Raíces generalizadas de elementos en álgebras C*

Maestripieri, Alejandra Laura

1992

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Raíces generalizadas de elementos en álgebras C^*

Alejandra Laura Maestripieri

Director de tesis:
Dr. Gustavo Corach

Lugar de trabajo:
Departamento de Matemática

Tesis presentada para optar al título de:
Doctor en Ciencias Matemáticas.
1992

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Gustavo Corach por su ayuda permanente y por todo lo que me enseñó.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires por otorgarme la posibilidad de realizar este trabajo.

Alejandra Maestripieri.

INDICE

Introducción

G. Corach, H. Porta y L. Recht estudiaron en detalle el conjunto de proyectores y el conjunto de elementos inversibles, autoadjuntos de un álgebra C^*, desde el punto de vista de la geometría diferencial, ([1], [2]).

Por otro lado Man-Duen Choi estudió, en [7], la noción de cocuadrado de un elemento inversible del espacio $L(H)$, donde H es un espacio de Hilbert. Si $a \in L(H)$ es inversible, su cocuadrado se define como $a^{-1*}a$. Es fácil ver que a es normal si y sólo si su cocuadrado es unitario.

El conjunto de proyectores $\{p \in A : p^2 = p\}$ se puede ver, mediante la aplicación $p \longrightarrow 2p - 1 = \varepsilon$, como el conjunto de reflexiones de A, $\{\varepsilon \in A : \varepsilon^2 = 1\}$, es decir como el conjunto de raíces cuadradas de la identidad. También si a es inversible y autoadjunto, el cocuadrado de a, $a^{-1*}a$, es igual a la identidad y entonces el conjunto $\{a \in A : a^* = a$ y a es inversible$\}$ es el conjunto de las co-raíces de la identidad.

Aquí se generalizarán los resultados obtenidos en [1] y [2], estudiando los conjuntos $Q = \{s \in A : s^2 = \sigma\}$ y $N_\sigma = \{a \in A : a^{-1*}a = \sigma\}$, donde A es un álgebra C^*, y σ es un elemento inversible de A. observemos que para $\sigma = 1$ estos son los conjuntos estudiados por G. Corach, H. Porta y L. Recht en [1] y [2], (ver Apéndice). Adaptando las técnicas desarrolladas en los trabajos mencionados, obtenemos una serie de resultados que describiremos sucintamente.

Fijado $\sigma \in A$ inversible consideramos

$$Q = \{s \in A : s^2 = \sigma\}, \quad A_\sigma = \{a \in A : a\sigma = \sigma a\}$$

y G_σ el grupo de inversibles de A_σ. Q está contenido en A_σ, donde trabajaremos de aquí en adelante. Notemos que σ pertenece al centro de A_σ. Podemos desde ahora suponer, sin pérdida de generalidad, que σ pertenece al centro del álgebra. Se define una acción a izquierda L, de G_σ en Q, $L_g s = gsg^{-1}$, que resulta diferenciable y localmente transitiva.

Fijado un $s \in Q$, definimos una aplicación $p : G_\sigma \longrightarrow Q$, como

$$p(g) = L_g s = gsg^{-1}.$$

La órbita de s, $p(G_\sigma)$, resulta abierta y cerrada, y p admite secciones locales. Se prueba que Q es una variedad diferenciable.

El grupo de isotropía de s, $I_s = \{g \in G_\sigma : L_g s = s\}$, es un subgrupo cerrado de G_σ. I_s opera en G_σ por traslación:

$$\begin{aligned} R : I_s \times G_\sigma &\longrightarrow G_\sigma \\ (t,g) &\longrightarrow R_t(g) = gt. \end{aligned}$$

Esta operación no tiene puntos fijos. (G_σ, Q, p) resulta un espacio homogéneo de Banach, a fortiori, un fibrado principal localmente trivial, con grupo estructural I_s. Se define un complemento natural de $\mathcal{J}_s$,(el álgebra de Lie de I_s), $\mathcal{H}_s$, que verifica:

i) $A_\sigma = \mathcal{J}_s \oplus \mathcal{H}_s$

ii) $t\mathcal{H}_s t^{-1} = \mathcal{H}_s \qquad \forall t \in I_s$

iii) $(Tp)_1|_{\mathcal{H}_s} : \mathcal{H}_s \longrightarrow (TQ)_s$ es un isomorfismo.

Resulta (G_σ, Q, p) un espacio homogéneo reductivo.

A partir de $\mathcal{H}_s$, se define una distribución de subespacios horizontales en G_σ: si $g \in G_\sigma$ definimos

$$\mathcal{H}_{s,g} = g\mathcal{H}_s$$

y el espacio de vectores verticales en g como

$$\mathcal{V}_g = \{X \in A_\sigma : (Tp)_g(X) = 0\}.$$

Se verifica que $\mathcal{V}_g = g\mathcal{J}_s$ y $\mathcal{V}_g \oplus \mathcal{H}_{s,g} = A_\sigma$.

La conexión así definida es diferenciable e I_s-equivariante:

$$\mathcal{H}_{s,g} i = \mathcal{H}_{s,gi} \qquad \forall i \in I_s.$$

Se demuestra entonces la existencia de levantadas horizontales de curvas en Q: si γ es una curva en Q la levantada horizontal de γ, Γ, que verifica $\Gamma(0) = 1$ es la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}(t) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}(t)\gamma^{-1}(t)\Gamma(t) \\ \Gamma(0) = 1 \end{cases}$$

("ecuación de transporte asociada a γ").

La existencia de levantadas horizontales nos permite definir la derivada covariante de un campo en una dirección tangente y de un campo a lo largo de una curva, transporte paralelo y geodésicas. Se prueba que si $X \in (TQ)_s$, y γ es una curva en Q, γ es geodésica si

$$\gamma(t) = e^{tXs^{-1}}s.$$

Además ésta es la única geodésica tal que $\gamma(0) = s$ y $\dot{\gamma}(0) = X$.

Como $Q \subset G_\sigma$, cada $s \in Q$ admite una descomposición polar

$$s = \lambda^2 \rho$$

con $\lambda > 0$ y ρ unitario. A partir de aquí consideramos σ unitario. Se verifica entonces que si $s \in G_\sigma$ y $s = \lambda^2\rho$ es su descomposición polar, entonces $s \in Q$ si y sólo si $\rho^2 = \sigma$ y $\rho\lambda = \lambda^{-1}\rho$.

Consideremos el conjunto $P = \{\rho \in Q \,:\, \rho^* = \rho^{-1}\}$, de elementos unitarios de Q. Teniendo en cuenta la proposición anterior podemos definir la aplicación

$$\pi \,:\, Q \longrightarrow P \qquad \pi(s) = \rho$$

donde $s = \lambda^2\rho$, con $\lambda > 0$ y ρ unitario.

Si consideramos una representación de A en el espacio de operadores $L(E)$, con E un espacio de Hilbert, cada $\rho \in P$ determina una forma bilineal:

$$B_\rho(x\,,y) = (\rho x\,,y) \qquad x, y \in E$$

La fibra de ρ, $Q_\rho = \pi^{-1}(\rho)$, se caracteriza como

$$Q_\rho = \{\lambda\rho\lambda^{-1} \,:\, \lambda > 0 \text{ y } B_\rho\text{-unitario}\}.$$

El espacio tangente a Q en ρ es

$$(TQ)_s = \{X \in A_\sigma \,:\, X\rho = -\rho X\}$$

que se descompone como

$$(TQ)_\rho = (TP)_\rho \oplus N_\rho$$

donde

$$N_\rho = \{X \in (TQ)_\rho \,:\, X^* = -\sigma^{-1}X\}.$$

La aplicación exponencial Φ del fibrado tangente (TQ) en Q es

$$\Phi(s,X) = e^{Xs^{-1}}s \qquad s \in Q, \quad X \in (TQ)_s$$

y se verifica que Φ es un difeomorfismo de N sobre Q y $Q_\rho = \Phi(\rho, N_\rho)$.

Se estudia a continuación el grupo de elementos B_ρ-unitarios y se caracteriza su acción sobre la fibra Q_ρ.

Se define una métrica de Finsler en Q de la siguiente forma: si $X \in (TQ)_s$

$$||X||_s = ||\lambda^{-1}X\lambda||$$

donde $s = \lambda^2\rho$ con $\lambda > 0$.

La norma $||\quad||_s$ es una norma natural de operadores para los elementos de A_σ, definiendo en E el producto interno

$$(x,y)_s = (\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y) \qquad x, y \in E.$$

Si $a \in A_\sigma$, la norma de a como operador con el producto $(\quad,\quad)_s$ coincide con $||a||_s$.

Además la métrica de Finsler es invariante para los elementos B_ρ-unitarios.

Se demuestra que la aplicación tangente de π no aumenta las normas

$$||(T\pi)_s(X)||_\rho \leq ||X||_s \qquad X \in (TQ)_s.$$

Se obtiene un resultado adicional en la demostración de este hecho:

$$2||T|| \leq ||STS + S^{-1}TS^{-1}||$$

donde T es un operador en $L(H)$ y S es la parte positiva de un operador de cuadrado unitario. Esta desigualdad se generaliza y vale

$$2||T|| \leq ||STS + S^{-1*}TS^{-1*}||$$

con $T \in L(H)$ y S inversible, ([13]).

Finalmente se define la longitud de una curva γ en Q como

$$L(\gamma) = \int_0^1 ||\dot{\gamma}||_\gamma \, dt$$

y se estudian las propiedades métricas de las geodésicas.

Tenemos los siguientes resultados: Dados ρ_0 y ρ_1 en Q_ρ existe una única geodésica contenida en Q_ρ que los une. Además si $s \in Q_\rho$, la geodésica que une s y ρ es la curva más corta en Q que une estos puntos, y dados s y r en Q_ρ de todas las curvas contenidas en Q_ρ que unen estos puntos la más corta es la geodésica de extremos s y r.

Estos resultados se detallan en los capítulos 2 y 3. En los capítulos 4 y 5 se estudian propiedades similares para las co-raíces de σ, con σ un elemento unitario de A. En el capítulo 1 se exponen resultados generales sobre espacios homogéneos reductivos de Banach.

CAPITULO 1

Espacios homogéneos de Banach

En este capítulo se detallarán resultados generales sobre espacios homogéneos de Banach. A denotará un álgebra de Banach con unidad y G el grupo de elementos inversibles de A. Consideraremos una variedad C^∞, Q, modelada en espacios de Banach. Se puede probar que G resulta un grupo de Lie. (3.14 de [8]).

Definiremos a continuación la noción de espacio homogéneo de Banach. Supondremos dada una acción a izquierda L, de G en Q:

$$\begin{aligned} L : G \times Q &\longrightarrow Q \\ (g, \varepsilon) &\longrightarrow L_g \varepsilon \end{aligned}$$

de clase C^∞, que satisface:

i) $L_1 = Id_Q \qquad g, g' \in G$,

ii) $L_g L_{g'} = L_{gg'}$,

iii) L es localmente transitiva, es decir que para todo $q \in Q$, existe un entorno U de q tal que si $q' \in U$, existe $g \in G$ con $L_g q = q'$.

Observemos que de la propiedad iii) se deduce que la órbita de cada $\varepsilon \in Q$, $\{L_g \varepsilon g \in G\}$, es abierta.

Para $\varepsilon \in Q$, I_ε denotará el grupo de isotropía de ε

$$I_\varepsilon = \{g \in G : L_g \varepsilon = \varepsilon\}.$$

I_ε resulta un subgrupo cerrado de G y supondremos además que I_ε es subvariedad de G. Si $\varepsilon' = L_g \varepsilon$, entonces resulta $I_{\varepsilon'} = g I_\varepsilon g^{-1}$. $\mathcal{J}_\varepsilon$ indicará el espacio tangente a I_ε en la identidad. $\mathcal{J}_\varepsilon$ resulta cerrado por el corchete $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathcal{J}_\varepsilon$, que convierte a $\mathcal{J}_\varepsilon$ en un álgebra de Lie. Más aún pediremos que $\mathcal{J}_\varepsilon$ sea una subálgebra de A, con grupo de inversibles I_ε.

(G, Q) es un espacio homogéneo de Banach.

Como ejemplo de esta estructura tenemos las reflexiones en A, $Q = \{\varepsilon \in A : \varepsilon^2 = 1\}$ y la acción sobre Q dada por $L : G \times A \longrightarrow A$, $L_g(\varepsilon) = g\varepsilon g^{-1}$. Q se puede pensar también como el conjunto de proyectores en A, mediante la aplicación $\varepsilon \longrightarrow \frac{\varepsilon+1}{2}$, que manda cada reflexión en un proyector. Este ejemplo fue estudiado detalladamente en [1] y [2].

Reductividad

Fijado $\varepsilon \in Q$, definimos la aplicación $p : G \longrightarrow Q$ dada por $p(g) = L_g\varepsilon$. La imagen $p(G) = Q_\varepsilon$ es la órbita de ε, que resulta ser una variedad pues es un abierto de Q.

De aquí en adelante consideraremos ε fijo y trabajaremos en Q_ε, que, por abuso de notación, llamaremos Q.

I_ε opera a derecha en G, por traslación:

$$R : I_\varepsilon \times G \longrightarrow G$$

$$R(i, g) = R_i(g) = gi \qquad i \in I_\varepsilon, g \in G.$$

Esta operación no tiene puntos fijos y luego la acción es libre.

I_ε es simplemente transitivo en $p^{-1}(\{\varepsilon'\})$.

En efecto $p^{-1}(\{\varepsilon'\}) = gI_\varepsilon$, donde $L_g\varepsilon = \varepsilon'$: $p^{-1}(\{\varepsilon'\}) = \{h \in G : L_h(\varepsilon') = \varepsilon'\}$. Si $h \in p^{-1}(\{\varepsilon'\})$: $L_h(\varepsilon) = \varepsilon'$. Entonces $L_h(\varepsilon) = L_g\varepsilon$ y luego $L_{g^{-1}h}\varepsilon = \varepsilon$. Tenemos entonces $g^{-1}h \in I_\varepsilon$ o bien $h \in gI_\varepsilon$.

Recíprocamente si $h \in gI_\varepsilon$ entonces $g^{-1}h \in I_\varepsilon$, luego $L_{g^{-1}h}\varepsilon = \varepsilon$ o bien $L_h\varepsilon = \varepsilon'$.

Haremos ahora la siguiente hipótesis :

H) Existe un subespacio cerrado $\mathcal{H}_\varepsilon$ tal que :

i) $A = \mathcal{J}_\varepsilon \oplus \mathcal{H}_\varepsilon$,

ii) $i\mathcal{H}_\varepsilon i^{-1} = \mathcal{H}_\varepsilon \quad \textit{para todo} \quad i \in I_\varepsilon$,

iii) $(Tp)_1|_{\mathcal{H}_\varepsilon} : \mathcal{H}_\varepsilon \longrightarrow (TQ)_\varepsilon$ es un isomorfismo vectorial topológico.

OBSERVACIÓN : Siempre vale que $\mathcal{J}_\varepsilon$ está contenido en $ker(Tp)_1$ pues si $X \in \mathcal{J}_\varepsilon$, considerando $\gamma(t)$ una curva en I_ε tal que $\gamma(0) = 1$ y $\dot\gamma(0) = X$ y como $p(\gamma(t)) = \varepsilon$ para cualquier t, derivando en $t = 0$, obtenemos $(Tp)_1(X) = 0$. La condición iii) garantiza la igualdad.

TEOREMA 1.1 : *Para cada $\varepsilon' \in Q$ existe una sección local de p en ε', es decir existe un entorno U de ε' y una aplicación C^∞, δ , $\delta : U \longrightarrow G$ tal que $p\delta|_U = id_U$.*

<u>*Demostración :*</u> Construiremos una sección local en un entorno de ε, a partir de la cual se deducen las demás.

$(Tp_\varepsilon)_1$ es un epimorfismo directo ya que es una aplicación sobreyectiva. El complemento de $ker(Tp_\varepsilon)_1$ es $\mathcal{H}_\varepsilon$, y $(Tp_\varepsilon)_1 : \mathcal{H}_\varepsilon \longrightarrow (TQ)_\varepsilon$ es un isomorfismo. Aplicando II 5.6 de [8], se deduce la existencia de una sección local δ, en un entorno de ε, U, $\delta : U \longrightarrow G$ con $p\delta|_U = id_U$, pues como $p(1) = \varepsilon$ y $(Tp)_1$ es un epimorfismo directo, existen entornos U_1 de 1, $U_1 \subset G$, U_0 de 0 y V_ε de ε y un difeomorfismo $\xi : U_0 \times V_\varepsilon \longrightarrow U_1$ tal que $p\xi(x,y) = y$ para todo $(x,y) \in U_0 \times V_\varepsilon$, con $\xi(0,\varepsilon) = 1$. Tomando $\delta = \xi(0,y)$, δ es un difeomorfismo, $\delta : V_\varepsilon \longrightarrow U_1$ tal que $p\delta(y) = y$ para todo $y \in V_\varepsilon$ y $\delta(\varepsilon) = \xi(0,\varepsilon) = 1$.

Sea ahora $\varepsilon' = L_g\varepsilon$ y $l_g : G \longrightarrow G$ es la multiplicación a izquierda por g.

Se verifica que

$$p = L_g \circ p \circ l_{g^{-1}}$$

o bien

$$p \circ l_g = L_g \circ p$$

pues $L_g \circ p \circ l_{g^{-1}}(h) = L_g \circ p(g^{-1}h) = L_g L_{g^{-1}h}(\varepsilon) = L_h(\varepsilon) = p(h)$. Tomemos $U_{\varepsilon'} = L_g U$ como entorno de ε' y

$$\delta' = l_g \circ \delta \circ L_{g^{-1}}$$

Entonces $\delta' : U_{\varepsilon'} \longrightarrow G$ es una sección local de p en ε', tal que $\delta'(\varepsilon') = g$, pues si $r \in U_{\varepsilon'}$, $r = L_g(s')$, con $s' \in U$ y $p\delta'(r) = p \circ l_g \circ \delta \circ L_{g^{-1}}\ (r) = L_g\, p\, \delta\, L_{g^{-1}}(L_g s') = L_g\, p\, \delta(s') = L_g s' = r$ y $\delta'(\varepsilon') = l_g\, \delta\, L_{g^{-1}}(\varepsilon') = l_g\, \delta(\varepsilon) = L_g 1 = g$.

OBSERVACIÓN: *Notemos que dado $g \in G$, tomando $L_g\varepsilon = \varepsilon'$, podemos construir una sección local δ de p, en un entorno de ε' con $\delta(\varepsilon') = g$.*

Denotaremos

$$K_\varepsilon = ((Tp)_1|_{\mathcal{H}_\varepsilon})^{-1}.$$

Resulta $K_\varepsilon : (TQ)_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{H}_\varepsilon$.

COROLARIO 1.2: $(G\,,Q\,,I_\varepsilon)$ *es un fibrado principal.*

<u>*Demostración:*</u> Sabemos que I_ε actúa libremente sobre G, a derecha, Q resulta ser el cociente G/I_ε y p es diferenciable. Veamos que G es localmente trivial.

Sea $\varepsilon' \in Q$ tal que $\varepsilon' = L_g\varepsilon$. Llamemos δ_0 a la sección definida en 1.1, con $\delta_0 : U \longrightarrow G$, $\delta_0(\varepsilon) = 1$, U entorno de ε, y en general $\delta_g : L_gU \longrightarrow G$ con $\delta_g(L_g\varepsilon) = g$. Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ll} \psi : p^{-1}(U_{\varepsilon'}) \longrightarrow U_{\varepsilon'} \times I_\varepsilon & \text{con} \quad U_{\varepsilon'} = L_gU \\ \qquad h \qquad \longrightarrow (p(h),\, (\delta_g p(g))^{-1}h\,) & \end{array}$$

$(\delta_g\, p(h))^{-1}h \in I_\varepsilon$ pues de $p(\delta_g\, p(h)) = p(h)$ se deduce $L_{\delta_g\, p(h)}\varepsilon = L_h\varepsilon$ o bien $L_{(\delta_g\, p(h))^{-1}}\varepsilon = \varepsilon$.

ψ es inyectiva: si $\psi(h) = \psi(h')$, $p(h) = p(h')$ y luego $h = h'$. ψ es sobreyectiva y su inversa es la aplicación definida por $\psi^{-1} : (\varepsilon''\,,i) \longrightarrow \delta_g(\varepsilon'')\,i$. Pues aplicando ψ y ψ^{-1} sucesivamente, obtenemos $h \longrightarrow (p(h)\,,(\delta_g\, p(h))^{-1}h\,) \longrightarrow \delta_g\, p(h)(\delta_g\, p(h))^{-1}h = h$.

