \varphi^{-1}$  para evitar constantes dimensionales. Con esto, la ec. (38) se escribe

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi^2\sqrt{-g}R + a\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{-g}\varphi^4 - \frac{3}{2}\lambda\varphi^2\sqrt{-g}A_\mu A^\mu$$

y se obtiene de la ec. (37) haciendo

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_{11} = \frac{\lambda}{2} \quad a_{12} = -\frac{3}{2}\lambda \quad a_{21} = -a_{22} = 2a$$

y los demás coeficientes iguales a cero. Luego volvemos sobre la acción de Weyl completa, es decir, la acción cuadrática en la curvatura.

El campo escalar: La densidad lagrangiana que se elige generalmente para el campo escalar sin masa autointeractuante en el ET curvo es

$$\mathcal{L}_\varphi = \xi\varphi^2 R + g_{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + \lambda\varphi^4 \quad (39)$$

habiendo dos valores de  $\xi$  particularmente interesantes:

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{acoplamiento mínimo;} \\ \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1} & \text{acoplamiento conforme.} \end{cases}$$

Tomando en la ec. (37)

$$a_{11} = \lambda \quad a_{15} = 1 \quad a_1 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1} \end{cases} \quad \text{y los demás } a_i = 0$$

se obtiene  $\mathcal{L}_\varphi$ . Si se permitiera la presencia de otro campo escalar en la teoría –la generalización es inmediata– podríamos utilizarlo para escribir la constante gravitatoria como en Brans-Dicke y así sumar  $R/2\kappa^2$ , o sea la RG, al campo escalar  $\varphi$ .

## II.7 Renormalizabilidad de la teoría

Al intentar extraer conclusiones de una teoría cabe esperar que los resultados que ella brinda tengan sentido físico sin necesidad de realizar correcciones. Si esto no ocurre en forma directa, queda todavía la posibilidad de intentar la interpretación de resultados sólo aparentemente sin sentido. En teoría cuántica de campos esto quiere decir que, o bien se obtienen resultados finitos para el cálculo de los elementos de la matriz de *scattering*, o bien se obtienen resultados infinitos pero que pueden renormalizarse. Queda una tercera posibilidad y es que se obtengan resultados infinitos de los que no se pueda extraer ninguna conclusión por no poder aislar las divergencias que presentan.

Es condición necesaria para que una teoría sea renormalizable que el número de términos en su desarrollo que presentan interacciones primitivamente divergentes sea finito. La divergencia de un término de interacción, representado por sus correspondientes diagramas de Feynman, se puede analizar de la siguiente manera <sup>[37]</sup>: consideremos un diagrama con  $V$  vértices,  $E$  líneas externas e  $I$  líneas internas y sólo campos bosónicos. El número de momentos internos independientes es el número de lazos cerrados, (*loops*),  $L$  del diagrama. Los  $I$  momentos internos satisfacen  $V-1$  relaciones entre ellos (-1 porque hay una conservación del momento total). Entonces,  $L=I-V+1$ . Esta relación permite una primera evaluación de la potencia a la que aparecen los momentos en el integrando de cada diagrama y da el grado superficial (aparente) de divergencia  $D_d$ : si  $d$  es la dimensión de la variedad,

- hay  $L$  integraciones independientes, una por cada *loop* y cada una en  $d$  dimensiones,  $d$  potencias para los momentos
- hay  $I$  momentos internos y cada uno aporta un propagador con dos potencias inversas de los momentos.

Así,  $D_d = d.L - 2I$ . Estas relaciones permiten expresar a  $D_d$  como

$$D_d = d - \frac{1}{2}(d-2)E - V_n[d - \frac{1}{2}(d-2)N]$$

y, como es condición necesaria aunque no suficiente para que un término de interacción brinde información coherente que el número de sus diagramas divergentes sea finito, en  $d$  dimensiones

$$d - \frac{1}{2}(d-2)N \geq 0$$

Cuando el diagrama es reducible, hay que pedir que  $D_d \rightarrow 0$  y también para todos los subdiagramas. En particular, para una teoría formulada en cuatro dimensiones, la conclusión es que no pueden aparecer productos de más de cuatro bosones en cada término de interacción.

Teniendo en cuenta todo esto es que observamos que el lagrangiano de la ec. (37) para los tres campos bosónicos, debido al doble papel desempeñado por  $g_{\mu\nu}$  al ser al mismo tiempo la métrica del ET y el campo de spin dos, presenta infinito número de términos superficialmente divergentes. Ellos provienen de la serie que aparece para  $\sqrt{-g}$  y para el tensor contravariante  $g^{\mu\nu}$  al hacer el desarrollo habitual

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa h^{\mu\nu}$$

para obtener gravitones. En efecto, al hacer el tedioso pero trivial reemplazo resulta que en todos los términos aparecen productos de más de cuatro campos. Así, la densidad lagrangiana general de ec. (37) corresponde a una teoría no renormalizable.

Queda aún la posibilidad de obtener un resultado con sentido físico al evaluar los diagramas por cancelación de los infinitos de la forma que ello ocurre, por lo menos hasta cierto orden en el desarrollo en potencias de  $\hbar$ , en teorías como la supergravedad. Sin embargo, usando el método de los campos de fondo y regularización dimensional ha sido demostrado <sup>[38]</sup> que los contratérminos que que es necesario agregar al  $\mathcal{L}$  para otorgarle sentido predictivo son todos positivos a primer orden en el desarrollo en potencias de  $\hbar$  de modo que no pueden cancelarse. Para el caso particular de la teoría de Maxwell-Einstein, los contratérminos son

$$\Delta\mathcal{L}^{ME} = \frac{1}{\epsilon} \frac{137}{60} \sqrt{-g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

mientras que la contribución del fotón en la métrica de fondo resulta

$$\Delta\mathcal{L}^\gamma = \frac{1}{\epsilon} \frac{I_2}{10}$$

y la del gravitón

$$\Delta\mathcal{L}^h = \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{7}{20} I_2 + \frac{5}{14} I_0 \right]$$

donde

$$I_0 = \int d^4x \sqrt{-g} R^2 \quad I_2 = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathbf{R}_{\mu\nu} \mathbf{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2)$$

No pudiendo estas contribuciones ser absorbidas para vestir constantes desnudas en el  $\mathcal{L}$  original debido a que son proporcionales a términos que en aquel  $\mathcal{L}$  no aparecen (por ejemplo  $R^2$ ,  $\mathbf{R}_{\mu\nu} \mathbf{R}^{\mu\nu}$ ) y que su suma no puede dar cero porque todos son positivos, se ve que la teoría no resulta renormalizable ni finita.

El argumento de contar potencias, sin embargo, no es siempre absolutamente confiable. En la electrodinámica cuántica, por ejemplo, la invariancia de *gauge* de la teoría reduce el grado de divergencia <sup>[37]</sup>. Pero, aunque esto funciona en la electrodinámica, la adecuada aplicación de las identidades de Ward al caso de la gravedad no soluciona nada: términos que no pueden agregarse en la electrodinámica porque darían masa al fotón corresponden al término cosmológico en el lagrangiano de Einstein, término que está permitido y no viola ninguna de las invariancias de la teoría.

Nuestra búsqueda de un lagrangiano general que contuviera a la RG como teoría de la gravitación estuvo orientada hacia la búsqueda de acoplamientos generalizados que hicieran aparecer nuevos términos para generar contratérminos de distinto signo y cancelar las divergencias conocidas. Tal es el caso, por ejemplo, de los contratérminos generados por el gravitino en la SG N=2 que cancelan la divergencia de  $\Delta\mathcal{L}^{ME}$ . Pero la inspección de nuestro lagrangiano muestra que si queremos conservar a las teorías físicamente aceptables debemos desechar a todos los sumandos que no son, por ejemplo en el caso del electromagnetismo, invariantes de *gauge*. Y eso nos devuelve al lagrangiano de Maxwell- Einstein con sus conocidas e irresolubles dificultades.

Los mismos comentarios que acabamos de hacer son válidos para el acoplamiento de un campo escalar libre o autointeractuante (es fácil ver que aparece naturalmente en nuestro  $\mathcal{L}$  de ec. (34) el término  $\lambda\varphi^4$  como única autointeracción para teorías con constantes adimensionales) ya sea acoplado en forma mínima o conforme a RG <sup>[39]</sup>. Más aún, teniendo en vista los ejemplos provistos por la SG, es dable afirmar que la búsqueda geométrica de una densidad lagrangiana que contenga al lagrangiano de Hilbert como descripción del comportamiento de la métrica debe realizarse incluyendo necesariamente campos espinoriales de spin mayor que 1/2 <sup>[40]</sup>.

¿Por qué caminos debe orientarse entonces nuestra búsqueda? Analicemos primero el caso en que se agregan campos de spin semientero sin modificar el lagrangiano de Einstein. Este es el camino seguido por las teorías de SG con los conocidos resultados que podrían resumirse groseramente diciendo que todo funciona bien hasta ocho *loops* y que, de todas las posibilidades estudiadas por las SG, sobrevive el interés por la SG N=1 ya que resulta ser un límite de las teorías de supercuerdas. La enorme dificultad que acarrea el trabajo con concomitantes espinoriales y las escasas posibilidades de obtener una generalización de la SG que eluda sus dificultades nos sugiere orientar en otro sentido el análisis geométrico de los posibles lagrangianos para el campo gravitatorio. Para ello, debemos preguntarnos cuáles premisas son irrenunciables y cuáles son los inconvenientes que históricamente se fueron presentando y que habría que salvar. Está claro, ante todo, que esperamos que el campo gravitatorio sea cuantificable —aunque no tal vez a nivel de la métrica, pero éste constituye un primer estudio necesario— tal como lo son los demás campos y, en lo posible, en el marco de una teoría unificada. Renunciar a la pretensión de que sea cuantificable sería admitir que el campo gravitatorio no satisface el principio de incerteza. En ese caso, el principio mismo perdería vigencia ya que podríamos diseñar experiencias, usando a la gravedad, que lo violaran. Es también ineludible, por todo lo que se ha dicho en las secciones anteriores, que el lagrangiano de Einstein sea el límite de bajas energías del lagrangiano que se proponga para el campo gravitatorio. Por otra parte, al observar los contratérminos correspondientes a Maxwell-Einstein o al campo escalar, nos encontramos con que ellos dependen del cuadrado del tensor de Ricci y el cuadrado del

escalar de curvatura. Sabemos además que las teorías de *gauge*, que tienen buen comportamiento cuántico, dependen del cuadrado de sus “tensores de curvatura” si sus tensores de intensidad de campo son pensados en forma geométrica. El agregado de términos  $R^2$  y  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  a la acción de Einstein permite absorber los contratérminos que acabamos de mostrar y, a la vez, no son contradictorios con los argumentos relativos a la construcción del lagrangiano de Einstein a partir de los diagramas de árbol de una partícula que cumpla con los requerimientos de la fenomenología a nivel clásico: En efecto, los términos cuadráticos en la curvatura son sólo relevantes cuando ella misma es muy alta y estamos, en consecuencia, escapando del nivel clásico al cual el nivel árbol describe. Es motivados en estas observaciones que la primera generalización que propondremos será permitir que aparezca en el lagrangiano cualquier potencia del campo gravitatorio y sus derivadas.

## II.8 El lagrangiano de las teorías semiclásicas

El teorema de Weyl establece que la densidad lagrangiana más general que puede construirse con la métrica y sus derivadas hasta segundo orden y que es lineal en las derivadas segundas es el lagrangiano de Einstein. Por todo lo expresado en el párrafo anterior – vale decir, los problemas de renormalizabilidad en ausencia de términos cuadráticos en la curvatura y el buen comportamiento cuántico de las teorías de *gauge*, cuadráticas en el tensor de intensidad de campo– pensamos que es interesante generalizar de alguna forma el teorema de Weyl. Sabemos, además, que un lagrangiano cuadrático para la gravedad conduce, al menos a nivel semiclásico, a teorías que resultan renormalizables en presencia de fuentes <sup>[41]</sup>.

El propósito de este párrafo es, entonces, mostrar cómo podemos obtener, en forma rigurosa, los lagrangianos que habitualmente se usan en las teorías semiclásicas de la gravedad o, eventualmente, lagrangianos más generales: no les pediremos *a priori* que sean cuadráticos en el tensor de Riemann. Para esto usaremos argumentos como aquéllos utilizados para demostrar el teorema de Weyl y la teoría de concomitantes a que él dio

origen, haciendo uso de la unicidad del tensor de Einstein demostrada por E. Cartan <sup>[42]</sup>. Pretendemos también demostrar cuál es la forma de los lagrangianos para los demás campos acoplados al gravitatorio, o sea, encontrar cuál es el acoplamiento de cada uno con la gravedad ya que, como se ha dicho, imponer la forma del acoplamiento es imponer la trayectoria de las partículas correspondientes. Teniendo en cuenta todo lo ya mencionado sobre las constantes con dimensiones, pediremos que todas las constantes sean adimensionales. Luego, si es necesario, igual que en el párrafo anterior, algunos de los campos podrán convertirse en constantes dimensionales como en la teoría de Brans-Dicke.

Las ecuaciones de campo que se obtengan al variar la densidad lagrangiana deberán ser invariantes de *gauge* por el grupo que corresponda. Mostraremos que no es necesario, sin embargo, imponer dicha invariancia al  $\mathcal{L}$  ya que si esta imposición se hace sobre las ecuaciones de campo (que son las que tienen sentido físico) resulta la invariancia del lagrangiano mismo. Y esto a su vez restringe severamente la forma de sus términos. Por razones de simplicidad nos ocuparemos de los campos bosónicos.

La expresión rigurosa de estas hipótesis es la que a continuación se resume:

- i) La densidad lagrangiana que queremos construir debe ser función de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , el vector potencial electromagnético  $A_\mu$  y un campo escalar  $\varphi$ . Este último podrá ser un campo ordinario y aún una constante.
- ii) No se admiten en el lagrangiano constantes dimensionales porque ellas provocan problemas y conducen por lo general a teorías no renormalizables.
- iii) El lagrangiano contiene las derivadas que aparecen en la ec. (40). Permitimos derivadas primeras de los campos  $A_\mu$  y  $\varphi$  porque queremos que sus ecuaciones de campo sean de segundo orden y derivadas primeras y segundas para la métrica porque el lagrangiano de la RG debe estar incluido. No imponemos algún grado máximo al campo gravitatorio en el lagrangiano para que resulte una teoría tan general como sea posible.
- iv) Unidades: sea  $c = \hbar = 1$  y  $S$  la acción. Entonces,

$$[S] = 1 \quad [g_{\mu\nu}] = 1 \quad [\mathcal{L}] = l^{-4}$$

$$[\kappa] = l^{-1} \quad \kappa^2 = 8\pi G$$

v) Pedimos invariancia U(1) a las ecuaciones de campo.

Sea, entonces,  $\mathcal{L}$  el lagrangiano concomitante del tensor métrico, del potencial electromagnético (un covector), de un campo escalar y de sus derivadas hasta el orden indicado en la ecuación (40)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\sigma}; g_{\mu\nu,\sigma\rho}; \mathbf{A}_\mu; \mathbf{A}_{\mu,\nu}; \varphi; \varphi_\sigma) \quad (40)$$

A partir de la condición iii) y usando las dimensiones de los campos expresadas en iv), por un cambio de escala  $\lambda$  en L, tenemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; \lambda g_{\mu\nu,\sigma}; \lambda^2 g_{\mu\nu,\sigma\rho}; \lambda \mathbf{A}_\mu; \lambda^2 \mathbf{A}_{\mu,\nu}; \lambda \varphi; \lambda^2 \varphi_\sigma) \\ & = \lambda^4 \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\sigma}; g_{\mu\nu,\sigma\rho}; \mathbf{A}_\mu; \mathbf{A}_{\mu,\nu}; \varphi; \varphi_\sigma) \end{aligned}$$

Derivando cuatro veces con respecto a  $\lambda$ , haciendo  $\lambda \rightarrow 0$  y aplicando el teorema de reemplazo <sup>[34]</sup>, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi^2 + \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\alpha \varphi \\ & + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \varphi_{,\alpha} + \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\delta} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\lambda \mathbf{A}_\delta \\ & + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\lambda\delta} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_{\lambda;\delta} + \Lambda_1 \varphi^4 + \Lambda_1^\mu \mathbf{A}_\mu \varphi^3 + \Lambda_2^\mu \varphi^2 \varphi_{,\mu} + \Lambda_1^{\mu\nu} \varphi^2 \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \\ & + \Lambda_2^{\mu\nu} \mathbf{A}_{\mu;\nu} \varphi^2 + \Lambda_3^{\mu\nu} \varphi \varphi_{,\mu} \mathbf{A}_\nu + \Lambda_4^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \Lambda_1^{\mu\nu\rho} \varphi \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\rho \\ & + \Lambda_2^{\mu\nu\rho} \varphi \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_{\nu;\rho} + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma + \Lambda_3^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_{\rho;\sigma} \\ & + \Lambda_4^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{A}_{\mu;\nu} \mathbf{A}_{\rho;\sigma} + \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned} \quad (41)$$

donde  $\Lambda_i^{\dots}(g_{\mu\nu})$  son densidades tensoriales y ; significa derivación covariante respecto de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ .

Las densidades  $\Lambda_i(g_{\mu\nu})$  han sido encontradas recientemente para cualquier orden [35,36]. De acuerdo con esos resultados y admitiendo que la dimensión del ET sea  $n = 4$ , se muestra que

- i)  $\Lambda = \text{constante}$ ,
- ii)  $\Lambda^\mu = 0$ ,
- iii)  $\Lambda^{\mu\nu} = a\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ ,
- iv)  $\frac{\Lambda^{\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$  es una combinación lineal de  $g^{[\mu\nu}g^{\rho\sigma]}$  y  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  donde [ ] indica el conjunto formado por las permutaciones de los índices incluidos en [ ]. Por ejemplo,

$$g^{[\mu\nu}g^{\rho\sigma]} = \{g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}, g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}, g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\},$$

- v)  $\Lambda^{\mu\nu\rho} = 0$ ,
- vi)  $\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} = 0$ ,
- vii)  $\frac{\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$  es una combinación lineal de  $g^{[\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta]}$  y  $g^{[\mu\nu}\varepsilon^{\rho\sigma\alpha\beta]}$ ,
- viii)  $\frac{\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{-g}}$  es una combinación lineal de  $g^{[\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta]}$  y  $g^{[\mu\nu}g^{\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta]}$ .

Así es como obtenemos la siguiente expresión para la acción:

$$\begin{aligned}
S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} [ & a_1 \varphi^2 R + a_2 R A^\mu A_\mu \\
& + a_3 R^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + a_4 R^{\mu\nu} A_{\mu;\nu} + a_5 \varphi^4 + a_6 \varphi^2 A^\mu A_\mu \\
& + a_7 \varphi \varphi_{,\mu} A^\mu + a_8 \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu} + a_9 A^\mu \bar{A}^\nu A_{\mu;\nu} + a_{10} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
& + a_{11} A_{\mu;\nu} A^{\mu;\nu} + a_{12} R^2 + a_{13} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \\
& + a_{14} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho\nu\sigma} + a_{15} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_{16} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\rho\sigma\alpha\beta} \\
& + a_{17} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\alpha\nu\beta} R_{\rho\sigma}^{\alpha\beta} + \text{una divergencia total} ] d^4x
\end{aligned} \tag{42}$$

Volvemos ahora a la cuestión de la invariancia de *gauge*. Pediremos que todas las ecuaciones de campo, que son las que deben tener sentido físico, sean invariantes ante las

transformaciones locales del grupo  $U(1)$ . Así, supongamos que  $E(\mathcal{L}) = \delta S/\delta\varphi$  es invariante de *gauge*. Entonces,

$$\partial E(\mathcal{L})/\partial \mathbf{A}_\mu = 0$$

y esto implica que:

$$4a_6\varphi \mathbf{A}_\nu g^{\nu\mu} - a_7\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha g^{\nu\mu} + a_7\varphi g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\beta\nu,\alpha} = 0 \quad (43)$$

Derivando la ec. (43) con respecto a  $\mathbf{A}_\nu$  resulta inmediato que  $a_6 = 0$ . Contrayendo luego la ec.(43) con  $g_{\mu\tau}$  y derivando respecto de  $g_{\rho\sigma,\lambda}$  se ve que

$$a_7\varphi[g^{\sigma\lambda}\delta_\delta^\rho - g^{\rho\sigma}\delta_\tau^\lambda + g^{\rho\lambda}\delta_\tau^\sigma] = 0$$

Multiplicando por  $g_{\sigma\lambda}$  y contrayendo  $\rho$  con  $\tau$ , obtenemos que  $a_7 = 0$ .

