

## Tesis de Posgrado

# Algunos aspectos de la Teoría del Control de Sistemas no Lineales : Observadores de tipo Luenberger

García, Rafael Antonio

1993

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

García, Rafael Antonio. (1993). Algunos aspectos de la Teoría del Control de Sistemas no Lineales : Observadores de tipo Luenberger. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2579\\_Garcia.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2579_Garcia.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

García, Rafael Antonio. "Algunos aspectos de la Teoría del Control de Sistemas no Lineales : Observadores de tipo Luenberger". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1993.

[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2579\\_Garcia.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2579_Garcia.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

*Algunos aspectos de la Teoría del Control  
de Sistemas no Lineales:  
Observadores de tipo Luenberger*

por  
RAFAEL A. GARCÍA

Director: DR. CARLOS E. D'ATELLIS

Tesis presentada para optar al grado de  
*Doctor en Ciencias Matemáticas.*

Julio de 1993



*Â miña nai*



## Reconocimientos

Muchas personas colaboraron para que esta tesis fuera posible. En primer lugar, quiero agradecer a mis docentes del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Asimismo quiero agradecer a los miembros del Laboratorio de Investigación en Procesamiento de Señales del Departamento de Electrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, y en particular al Dr. Bruno Cernuschi Frías, que me codirigió en la primeras etapas de investigación.

Mi reconocimiento se extiende a los integrantes de la División de Aplicaciones Científicas del Centro de Cálculo Científico de la Comisión de Energía Atómica, cuya colaboración fué inapreciable.

Quiero también agradecer a mis compañeros del grupo que dirige el Dr. D'Attellis en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, con quienes a lo largo de los años mantuvimos muchas estimulantes discusiones.

Pero especialmente, quiero expresar mi reconocimiento a mi director el Dr. Carlos E. D'Attellis, por su constante aliento y sabia dirección en todos estos años.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Descripción del problema. . . . .	4
1.2	Antecedentes bibliográficos. . . . .	5
1.3	Organización de la tesis. . . . .	11
<b>2</b>	<b>El observador continuo</b>	<b>17</b>
2.1	Introducción . . . . .	17
2.2	El problema del observador en tiempo continuo . . . . .	17
2.3	Generalidades . . . . .	18
2.4	Sistemas no lineales en tiempo continuo . . . . .	20
2.5	Observadores generales . . . . .	23
2.6	Distribuciones de Invariancia Condicionada. Existencia de observadores generales . . . . .	27
2.7	Conclusiones	35
<b>3</b>	<b>El observador de tipo Luenberger</b>	<b>37</b>
3.1	Introducción . . . . .	37
3.2	Sobre la hipótesis de convergencia . . . . .	37
3.3	Sistemas a observar. Observabilidad . . . . .	42
3.4	El observador completo de tipo Luenberger	50
3.5	El observador reducido de tipo Luenberger . . . . .	56
3.6	Conclusiones . . . . .	61
<b>4</b>	<b>La convergencia del observador</b>	<b>63</b>
4.1	Introducción . . . . .	63
4.2	La convergencia del observador completo a lazo abierto . . . . .	64
4.2.1	Convergencia de los sistemas $Oc1$ . . . . .	64
4.2.2	Convergencia de los sistemas observables-c generales . . . . .	75