Además si llamamos ϕ a la segunda coordenada de ψ, ϕ verifica $\phi(h\,i) = \phi(h)i$ para $h \in G\,,i \in I_\varepsilon$: $\phi(h\,i) = [\delta_g(h\,i)]^{-1}h\,i = (\delta_g\, L_h\, L_i\varepsilon)^{-1}h\,i = (\delta_g\, p(h))^{-1}h\,i = \phi(h)i$.

Luego $(G\,,Q\,,I_\varepsilon)$ es un fibrado principal. (cf. [9], pág. 50).

OBSERVACIÓN: *Dado* $\varepsilon' = L_g\varepsilon$ *se verifican*

$$I_{\varepsilon'} = gI_\varepsilon g^{-1}$$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon'} = g\mathcal{J}_\varepsilon g^{-1}.$$

Veamos la primera igualdad: si $h \in I_{\varepsilon'}$ *, entonces* $L_h\varepsilon' = \varepsilon'$ *, o sea* $L_hL_g\varepsilon = L_g\varepsilon$ *, o bien* $L_{g^{-1}hg}\varepsilon = \varepsilon$ *es decir* $g^{-1}h\,g \in I_\varepsilon$ *, con lo cual vimos la inclusión* $g^{-1}I_{\varepsilon'}g \subset I_\varepsilon$ *. Análogamente se deduce la otra inclusión.*

LEMA 1.3: $(Tp_{\varepsilon'})_1 : g\mathcal{H}_\varepsilon g^{-1} \longrightarrow (TQ)_{\varepsilon'}$ *es un isomorfismo.*

Demostración: Sea $Aut\, g : G \longrightarrow G$ la aplicación definida por $Aut\, g(x) = gxg^{-1}$. Tenemos que

$$L_g \circ p_\varepsilon = p_{\varepsilon'} \circ Aut\, g.$$

Diferenciando obtenemos

$$(TL_g)_\varepsilon (Tp_\varepsilon)_1 = (Tp_{\varepsilon'})_1\, Aut\, g$$

$$(TL_g)_\varepsilon (Tp_\varepsilon)_1\, Aut\, g^{-1} = (Tp_{\varepsilon'})_1.$$

Restringiendo a $g\mathcal{H}_\varepsilon g^{-1}$ se sigue el resultado.

Teniendo en cuenta el lema 1.3, definimos $\mathcal{H}_{\varepsilon'} = g\mathcal{H}_\varepsilon g^{-1}$ y

$$K_{\varepsilon'} : (TQ)_{\varepsilon'} \longrightarrow \mathcal{H}_{\varepsilon'}$$

$$K_{\varepsilon'} = ((Tp_{\varepsilon'})_1|_{\mathcal{H}_{\varepsilon'}})^{-1}.$$

Observemos que $K_{\varepsilon'} = Aut\, g K_\varepsilon (TL_{g^{-1}})_\varepsilon$. Resulta entonces la siguiente

PROPOSICIÓN 1.4: *Dados ε'' y ε'' en Q_ε se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
H_{\varepsilon'} \arrow[r, "Aut\, g"] \arrow[d, "K_{\varepsilon'}"'] & H_{\varepsilon''} \arrow[d, "K_{\varepsilon''}"] \\
(TQ)_{\varepsilon'} \arrow[r, "(TL_g)_{\varepsilon'}"'] & (TQ)_{\varepsilon''}
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon'' = L_g \varepsilon'$.

Demostración: El resultado se deduce del lema 1.3.

Conexión en Q

Definimos a continuación una conexión en (G, Q, I_ε) dando una distribución de subespacios horizontales en G: para cada $g \in G$ definimos

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,g} = g\mathcal{H}_\varepsilon$$

y $V_g = \{X \in A : (Tp)_g(X) = 0\}$ el espacio de vectores verticales en g. Tenemos entonces

PROPOSICIÓN 1.5: *$\mathcal{V}_g = g\mathcal{J}_\varepsilon$ y $A = \mathcal{H}_{\varepsilon,g} \oplus \mathcal{V}_g$.*

Demostración: Consideremos nuevamente el diagrama 1.1. Se verifica que

$$p \circ l_g = L_g \circ p$$

o bien

$$p = L_g\, p\, l_{g^{-1}}.$$

Diferenciando en g obtenemos

$$(Tp)_g = (TL_g)_\varepsilon (Tp)_1 l_{g^{-1}}$$

de donde se deduce que $V_g = gI_\varepsilon$ y luego $A = H_{\varepsilon,g} \oplus V_g$.

PROPOSICIÓN 1.6: *La conexión definida es diferenciable e I_ε-equivariante:*

$$(Tr_i)_g(\mathcal{H}_{\varepsilon,g}) = \mathcal{H}_{\varepsilon,gi} \qquad \text{para todo } i \in I_\varepsilon$$

donde $r_i : G \longrightarrow G$ es la multiplicación a derecha por i.

Demostración: Si T es la proyección sobre $\mathcal{H}_\varepsilon$, paralela a $\mathcal{V}_1$, entonces la proyección sobre $\mathcal{H}_{\varepsilon,g}$, paralela a $\mathcal{V}_g$, está dada por $l_g\, T\, r_{g^{-1}}$, que varía de manera diferenciable con g.

Veamos la condición de equivariancia: sea $i \in I_e$ entonces

$$(Tr_i)_g = r_i$$

luego

$$r_i(\mathcal{H}_{e,g}) = \mathcal{H}_{e,g}i.$$

Pero por la condición ii) de H) $\mathcal{H}_e = i\mathcal{H}_e i^{-1}$, o bien $\mathcal{H}_e i = i\mathcal{H}_e$. Luego

$$\mathcal{H}_{e,g}i = i\mathcal{H}_{e,g} = \mathcal{H}_{e,gi}.$$

Recordemos que dada $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ una curva C^∞, una levantada de γ es una curva $\Gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow G$, C^∞ a trozos, que verifica $p(\Gamma(t)) = \gamma(t)$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Como consecuencia de la existencia de secciones locales para p se deduce la existencia de levantadas de curvas en Q.

DEFINICIÓN 1.7: *Sea Γ una levantada de $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$. Γ es una levantada horizontal si $\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_{e,\Gamma(t)}$.*

En el caso general, si (P, M, G) es un fibrado principal de proyección $\pi : P \longrightarrow M$ y conexión H, dada $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva C^∞ y $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ se demuestra que existe una única levantada horizontal Γ, de γ, que cumple $\Gamma(0) = p$, (Ver [10]).

Ecuación de transporte

A continuación deducimos la ecuación de transporte para una curva diferenciable en Q.

Dada $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ una curva diferenciable y Γ su levantada horizontal tenemos

$$p(\Gamma(t)) = \gamma(t).$$

Diferenciando obtenemos

$$(Tp)_{\Gamma(t)}\dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Por otro lado, como vimos en 1.5

$$(Tp)_{\Gamma(t)} = (TL_{\Gamma(t)})_e (Tp)_1 l_{\Gamma(t)^{-1}}.$$

Por consiguiente

$$(TL_{\Gamma(t)})_e (Tp)_1 l_{\Gamma(t)^{-1}} \dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$$

o bien

$$(TL_{\Gamma(t)})_e (Tp)_1 \Gamma^{-1}(t)\dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$$

$$(Tp)_1 \Gamma^{-1}(t)\dot{\Gamma}(t) = (TL_{\Gamma(t)})_e^{-1} \dot{\gamma}(t).$$

Como Γ es horizontal $\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_{e,\Gamma(t)}$, es decir $\Gamma^{-1}(t)\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_e$; resulta entonces

$$\Gamma^{-1}(t)\dot{\Gamma}(t) = K_e (TL_{\Gamma(t)})_e^{-1} \dot{\gamma}(t)$$

pero por 1.3

$$K_{\gamma(t)} = Aut_{\Gamma(t)} K_e (TL_{\Gamma(t)})_e^{-1}$$

luego obtenemos la ecuación

$$\dot{\Gamma}(t) = K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\Gamma(t).$$

Recíprocamente, veamos que una solución de esta ecuación es horizontal. Tenemos que

$$\dot{\Gamma}(t)\Gamma^{-1}(t) = K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \in \mathcal{H}_{\Gamma(t)} = \Gamma(t)\mathcal{H}_e\Gamma^{-1}(t)$$

luego

$$\dot{\Gamma}(t) \in \Gamma(t)\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_{e,\Gamma(t)}.$$

Hemos obtenido la ecuación de transporte asociada a γ

(1) $$\dot{\Gamma}(t) = K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\Gamma(t).$$

OBSERVACIONES: *i) La ecuación de transporte es una ecuación diferencial ordinaria, con coeficientes* C^∞. *Luego fijada una condición consistente existe una única solución.*

ii) Si para $c \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ $\Gamma(c) \in G$ *entonces* $\Gamma(t) \in G$ *para todo* $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. *Para ver esto consideremos la ecuación*

$$\begin{cases} \dot{\Delta} & = -\Delta C(t) \\ \Delta(0) & = \Gamma(c)^{-1} \end{cases}$$

con $C(t) = K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))$. *Entonces si* $A = \Delta\Gamma$ *resulta* $\dot A = 0$. *Luego* $A = A(0) = 1$ *y entonces* $\Delta = \Gamma^{-1}$.

TEOREMA 1.8: *Dada* $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ *una curva tal que* $\gamma(0) = \varepsilon$ *la solución* Γ *de (1) tal que* $\Gamma(0) = 1$ *verifica*

$$p(\Gamma(t)) = \gamma(t).$$

<u>*Demostración:*</u> Las curvas $p(\Gamma(t))$ y $\gamma(t)$ verifican

$$\begin{cases} (p(\Gamma(t)))^{\cdot} = \dot\gamma(t) \\ p(\gamma(0)) = \gamma(0) \end{cases}$$

Luego coinciden para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Derivada covariante

La existencia de levantada horizontal nos permite definir la derivada covariante de un campo en una dirección dada. Si $X \in (TQ)_\varepsilon$, e Y es un campo tangente C^∞, en un entorno de ε, procedemos de la siguiente manera.

Ajustamos una curva a X: consideramos $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ con $\gamma(0) = \varepsilon$ y $\dot\gamma(0) = X$.

Resolvemos la ecuación de transporte asociada a γ. Tenemos así $L_{\Gamma(t)}\varepsilon = \gamma(t)$. Fijado un t, la aplicación $L_{\Gamma(t)} : Q \longrightarrow Q$ es un difeomorfismo y entonces

$$(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon : (TQ)_\varepsilon \longrightarrow (TQ)_{\gamma(t)}$$

es inversible.

Consideremos $Y(t) = (TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon^{-1} Y_{\gamma(t)}$, entonces $Y : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow (TQ)_\varepsilon$ es diferenciable pues la conexión lo es, y luego podemos derivar $Y(t)$.

Este procedimiento nos lleva a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.9: *Dado* Y *un campo en un entorno* U *de* ε *y* $X \in (TQ)_\varepsilon$ *un vector tangente, definimos la derivada covariante del campo* Y *en la dirección* X *como*

$$D_X Y = \frac{d}{dt}(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon^{-1} Y_{\gamma(t)}\big|_{t=0}$$

donde $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ *es una curva tal que* $\gamma(0) = e$ *y* $\dot{\gamma}(0) = X$, *y* Γ *es la única levantada horizontal de* γ *tal que* $\Gamma(0) = 1$.

Observemos que $D_X Y \in (TQ)_e$.

LEMA 1.10: *La definición de* $D_X Y$ *no depende de la curva* γ *considerada.*

<u>*Demostración:*</u> Para ver esto calculamos $K_e(D_X Y)$.

Sea $x = K_e X$ y sea la aplicación $y : U \longrightarrow A$ definida por $y_{e'} = K_{e'}(Y_{e'})$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} K_e \left(TL_{\Gamma(t)}\right)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) &= Aut_{\Gamma^{-1}(t)} K_{\gamma(t)}(Y_{\gamma(t)}) \\ &= \Gamma^{-1}(t) y_{\gamma(t)} \Gamma(t). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} K_e(D_X Y) &= \frac{d}{dt}(\Gamma^{-1}(t) y_{\gamma(t)} \Gamma(t))\big|_{t=0} \\ &= \dot{\Gamma}(0) y_e + y_e \dot{\Gamma}(0) + X \cdot y \\ &= X \cdot y + y_e x - x y_e \\ &= X \cdot y + [y_e \, , x] \end{aligned}$$

pues $\dot{\Gamma}(0) = K_e X = x$;($X \cdot y$ denota la derivada de la función y en la dirección X).

Hemos obtenido entonces

$$K_e(D_X Y) = X \cdot K(Y) + [K_e Y_e \, , K_e X]$$

de lo cual se deduce que la definición de $D_X Y$ no depende de la curva γ .

Observemos que el primer término de la expresión anterior corresponde a una derivación ordinaria de una función con valores en A , y depende de los valores del campo en un entorno del punto. Mientras que el segundo es de caracter tensorial.

Es fácil ver que $D_X Y$ verifica las propiedades que caracterizan a una derivada covariante.

Definimos a continuación la derivada covariante de un campo a lo largo de una curva.

DEFINICIÓN 1.11: *Sea* $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ *una curva e* Y_t *un campo tangente a lo largo de* γ, *es decir* $Y_t \in (TQ)_{\gamma(t)}$. *La derivada covariante de* Y *a lo largo de* γ *es el campo* $\frac{D}{dt}Y$ *que verifica*

$$K_\gamma(\frac{D}{dt}Y) = \frac{d}{dt}K_\gamma(Y) + [K_\gamma(Y), K_\gamma(\dot\gamma)].$$

Transporte paralelo y geodésicas

DEFINICIÓN 1.12: *Sea* γ *una curva en* Q *e* Y *un campo a lo largo de* γ. *Decimos que* Y *es paralelo a lo largo de* γ *si*

$$\frac{D}{dt}Y = 0.$$

PROPOSICIÓN 1.13: Y *es paralelo a lo largo de* γ *si y sólo si*

$$Y_t = (TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon Y_0$$

donde Γ *es la única levantada horizontal de* γ *tal que* $\Gamma(0) = 1$ *y* $\varepsilon = \gamma(0)$.

Demostración: Comprobemos primero que $W_t = (TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon Y_0$ es paralelo a lo largo de γ. Teníamos que

$$K_{\gamma(t)}(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon = Aut_{\Gamma(t)}K_\varepsilon.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(K_{\gamma(t)}(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon(Y_0)) &= \frac{d}{dt}(Aut_{\Gamma(t)}K_\varepsilon) \\
&= \frac{d}{dt}(\Gamma(t)K_\varepsilon\Gamma^{-1}(t)Y_0) \\
&= \dot\Gamma(t)K_\varepsilon Y_0\Gamma^{-1}(t) - \Gamma(t)K_\varepsilon Y_0\Gamma^{-1}(t)\dot\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t) \\
&= K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\Gamma(t)K_\varepsilon Y_0\Gamma^{-1}(t) - \Gamma(t)K_\varepsilon Y_0\Gamma^{-1}(t)K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) \\
&= K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))K_{\gamma(t)}(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon Y_0 - K_{\gamma(t)}(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon Y_0 K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) \\
&= -[K_{\gamma(t)}(TL_{\Gamma(t)})_\varepsilon Y_0\,, K_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))]
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{D}{dt}((TL_{\Gamma(t)})_e Y_0) = 0.$$

La otra implicación se deduce de la unicidad de solución para una ecuación ordinaria con condición inicial.

DEFINICIÓN 1.14: *Una curva γ en Q se llama geodésica si $\dot{\gamma}$ es paralelo a lo largo de γ. Es decir si γ verifica*

$$\frac{d}{dt}(K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) = 0.$$

TEOREMA 1.15: *Sea γ una curva en Q, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$; γ es geodésica si y sólo si*

$$\gamma(t) = L_{e^{tK_\varepsilon(X)}}\varepsilon$$

donde $\varepsilon \in Q$ y $X \in (TQ)_\varepsilon$.

Más aún ésta es la única geoésica tal que $\gamma(0) = \varepsilon$ y $\dot{\gamma}(0) = X$.

Demostración: Tenemos $\frac{d}{dt}(K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) = 0$. Luego resulta $K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) =$ constante $= K_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = K_\varepsilon(X)$.

Obtenemos la ecuación de transporte

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}(t) & = K_\varepsilon(X)\Gamma(t) \\ \Gamma(0) & = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $\Gamma(t) = e^{tK_\varepsilon(X)}$ y $\gamma(t) = L_{\Gamma(t)}\varepsilon$ de donde resulta el teorema.

CAPITULO 2

El espacio de los elementos de cuadrado σ

Q como espacio homogéneo de Banach

Sea A un álgebra de Banach con 1 y G el grupo de inversibles de A. Fijado σ notaremos con A_σ a la subálgebra cerrada de los elementos de A que conmutan con σ, $A_\sigma = \{a \in A : a\sigma = \sigma a\}$ y G_σ al grupo de elementos inversibles de A_σ.

Sea Q el conjunto de elementos de A, de cuadrado igual a σ, $Q = \{s \in A : s^2 = \sigma\}$. Todo elemento de Q es inversible y conmuta con σ, pues $s^{-1} = s\sigma^{-1}$ y $s\sigma = s^3 = \sigma s$. Luego Q está contenido en G_σ. Notemos que cuando σ es la identidad Q resulta el espacio de reflexiones de A, que también puede pensarse como el espacio de proyectores de A. Este espacio ha sido estudiado en los trabajos [1] y [2]. Definimos una acción a izquierda L, de G_σ en Q

$$L : G_\sigma \times Q \longrightarrow Q$$
$$L(g,s) = L_g s = gsg^{-1} \qquad\qquad g \in G_\sigma, \quad s \in Q.$$

PROPOSICIÓN 2.1: *L es diferenciable y verifica*

i) $L_1 = Id_Q$,

ii) $L_g L_{g'} = L_{gg'} \qquad\qquad g, g' \in G_\sigma$,

iii) *L es localmente transitiva, es decir dado $s \in Q$ existe un entorno U_s de s tal que si $s' \in U_s$, existe $g \in G_\sigma$ tal que $L_g s = s'$.*

Demostración: Veamos iii) : sean s y $s' \in Q$ y sea $g = \dfrac{1+\sigma^{-1}ss'}{2}$, $g \in A_\sigma$. Se verifica que $gs' = \dfrac{s+s'}{2} = sg$. Si s y s' están próximos g resulta inversible : consideremos la función $\varphi : Q \longrightarrow A_\sigma$ dada por $\varphi(s') = \dfrac{1+\sigma^{-1}ss'}{2}$. φ es continua y $\varphi(s) = 1 \in G_\sigma$. Dado V un entorno de 1, en G_σ, existe un entorno U_s de s, en Q, tal que $\varphi(U_s) \subset V$. Luego para $s' \in U_s$ $g = \dfrac{1+\sigma^{-1}ss'}{2}$ es inversible. Resulta entonces, $g^{-1}sg = s'$, o bien $L_{g^{-1}}s = s'$.

Fijado $s \in Q$, definimos la aplicación $p : G_\sigma \longrightarrow Q$ como

$$p(g) = p_s(g) = L_g s = gsg^{-1}.$$

La órbita de s, $p(G_\sigma)$, es abierta pues L es localmente transitiva: si $s' \in p(G_\sigma)$, existe un entorno U de s' tal que si $r \in U$, existe $g \in G_\sigma$ tal que $L_g s' = r$. Suponiendo que $s' = L_{g_0}s$, resulta $r = L_g L_{g_0} s = L_{gg_0} s$ y por lo tanto $r \in p(G_\sigma)$. Luego U está contenido en $p(G_\sigma)$.

$p(G_\sigma)$ es también cerrada: observemos que Q es la unión disjunta de las órbitas y por lo tanto $p_s(G_\sigma) = Q - \biguplus_{s' \notin p_s(G_\sigma)} p_{s'}(G_\sigma)$ es cerrada.

Tenemos entonces el siguiente

COROLARIO 2.2: *La órbita de s, $p(G_\sigma)$ es abierta y cerrada.*

PROPOSICIÓN 2.3: *p admite secciones locales: dado $s' \in p(G_\sigma)$ existe un entorno U de s' y una aplicación $\delta : U \longrightarrow G_\sigma$ tal que $p \circ \delta = id_U$.*

Demostración: Observemos que este resultado es otra consecuencia de la transitividad local de L : sabemos que existe un entorno U de s tal que si $s' \in U$ existe $g \in G_\sigma$ tal que $L_g s = s'$, o bien $p(g) = s'$, con $g^{-1} = \dfrac{1+\sigma^{-1}ss'}{2}$; definiendo $\delta : U \longrightarrow G_\sigma$ como $\delta(s') = g$ tenemos $p\delta(s') = s'$, para $s' \in U$. Si $s_0 \in p(G_\sigma)$ existe $h \in G_\sigma$ tal que $s_0 = L_h s$. La aplicación $L_h : Q \longrightarrow Q$ es un isomorfismo. Luego, tomando $V = L_h(U)$, como entorno de s_0 , $l_h \delta L_{h^{-1}}$ es una sección local en un entorno V de s_0, donde $l_h : G_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ es la multiplicación a izquierda por h: sea $t \in V = L_h(U)$, $t = hs'h^{-1}$ con $s' \in U$, entonces $p(l_h \delta L_{h^{-1}})(t) = pl_h\delta(s') = h\delta(s')\, s\, \delta(s')^{-1}h^{-1} = L_h p(\delta(s')) = L_h s' = t$.