Supongamos ahora que  $E^\mu(\mathcal{L}) = \delta S(\mathcal{L})/\delta \mathbf{A}_\mu$  es invariante de *gauge*. Entonces  $\partial E^\mu(\mathcal{L})/\partial \mathbf{A}_\mu = 0$ , que significa que:

$$\begin{aligned} & 2a_2 R g^{\mu\rho} + 2a_3 \mathbf{R}^{\mu\rho} + 2a_6 \varphi^2 g^{\mu\rho} + a_9 [\mathbf{A}_{\alpha;\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\rho} \\ & - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\rho \mathbf{A}_\nu g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{A}_\nu g^{\alpha\nu} g^{\beta\rho} - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\tau \mathbf{A}_\tau g^{\alpha\mu} g^{\beta\rho} \\ & - \Gamma_{\tau\sigma}^\tau \mathbf{A}_\delta g^{\rho\mu} g^{\sigma\delta} - \Gamma_{\tau\sigma}^\tau \mathbf{A}_\nu g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} - \mathbf{A}_{\delta;\sigma} g^{\rho\mu} g^{\delta\sigma} \\ & + \mathbf{A}_\delta g^{\rho\alpha} g^{\mu\beta} g^{\delta\sigma} g_{\alpha\beta,\sigma} + \mathbf{A}_\nu g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\mu} g_{\alpha\beta,\sigma} \\ & + \mathbf{A}_\delta g^{\sigma\alpha} g^{\delta\beta} g^{\rho\mu} g_{\alpha\beta,\sigma} + \mathbf{A}_\nu g^{\sigma\alpha} g^{\mu\beta} g^{\rho\nu} g_{\alpha\beta,\sigma}] \\ & + a_{11} [2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\delta}^\rho g^{\alpha\nu} g^{\beta\delta} + 2\Gamma_{\tau\sigma}^\tau \Gamma_{\nu\delta}^\mu g^{\rho\nu} g^{\sigma\delta} + 2\Gamma_{\nu\delta,\sigma}^\mu g^{\rho\nu} g^{\delta\sigma} \\ & - 2\Gamma_{\nu\delta}^\mu g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\delta} g_{\alpha\beta,\sigma} - 2\Gamma_{\nu\delta}^\mu g^{\rho\nu} g^{\sigma\alpha} g^{\delta\beta} g_{\alpha\beta,\sigma}] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Derivando la ec. (44) con respecto a  $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ , tomando en el punto en consideración una base donde  $g_{\tau\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  y haciendo  $\mu = \alpha = \beta = \gamma = 1, \rho = \delta = 2$  resulta que  $a_{11} = 0$ . Tomando luego  $\mu = \gamma = 2, \rho = \alpha = 3$  y  $\beta = \delta = 4$  se obtiene que  $a_3 = 0$ . Y haciendo  $\delta = \gamma = 1, \mu = \rho = \alpha = \beta = 2$  resulta  $a_2 = 0$ .

Derivando la ec. (44) con respecto a  $\mathbf{A}_{\alpha;\beta}$  y teniendo en cuenta que  $a_2 = a_3 = a_{11} = 0$ , es

$$a_0 [g^{\alpha\mu} g^{\beta\rho} - g^{\rho\mu} g^{\alpha\beta}] = 0$$

Y haciendo ahora  $\alpha = \beta = 1, \rho = \mu = 2$  podemos ver que  $a_0 = 0$ .

Supongamos finalmente que  $E^{\mu\nu} = \delta S / \delta g_{\mu\nu}$  es invariante de *gauge*. Entonces vale que  $\partial E^{\mu\nu}(\mathcal{L}) / \partial \mathbf{A}_\rho = 0$ . Lo mismo sucede con

$$\frac{\partial E^{\mu\nu}(\mathcal{L}_4)}{\partial \mathbf{A}_\rho} = 0 \quad \text{donde} \quad \mathcal{L}_4 = a_4 \sqrt{-g} \mathbf{R}^{\mu\nu} \mathbf{A}_{\mu;\nu}$$

Como  $\mathcal{L}_4$  es lineal en  $g_{\mu\nu;\rho\sigma}$ , no aparecen derivadas de cuarto orden en  $E^{\mu\nu}(\mathcal{L}_4)$ .

Por último, derivando  $\partial E^{\mu\nu}(\mathcal{L}_4) / \partial \mathbf{A}_\rho$  con respecto a  $g_{\alpha\beta;\gamma\delta}$  y contrayendo luego con  $g_{\delta\beta} g_{\pi\gamma} g_{\lambda\alpha}$  se obtiene luego de cálculos tediosos pero sencillos que  $a_4 = 0$ . De esta forma hemos probado el siguiente

**TEOREMA:** Si  $\mathcal{L}$  es una densidad lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu;\rho}; g_{\mu\nu;\rho\sigma}; \mathbf{A}_\mu; \mathbf{A}_{\mu;\nu}; \varphi; \varphi_{,\mu})$$

que satisface las hipótesis i) a v), entonces, la invariancia de *gauge* asociada a las ecuaciones de Euler-Lagrange implica la invariancia de *gauge* del lagrangiano que se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & b_1 \sqrt{-g} R \varphi^2 + b_2 \sqrt{-g} \varphi^4 + b_3 \sqrt{-g} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} g^{\mu\nu} \\ & + b_4 \sqrt{-g} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + b_5 \sqrt{-g} \mathbf{R}^2 + b_6 \sqrt{-g} \mathbf{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \\ & + b_7 \mathbf{R}_{\mu\nu} \mathbf{R}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (45)$$

Los términos  $b_5 \sqrt{-g} \mathbf{R}^2$ ,  $b_6 \sqrt{-g} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}^{\mu\nu\rho\sigma}$  y  $b_7 \sqrt{-g} \mathbf{R}_{\mu\nu} \mathbf{R}^{\mu\nu}$  pueden relacionarse, en  $n = 4$ , a través del teorema de Gauss-Bonnet.

## II.9 Análisis del lagrangiano cuadrático en la curvatura

La teoría cuántica de campos en el ET curvo tiene en cuenta las propiedades cuánticas de la materia, incluyendo eventuales perturbaciones de la métrica debidas a *back reaction*, pero no cuantifica a la geometría de fondo que es considerada de esta forma como un campo clásico externo. Este procedimiento para tratar a la materia acoplada con la gravedad se conoce como teoría semiclásica. Los resultados a partir de él obtenidos – aunque incompletos – representan el límite de la teoría completa que se espera tener al encontrar una forma adecuada de cuantificar también la geometría. Por lo menos, este límite describe adecuadamente a los fenómenos físicos en las regiones en que las longitudes típicas son mucho menores que la longitud de Planck.

Los términos puramente gravitatorios del lagrangiano de la ec (45), haciendo la identificación  $b_1\varphi^2$  con  $\kappa^{-2}$  y  $b_2\varphi^4$  con  $\Lambda$ ,  $\Lambda$  la constante cosmológica, son los habitualmente usados por la teoría cuántica de campos en el ET curvo. Su acción para la gravitación es:

$$S_g = \int \sqrt{-g} \left[ \left( \frac{R}{2\kappa^2} - 2\Lambda \right) + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] d^4x$$

que se obtiene de la ec (45) eligiendo  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = \alpha$ ,  $b_7 = \beta$  y haciendo uso del teorema de Gauss-Bonnet. Este lagrangiano fue sugerido por primera vez por DeWitt y Utijama [43]. La acción gravitatoria es, como se ve, suma del lagrangiano de Einstein (o de Brans-Dicke) y de términos de Weyl (cuadráticos en la curvatura). La materia se admite como acoplada mínimamente y, en el caso del campo escalar sin masa, también en forma conforme como veremos más adelante. Contando potencias en forma ingenua se ve que los contratérminos  $\Delta\mathcal{L}$  son proporcionales a  $\mathcal{L}$  y la teoría es así formalmente renormalizable. Esto ocurre porque la presencia de los términos de Weyl implica que el propagador del gravitón brinda una contribución tipo  $p^{-4}$  en vez del comportamiento  $p^{-2}$  del lagrangiano de Einstein [22]. Se han mencionado ya los problemas en la zona clásica de los términos de Weyl. Pero estos términos son evitables, sin embargo, si despreciamos su contribución a bajas energías, contribución que es realmente pequeña.

Es importante resaltar que nuestro lagrangiano resulta cuadrático en el campo gravitatorio aún cuando no fue una de las hipótesis, como así también que se obtienen los posibles acoples de la materia con la gravedad sin necesidad de que esto sea una imposición adicional; sólo hemos pedido que el lagrangiano no contenga constantes dimensionales. Más aún: hemos mostrado que no es necesario pedir invariancia de *gauge* al lagrangiano para que la tenga ya que ella deriva del requerimiento de invariancia hecho a las ecuaciones de campo. Es a ellas a las que debe, por otra parte, hacerse este requerimiento ya que son las que deben tener sentido físico. La invariancia resultante del lagrangiano excluye, por su parte, un conjunto de términos representativos de interacciones que estarían permitidas si se hubiera tenido en cuenta nada más que el cálculo de concomitantes y el análisis dimensional. Además, puede pensarse como una generalización de la RG en lo que respecta a la naturaleza geométrica de la gravitación: se construye con argumentos geométricos y cumple con el requerimiento de invariancia de *gauge* ya que es invariante por el grupo de c.g.c.

Las ecuaciones de campo que de esta acción pueden obtenerse agregando con acoplamiento mínimo una fuente de materia descrita por su lagrangiano  $\mathcal{L}_M$  son:

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$$

con

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + 2\lambda g_{\mu\nu} \\ & + \alpha (-R^2 g_{\mu\nu} + 4R\mathbf{R}_{\mu\nu} - 4g_{\mu\nu} \square R + 4\nabla_\mu \partial_\nu R) \\ & + \beta (-2\square \mathbf{R}_{\mu\nu} - \mathbf{R}_{\rho\sigma} \mathbf{R}^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + 4\mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}^{\rho\sigma} \\ & - g_{\mu\nu} \square R + 2\nabla_\mu \partial_\nu R) \end{aligned}$$

y

$$\delta \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x \equiv \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

El mayor contraste entre esta acción cuadrática y la gravedad de Einstein reside en los problemas de estabilidad, tal como se refleja en la energía del sistema. La energía es

definida positiva en SG <sup>[44]</sup> y se anula en el caso conforme <sup>[45]</sup> pero es indefinida cuando se suman los términos en  $R$  y los términos de Weyl. Sin embargo, mientras se carezca de una teoría completa de la que ésta sea el límite, los términos en  $R^2$  son inevitables.

El lagrangiano obtenido presenta nuevos inconvenientes cuánticos. El propagador para el gravitón  $(p^2 + ax^2p^{-4})^{-1}$  viola los requerimientos de unitariedad al menos a nivel árbol ya que es de la forma  $p^{-2} - (x^2/a + p^2)^{-1}$  y en consecuencia tiene un polo en  $-x^2/a$  que corresponde a la presencia de un fantasma. Cabe esperar, a pesar de esto, que la unitariedad pueda ser restituida al continuar el desarrollo para incluir las correcciones cuánticas <sup>[46]</sup>. Por otra parte, la teoría cuadrática en la curvatura –cuya unicidad al igual que la de los posibles acoples con la materia acabamos de demostrar con la extensión del teorema de Weyl– parece ser la única que se corresponde, por lo menos en el límite semiclásico, con un tratamiento perturbativo de la gravitación sin apartarse del marco original de la RG. Los términos puramente gravitatorios de la acción están en condiciones de acoplarse a modelos gran unificados para la materia, ya que estos términos tienen la propiedad de ser asintóticamente libres <sup>[44]</sup>.

Se han discutido, por supuesto, otras varias posibilidades para una descripción cuántica de la gravitación, incluyéndose entre ellas a la cuantificación canónica que conduce a la ecuación de Wheeler-deWitt para la función de onda del universo, a las teorías supersimétricas y las teorías de supercuerdas. Justamente a partir de esta última se reobtiene, en el límite de bajas energías, la acción de Einstein más los términos de Weyl de la ecuación (45) <sup>[47]</sup>. En efecto, S. Deser ha obtenido esa acción a partir de las supercuerdas cerradas bosónicas, heteróticas y supersimétricas, con distintos coeficientes en cada caso para los términos en  $R^2$  y  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ .

Además del lagrangiano de las teorías semiclásicas, la ecuación (45) nos permite encontrar teorías semiclásicas conocidas mediante una adecuada elección de las constantes:

Relatividad general: La RG es un caso particular de la ec. (45) si admitimos que ella puede escribirse evitando las constantes dimensionales al estilo Brans-Dicke ((2) ). El lagrangiano de esta última teoría puede obtenerse a partir de nuestra ecuación eligiendo  $b_1 = -1/2$ ,  $b - 3 = 4\omega$  y todos los demás coeficientes iguales a cero. Posteriormente, la RG se obtiene haciendo la identificación  $\varphi^2 = \kappa^{-2}$ .

Maxwell – Einstein: El campo electromagnético se acopla mínimamente al campo gravitatorio haciendo el reemplazo usual de las derivadas parciales que aparecen en su formulación en el espacio de Minkowski por derivadas covariantes. El electromagnetismo así acoplado a RG se obtiene a partir de la ec. (45) haciendo  $b_1 = -1/2$ ,  $b_4 = 2\pi/137$ , todos los otros  $b_i = 0$  y pensando nuevamente en  $\kappa^2$  como  $\varphi^{-2}$ .

Los lagrangianos para el campo escalar: Como se ha dicho, el lagrangiano para el campo escalar autointeractuante sin masa en el ET curvo está descrito por (39) . Vemos así que debemos tomar  $b_1 = \xi$ ,  $b_2 = \lambda$ ,  $b_3 = 1$  y los demás coeficientes nulos para obtener este lagrangiano a partir de la ec.(45). Haciendo uso de dos campos escalares podemos también agregar el término  $\kappa^{-2}\sqrt{-g}R$  correspondiente al lagrangiano de la gravedad libre.

Es posible recuperar además otras teorías que, aún siendo cuadráticas en la curvatura como el modelo de Strominger <sup>[48]</sup> sin fantasmas para límites asintóticamente planos, son estudiadas por sus propiedades en el límite clásico . En  $n = 4$ , basta elegir  $F_{\mu\nu} = 0$ ,  $b_1\varphi^2 = 1$ ,  $b_2 = \beta^2/2$  y los demás  $b_i = 0$ .

En conclusión podemos afirmar que la extensión del teorema de Weyl destinada a obtener una densidad lagrangiana para todos los campos bosónicos nos ha permitido demostrar, de forma rigurosa, cuál es el lagrangiano que deben usar las teorías semiclásicas sin necesidad de hacer imposiciones sobre su invariancia de *gauge*. Hemos visto también

que esta extensión engloba a las teorías usualmente aceptadas por la literatura como así también prohíbe la inclusión de términos que representen otros acoples que no sean el mínimo o conforme ya que esto no podría hacerse sin la aparición de constantes dimensionales o rompiendo la invariancia de *gauge* de las ecuaciones de campo.

## CAPÍTULO III

### LA TEORÍA DE CONCOMITANTES EN EL CÁLCULO DE $\langle \varphi^2 \rangle^{REN}$

#### III.1 Introducción

La invariancia conforme juega un rol muy importante en las teorías de campos no masivos. Es bien sabido que en el dominio cuántico, esta invariancia es violada debido a la presencia de divergencias que deben ser eliminadas en el proceso de renormalización. Entre los ejemplos más importantes de estas anomalías encontramos a la anomalía de traza que proviene de los valores no nulos que toma el tensor de energía impulso renormalizado  $\langle T^\mu_\mu \rangle^{ren}$  en las teorías invariantes conformes.

El estudio de estas anomalías no es, en general, un problema sencillo ni siquiera en las geometrías más simples <sup>[49]</sup>. Podemos mencionar como ejemplos de los numerosos intentos realizados en esta línea al trabajo de Page en 1982 <sup>[50]</sup> para encontrar una expresión aproximada del  $\langle T^{\mu\nu} \rangle^{ren}$  en el caso en que la fuente sea un campo escalar invariante conforme y la variedad un ET de Einstein estático (vale decir, con un vector de Killing  $\xi^\mu_{(t)}$  tal que  $\xi^\mu_{(t)} \partial_\mu = \partial_t$ ). También al trabajo de 1985 de Brown y Ottewill en que propusieron una aproximación algo diferente –trabajando con la ambigüedad en la elección del factor conforme– al considerar el problema de la polarización de vacío cerca de un agujero negro estático. Utilizaron campos de spin 0, 1/2 y 1 y reprodujeron los resultados de Page para el spin 0 <sup>[51,52]</sup>. Sin embargo, éstas no son más que aproximaciones. Usando métodos numéricos, Candelas y Howard mostraron en 1984 que el  $\langle T^{\mu\nu} \rangle^{ren}$  de Page es adecuado en la métrica de Schwarzschild con fuente de campo escalar no masivo <sup>[53,54]</sup>. Pero ha sido mostrado que, para el campo electromagnético, la aproximación de Page, Brown y Ottewill

da el signo equivocado para  $\langle T^{\mu\nu} \rangle^{ren}$  a grandes distancias de la fuente mientras que da el valor exacto en el horizonte [55,56]. En 1987, Frolov y Zel'nikov propusieron un método alternativo para la construcción del  $\langle T^{\mu\nu} \rangle^{ren}$  en ET estáticos cualesquiera y campos invariantes conformes como fuentes [57]. Ellos construyeron un tensor con cantidades geométricas: la curvatura, un vector de Killing y sus derivadas covariantes hasta cierto orden. Independientemente, nosotros trabajábamos en esta línea pero con pretensiones más generales. Construimos un tensor con las características adecuadas para ser fuente de las ecuaciones de Einstein utilizando cantidades geométricas: la métrica y sus derivadas covariantes hasta cierto orden y un vector adimensional cualquiera y sus derivadas covariantes, para que luego jugara el rol de vector de Killing, de Killing conforme o simplemente el de indicador de una dirección privilegiada. Estos cálculos resultaron muy largos y complicados y no parecían brindar información de interés.

Es por eso que decidimos que en una primera aproximación convenía considerar una versión más modesta del problema y discutir el comportamiento de la cantidad  $\langle \varphi^2 \rangle^{ren}$  que describe las fluctuaciones cuánticas del campo. De acuerdo con la teoría clásica,  $g^{1/4}\varphi^2$  es invariante ante transformaciones conformes mientras que  $g^{1/4} \langle \varphi^2 \rangle^{ren}$  no lo es.

Para encontrar las adecuadas leyes de transformación a las que deben ser sometidos los campos es conveniente considerar el comportamiento del procedimiento mismo de renormalización ante las transformaciones conformes. Estos cálculos fueron efectuados por Page [50] en el ET de cuatro dimensiones pero cuando se trata de repetirlo en dimensiones más altas el sencillo procedimiento por él utilizado se convierte en extremadamente complicado. 3 Los términos que deben sumarse a  $g^{1/4} \langle \varphi^2 \rangle^{ren}$  para restituirle su invariancia conforme tienen carácter local y en consecuencia deben ser construídos a partir de la métrica y sus derivadas. El orden máximo de derivación que debe considerarse puede ser fácilmente definido a partir de argumentos del análisis dimensional. En otras palabras, ante una transformación conforme (TC)

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \omega^2 g_{\mu\nu}$$

la transformación del valor de expectación de vacío (v.e.v.) renormalizado del cuadrado del campo  $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$  debe ser de la forma

$$\omega^{2\beta} \langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}} - \langle \tilde{\varphi}^2 \rangle^{\text{ren}} = \mathcal{F}(g_{\mu\nu}, \nabla, \omega)$$

donde  $\beta = 1 - n/2$ ,  $n$  es la dimensión del ET y  $\mathcal{F}$  una función escalar arbitraria.

La teoría de concomitantes descrita en el capítulo II se revela aquí también como una herramienta poderosa para obtener la estructura más general de la función  $\mathcal{F}$ . En este capítulo mostraremos pues, la aplicación de la teoría de concomitantes al problema particular de estudiar las anomalías conformes de los campos sin masa en seis dimensiones y encontraremos los términos que las representan junto a vínculos que ellos deben cumplir. Comenzaremos con un breve resumen de las propiedades de los espacios y transformaciones conformes, plantearemos el problema en forma rigurosa y mostraremos que su solución para el caso de cuatro dimensiones coincide con los resultados de la literatura. Luego encontraremos los términos que intervienen en  $\mathcal{F}$  y las condiciones que los coeficientes que los acompañan deben cumplir para que  $\mathcal{F}$  pueda representar a  $\langle \varphi^2 \rangle$ .