4.3	La convergencia del observador completo a lazo cerrado	87
4.3.1	La convergencia en el seguimiento de trayectorias . . .	88
4.3.2	La convergencia en el seguimiento de modelos . . . . .	99
4.4	La convergencia del observador reducido . . . . .	116
4.5	Conclusiones . . . . .	119
<b>5</b>	<b>El observador discreto</b>	<b>121</b>
5.1	Introducción . . . . .	121
5.2	El problema del observador en tiempo discreto . . . . .	121
5.3	Sistemas no lineales en tiempo discreto . . . . .	122
5.4	Observadores Generales Discretos . . . . .	125
5.5	Distribuciones de Invariancia Condicionada. Existencia de observadores generales discretos . . . . .	128
5.6	Sobre la hipótesis de convergencia H2d. . . . .	134
5.7	Sistemas discretos a observar. Observabilidad . . . . .	136
5.8	El observador de tipo Luenberger en tiempo discreto . . . . .	138
5.9	La convergencia del observador de tipo Luemberger discreto .	145
5.10	Conclusiones. . . . .	154
<b>6</b>	<b>Simulaciones</b>	<b>155</b>
6.1	Introducción . . . . .	155
6.2	El seguimiento de un modelo. . . . .	155
6.2.1	El sistema a controlar. . . . .	155
6.2.2	El observador. . . . .	157
6.2.3	El modelo a seguir y el control de seguimiento. . . . .	159
6.2.4	Simulaciones. . . . .	160
6.3	El seguimiento de una trayectoria. . . . .	161
6.3.1	El sistema a controlar. . . . .	161
6.3.2	El observador. . . . .	164
6.3.3	La trayectoria a seguir y el control de seguimiento. . .	166
6.3.4	Simulaciones. . . . .	167
6.4	Un observador en tiempo discreto. . . . .	169
6.4.1	El sistema y el observador . . . . .	169
6.4.2	Simulaciones. . . . .	170
6.5	Conclusiones. . . . .	171
<b>A</b>		<b>191</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Sería redundante explicitar aquí la importancia del diseño de observadores para sistemas de control, tanto lineales como no lineales. Si bien para el caso lineal se ha logrado una perfecta comprensión del problema y su solución, al menos para el observador completo, no se da lo mismo para el caso no lineal. A ello se debe la diversidad de observadores no lineales en tiempo continuo construídos hasta el presente, casi todos ellos diseñados a base de sistemas no lineales particulares.

Rara vez se encuentra en tales estudios el análisis del comportamiento de los observadores no lineales en lazos cerrados de control. Esta deficiencia es particularmente importante, ya que se hace uso de un observador precisamente para utilizar sus estimaciones en los lazos de control. La consideración de tal problema y su solución es una de las contribuciones que presenta esta tesis.

Prácticamente todas las tareas de control de sistemas observables se pueden asimilar al seguimiento de trayectorias en el espacio de estados, o a la emulación del comportamiento entrada - salida de modelos. Dado que los sistemas para los cuales es posible resolver satisfactoriamente los problemas que tales tareas presentan tienen estructuras determinadas, es importante construir observadores lo suficientemente generales como para abarcarlos, y que, además, se comporten correctamente a lazo cerrado. Estos son los temas que se tratarán en los capítulos siguientes, en los que se construirán los observadores y se demostrarán las propiedades que poseen cuando se los utiliza en los problemas de control mencionados.

Las anteriores consideraciones corresponden a sistemas no lineales en tiempo continuo. Respecto de los observadores para sistemas discretos —que es el

segundo tipo de observadores que analizamos en esta tesis—, si bien para el caso lineal se puede lograr un paralelismo con los observadores continuos, no es así para el caso no lineal, para el cual, por otra parte, no fue posible encontrar referencias bibliográficas previas. Dado que la disponibilidad de computadoras alienta la discretización de los sistemas a controlar, es de particular interés el desarrollo de observadores para tales sistemas no lineales, por lo que consideraremos este problema en el Capítulo 5.

## 1.1 Descripción del problema.

El problema que trataremos es el diseño de observadores para sistemas no lineales, y lo encararemos como dos subproblemas diferenciados, tal como lo establecimos en el párrafo anterior:

- el diseño de observadores para sistemas en tiempo continuo,
- el diseño de observadores para sistemas en tiempo discreto.

Dado que nuestra intención es hacer funcionar a los observadores a lazo cerrado para las tareas mencionadas anteriormente, y que la realización de éstas exige plantear el problema en el contexto del control geométrico, basaremos nuestro análisis en sistemas no lineales que se puedan tratar mediante tales métodos. Sin embargo, para no introducir limitaciones innecesarias en el tratamiento del problema, consideraremos sistemas no lineales —tanto en tiempo continuo como discreto—, en el marco más general posible. Tampoco limitaremos la clase de controles que actúan sobre los sistemas, algo que no pudieron evitar otros autores, como veremos en detalle más adelante.

Para ambos subproblemas será preciso definir qué se entiende por *observadores*, y buscar características estructurales que permitan la construcción de los mismos. Es de esperar en este punto que la solución al problema no sea única para tal grado de generalidad en la definición de los sistemas, por lo que introduciremos definiciones más precisas acerca de los mismos que involucren de alguna forma su grado de observabilidad.