TEOREMA 2.4: *Q es una variedad diferenciable.*

Demostración: Dado $s \in Q$ consideremos la aplicación $p_s : G_\sigma \longrightarrow A_\sigma$ dada por $p_s(g) = L_g s = gsg^{-1}$. Calculemos la aplicación tangente a p_s en 1 : notemos que $(TG_\sigma)_1$ se identifica con A_σ y por lo tanto $(Tp_s)_1 : A_\sigma \longrightarrow A_\sigma$. Tomando $g(t)$ una curva en G_σ, con $g(0) = 1$ y $\dot{g}(0) = X$, se verifica $p_s(g(t)) = g(t)\, s\, g(t)^{-1}$. Derivando, en $t = 0$, obtenemos $(Tp_s)_1(X) = [X, s] = Xs - sX$. Calculando el núcleo y el rango de $(Tp_s)_1$ obtenemos que $ker(Tp_s)_1 = \{X \in A_\sigma : Xs = sX\}$ y $rango(Tp_s)_1 = \{X \in A_\sigma : Xs = -sX\}$. Verifiquemos la última igualdad: si $Y \in rango((Tp_s)_1)$, entonces existe $X \in A_\sigma$ tal que $Y = Xs - sX$, luego $Ys = Xs^2 - sXs = -(sXs - \sigma X) = -sY$. Recíprocamente, si Y es tal que $Ys = -sY$, tomemos $X = \frac{1}{2} Y s^{-1}$, entonces $(Tp_s)_1(X) = Y$, o sea $Y \in rango((Tp_s)_1)$. Ambos subespacios son complementados, más aún $A_\sigma = ker((Tp_s)_1) \oplus rango((Tp_s)_1)$: si $X \in A_\sigma$, X se puede escribir como $X = X_1 + X_2$, con $X_1 \in ker((Tp_s)_1)$ y $X_2 \in rango((Tp_s)_1)$, y resulta $X_1 = \dfrac{X + sXs^{-1}}{2}$, $X_2 = \dfrac{X - sXs^{-1}}{2}$.

Se verifica además que la aplicación $p_s : G_\sigma \longrightarrow Q_s$ es abierta (donde $Q_s = p_s(G_\sigma)$ es la órbita de s). Esto se deduce de la existencia de secciones locales: sea $g \in G_\sigma$ y W un entorno de g; queremos ver que $p(W)$ es un entorno de $p(g) = gsg^{-1} = s'$. Sabemos que existe un entorno U de s tal que $\delta : U \longrightarrow G_\sigma$ es una sección local en s, $\delta(s) = 1$ y $l_g \delta L_{g^{-1}} : L_g(U) \longrightarrow G_\sigma$ es una sección local en s', y $l_g \delta L_{g^{-1}}(s') = g$. Usando la continuidad de $l_g \delta L_g^{-1}$, dado W entorno de g, existe V entorno de s', $V \subset L_g(U)$, tal que $l_g \delta L_g^{-1}(V) \subset W$ y luego $V = p \circ (l_g \delta L_g^{-1})(V) \subset p(W)$ como queríamos.

Se deduce, aplicando la proposición 1.5 de [3], que Q_s es una subvariedad de A_σ. Resulta entonces que $Q = \biguplus_{s \in Q} Q_s$ es una variedad.

Podemos ahora calcular el espacio tangente a Q, en s, y la aplicación tangente a $p : G_\sigma \longrightarrow Q$.

$$(TQ)_s = \{X \in A_\sigma : Xs = -sX\}.$$

Para ver esto consideremos una curva $\gamma(t)$ en Q, tal que $\gamma(0) = s$ y $\dot{\gamma}(0) = X$; derivando en $t = 0$ la expresión $\gamma(t)^2 = \sigma$, obtenemos $Xs + sX = 0$. Recíprocamente, si $X \in A_\sigma$ y $Xs = -sX$, tomando la curva $\gamma(t) = se^{s^{-1}Xt}$, se verifica $\gamma(0) = s$, $\dot{\gamma}(0) = X$ y $\gamma(t)^2 = se^{s^{-1}Xt} se^{s^{-1}Xt} = s^2 e^{-s^{-1}Xt} e^{s^{-1}Xt} = \sigma$.

La aplicación tangente a p en 1 está dada por

$$(Tp)_1 : A_\sigma \longrightarrow (TQ)_s \qquad (Tp)_1 = [X, s].$$

Llamemos I_s al grupo de isotropía de s, es decir $I_s = \{g \in G_\sigma : L_g s = s\}$. I_s es un subgrupo cerrado de G_σ. El álgebra de Lie de I_s es $\mathcal{J}_s = \{X \in A_\sigma : Xs = sX\}$.

I_S opera en G_σ por traslación:

$$\begin{aligned} R : I_s \times G_\sigma &\longrightarrow G_\sigma \\ (t, g) &\longrightarrow R_t(g) = gt \qquad\qquad t \in I_s,\ g \in G_\sigma. \end{aligned}$$

Esta operación no tiene puntos fijos : si $R_t(g) = g$ entonces $gt = g$. Luego $t = 1$.

(G_σ, Q, p) resulta un espacio homogéneo de Banach, a fortiori, un fibrado principal localmente trivial, con grupo estructural I_s.

Reductividad

A continuación definimos un complemento natural de $\mathcal{J}_s$, que convierte a (G_σ, Q, I_s) en un espacio homogenéo reductivo. Sea $\mathcal{H}_s$ el subespacio definido por

$$\mathcal{H}_s = \{X \in A_\sigma : Xs = -sX\}.$$

Tenemos entonces:

PROPOSICIÓN 2.5: *Se verifica*

i) $A_\sigma = \mathcal{J}_s \oplus \mathcal{H}_s$,

ii) $t\mathcal{H}_s t^{-1} = \mathcal{H}_s$ *para todo* $t \in I_s$,

iii) $(Tp)_1|_{\mathcal{H}_s} : \mathcal{H}_s \longrightarrow (TQ)_s$ *es un isomorfismo.*

Demostración: Vimos la parte i) en el teorema anterior. Veamos ii): si $X \in \mathcal{H}_s$, $t \in I_s$ resulta $tXt^{-1}s = tXt^{-1}stt^{-1} = tXst^{-1} =$ que $t\mathcal{H}_s t^{-1}$ está incluído en $\mathcal{H}_s$, para cualquier $t \in I_s$. Recíprocamente si $X \in \mathcal{H}_s$, $X = tt^{-1}Xtt^{-1}$, con $t^{-1}Xt \in \mathcal{H}_s$, luego $X \in t\mathcal{H}_s T^{-1}$.

Para verificar iii) recordemos que $(Tp)_1(X) = Xs - sX$ y que $ker(Tp)_1 = J_s$. Luego si $X \in \mathcal{H}_s$ resulta $(Tp)_1(X) = 2Xs$. Entonces $(Tp)_1|_{\mathcal{H}_s} : H_s \longrightarrow (TQ)_s$ es biyectiva : es inyectiva pues s es inversible y si $Y \in (TQ)_s$, tomando $X = \frac{1}{2}Ys^{-1}$, $(Tp)_1(X) = Y$, pues como $Ys = -sY$, $Xs = -sX$.

Llamamos $K_s = ((Tp)_{1\mathcal{H}_s})^{-1}$, $K_s : (TQ)_s \longrightarrow \mathcal{H}_s$ y $K_s(Y) = \frac{1}{2}Ys^{-1}$. Resulta entonces (G_σ, Q, I_s) un espacio homogéneo reductivo.

Conexión en Q

Definimos ahora una conexión en Q, dando una distribución de subespacios horizontales en G_σ: si $g \in G_\sigma$

$$\mathcal{H}_{s,g} = g\mathcal{H}_s.$$

Notemos que $H_{s,1} = H_s$.

Definimos el espacio de vectores verticales en g como

$$\mathcal{V}_g = \{X \in A_\sigma : (Tp)_g X = 0\}.$$

LEMA 2.6: $\mathcal{V}_g = g\mathcal{J}_s$ y $\mathcal{V}_g \oplus \mathcal{H}_{s,g} = A_\sigma$.

<u>*Demostración:*</u> Se verifica que

$$L_g \circ p \circ l_{g^{-1}} = p \qquad\qquad g \in G_\sigma$$

(recordemos que $l_g : G_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ es la multiplicación a izquierda por g) pues $L_g \circ p \circ l_{g^{-1}}(h) = L_g \circ p(g^{-1}h) = L_g(g^{-1}hsh^{-1}g) = g(g^{-1}hsh^{-1}g)g^{-1} = hsh^{-1} = p(h)$.

Diferenciando en g, obtenemos

$$(TL_g)_s(Tp)_1 l_{g^{-1}} = (Tp)_g$$

de donde se deduce que $V_g = ker(Tp)_g = g\_Js$ ya que $(TL_g)_s$ es un isomorfismo; de esto se obtiene que $\mathcal{V}_g$ y $\mathcal{H}_{s,g}$ son complementarios.

PROPOSICIÓN 2.7: *La conexión definida es diferenciable e I_s - equivariante. Esto es*

$$(Tr_i)_g(\mathcal{H}_{s,g}) = \mathcal{H}_{s,g}\,i = \mathcal{H}_{s,gi} \qquad \forall i \in I_s$$

donde r_i denota la multiplicación a derecha por i.

Demostración: Teniendo en cuenta que $\mathcal{V}_g = gJ_s$, si T es la proyección sobre $\mathcal{H}_s$ paralela a $\mathcal{V}_1$, entonces la proyección sobre $\mathcal{H}_{s,g}$, paralela a $\mathcal{V}_g$, está dada por $l_g \circ T \circ l_{g^{-1}}$, que varía de manera C^∞ con g.

Veamos la condición de I_s-equivariancia:

$\mathcal{H}_{s,g}i = g\mathcal{H}_s i$. Si $i \in I_s$ $\mathcal{H}_s = i\mathcal{H}_s i^{-1}$, entonces $g\mathcal{H}_s i = g\,i\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s,gi}$.

Levantada horizontal, derivada covariante y geodésicas

Como ya vimos, al ser (G_σ, Q, I_s) un fibrado principal, dada γ una curva en Q y q un punto en $p^{-1}(\{\gamma(0)\})$ existe una única levantada horizontal Γ tal que $\Gamma(0) = q$. Daremos a continuación la ecuación explícita de la cual Γ es solución.

TEOREMA 2.8: *Dada $\gamma \subset Q$ una curva diferenciable, la levantada horizontal de γ, Γ, que verifica $\Gamma(0) = 1$ es la solución del problema*

$$(1)\begin{cases} \dot\Gamma(t) & = \frac{1}{2}\dot\gamma(t)\gamma(t)^{-1}\Gamma(t) \\ \Gamma(0) & = 1 \end{cases}$$

Demostración: Diferenciando la expresión $p(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ obtenemos

$$(Tp)_{\Gamma(t)}\dot\Gamma(t) = \dot\gamma(t).$$

Por otro lado sabemos que

$$(Tp)_{\Gamma(t)} = (TL_{\Gamma(t)})_s\,(Tp)_1\,l_{\Gamma(t)^{-1}} \qquad \text{(ver 2.6)}$$

luego

$$(TL_{\Gamma(t)})_s (Tp)_1 \, l_{\Gamma(t)^{-1}} \, \dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$$

$$(TL_{\Gamma(t)})_s (Tp)_1 \, \Gamma(t)^{-1} \dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Como $\Gamma(t)$ es horizontal, $\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_{s,\Gamma(t)} = \Gamma(t)\mathcal{H}_s$. Luego $\Gamma(t)^{-1}\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_s$, entonces

$$\Gamma(t)^{-1}\dot{\Gamma}(t) = K_s (TL_{\Gamma(t)})_s^{-1} \dot{\gamma}(t)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = \Gamma(t) K_s (TL_{\Gamma(t)})_s^{-1} \dot{\gamma}(t).$$

Por otro lado tenemos

$$L_g \circ p_s = p_{s'} \circ Aut\, g$$

donde $Aut\, g : G_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ está definido por $Aut\, g(h) = g\, h\, g^{-1}$ y $p_s : G_\sigma \longrightarrow Q$, $p_s(h) = h\, s\, h^{-1}$, y $s' = g^{-1} s g$.

Diferenciando obtenemos

$$(TL_g)_s (Tp_s)_1 = (Tp_{s'})_1 \, Aut\, g$$

$$(TL_g)_s (Tp_s)_1 \, Aut\, g^{-1} = (Tp_{s'})_1$$

luego

$$K_{s'} = Aut\, g \, K_s (TL_g)_s^{-1}.$$

Reemplazando obtenemos

$$\dot{\Gamma}(t) = K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\Gamma(t)$$

o bien

$$\dot{\Gamma}(t) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}(t)\gamma(t)^{-1}\Gamma(t).$$

Recíprocamente una solución de esta ecuación es horizontal:

$$\dot{\Gamma}\Gamma^{-1} = K_\gamma(\dot{\gamma}) \in \Gamma\mathcal{H}_s\Gamma^{-1}$$

(debido a la expresión calculada antes).Luego

$$\dot{\Gamma} \in \Gamma\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s,\Gamma}.$$

Llamaremos a (1) ecuación de transporte asociada a γ. Observemos que es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes C^∞ y por lo tanto, fijada una condición inicial consistente, existe una única solución. Además si $\Gamma(0) \in G_\delta$ entonces $\Gamma(t) \in G_\delta$ para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, donde $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$.

Como sabemos, la existencia de levantadas horizontales nos permite definir la derivada covariante de un campo en una dirección dada: si Y es un campo en un entorno U de s y $X \in (TQ)_s$, la derivada covariante de Y en dirección X es

$$D_X Y = \frac{d}{dt}(TL_{\Gamma(t)})_s^{-1} Y_{\gamma(t)}|_{t=0}$$

donde $\gamma(t)$ es una curva en Q, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow Q$ tal que $\gamma(0) = s$, $\dot\gamma(0) = X$ y Γ es la única levantada horizontal de γ tal que $\Gamma(0) = 1$. Como vimos, la definición de D no depende de la curva considerada. Podemos también definir la derivada covariante de un campo a lo largo de una curva, y si Y_t es un campo a lo largo de $\gamma(t)$, una curva en Q, como vimos resulta

$$K_\gamma(\frac{D}{dt}) = \frac{d}{dt}K_\gamma(Y) + [K_\gamma(\dot\gamma), K_\gamma(Y)].$$

TEOREMA 2.9: *Sea γ una curva en Q; γ es una geodésica si y sólo si*

$$\gamma(t) = L_{e^{tK_s(X)}} s = e^{\frac{t}{2}Xs^{-1}} s\, e^{\frac{t}{2}Xs^{-1}} = e^{tXs^{-1}} s.$$

Además ésta es la única geodésica tal que $\gamma(0) = s$ y $\dot\gamma(0) = X$.

<u>*Demostración:*</u> Como vimos en el capítulo 1, γ es geoésica si y sólo si verifica

$$\frac{d}{dt}(K_{\gamma(t)}\dot\gamma(t)) = 0.$$

Luego debe ser $K_{\gamma(t)}\dot\gamma(t) = constante = K_{\gamma(0)}\dot\gamma(0) = K_s(X)$.

Obtenemos entonces la ecuación de transporte

$$\begin{cases} \dot\Gamma(t) = K_s(X)\,\Gamma(t) \\ \Gamma(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $\Gamma(t) = e^{tK_s(X)} = e^{\frac{t}{2}Xs^{-1}}$. Luego $\gamma(t) = L_{\Gamma(t)}s = L_{e^{\frac{t}{2}Xs^{-1}}}s$. Como X es tangente a Q en s se verifica $Xs = -sX$, o bien $Xs^{-1} = -s^{-1}X$. Luego $\gamma(t) = e^{tXs^{-1}} = s\,e^{-tXs^{-1}}$.

Exponencial en Q

Recordemos que la aplicación exponencial de la conexión está dada de la siguiente manera: sea $s \in Q$, $X \in (TQ)_s$, definimos $\exp : (TQ)_s \longrightarrow Q$, como $\exp_s(X) = \gamma(1)$, donde $\gamma(t)$ es la única geodésica tal que $\gamma(0) = s$ y $\dot\gamma(0) = X$, es decir $\gamma(t) = e^{tXs^{-1}}s$. Resulta entonces

$$\exp(X) = e^{Xs^{-1}}s = s\,e^{-Xs^{-1}}.$$

Podemos definir también la aplicación

$$\Phi : TQ \longrightarrow Q$$

$$\Phi(s, X) = \exp_s(X).$$

Ejemplo: *Consideremos el espacio de matrices $M_2(C)$. Toda matriz inversible es semejante a una de las siguientes matrices:*

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, *con* a, $b \in C$, *no nulos.*

Calculemos entonces el conjunto de raíces cuadradas de A y B.

$$Q_A = \{\begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & -a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\}.$$

En el segundo caso, si $a \neq b$,

$$Q_B = \{\begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\}.$$

Si $a = b$ Q_B resulta un conjunto con infinitos elementos, semejante al conjunto de reflexiones.

CAPITULO 3

Descomposición polar en Q

Sea ahora A un álgebra C^* con 1 y fijemos $\sigma \in A$ unitario. Consideremos nuevamente A_σ, G_σ, y Q como antes. Como sabemos Q está contenido en G_σ. Podemos entonces, para $s \in Q$, considerar su descomposición polar:

$$s = \lambda^2 \rho$$

donde λ es positivo y ρ es unitario.

Proposición 3.1: *Si $s \in G$ y $s = \lambda^2\rho$ es su descomposición polar, entonces $s \in Q$ si y sólo si*

i) $\rho^2 = \sigma$ *y*

ii) $\rho\lambda = \lambda^{-1}\rho$ *(o bien* $\lambda^{-1} = \rho\lambda\rho^{-1}$ *).*

Demostración: Sea $\mu = \lambda^2$, como $s^2 = \sigma$ y $\sigma^{-1} = \sigma^*$ tenemos

$$\begin{aligned} (\mu\rho\mu\rho)^{-1} &= (\mu\rho\mu\rho)^* \\ \rho^{-1}\mu^{-1}\rho^{-1}\mu^{-1} &= \rho^{-1}\mu\rho^{-1}\mu \\ \mu^{-1}\rho^{-1}\mu^{-1} &= \mu\rho^{-1}\mu \\ \mu^{-2} &= \rho^{-1}\mu^2\rho. \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada positiva obtenemos $\mu^{-1} = \rho^{-1}\mu\rho$, y $\lambda^{-1} = \rho^{-1}\lambda\rho$, o bien $\rho\lambda^{-1} = \lambda\rho$, lo que prueba (ii). Como $\sigma = s^2$, $\sigma = \mu\rho\mu\rho = \rho^2$. Recíprocamente, usando i) y ii) $s^2 = \lambda^2\rho\lambda^2\rho = \rho^2 = \sigma$.

Sea $P = \{\rho \in Q : \rho^* = \rho^{-1}\}$ el conjunto de elementos unitarios de Q. Teniendo en cuenta la propiedad anterior podemos definir la siguiente aplicación:

$$\pi : Q \longrightarrow P \qquad \pi(s) = \rho$$

donde $s = \lambda^2\rho$, con λ positivo y ρ unitario. Llamaremos Q_ρ a la fibra de ρ, $Q_\rho = \pi^{-1}(\{\rho\})$.

Si consideramos una representación de A en el espacio $\mathcal{L}(E)$ con E un espacio de Hilbert, cada $\rho \in P$ determina una forma bilineal:

$$B_\rho(x, y) = (\rho x, y) \qquad x, y \in E.$$

B_ρ es no degenerada pues ρ es inversible y λ es B_ρ-unitario: $B_\rho(\lambda x, y) = (\rho\lambda x, y) = (\lambda^{-1}\rho x, y) = (\rho x, \lambda^{-1}y) = B_\rho(x, \lambda^{-1}y)$, luego, si llamamos λ^ρ al adjunto de λ con respecto a la forma B_ρ resulta, $\lambda^\rho = \lambda^{-1}$.

OBSERVACIÓN: *B_ρ es simétrica si y sólo si $\sigma = 1$.*

Para $a \in A_\sigma$ $a^\rho = \rho a^* \rho^{-1}$.

Algunas de las siguientes demostraciones son adaptaciones de los resultados respectivos correspondientes al caso $\sigma = 1$ (cf. [1]).