### III.2 Espacios conformes, transformaciones conformes y teorías conformes

Dos espacios  $V_n$  y  $\tilde{V}_n$  se dicen espacios conformes si sus tensores métricos  $g_{\mu\nu}$  y  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  están relacionados de la siguiente manera:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (46)$$

donde  $\omega$  es una función escalar <sup>[58]</sup>. Suponemos que  $V_n$  y  $\tilde{V}_n$  son espacios globalmente hiperbólicos  $n$  dimensiones, una temporal y  $(n - 1)$  espaciales. Suponemos también que las métricas y el factor conforme  $\omega^2$  son  $C^\infty$ .

Para preservar la relación  $g_{\mu\nu}g^{\mu\rho} = \delta^\rho_\nu$ , las componentes contravariantes de la métrica deben cumplir que

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \omega^{-2}(x)g^{\mu\nu}(x) \quad (47)$$

Por su parte, los símbolos de Christoffel satisfacen la relación

$$\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} + \omega^{-1}(\delta_{\rho}^{\mu}\omega_{\sigma} + \delta_{\sigma}^{\mu}\omega_{\rho} - g_{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\omega_{\nu}) \quad (48)$$

donde con  $\omega_{\sigma}$  hemos indicado  $\partial\omega/\partial x^{\sigma}$ . Con  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}$  definimos  $\tilde{\nabla}$ , la transformada conforme de la derivada covariante:

$$\tilde{\nabla}_{\mu}A_{\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \omega^{-1}(\delta_{\mu}^{\lambda}\omega_{\nu} + \delta_{\nu}^{\lambda}\omega_{\mu} - g_{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\omega_{\sigma}) \quad (49)$$

$$\tilde{\nabla}^{\mu}A_{\nu} = \nabla^{\mu}A_{\nu} - \omega^{-1}(\delta_{\lambda}^{\mu}\omega_{\nu} + \delta_{\nu}^{\mu}\omega_{\lambda} - g_{\lambda\nu}g^{\mu\sigma}\omega_{\sigma}) \quad (50)$$

Las derivadas covariantes indicadas con ; o  $\nabla$  (usamos la notación más conveniente en cada caso) están determinadas por la métrica no transformada  $g_{\mu\nu}$ .

El cálculo del tensor de Riemann de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  da

$$\tilde{\mathbf{R}}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = \omega^{-2}\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} + \delta_{[\rho}^{[\mu}\Omega_{\sigma]}^{\nu]} \quad (51)$$

donde  $\Omega_{\beta}^{\alpha}$  es por definición

$$\Omega_{\beta}^{\alpha} = 4\omega^{-1}(\omega^{-1})_{;\beta\gamma}g^{\alpha\gamma} - 2\omega_{;\rho}^{-1}\omega_{;\sigma}^{-1}g^{\rho\sigma}\delta_{\beta}^{\alpha}$$

y [ ] indica antisimetrización:

$$T^{[ab]} = \frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba})$$

El caso  $n = 1$  carece de interés. En dos dimensiones, cualquier métrica es reducible a  $\lambda[(dx^1)^2 \pm (dx^2)^2]$ . Esto significa que cualquier  $V_2$  es conforme al espacio plano en dos dimensiones. Por lo tanto, supondremos que  $n > 2$ . Entonces el tensor de Ricci de la métrica transformada es

$$\tilde{\mathbf{R}}^{\mu}{}_{\nu} = \omega^{-2}\mathbf{R}^{\mu}{}_{\nu} + (n-2)\omega^{-1}(\omega^{-1})_{;\nu\alpha}g^{\alpha\mu} - (n-2)^{-1}\omega^{-n}(\omega^{n-2})_{;\rho\sigma}g^{\rho\sigma}\delta_{\nu}^{\mu} \quad (52)$$

y su escalar de curvatura

$$\tilde{R} = \omega^{-2}R - 2(n-1)\omega^{-3}\omega_{;\mu\nu}g^{\mu\nu} - (n-1)(n-4)\omega^{-4}\omega_{;\mu}\omega_{;\nu}g^{\mu\nu} \quad (53)$$

Utilizando estos tensores podemos definir otro tensor:

$$\begin{aligned} C_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = & \mathbf{R}_{\nu\rho\sigma}^{\mu} + (n-2)^{-1}(\delta_{\rho}^{\mu}\mathbf{R}_{\nu\sigma} - \delta_{\sigma}^{\mu}\mathbf{R}_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}\mathbf{R}_{\rho}^{\mu} - g_{\nu\rho}\mathbf{R}_{\sigma}^{\mu}) \\ & + (n-1)^{-1}(n-2)^{-1}R(\delta_{\sigma}^{\mu}g_{\nu\rho} - \delta_{\rho}^{\mu}g_{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (54)$$

que resulta invariante ante TC

$$\tilde{C}_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = C_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$$

Este tensor se llama tensor de curvatura conforme o tensor de Weyl y puede probarse que para  $n > 3$  cualquier espacio con tensor de Weyl nulo es conforme al espacio plano.

Es posible definir campos con propiedades especiales de transformación ante TC. Esos campos se llaman campos de Weyl. Cuando se está trabajando en teorías de campos no masivos, la acción  $S$  debe ser invariante conforme:  $\tilde{S} = S$ . La acción  $S$  es

$$S = \int \mathcal{L}(\Psi, \nabla\Psi) d\eta$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana,  $\Psi$  el campo y

$$d\eta = \sqrt{-g} d^n x = \frac{1}{n!} \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_n}$$

Como  $\tilde{g} = \omega^{2n}g$ , entonces  $d\tilde{\eta} = \omega^n d\eta$ . Entonces,  $\mathcal{L}$  satisface

$$\tilde{\mathcal{L}} = \omega^{-n} \mathcal{L} \quad (55.)$$

Este requerimiento es el que permite definir a los campos de Weyl: sea  $\Psi$  un campo tensorial.  $\Psi$  se dice un campo de Weyl si satisface que  $\tilde{\Psi} = (\omega^2)^r \Psi$ , o sea,

$$\tilde{\Psi}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = \omega^{2r} \Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$$

Diremos además que tiene peso  $r$  cuando es sometido a una TC y que tiene  $m$  índices. Observamos que en la densidad lagrangiana tenemos un término cinético de la forma

$$\nabla_{\mu} \Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} \nabla^{\mu} \Psi^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}$$

por lo tanto, la ec. F(55) dice que

$$\tilde{\mathcal{L}} = (\omega^2)^{2r-m-1} \mathcal{L} \quad (56)$$

Teniendo en cuenta a las ec. (55) y (56) vemos que un campo de Weyl satisface

$$r = \frac{2(m+1) - n}{4} \equiv \frac{\beta}{2} \quad (57)$$

Para nuestro trabajo estamos interesados en los campos escalares. En consecuencia tenemos que  $m = 0$  en (57), vale decir

$$\bar{\varphi} = \omega^\beta \varphi \quad \text{with} \quad \beta = 1 - \frac{n}{2} \quad (58)$$

Necesitamos considerar al propagador  $G$ , siendo  $G$

$$G(x, x') = \langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle \quad (59)$$

donde  $\langle \rangle$  significa v.e.v.. Es inmediato a partir de (58) que  $G$  se transforma según

$$\tilde{G}(x, x') = \omega^\beta(x)G(x, x')\omega^\beta(x') \quad (60)$$

o brevemente

$$\tilde{G} = \omega^\beta G \omega'^\beta$$

### III.3 Planteo del problema

Utilizaremos herramientas geométricas para la discusión de las propiedades del valor medio renormalizado del cuadrado del campo escalar  $\langle \varphi^2 \rangle$ . El valor medio al cuadrado  $\langle \varphi^2 \rangle$  está relacionado con el propagador a través de

$$G(x, x') = \langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle \quad (61)$$

Cuando se toma el límite de coincidencia  $x \rightarrow x'$ ,  $\langle \varphi^2 \rangle$  generalmente resulta divergente y debemos hallar su expresión renormalizada

$$\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}} = \langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle^{\text{ren}} = G^{\text{ren}} \quad (62)$$

$G^{ren}$  se obtiene restando los términos divergentes  $G^{div}$  al propagador completo  $G$

$$G^{ren} = G - G^{div} \quad (63)$$

Al realizar una TC (56) sobre la métrica del ET, el campo escalar se transforma como indica la ec. (58). Por lo tanto, el  $\tilde{G}^{ren}$  transformado será

$$\tilde{G}^{ren} = \tilde{G} - \tilde{G}^{div} \quad (64)$$

Combinando (63) and (64) y recordando que  $\tilde{G} = \omega^{2\beta} G$  se obtiene que el valor transformado  $\langle \tilde{\varphi}^2 \rangle^{ren}$  debe satisfacer:

$$\omega^{2\beta} \langle \varphi^2 \rangle^{3ren} - \langle \tilde{\varphi}^2 \rangle^{ren} = \tilde{G}^{div} - \omega^{2\beta} G^{div} \equiv \mathcal{F} \quad (65)$$

Pero los términos divergentes son objetos geométricos, por lo tanto  $\mathcal{F}$  debe ser una función de solamente objetos geométricos, precisamente  $\mathcal{F}$  debe ser una función de los objetos geométricos relevantes del ET: la métrica y el factor conforme, más sus derivadas, porque estamos trabajando con una teoría conforme. Debemos tomar derivadas hasta el orden necesario como para dar a  $\mathcal{F}$  las unidades correctas.

Tomando en cuenta todo lo que hemos dicho acerca de las reglas de transformación de  $\langle \varphi^2 \rangle$ , vemos que  $\mathcal{F}$  debe satisfacer

$$\mathcal{F}(g_{\mu\nu}, \nabla, \omega) = -\omega^{2\beta} \mathcal{F}(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\nabla}, \tilde{\omega}) \quad (66)$$

donde  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  está definida en (46),  $\tilde{\nabla}$  en (49), (50) y  $\tilde{\omega} = 1/\omega$ . La ec. (66) representa una transformación “anticonforme” ya que el término multiplicativo es negativo.

### III.4 $\langle \varphi^2 \rangle$ en cuatro dimensiones

3 Consideremos primero el caso sencillo en cuatro dimensiones. En este caso, las únicas funciones de  $(g_{\mu\nu}, \nabla_\mu, \omega)$  con las correctas unidades son el escalar de curvatura  $R$  (este es el teorema de Weyl <sup>[13]</sup>) y las contracciones de dos derivadas (cada una brinda un  $l^{-1}$ ):  $\nabla\omega\nabla\omega$  y  $\nabla\nabla\omega$ . Recordemos que estamos trabajando en unidades naturales y que hemos elegido

$$[g_{\mu\nu}] = 1 \quad \text{por lo que} \quad [\omega] = 1.$$

Pidiendo que la acción  $S$  sea adimensional tal como es usual, resulta que  $[\varphi^2] = l^{2-n}$  que en  $n = 4$  da  $[\varphi^2] = l^{-2}$ .

Si pedimos que  $\mathcal{F}$  satisfaga la condición (66), que es lo mismo que pedir que sea anticonforme,  $\mathcal{F}$  resulta

$$\mathcal{F}^{(4)} = \alpha \frac{\nabla_\mu \nabla^\mu \omega}{\omega^3} \quad (67)$$

con  $\alpha$  algún coeficiente que debe obtenerse de la comparación con algún ejemplo conocido. Este es el resultado correcto para  $\mathcal{F}$  y  $\alpha$  es  $1/48\pi^2$  <sup>[50]</sup>. En efecto, en el método desarrollado por Page para obtener  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{ren}$  que mencionáramos en III.1, debió calcular  $\langle \varphi^2 \rangle$ . Para ello utilizó la aproximación gaussiana para la función de Green en el espacio conformemente relacionado con el de Einstein estático y obtuvo

$$\langle \varphi^2 \rangle_g = \frac{1}{48\pi^2} (\kappa^2 \Omega^{-2} - \Omega^{-3} \nabla\nabla\Omega)$$

Si hubiéramos pedido a  $\mathcal{F}$  que satisficiera la condición de transformarse conformemente, hubiéramos obtenido

$$\mathcal{F}'^{(4)} = \alpha' [\omega^{-2} R - 3 \frac{\nabla_\mu \nabla^\mu \omega}{\omega^3}] + \beta' \frac{\nabla^\mu \omega \nabla_\mu \omega}{\omega^4} \quad (68)$$

dos coeficientes arbitrarios. Pero no es el caso ya que debe satisfacerse necesariamente (66).

### III.5 Los concomitantes en seis dimensiones

Resulta interesante trabajar en seis dimensiones no sólo porque es la primera generalización en dimensión par sino también porque las relaciones entre el grupo conforme y el grupo ortogonal en  $n = 4$  y  $n = 6$  han permitido entender varios resultados. Por ejemplo, para encontrar la acción que corresponde al supergrupo de Poincaré se hace su inmersión en una teoría superconforme, se imponen restricciones cinemáticas sobre la torsión y la curvatura del grupo en seis dimensiones y esto induce la ruptura de simetría maximal que lleva a la acción correcta en  $n = 4$ . Otro tanto sucede en teorías estilo Kaluza-Klein y en la búsqueda de simetrías que en  $n = 4$  están rotas y son difíciles de identificar (“simetrías ocultas”).

Por ello, en esta sección encontramos la expresión para la función  $\mathcal{F}$  en seis dimensiones. Las condiciones que requerimos que ella cumpla son:

- La función  $\mathcal{F}$  dependerá sólo de objetos geométricos, vale decir, de la métrica  $g_{\mu\nu}$ , del factor conforme  $\omega$  y de sus derivadas.
- Igual que en los capítulos anteriores utilizamos unidades naturales y asignamos dimensiones de longitud a las coordenadas del ET. Por lo tanto,  $[g_{\mu\nu}] = [\omega] = 1$ . Pedimos también que la acción  $S$  sea adimensional por lo que –en  $n$  dimensiones–  $[\mathcal{L}] = l^{-n}$  y  $[\varphi^2] = l^{(-n+2)}$ . En seis dimensiones,  $[\varphi^2] = [G(x, x')] = l^{-4}$ .

Buscamos entonces una función  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu, \rho_1}, g_{\mu\nu, \rho_1 \rho_2}, \dots, g_{\mu\nu, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p}, \omega, \omega_{\mu_1}, \dots, \omega_{\mu_1, \dots, \mu_q}) \quad (69)$$

que tiene dimensiones de  $l^{-4}$ . Debido a sus dimensiones, por un cambio de escala de razón  $\lambda$  en  $\mathcal{F}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda^{-1} g_{\mu\nu}, \lambda g_{\mu\nu, \rho_1}, \lambda^2 g_{\mu\nu, \rho_1 \rho_2}, \dots, \lambda^p g_{\mu\nu, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p}, \lambda \omega, \lambda \omega_{\mu_1}, \dots, \lambda^q \omega_{\mu_1, \dots, \mu_q}) \\ = \lambda^4 \mathcal{F}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu, \rho_1}, g_{\mu\nu, \rho_1 \rho_2}, \dots, g_{\mu\nu, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p}, \omega, \omega_{\mu_1}, \dots, \omega_{\mu_1, \dots, \mu_q}) \end{aligned} \quad (70)$$

Siguiendo los mismos procedimientos del capítulo II, derivamos (70) cuatro veces respecto de  $\lambda$  y hacemos  $\lambda \rightarrow 0^+$ . Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = & \Lambda_1^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\nu,\rho\sigma} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \Lambda_2^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\nu,\rho\sigma} \omega_{\alpha,\beta} \omega_{\gamma,\delta} \\
& + \Lambda_3^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\delta} g_{\mu\nu,\rho\sigma} \omega_{\alpha,\beta\delta} + \Lambda_4^{\mu\nu\rho\sigma\delta\alpha\beta} g_{\mu\nu,\rho\sigma\delta} \omega_{\alpha,\beta} \\
& + \Lambda_5^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\delta\tau} \omega_{\mu,\nu} \omega_{\rho,\sigma} \omega_{\alpha,\beta} \omega_{\delta,\tau} + \Lambda_6^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\delta} \omega_{\mu,\nu} \omega_{\rho,\sigma} \omega_{\alpha,\beta\delta} \\
& + \Lambda_7^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \omega_{\mu,\nu} \omega_{\rho,\sigma\alpha\beta} + \Lambda_8^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \omega_{\mu,\nu\rho} \omega_{\sigma,\alpha\beta} \\
& + \Lambda_8^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} \omega_{\mu,\nu\rho\sigma\alpha} + \Lambda_{10}^{\mu\nu\rho\sigma\delta\tau} g_{\mu\nu,\rho\sigma\delta\tau} + (\dots)
\end{aligned} \tag{71}$$

Los (...) indican términos que contienen a  $g_{\mu\nu,\rho}$  y  $\Lambda_i^{\dots}$  son escalares concomitantes de  $g_{\mu\nu}$  y  $\omega_\mu$ . Aplicamos luego el teorema del reemplazo<sup>[34]</sup> lo que nos permite reemplazar a  $g_{\mu\nu,\rho}$  por cero, a las derivadas de  $g_{\mu\nu}$  por adecuadas simetrizaciones del tensor de curvatura y sus derivadas covariantes, y a las derivadas parciales de  $\omega$  por sus derivadas covariantes. Por otra parte, los  $\Lambda_i^{\dots}$  han sido calculados recientemente <sup>[35]</sup>.

Reemplazando todo esto en (71) y realizando y llevando a cabo cálculos semejantes a los del capítulo II obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = & a_1(\omega^\mu \omega_\mu)^2 + a_2(\omega^\mu{}_\mu)^2 + a_3 R^2 + a_4 \mathbf{R}^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} \\
& + a_5 \mathbf{R}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + a_6 \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu + a_7 R \omega^\mu{}_\mu + a_8 R \omega^\mu \omega_\mu \\
& + a_9 \omega^\mu{}_\mu \omega^\sigma \omega_\sigma + a_{10} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + a_{11} \omega^{\mu\nu} \omega^\mu \omega_\nu + a_{12} \square R \\
& + a_{13} R_{i\mu} \omega^\mu + a_{14} \mathbf{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + a_{15} \omega^\mu{}_\mu{}^\sigma{}_\sigma + a_{16} \omega^{\mu\sigma}{}_\mu \omega_\sigma \\
& + a_{17} \omega^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} + a_{18} \omega^\mu{}_\mu{}^\sigma \omega_\sigma
\end{aligned} \tag{72}$$