Posteriormente estableceremos condiciones para lograr un comportamiento “de tipo Luenberger” de los observadores, es decir asegurar una convergencia exponencial a cero del error de observación, (potencial para los sistemas discretos), con velocidad de convergencia arbitraria, al menos a lazo abierto. Finalmente, para el caso de lazo cerrado, estudiaremos la posibilidad de introducir hipótesis que aseguren un *principio de separabilidad* para sistemas

no lineales a fin de obtener un comportamiento aceptable del observador.

## 1.2 Antecedentes bibliográficos.

Las publicaciones referidas a observadores no lineales en tiempo continuo pueden clasificarse en dos grupos, a saber:

1. observadores funcionando a lazo abierto
2. observadores funcionando a lazo cerrado, en el seguimiento de trayectorias y en la estabilización.

Para el primer caso puede hacerse a su vez la siguiente subdivisión:

- Observadores para sistemas autónomos, esto es del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ y = h(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

con  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $y \in \mathcal{R}^p$ . En el tratamiento de observadores no lineales autónomos como el (1.1), podemos citar dos métodos: el de linealización global, y el de Thau. El primero consiste en la búsqueda de transformaciones no lineales de coordenadas del espacio de estados,  $z = T(x)$ , que transformen (1.1) en un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + g(y) \\ y = Cz \end{cases}$$

con  $(A, C)$  par observable y  $g$  una función no lineal que depende sólo de la salida. Una vez encontrada la transformación, la construcción del observador resulta sencilla en el espacio transformado, y la convergencia a lazo abierto es inmediata. La construcción de la transformación se basa en el cálculo de derivadas de Lie sucesivas de la función de salida  $h$  respecto del campo  $f$ , y métodos para hallarla se pueden ver en [1], [41], y [2] en el caso de una sola salida, y en [38], [39] y [2] para el caso de múltiples salidas.

El problema fundamental de este enfoque es que la clase de sistemas que pueden transformarse de la manera descrita es considerablemente reducida (Cfr.[38]), y aún en esos casos encontrar la transformación

implica integrar tantas ecuaciones diferenciales a derivadas parciales como estados haya (Cfr.[2],[39]).

El método de Thau es más bien un método de verificación que de diseño. En [44], Thau da condiciones suficientes para la convergencia de la estimación para sistemas descritos por (1.1), y en [43] y [42] se presentan resultados que extienden el trabajo antes citado. En ningún caso se muestran métodos de construcción de los observadores sino condiciones suficientes para la convergencia del estado estimado, utilizando para ello, generalmente, funciones de Lyapunov.

Es conveniente citar aquí el método de diseño de observadores basado en las técnicas de *deslizamiento (sliding)*, que presentan buenas características de robustez frente a las incertidumbres en el modelo y a la presencia de ruido de medición, pero cuya principal desventaja es exigir que la salida sea una función *lineal* de los estados, (Cfr.[17], [21], [53]).

Un trabajo que —si bien no trata el diseño de observadores— tiene particular importancia, es el de van der Schaft [35], pues en él se adopta el enfoque geométrico-diferencial en la definición del sistema a observar y se adapta —al caso no lineal autónomo— el trabajo de Willems [34] sobre subespacios de invariancia condicionada, vía las distribuciones de invariancia condicionada introducidas en [33].

- Observadores para sistemas no autónomos, esto es del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

con  $(x, u) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ ,  $y \in \mathcal{R}^p$ . Consideraremos primeramente los métodos que buscan transformaciones que llevan al sistema (1.2) a adoptar la forma:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + g(y, u) \\ y = Cz, \end{cases} \quad (1.3)$$

con el par  $(A, C)$  observable.

En [38] se extienden a estos sistemas los resultados sobre sistemas no lineales autónomos, y se lo hace mediante la descomposición del campo  $f$  en uno que depende sólo de  $x$  y otro que contempla la influencia del control  $u$ . Este método agrega a las exigencias sobre el sistema

comentadas oportunamente, una adicional: el cambio de coordenadas debe convertir a la parte del campo que contempla la influencia del control en una función sólo del control y la salida.

Cabe mencionar aquí el observador adaptivo presentado en [48] para sistemas no lineales de una entrada y una salida *lineales afines en el control*, con salida  $y = x_1$ , que pueden ser transformados en una clase particular de la forma (1.3). En [6] se dan condiciones necesarias y suficientes para lograr esa transformación, pero son muy difíciles de aplicar.