PROPOSICIÓN 3.2: *Sea $s \in Q$, $\rho \in P$. Son equivalentes*

i) $\sigma^{-1}s\rho > 0$.

ii) $\pi(s) = \rho$.

iii) $s = \lambda\rho\lambda^{-1}$ *con* $\lambda > 0$ *y* B_ρ*-unitario.*

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii): $0 < \sigma^{-1}s\rho = s\sigma^{-1}\rho = s\rho^{-1} = \lambda^2$, luego $s = \lambda^2\rho$ y $\pi(s) = \rho$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Si $\pi(s) = \rho$, $s = \lambda^2\rho$ con $\lambda > 0$ y $\lambda\rho = \rho\lambda^{-1}$; luego $s = \lambda\rho\lambda^{-1}$ con $\lambda > 0$ y B_ρ-unitario.

iii) $\Rightarrow$ i): $\sigma^{-1}s\rho = s^{-1}\rho = \lambda\rho^{-1}\lambda^{-1}\rho = \lambda^2 > 0$ pues λ es B_ρ-unitario. Podemos entonces caracterizar la fibra:

$$Q_\rho = \{\lambda\rho\lambda^{-1} : \lambda > 0 \quad y \quad B_\rho\text{-unitario}\}.$$

Calculemos el espacio tangente a P en ρ, $(TP)_\rho$: si $\gamma \subset P$ es una curva tal que $\gamma(0) = \rho$ y $\dot\gamma(0) = X$ derivando $\gamma^2(t) = \sigma$ se verifica $\rho X + X\rho = 0$. Por otro lado $\gamma^*(t) = \gamma^{-1}(t)$, derivando en $t = 0$ resulta $X^* = -\rho^{-1}X\rho^{-1} = \rho^{-2}X = \sigma^{-1}X = X\sigma^{-1}$. Recíprocamente tomando la curva $\gamma(t) = \rho e^{\rho^{-1}Xt}$ se verifica $\gamma(0) = \rho$, $\gamma^*(t) = \gamma^{-1}(t)$ y $\gamma^2(t) = \sigma$. Luego $(TP)_\rho\{X \in (TQ)_\rho : X^* = \sigma^{-1}X = X\sigma^{-1}\}$.

Sea $N_\rho = \{X \in (TQ)_\rho : X^* = -\sigma^{-1}X\}$. Tenemos entonces

$$(TQ)_\rho = (TP)_\rho \oplus N_\rho.$$

Explícitamente, si $X \in (TQ)_\rho$ se tiene $X = X_1 + X_2$ con $X_1 \in (TP)_\rho$ y $X_2 \in N_\rho$, $X_1 = \dfrac{X + \sigma X^*}{2}$ y $X_2 = \dfrac{X - \sigma X^*}{2}$.

Sea $N = (\bigcup N_\rho, P)$.

TEOREMA 3.3: *Sea $\Phi : N \longrightarrow Q$ la restricción a N de la función exponencial: $\Phi(\rho, X) = \exp_\rho(X) = e^{X\rho^{-1}}\rho$ con $\rho \in P$, $X \in N_\rho$. Entonces:*

i) Φ es un difeomorfismo de N sobre Q.

ii) para cada $\rho \in P$ $Q_\rho = \Phi(\rho, N_\rho)$.

Demostración: Si $s \in Q$, $s = \lambda^2\rho$ con $\lambda > 0$ y ρ unitario, sea $Y = \log\lambda$; $Y = Y^*$ y como $\rho\lambda = \lambda^{-1}\rho$, $\rho\log\lambda = -\log\lambda\rho$, $\rho Y = -Y\rho$. Tomemos $\tilde{Y} = [Y,\rho] = 2Y\rho$, entonces $\tilde{Y}^* = 2\rho^{-1}Y = 2\sigma^{-1}\rho Y = -\sigma^{-1}2Y\rho = -\sigma^{-1}\tilde{Y}$, luego $\tilde{Y} \in N_\rho$ y $\Phi(\rho,\tilde{Y}) = e^{\tilde{Y}\rho^{-1}}\rho = e^{2Y}\rho = e^{2\log\lambda}\rho = \lambda^2\rho = s$. Luego la función $s \longrightarrow (\pi(s), [\log\lambda, \pi(s)])$ es la inversa de Φ. Esto prueba i).

Veamos ii): si $X \in N_\rho$, $\Phi(\rho, X) = e^{X\rho^{-1}}\rho$.

$(X\rho^{-1})^* = \rho X^* = -\rho\sigma^{-1}X = -\rho^{-1}X = X\rho^{-1}$, pues $X \in N_\rho$. Resulta entonces $e^{X\rho^{-1}} > 0$ y $\pi(\Phi(\rho, X)) = \rho$ y entonces $\Phi(\rho, X) \in Q_\rho$. Recíprocamente si $s \in Q_\rho$, $s = \lambda^2\rho$, tomando $Y = \log\lambda$, por i) resulta $\tilde{Y} = [Y,\rho] \in N_\rho$ y $\Phi(\rho, \tilde{Y}) = s$.

El grupo de B_ρ-unitarios

Estudiaremos ahora la acción del grupo de B_ρ-unitarios sobre la fibra Q_ρ: sea $\rho \in P$ fijo y llamemos $U_\rho = U(B_\rho)$ al grupo de elementos B_ρ -unitarios de A_σ, es decir

$$U_\rho = \{u \in A_\sigma : u^\rho = u^{-1}\} = \{u \in A_\sigma : \rho u^* \rho^{-1} = u^{-1}\}.$$

U_ρ opera por automorfismo interior sobre Q_ρ: si $s \in Q_\rho$ y $s = \lambda^2\rho$ entonces si $u \in U_\rho$ $usu^{-1} = u\lambda^2\rho u^{-1} = u\lambda^2\rho^2 u^*\rho^{-1} = u\lambda^2 u^*\sigma\rho^{-1} = u\lambda^2 u^*\rho$ y $u\lambda^2 u^* > 0$.

Definimos la aplicación $k : U_\rho \longrightarrow Q_\rho$, $k(u) = u\rho u^{-1}$. Llamemos ${U_\rho}^{(0)}$ a la fibra $k^{-1}(\{\rho\})$ y V_ρ a los elementos positivos de U_ρ. Si $u \in {U_\rho}^{(0)}$, deducimos de la cuenta anterior que $uu^* = 1$, pues $k(u) = uu^*\rho$. Esto muestra que ${U_\rho}^{(0)}$ es el conjunto de los elementos B_ρ-unitarios y unitarios a la vez.

El álgebra de Lie del grupo U_ρ, $(TU_\rho)_1$, es

$$\mathcal{L} = \{X \in A_\sigma \; : \; X^\rho = -X\}$$

pues si γ es una curva en U_ρ, con $\gamma(0) = 1$ y $\dot\gamma(0) = X$, tenemos $\rho\gamma(t)^*\rho^{-1} = \gamma^{-1}(t)$, derivando en $t = 0$ obtenemos $\rho X^*\rho^{-1} = -X$, o bien $X^\rho = -X$.

$\mathcal{L}$ se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$, con $\mathcal{L}_0 = \{X \in \mathcal{L} \; : \; X\rho = \rho X\}$ y $\mathcal{L}_1 = \{X \in \mathcal{L} \; : \; X\rho = -\rho X\}$.(Si $X = X_1 + X_2$, $X \in \mathcal{L}$, $X_1 \in \mathcal{L}_0$, $X_2 \in \mathcal{L}_1$, es $X_1 = \dfrac{X + \rho X\rho^{-1}}{2}$ y $X_2 = \dfrac{X - \rho X\rho^{-1}}{2}$).

Resulta además que $\mathcal{L}_0 = (T{U_\rho}^{(0)})_1$ y $\mathcal{L}_1 = (TV_\rho)_1$: si γ es una curva en ${U_\rho}^{(0)}$, con $\gamma(0) = 1$, $\dot\gamma(0) = X$, $X \in L$ y además derivando $\gamma\rho = \rho\gamma$ en $t = 0$ resulta $X\rho = \rho X$. Análogamente si γ es una curva en V_ρ que se ajusta a $X \in L$, derivando $\rho\gamma\rho^{-1} = \gamma^{-1}$ en $t = 0$, resulta $\rho X\rho^{-1} = -X$, o sea $\rho X = -X\rho$.

TEOREMA 3.4: *1)Sean $\mu : V_\rho \times {U_\rho}^{(0)} \longrightarrow U_\rho$ la aplicación dada por $\mu(v, u_0) = vu_0$, $p_1 : V_\rho \times {U_\rho}^{(0)} \longrightarrow V_\rho$ la proyección sobre la primera coordenada y $\nu : V_\rho \longrightarrow Q_\rho$ la restricción de k a V_ρ. Entonces μ y ν son difeomorfismos y el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
V_\rho \times {U_\rho}^{(0)} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_1"'] & U_\rho \arrow[d, "k"] \\
V_\rho \arrow[r, "\nu"'] & Q_\rho
\end{tikzcd}$$

Más aún, la inversa de μ es la descomposición polar.

2)La aplicación $X \longrightarrow e^X$ es un difeomorfismo de $\mathcal{L}_1$ sobre V_ρ.

Demostración: μ es inyectiva por la unicidad de la descomposición polar. Calculemos su inversa: sea $u \in U_\rho$, $\rho u^* \rho^{-1} = u^{-1}$. Si $u = \lambda u_0$, con $\lambda > 0$ y u_0 unitario, tenemos $u^{-1} = \rho u^* \rho^{-1} = \rho(\lambda u_0)^* \rho^{-1} = \rho {u_0}^{-1} \lambda \rho^{-1} = \rho {u_0}^{-1} \rho^{-1} \rho \lambda \rho^{-1}$. Luego $u = \rho \lambda^{-1} \rho^{-1} \rho u_0 \rho^{-1}$ y por unicidad de la descomposición polar tenemos

$$\rho \lambda^{-1} \rho^{-1} = \lambda \qquad y \qquad \rho u_0 \rho^{-1} = u_0.$$

Esto dice que $\lambda \in V_\rho$ y $u_0 \in {U_\rho}^{(0)}$. Resulta μ inversible, diferenciable y de inversa diferenciable.

También ν es un difeomorfismo debido a la caracterización de Q_ρ. Verifiquemos que el diagrama conmuta:

$$k(\mu(v, u_0)) = k(v\, u_0) = v\, u_0\, \rho\, u_0^{-1} v^{-1} = v\, \rho\, v^{-1} = v^2 \rho$$
$$\nu(p_1(v, u_0)) = \nu(v) = v\, \rho\, v^{-1} = v^2 \rho.$$

Para ver 2) sea $X \in \mathcal{L}_1$, de $X^\rho = -X$ y $X\rho = -\rho X$ tenemos $\rho X^* \rho^{-1} = -X$, o sea $\rho X^* = -X\rho = \rho X$, luego $X^* = X$ y $e^X > 0$. Por otro lado, de $\rho X \rho^{-1} = -X$ obtenemos $\rho e^X \rho^{-1} = e^{-X}$. Luego e^X es B_ρ-unitario. Recíprocamente si $\alpha \in V_\rho$, $\log \alpha \in \mathcal{L}_1$ pues de $\rho \alpha \rho^{-1} = \alpha^{-1}$ se deduce $\rho \log \alpha = -\log \alpha\, \rho$ y como $(\log \alpha)^* = \log \alpha$, $(\log \alpha)^\rho = -\log \alpha$.

Métrica de Finsler

Definiremos ahora una métrica en Q:

DEFINICIÓN 3.5: *Sea $X \in (TQ)_s$, definimos la norma $\|X\|_s$ como*

$$\|X\|_s = \|\lambda^{-1} X \lambda\|$$

donde $s = \lambda^2 \rho$, $\lambda > 0$.

$(Q, \| \ \|_s)$ es un espacio de Finsler.

Observemos que $\| \ \|_s$ es una norma de operadores natural para los elementos de A_σ; podemos definir el siguiente producto interno en E:

$$(x\,,y\,)_s = (\lambda^{-1}x\,,\lambda^{-1}y\,) \qquad\qquad x,y \in E.$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned}(x\,,y\,)_s &= \frac{1}{2}(B_\rho(s^{-1}x\,,y\,) + B_{\rho^{-1}}(x\,,s^{-1}y\,))\\ &= \frac{1}{2}(B_\rho(x\,,sy) + B_{\rho^{-1}}(sx\,,y\,)).\end{aligned}$$

Pues $B_\rho(x\,,sy\,) = (\rho x\,,\lambda^2\rho y\,) = (\rho x\,,\rho\lambda^{-2}y) = (\lambda^{-1}x\,,\lambda^{-1}y\,)$ *y análogamente* $B_{\rho^{-1}}(sx,y) = (\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y)$.

Notaremos $|x|_s = (x\,,x\,)_s^{\frac{1}{2}}$.

Para $a \in A_\sigma$ *la norma de* a *como operador con el producto* $(\quad,\quad)_s$ *coincide con* $\|a\|_s$*:*

$$\|a\|_s = \|\lambda^{-1}a\lambda\| = \sup\{(ax\,,ax\,)_s^{\frac{1}{2}}\;:\;|x|_s = 1\}$$

Pues $\sup\{\|ax\|_s{}^2 \quad |x|_s = 1\} = \sup\{(\lambda^{-1}ax\,,\lambda^{-1}ax) \quad |x|_s = 1\}$*: para* $|x|_s = (\lambda^{-1}x\,,\lambda^{-1}x\,) = 1$ *sea* $y = \lambda^{-1}x$*, luego* $|y| = 1$.
Entonces $\|a\|_s = \sup\{(\lambda^{-1}a\lambda y\,,\lambda^{-1}a\lambda y\,)\;:\;|y| = 1\} = \|\lambda^{-1}a\lambda\|$.

Llamemos $a^\sharp$ *al adjunto de* a*, con respecto al producto* $(\quad,\quad)_s$*. Observemos que* $a^\sharp = \lambda^2 a^* \lambda^{-2}$.

PROPOSICIÓN 3.6: *La métrica de Finsler es* U_ρ*-invariante, en el sentido que*

$$|u\,x|_s = |x|_r$$

donde $s = u\,r\,u^{-1}$, $u \in U_\rho$, $s\,,r\, \in Q_\rho$, $x \in E$.

<u>*Demostración:*</u> $B_\rho(ux\,,sux\,) = (\rho ux\,,sux\,) = (\rho ux\,,uru^{-1}ux\,) = (\rho ux\,,urx\,) = B_\rho(ux\,,urx\,) = B_\rho(x\,,rx\,)$ pues u es B_ρ -unitario.

Análogamente $B_{\rho^{-1}}(sux\,,ux\,) = B_{\rho^{-1}}(rx\,,x\,)$. Luego $|ux|_s = |x|_r$.

Calculemos la aplicación tangente a π, $\pi\,:\,Q \longrightarrow P$. Sea $s \in Q$, tal que $\pi(s) = \rho$, $Z \in (TQ)_s$, $Y = (T\pi)_s(Z) \in (TP)_\rho$.

Supongamos que $\delta(t)$ es una curva en Q tal que $\delta(0) = s$, $\dot{\delta}(0) = Z$. Llamemos $\gamma(t) = \pi(\delta(t))$; entonces $\gamma(0) = \rho$ y $\dot{\gamma}(0) = Y$. Existe una curva $\lambda(t)$, positiva y $B_{\gamma(t)}$-unitaria tal que $\delta(t) = \lambda(t)\gamma(t)\lambda(t)^{-1}$. Sea $\Gamma(t)$ la levantada horizontal de $\gamma(t)$ y definamos $u(t) = \Gamma(t)^{-1}\lambda(t)\Gamma(t)$. Resulta $u(t) \in V_\rho$ y $u(0) = \lambda(0)$. En general si a es B_ρ-unitario y t es unitario, tat^{-1} es $B_{t\rho t^{-1}}$-unitario; en nuestro caso $\lambda(t)$ es $B_{\gamma(t)}$-unitario y $\Gamma(t)$ es unitario (pues verifica la ecuación $(\Gamma^*\Gamma)^{\cdot} = 0$ con $\Gamma(0) = 1$). Además $\Gamma(t)^{-1}\gamma(t)\Gamma(t) = \rho$. Luego $u(t)$ es B_ρ-unitario. También es positivo, por ser $\Gamma(t)$ unitario. Luego $u(t) \in V_\rho$.

Derivando $\delta = \lambda\gamma\lambda^{-1}$, en $t = 0$, obtenemos

$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \dot{\lambda}\rho\lambda^{-1} + \lambda\rho(-\lambda^{-1}\dot{\lambda}\lambda^{-1})$$
$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \dot{\lambda}\rho\lambda^{-1} - \lambda\rho\lambda^{-1}\dot{\lambda}\lambda^{-1}$$
$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \lambda(\lambda^{-1}\dot{\lambda}\rho - \rho\lambda^{-1}\dot{\lambda})\lambda^{-1}$$
$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \lambda[\lambda^{-1}\dot{\lambda}, \rho]\lambda^{-1}. \tag{1}$$

Derivando $u = \Gamma^{-1}\lambda\Gamma$ en $t = 0$ obtenemos

$$\dot{u} = \dot{\lambda} - \dot{\Gamma}\lambda + \lambda\dot{\Gamma} = \dot{\lambda} + [\lambda, \dot{\Gamma}].$$

Multiplicando por $\lambda^{-1} = u^{-1}(0) = \lambda^{-1}(0)$

$$u^{-1}\dot{u} = \lambda^{-1}\dot{\lambda} + u^{-1}[\lambda, \dot{\Gamma}]$$
$$\lambda^{-1}\dot{\lambda} = u^{-1}\dot{u} - u^{-1}[\lambda, \dot{\Gamma}].$$

Como Γ verifica $\dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1}\Gamma$, en $t = 0$ resulta $\dot{\Gamma}(0) = \frac{1}{2}Y\rho^{-1}$.

Luego $[\lambda, \dot{\Gamma}] = [\lambda, \frac{1}{2}Y\rho^{-1}] = \frac{1}{2}\lambda Y\rho^{-1} - \frac{1}{2}Y\rho^{-1}\lambda$.

Reemplazando $\lambda^{-1}\dot{\lambda}$ en (1) obtenemos:

$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \lambda[u^{-1}\dot{u} - \frac{1}{2}Y\rho^{-1} + \frac{1}{2}\lambda^{-1}Y\rho^{-1}\lambda, \rho]\lambda^{-1}$$
$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \lambda[u^{-1}\dot{u}, \rho]\lambda^{-1} - \frac{1}{2}\lambda[Y\rho^{-1} - \lambda^{-1}Y\lambda^{-1}\rho^{-1}, \rho]\lambda^{-1}$$
$$Z = \lambda Y\lambda^{-1} + \lambda[u^{-1}\dot{u}, \rho]\lambda^{-1} - \frac{1}{2}\lambda 2Y\lambda^{-1} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda^{-1}Y\lambda^{-1} + \lambda Y\lambda)\lambda^{-1}$$
$$Z = \lambda[u^{-1}\dot{u}, \rho]\lambda^{-1} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda^{-1}Y\lambda^{-1} + \lambda Y\lambda)\lambda^{-1}.$$

O bien

$$(2) \qquad Z = u[u^{-1}\dot{u}, \rho]u^{-1} + \frac{1}{2}u(u^{-1}Yu^{-1} + uYu)u^{-1}.$$

PROPOSICIÓN 3.7: *Sea $Z \in (TQ)_s$, si $Z = Z_s + Z_a$ es la descomposición de Z como una suma de un elemento Z_s, $\sharp\sigma^{-1}$ -simétrico y un elemento Z_a, $\sharp\sigma^{-1}$ - antisimétrico, entonces:*

$$Z_s = \frac{1}{2}u(u^{-1}Yu^{-1} + uYu)u^{-1}$$

$$Z_a = u[u^{-1}\dot{u}\,, \rho]u^{-1}.$$

<u>*Demostración:*</u> Veamos que $Z_s{}^\sharp = \sigma^{-1}Z_s$ y $Z_a{}^\sharp = -\sigma^{-1}Z_a$.

$Z_s{}^\sharp = \frac{1}{2}u^2(u^{-1})^*(u^{-1}Yu^{-1} + uYu)^* u^* u^{-2} = \frac{1}{2}u\sigma^{-1}(uYu + u^{-1}Yu^{-1})u^{-1} = \sigma^{-1}Z_s$ ya que $Y^* = \sigma^{-1}Y$.

Análogamente $Z_a{}^\sharp = u[u^{-1}\dot{u}\,, \rho]^*\, u^{-1}$.

$[u^{-1}\dot{u}\,, \rho]^* = (u^{-1}\dot{u}\rho - \rho u^{-1}\dot{u})^* = \rho^{-1}\dot{u}u^{-1} - \dot{u}\,u^{-1}\rho^{-1}$ pues $u^* = u$ y como $u(t)\rho = \rho u(t)^{-1}$, derivando en $t = 0$ resulta $\dot{u}\rho = -u\rho\dot{u}u^{-1}$, es decir $u^{-1}\dot{u}\rho = -\rho\dot{u}u^{-1}$. Finalmente $[u^{-1}\dot{u}\,, \rho]^* = \rho^{-1}\dot{u}\,u^{-1} - \dot{u}\,u^{-1}\rho^{-1} = -\sigma^{-1}[u^{-1}\dot{u}, \rho]$.