$\omega^{\mu\nu}{}_\rho$  significa  $\nabla_\rho \nabla^\nu \nabla^\mu \omega$

### III.6 Las propiedades de los concomitantes ante transformaciones anti-conformes

Necesitamos repetir ahora, en seis dimensiones, el programa que hemos presentado en la sección IV.4 para obtener –entonces en cuatro dimensiones– la expresión para  $\langle \varphi^2 \rangle^{ren}$ . Para ello debemos primero transformar conformemente a cada uno de los concomitantes hallados en la sección anterior. El resultado de ese tedioso pero sencillo cálculo es el siguiente:

$$(\tilde{\omega}^\mu \tilde{\omega}_\mu)^2 = \omega^{-12} (\omega^\mu \omega_\mu)^2$$

$$(\tilde{\omega}^\mu)_{;\mu}^2 = -\omega^{-4} \square \omega - (n-4) \omega^{-5} \omega_\mu \omega^\mu$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^2 &= \omega^{-4} R^2 + 4(n-1)^2 \omega^{-6} (\omega^\mu)_{;\mu}^2 + (n-1)^2 (n-4)^2 \omega^{-8} (\omega^\sigma \omega_\sigma)^2 - 4(n-1) \omega^{-5} R \omega^\mu_{;\mu} \\ &\quad - 2(n-1)(n-4) \omega^{-6} R \omega^\sigma \omega_\sigma + 4(n-1)^2 (n-4) \omega^{-7} \omega^\mu_{;\mu} \omega^\sigma \omega_\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} &= \omega^{-4} \mathbf{R}^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} - 2\omega^{-5} R \omega^\sigma_{;\sigma} - 2(n-2) \omega^{-5} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + 4(n-2) \omega^{-6} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad - 2(n-3) \omega^{-6} R \omega^\sigma \omega_\sigma + (n-2)^2 \omega^{-6} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - 4(n-2)^2 \omega^{-7} \omega^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad + (3n-4) \omega^{-6} (\omega^\sigma_{;\sigma})^2 + (4n^2 - 20n + 20) \omega^{-7} \omega^\sigma_{;\sigma} \omega^\mu_{;\mu} + (n^3 - 6n^2 + 13n - 8) \omega^{-8} (\omega^\sigma \omega_\sigma)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} &= C^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma} + 4(n-2)^{-1} \omega^{-2} \mathbf{R}^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} - 8\omega^{-5} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + 16\omega^{-6} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad - 4\omega^{-6} R \omega^\sigma \omega_\sigma + 4(n-2) \omega^{-6} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + 8(n-2)^{-1} \omega^{-6} (\omega^\sigma_{;\sigma})^2 - 16(n-2) \omega^{-7} \omega^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad + 16(n-3)(n-2)^{-1} \omega^{-7} \omega^\rho_{;\rho} \omega^\sigma_{;\sigma} - 2(n-1)^{-1} (n-2)^{-1} \omega^{-4} R^2 \\ &\quad - [2n^3 - 34n^2 + 128n - 144] (n-2)^{-1} \omega^{-8} (\omega^\sigma \omega_\sigma)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^\mu_{;\mu} \omega^\sigma_{;\sigma} &= -\omega^{-6} \omega^\mu_{;\mu} \omega^\sigma_{;\sigma} - 2(n-4) \omega^{-7} \omega^{\rho\sigma} \omega_{\rho\sigma} + 4\omega^{-7} (\omega^\alpha_{;\alpha})^2 - (n-10) \omega^{-7} \omega^\sigma \omega^\mu_{;\mu\sigma} \\ &\quad - 2(n-4) \omega^{-7} \omega_\sigma \omega^{\mu\sigma}_{;\mu} + (9n-48) \omega^{-8} \omega^\alpha_{;\alpha} \omega^\sigma \omega_\sigma - 2(n-4)(n-12) \omega^{-8} \omega^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad + 5(n-4)(n-8) \omega^{-9} (\omega^\sigma \omega_\sigma)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu} &= -\omega^{-6} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - \omega^{-7} R \omega^\sigma \omega_\sigma + (n-2) \omega^{-7} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \omega^{-7} (\omega^\sigma_{;\sigma})^2 + 4\omega^{-7} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu \\ &\quad - 6(n-2) \omega^{-8} \omega^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu + [(n-2) + (n-3) + (n-4)] \omega^{-8} \omega^\sigma \omega_\sigma \omega^\rho_{;\rho} \\ &\quad + [6(n-2) + (n-3)(n-4)] \omega^{-9} (\omega^\sigma \omega_\sigma)^2 \end{aligned}$$

$$\tilde{R}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_\mu \tilde{\omega}_\nu = \omega^{-8} \mathbf{R}^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu + (n-1) \omega^{-10} (\omega^\mu \omega_\mu)^2 - \omega^{-9} \omega^\sigma_{;\sigma} \omega^\mu \omega_\mu - (n-2) \omega^{-9} \omega^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} \tilde{\omega}^\mu_{;\mu} &= -\omega^{-6} R \omega^\mu_{;\mu} - (n-4) \omega^{-7} R \omega^\sigma \omega_\sigma + 2(n-1) \omega^{-7} (\omega^\sigma_{;\sigma})^2 + 3(n-1)(n-4) \omega^{-8} \omega^\sigma_{;\sigma} \omega^\rho_{;\rho} \\ &\quad + (n-1)(n-4)^2 \omega^{-9} (\omega^\sigma \omega_\sigma)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}\tilde{\omega}^\mu\tilde{\omega}_\mu &= \omega^{-8}R\omega^\mu\omega_\mu - 2(n-1)\omega^{-9}\omega^\rho\omega_\rho\omega^\mu_\mu - (n-1)(n-4)\omega^{-10}(\omega^\rho\omega_\rho)^2 \\
\tilde{\omega}^\mu_\mu\tilde{\omega}^\sigma\tilde{\omega}_\sigma &= -\omega^{-10}\omega^\mu_\mu\omega^\sigma\omega_\sigma - (n-4)\omega^{-11}(\omega^\rho\omega_\rho)^2 \\
\tilde{\omega}^{\mu\nu}\tilde{\omega}_{\mu\nu} &= \omega^{-8}\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - 8\omega^{-9}\omega^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu + 2\omega^{-9}\omega^\rho\omega_\rho\omega^\sigma\omega_\sigma + (n-8)\omega^{-10}(\omega^\sigma\omega_\sigma)^2 \\
\tilde{\omega}^{\mu\nu}\tilde{\omega}_\mu\tilde{\omega}_\nu &= -\omega^{-10}\omega^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu + 3\omega^{-11}(\omega^\sigma\omega_\sigma)^2 \\
\tilde{\square}\tilde{R} &= \omega^{-4}\square R - 2\omega^{-5}R\omega^\rho_\rho + (n-6)\omega^{-5}\omega^\mu R_{;\mu} - 2(n-1)\omega^{-5}\omega^\rho_\rho{}^\mu_\mu - 2(n-5)\omega^{-6}R\omega^\sigma\omega_\sigma \\
&\quad + 6(n-1)\omega^{-6}(\omega^\rho_\rho)^2 - 2(n^2-9n+8)\omega^{-6}\omega^\mu\omega^\rho_{\rho\mu} - 2(n-1)(n-4)\omega^{-6}\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \\
&\quad - 2(n-1)(n-4)\omega^{-6}\omega^{\mu\sigma}{}_\mu\omega_\sigma + 2(5n^2-31n+26)\omega^{-7}\omega^\rho_\rho\omega^\sigma\omega_\sigma \\
&\quad - 2(n-1)(n-4)(n-10)\omega^{-7}\omega^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu + 4(n-1)(n-4)(n-7)\omega^{-8}(\omega^\sigma\omega_\sigma)^2 \\
\tilde{R}^{i\mu}\tilde{\omega}_\mu &= -\omega^{-6}R^{i\mu}\omega_\mu + 2\omega^{-7}R\omega^\sigma\omega_\sigma + 2(n-1)\omega^{-7}\omega^\rho_\rho{}^\mu_\mu - 6(n-1)\omega^{-8}\omega^\sigma\omega_\sigma\omega^\rho_\rho \\
&\quad + 2(n-1)(n-4)\omega^{-8}\omega^{\sigma\mu}\omega_\sigma\omega_\mu - 4(n-1)(n-4)\omega^{-9}(\omega^\sigma\omega_\sigma)^2 \\
\tilde{\omega}^{\mu\sigma}{}_\mu\tilde{\omega}_\sigma &= \omega^{-8}\omega^{\mu\sigma}{}_\mu\omega_\sigma - 5\omega^{-9}\omega^\mu_\mu\omega^\sigma\omega_\sigma + (n-6)\omega^{-9}\omega^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu - (4n-19)\omega^{-10}(\omega^\mu\omega_\mu)^2 \\
\tilde{\omega}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= -\omega^{-8}\omega^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} - 2(n-6)\omega^{-7}\omega^\mu\omega^\nu_{\mu\nu} + 5\omega^{-7}\omega^\mu\omega^\nu_{\nu\mu} - (n-6)\omega^{-7}\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \\
&\quad + 5\omega^{-7}(\omega^\mu_\mu)^2 + 9(n-6)\omega^{-8}\omega^\mu_\mu\omega^\sigma\omega_\sigma - (n^2-21n+80)\omega^{-8}\omega^\mu\omega^\nu_{\mu\nu} \\
&\quad + (n-8)(4n-19)\omega^{-9}(\omega^\mu\omega_\mu)^2 \\
\tilde{\omega}^\mu_\mu{}^\sigma\tilde{\omega}_\sigma &= \omega^{-8}\omega^\mu_\mu{}^\sigma\omega_\sigma + 2(n-4)\omega^{-9}\omega^\mu\omega^\nu_{\mu\nu} - 4\omega^{-9}\omega^\mu_\mu\omega^\nu_{\nu\mu} - 5(n-4)\omega^{-10}(\omega^\mu\omega_\mu)^2
\end{aligned}$$

Imponiendo la condición de que una combinación lineal con coeficientes permitidos por la ec. (72) –por ejemplo un número por un coeficiente de  $\omega$ , vale decir  $A\omega^\alpha$ – debe ser antisimétrico con respecto a su correspondiente transformada conforme y también que la combinación lineal debe estar multiplicada por  $\omega^{2-n}$  para satisfacer la ec. (66), se obtiene una expresión como

$$\begin{aligned}
& a\omega^\mu{}_\mu{}^\sigma + b\omega^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} + c\omega^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu + d\omega^{\mu\nu}{}_\mu{}_\nu + e(\omega^\mu{}_\mu)^2 + f\omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_{\mu\nu} \\
& + g\omega^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu + h\omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\nu + jR\omega^\mu{}_\mu + k\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\omega{}_{\mu\nu} + lR_{;\mu}\omega^\mu \\
& + mR\omega^\mu{}_\omega{}_\mu + n\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\omega{}_\nu + p(\omega^\mu{}_\omega{}_\mu)^2 + q\Box R + sR^2 \\
& + t\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\mathbf{R}{}_{\mu\nu} + u[\mathbf{C}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{C}_{\mu\nu\rho\sigma} - 4(n-2)^{-1}\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\mathbf{R}{}_{\mu\nu} + 2(n-1)^{-1}(n-2)^{-1}R^2] \\
& = -\omega^{(2-n)}[-\omega^{\alpha-6}a\omega^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu - \dots - b\omega^{\beta-6}\omega^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} - \dots + c\omega^{\gamma-6}\omega^\mu{}_\mu{}^\nu{}_\nu + \dots \\
& + d\omega^{\delta-6}\omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\nu + \dots + e\omega^{\mu-6}(\omega^\mu{}_\mu^2 + \dots + f\omega^{\nu-6}\omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_{\mu\nu} + \dots \\
& - g\omega^{\rho-10}\omega^\sigma{}_\omega{}_\sigma\omega^\mu{}_\mu + \dots - h\omega^{\sigma-10}\omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\omega{}_\nu + \dots - j\omega^{\lambda-6}R\omega^\sigma{}_\sigma + k\omega^{\kappa-6}\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\omega{}_{\mu\nu} + \dots \\
& - l\omega^{\theta-6}R_{;\mu}\omega^\mu + \dots + m\omega^{\varphi-6}R\omega^\mu{}_\omega{}_\mu + \dots + n\omega^{\xi-6}\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\omega{}_\nu + \dots \\
& + p\omega^{\eta-12}(\omega^\mu{}_\omega{}_\mu)^2 + q\omega^{\psi-4}\Box R + \dots + s\omega^{\zeta-4}R^2 + \dots + t\omega^{\nu-4}\mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\mathbf{R}{}_{\mu\nu} + \dots \\
& + u\omega^{\chi}\mathbf{C}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{C}_{\mu\nu\rho\sigma} + \dots
\end{aligned} \tag{73}$$

Reuniendo a los coeficientes que multiplican a cada concomitante se obtiene el conjunto de ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes y los exponentes de  $\omega$ . Pero de su simple observación se ve que existen muchos posibles conjuntos de soluciones, por ejemplo:

$$\text{función } \mathcal{F} = g \omega^{14} [\omega^\mu{}_\mu{}^\sigma{}_\sigma + \frac{2}{3}\omega^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}] \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
\text{función } \mathcal{F} &= a \omega^{10} \omega^\mu{}_\mu{}^\sigma{}_\sigma + b\omega^{10} \omega^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} + [-2a - \frac{5}{2}b - 5l]\omega^9 \omega^\mu{}_\mu{}^\sigma{}_\sigma \omega_\sigma \\
& + [-2a + (n-6)b]\omega^9 \omega^\mu{}_\mu{}^\sigma{}_\sigma \omega_\sigma + [-2a - \frac{5}{2}b + \frac{3}{4}(n-6)b - 5j]\omega^9 (\Box\omega)^2 \\
& + [2a + \frac{7}{2}(n-6)b]\omega^9 \omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_{\mu\nu} + g \omega^{14} \omega^\mu{}_\mu{}^\sigma{}_\sigma \omega_\sigma + h \omega^{14} \omega^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\omega{}_\nu \\
& + j \omega^{10} R(\Box\omega) + k \omega^{10} \mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\omega{}_{\mu\nu} + l \omega^{10} R_{;\mu}\omega^\mu + 3(n-6)b \omega^9 \mathbf{R}^{\mu\nu}{}_\omega{}_\mu{}_\omega{}_\nu \tag{75} \\
& + [j - l - \frac{3}{4}(n-6)b] \omega^9 R\omega^\mu{}_\omega{}_\mu + (g - \frac{3}{2}h)\omega^{15}(\omega^\mu{}_\omega{}_\mu)^2 \\
& + [-3a + \frac{5}{2}b - \frac{65}{4}(n-6)b - 10l + 5j - 15k]\omega^{13}(\omega^\mu{}_\omega{}_\mu)^2 \\
& + [2a(n-6) + b(n-6)^2 - 4b(n-6) = 0]
\end{aligned}$$

donde hemos escrito en todos lados  $n=6$  conservando sólo explícitamente “n” donde aparece “(n-6)”.

Podríamos también haber admitido coeficientes del tipo  $A\omega^\alpha \ln \omega$ . Esto nos hubiera brindado otro conjunto de ecuaciones y su respectivo conjunto de soluciones. Más aún, podríamos pedir que los coeficientes fueran de otro tipo que  $A\omega^\alpha$  o  $A\omega^\alpha \ln \omega$ .

### III.7 Discusión

En este capítulo hemos encontrado el conjunto completo de concomitantes de la métrica, una función escalar y sus derivadas. No hemos impuesto arbitrariamente el orden de derivación admitido sino que éste ha resultado de consideraciones dimensionales. Luego hemos estudiado las propiedades de los concomitantes ante transformaciones conformes y anticonformes y hemos obtenido las ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes de sus combinaciones lineales. Hemos mostrado también posibles conjuntos de soluciones a estas ecuaciones.

Hemos encontrado que –aunque los coeficientes para la función  $\mathcal{F}^{(4)}$  que da los términos divergentes de  $\langle \varphi^2 \rangle$  en cuatro dimensiones pueden ser calculados en forma sencilla (sección IV.4)– ése no es el caso cuando el problema se plantea en seis dimensiones. La comparación con los resultados encontrados para distintos ejemplos particulares en la literatura [57,59] no permite elegir un conjunto de soluciones para los coeficientes que los determine completamente. Ésta es una primera aproximación al problema de encontrar una expresión única para  $\langle T^{\mu\nu} \rangle$  o  $\langle \varphi^2 \rangle$  aunque sus aplicaciones no son inmediatas debido a que encontrar vínculos sobre  $\langle T^{\mu\nu} \rangle$  y  $\langle \varphi^2 \rangle$  en cualquier geometría provenientes de otros requisitos físicos –como por ejemplo, el valor correcto para la anomalía de traza– involucran cálculos extremadamente largos.

## CAPITULO IV

# LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS Y LA IDENTIFICACIÓN ANTIPODAL

### III.1 Introducción

Las ecuaciones de Einstein que describen la evolución del campo gravitatorio son ecuaciones puramente diferenciales. Su resolución fija la geometría local pero no la topología global del espacio-tiempo (ET). Una variedad  $M$  dotada de una métrica  $g$  que satisfaga las ecuaciones de Einstein admite, en principio, que se le asocien distintas topologías. Sin embargo, salvo especificación contraria, toda la literatura se refiere a variedades de Hausdorff conexas, paracompactas  $C^\infty$  sin bordes. <sup>[60]</sup>. En variedades como éstas es que está desarrollada la teoría cuántica de campos (TQC) en el ET curvo. Sin embargo, es claro que aún en el caso más simple en el que de las ecuaciones para el campo gravitatorio resulta una variedad completamente plana (es decir, con tensor de Riemann nulo en todo el espacio) la topología no es necesariamente euclídea. Esto es sencillo de ver en un ejemplo en dos dimensiones: si se enrolla una hoja de papel para obtener un cilindro, la geometría sigue siendo localmente plana. No cambian las geodésicas que podíamos haber dibujado sobre la hoja antes de enrollarla ni las distancias entre sus puntos próximos. Sí habrá cambiado la geometría extrínseca: no es lo mismo un plano que un cilindro cuando los miramos como inmersos en la 3-geometría exterior. Pero los observadores que vivían sobre la superficie del papel no habrán notado cambios salvo los habitantes cercanos a los bordes ahora identificados. Toda la geometría que ellos ven es la misma, independiente de la topología. El único dato topológicamente interesante es la identificación de los puntos del plano que permite formar el cilindro.

¿Por qué nos interesa estudiar las consecuencias de los cambios de topología? En la búsqueda de explicaciones al problema de la cuantificación de la gravedad, se ha propuesto que las divergencias con que está plagada la teoría estén relacionadas con la posibilidad de que al acercarse a longitudes características del problema comparables con la longitud de Planck, las fluctuaciones de la geometría del ET revelen que la topología “en pequeño” no es la trivial. No se pueden descartar, por ejemplo, cambios en la conectividad del ET: cabe que lo que “mirado en grande” parezca simplemente conexo presente, a escala de Planck, manijas o cavidades de gusanos (*wormholes*) constantemente apareciendo y desapareciendo <sup>[61]</sup>. Wheeler sostiene como ejemplo que alguien que no haya oído jamás hablar de la electricidad podría predecir la existencia de la carga eléctrica y la ley de Coulomb con sólo admitir la posibilidad de que el espacio fuera múltiplemente conexo. Encontrándose luego con que la electricidad existe, esto sería tomado como una confirmación de la teoría. Wheeler sustenta con este ejemplo su propuesta de pensar a la topología como algo primordial, anterior –en cuanto a fundamental– a la geometría. El concepto de que la electricidad puede relacionarse con “líneas de fuerza atrapadas en espacios múltiplemente conexos” había sido propuesta por Weyl en 1924, antes de la MQ <sup>[62]</sup>. Luego la MQ predijo que las líneas de fuerza que tienen su origen en fluctuaciones del campo se enhebrarían en un *wormhole* de longitud característica  $L$  llevando un flujo del orden de

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{L^2} \cdot L^2 \sim (\hbar c)^{1/2}$$

Entonces, ¿por qué no pensar al espacio como algo que tiene una estructura agujereada, como una espuma, con cargas positivas y negativas de orden de

$$q \sim (\hbar c)^{1/2} \sim 10e^-$$

continuamente creándose y aniquilándose? Nada se ha dicho respecto de que estas cargas deban estar asociadas con partículas elementales, son previas a ellas. Más aún, las escalas de longitud relevantes para las fluctuaciones son veinte órdenes de magnitud menores que las dimensiones nucleares. Estas cargas estarían en todos lados y no sería necesario que estuvieran cuantificadas.

De igual forma que se puede predecir topológicamente la existencia de la carga eléctrica, se puede también predecir usando el concepto de *wormholes*, la inexistencia de monopolos magnéticos: sea  $B = \nabla \times A$  o, en lenguaje de formas,  $B = dA$ . Si se reviste la boca del *wormhole* con una superficie cerrada  $S$  provista de la topología de una 2-esfera, su borde  $\partial S$  es cero. Entonces, el polo magnético  $p$  asociado con esa boca está dado por la integral del flujo

$$4\pi p = \int_S B = \int_S dA = \int_{\partial S} A \equiv 0$$

Wheeler destaca con esto el carácter previo de la topología, anterior al concepto mismo de partícula, aunque ella no pueda explicar por qué las cargas están relacionadas con las partículas elementales ni por qué están cuantificadas. Sostiene que de haber admitido tácitamente que el concepto de espacio tiene sentido a distancias muy pequeñas se sigue tener que imaginar a la carga eléctrica como algo mágico e inexplicable y tener que asociarla con un punto en el espacio donde las ecuaciones de Maxwell no valen y la densidad de energía es infinita. Si en cambio pensamos en líneas de fuerza atrapadas en *wormholes*, la existencia de cargas y la inexistencia de monopolos son predicciones de la teoría. Su existencia e inexistencia respectivamente se convierten luego en una corroboración de que las fluctuaciones de la geometría son suficientemente importantes como para provocar cambios en la topología, si es que queremos seguir sosteniendo que el concepto mismo de geometría puede ser utilizado a distancias del orden de la longitud de Planck.

Cabe así esperar que los cambios en la topología producidos no ya sólo por las fluctuaciones de vacío del vector potencial electromagnético sino por las del tensor métrico mismo, brinden una guía para encarar las divergencias que aparecen en la gravedad cuántica y aún en los problemas relacionados con su misma explicación. En este sentido, Wheeler afirma que el hecho de que abandonar el postulado de que la topología es euclídea explique la existencia de la carga eléctrica y prohíba la de los monopolos magnéticos, le da razón para tomar seriamente predicciones para topologías no euclídeas a pequeña escala de colapsos y expansiones gravitatorias ocurriendo en todos lados y a cada instante <sup>[62]</sup>. Por todo lo dicho, pensamos que la necesidad de encontrar una interpretación coherente para la

gravedad cuántica y, más modestamente, para la TQC en el ET curvo sostiene la importancia de analizar topologías alternativas a la trivial que habitualmente se sobreentiende. Y la topología puede determinarse indicando cómo se han identificado ciertos puntos de la variedad.