Otro enfoque del problema se puede ver en [4] para sistemas (1.2) con una sola salida. Sin embargo, en ese método es necesario que los controles sean  $n$  veces diferenciables para lograr la transformación necesaria, lo que involucra la integración de ecuaciones a derivadas parciales, e impone fuertes restricciones estructurales sobre el campo  $f$ . En [3] se evitan estos inconvenientes, aunque para sistemas (1.2) de una entrada y una salida, y manteniendo la hipótesis anterior de diferenciabilidad del control. La solución se obtiene mediante la linealización de la ecuación de error a lo largo de la trayectoria estimada en el espacio de estados, para el control dado. Dos problemas sin embargo subsisten: es necesario definir una función no lineal arbitraria—para lo que no se presenta ningún criterio—, y elegir el valor inicial del estimado del estado del sistema de tal forma que la linealización sea admisible.

Otro método de transformación del sistema (1.2) en el (1.3), siempre para sistemas de una entrada y una salida, es el de *pseudo-linealización* que puede verse en [5]. Tal método consiste, esencialmente, en sucesivas transformaciones del sistema original que involucran linealizaciones alrededor del conjunto de puntos de operación (que se supone son de equilibrio), y transformaciones de coordenadas en el espacio de estados que lleven al sistema a la forma deseada. Cuando las transformaciones no se pueden hacer de manera exacta, se procede a desprestigiar los términos de orden dos o mayor alrededor de los puntos de operación. La ventaja de este método sobre los anteriores es que se puede aplicar a sistemas no lineales para los cuales aquellos resultan inútiles. Sin embargo, no es posible su extensión a sistemas con múltiples entradas y salidas, y su carácter es esencialmente local.

Citaremos ahora métodos que no se basan en lograr transformaciones que conduzcan a (1.3).

El primero, de *linealización extendida* [7], propone para el sistema (1.2) supuesto *analítico* y con un conjunto dado de puntos de equilibrio, un observador de la forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + g(y) - g(\hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}), \end{cases}$$

con  $g$  función analítica a determinar, de forma tal que los autovalores de la linealización de la ecuación de error de observación, alrededor de los puntos de equilibrio, sean constantes. La ventaja de este método sobre los anteriores es que garantiza un comportamiento similar al del observador lineal de Luenberger localmente alrededor de los puntos de equilibrio, y en todos ellos con igual comportamiento. Sin embargo, para obtener  $g$  es necesario integrar  $n$  ecuaciones diferenciales no lineales a derivadas parciales.

El segundo método consiste en utilizar técnicas de Lyapunov para asegurar la convergencia de la ecuación de error de observación ([8], [9]). En los dos artículos citados se propone para (1.2) observadores del tipo:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \Phi(\hat{x}, u)(L(h(x)) - L(h(\hat{x}))),$$

con  $L$  función continua, y  $\Phi$  una función matricial  $C^\infty$ . La existencia de  $L$  se postula, así como la de una función de Lyapunov adecuada que garantice la convergencia. Sólo en el caso en que la función  $h$  sea *lineal* es posible un cómputo preciso, aún bajo las hipótesis antedichas, de la función  $\Phi$ . Las condiciones de convergencia son suficientes, y las hipótesis necesarias para encontrar la función de Lyapunov son difíciles de satisfacer.

El método de inmersión de (1.2) en un sistema bilineal, que se muestra en [12], [13], se refiere a sistemas no lineales de una entrada—una salida, lineales analíticos, completos y minimales, que pueden ser inmersos en sistemas bilineales antisimétricos, en cuyo caso la inmersión resulta un homomorfismo inyectivo. Se demuestra que es posible construir un observador para tales sistemas bilineales, convergente en forma asintótica e independiente de la condición inicial, siempre que las entradas sean persistentes, es decir, no se confundan con entradas no universales ([14]). Así, a través de la inmersión mencionada se obtiene

un observador para el sistema original. La ventaja de este método es que permite —sobre sistemas para los cuales existen entradas que no permiten distinguir entre estados— construir observadores que converjan independientemente de la condición inicial siempre y cuando se trabaje con una subclase de las entradas universales, lo que no es contemplado por los otros métodos. Sin embargo, las condiciones de inmersión limitan considerablemente la clase de sistemas para los cuales tal construcción es factible, y su verificación, así como la construcción de la función de inmersión, son dificultosas en la práctica.