TEOREMA 3.8: *i)En cada $\rho \in P$ la aplicación tangente $(T\pi)_\rho : (TQ)_\rho \longrightarrow (TP)_\rho$ está dada por $(T\pi)_\rho(W) = W_s$ la parte σ^{-1} -simétrica de W en $(TQ)_\rho$.*

ii)En cada $s \in Q$, $s = \lambda\rho\lambda^{-1}$, con $\lambda \in V_\rho$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(TQ)_s \arrow[r, "N_s"] \arrow[d, "(T\pi)_s"'] & (TQ)_\rho \arrow[d, "(T\pi)_\rho"] \\
(TP)_\rho \arrow[r, "K_s"'] & (TP)_\rho
\end{tikzcd}$$

donde $N_s(Z) = \lambda^{-1}Z\lambda$, $K_s(Y) = \frac{1}{2}(\lambda^{-1}Y\lambda^{-1} + \lambda Y\lambda)$.

iii) N_s es una isometría de $(TQ)_s$ con la norma $\|\ \|_s$ sobre $(TP)_\rho$ con la norma $\|\ \|_\rho = \|\ \|$.

Demostración: Si $s = \rho$ entonces $\lambda = 1$ y $Z_s = Y$, lo que prueba i).

Para ver ii) tenemos $\|N_s(X)\|_\rho = \|N_s(X)\| = \|\lambda^{-1}X\lambda\| = \|X\|_s$. Además N_s preserva las partes σ^{-1}-simétrica y σ^{-1}- antisimétrica. Luego tenemos $K_s(T\pi)_s(Z) = K_s(Y) = \lambda^{-1}$(parte σ^{-1}-simétrica de $Z)\lambda = N_s($ parte σ^{-1}-simétrica de $Z)\lambda =$ parte σ^{-1}-simétrica de $N_s(Z) = (T\pi_s)_\rho(N_s(Z))$.

TEOREMA 3.9: *i)* $K_s : (TP)_\rho \longrightarrow (TP)_\rho$ *es inversible y verifica*

$$\|Y\| \leq \|K_s(Y)\|.$$

ii)La aplicación tangente de $\pi : Q \longrightarrow P$ *no aumenta las normas,*

$$\|(T\pi)_s(Z)\|_\rho \leq \|Z\|_s.$$

Demostración: Si vale i) tenemos, por el teorema anterior que $(T\pi)_s = K_s{}^{-1}(T\pi)_\rho N_s$. Como $(T\pi)_\rho(X) =$ parte σ^{-1}-simétrica de $X = \dfrac{X + \sigma X^*}{2}$, $\|(T\pi)_\rho(X)\| = \|\dfrac{X + \sigma X^*}{2}\|$ $\leq \frac{1}{2}(\|X\| + \|\sigma\|\|X^*\|) = \|X\|$.

Entonces $\|(T\pi)_s(Z)\|_\rho \leq \|(T\pi)_\rho N_s(Z)\|_\rho$.

Veamos iii): K_s es sobreyectiva pues el diagrama anterior conmuta. Por otro lado $\|K_s(Y)\| = \|\rho K_s(Y)\|$ pues ρ es unitario. Luego $\|K_s(Y)\| = \|\rho\lambda^{-1}Y\lambda^{-1} + \rho\lambda Y\lambda\| = \|\lambda\rho Y\lambda^{-1} + \lambda^{-1}\rho Y\lambda\| \geq 2\|\rho Y\| = 2\|Y\|$. En el paso anterior fue usada la desigualdad

$$2\|T\| \leq \|S\,T\,S^{-1} + S^{-1}T\,S\,\|$$

que vale para todo operador simétrico inversible S y todo operador T ([4]).

OBSERVACIÓN: *Hemos demostrado que para todo operador* S, *que sea la parte positiva de un operador conormal*, *(o equivalentemente, para todo* s *positivo tal que existe* ρ *unitario tal que* $s\rho = \rho s^{-1}$ *) y todo* T *vale*

$$2\|T\| \leq \|S\,T\,S + S^{-1}TS^{-1}\|.$$

Se puede generalizar esta desigualdad para operadores $T \in A$ *y* S *inversible. Se verifica siempre*

$$2\|T\| \leq \|S\,T\,S + S^{*-1}T\,S^{*-1}\|.$$

Ver [13].

Geodésicas en Q

Estudiaremos a continuación, algunas propiedades de las geodésicas de Q. Calcularemos la longitud de las curvas de la manera usual, referida a la métrica de Finsler definida antes. Así si γ es una curva en Q su longitud es

$$L(\gamma(t)) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

TEOREMA 3.10: *Dados ρ_0 y ρ_1 en Q_ρ existe una única geodésica contenida en Q_ρ que los une.*

<u>*Demostración:*</u> Sea $q \in Q_\rho$. Usando la aplicación exponencial existe una única geodésica que une q con ρ, ya que N_ρ es difeomorfo a Q_ρ. Sean ahora q y s en Q_ρ, arbitrarios. Tomemos en E el producto $(\ ,\ )_s$ y sus conceptos correspondientes: el espacio $P((\ ,\ )_s)$ de s-unitarios, el adjunto $a^\sharp$ de un elemento a, dado por $a^\sharp = \lambda^2 a^* \lambda^{-2}$, la s-descomposición polar y las s-fibras $Q_w((\ ,\ )_s)$. Claramente $s \in P((\quad)_s)$: si $s = \lambda^2 \rho$ con $\lambda\rho = \rho\lambda^{-1}$, $s^\sharp = \lambda^2\rho^{-1}\lambda^2\lambda^{-2} = \lambda^2\rho^{-1} = \rho^{-1}\lambda^{-2} = s^{-1}$.

Tenemos la siguiente identidad: $Q_s((\ ,\ )_s)_s = Q_{\pi(s)}$. $Q_\rho \subset \tilde{Q}_s = Q_s((\ ,\ )_s)$ pues si $q \in Q_\rho$ $q = \alpha^2\rho$, $\alpha > 0$, $\alpha\rho = \rho\alpha^{-1}$, luego $q = \alpha^2\lambda^{-2}\lambda^2\rho = \alpha^2\lambda^{-2}s$. Además $\alpha^2\lambda^{-2}s = \alpha^2\rho = \rho\lambda^{-2}\lambda^2\alpha^{-2} = s(\alpha^2\lambda^{-2})^{-1}$.

Tenemos $(\alpha^2\lambda^{-2}x, x) = (\lambda^{-1}\alpha^2\lambda^{-2}x, \lambda^{-1}x) = (\alpha^2\lambda^{-2}x, \lambda^{-2}x) \geq 0$ pues $\alpha > 0$. Luego $q \in \tilde{Q}_s$.

Recíprocamente si $q \in \tilde{Q}_s$, $q = \alpha^2 s =$, $\alpha s = s\alpha^{-1}$ y $\alpha >_s 0$, entonces $q = \alpha^2 s = \alpha^2\lambda^2\rho$; $\alpha^2\lambda^2\rho = \alpha^2 s = s\alpha^{-2} = \rho\lambda^{-2}\alpha^{-2} = \rho(\alpha^2\lambda^2)^{-1}$. Como $\alpha^2 >_s 0$ $\alpha^{-2} >_s 0$; luego $(\alpha^{-2}x, x)_s \geq 0$, $(\lambda^{-1}\alpha^{-2}x, \lambda^{-1}x) \geq 0$ y entonces $(\lambda^{-2}\alpha^{-2}x, x) \geq 0$, o sea $\lambda^{-2}\alpha^{-2} > 0$, o bien $\alpha^2\lambda^2 > 0$.Luego $q \in Q_\rho$.

Esto reduce el caso general al caso anterior.

PROPOSICIÓN 3.11: *Sea $q \in Q_\rho$ y $u(t)$ una curva que une q y ρ de longitud L. Entonces existe una curva contenida en Q_ρ que une q y ρ de longitud menor o igual que L.*

Demostración: Si $u(t)$ es tal que $u(0) = \rho$ y $u(1) = q$ y $L = \int_0^1 \|\dot u\|_u \, dt$, sea $v(t) = \pi(u(t))$ en P, y $\Gamma(t)$ la levantada de v; es decir $\Gamma(t)\rho\Gamma(t)^{-1} = v(t)$. Sea $r(t) = \Gamma(t)^{-1}u(t)\Gamma(t)$, $r(t) \subset Q_\rho$ pues como Γ es unitario $\pi(r(t)) = \Gamma(t)^{-1}\pi(u(t))\Gamma(t) = \Gamma(t)^{-1}v(t)\Gamma(t) = \rho$.

Veamos que $L(r) \leq L(u) = L$: observemos que si $\dot u(t) = Z + W$ es la descomposición de $\dot u(t)$ en las partes σ^{-1}-simétrica y σ^{-1}-antisimétrica, con respecto a $(\ , \ )_{u(t)}$, entonces:

$$\|W\|_{u(t)} \leq \|\dot u(t)\|_{u(t)}$$

pues $W = \frac{1}{2}(\dot u - \dot u^{\#})$ y $\|W\|_{u(t)} \leq \frac{1}{2}(\|\dot u\|_{u(t)} + \|\dot u^{\#}\|_{u(t)}) = \|\dot u\|_{u(t)}$. Además se verifica que $\|\dot r(t)\|_{r(t)} \leq \|w\|_{u(t)}$:

calculemos $\dot r$

$$\begin{aligned}
\dot r &= -\Gamma^{-1}\dot\Gamma\Gamma^{-1}u\Gamma + \Gamma^{-1}u\dot\Gamma + \Gamma^{-1}\dot u\Gamma \\
&= \Gamma^{-1}(-\frac{1}{2}\dot v v^{-1}u + \frac{1}{2}u\dot v v^{-1} + \dot u)\Gamma \\
&= \Gamma^{-1}(\dot u - \frac{1}{2}[\dot v v^{-1}\, u])\Gamma \\
&= \Gamma^{-1}(\dot u - \frac{1}{4}[[\dot v, v^{-1}], u])\Gamma.
\end{aligned}$$

Entonces $\dot u - \frac{1}{4}[[\dot v, v^{-1}], u]$ es σ^{-1} -antisimétrico con respecto al producto $(\ , \ )_{u(t)}$, pues es el conjugado por el elemento unitario Γ de $\dot r$, que es σ^{-1}-antisimétrico con respecto a $(\ , \ )_{r(t)}$. (Esto último vale pues si $X \in (TQ_\rho)_a$ entonces sea $a = \alpha\rho$ y $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\dot\gamma(0) = X$, $\gamma \subset Q_\rho$, $\gamma(t) = \alpha(t)\rho$.

Entonces $X = \dot\alpha\rho$ y $X^* = \rho^{-1}\dot\alpha$. Como además $\alpha(t)\rho = \rho\alpha(t)^{-1}$ derivando obtenemos $\dot\alpha\rho = -\rho\alpha^{-1}\dot\alpha\alpha^{-1}$. Luego $X = -\rho\alpha^{-1}\rho\rho^{-1}\dot\alpha\alpha^{-1} = -\sigma\alpha X^*\alpha^{-1}$ y entonces $X^{\#_a} = \alpha X^*\alpha^{-1} = -\sigma^{-1}X$).

Llamemos $Y = [[\dot v, v^{-1}], u]$, tenemos

$$\begin{aligned}
Y^* &= ((\dot v v^{-1} - v^{-1}\dot v)u - u(\dot v v^{-1} - v^{-1}\dot v))^* \\
&= u^*(v\dot v^* - \dot v^* v) - (v\dot v^* - \dot v^* v)u^* \\
&= u^*(-vv^{-1}\dot v v^{-1} + v^{-1}\dot v v^{-1} v) - (vv^{-1}\dot v v^{-1} + v^{-1}\dot v v^{-1} v)u^* \\
&= u^*(-\dot v v^{-1} + v^{-1}\dot v) - (\dot v v^{-1} + v^{-1}\dot v)u^* \\
&= [u^*, [\dot v, v^{-1}]].
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} v^{-1}Y^*v &= -[v^{-1}u^*v\,,v^{-1}(\dot{v}v^{-1} - v^{-1}\dot{v})v] \\ &= -[v^{-1}(\lambda^2 v)^* v\,, v^{-1}\dot{v} - \dot{v}v^{-1}] \\ &= -[\sigma^{-1}u\,,[v^{-1}\,,\dot{v}]] \\ &= -\sigma^{-1}[u\,,[v^{-1}\,,\dot{v}]] \\ &= -\sigma^{-1}[[\dot{v}\,,v^{-1}]\,,u] \\ &= -\sigma^{-1}Y. \end{aligned}$$

Como además $Y \in (TQ)_{u(t)}$ $uY = -Yu$. Resulta entonces $Y^{\sharp_u} = \lambda^2 Y^* \lambda^{-2} = uv^{-1}Y^*vu^{-1} = -u\sigma^{-1}Yu^{-1} = \sigma^{-1}Y$. Luego Y es σ^{-1}-simétrico con respecto al producto $(\quad,\quad)_u$. Tenemos entonces

$$W = \dot{u} - [[\dot{v}\,,v^{-1}\,],u]$$

$$Z = [[\dot{v}\,,v^{-1}\,],u\,].$$

Como $\dot{r} = \Gamma^{-1}W\Gamma$ resulta, al ser Γ unitario, que las normas se preservan:

$$\|\dot{r}\|_r = \|\Gamma^{-1}W\Gamma\|_{\Gamma^{-1}u\Gamma} = \|W\|_u.$$

Para terminar notemos que $r(t) \subset Q_\rho$ y $L(r) \leq L(u)$ por lo anterior. Tomemos entonces la curva $\Gamma(1)r(t)\Gamma(1)^{-1} = \beta(t)$, que tiene la misma longitud que r y está contenida en Q_ρ. $\beta(t)$ satisface lo pedido:

$$\beta(0) = \Gamma(1)r(0)\Gamma(1)^{-1} = \Gamma(1)\rho\Gamma(1)^{-1} = \rho$$

$$\beta(1) = \Gamma(1)r(1)\Gamma(1)^{-1} = \Gamma(1)\Gamma(1)^{-1}u(1)\Gamma(1)\Gamma(1)^{-1} = q\,.$$

PROPOSICIÓN 3.12: *Sea $s \in Q_\rho$. Entonces la geodésica de extremos s y ρ es la curva más corta en Q que une s y ρ.*

Demostración: La geodésica que une s y ρ es $\gamma(t) = e^{t\log\lambda^2}\rho$, donde $s = \alpha^2\rho =$

$\alpha\rho\alpha^{-1}$ con $\alpha > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot\gamma\|_\gamma \, dt \\ &= \int_0^1 \|e^{-\frac{1}{2}\log\alpha^2} \log\alpha^2 e^{t\log\alpha^2} \rho e^{\frac{1}{2}\log\alpha^2}\| dt \\ &= \int_0^1 \|e^{-\frac{1}{2}\log\alpha^2} \log\alpha^2 e^{t\log\alpha^2} e^{-\frac{1}{2}\log\alpha^2} \rho\| dt \\ &= \int_0^1 \|\log\alpha^2\| \, dt \\ &= \|\log\alpha^2\|. \end{aligned}$$

Por otro lado si $w(t)$ es una curva en Q tal que $w(0) = \rho$ y $w(1) = s$, podemos suponer que $w(t) \subset Q_\rho$, por 3.11.

Entonces $w(t) = \alpha^2(t)\rho = \alpha(t)\rho\alpha(t)^{-1}$, con $\alpha(t) > 0$, $\alpha^2(0) = 1$ y $\alpha^2(1) = \alpha^2$. Calculemos $L(w)$:

$$\begin{aligned} L(w) &= \int_0^1 \|\dot w(t)\|_{w(t)} \, dt \\ &= \int_0^1 \|(\alpha^2(t))^{\cdot} \rho\|_{w(t)} dt \\ &= \int_0^1 \|\alpha^{-1}(t)(\alpha^2(t))^{\cdot} \rho\alpha(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|\alpha^{-1}(t)(\alpha^2(t))^{\cdot} \alpha^{-1}(t)\rho\| dt \\ &= \int_0^1 \|\alpha^{-1}(t)(\alpha^2(t))^{\cdot} \alpha^{-1}(t)\| dt. \end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a la longitud de la curva $\alpha(t)$, pensada en el espacio de elementos autoadjuntos inversibles: $\alpha(t)$ está contenida en la fibra del 1. Por lo visto en 6.3 de [6], $L(\alpha) \geq \|\log\alpha^2\|$.

COROLARIO 3.13: *Dados s y r en Q_ρ, de todas las curvas contenidas en Q_ρ que unen s y r, la más corta es la geodésica de extremos s y r.*

<u>*Demostración:*</u> Supongamos que $s = \alpha^2\rho$ y $r = \beta^2\rho$. Entonces la geodésica que une $\rho = \beta^{-1}r\beta$ con $\beta^{-1}s\beta$ es $\gamma(t) = e^{t\log\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1}}\rho = (\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1})^t\rho$ pues $\beta^{-1}s\beta =$

$\beta^{-1}\alpha^2\rho\beta = \beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\rho$ con $\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1} > 0$. Luego $L_\beta\gamma = \beta\gamma\beta^{-1}$ es la geodésica que une s con r: como $\gamma(0) = \rho$ y $\gamma(1) = \beta^{-1}a\beta$ resulta $L_\beta\gamma(0) = \beta\,\rho\,\beta^{-1} = r$ y $L_\beta\gamma(1) = \beta\,a\,\beta^{-1} = a$ y además $L_\beta\gamma$ es solución de $\frac{D}{dt}(\dot\varepsilon) = 0$ con las condiciones $\varepsilon(0) = b$ y $\varepsilon(1) = \beta X\beta^{-1}$ con $X = \log\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\rho$.

Luego si llamamos $geo(s,r)$ a la geodésica que une s con r resulta

$$geo(s,r) = L_\beta\gamma = L_\beta geo(\beta^{-1}s\beta\,,\rho) = L_\beta geo(L_{\beta^{-1}}s\,, L_{\beta^{-1}}r\,).$$

Observemos ahora el siguiente hecho: como $\beta > 0$ y $\beta\rho = \rho\beta^{-1}$ β resulta B_ρ-unitario pues $\beta^\rho = \rho\beta^*\rho^{-1} = \rho\beta\rho^{-1} = \beta^{-1}$. Aplicando 3.6 tenemos que

$$\|\beta x\|_{L_\beta s} = \|x\|_s \quad con\, x \in E.$$

(Recordemos que $(x,x)_s = (\alpha^{-2}x,x) = (\alpha^{-1}x,\alpha^{-1}x)$). Entonces la aplicación $\beta : E_s \longrightarrow E_{L_\beta s}$ es una isometría.

Consideremos ahora la aplicación $T = (TL_\beta)_s : (TQ)_s \longrightarrow (TQ)_{L_\beta s}$. T resulta una isometría: si $Y = TX$ entonces $Y = \beta X\beta^{-1}$ Entonces

$$\|Y\|_{L_\beta s} = \sup_{\|y\|_{L_\beta s}=1} \|Y\,y\|_{L_\beta s} = \sup_{\|y\|_{L_\beta s}=1} (Yy\,,Yy\,)_{L_\beta s}{}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sup_{\|y\|_{L_\beta s}=1} (\beta X\beta^{-1}y\,,\beta X\beta^{-1}y)_{L_\beta s}{}^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|y\|_{L_\beta s}=1} ((\beta\alpha^2\beta)^{-1}\beta X\beta^{-1}y\,,\beta X\beta^{-1}y)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{\|y\|_{L_\beta s}=1} (\alpha^{-2}X\beta^{-1}y\,,X\beta^{-1}y)^{\frac{1}{2}}.$$

Llamando $x = \beta^{-1}y$ resulta

$$\begin{aligned}\|Y\|_{L_\beta s} &= \sup_{\|\beta x\|_{L_\beta s}=1} (\alpha^{-2}Xx\,,Xx\,)^{\frac{1}{2}}\\ &= \sup_{\|x\|_s=1} \|Xs\|_s{}^{\frac{1}{2}}\\ &= \|X\|_s.\end{aligned}$$

Luego $\|L_\beta X\|_{L_\beta s} = \|X\|_s$.