La primer alternativa a la topología trivial que fuera tomada en cuenta es aquella relacionada con la modificación sólo de la topología de la hipersuperficie espacial. Es el caso en que se provee de contornos (espejos) al espacio, lo que modifica la parte espacial de la base de soluciones de frecuencias positivas y negativas de las ecuaciones de campo y el valor de la energía de vacío (efecto Casimir) <sup>[63,64]</sup>. Para estudiar una modificación más profunda de los resultados del caso euclídeo conviene modificar, en cambio, la topología global del ET.

En un lenguaje preciso, se dice que una variedad  $M'$  dotada de métrica  $g$  es localmente idéntica a la variedad  $M$  con métrica  $g$  pero con topología diferente al mirar su estructura a gran escala si  $M'$  se obtiene de  $M$  como el espacio cociente  $M' = M/\Gamma$  donde  $\Gamma$  es un grupo discreto de isometrías sin puntos fijos. O sea,  $M'$ —que resulta no singular— se obtiene a partir de su cubrimiento  $M$  identificando aquellos puntos que son equivalentes por las transformaciones que pertenecen al grupo  $\Gamma$ .

Para nuestro trabajo, nos interesa el grupo de las isometrías que identifican a las antípodas. Así, una transformación  $J$  con  $J \in \Gamma$ , será

$$J : P(x) \rightarrow P'(x')$$

La antípoda  $P'$  de un punto  $P$  se define como aquel punto  $P'$  cuyo cono de luz tiene intersección nula con el cono de luz de  $P$ . Fue Schrödinger el primero en proponer la idea de reunir o "pegar" a las antípodas para hacerlas representar al mismo evento y llamó interpretación elíptica a su propuesta. Recientemente se ha vuelto a esta vieja idea en la búsqueda de una mejor comprensión de la TQC en el ET curvo. Se han estudiado las consecuencias de la interpretación elíptica para la TQC en agujeros negros y en el espacio de de Sitter <sup>[65,66,67]</sup>. Aquí nos proponemos extender esa investigación estudiando las consecuencias de la identificación antipodal para la TQC en el ET de Rindler, lo que nos

permite comparar y dar una descripción general de la interpretación elíptica en espacios con y sin horizontes de eventos.

## IV.2 El espacio de Rindler y su extensión

Desde el descubrimiento realizado por S. Hawking <sup>[68]</sup> relativo a la evaporación de los agujeros negros se han investigado los efectos térmicos y las particularidades del estado de vacío no sólo en el ET curvo sino también para la TQC descrita desde sistemas de coordenadas no inerciales del ET de Minkowski <sup>[69,70,71,72]</sup>. Los resultados son bien conocidos: lo que un observador considera como estado fundamental en un sistema de referencia puede aparecer como un estado excitado en otro sistema; un estado puro en un sistema puede ser un estado mezcla en otro. El estudio de observadores no inerciales aborda un importante problema relativo a la vinculación entre la RG, para la cual la elección del sistema de coordenadas es completamente arbitraria, y la MQ, cuya formulación completa es sólo conocida en el espacio de Minkowski desde sistemas inerciales. El sistema de referencia no inercial más estudiado es el sistema de Rindler (observador uniformemente acelerado) que brinda un espectro de vacío puramente planckiano. Se acepta en general que la aparición de esa temperatura se debe a la existencia de horizontes de eventos para el observador acelerado.

La generalización del estudio del espacio de Rindler a sistemas de coordenadas con aceleraciones no uniformes puede hacerse a través de la adecuada definición de funciones analíticas de las coordenadas, luego de haber realizado una continuación analítica formal de la variable temporal del ET de Minkowski. Las relaciones entre la estructura del ET y los efectos térmicos se estudian entonces utilizando estas funciones, como así también se estudian utilizando esas funciones magnitudes tales como el número de partículas creadas, las densidades de energía y momento y todas las propiedades y cantidades relevantes de la TQC. En particular, la temperatura está relacionada con el mapa analítico <sup>[73]</sup> y nos referiremos a esas funciones en este mismo párrafo.

En primer lugar resumiremos las características de los sistemas acelerados <sup>[74]</sup>. El observador acelerado es muy importante porque es visualizable en forma sencilla y porque presenta analogías matemáticas y físicas con el diagrama de Krusal para la máxima extensión de la métrica de Schwarzschild <sup>[75]</sup>, métrica que describe adecuadamente el exterior de un agujero negro. Supongamos a un observador que viaja con movimiento acelerado por una región suficientemente alejada de cualquier fuente como para que pueda ser considerada plana. Para este observador, todo sucederá como si estuviera sometido a un campo gravitatorio, un campo gravitatorio muy especial, ya que en él sí pueden encontrarse sistemas de referencia preferenciales respecto de los cuales definir el estado de vacío, problema que -como es bien sabido- es fundamental en la TQC en el ET curvo. La descripción del movimiento de este observador puede hacerse respecto de un sistema inercial  $(t, x, y, z)$  (ET de Minkowski) o respecto del sistema de referencia comoviente que es, instante a instante, un sistema con tiempo propio  $t'$ . Supongamos que la aceleración respecto de ese sistema es constante y vale  $a$  y que elegimos los sistemas de coordenadas de tal forma que desde el sistema Minkowski las coordenadas  $y, z$  sean irrelevantes, por lo que haremos  $y = z = 0$ . Desde el sistema en reposo, la cuadrivelocidad  $v$  satisface  $v^2 = -1$  y, como la aceleración  $a$  es constante, se cumple que  $a \cdot v = 0$ . Entonces, en el sistema acelerado,  $a^0 = 0$  y  $a^i = d^2x^i/dt^2$ . Allí, las ecuaciones de movimiento del observador acelerado son:

$$\frac{dt}{dt'} = v^0 ; \quad \frac{dx}{dt'} = v^1 ; \quad \frac{dv^0}{dt'} = a^0 ; \quad \frac{dv^1}{dt'} = a^1$$

Usando

$$v_\mu v^\mu = -1 \quad a_\mu a^\mu = a^2$$

$$v^\mu a_\mu = -v^0 a_0 + v^1 a_1 = 0$$

se encuentra que

$$a^0 = \frac{dv^0}{dt'} = av^1 \quad a^1 = \frac{dv^1}{dt'} = av^0$$

y entonces

$$t = \frac{\exp(ax')}{a} \sinh(at') \quad x = \frac{\exp(ax')}{a} \cosh(at')$$

Es inmediato que  $-x^2 + t^2 = a^2$  por lo que las trayectorias del observador acelerado en el ET de Minkowski son hipérbolas. (Fig. I). Todo este tratamiento es coherente para sistemas realmente locales donde (en unidades de  $c = 1$ ) las distancias típicas sean mucho menores que  $a^{-1}$ . Pero aún cumpliendo con esta restricción, se ve de la figura ... que los observadores del cuadrante III no pueden enviar ni recibir señales de la cuña I, los de la cuña II no pueden enviar señales al observador en I y, en cambio, los de la IV no pueden recibir sus señales, siempre admitiendo la topología trivial. (En la sección IV.4 estudiaremos las consecuencias de los cambios en la topología que produce la identificación antipodal.)

Para definir sus coordenadas locales, observamos que cualquier punto del hiperplano  $\tau = \text{constante}$  se escribe

$$\mathbf{x} = x' e_1(\tau) + y' e_2(\tau) + z' e_3(\tau) + f(\tau)$$

Haciendo entonces  $t' = \tau$  primer coordenada,  $\{t', x', y', z'\}$  son las coordenadas relativas al observador acelerado.

Para generalizar el observador de Rindler a un observador con movimiento acelerado cualesquiera pueden utilizarse transformaciones analíticas <sup>[73]</sup> que permiten estudiar todas las propiedades de los observables de la teoría de campos en función de ellas, como se verá en IV.3. (La otra extensión posible, la del observador de Rindler a un observador uniformemente acelerado en un ET curvo cualquiera, fue realizada por Rindler <sup>[74]</sup> a través de una generalización de las características de la hipérbola regular del plano.) Supongamos, para simplificar por el momento la notación, que consideramos un ET de dos dimensiones. Sean  $(x, t)$  las coordenadas de Minkowski de este ET. Realizamos una continuación analítica de la variable  $t$  que la convierte en imaginaria:  $t \rightarrow i\tau$ . Luego buscamos las funciones reales analíticas

$$u = f(u') \tag{76}$$

que establecen un mapa entre los puntos  $u = x + i\tau$  del plano ahora euclídeo y los puntos  $u' = x' + i\tau'$  del plano transformado. Las transformaciones (76) son conformes

- Por ellas, las figuras pequeñas en un entorno de cierto punto  $u'_0$  del plano  $(x', \tau')$  se aplican en figuras también pequeñas y semejantes en el plano  $(x, \tau)$  y aumentan o reducen su área en un factor  $|f'(u'_0)|^2$ . Las distancias cortas en un entorno de  $u'_0$  en  $(x', \tau')$  se aumentan o reducen en  $|f'(u'_0)|$ .
- El argumento de la transformación  $arg f'(u'_0)$  indica el ángulo en que rota la figura.
- Los puntos para los cuales  $f'(u') = 0$  son los puntos críticos y la transformación no es conforme en ellos.

La métrica se escribe en las coordenadas sin primar de la siguiente forma:

$$ds^2 = dx^2 + d\tau^2$$

mientras que en las coordenadas primadas adopta la expresión:

$$ds^2 = |f'(u')|^2(dx'^2 + d\tau'^2)$$

Estas transformaciones nos dan toda la información sobre la estructura del ET:

- los puntos críticos reales de la transformación conforme determinan los horizontes de eventos en el ET de Minkowski. Esto es así porque las dos familias de líneas características  $x \pm t = cte = c$  se unen vía la euclideanización en los puntos  $(c, 0)$ . Vale decir, el eje real del plano euclídeo. En particular, las fronteras del cono de luz van a unirse en el origen.
- en el ET de Minkowski, el mapa  $x \pm t = f(x' \pm t')$  representa físicamente una transformación desde un sistema de referencia inercial  $(x, t)$  a uno acelerado  $(x', t')$ . El mapa define a  $x'$  y  $t'$  como funciones par e impar de  $t$ .
- los valores constantes de  $x'$  definen las líneas de universo de los observadores acelerados en el plano  $(x, t)$ . La velocidad de esos observadores es

$$v = \frac{f'(x' + t') - f'(x' - t')}{f'(x' + t') + f'(x' - t')}$$

y su aceleración propia está dada por

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda(x', t')}} \partial_{x'} \ln \Lambda(x', t')$$

con  $\Lambda(x', t') = f'(x' + t') \cdot f'(x' - t')$  y donde  $f'$  indica la derivada de  $f$  respecto de su argumento.

Estas transformaciones incluyen una clase muy grande de movimientos acelerados para el observador. El sistema de referencia de Rindler, en particular, se obtiene haciendo

$$f(u') = e^{\alpha u'} \quad (77)$$

que describe aceleración uniforme. Todas las transformaciones bilineales del grupo  $O(2,1)$ , o sea, las transformaciones que son combinación de traslaciones, rotaciones, dilataciones e inversiones,

$$f(u') = \frac{\alpha u' + \beta}{\gamma u' + \delta}$$

con  $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0$  siendo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  parámetros reales, describen aceleraciones uniformes. Pero mientras que la función (77) mapea el semieje  $Re u > 0$  sobre todo el eje  $u'$ , esto no es así para cualquier transformación bilineal. En los sistemas acelerados cuyos mapas analíticos no cubren todo el eje  $x'$  aparecen problemas relacionados con la hermiticidad de las ecuaciones de campo y con la completitud y ortogonalidad de sus bases de soluciones. Se puede ver que la cuantificación es posible en aquellos sistemas acelerados definidos por funciones analíticas que llevan en una correspondencia uno a uno a un intervalo  $[u_-, u_+] \in Re u$  en el eje real completo  $u'$ . En estas condiciones está garantizada la ortogonalidad y completitud de las soluciones de la ecuación de campo como así también que la ecuación de campo sea autoadjunta. Así, las funciones a las que nos referiremos cumplirán

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= u_+ \\ f(-\infty) &= u_- \end{aligned} \quad (78)$$

donde uno ó ambos  $u_+$  ó  $u_-$  pueden valer infinito. Para  $u_{\pm}$  finitos, la condición (78) implica que

$$[f'(u')]_{u'=\pm\infty} = 0 \quad (79)$$

o sea, los puntos críticos de  $f$  son los extremos del eje real  $u'$ . Un sistema acelerado definido a partir de las ecuaciones (76) y (78) cubre una región

$$u_- < |x \pm t| < u_+ \quad (80)$$

del espacio de Minkowski y  $u_-, u_+$  representan dos horizontes de eventos (los lados del rombo). Son las fronteras del dominio del ET en el cual las coordenadas  $(x', t')$  están definidas. Ningún evento que ocurra fuera de este dominio puede estar causalmente conectado con los observadores acelerados que están definidos por esas coordenadas. Haciendo uso de las transformaciones bilineales se puede modificar la posición y el número de horizontes. Por ejemplo, las transformaciones que tienen  $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma > 0$  y  $\delta/\gamma > 0$  llevan del sistema acelerado definido en el intervalo  $[0, \infty) \in Reu$  al sistema definido en el intervalo  $[\beta/\delta, \alpha/\gamma] \in Reu$ . Se puede ver que todos los marcos de referencia relacionados por las transformaciones del grupo  $O(2,1)$  tienen distinta aceleración pero definen el mismo espectro de vacío cuántico.

### IV.3 La teoría cuántica de campos en sistemas de referencia acelerados

Los efectos térmicos y la ambigüedad en la definición del estado de vacío no son características exclusivas del ET curvo. Estas mismas características propias de la arbitrariedad en la elección del sistema de coordenadas que se corresponde con la RG aparecen también cuando estudiamos la teoría de campos en el ET plano pero vista por observadores acelerados. Lo que un observador considera como estado de vacío (estado fundamental) es considerado, en general, como un estado excitado por otro observador. Resumimos aquí brevemente el caso en que el sistema acelerado es el de Rindler. Luego, el formalismo de las

transformaciones analíticas descrito en III.2 permitirá extender el estudio a una amplia clase de sistemas de referencia que incluyan al de Rindler como un caso particular.

Sean  $(t, x)$  las coordenadas de Minkowski en donde  $ds^2 = -dt^2 + dx^2$  y  $(\eta, \xi)$  las coordenadas de Rindler. Vale —como se ha dicho— que

$$t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\eta \quad -\infty < \xi, \eta < \infty$$

$$x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\eta \quad a = \text{cte}, a > 0$$

con  $ds^2 = e^{2a\xi}(-d\eta^2 + d\xi^2)$ . Si se consideran conjuntamente las cuñas derecha (R) e izquierda (L) accesibles cada una para observadores acelerados (siempre con topología trivial) se puede ver que  $dx^\mu/d\eta$  son vectores de Killing en toda la doble cuña y que las superficies  $\eta = \text{constante}$  son superficies de Cauchy ortogonales a las trayectorias de los observadores. Tenemos así un fluido de vectores de Killing —lo que sugiere una elección preferencial para el estado de vacío, el vacío que llamaremos de Rindler  $|0^R\rangle$  para distinguirlo de  $|0^M\rangle$ , el estado que considera como fundamental un observador inercial de Minkowski—. Considerando las dos cuñas R y L, el eje  $x$  del espacio plano es una superficie de Cauchy salvo en un punto también para el observador de Rindler. Con esto se tiene un punto de partida para resolver las ecuaciones de campo en el sistema acelerado. Sin embargo, la formulación e interpretación usuales de la MQ y de la TQC está realizada en sistemas inerciales. En ese contexto, el observador y sus instrumentos de medición son objetos clásicos ajenos que no son descritos por la TC. Se postula sólo que las magnitudes por ellos detectadas son los autovalores de los operadores del sistema cuántico. Pero si la TQC se estudia en sistemas acelerados, el estado de movimiento del observador aparece incluido en la teoría. Entonces, la interpretación de los resultados que él obtiene debe hacerse teniendo en cuenta también la descripción cuántica del propio observador. Unruh [72] ha estudiado detectores cuánticos para los sistemas uniformemente acelerados. Y este estudio ha sido extendido [76] para los observadores definidos por las transformaciones del grupo  $O(2,1)$ .

Aceptando entonces que las leyes de la MQ pueden ser usadas –con tal de cuidar adecuadamente la interpretación que se haga de los resultados– en sistemas de referencia descriptos por las transformaciones bilineales, describiremos muy brevemente la cuantificación de un campo escalar sin masa  $\varphi$  en los marcos de referencia no inerciales por estas transformaciones descriptos. Esto nos servirá de introducción con la que luego compararemos nuestros resultados obtenidos cambiando la originaria topología trivial que los sistemas acelerados suponen. Para el ejemplo continuaremos considerando dos dimensiones para el ET y mostraremos al final la extensión a cuatro dimensiones.

La ecuación que describe la evolución del campo  $\varphi$  es

$$\square\varphi = 0 \quad (81)$$

que, dado que está escrita en un ET de dos dimensiones, es invariante conforme y, en consecuencia, el conjunto completo de sus soluciones está dado, como en Minkowski, por la base  $\{\varphi_\lambda, \varphi_\lambda^*\}$  <sup>[41]</sup>

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(u') &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} e^{i\lambda u'} \\ \varphi_\lambda^*(v') &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} e^{-i\lambda v'} \end{aligned} \quad (82)$$

con  $u' = \xi - \eta$ ,  $v' = \xi + \eta$ ,  $\lambda > 0$ . La función de Green puede construirse a partir de ellas haciendo

$$G'(x_1, x_2) = \langle 0 | \varphi(x_1), \varphi(x_2) | 0 \rangle$$

donde  $\langle , \rangle$  indica el producto interno

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int \phi_1 [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu - \partial_\nu g^{\mu\nu} \sqrt{-g}] \phi_2 d\Sigma_\mu$$

y a partir de la función de Green se obtienen las cantidades físicamente relevantes  $\langle \varphi^2 \rangle$  y  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  (cfr. cap III).

La base  $\{\varphi_\lambda(u'), \varphi_\lambda^*(v')\}$  se corresponde con el vacío de Rindler. ¿Qué pasa cuando el observador de Rindler mide el número de partículas presentes en el vacío de Minkowski? Para el observador de Minkowski, la base es  $\{u_\gamma(u), u_\gamma^*(v)\}$  con

$$u_\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma}} e^{ikz - i\omega t} \quad \text{donde} \quad \gamma^2 = -\omega^2 + k^2$$

Para el observador de Rindler es necesario especificar soluciones para las cuñas derecha e izquierda. Así, la base  $\{\varphi_\lambda(u'), \varphi_\lambda^*(v')\}$  se escribe explícitamente como:

$$\varphi_\lambda^R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{ik\xi - i\omega\eta} & \text{en R} \\ 0 & \text{en L} \end{cases}$$

$$\varphi_\lambda^L = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{ik\xi + i\omega\eta} & \text{en L} \\ 0 & \text{en R} \end{cases}$$

y  $\lambda^2 = -\omega^2 + k^2$ . Se ve que  $\eta$  es un “buen tiempo” en la cuña R y  $-\eta$  lo es en la L. Los operadores de creación y destrucción que con esta base sean definidos cumplirán

$$a_\lambda^R |0^R\rangle = a_\lambda^L |0^R\rangle = 0$$

El operador número de partículas que construye el observador de Rindler es  $N_\lambda^R = a_\lambda^\dagger a_\lambda$  y, evaluado en el vacío de Minkowski, resulta que

$$\langle 0^M | N^R | 0^M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}$$

O sea, los observadores de Rindler ven partículas en el estado de vacío de Minkowski. Es más, ven un espectro térmico (llamado así porque no puede ser desarrollado en potencias de  $\omega$  alrededor de  $\omega = \infty$ ) con una temperatura  $T = a/2\pi k_{\text{Boltzmann}}$ .

El observador de Rindler no es, sin embargo, más que un ejemplo sencillo. Con las transformaciones (78) definidas en el párrafo anterior, el operador  $N_\lambda$  puede ser generalizado y -utilizando los coeficientes de la transformación de Bogoliubov que cambia de la base de Minkowski a la base acelerada- pueden calcularse la densidad de energía y de momento que mide el observador acelerado en función de las transformaciones analíticas [73].

Los ET de dos dimensiones en los que hasta aquí hemos resumido el formalismo pueden ser considerados como inmersos en un ET de cuatro dimensiones  $M$ . Si  $M$  admite dos campos de vectores de Killing, estas variedades de dos dimensiones pueden pensarse como fibras de  $M$ , considerado  $M$  como un espacio fibrado adecuado. Esto permite obtener extensiones analíticas maximales en las que valen los mapas (76) con las condiciones de contorno (78) <sup>[73]</sup> y todo el formalismo vale.

Hemos descripto hasta aquí qué sucede a los observadores acelerados en el espacio de Minkowski suponiendo que la topología es la trivial. En nuestro trabajo, cambiaremos la topología realizando identificaciones antipodales (con y sin singularidad cónica). Utilizaremos transformaciones conformes para describir a los observadores acelerados y ejemplificaremos con el ET de Rindler cuando corresponda.

#### IV.4 El observador acelerado y la identificación antipodal

Vamos a considerar ahora a un conjunto amplio de sistemas no inerciales haciendo uso de las herramientas previamente descriptas. Sean, pues, los observadores acelerados que se mueven en el ET de Minkowski descriptos por la familia de funciones analíticas

$$u = f(u') \quad (83)$$

Las coordenadas de Minkowski son aquí  $(t, x, y, z)$ . Elegimos el eje  $x$  paralelo a la aceleración y definimos las coordenadas minkowskianas nulas en el plano  $t - x$

$$u = x - t \quad (84)$$

$$v = x + t \quad (85)$$

Cada observador acelerado está descripto por las coordenadas  $(t' = \eta, x' = \xi, y', z')$  y por las coordenadas nulas

$$u' = \xi - \eta \quad (86)$$

$$v' = \xi + \eta \quad (87)$$

Con esto, la ecuación (83) se escribe

$$x + t = f(\xi + \eta)$$

$$x - t = g(\xi - \eta)$$

y el sistema de referencia de Rindler se obtiene como un caso particular haciendo  $u = e^{\alpha u'}$  y  $f = g$ .

Nos interesan las transformaciones monótonas que llevan el intervalo  $u_- \leq u \leq u_+$  del eje real  $u$  en el eje real  $u'$  completo. Para ellos, la función  $f(u')$  cumple

$$f(-\infty) = u_- \quad (88)$$

$$f(+\infty) = u_+ \quad (89)$$

Para distintos valores de  $u_-$ ,  $u_+$  reconocemos distintos casos:

- i) Si  $u_- = 0$ ,  $u_+ = +\infty$ , se cubre la cuña derecha del ET de Minkowski y tenemos un solo horizonte.
- ii) Si  $u_+ = +\infty$  y  $u_- = -\infty$ , no hay horizontes.
- iii) Si  $u_- = a$  y  $u_+ = b$  con  $-\infty < a < b < \infty$ , tenemos dos horizontes.

Vamos a estudiar primero las consecuencias de aplicar la transformación antipodal  $J$  en el caso de sistemas acelerados pero no rotantes

$$J : (u, v, y, z) \rightarrow (-u, -v, -z, -y) \quad (90)$$

que no tiene singularidad cónica para el observador de Rindler y de la transformación  $J_0$  -también para sistemas no rotantes-

$$J_0 : (u, v, y, z) \rightarrow (-u, -v, -y, -z) \quad (91)$$

que es una reflexión en la cual las coordenadas  $y, z$  no van a sus antípodas sino sólo  $(u, v)$  y, en consecuencia, tiene una singularidad en el origen  $u = v = 0$ . Otro tanto haremos luego para observadores rotantes:

$$J_R : (u, v, \theta, \varphi) \rightarrow (-u, -v, \pi - \theta, \pi + \varphi) \quad (92)$$

$$J_{R_\Omega} : (u, v, \theta, \varphi) \rightarrow (-u, -v, \theta, \varphi) \quad (93)$$

Para estas dos últimas transformaciones se entiende que

$$u = r - t = e^{r' - t'} \quad (94)$$

$$v = r + t = e^{r' + t'} \quad (95)$$

$$\theta = \theta' \quad (96)$$

$$\varphi = \varphi' - \Omega t' \quad (97)$$

donde  $(r, \theta, \varphi)$  son coordenadas esféricas y  $\Omega = \text{cte}$  es el parámetro de la rotación.

Contrariamente a lo que sucede con la variedad de Schwarzschild-Kruskal, el espacio de Rindler no es esféricamente simétrico. Si se exige la condición de simetría esférica no puede mantenerse la condición de estacionario ( $\Omega = \text{cte}$ ). Pero la variedad esféricamente simétrica que se obtiene a partir de las transformaciones del párrafo anterior –que no tiene aceleración uniforme– se convierte en Rindler en las regiones asintóticas, vale decir, en el horizonte o en el infinito.

#### IV.5 El campo escalar en el espacio de Rindler con identificación antipodal

La ecuación para el campo escalar  $\varphi$  de masa  $m$

$$(\square - m^2)\varphi = 0 \quad (98)$$

en un sistema acelerado puede escribirse

$$[-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2 + \Lambda(\partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2 - m^2)]\varphi = 0 \quad (99)$$

$\Lambda$  ya fue definido en la sección III.3 y, para el caso de Rindler vale  $\Lambda = l^2 \alpha^2 e^{2\alpha\xi}$ . Haciendo la sustitución

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} e^{i(\lambda_2 y' + \lambda_3 z')} \phi(\xi, \eta) \quad -\infty \leq \lambda_2, \lambda_3 \leq \infty \quad (100)$$

se ve que se separan variables y se obtiene

$$[-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2 - \Lambda M^2]\phi(\xi, \eta) = 0$$

$$M^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + m^2 \quad (101)$$

La ecuación (101) debe resolverse para cada una de las distintas condiciones de contorno: uno, dos o ningún horizonte de eventos, mencionadas en i), ii), iii) del párrafo anterior.

Nos ocuparemos principalmente del caso en que hay un solo horizonte  $u_- = 0, u_+ = +\infty$  (los otros se obtienen de forma análoga). Para este caso, la masa efectiva  $\Lambda M^2$  de la ecuación (101) vale cero en el horizonte y vale infinito en el infinito. Una base “entrante” (“*in*”) completa que sea solución de la ecuación (101) satisface [ver ec. (82)]

$$\lim_{v' \rightarrow -\infty} \phi_{\lambda_1}^{in} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_1}} e^{i\lambda_1 u'} \quad (102)$$

$$\lim_{u' \rightarrow +\infty} \phi_{\lambda_1}^{in} = 0 \quad (103)$$

Con estas condiciones de contorno, encontramos que la solución total (100) está dada por

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{2\pi} e^{i(\lambda_2 y' + \lambda_3 z')} \phi_{\lambda_1}(\xi, \eta) \quad (104)$$

donde

$$\phi_{\lambda_1}(\xi, \eta) = \frac{(lM/2)^{-i\lambda_1/\alpha} e^{-i\lambda_1 t}}{\sqrt{\pi\lambda_1} \Gamma(-i\lambda_1/\alpha)} K_{-i\lambda_1/\alpha}(lMe^{\alpha t}) \quad (105)$$

siendo  $K_\nu$  una función de Bessel modificada.

Obtenidas las soluciones de las ecuaciones de campo en el ET con topología trivial, consideremos ahora a los campos en el ET con puntos identificados, que sea simétrico o antisimétrico por la acción del operador de identificación antipodal. Para esto definimos

$$\varphi_{JS,JA} = \frac{1}{2}[\varphi(\mathbf{x}) \pm \varphi(J\mathbf{x})] \quad (106)$$

Así, haciendo la identificación  $J$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{JS,JA}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2} [S e^{i(\lambda_2 v + \lambda_3 z)} e^{i\lambda_1/2(v-u)} K_{i\frac{\lambda_1}{\alpha}}(lMe^{\frac{\alpha}{2}(u+v)}) \\ & \pm S e^{-i(\lambda_2 v + \lambda_3 z)} e^{i\lambda_1/2(v-u)} K_{-i\frac{\lambda_1}{\alpha}}(lMe^{-\frac{\alpha}{2}(u+v)})] \end{aligned} \quad (107)$$

donde  $S$  vale

$$S = \frac{(lM/2)^{-i\lambda_1/\alpha}}{\sqrt{\pi\lambda_1} \Gamma(-i\lambda_1/\alpha)}$$

y hemos dejado de usar las “primas” ya que no cabe confusión.

Si la identificación se hace en cambio via la transformación  $J_0$ , los resultados que se obtienen para el campo con comportamiento simétrico o antisimétrico ante la identificación son

$$\begin{aligned} \varphi_{(J_0S, J_0A)}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2} [S e^{i(\lambda_2 v + \lambda_3 z)} e^{-i\frac{\lambda_1}{2}(v-u)} K_{-i\lambda_1/\alpha}(lMe^{-\frac{\alpha}{2}(u+v)}) \\ & \pm S e^{-i(\lambda_2 + \lambda_3 z)} e^{i\frac{\lambda_1}{2}(v-u)} K_{-i\lambda_1/\alpha}(lMe^{-\frac{\alpha}{2}(u+v)})] \end{aligned} \quad (108)$$

Hemos así obtenido los conjuntos de soluciones para la ecuación de campo que corresponden a los cambios de topología propuestos. El cálculo de la norma de estas soluciones usando el producto habitual de Klein-Gordon da cero.

#### IV.6 Las funciones de Green y sus propiedades ante la identificación

En este párrafo analizaremos las propiedades euclídeas (o sea, habiendo extendido el tiempo a una variable imaginaria) de las funciones de Green bajo la acción de la identificación antipodal. Los valores medios serán obtenidos en una base sin las simetrías de identificación. Esto no trae problemas ya que las simetrías de la teoría (en este caso, la identificación de las antípodas) no tienen por qué ser compartidas por la base de Fock. Mostraremos que las nuevas funciones de Green tienen el mismo período  $\beta = 2\pi/\alpha$  que las funciones de Green para observadores de Rindler ordinarios, o sea. sin identificar las antípodas ( $\alpha$  es en este caso la aceleración constante del observador de Rindler). Esta propiedad resulta así –tanto para la transformación J como para la  $J_0$ – a pesar de que en la variedad de Rindler el tiempo imaginario es periódico en  $\beta/2$  y no en  $\beta$ . Esto diferencia las propiedades de la identificación en las variedades de Rindler y de Schwarzschild-Kruskal: en esta última, la función de Green euclídea que se obtiene al hacer la identificación a través de la transformación  $J_0$  resulta ser periódica en  $\beta/2$  igual que el tiempo imaginario [65]. Por último, mostraremos en este párrafo nuevas propiedades encontradas para las funciones de Green en la variedad de Rindler con antípodas identificadas que no se satisfacen en el caso ordinario.

La función de Green  $G(x_1, x_2) = \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle$  para el campo escalar en el ET de Minkowski se escribe en función de las transformaciones  $f, g$  y de las coordenadas  $y, z$  (para  $m=0$ ) como

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta g + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\Delta} \quad (109)$$

$\langle \rangle$  es el valor de expectación de vacío del espacio de Fock ordinario y

$$\Delta f \cdot \Delta g = (f_1 - f_2)(g_1 - g_2)$$

$$\Delta y = y_1 - y_2$$

$$\Delta z = z_1 - z_2$$

La forma que adoptan las funciones de Green simétrica y antisimétrica ante el cambio de topología producido por las transformaciones J (y también J<sub>o</sub>) es:

$$G_{JS,JA}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [G(x_1, x_2) \pm G(Jx_1, x_2) \pm G(x_1, Jx_2) + G(Jx_1, Jx_2)] \quad (110)$$

que, en términos de las coordenadas de Rindler, pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{\alpha(\xi_1 + \xi_2)} [\cosh \alpha \Delta \xi - \cosh \alpha \Delta \eta] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\ G(Jx_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{-\alpha \Delta \xi} [\cosh \alpha (\xi_1 + \xi_2) - \cosh \alpha (\eta_1 + \eta_2)] + (z_1 + y_2)^2 + (y_1 + z_2)^2} \\ G(x_1, Jx_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{\alpha \Delta \xi} [\cosh \alpha (\xi_1 + \xi_2) - \cosh \alpha (\eta_1 + \eta_2)] + (y_1 + z_2)^2 + (z_1 + y_2)^2} \\ G(Jx_1, Jx_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{-\alpha(\xi_1 + \xi_2)} [\cosh \alpha \Delta \xi - \cosh \alpha \Delta \eta] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \end{aligned}$$

recordando que

$$\begin{aligned} u &= f(u') = f(x' - t') = l e^{\alpha u'} = l e^{\alpha(\xi - \eta)} \\ v &= g(v') = g(x' + t') = l e^{\alpha v'} = l e^{\alpha(\xi + \eta)} \end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$\Delta \xi = \xi_1 - \xi_2 \quad \Delta \eta = \eta_1 - \eta_2$$

Entonces, en total,

$$\begin{aligned} G_{JS}(x_1, x_2) &= [(2B + 2A \cosh \alpha \Delta \xi)(C^2 + D^2 + 2CD \cosh \alpha \Delta \xi) \\ &\quad + (2D + 2C \cosh \alpha \Delta \xi)(A^2 + B^2 + 2AB \cosh \alpha \Delta \xi)] \\ &\quad \times \frac{1/8\pi^2}{(A^2 + B^2 + 2AB \cosh \alpha \Delta \xi)(C^2 + D^2 + 2CD \cosh \alpha \Delta \xi)} \end{aligned} \quad (111)$$

donde

$$A(\xi, \eta) = 2l^2 [\cosh \alpha \Delta \xi - \cosh \alpha \Delta \eta]$$

$$B(y, z) = (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$$C(\xi, \eta) = 2l^2 [\cosh \alpha (\xi_1 + \xi_2) - \cosh \alpha (\eta_1 + \eta_2)]$$

$$D(y, z) = (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2.$$

En el caso en que la transformación realizada sea  $J_0$  (ecuación (91)), la función de Green es análoga a la de ec. (110) y los correspondientes resultados en coordenadas de Rindler son:

$$G(J_0 x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{-\alpha\Delta\xi} [\cosh \alpha(\xi_1 + \xi_2) - \cosh \alpha(\eta_1 + \eta_2)] + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$$

$$G(x_1 J_0 x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{\alpha\Delta\xi} [\cosh \alpha(\xi_1 + \xi_2) - \cosh \alpha(\eta_1 + \eta_2) + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2]}$$

$$G(J_0 x_1 J_0 x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2l^2 e^{-\alpha(\xi_1 + \xi_2)} [\cosh \alpha\Delta\xi - \cosh \alpha\Delta\eta] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Con esto, la función de Green con identificación  $J_0$  resulta

$$G_{J_0}(x_1, x_2) = [(2l^2 e^{-\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{-\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N) \\ + (2l^2 e^{\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N)(2l^2 e^{\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{-\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N) \\ + (2l^2 e^{\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N)(2l^2 e^{-\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{-\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N) \\ + (2l^2 e^{\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N)(2l^2 e^{-\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{\alpha\Delta\xi} H + K)] \\ \times \frac{1/8\pi^2}{(2l^2 e^{\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N)(2l^2 e^{-\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{\alpha\Delta\xi} H + K)(2l^2 e^{-\alpha(\xi_1 + \xi_2)} F + N)}$$

con

$$F = \cosh \alpha\Delta\xi - \cosh \alpha\Delta\eta$$

$$N = (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$$H = \cosh \alpha(\xi_1 + \xi_2) - \cosh \alpha(\eta_1 + \eta_2)$$

$$K = (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2$$

Como es habitual, estudiamos las propiedades térmicas de las funciones de Green en tiempo euclídeo:  $\eta \rightarrow i\tau$ . La versión euclídea de las transformaciones  $J$  y  $J_0$  dadas por las ecuaciones (90) y (91) es:

$$J : (-\xi, \tau, y, z) \rightarrow (-\xi, \tau + \frac{i\beta}{2}, -z, -y)$$

$$J_o : (-\xi, \tau, y, z) \rightarrow (-\xi, \tau + \frac{i\beta}{2}, y, z)$$

donde  $\beta = 2\pi/\alpha$ . La función de Green ordinaria, dada por la ecuación (109) , no cambia si hacemos

$$\tau \rightarrow \tau + i\beta$$

Lo mismo sucede con  $G_{JS}$  y  $G_{JA}$ :

$$G_{JS,JA}(\xi, \eta_1, \eta_2 + i\beta, y, z) = G_{JS,JA}(\xi, \eta_1, \eta_2, y, z) \quad (112)$$

pero es sencillo ver que las funciones de Green hecha ya la identificación antipodal no son periódicas con período  $\beta/2$

$$G_{JS,JA}(\xi, \eta_1, \eta_2 + i\beta/2, y, z) \neq G_{JS,JA}(\xi, \eta_1, \eta_2, y, z)$$

Esta misma propiedad (112) vale para las funciones de Green simétrica y antisimétrica por la transformación  $J_o$ . Entonces, a pesar del hecho de que en la variedad en que se ha efectuado la identificación ( $J$  ó  $J_o$ ) el tiempo euclídeo  $\tau$  es periódico en  $\beta/2$ , las funciones de Green  $G_{JS,JA}$  (ó  $G_{J_oS, J_oA}$ ) son periódicas en  $\beta$ . Esto contrasta con lo que ocurre en la variedad de Schwarzschild-Kruskal en la cual  $G_{J_oS, J_oA}$  son periódicas en  $\beta/2$ . Esta es la propiedad más relevante de las funciones de Green en el espacio cociente y está relacionada con la falta de simetría esférica en la variedad de Rindler. Volveremos sobre este tema en IV.10.

Hemos encontrado también que las funciones de Green, aunque

$$G[(x_1, x_2), \alpha] \neq G[(x_1, x_2), -\alpha],$$

satisfacen que

$$G[(x_1, x_2), \alpha] = G[(Jx_1, Jx_2), -\alpha]$$

y

$$G[(Jx_1, x_2), \alpha] = G[(x_1, Jx_2), -\alpha].$$

Entonces, en total:

$$G_{JS,JA}[(x_1, x_2), \alpha] = G_{JS,JA}[(x_1, x_2), -\alpha]$$

Sólo en el espacio de Rindler con identificación antipodal no hay distinción entre las aceleraciones  $\alpha$  y  $-\alpha$ .