Entonces si $\gamma(t) = geo(\beta^{-1}s\beta\,,\rho)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
L(geo(s,r)) &= \int_0^1 \|(\beta\gamma(t)\beta^{-1})^{\cdot}\|_{L_\beta\gamma}dt \\
&= \int_0^1 \|\beta\dot{\gamma}\beta^{-1}\|_{L_\beta\gamma}dt \\
&= \int_0^1 \|L_\beta\dot{\gamma}\|_{L_\beta\gamma}dt \\
&= \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_\gamma\, dt \\
&= \|\log\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Sea $w(t)$ una curva contenida en Q_ρ que une s y r, entonces $w(0) = r$, $w(1) = s$ y $w(t) = \alpha^2(t)\rho$ con $\alpha(t) > 0$.

Consideremos la curva $L_{\beta^{-1}}w = \beta^{-1}w\beta = \beta^{-1}\alpha\rho\beta \;\; \beta^{-1}\alpha\beta^{-1}\rho$, que une ρ con $\beta^{-1}s\beta$. Por lo visto antes

$$L(L_{\beta^{-1}}w) \geq L(geo(\beta^{-1}s\beta,\rho)) = L(geo(s,r)).$$

Además como $w(t) \subset Q_\rho$ se verifica:

$$\|L_{\beta^{-1}}\dot{w}\|_{L_{\beta^{-1}}}w = \|\dot{w}\|_w.$$

Luego

$$\begin{aligned}
L(L_{\beta^{-1}}w) &= \int_0^1 \|(\beta^{-1}w\beta)^{\cdot}\|_{\beta^{-1}w\beta}dt \\
&= \int_0^1 \|\beta^{-1}\dot{w}\beta\|_{\beta^{-1}w\beta}dt \\
&= \int_0^1 \|\dot{w}\|_w dt \\
&= L(w).
\end{aligned}$$

Luego $L(w) \geq L(geo(s,r))$ como queríamos.

CAPITULO 4

El espacio N_σ de elementos de cocuadrado unitario

A denotará un álgebra C^* con unidad y G su grupo de inversibles. Dado $a \in A$ definimos el cocuadrado de a como ${a^*}^{-1}a$.

Se verifica que a es normal si y sólo si su cocuadrado es unitario [7]. Fijado $\sigma \in A$, unitario, sea A_σ la subálgebra cerrada de los elementos de A que conmutan con σ y G_σ el grupo de inversibles de A_σ. Definimos el conjunto N_σ formado por los elementos de A, de cocuadrado igual a σ,

$$N_\sigma = \{a \in A \,:\, {a^*}^{-1}a = \sigma\}.$$

Observemos que $N_\sigma \subset G_\sigma$: por definición si $a \in N_\sigma$, a debe ser inversible. Además como a es normal $aa^* = a^*a$, de donde a, a^*, a^{-1} y ${a^*}^{-1}$ conmutan; luego a y σ conmutan ya que $\sigma = {a^*}^{-1}a$.

Cuando σ es la identidad, resulta $N_{id} = \{a \in G \,:\, a = a^*\}$ el espacio de elementos autoadjuntos inversibles de A. Este espacio ha sido estudiado en [6].

Definimos una acción a izquierda L, de G_σ en N_σ:

$$L \,:\, G_\sigma \times N_\sigma \longrightarrow N_\sigma$$
$$L(g\,,a\,) = L_g a = g\,a\,g^* \qquad g \in G_\sigma,\, a \in N_\sigma.$$

PROPOSICIÓN 4.1: *L es diferenciable y verifica*

i) $L_1 = Id_Q$,

ii) $L_g L_{g'} = L_{gg'}$ para $g, g' \in G_\sigma$,

iii) *L es localmente transitiva.*

$\underline{Demostración:}$ Veamos iii): sea $a \in N_\sigma$ y consideremos la función $\phi : N_\sigma \longrightarrow N_\sigma$ dada por $\phi(b) = b^{-1}a$, como $\phi(a) = 1$, y ϕ es continua, existe un entorno U de a tal que si $b \in U$, $b^{-1}a$ está cercano a 1 y tiene sentido entonces considerar $(b^{-1}a)^{\frac{1}{2}}$. Vale que

$$a = (ab^{-1})^{\frac{1}{2}} b (b^{-1}a)^{\frac{1}{2}}.$$

En efecto, como $b(b^{-1}a)^n b^{-1} = (ab^{-1})^n$, con n entero positivo, se deduce que para todo polinomio p, $bp(b^{-1}a) = p(ab^{-1})b$ y luego $b(b^{-1}a)^{\frac{1}{2}} = (ab^{-1})^{\frac{1}{2}} b$. Entonces de $(ab^{-1})^{\frac{1}{2}}(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} = ab^{-1}$, se tiene $(ab^{-1})^{\frac{1}{2}}(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} b = a$, o bien $(ab^{-1})^{\frac{1}{2}} b (b^{-1}a)^{\frac{1}{2}} = a$.

Además $(b^{-1}a)^{\frac{1}{2}*} = (a^* b^{-1*})^{\frac{1}{2}} = (a\sigma^{-1}\sigma b^{-1})^{\frac{1}{2}} = (ab^{-1})^{\frac{1}{2}}$.

Luego $a = (ab^{-1})^{\frac{1}{2}} b (ab^{-1})^{\frac{1}{2}*}$.

Entonces para $g = (ab^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $L_g b = a$ o bien $b = L_{g^{-1}} a$.

Fijado $a \in A_\sigma$, definimos la aplicación

$$p : G_\sigma \longrightarrow N_\sigma \qquad p(g) = L_g a = gag^*.$$

La órbita de a, $p(G_\sigma)$, es abierta debido a la transitividad local: si $a' \in p(G_\sigma)$, existe un entorno U de a' tal que si $b \in U$, existe $g \in G_\sigma$ tal que $L_g a' = b$.

Suponiendo que $a' = L_{g_0} a$, resulta $b = L_g L_{g_0} a = L_{gg_0} a$ y por lo tanto $b \in p(G_\sigma)$. Luego $U \subset p(G_\sigma)$. $p(G_\sigma)$ es también cerrada: observemos que N_σ es la unión disjunta de las órbitas, y por lo tanto es cerrada. Tenemos entonces

COROLARIO 4.2: *La órbita de a, $p(G_\sigma)$, es abierta y cerrada.*

PROPOSICIÓN 4.3: *p admite secciones locales, es decir, dado $a' \in p(G_\sigma)$ existe un entorno U de a' y una aplicación $\delta : U \longrightarrow G_\sigma$ tal que $p \circ \delta = id_U$.*

$\underline{Demostración:}$ Esto también se deduce del hecho que L es localmente transitiva: sabemos que existe un entorno U de a tal que si $a' \in U$, existe $g \in G_\sigma$ tal que $L_g a = a'$, o bien $p(g) = a'$, con $g^{-1} = (aa'^{-1})^{\frac{1}{2}}$; definiendo $\delta \quad U \longrightarrow G_\sigma$ como $\delta(a') = g$ tenemos que $p\delta(a') = a'$, para $a' \in U$. Si $a_0 \in p(G_\sigma)$ existe $h \in G_\sigma$ tal que $a_0 = L_h a$. La aplicación $L_h : Q \longrightarrow Q$ es un isomorfismo. Luego tomando $V = L_h(U)$, como entorno de a_0, $l_h \delta L_{h^{-1}}$ es una sección local en un entorno V de a_0 pues si $t \in V = L_h(U)$, con $t = ha'h^{-1}$, con $a' \in U$, entonces $p(l_h \delta L_{h^{-1}})(t) = pl_h\delta(a') = h\delta(a')a\delta(a')^{-1}h^{-1} = L_h p(\delta(a')) = L_h a' = t$.

TEOREMA 4.4: *N_σ es una variedad diferenciable.*

Demostración: Fijado $a \in N_\sigma$ consideremos la aplicación $p : G_\sigma \longrightarrow A_\sigma$ $p(g) = L_g a = gag^*$. Calculemos la aplicación tangente a p en 1 $(Tp)_1$: $(TG_\sigma)_1$ se identifica con A_σ y así$(Tp)_1 : A_\sigma \longrightarrow A_\sigma$. Para $X \in A_\sigma$, consideremos $g(t)$ una curva en G_σ tal que $g(0) = 1$ y $\dot{g}(0) = X$, derivando $g(t)ag(t)^*$, en $t = 0$, obtenemos $(Tp)_1(X) = Xa + aX^*$. Calculemos el núcleo y el rango de $(Tp)_1$:

$$ker(Tp)_1 = \{X \in A_\sigma : Xa = -aX^*\}$$

$$rango(Tp)_1 = \{X \in A_\sigma : X = X^*\sigma\} = \{X \in A_\sigma : X^* = \sigma^{-1}X\}.$$

Veamos esta última igualdad: si $X \in rango(Tp)_1$ existe $Y \in A_\sigma$ tal que $X = Ya + aY^*$. Luego $X^* = a^*Y^* + Ya^* = a\sigma^{-1}Y^* + Ya\sigma^{-1} = \sigma^{-1}(aY^* + Ya) = \sigma^{-1}X$. Luego $rango(Tp)_1 \subset \{X \in A_\sigma : X^* = \sigma^{-1}X\}$. Recíprocamente si $X \in A_\sigma$ es tal que $X^* = \sigma^{-1}X$, consideremos $Y = \frac{1}{2}Xa^{-1}$. Entonces $aY^* = aa^{-1*}\frac{1}{2}X^* = \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}Xaa^{-1} = Ya$ y entonces $(Tp)_1(Y) = 2Ya = X$.

Ambos subespacios son complementados en A_σ y sus complementos son respectivamente $\{X \in A_\sigma : Xa = aX^*\}$ y $\{X \in A_\sigma : X = -X^*\sigma\}$ pues en el primer caso si $X \in A_\sigma$, $X = X_1 + X_2$, con $X_1 \in ker(Tp)_1$ $X_2 \in \{Xa = aX^*\}$ y resulta $X_1 = \dfrac{X - aX^*a^{-1}}{2}$ y $X_2 = \dfrac{X + aX^*a^{-1}}{2}$. En el segundo, X se escribe como $X = X_1 + X_2$ con $X_1 = \dfrac{X - X^*\sigma}{2} \in rango(Tp)_1$ y $X_2 = \dfrac{X + X^*\sigma}{2} \in \{X = -X^*\sigma\}$.

Se verifica además que la aplicación $p : G_\sigma \longrightarrow p(G_\sigma)$ es abierta (recordemos que a fue fijado y $p(h) = p_a(h) = hah^*$). Esto se deduce de la existencia de secciones locales: sea $g \in G_\sigma$ y W un entorno de g; queremos ver que $p(W)$ es un entorno de $p(g) = gag^* = a'$. Sabemos que existe un entorno U de a tal que $\delta : U \longrightarrow G_\sigma$ definida como en 4.3, es una sección local en a, $\delta(a) = 1$ y $l_g\delta L_{g^{-1}} : L_g(U) \longrightarrow G_\sigma$ es una sección local en a' y $l_g\delta l_{g^{-1}}(a') = g$. Usando la continuidad de $l_g\delta L_{g^{-1}}$, dado W entorno de g existe V entorno de a', $V \subset L_g(U)$ tal que $l_g\delta L_{g^{-1}}(V) \subset W$, luego $V = p(l_g\delta L_{g^{-1}})(V) \subset p(W)$ como queríamos. Se deduce, aplicando la proposición 1.5 de [3] que $p(G_\sigma)$ es una subvariedad de A_σ. Resulta entonces que $N_\sigma = \biguplus_{a\in N_\sigma} p_a(G_\sigma)$ es una variedad.

Calculemos ahora el tangente a N_σ en a, y la aplicación tangente a $p : G_\sigma \longrightarrow N_\sigma$, en 1. Resulta:

$$(TN_\sigma)_a = \{X \in A_\sigma : X^* = \sigma^{-1}X\}.$$

Para ver esta igualdad consideremos una curva $\gamma(t)$ en N_σ tal que $\gamma(0) = a$ y $\dot\gamma(0) = X$. Derivando $\gamma^{-1*}(t)\gamma(t) = \sigma$, o equivalentemente $\gamma(t) = \gamma^*(t)\sigma$, en $t = 0$, obtenemos $X = X^*\sigma$, o bien $X^* = X\sigma^{-1}$. Recíprocamente si $X \in A_\sigma$ es tal que $X^* = X\sigma^{-1}$, consideremos la curva $\gamma(t) = ae^{a^{-1}Xt}$. Resulta $\gamma(0) = a$ y $\dot\gamma(0) = X$. Además $\gamma^{-1*}(t) = a^{-1*}e^{-X^*a^{-1*}t} = a^{-1*}e^{-X\sigma^{-1}a^{-1*}t} = a^{-1*}e^{-a^{-1}Xt}$; y luego $\gamma^{-1*}\gamma = \sigma$; por lo tanto $\gamma(t)$ está contenida en N_σ.

La aplicación tangente a p en 1 está dada por

$$(Tp)_1 \,:\, A_\sigma \longrightarrow (TN_\sigma)_a$$

$$(Tp)_1(X) = Xa + aX^*.$$

El grupo de isotropía de a es

$$I_a = \{g \in G_\sigma \,:\, gag^* = a\}$$

I_a es un subgrupo cerrado de G_σ y resulta un grupo de Lie (ver 1.4 de [3]). El álgebra de Lie de I_a es $J_a = \{X \in A_\sigma \,:\, Xa = -aX^*\}$. I_a opera en G_σ por traslación:

$$R \,:\, I_a \times G_\sigma \longrightarrow G_\sigma$$
$$(t, g) \longrightarrow R_t(g) = gt \quad t \in I_a\,, g \in G_\sigma.$$

Esta operación no tiene puntos fijos.

(G_σ, N_σ, p) resulta un fibrado principal localmente trivial, con grupo estructural I_a.

Reductividad

A continuación definimos un complemento natural de $\mathcal{J}_a$. Sea $\mathcal{H}_a$ el subespacio cerrado definido por

$$\mathcal{H}_a = \{X \in A_\sigma \,:\, Xa = aX^*\}.$$

Tenemos entonces

PROPOSICIÓN 4.5: *Se verifica*

i) $A_\sigma = \mathcal{J}_a \oplus \mathcal{H}_a$

ii) $t\mathcal{H}_a t^{-1} = \mathcal{H}_a$ *para todo* $t \in I_a$

iii) $(Tp)_1|_{\mathcal{H}_a} : \mathcal{H}_a \longrightarrow (TN_\sigma)_a$ *es un isomorfismo.*

<u>*Demostración:*</u> Vimos la parte i) en el teorema anterior. Veamos ii): sea $X \in \mathcal{H}_a$ $t \in I_a$, $tXt^{-1}a = tXt^{-1}a(t^{-1})^* t^* = tXat^* = taX^*t^* = at^{-1*}X^*t^* = a(tXt^{-1})^*$. Luego $tXt^{-1} \in \mathcal{H}_a$. Probamos que $t\mathcal{H}_a t^{-1} \subset \mathcal{H}_a$ para cualquier $t \in \mathcal{H}_a$. Recíprocamente si $X \in H_a$, $X = tt^{-1}Xtt^{-1}$, con $t^{-1}Xt \in \mathcal{H}_a$, luego $X \in t\mathcal{H}_a t^{-1}$. Para probar iii) recordemos que $(Tp)_1(X) = Xa + aX^*$ y si $X \in \mathcal{H}_a$ resulta $(Tp)_1(X) = 2Xa$. Entonces $(Tp)_1|_{\mathcal{H}_a} : \mathcal{H}_a \longrightarrow (TN_\sigma)_a$ resulta biyectiva: es inyectiva pues a es inversible y si $Y \in (TN_\sigma)_a$, tomando $X = \frac{1}{2}Ya^{-1}$, resulta $Xa = \frac{1}{2}Y$, y $aX^* = a\frac{1}{2}a^{-1*}Y^* = \frac{1}{2}\sigma\sigma^{-1}Y = \frac{1}{2}Y = Xa$, luego $X \in H_a$ y $(Tp)_1(X) = Y$.

Llamamos $K_a = ((Tp)_1|_{\mathcal{H}_a})^{-1}$; $K_a : (TN_\sigma)_a \longrightarrow \mathcal{H}_a$ y $K_a(Y) = \dfrac{1}{2}Ya^{-1}$.

Conexión en N_σ

Definimos ahora una conexión en N_σ, dando una distribución horizontal de subespacios en G_σ.Para $g \in G_\sigma$ definimos

$$\mathcal{H}_{a,g} = g\mathcal{H}_a.$$

Notemos que $\mathcal{H}_{a,1} = \mathcal{H}_a$.

Definimos el espacio de vectores verticales en g como

$$\mathcal{V}_g = \{X \in A_\sigma : (Tp)_g(X) = 0\}.$$

LEMA 4.6: $\mathcal{V}_g = g\mathcal{J}_a$ *y* $A_\sigma = \mathcal{H}_{a,g} \oplus \mathcal{V}_g$.

<u>*Demostración:*</u> Se verifica que

$$L_g \circ p \circ l_{g^{-1}} = p \qquad g \in G_\sigma.$$

Pues $L_g\, p\, l_{g^{-1}}(h) = L_g\, p(g^{-1}h) = L_g(g^{-1}hah^{-1}g) = gg^{-1}hah^{-1}gg^{-1} = hah^{-1} = p(h)$.

Diferenciando en g obtenemos

$$(TL_g)_a (Tp)_1 l_{g^{-1}} = (Tp)_g$$

de donde se deduce que $\mathcal{V}_g = g\mathcal{J}_a$ pues $(TL_g)_a$ es inversible y luego $\mathcal{V}_g \oplus \mathcal{H}_{a,g} = A_\sigma$.

PROPOSICIÓN 4.7: *La conexión definida es diferenciable e I_a-equivariante:*

$$(Tr_i)_g(\mathcal{H}_{a,g}) = \mathcal{H}_{a,g} i = \mathcal{H}_{a,gi} \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad i \in I_a$$

donde r_i es la multiplicación a derecha por i.

Demostración: Teniendo en cuenta que $\mathcal{V}_g = g\mathcal{J}_a$, si T es la proyección sobre $\mathcal{H}_a$, paralela a $\mathcal{V}_1$, entonces la proyección sobre $\mathcal{H}_{a,g}$, paralela a $\mathcal{V}_g$, está dada por $l_g\, T\, l_{g^{-1}}$, que varía de manera C^∞ con g.

Veamos la condición de I_a-equivariancia:
$\mathcal{H}_{a,g} i = g\mathcal{H}_a i$. Si $i \in I_a$, $\mathcal{H}_a = i\mathcal{H}_a i^{-1}$ y entonces $g\mathcal{H}_a i = gi\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_{a,gi}$.

Levantada horizontal, derivada covariante y geodésicas

Como ya vimos, al ser $(G_\sigma, N_\sigma, I_a)$ un fibrado principal, dada γ una curva en N_σ, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow N_\sigma$ y q un punto en $p^{-1}(\gamma(0))$ existe una única levantada horizontal Γ, de γ tal que $\Gamma(0) = q$. Daremos a continuación la ecuación explícita de la cual Γ es solución.

TEOREMA 4.8: *Dada $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow N_\sigma$ una curva, la levantada horizontal de γ, Γ, que verifica $\Gamma(0) = 1$ es la solución del problema*

$$(1) \begin{cases} \dot{\Gamma}(t) = \dfrac{1}{2}\dot{\gamma}(t)\gamma^{-1}(t)\Gamma(t) \\ \Gamma(0) = 1. \end{cases}$$

Demostración: Diferenciando la expresión $p(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ obtenemos

$$(Tp)_{\Gamma(t)}\dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Por otro lado sabemos que

$$(Tp)_{\Gamma(t)} = (TL_{\Gamma(t)})_a (Tp)_1 l_{\Gamma^{-1}(t)} \qquad \text{(ver 4.6)}$$

luego

$$(TL_{\Gamma(t)})_a (Tp)_1 l_{\Gamma^{-1}(t)} \dot{\Gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)$$

$$(TL_{\gamma(t)})_a (Tp)_1 \Gamma^{-1}(t) \dot{\Gamma}(t) = \gamma(t).$$

Como $\Gamma(t)$ es horizontal $\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_{a,\Gamma(t)} = \Gamma(t)\mathcal{H}_a$. Luego $\Gamma^{-1}(t)\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_a$, entonces

$$\Gamma^{-1}(t)\dot{\Gamma}(t) = K_a (TL_{\Gamma(t)})_a{}^{-1} \dot{\gamma}(t)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = \Gamma(t) K_a (TL_{\Gamma(t)})_a{}^{-1} \dot{\gamma}(t).$$

Por otro lado tenemos

$$L_g\, p_a = p_{a'} Aut\, g$$

donde $Aut\, g : G_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ está definida por $Aut\, g(h) = ghg^{-1}$ y $p_a : G_\sigma \longrightarrow N_\sigma$ $p_a(h) = hah^*$ y $a' = g^* a g$.