#### IV.7 Comportamiento del tensor de energía-momento ante la identificación antipodal

Las funciones de Green en la variedad sobre la que se ha llevado a cabo la identificación antipodal que estudiamos en el párrafo anterior, nos permiten evaluar la densidad de energía para esos casos. En efecto, el valor de expectación de vacío de la componente 00 del tensor de energía-impulso es

$$\langle T_{00} \rangle_{JS,JA} = \Lambda \lim_{1 \rightarrow 2} \mathcal{D}_{1,2} G_{JS,JA}(x_1, x_2) \quad (113)$$

donde el operador  $\mathcal{D}_{1,2}$  actuando sobre  $G(x_1, x_2)$  está dado por:

$$\mathcal{D}_{1,2} G(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\Delta^3 \pi^2} [f'_1 f'_2 (\Delta g)^2 + g'_1 g'_2 (\Delta f)^2] + \frac{\Lambda}{\pi \Delta^3} \left( \frac{\Delta}{2} - [(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \right) \quad (114)$$

$\Delta, \Delta f, \Delta g, \Delta y, \Delta z$  significan lo mismo que en la ecuación (109),  $\Lambda$  vale  $l^2 \alpha^2 e^{2\alpha \xi}$  para el observador de Rindler y, en general,

$$\Lambda = f' \cdot g'$$

$f', g'$  indican las derivadas primeras de estas funciones respecto de sus argumentos y los subíndices 1,2 señalan en qué punto de la variedad deben ser evaluadas. La expresión (114) se hace divergente al tomar el límite en que el punto 1 tiende al punto 2 pero nos interesa obviamente calcular su parte finita. Para ello, tomamos primero  $\Delta y \rightarrow 0$  y  $\Delta z \rightarrow 0$ . Así obtenemos

$$\lim_{1 \rightarrow 2} \mathcal{D}_{1,2} G(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\Delta f \Delta g} \left[ \frac{f'_1 f'_2}{(\Delta f)^2} + \frac{g'_1 g'_2}{(\Delta g)^2} \right] + \frac{\Lambda}{2\pi} \frac{1}{(\Delta f)^2 (\Delta g)^2} \quad (115)$$

Si hacemos actuar ahora al operador  $\mathcal{D}_{1,2}$  sobre  $G(\mathbf{Jx}_1, \mathbf{x}_2)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{12}G(\mathbf{Jx}_1, \mathbf{x}_2) &= \frac{1}{4\pi^2} (2l^2 f_1' f_2' f_1^{-2} \left\{ \frac{l^2}{g_1} - g_2 \right\}^2 + 2l^2 g_1' g_2' g_1^{-2} \left\{ \frac{l^2}{f_1} - f_2 \right\}^2 \\ &\quad + 2\Lambda[(z_1 + y_2)(y_1 + z_2)]) \frac{1}{\left[ \left( \frac{l^2}{f_1} - f_2 \right) \left( \frac{l^2}{g_1} - g_2 \right) + (z_1 + y_2)^2 + (y_1 + z_2)^2 \right]^3} \end{aligned} \quad (116)$$

Haciendo otro tanto con  $\mathcal{D}_{1,2}G(\mathbf{x}_1, \mathbf{Jx}_2)$  y luego tomamos el límite completo en los dos casos para  $1 \rightarrow 2$ , obtenemos que la contribución de estos dos términos es finita y vale

$$\begin{aligned} \lim_{1 \rightarrow 2} \mathcal{D}_{12}G(\mathbf{Jx}_1, \mathbf{Jx}_2) &= \lim_{1 \rightarrow 2} \mathcal{D}_{12}G(\mathbf{x}_1, \mathbf{Jx}_2) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} [2l^2 f_2'^2 f_2^{-2} g_2^{-2} (l^2 - g_2^2)^2 + 2l^2 g_2^2 f_2^{-2} g_2^{-2} (l^2 - f_2^2)^2 \\ &\quad + 8\Lambda(z_2 + y_2)^2] \frac{1}{\left[ \frac{1}{f_2 g_2} (l^2 - f_2^2)(l^2 - g_2^2) + 2(z_2 + y_2)^2 \right]^3} \end{aligned} \quad (117)$$

Para los restantes términos tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{12}G(\mathbf{Jx}_1, \mathbf{Jx}_2) &= \frac{1}{4\pi^2} [-f_1' f_2' f_1^{-2} f_2^{-2} l^8 (g_1^{-1} - g_2^{-2})^2 - l^2 g_1' g_2' g_1^{-2} g_2^{-2} (f_1^{-1} - f_2^{-2})^2 \\ &\quad - 4\Lambda(\Delta^2 y + \Delta^2 z)] \times \frac{1}{\left[ l^4 f_1^{-1} f_2^{-2} (g_1^{-1} - g_2^{-1} + \Delta^2 y + \Delta^2 z) \right]^3} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \frac{2\Delta}{\left[ l^4 (f_1^{-1} - f_2^{-1})(g_1^{-1} - g_2^{-1}) + \Delta^2 y + \Delta^2 z \right]^2} \end{aligned} \quad (118)$$

Así, quitando las divergencias con el mismo procedimiento que el usado en [77], la parte finita de  $\langle T_{00} \rangle_{\mathbf{JS}, \mathbf{JA}}$  resulta:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{\mathbf{JS}, \mathbf{JA}} &= \Lambda \lim_{1 \rightarrow 2} \mathcal{D}_{12}G_{\mathbf{JS}, \mathbf{JA}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \langle T_{00} \rangle + \frac{f^2 g^2}{4l^4} \langle T_{00} \rangle + \Lambda \left[ \frac{f^2 g^2}{2\pi l^4} (E \cdot H) \pm \frac{l^2}{\pi^2} \frac{L}{M} \right] \end{aligned} \quad (119)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} [(a \frac{\tilde{B}}{2}) \tilde{B} + (b - \frac{\tilde{C}}{2}) A + (C - \tilde{D})] \\ a &= \frac{1}{6} \left[ \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 \right] \quad b = \frac{1}{(12)^2} \left[ \frac{f'''}{f'} - 4 \frac{f'' f'''}{f_2^2} + 9 \left( \frac{f''}{f'} \right)^3 \right] \\ c &= \frac{1}{676} \left( \frac{f^V}{f'} - 3 \frac{f'' f^{IV}}{f_2^2} + 2l \left( \frac{f''^2}{f'} \left( \frac{f'''}{f'} \right) - \left( \frac{f'''}{f'} \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{B} = A^2 - B; \quad \tilde{C} = 2AB - C; \quad \tilde{D} = B^2 - 2AC - D$$

$$A = \frac{1}{2} \left[ \frac{g''}{g'} - \frac{f''}{f'} \right] \quad B = \frac{1}{6} \left[ \frac{g'''}{g''} + \frac{f'''}{f''} - \frac{3}{2} \frac{f'' g''}{f' g'} \right]$$

$$C = \frac{1}{124} \left[ \frac{g^{IV}}{g^3} - \frac{f^{IV}}{f^3} - 2 \left( \frac{f'' g'''}{f' g''} - \frac{g'' f'''}{g' f''} \right) \right]$$

$$D = \frac{1}{120} \left[ \left( \frac{g^V}{g^4} + \frac{f^V}{f^4} - \frac{5}{2} \left( \frac{f^{IV}}{f^3} - \frac{g^{IV}}{g^3} \right) \left( \frac{f''}{f'} - \frac{g''}{g'} \right) + \frac{10}{3} \frac{f'' g'''}{f' g''} \right) \right]$$

$$E = \frac{1}{f' g'^4} [f'^2 g g'' + f f'' g'^2 + g'^2 f'^2 + f g f'' g'']$$

$$H = \frac{1}{8} \frac{f'' g''}{f' g'^2} \quad L = \frac{f'^2}{f^2} - \frac{g'^2}{g^2} + 8\Lambda(y^2 + z^2)^2$$

$$M = [f g + 2(y + z)^2]^3$$

Podemos ver entonces que al valor de  $\langle T_{00} \rangle$  sin identificación antipodal se le agregan nuevos términos que dependen para cada clase de observador de sus respectivos mapas analíticos  $f$  y  $g$ . En el caso particular del observador de Rindler ( $f = l e^{\alpha u}$ ;  $g = l e^{\alpha v}$ ) para el que la densidad de energía que corresponde a un espectro planckiano con temperatura  $T = \alpha/2\pi$  es

$$\langle T_{00} \rangle = \frac{\pi^2 T^4}{30}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{\text{JS,JA}}^{\text{Rindler}} &= \langle T_{00} \rangle + \langle \tilde{T}_{00} \rangle \\ &= \frac{\pi^2 T^4}{30} + \pi^2 T^4 e^{4\alpha\xi} \left[ \frac{1}{120} + 3\Lambda e^{3\alpha\xi} \pm \frac{128(y+z)^2}{[e^{2\alpha\xi} + 2l^{-2}(y+z)^2]^3} \right] \end{aligned} \quad (120)$$

El valor de  $\langle T_{00} \rangle_{\text{JS,JA}}$  también puede ser calculado mediante un procedimiento análogo, resultando, en el caso en que  $f, g$  corresponden a un observador de Rindler, que

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{\text{JS,JA}} &= \langle T_{00} \rangle + \frac{e^{4\alpha\xi}}{4} \langle T_{00} \rangle + \frac{\alpha^4}{16\pi} e^{8\alpha\xi} (32 - e^{2\alpha\xi}) \\ &\pm \frac{4\alpha^4 l^2}{\pi^2} e^{2\alpha\xi} \frac{l^4 \sinh^2 \alpha(\xi - \eta) + l^4 \sinh^2 \alpha(\xi + \eta) + 4l^2(y^2 + z^2)}{[4l^2 \sinh \alpha(\xi - \eta) \sinh \alpha(\xi + \eta) + 4(y^2 + z^2)]^3} \end{aligned} \quad (121)$$

#### IV.8. Propiedades térmicas de las funciones de Green para observadores de Rindler rotantes

Mencionamos, por último y brevemente, los resultados para el caso del observador de Rindler rotante. En la sección IV.4 hemos definido [ecs. (92), (93), (94), (95), (96) y (97)] la transformación antipodal para un observador que rota con velocidad angular  $\Omega$ . Usando dichas ecuaciones encontramos las expresiones para cada uno de los sumandos de la función de Green con identificación antipodal completa. Ellos son:

$$\begin{aligned}
 G^{-1}(x_1, x_2) = & e^{\alpha(u_1+v_1)} + e^{\alpha(u_2+v_2)} - e^{\alpha(u_1+v_2)} - e^{\alpha(v_1+u_2)} + \frac{1}{4}(e^{2\alpha u_1} + e^{2\alpha v_1} + 2e^{\alpha(u_1+v_1)}) \\
 & (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_1} - e^{\alpha v_1})]) + \frac{1}{4}(e^{2\alpha u_2} + e^{2\alpha v_2} + 2e^{\alpha(u_2+v_2)}) \\
 & (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_2} - e^{\alpha v_2})]) - \frac{1}{2}(e^{\alpha(u_1+u_2)} + e^{\alpha(u_1+v_2)} \\
 & + e^{\alpha(v_1+u_2)} + e^{\alpha(v_1+v_2)})(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_1} - e^{\alpha v_1})] \sin[\varphi_2 \\
 & + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_2} - e^{\alpha v_2})] + \cos \theta_1 \cos \theta_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^{-1}(Jx_1, x_2) = & e^{-\alpha(u_1+v_1)} + e^{\alpha(u_2+v_2)} - e^{\alpha(-u_1+v_2)} - e^{\alpha(-v_1+u_2)} + \frac{1}{4}(e^{-2\alpha u_1} + e^{-2\alpha v_1} \\
 & + 2e^{-\alpha(u_1+v_1)})(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha v_1})]) + \frac{1}{4}(e^{2\alpha u_2} + e^{2\alpha v_2} \\
 & + 2e^{\alpha(u_2+v_2)})(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_2} - e^{\alpha v_2})]) - \frac{1}{2}(e^{\alpha(u_2-u_1)} \\
 & + e^{\alpha(v_2-u_1)} + e^{\alpha(-v_1+u_2)} + e^{\alpha(-v_1+v_2)})(-\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha v_1})] \\
 & \sin[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_2} - e^{\alpha v_2})] - \cos \theta_1 \cos \theta_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^{-1}(x_1, Jx_2) = & e^{\alpha(u_1+v_1)} + e^{-\alpha(u_2+v_2)} - e^{\alpha(u_1-v_2)} - e^{\alpha(v_1-u_2)} + \frac{1}{4}(e^{2\alpha u_1} + e^{2\alpha v_1} \\
 & + 2e^{\alpha(u_1+v_1)})(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_1} - e^{\alpha v_1})]) + \frac{1}{4}(e^{-2\alpha u_2} + e^{-2\alpha v_2} \\
 & + 2e^{-\alpha(u_2+v_2)})(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_2} - e^{-\alpha v_2})]) - \frac{1}{2}(e^{\alpha(u_1-u_2)} \\
 & + e^{\alpha(u_1-v_2)} + e^{\alpha(v_1-u_2)} + e^{\alpha(v_1-v_2)})(-\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{\alpha u_1} - e^{\alpha v_1})] \\
 & \sin[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_2} - e^{-\alpha v_2})] - \cos \theta_1 \cos \theta_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{-1}(Jx_1, Jx_2) = & e^{-\alpha(u_1+v_1)} + e^{-\alpha(u_2+v_2)} - e^{-\alpha(u_1+v_2)} - e^{-\alpha(v_1+u_2)} + \frac{1}{4}(e^{-2\alpha u_1} + e^{-2\alpha v_1} \\
& + 2e^{-\alpha(u_1+v_1)})(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha v_1})]) + \frac{1}{4}(e^{-2\alpha u_2} + e^{-2\alpha v_2} \\
& + 2e^{-\alpha(u_2+v_2)})(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_2} - e^{-\alpha v_2})]) - \frac{1}{2}(e^{-\alpha(u_1+u_2)} \\
& + e^{-\alpha(u_1+v_2)} + e^{-\alpha(v_1+u_2)} + e^{-\alpha(v_1+v_2)})(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha v_1})]) \\
& \sin[\varphi_2 + \frac{\Omega}{2}(e^{-\alpha u_2} - e^{-\alpha v_2})] + \cos \theta_1 \cos \theta_2)
\end{aligned}$$

Reemplazando  $t \rightarrow i\tau$  en cada uno de los sumandos resulta:

$$\begin{aligned}
G^{-1}(x_1, x_2) = & e^{2\alpha r_1} + e^{2\alpha r_2} - 2e^{2\alpha r_1+r_2} \cos \alpha \Delta \tau + \frac{1}{2}e^{2\alpha r_1}(1 + \cos 2\alpha \tau_1) \\
& \{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + i\Omega e^{2\alpha r_1} \sin \alpha \tau_1]\} + \frac{1}{2}e^{2\alpha r_2}(1 + \cos 2\alpha \tau_2) \\
& \{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + i\Omega e^{2\alpha r_2} \sin \alpha \tau_2]\} - e^{2(\alpha r_1+r_2)} \\
& [\cos \alpha(\tau_1 + \tau_2) + \cos \alpha \Delta \tau] \{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + i\Omega(e^{\alpha r_1} \sin \alpha \tau_1)] \\
& \sin[\varphi_2 + i\Omega(e^{\alpha r_2} \sin \alpha \tau_2)] + \cos \theta_1 \cos \theta_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{-1}(Jx_1, x_2) = & e^{-2\alpha r_1} + e^{2\alpha r_2} - 2e^{2\alpha r_2-r_1} \cos \alpha(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2}e^{-2\alpha r_1}[1 + \cos(-2\alpha \tau_1)] \\
& \{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + i\Omega e^{-2\alpha r_1} \sin \alpha \tau_1]\} + \frac{1}{2}e^{2\alpha r_2}(1 + \cos 2\alpha \tau_2) \\
& \{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + i\Omega e^{2\alpha r_2} \sin \alpha \tau_2]\} - e^{2(-\alpha r_1-r_2)} \\
& [\cos\{-\alpha(\tau_1 + \tau_2)\} + \cos(-\alpha \Delta \tau)] \{-\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + i\Omega(e^{-\alpha r_1} \sin[-\alpha \tau_1])] \\
& \sin[\varphi_2 + i\Omega(e^{\alpha r_2} \sin \alpha \tau_2)] - \cos \theta_1 \cos \theta_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{-1}(x_1, Jx_2) = & e^{2\alpha r_1} + e^{-2\alpha r_2} - 2e^{2\alpha r_1-r_2} \cos \alpha \Delta \tau + \frac{1}{2}e^{2\alpha r_1}(1 + \cos 2\alpha \tau_1) \\
& \{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + i\Omega e^{2\alpha r_1} \sin \alpha \tau_1]\} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha r_2}(1 + \cos\{-2\alpha \tau_2\}) \\
& \{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + i\Omega e^{-2\alpha r_2} \sin(-\alpha \tau_2)]\} - e^{2\alpha(r_1-r_2)} \\
& [\cos \alpha(\tau_1 + \tau_2) + \cos \alpha \Delta \tau] \{-\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + i\Omega(e^{2\alpha r_1} \sin(\alpha \tau_1))] \\
& \sin[\varphi_2 + i\Omega e^{-2\alpha r_2} \sin(-\alpha \tau_2)] - \cos \theta_1 \cos \theta_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{-1}(J_{x_1}, J_{x_2}) = & e^{-2\alpha r_1} + e^{-2\alpha r_2} - 2e^{-2\alpha(r_1+r_2)} \cos(-\alpha\Delta\tau) + \frac{1}{2}e^{-2\alpha r_1}(1 + \cos[-2\alpha\tau_1]) \\
& \{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \sin^2[\varphi_1 + i\Omega e^{-\alpha r_1} \sin(-\alpha\tau_1)]\} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha r_2}(1 + \cos[-2\alpha\tau_2]) \\
& \{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \sin^2[\varphi_2 + i\Omega e^{-\alpha r_2} \sin(-\alpha\tau_2)]\} - e^{-\alpha(r_1+r_2)} \\
& [\cos \alpha(\tau_1 + \tau_2) + \cos(-\alpha\Delta\tau)]\{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin[\varphi_1 + i\Omega e^{-\alpha r_1} \sin(-\alpha\tau_1)] \\
& \sin[\varphi_2 + i\Omega e^{-\alpha r_2} \sin(-\alpha\tau_2)] + \cos \theta_1 \cos \theta_2\}
\end{aligned}$$

Se ve entonces que el período de la función de Green identificada  $G_{JS,JA}$  sigue siendo  $\beta = 2\pi/\alpha$  (el mismo que para la función de Green ordinaria) y no  $\beta/2$ . Esto se debe a las exponenciales en  $r_1$  y  $r_2$  que aparecen multiplicando a las funciones periódicas en  $\tau$ . Lo mismo vale para la transformación  $J_o$ .

Si se escribe el operador  $\mathcal{D}_{12}$  en las coordenadas del sistema rotante

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{12} = & \partial_{u_1} \partial_{u_2} + \partial_{v_1} \partial_{v_2} + \frac{\Lambda}{2} \left( \left[ \frac{1}{2} \sin \theta_1 \sin \varphi_1 (\partial_{u_1} \partial_{v_1}) + \frac{2 \cos \theta_1 \sin \varphi_1}{u_1 + v_1} \partial_{\theta_1} \right. \right. \\
& + \left. \frac{2 \cos \varphi_1}{(u_1 + v_1) \sin \theta_1} \partial_{\varphi_1} \right] \left[ \frac{1}{2} \sin \theta_2 \sin \varphi_2 (\partial_{u_2} \partial_{v_2}) + \frac{2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2}{u_2 + v_2} \partial_{\theta_2} \right. \\
& + \left. \left. \frac{2 \cos \varphi_2}{(u_2 + v_2) \sin \theta_2} \partial_{\varphi_2} \right] \right) + \left[ \frac{1}{2} \cos \theta_1 (\partial_{u_1} + \partial_{v_1}) - \frac{2 \sin \theta_1}{u_1 + v_1} \partial_{\theta_1} \right] \\
& \left[ \frac{1}{2} \cos \theta_2 (\partial_{u_2} + \partial_{v_2}) - \frac{2 \sin \theta_2}{u_2 + v_2} \partial_{\theta_2} \right]
\end{aligned}$$

y se aplica a  $G_{JS,JA}$  se obtiene  $\langle T_{00} \rangle_{JS,JA}$ . No transcribimos la expresión resultante debido a que no presenta particularidades novedosas. El único resultado interesante para el observador rotante es que las funciones de Green tienen período  $\beta$  y no -como en la variedad de Schwarzschild- período  $\beta/2$ .

## IV.9 Conclusiones

La formulación de la TQC en ET curvos o desde sistemas acelerados viene contribuyendo desde hace mucho tiempo a mostrar aspectos no esperados en principio de la teoría de campos en el espacio de Minkowski: la posibilidad para una dada teoría de tener distintos estados de vacío relevantes y bien definidos y la presencia de características estadísticas propias, intrínsecas, como temperatura y entropía, que provienen de la estructura no trivial del ET. Pero se ha conjeturado más recientemente que los cambios en la topología podrían modificar los resultados ya establecidos y aclarar su interpretación. La modificación de la topología de la parte espacial del ET ha sido estudiada profundamente y se sabe que sólo influye en la parte espacial de la base de frecuencias positivas y negativas de soluciones de la ecuación de campo y en el valor de la energía de vacío (efecto Casimir). Pero la modificación de la topología del ET produce cambios más drásticos. En particular, la modificación producida al identificar las antípodas ha sido estudiada en agujeros negros, en el ET de deSitter y en el ET de anti deSitter.

En el primer caso, se ha encontrado <sup>[65]</sup> que, contrariamente a lo que sucede en el agujero negro eterno de la geometría de Schwarzschild-Kruskal en la que cada masa puntual produce una separación del universo en dos regiones –el mundo real y su copia especular inaccesible–, la identificación antipodal elimina el *wormhole* pero al precio de tener una base de soluciones para la ecuación de campo cuyos elementos tienen norma nula. La función de Green antipodal simétrica resulta tener, haciendo  $t \rightarrow i\tau$ , el mismo período  $\beta$  ( $\beta = 8\pi M$ ,  $M$  la masa fuente en Schwarzschild) que la función de Green usual. La antipodal con singularidad cónica es, en cambio, también periódica en  $\beta/2$ . Sin embargo, si bien es posible estudiar las funciones de Green aunque no exista una base “sin problemas” ante la simetría discreta de identificación (no es necesario que el vacío cuántico respete las simetrías de la teoría clásica, que en este caso son las simetrías de la variedad) no es posible dar una interpretación térmica en la variedad identificada ni por  $J$  ni por  $J_0$  (funciones análogas a nuestras ecuaciones (90) y (91) ) debido a la norma nula de los autovectores.

La identificación antipodal en el ET de deSitter <sup>[66]</sup> da funciones de Green periódicas en  $\beta$  y en  $\beta/2$  tanto para la transformación  $J$  como para la  $J_0$ . –para deSitter,  $\beta$  es  $\beta = 2\pi\sqrt{3/\Lambda}$

con  $\Lambda$  la constante cosmológica-. También aquí está prohibida la interpretación térmica ya que se repiten los problemas del caso anterior al intentar construir un espacio de Fock con simetría antipodal. Si se calcula el valor de  $\langle \phi^2 \rangle$  con una base sin esta simetría, resulta diferir en un factor 2 de su valor ordinario. Por su parte, las modificaciones introducidas al  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  por la identificación se anulan para campos invariantes conformes.