Diferenciando obtenemos

$$(TL_g)_a (Tp_a)_1 = (Tp_{a'})_1 Aut\, g$$

$$(TL_g)_a (Tp_a)_1 Aut\, g^{-1} = (Tp_{a'})_1.$$

Luego

$$K_{a'} = Aut\, g\, K_a (TL_g)_a^{-1}.$$

Reemplazando obtenemos

$$\dot{\Gamma}(t) = K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\Gamma(t)$$

o bien

$$\dot{\Gamma}(t) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}(t)\gamma^{-1}(t)\Gamma(t).$$

Recíprocamente una solución de esta ecuación es horizontal

$$\dot{\Gamma}\Gamma^{-1} = K_\gamma(\dot{\gamma}) \in \Gamma\mathcal{H}_a\Gamma^{-1}$$

(debido a la expresión calculada antes).

Luego

$$\dot{\Gamma} \in \Gamma H_a = H_{a,\Gamma}\,.$$

Llamaremos a (1) ecuación de transporte asociada a γ. Es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes C^∞ con una condición consistente; existe una única solución. Además si $\Gamma(0) \in G_\sigma$ entonces $\Gamma(t) \in G_\sigma$ para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Como sabemos, la existencia de levantadas horizontales nos permite difinir la derivada covariante de un campo en una dirección dada: si Y es un campo en un entorno U de s y $X \in (TN_\sigma)_a$, la derivada covariante de Y en dirección X fue definida como

$$D_X Y = \frac{d}{dt}(TL_{\Gamma(t)})_a^{-1} Y_{\gamma(t)}\big|_{t=0}$$

donde $\gamma(t) : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow N_\sigma$ es una curva en N_σ tal que $\gamma(0) = a$ y $\dot{\gamma}(0) = X$, y Γ es la única levantada horizontal de γ tal que $\Gamma(0) = 1$

Como vimos la definición no depende de la curva γ considerada. Podemos también definir la derivada covariante de un campo a lo largo de una curva: si Y_t es un campo a lo largo de $\gamma(t)$, γ una curva en N_σ, se define

$$K_\gamma(\frac{D}{dt}Y) = \frac{d}{dt}K_\gamma(Y) + [K_\gamma(\dot{\gamma}), K_\gamma(Y)].$$

Lema 4.9: *Sea γ una curva en N_σ. γ es geodésica si y sólo si*

$$\gamma(t) = L_{e^{tK_a(X)}}a = e^{tXa^{-1}}a$$

donde $a \in N_\sigma$, $X \in (TN_\sigma)_a$. Además ésta es la única geodésica tal que $\gamma(0) = a$ y $\dot{\gamma}(0) = X$.

<u>*Demostración:*</u> Como vimos en el capítulo 1, γ es geodésica si y sólo si se verifica $\frac{d}{dt}(K_\gamma(\dot{\gamma})) = 0$ luego debe ser $K_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = K_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = K_a(X)$. Tenemos entonces la siguiente ecuación de transporte para γ

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}(t) = K_a(X)\Gamma(t) \\ \Gamma(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $\Gamma(t) = e^{tK_a(X)} = e^{\frac{t}{2}Xa^{-1}}$. Luego

$$\gamma(t) = L_{e^{\frac{t}{2}Xa^{-1}}}a = e^{\frac{t}{2}Xa^{-1}}a(e^{\frac{t}{2}Xa^{-1}})^*.$$

Como $X = X^*\sigma = X^*a^{-1*}a$, $Xa^{-1} = X^*a^{-1*}$ o bien $a^{-1*}X^* = a^{-1}X$. Además $ae^{\frac{t}{2}a^{-1}X} = e^{\frac{t}{2}Xa^{-1}}a$, de donde resulta $\gamma(t) = e^{tXa^{-1}}a$.

Exponencial en N_σ

Como vimos la exponencial de la conexión está dada de la siguiente manera: $a \in N_\sigma$, $X \in (TN_\sigma)_a$, definimos

$$\exp_a : (TN_\sigma)_a \longrightarrow N_\sigma \qquad \exp_a(X) = \gamma(1)$$

donde $\gamma(t)$ es la única geodésica tal que $\gamma(0) = a$ y $\dot\gamma(0) = X$. Resulta entonces

$$\exp_a(X) = e^{Xa^{-1}}a.$$

Definimos también la aplicación $\Phi : TN_\sigma \longrightarrow N_\sigma$ dada por

$$\Phi(a, X) = \exp_a(X).$$

CAPITULO 5

Descomposición polar en N_σ

Como vimos $N_\sigma \subset G_\sigma$, luego, para cada $a \in N_\sigma$, podemos considerar su descomposición polar: $a = \lambda^2 \rho$ donde λ es positivo y ρ es unitario.

PROPOSICIÓN 5.1: *Sea a inversible, $a = \lambda^2\rho$ con $\lambda > 0$ y ρ unitario, entonces: $a \in N_\sigma$ si y sólo si*

i) $\rho^2 = \sigma$ *y*

ii) $\lambda\rho = \rho\lambda$.

<u>*Demostración:*</u> Si $\rho^2 = \sigma$ y $\lambda\rho = \rho\lambda$ tenemos $a^{-1*}a = (\lambda^2\rho)^{-1*}\lambda^2\rho = \lambda^{-2}\rho\lambda^2\rho = \rho^2 = \sigma$. Luego $a \in N_\sigma$.

Recíprocamente si $a \in N_\sigma$ entonces a es normal, luego λ y ρ conmutan (en realidad esta propiedad caracteriza a los elementos normales). Luego $\sigma = a^{-1*}a = \lambda^{-2}\rho\lambda^2\rho = \rho^2$.

Observemos que $\rho \in N_\sigma$, pues para los elementos unitarios el cuadrado y el cocuadrado coinciden.

Sea $U_\sigma = \{\rho \in N_\sigma \;:\; \rho^* = \rho^{-1}\}$ el conjunto de elementos unitarios de N_σ. Teniendo en cuenta la proposición anterior podemos definir la siguiente aplicación:

$$\pi : N_\sigma \longrightarrow U_\sigma \qquad , \pi(a) = \rho$$

donde $a = \lambda^2\rho$ con $\lambda > 0$ y ρ unitario. Llamaremos F_ρ a la fibra de ρ, es decir $F_\rho = \pi^{-1}(\rho)$. Si consideramos una representación de A en el espacio $\mathcal{L}(E)$ con E un espacio de Hilbert, cada ρ determina una forma bilineal:

$$B_\rho(x, y) = (\rho x, y) \quad x, y \in E.$$

B_ρ es no degenerada pues ρ es inversible y λ es B_ρ-autoadjunto ya que $\lambda^\rho = \rho\lambda^*\rho^{-1} = \lambda$ dado que ρ y λ conmutan. Podemos entonces caracterizar la fibra de la siguiente forma:

PROPOSICIÓN 5.2: *Sea $a \in N_\sigma$, $\rho \in U_\sigma$. Son equivalentes:*

i) $\sigma^{-1}a\rho > 0$.

ii) $\pi(a) = \rho$.

iii) $a = \lambda\rho\lambda$ *con* $\lambda > 0$ *y* B_ρ*-autoadjunto.*

Demostración: Observemos primero que a, a^*, σ y σ^{-1} conmutan entre sí. ($a^{-1*}a$ es unitario si y sólo si a es normal. Además de $a^{-1*}a = \sigma$, tenemos $a^{-1}\sigma = a^{-1}a^{-1*}a = a^{-1*}$ y luego $a^{-1}\sigma = \sigma a^{-1}$).

i) $\Rightarrow$ ii) $0 < \sigma^{-1}a\rho = a\sigma^{-1}\rho = a\rho^{-1}$. Llamemos $\lambda^2 = a\rho^{-1}$, entonces $a = \lambda^2\rho$ y $\pi(a) = \rho$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Si $\pi(a) = \rho$, $a = \lambda^2\rho$ y $\lambda\rho = \rho\lambda$. Luego $a = \lambda\rho\lambda$ con $\lambda > 0$ y B_ρ-unitario.

iii) $\Rightarrow$ i) $\sigma^{-1}a\rho = a\sigma^{-1}\rho = a\rho^{-1} = \lambda\rho\lambda\rho^{-1} = \lambda^2 > 0$.

COROLARIO 5.3: $F_\rho = \{\lambda\rho\lambda \, : \, \lambda > 0$ *y* B_ρ*-autoadjunto*$\}$.

Calculemos el espacio tangente a U_σ *en* ρ, $(TU_\sigma)_\rho$*: sea* $\gamma(t)$ *una curva en* U_σ, *con* $\gamma(0) = \rho$, $\dot\gamma(0) = X$, *como* $\gamma^2(t) = \sigma$ *derivando en* $t = 0$, *obtenemos* $X\rho + \rho X = 0$, *además de* $\gamma(t) = \sigma\gamma^*(t)$ *resulta* $X = X^*\sigma$. *Tenemos entonces*

$$(TU_\sigma)_\rho = \{X \in (TN_\sigma)_\rho \, : \, X\rho = -\rho X\}.$$

Definimos

$$P_\rho = \{X \in (TN_\sigma)_\rho \, : \, X\rho = \rho X\}.$$

Entonces

$$(TN_\sigma)_\rho = (TU_\sigma)_\rho \oplus P_\rho.$$

Explícitamente para $X \in (TN_\sigma)_\rho$, $X = X_1 + X_2$ *con* $X_1 = \dfrac{X - \rho X\rho^{-1}}{2} \in (TU_\sigma)_\rho$ *y* $X_2 = \dfrac{X + \rho X\rho^{-1}}{2} \in P_\rho$.

Sea $P = (\bigcup_\rho P_\rho, U_\sigma)$.

TEOREMA 5.4: *Sea* $\Phi : P \longrightarrow N_\sigma$ *la restricción de la función exponencial a* P. $\Phi(\rho, X) = \exp_\rho(X) = e^{X\rho^{-1}}\rho$ *con* $\rho \in U_\sigma$ *y* $X \in P_\rho$. *Entonces*

i) Φ *es un difeomorfismo de* P *sobre* N_σ,

ii) *para cada* $\rho \in U_\sigma$, $F_\rho = \Phi(P_\rho)$.

<u>*Demostración:*</u> Sea $a \in N_\sigma$, $a = \lambda^2\rho$. Entonces $\log\lambda^2$ verifica $(\log\lambda^2)^* = \log\lambda^2$ y $\log\lambda^2\,\rho = \rho\log\lambda^2$. Sea $Y = \log\lambda^2\,\rho$. Resulta $Y\rho = \rho Y$ y $Y^* = \rho^{-1}\log\lambda^2 = \sigma^{-1}Y$. Luego $Y \in P_\rho$. Entonces la función $(\lambda^2, \rho) \longrightarrow (\rho, (log\lambda^2)\rho)$ es la inversa de Φ pues $\Phi(\rho, Y) = e^{Y\rho^{-1}}\rho = \lambda^2\rho = a$. Esto prueba i).

Para ver ii) sea $X \in P_\rho$ $\Phi(\rho, X) = e^{X\rho^{-1}}\rho$. Como $(X\rho^{-1})^* = \rho X^* = \rho X\sigma^{-1}X\rho^{-1}$, entonces $e^{X\rho^{-1}} > 0$. Veamos que es B_ρ-autoadjunto. $X \in P_\rho$ luego ρ conmuta con $e^{X\rho^{-1}}$. Entonces $\Phi(\rho, X) \in F_\rho$ y $\Phi(P_\rho) \subset F_\rho$. Recíprocamente si $a \in F_\rho$, $a = \lambda^2\rho$ con $\lambda = \rho\lambda\rho^{-1}$, entonces $\Phi^{-1}(a) = (\rho, (\log\lambda^2)\rho) \in P_\rho$ pues $(\log\lambda^2\,\rho)^* = \rho^{-1}\log\lambda^2 = (\log\lambda^2\,\rho)\sigma^{-1}$ y $(\log\lambda^2)\rho$ conmuta con ρ.

El grupo de los B_ρ-unitarios

Fijado $\rho \in U_\sigma$ definimos $G_\rho = \{g \in G : g\rho = \rho g\}$, que resulta un subgrupo de G_σ. Definimos a continuación una acción de G_ρ sobre la fibra F_ρ

$$\begin{aligned} G_\rho \times F_\rho &\longrightarrow F_\rho \\ (g, a) &\longrightarrow gag^*. \end{aligned}$$

Si $a \in F_\rho$, $a = \lambda^2\rho$, entonces $gag^* = g\lambda^2\rho g^* = g\lambda^2 g^*\rho$, donde $g\lambda^2 g^* > 0$ y B_ρ-autoadjunto. Luego $gag^* \in F_\rho$.

Sea $k : G_\rho \longrightarrow F_\rho$ definida por $k(g) = g\rho g^* = gg^*\rho$.

Llamemos ${G_\rho}^{(0)}$ a la fibra $k^{-1}(\rho)$ y V_ρ a los elementos positivos de G_ρ. Si $g \in {G_\rho}^{(0)}$, $g\rho g^* = \rho$, o bien $gg^* = 1$, o $g^{-1} = g^*$. Resulta ${G_\rho}^{(0)}$ el conjunto de unitarios de G_ρ.

Notemos que si $g \in V_\rho$, $g^\rho = \rho g^*\rho^{-1} = \rho g\rho^{-1} = g$. Luego V_ρ consiste en los elementos positivos B_ρ-autoadjuntos.

El álgebra de Lie de G_ρ, $(TG_\rho)_1$ es $\mathcal{L} = \{X \in A_\sigma : X\rho = \rho X\}$. $\mathcal{L}$ se descompone como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ con

$$\mathcal{L}_0 = \{X \in \mathcal{L} : X^* = -X\}$$

$$\mathcal{L}_1 = \{X \in \mathcal{L} : X^* = X\}$$

y resulta $\mathcal{L}_0 = (TG_\rho^{(0)})_1$ y $\mathcal{L}_1 = (TV_\rho)_1$: si $\gamma(t)$ es una curva en $G_\rho^{(0)}$, con $\gamma(0) = 1$ y $\dot{\gamma}(0) = X$, derivando $\gamma^*(t) = \gamma^{-1}(t)$ y $\gamma(t)\rho = \rho\gamma(t)$, en $t = 0$, resulta lo pedido. Análogamente si $\gamma(t) \subset V_\rho$, es una curva por 1 que se ajusta a X, derivando $\gamma^* = \gamma$ y $\gamma\rho = \rho\gamma$ resulta $X \in L$ y $X = X^*$. (Recíprocamente si $X = X^*$ y $X\rho = \rho X$ tomamos $\gamma(t) = e^{tX} > 0$).

TEOREMA 5.5: *i) Sea* $\mu : V_\rho \times G_\rho^{(0)} \longrightarrow G_\rho$ *la aplicación dada por* $\mu(v,u) = v\,u$, $p_1 : V_\rho \times G_\rho^{(0)} \longrightarrow V_\rho$ *la proyección sobre la primera coordenada y* $\nu : V_\rho \longrightarrow F_\rho$ *la restricción de* k *a* V_ρ. *Entonces* μ *y* ν *son difeomorfismos y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} V_\rho \times G_\rho^{(0)} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_1"'] & G_\rho \arrow[d, "k"] \\ V_\rho \arrow[r, "\nu"'] & F_\rho \end{tikzcd}$$

Además la inversa de μ *está dada por la descomposición polar.*

ii) La aplicación $X \longrightarrow e^X$ *es un difeomorfismo de* $\mathcal{L}_1$ *sobre* V_ρ.

<u>*Demostración:*</u> i) Sea $g \in G_\rho$, $g = \lambda^2 u$ y u unitario. Afirmamos que $\mu^{-1}(g) = (\lambda^2, u)$. Verifiquemos que $\lambda^2 \in V_\rho$ y $u \in G_\rho^{(0)}$. Sabemos que $g\rho = \rho g$; o sea $\lambda^2 u\rho = \rho\lambda^2 u$, $\lambda^2 u = \rho\lambda^2 u\rho^{-1} = \rho\lambda^2\rho^{-1}\rho u\rho^{-1}$, con $\rho\lambda^2\rho^{-1} > 0$ y $\rho u\rho^{-1}$ unitario. Por unicidad de la descomposición polar resulta

$$\rho\lambda^2\rho^{-1} = \lambda^2 \text{ y } \rho u\rho^{-1} = u.$$

Es decir $\rho\lambda^2 = \lambda^2\rho$ y $\rho u = u\rho$. Así μ resulta un difeomorfismo y su inversa la descomposición polar.

También ν es un difeomorfismo, teniendo en cuenta la caracterización de F_ρ.

El diagrama conmuta:
$k(\mu(v\,,u_0)) = k(v\,u_0) = v\,u_0\,\rho\,u_0^{-1}v^* = v\,\rho\,v = v^2\rho$
$\nu(p_1(v\,,u_0)) = \nu(v) = v\,\rho\,v = v^2\rho$.

Veamos ii). Sea $X \in \mathcal{L}_1$, como $X = X^*$ y $X\rho = \rho X$ resulta $e^X > 0$ y $\rho e^X = e^X\rho$ y luego $e^X \in V_\rho$. Recíprocamente si $v \in V_\rho$ tomamos $\log v = X$ y $X \in \mathcal{L}_1$.

OBSERVACIÓN: *G_ρ es el grupo que preserva la fibra F_ρ actuando como definimos antes: vimos que si $g \in G_\rho$, $gag^* \in F_\rho$, si $a \in F_\rho$. Recíprocamente si existe un grupo G tal que preserva la fibra, entonces $G \subset G_\rho$ (149, [6]).*

Métrica de Finsler en N_σ

Definiremos ahora una métrica de Finsler en N_σ.

Sea $a \in N_\sigma$, definimos la siguiente forma bilineal:

$$(x,y)_a = (\lambda^2 x, y) = (\lambda x, \lambda y) \qquad x\,,y \in E$$

donde $a = \lambda^2\rho$ con $\lambda > 0$.

Esta métrica produce una norma de Finsler en el fibrado $M = N_\sigma \times V$ de formas bilineales (V es el espacio de formas bilineales conjugadas sobre E).

Si $\beta \in M_a$

$$\|\beta\|_a = sup\{|\beta(x,y)| \,:\, (x,x)_a \le 1\,,(y,y)_a \le 1\}.$$

Esta norma se puede trasladar al fibrado tangente, si pensamos a cada $b \in A_\sigma$ como la forma bilineal

$$\beta_b(x,y) = (bx, y) \qquad x, y \in E.$$

Resulta entonces

$$\|b\|_a = \|\beta_b\|_a = \|\lambda^{-1}b\lambda^{-1}\|$$

pues $\|\beta_b\|_a = sup\{|\beta_b(x,y)| \,:\, (x,x)_a \le 1\,,(y,y)_a \le 1\} = sup\{|(bx,y)| \,:\, (\lambda x, \lambda x) \le 1\,,(\lambda y, \lambda y) \le 1\}$.

Llamando $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, resulta $x = \lambda^{-1}x'$, $y = \lambda^{-1}y'$, y

$$\begin{aligned}\|\beta_b\|_a &= sup\{|(b\lambda^{-1}x', \lambda^{-1}y')|, (x', x') \leq 1, (y', y') \leq 1\} \\ &= sup\{|(\lambda^{-1}b\lambda^{-1}x', y')|, \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\} \\ &= \|\lambda^{-1}b\lambda^{-1}\|.\end{aligned}$$

Observemos que la aplicación

$$\begin{aligned}(TN_\sigma)_\rho &\longrightarrow (TN_\sigma)_a \\ X &\longrightarrow \lambda X \lambda\end{aligned}$$

es una isometría para las normas $\| \quad \|_\rho = \| \quad \|$ y $\| \quad \|_a$, donde $a = \lambda^2 \rho$.

DEFINICIÓN 5.6: *Si $X \in (TN_\sigma)_a$ y $a = \lambda^2\rho$, con $\lambda > 0$ y ρ unitario,*

$$\|X\|_a = \|\lambda^{-1}X\lambda^{-1}\|.$$

$(N_\sigma, \| \quad \|_a)$ es un espacio de Finsler.

TEOREMA 5.7: *La aplicación tangente $(T\pi)_a : (TN_\sigma)_a \longrightarrow (TN_\sigma)_\rho$ no aumenta normas, es decir*

$$\|(T\pi)_a(X)\| \leq \|X\|_a.$$

Demostración: Sean $a = \lambda^2\rho = v\rho$, $v = \lambda^2 > 0$ y ρ unitario y $a(t)$ una curva en N_σ tal que $a(0) = a$, $\dot{a}(0) = X$. Sea $\rho(t) = \pi(a(t))$ y sea $\Gamma(t)$ la levantada de $\rho(t)$, es decir $\Gamma(t)\rho\Gamma^*(t) = \rho(t)$. Sea $a_1(t) = \Gamma(t)a\Gamma^*(t)$, $X_1 = \dot{a}_1(0)$ y $X_2 = X - X_1 = \dot{a}(0) - \dot{a}_1(0)$.

Observemos primero los siguientes hechos:

$\Gamma(t)$ es unitario ya que verifica $(\Gamma\Gamma^*)^\cdot = 0$ y $\Gamma(0) = 1$.