Contrariamente a lo que sucede en el ET de deSitter y para agujeros negros, la transformación J en el ET de anti-deSitter –que no tiene horizontes– preserva la orientación temporal. Como consecuencia de esto, es posible definir en este caso bases de frecuencias positiva y negativa habiendo realizado la identificación ya que la funciones de onda no resultan de norma nula <sup>[78]</sup>.

En nuestro trabajo, hemos estudiado el espacio de Rindler que, tanto como la variedad de Schwarzschild-Kruskal, tiene horizontes de eventos. En términos de los mapas analíticos podemos decir que las singularidades reales del mapa determinan las regiones asintóticas del ET. Cada singularidad real tiene una temperatura asociada <sup>[79]</sup> y, en particular, los puntos críticos determinan los horizontes. Para cubrir todo el espacio de Minkowski son necesarias cuatro cartas de Rindler tal como son necesarias cuatro cartas de Kruskal para cubrir todo el espacio de Schwarzschild. En la interpretación usual, los puntos antipodales P y P' son físicamente distintos; son eventos causalmente desconectados. Tal como en el ET de un agujero negro la topología es la de un *wormhole*, en Rindler también tenemos el “mundo real” que corresponde a  $|u| > 0$  y su imagen reflejada que resulta inaccesible. En la interpretación elíptica, en cambio, las antípodas están identificadas y resulta haber un solo mundo tal como sucede en la interpretación de Schrödinger de la métrica de Schwarzschild. Pero igual que en esa variedad, el precio que debe pagarse por esto es la pérdida de la distinción global entre pasado y futuro en la región interior al horizonte (en todos los ejemplos, los problemas ocurren dentro del horizonte). Como consecuencia, sobre las superficies globales de tipo espacial la orientación del tiempo está invertida en la cuña izquierda respecto de la orientación local en la cuña derecha. Entonces, igual que en las otras variedades en las que se ha realizado la identificación y que tienen horizontes estudiadas en la literatura, los campos simétricos frente a la transformación antipodal tienen

norma cero con respecto al producto interno de Klein-Gordon sobre secciones globales. Pero tienen norma positiva no nula sobre el semiespacio con tiempo dirigido hacia el horizonte futuro y norma negativa no nula sobre el semiespacio dirigido hacia el pasado. Así, las partículas y antipartículas pueden definirse sin problemas sobre cada semiespacio con roles conjugados en uno respecto del otro. Recordemos que la elección de una topología se traduce en la elección de las condiciones de contorno para los campos sobre el horizonte y, en consecuencia, en su definición sobre la variedad global. Nuestras condiciones de contorno simétricas frente a la transformación antipodal corresponden, así pensado, a una elección particular de las condiciones de contorno. Como hemos señalado en la sección IV.2, no hacer la identificación conduce a una teoría que admite campos de frecuencia positiva en una mitad del espacio de Minkowski y que son nulos en la otra y viceversa. Pero son también admisibles otras elecciones de prolongación analítica a través del horizonte que dan en cada caso condiciones de contorno distintas y, en consecuencia, espacios de Fock diferentes. La identificación antipodal  $J$  y la reflexión  $J_0$  que aquí hemos tratado son ejemplo de ello; en presencia de horizontes, el vacío que respeta la simetría resulta de norma nula. Cuando los horizontes no existen ( $u_+ = +\infty$ ;  $u_- = -\infty$ , sección IV.4) puede verse que la transformación antipodal revierte la orientación espacial pero no invierte el sentido del tiempo por lo que éste puede ser definido globalmente sobre la variedad elíptica y no aparecen elementos del espacio de Fock con norma nula. Lo mismo ocurre en la variedad de anti-deSitter, que tampoco tiene horizontes. Relacionamos así los problemas para la construcción de una base de Fock que respete las simetrías discretas de la variedad con la presencia de horizontes.

Nuestra simetría discreta puede implementarse sin problemas a nivel de los operadores de campo tomando como estado fundamental al vacío habitual no simétrico ya que, como se ha dicho, no es necesario que el vacío cuántico tenga las simetrías del ET. En el caso de un agujero negro, debido a la simetría esférica de la variedad de Schwarzschild, resultaban funciones de Green que —además de ser periódicas en tiempo imaginario con período  $\beta = 8\pi M$ — lo eran también con período  $\beta/2$ . En la variedad elíptica de Rindler, hemos visto que debido a la falta de simetría esférica, las funciones de Green  $G_J$  y  $G_{J_0}$  simétricas ante

la transformación antipodal y reflexión  $J$  y  $J_0$  respectivamente, tienen ambas el mismo período  $\beta = 2\pi/\alpha$  igual, por otra parte, al período de la función de Green ordinaria. Relacionamos entonces la periodicidad en  $\beta/2$  con la simetría esférica de la variedad. Pero hemos encontrado una nueva propiedad de la función de Green: en la variedad de Rindler identificada, la función de Green simétrica que corresponde el observador con aceleración  $\alpha$  coincide con la que corresponde al observador que lleva aceleración  $-\alpha$ , al contrario de lo que sucede con la función de Green ordinaria y en el espacio sin identificar.

Finalmente, usando la base de Fock ordinaria, hemos calculado los términos que se agregan, al cambiar la topología, al valor de expectación de vacío renormalizado del tensor de energía-impulso.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES

Utilizando métodos de la geometría diferencial hemos encontrado densidades lagrangianas que –bajo hipótesis muy generales y evitando las constantes con dimensiones– pueden dar cuenta del comportamiento del campo gravitatorio y que contienen a la Relatividad General. En nuestra extensión del teorema de Weyl, demostramos la unicidad del lagrangiano de las teorías semiclásicas y cuál es la forma en que deben acoplarse en forma clásica los campos bosónicos de materia. Mostramos que no es necesario pedir que el lagrangiano del electromagnetismo en un fondo curvo sea invariante de *gauge* por el grupo  $U(1)$  ya que esta invariancia se deriva de la de las ecuaciones de campo. Hemos realizado también un estudio de las propiedades cuánticas de los lagrangianos obtenidos.

Nos hemos ocupado luego, también con métodos geométricos, de la forma de las fuentes cuánticas para las ecuaciones de Einstein. En particular, del valor de expectación de vacío del campo escalar al cuadrado. Hemos reencontrado con nuestros procedimientos los resultados para cuatro dimensiones de la literatura y los hemos extendido al caso de seis dimensiones (como ejemplo de la forma general para dimensiones pares) hallando una variedad de nuevos elementos para representar las propiedades de la materia en regiones de alta curvatura. Las complicaciones matemáticas que aparecieron en este desarrollo impidieron una aplicación más concreta de los resultados obtenidos.

Por último, hemos estudiado las consecuencias de los cambios de topología sobre la Teoría Cuántica de Campos. En particular, hallamos las soluciones de las ecuaciones de campo, las funciones de Green y el valor de expectación de vacío del tensor de energía impulso renormalizado para la teoría de campos vista desde un sistema de referencia con

aceleraciones cualesquiera (en cuatro dimensiones) al realizar distintas identificaciones antipodales. Comparando con otros casos estudiados en la literatura pudimos relacionar el problema de la norma nula de los elementos de la base de Fock con la presencia de horizontes de eventos en el espacio tiempo. Encontramos también que la periodicidad de las funciones de Green en variedades sobre las que se había realizado la identificación antipodal está relacionada con la existencia o no de simetría esférica. Otra propiedad encontrada relaciona a los observadores de Rindler con aceleraciones contrarias en espacios identificados, cosa que no ocurre en los espacios sin identificar.

La continuación del programa aquí desarrollado nos lleva a buscar la inclusión de campos de spin semientero entre los elementos con que deben construirse las densidades lagrangianas si queremos que tanto la gravedad como la materia sean tratadas en igualdad de condiciones y con métodos geométricos. En este sentido, la supergravedad ha sido un intento y en la actualidad, las teorías de supercuerdas siguen el camino de la unificación. Si en cambio nos mantenemos dentro del marco de las teorías semiclásicas, se podría proponer repetir el cálculo expuesto en el capítulo III para  $\langle \varphi^2 \rangle^{ren}$ , pero ahora con el  $\langle T^{\mu\nu} \rangle^{ren}$ , esperando que las complicaciones matemáticas no sean agobiantes. En lo que a la topología se refiere, ya estudiados los efectos de las modificaciones por identificación en variedades curvas, el paso siguiente se orienta en el sentido de considerarla una variable que debe también ella ser cuantificada.

FIGURA

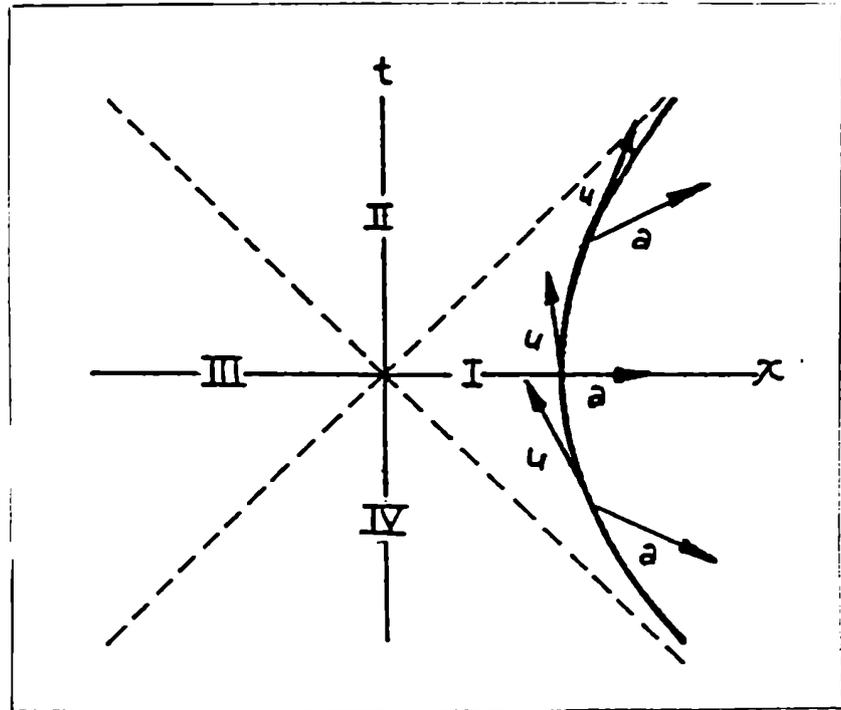


Fig. 1. Línea de mundo del observador de Rindler con aceleración  $a$ =constante y cuadrivelocidad  $u$ . I=R es la cuña derecha, III=L es la cuña izquierda.

## REFERENCIAS

1. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama en "*Quantum Gravity, an Oxford Symposium*", Clarendon Press, Oxford, 1978, pg. 1.
2. K. Kuchar en "*Relativity, Astrophysics and Cosmology*", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, 1973, pg. 237.
3. C. J. Isham en "*Quantum Gravity, an Oxford Symposium*", Clarendon Press, Oxford, 1978, pg. 500.
4. R. P. Geroch, *J. Math. Phys.* **8**, 782 ( 1967)
5. R. Penrose en "*Quantum Theory and Beyond*", Cambridge University Press, 1972.
6. R. Penrose, *M. A. H. MacCallum*, **6**, 242, 1973.
7. A. Einstein, "*El significado de la Relatividad*", Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948.
8. M. A. Tonnelat, "*Les théories unitaires de l' électromagnetism et de la gravitation*", Gauthier-Villars, Paris, 1965.
9. P. van Nieuwenhuizen, **62**, 189, 1981.
10. A. Einstein, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 35 ( 1948)
11. W. Moffat, *Phys. Rev. D* **23**, 2870 ( 1981)
12. W. Moffat en "*Proc. VII Int. School of Gravitation and Cosmology*", World Scientif. Pub. Co., 1981.
13. H. Weyl, "*Space-Time Matter*", Dover, N. York, 1922.
14. R. Adler, M. Bazim, M. Schiffer, "*Introduction to General Relativity*", Mac Graw Hill, N. York, 1965.
15. N. Batakis, *Phys. Lett. A* **90**, 115 ( 1982)
16. N. Batakis, CERN preprints (TH 3546), 1983.
17. J. Audretsch, *Phys. Rev. D* **24**, 1470 (1981)

18. M. Castagnino, G. Domenech, M. Levinas, N. Umérez, *Class. Quantum Grav.* **6**, L1 (1989)
19. R. Feynman, "*Lectures on gravitation*", CALTECH, 1962-1963, no publicadas.
20. S. Weinberg, *Phys. Rev. B* **135**, 1049 ( 1964)
21. H. van Dam, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **22**, 397 ( 1970)
22. S. Deser en "*Quantum Gravity, an Oxford Symposium*", Clarendom Press, Oxford, 1978, pg. 136.
23. D. Boulware, S. Deser, *Ann. Phys. (N.Y.)* , ( 1974)
24. S. Deser, *Gen. Relativ. Grav.* **1**, 9 ( 1970)
25. N. Nissani, *Phys. Rev. D* **31**, 1489 ( 1985)
26. M. J. Duff en "*Quantum Gravity, an Oxford Symposium*", Clarendon Press, Oxford, 1978, pg. 93.
27. S. Adler, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 729 ( 1982)
28. C. Brans, R. H. Dicke, 124, 925, 1961.
29. S. Weinberg, "*Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972.
30. D. Lovelock, *Arch. Rational Mech. Anal.* **33**, 54 (1969)
31. H. Rund, *Abh. Math. Sem. Univ.* **29**, 243 ( 1966)
32. S. J. Aldersley, *Phys. Rev. D* **15**, 370 ( 1977)
33. D. Lovelock, *J. Australian Math. Soc.* **14**, 4 (1972)
34. T. J. Thomas, "*Differential Invariants of Generalized Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
35. D. Prélat, "*Tensorial concomitants of a metric tensor and a covector*", *Utilitas Math.* (en prensa).
36. R. Noriega, C. Schifini, *Gen. Relativ. Grav.* **18**, 983 (1986)
37. P. Ramond, "*Field Theory*", The Benjamin Cummmings Pub. Co., Massachussets, 1981.
38. H. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **62**, 444 (1973)
39. S. Deser, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. D* **10**, 411 (1974)
40. S. Deser, P. van Nieuwenhuizen, Hung-Sheng Tsao, *Phys. Rev. D* **10**, 3337 (1974)

41. N. D. Birrel, P. C. Davies, "*Quantum Fields in Curved Space*", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.
42. E. Cartan, *J. Math. Pure Appl.* **1**, 141 ( 1922)
43. R. Utiyama, B. S. DeWitt, *J. Math. Phys.* **3**, 608 (1962)
44. E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin en "*Proceed. of the Third Seminar on Quantum Gravity*", World Scientif. Pub. Co., Singapore, 1985, pg. 303.
45. D. G. Boulware, G. Horowitz, A. Strominger, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1726 ( 1983)
46. E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **104**, 377 (1981)
47. S. Deser, "*Gravity from Strings*", Invited Lecture, Second Nobel Symposium on Elementary Particle Physics, Junio de 1986.
48. A. Strominger, *Phys. Rev. D* **30**, 2257 (1984)
49. P. Candelas, *Phys. Rev. D* **21**, 2185 (1980)
50. D. N. Page, *Phys. Rev. D* **25**, 1499 (1982)
51. M. R. Brown, A. C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **31**, 2514 (1985)
52. M. R. Brown, A. C. Ottewill, N. D. Page, *Phys. Rev. D* **33**, 2840 (1986)
53. K. W. Howard, P. Candelas, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 403 (1984)
54. K. W. Howard, *Phys. Rev. D* **30**, 2532 (1984)
55. V. P. Frolov, A. I. Zel'nikov, *Phys. Rev. D* **32**, 3150 (1985)
56. V. P. Frolov, N. Sánchez, *Phys. Rev. D* **33**, 1604 (1986)
57. V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, *Phys. Rev. D* **35**, 3031 (1987)
58. L. P. Eisenhart, "*Riemannian Geometry*" Princeton University Press (1964).
59. S. M. Christensen, *Phys. Rev. D* **17**, 946 (1987)
60. S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, "*The Large Scale Structure of Spacetime*", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.
61. C. M. Thorne, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "*Gravitation*", W. H Freeman and Co., San Francisco, 1971.
62. C. M. Patton, J. A. Wheeler en "*Quantum Gravity, an Oxford Symposium*", Clarendom Press, Oxford, 1978, pg. 538.
63. H. B. G. Casimir, *Proc. Kon. Akad. Wetenschap B* **51**, 793 (1948)
64. D. Deutsch, P. Candelas, *Phys. Rev. D* **20**, 3063 (1979)

65. N. Sánchez, B. F. Whiting, Nucl. Phys. B **283**, 605 (1987)
66. N. Sánchez, Nucl. Phys. B **249**, 1111 (1987)
67. G. W. Gibbons, Nucl. Phys. B **271**, 5 (1986)
68. G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2738 (1977)
69. S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2580 (1973)
70. P. C. W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975)
71. B. S. DeWitt, 19,297,1975.
72. W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976)
73. N. Sánchez, Phys. Rev. D **24**, 2100 (1981)
74. W. Rindler, 119,2082,1960.
75. W. Rindler Amm. J. Phys. **34**, 1174 (1966)
76. N. Sánchez en "*Quantum Gravity*", Plenum Pub. Co., 1984, pg. 323.
77. N. Sánchez, B. F. Whiting, Phys. Rev. D **34**, 1056 (1987)
78. G. Domenech, M. Levinas, N. Sánchez, Int. J. Mod. Phys. A **3**, 2567 (1988)

## AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis, Dr Mario Castagnino, por su orientación y ayuda.

A los Dres Ricardo Noriega y Claudio Schifini por su valiosa colaboración en la realización de este trabajo.

Al Dr Valeri Frolov por sus comentarios y sugerencias.

A mi hija Amalia por la confección de las figuras.

A los miembros del Grupo de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación por su constante colaboración y, en particular, a los Dres Leonardo Levinas y Norberto Umérez por su apoyo y amistad.

Al director del IAFE, Lic Horacio Ghielmetti, y a todo su personal por haberme permitido trabajar en un ambiente agradable.

Esta tesis fue realizada como parte del plan de trabajo de una beca de perfeccionamiento otorgada por la Comisión de Investigaciones Científicas y de un cargo de jefe de trabajos prácticos en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

## INDICE

RESUMEN .....	1
I - INTRODUCCIÓN .....	2
II - LA ACCIÓN GRAVITATORIA DE LAS TEORÍAS SEMICLÁSICAS .....	8
II-1 Introducción .....	8
II-2 Las teorías geométricas de campo unificado .....	8
II-3 El problema de la constante con dimensiones .....	12
II-4 La teoría de concomitantes y el análisis dimensional .....	16
II-5 Construcción de la densidad lagrangiana lineal en la curvatura .....	25
II-6 Análisis de la densidad lagrangiana obtenida .....	29
II-7 Renormalizabilidad de la teoría .....	32
II-8 El lagrangiano de las teorías semiclásicas .....	36
II-9 Análisis del lagrangiano cuadrático en la curvatura .....	42
III - LA TEORÍA DE CONCOMITANTES EN EL CÁLCULO DE $\langle \varphi^2 \rangle$ .....	47
III-1 Introducción .....	47
III-2 Espacios conformes, transformaciones conformes y teorías conformes .....	49
III-3 Planteo del problema .....	52
III-4 $\langle \varphi^2 \rangle$ en cuatro dimensiones .....	54
III-5 Los concomitantes en seis dimensiones .....	55
III-6 Las propiedades de los concomitantes ante transformaciones anticonformes ...	57
III-7 Discusión .....	60
IV - LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS Y LA IDENTIFICACIÓN ANTIPODAL	61
IV-1 Introducción .....	61
IV-2 El espacio de Rindler y su extensión .....	65
IV-3 La teoría cuántica de campos en sistemas de referencia acelerados .....	70
IV-4 El observador acelerado y la identificación antipodal .....	74
IV-5 El campo escalar en el espacio de Rindler con identificación antipodal .....	77
IV-6 Las funciones de Green y sus propiedades ante la identificación .....	79
IV-7 Comportamiento del tensor de energía-impulso ante la identificación antipodal	83
IV-8 Propiedades de las funciones de Green para observadores de Rindler rotantes	86

IV-9 Conclusiones .....	89
<b>V - CONCLUSIONES</b> .....	<b>93</b>
<b>FIGURAS</b> .....	<b>95</b>
<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>96</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>99</b>