$\pi(a(t)) = \pi(a_1(t))$ pues $a_1(t) = \Gamma(t)a\Gamma^*(t) = \Gamma(t)v\rho\Gamma^{-1}(t) = \Gamma(t)v\Gamma^{-1}(t)\rho(t)$ y $\Gamma(t)v\Gamma^{-1}(t) > 0$ pues Γ es unitario.

$(T\pi)_a(X) = (T\pi)_a(X_1)$, implica que $X_2 \in ker(T\pi)_a$: $(T\pi)_a(X) = (\pi(a(t)))^\cdot|_{t=0} = (\pi(a_1(t)))^\cdot|_{t=0} = (T\pi)_a(X_1)$.

$ker(T\pi)_a = T(F_\rho)$. Esto se deduce del siguiente hecho general: si ϕ es una sumersión, $T(\phi^{-1}\{x\})_\rho = ker(T\phi)_\rho$ para $\rho \in \phi^{-1}\{x\}$. Ver [8].

Calculemos X_1

$$\begin{aligned} X_1 &= \dot{a}_1(0) = \frac{d}{dt}(\Gamma(t)a\Gamma^*(t))|_{t=0} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}\rho^{-1}a + a\rho\dot{\rho}^*) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\rho}\rho^{-1}v\rho + v\rho^2\dot{\rho}^*) = \frac{1}{2}(\dot{\rho}v + v\sigma\dot{\rho}\sigma^{-1}) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\rho}v + v\dot{\rho}). \end{aligned}$$

Por otro lado $\|X_1\|_a = \|\lambda^{-1}X_1\lambda^{-1}\| = \|\frac{1}{2}(\lambda^{-1}\dot{\rho}v\lambda^{-1} + \lambda^{-1}v\dot{\rho}\lambda^{-1}\| = \|\frac{1}{2}(\lambda^{-1}\dot{\rho}\lambda + \lambda\dot{\rho}\lambda^{-1}\| \geq \|\dot{\rho}\|$.

Esta última desigualdad vale pues

$$\|STS^{-1} + S^{-1}TS\| \geq 2\|T\|$$

para cualquier operador inversible simétrico S y cualquier operador T (Ver [4]).

Luego tenemos $\|X_1\|_a \geq \|\dot{\rho}\| = \|(T\pi)_a(X)\|$. Bastaría ver que $\|X_1\|_a \leq \|X\|_a$. Pero $X = X_1 + X_2$ donde $X_1\rho = -\rho X_1$, pues $\rho\dot{\rho} = -\dot{\rho}\rho$, y $X_2\rho = \rho X_2$ y las mismas relaciones valen para $\lambda^{-1}X\lambda^{-1} = \lambda^{-1}X_1\lambda^{-1} + \lambda^{-1}X_2\lambda^{-1}$ pues $\lambda^{-1}\rho = \rho\lambda^{-1}$.

Entonces $\|\lambda^{-1}X_1\lambda^{-1}\| \leq \|\lambda^{-1}X\lambda^{-1}\|$, es decir $\|X_1\|_a \leq \|X\|_a$, (pues en general si $X = X_1 + X_2$ con $X_1\rho = -\rho X_1$, $X_2\rho = \rho X_2$, es $X_1 = \dfrac{X - \rho X\rho^{-1}}{2}$ y entonces $2\|X_1\| = \|X - \rho X\rho^{-1}\| \leq \|X\| + \|\rho X\rho^{-1}\| \leq 2\|X\|$ ya que ρ es unitario).

Geodésicas en N_σ

Estudiaremos a continuación algunas propiedades de las geodésicas de N_σ. Calcularemos la longitud de las curvas de la manera usual, referida a la métrica de Finsler definida: si γ es una curva en N_σ, su longitud es

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

PROPOSICIÓN 5.8: *Dados a y $b \in F_\rho$ existe una única geodésica que los une.*

Demostración: Supongamos primero que $b = \rho$. Usando la inversa de Φ, si $a = \lambda^2\rho$, sea $X = \log \lambda^2\rho \in P_\rho$. Sea γ la única geodésica tal que $\gamma(0) = \rho$ y $\dot\gamma(0) = X$. Entonces $\gamma(t) = e^{tX\rho^{-1}}\rho$ con $\gamma(0) = \rho$ y $\gamma(1) = a$.

En el caso general, usando un $g \in G_\sigma$ conveniente se reduce el problema al primer caso: si $b = \lambda^2\rho$, tomamos $g = \lambda^{-1}$. Entonces $\lambda^{-1}b\lambda^{-1} = \rho$ y tomamos la geodésica que une ρ con $\lambda^{-1}a\lambda^{-1}$.

PROPOSICIÓN 5.9: *Para toda curva $a(t)$, que una $a \in N_\sigma$, con $\pi(a)$, existe una curva más corta contenida en la fibra de a, $F_{\pi(a)}$, con los mismos extremos.*

Demostración: Sea $\rho(t) = \pi(a(t))$, $a(t) = v(t)\rho(t)$, $v(t) > 0$, $a(0) = a$, $a(1) = \rho$, y $\rho(0) = \rho$; sea $\Gamma(t)$ la levantada horizontal de $\rho(t)$. Γ verifica: $\Gamma(t)\rho\Gamma^*(t) = \rho(t)$.

Definamos $\varepsilon(t) = \Gamma^{-1}(t)a(t)\Gamma(t)$. Como $\Gamma(t)$ es unitario, $\varepsilon(t) = \Gamma^{-1}(t)v(t)\Gamma(t)\rho$, con $\Gamma^{-1}(t)v(t)\Gamma(t) > 0$ y luego $\pi(\varepsilon(t)) = \rho$, o bien $\varepsilon(t) \subset F_\rho$. Además $\varepsilon(0) = a(0) = a$ y $\varepsilon(1) = \rho(1) = \rho$.

Afirmamos que $\|\dot\varepsilon\|_\varepsilon \leq \|\dot a\|_a$.

Calculemos $\dot\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon &= -\Gamma^{-1}\dot\Gamma\Gamma^{-1}a\Gamma + \Gamma^{-1}a\dot\Gamma + \Gamma^{-1}\dot a\Gamma \\ &= \Gamma^{-1}((-\frac{1}{2}\dot\rho\rho^{-1}\Gamma)\Gamma^{-1}a + a\frac{1}{2}\dot\rho\rho^{-1} + \dot a)\Gamma \\ &= \Gamma^{-1}(\frac{1}{2}(\dot v\rho + \rho\dot v))\Gamma.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\|\dot\varepsilon\|_\varepsilon &= \|(\Gamma^{-1}\lambda^{-1}\Gamma)\dot\varepsilon\Gamma^{-1}\lambda^{-1})\Gamma\| \\ &= \frac{1}{2}\|\Gamma^{-1}\lambda^{-1}(\rho\dot v + \dot v\rho)\lambda^{-1}\Gamma\| \\ &= \frac{1}{2}\|\lambda^{-1}(\rho\dot v + \dot v\rho)\lambda^{-1}\|.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $a = v\rho = \rho v$, tenemos

$$\dot a = \frac{1}{2}(\rho\dot v + \dot v\rho) + \frac{1}{2}(\dot\rho v + v\dot\rho)$$

y luego

$$\|\dot a\|_a = \frac{1}{2}\|\lambda^{-1}(\rho\dot v + \dot v\rho)\lambda^{-1} + \lambda^{-1}(\dot\rho v + v\dot\rho)\lambda^{-1}\|.$$

Sea $X_1 = \dfrac{\rho\dot{v}+\dot{v}\rho}{2}$ y $X_2 = \dfrac{\dot{\rho}v+v\dot{\rho}}{2}$ entonces $X_1\rho = \rho X_1$ y $X_2\rho = -\rho X_2$, (pues $\dot{\rho}\rho = -\rho\dot{\rho}$ y v conmuta con ρ). Luego $\lambda^{-1}X_1\lambda^{-1} + \lambda^{-1}X_2\lambda^{-1}$ es la descomposición de $\lambda^{-1}\dot{a}\lambda^{-1}$ y entonces $\|\lambda^{-1}X_1\lambda^{-1}\| \le \|\lambda^{-1}\dot{a}\lambda^{-1}\|$, que prueba lo pedido.

PROPOSICIÓN 5.10: *Dados a y $\rho = \pi(a)$ en N_σ la geodésica que los une es la curva más corta de extremos a y ρ.*

<u>Demostración:</u> La geodésica que une a y ρ es $\gamma(t) = e^{t\log\alpha^2}\rho$ donde $a = \alpha^2\rho$ y $\alpha > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_\gamma \, dt \\ &= \int_0^1 \|e^{-\frac{t}{2}\log\alpha^2}\log\alpha^2 e^{t\log\alpha^2}e^{-\frac{t}{2}\log\alpha^2}\| \, dt \\ &= \int_0^1 \|\log\alpha^2\| \, dt \\ &= \|\log\alpha^2\|. \end{aligned}$$

Por otro lado si $w(t)$ es una curva en N_σ tal que $w(0) = \rho$ y $w(1) = a$, por 5.10,podemos suponer que $w(t) \subset F_\rho$. Entonces $w(t) = \alpha^2(t)\rho$ con $\alpha(t) > 0$, $\alpha^2(0) = 1$ y $\alpha^2(1) = \alpha^2$. Calculemos $L(w)$:

$$\begin{aligned} L(w) &= \int_0^1 \|\dot{w}(t)\|_{w(t)} \, dt \\ &= \int_0^1 \|(\alpha^2(t))^{\cdot}\rho\|_{w(t)} \, dt \\ &= \int_0^1 \|\alpha^{-1}(t)(\alpha^2(t))^{\cdot}\alpha^{-1}(t)\| \, dt \end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a la longitud de la curva $\alpha(t)$ pensada en el espacio de elementos autoadjuntos inversibles: $\alpha(t)$ está contenida en la fibra del 1. Por 6.3 de [6], $L(\alpha) \ge \|\log\alpha^2\|$.

COROLARIO 5.11: *Dados a y b en F_ρ, de todas las curvas γ contenidas en F_ρ, que unen a con b la más corta es la geodésica de extremos a y b.*

Demostración: Supongamos que $a = \alpha^2\rho$ y $b = \beta^2\rho$, entonces la geodésica que une $\rho = \beta^{-1}b\beta^{-1}$ con $\beta^{-1}a\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\rho$ es $\gamma(t) = e^{t\log(\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1})}\rho \; = (\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1})^t\rho$ pues $\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1} > 0$. Luego $\beta\gamma(t)\beta$ es la geodésica que une a con b; como $\gamma(0) = \rho$ y $\gamma(1) = \beta^{-1}a\beta^{-1}$ resulta $\beta\gamma(0)\beta = b$ y $\beta\gamma(1)\beta = a$ y además $\beta\gamma\beta$ es solución de $\frac{D}{dt}(\dot{\varepsilon}) = 0$ con las condiciones iniciales $\varepsilon(0) = b$ y $\dot{\varepsilon}(0) = \beta X\beta$ con $X = \log(\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1})\rho$.

Luego si llamamos $geo(a,b)$ a la geodésica que une a con b resulta

$$geo(a,b) = \beta(\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1})^t\beta\rho = \beta geo(\beta^{-1}a\beta^{-1},\rho)\beta =$$

$$= L_\beta geo(L_{\beta^{-1}}a, L_{\beta^{-1}}b)$$

o sea

$$geo(a,b) = L_\beta geo(L_{\beta^{-1}}a, L_{\beta^{-1}}b).$$

Observemos ahora el siguiente hecho: dado $\beta > 0$ tal que β conmuta con ρ la aplicación $\beta^{-1} : E_a \longrightarrow E_{L_\beta a}$ es una isometría: $\|\beta^{-1}x\|_{L_\beta a}{}^2 = (\beta\alpha^2\beta\beta^{-1}x, \beta^{-1}x)$ con $x \in E$ pues $L_\beta a = \beta a\beta = \beta\alpha^2\rho\beta = \beta\alpha^2\beta\rho$ y $\beta\alpha^2\beta > 0$. Luego $\|\beta^{-1}x\|_{L_\beta a}{}^2 = (\alpha^2 x, x) \; = \|x\|_a^2$.

Entonces

$$\|\beta^{-1}x\|_{L_\beta a} = \|x\|_a.$$

O bien

$$\|y\|_{L_\beta a} = \|\beta y\|_a.$$

Consideremos la aplicación $T = (TL_\beta)_a : (TN_\sigma)_a \longrightarrow (TN_\sigma)_{L_\beta a}$. T resulta una una isometría: si $Y = TX$, entonces $Y = \beta X\beta$, o bien pensando a X y a Y como formas bilineales, $B_Y(x,y) = (Yx,y) = (\beta X\beta x, y) = (X\beta x, \beta y)$, $x, y \in E$.

Luego $\|B_Y\| = \sup_{\|x\|_{L_\beta a} = \|y\|_{L_\beta a} = 1} |(Yx,y)| = \sup_{\|x\|_{L_\beta a} = \|y\|_{L_\beta a} = 1} |(X\beta x, \beta y)|$.

Como $\|x\|_{L_\beta a} = \|\beta x\|_a$ resulta

$$\|B_Y\| = \sup_{\|\beta x\|_a = \|\beta y\|_a = 1} |(X\beta x, \beta y)| = \|B_X\|$$

pues β es inversible.

Luego

$$\|X\|_a = \|Y\|_{L\beta a} = \|L_\beta X\|_{L_\beta a}$$

y entonces

$$L(geo(a,b)) = \int_0^1 \|(\beta geo(\beta^{-1}a\beta^{-1},\rho)\beta)^{\cdot}\|_{\beta geo(\beta^{-1}a\beta^{-1},\rho)\beta}\, dt.$$

Llamando $\gamma = geo(\beta^{-1}a\beta^{-1}, \rho)$ tenemos

$$\begin{aligned}
L(geo(a,b)) &= \int_0^1 \|(\beta\gamma(t)\beta)^{\cdot}\|_{\beta\gamma(t)\beta}\, dt \\
&= \int_0^1 \|\beta\dot{\gamma}(t)\beta\|_{\beta\gamma(t)\beta}\, dt \\
&= \int_0^1 \|L_\beta\dot{\gamma}\|_{L_\beta\gamma}\, dt \\
&= \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_\gamma\, dt \\
&= L(geo(\beta^{-1}a\beta^{-1}, \rho)) \\
&= \|\log\beta^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Sea $w(t)$ una curva contenida en F_ρ que une a y b: entonces $w(0) = b$, $w(1) = a$ y $w(t) = \alpha^2(t)\rho$ con $\alpha(t) > 0$.

Consideremos la curva $\beta^{-1}w(t)\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha^2(t)\beta^{-1}\rho$. Entonces $\beta^{-1}w\beta^{-1}$ une ρ con $\beta^{-1}a\beta^{-1}$. Por lo visto antes

$$L(L_{\beta^{-1}}w) \geq L(geo(\beta^{-1}a\beta^{-1}, \rho)) = L(geo(a,b)).$$

Además como $w(t) \subset F_\rho$ se verifica

$$\|L_{\beta^{-1}}\dot{w}\|_{L_{\beta^{-1}}w} = \|\dot{w}\|_w.$$

Luego

$$\begin{aligned}
L(L_{\beta^{-1}}w) &= \int_0^1 \|(\beta^{-1}w\beta^{-1})^{\cdot}\|_{\beta^{-1}w\beta^{-1}}\, dt \\
&= \int_0^1 \|\beta^{-1}\dot{w}\beta^{-1}\|_{\beta^{-1}w\beta^{-1}}\, dt \\
&= \int_0^1 \|L_{\beta^{-1}}\dot{w}\|_{L_{\beta^{-1}}w}\, dt \\
&= \int_0^1 \|\dot{w}\|_w\, dt \\
&= L(w).
\end{aligned}$$

Luego $L(w) \geq L(geo(a,b))$ como queríamos ver.

Apéndice

i) Daremos a continuación un ejemplo de un elemento unitario σ en un álgebra C^*, tal que ninguna de sus raíces cuadradas pertenece al doble conmutante de σ, $[\sigma]''$. Este hecho prueba que no es posible, en general, reducir el problema

$$x^2 = \sigma$$

al problema

$$y^2 = 1$$

haciendo el cambio de variables $y = xa^{-1}$, donde a es una raíz particular de σ, tal que $a \in [\sigma]''$.

Consideremos en $H = l_2(N)$ el operador Shift dado por

$$S : H \longrightarrow H$$
$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

y tomemos la clase de S, s, en el álgebra de Calkin $A = L(H)/K(H)$, donde $K(H)$ es el ideal bilátero formado por los operadores compactos de $L(H)$. Entonces s es unitario, de índice -1. Además s no tiene raíces cuadradas en A pues si $x \in A$ es tal que $x^2 = s$, entonces existe $X \in L(H)$ y $K \in L(H)$ tales que $S + K = X^2$. Luego, tomando índices resulta $-1 = i(S) = i(S + K) = i(X^2) = 2i(X)$.

Sea A_s la subálgebra cerrada de A dada por

$$A_s = \{a \in A : as = sa\}$$

y consideremos el álgebra $B = M_2(A_s)$. El elemento $\sigma = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ es inversible y pertenece al centro de B, $C(B)$.

Sin embargo ninguna de las raíces cuadradas de σ pertenece a $C(B)$: si existiera una raíz de σ en $C(B)$ debería ser de la forma

$$\rho = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

pero entonces $x^2 = s$ en A, y ya vimos que s no tiene raíces cuadradas en A.

Por otro lado el conjunto de raíces cuadradas de σ es no vacío ya que $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix}$ verifica $\rho^2 = \sigma$.

ii) En este ejemplo caracterizamos los conjuntos Q en el caso en que $A = M_2(C)$.

Si $X \in A$ es inversible, entonces es similar a una de las siguientes matrices de Jordan

$$X_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

con a y b no nulos. Es decir existe T inversible tal que

$$X = TX_1T^{-1} \qquad o \qquad X = TX_2T^{-1}.$$

Luego el conjunto de raíces cuadradas de X, Q, es isomorfo a Q_1 o Q_2, las raíces cuadradas de X_1 y X_2 respectivamente, mediante la aplicación

$$\begin{aligned} Q_i &\longrightarrow Q \\ Y &\longrightarrow TYT^{-1} \end{aligned}$$

Calculando entonces los conjuntos Q_1 y Q_2 resulta

$$Q_1 = \{ \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & \frac{-}{1}2a^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \}$$

donde $a^{\frac{1}{2}}$ es una de las raíces cuadradas de a.

Si $a \neq b$ resulta

$$Q_2 = \{ \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -b^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \}.$$

Si $a = b$

$$Q_2 = \{ a^{\frac{1}{2}} X \; : \; X^2 = 1 \}.$$

Es decir Q_2 tiene infinitos elementos y es isomorfo al conjunto de reflexiones de A, Q_1, mediante la aplicación

$$\begin{aligned} Q_1 &\longrightarrow Q_2 \\ X &\longrightarrow a^{\frac{1}{2}} X. \end{aligned}$$

Observemos el siguiente hecho: si tomamos una curva de matrices

$$X_t = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix}$$

tal que $a(t)$ y $b(t)$ tienden a un mismo límite a cuando t tiende a 1, con $a \neq 0$ y $a(t) \neq b(t)$, los conjuntos Q_t tienen cuatro elementos y Q tiene infinitos.

REFERENCIAS

[1] Corach G., Porta H., Recht L., The geometry of spaces of proyectors in a C^*-algebra, Adv. in Math. (to appear).

[2] Corach G., Porta H., Recht L., Differential geometry of systems of proyectors in Banach algebras, Pacific J. Math. (to appear).

[3] Raeburn I., The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal space, Journal of Func. Anal., Vol. 25, 4, 366-390.

[4] Corach G., Porta H., Recht L., An operator inequality, Linear Alg. and Appl., 1990.

[5] Porta H., Recht L., Minimality of geodesics in Grassmann manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 100, 3,(1987), 464-466.

[6] Corach G., Porta H., Recht L., The geometry of spaces of selfadjoint invertible elements of a C^*-algebra, (to appear).

[7] Man-Duen Choi, Adjunction and inversion of invertible Hilbert-space operators, Indiana University Math. Jour., 23, 5, (1973), 413-419.

[8] Larotonda A., Notas sobre variedades diferenciables, INMAB-CONICET, (1980), Univ. Nac. Sur, Bahía Blanca.

[9] Kobayashi S., Nomizu K.,Foundations of differential geometry, Vol. I, Interscience Publishers, (1963).

[10] Bishop R., Crittenders R. J., Geometry of manifolds, Academic Press, Illinois, (1964).

[11] Steenrod N., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1961).

[12] Rudin W., Functional analysis, McGraw-Hill Company, New York.

[13] Corach G., Maestripieri A., Pedersen G., Stojanoff D., Dos desigualdades, trabajo inédito.