Dos trabajos que deben considerarse como antecedentes inmediatos al nuestro son [11] y [22]-[23], aunque ambos se refieren exclusivamente a sistemas lineales analíticos con una sola entrada y una sola salida. En ambos, la expresión del observador es

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + K(y - h(\hat{x})),$$

y en [11] se prueba, mediante argumentos típicos de Lyapunov, la existencia de la matriz  $K$  que logra la convergencia exponencial del vector estimado, con velocidad arbitraria, siempre que el sistema (1.2) sea difeomorfo a uno cuyo campo  $g(x)$  tenga una forma particular.

En [22] se prueba, para sistemas que tienen grado relativo igual a  $n$  (dimensión del espacio de estados), la convergencia del observador cuando la matriz  $K$  es de la forma  $F(\hat{x})K_1$ , con  $F$  función matricial que es el Jacobiano de un cambio de coordenadas, y  $K_1$  matriz real de diseño. En el reciente trabajo [23] —una versión mejorada de la anterior, en tanto presenta modificaciones sobre ciertos puntos erróneos contenidos en ella— se extienden los resultados al caso en que el grado relativo del sistema no coincida con la dimensión del espacio de estados, aunque a costa de suponer que el control es de estructura polinomial  $n$  veces derivable, y agregar algunas hipótesis sobre la estructura de los campos para asegurar la convergencia. La importancia de este trabajo reside en el método de demostración de la convergencia, que esencialmente consiste en diagonalizar la matriz correspondiente a la parte lineal de la ecuación de error de observación, de forma tal que la no linealidad se transforme en una perturbación sobre la matriz, estructurada en forma tal de que se pueda asegurar, mediante la elección adecuada de  $K_1$ , la convergencia exponencial a cero del error de observación.

En lo referente al funcionamiento de observadores a lazo cerrado para la estabilización local de un sistema no lineal, podemos citar los siguientes



artículos: [40] y [10]; en el primero se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de observadores exponenciales para la estabilización local hacia un punto de equilibrio en sistemas del tipo (1.2), y en términos de la linealización local del sistema. La importancia fundamental del artículo, a nuestro entender, reside en la obtención, para sistemas definidos en  $\mathcal{R}^n$ , de la forma canónica del observador de identidad a partir de supuestos básicos en la definición de la noción de observador. No es posible la extensión del observador allí propuesto al funcionamiento a lazo cerrado en otro tipo de tareas de control.

En cuanto al segundo, tal resultado de estabilización aparece como secundario en un contexto de otra índole, y se aplica al observador propuesto en [11].

En lo referente al funcionamiento del observador en el seguimiento de trayectorias, cabe citar a los trabajos de Canudas de Wit, [15], [16], [19] y [18], en los cuales se proponen dos tipos diferentes de observadores —uno de tipo Luenberger y otro de tipo de estructura variable— para el seguimiento, por un brazo de robot de juntas rígidas, de una trayectoria predeterminada. El problema fundamental de estos observadores es que basan su diseño y funcionamiento en las características especiales del sistema considerado, y por lo tanto, no se pueden extrapolar los resultados obtenidos para ellos a otros sistemas más generales.

En esa línea de trabajo —la de observadores diseñados para modelos de manipuladores robóticos— hemos realizado avances sobre la consideración de la robustez del observador y su comportamiento en el lazo de control, que pueden verse en nuestros trabajos [49] y [50]. Simulaciones obtenidas sobre un sistema robótico comercial usando el observador diseñado se incluyen en el Capítulo 6.

Lo anterior se refiere al problema de seguimiento de trayectorias. En lo que respecta al seguimiento de modelos con el uso de observadores no lineales, no hay antecedentes publicados. Sobre este aspecto logramos algunos resultados originales que tienen en cuenta un problema ineludible en la práctica: el de la utilización de controles acotados. A partir de nuestro artículo [52] —donde se demuestra que todo sistema lineal analítico con grado relativo global y con una entrada y una salida puede seguir el comportamiento de un sistema bilineal completamente controlable con controles acotados— introduciremos en el Capítulo 6 el observador en el lazo de control de seguimiento, a fin de que un sistema físico concreto pueda seguir tal modelo bilineal, y mostraremos simulaciones de tal seguimiento.

De la breve exposición anterior podemos concluir que el tratamiento del diseño de observadores para sistemas no lineales continuos se desarrolló, fundamentalmente, para la clase particular de sistemas denominados lineales analíticos, y aún en este caso dista mucho de encarar en forma sistemática el caso del funcionamiento a lazo cerrado.

Respecto de los sistemas no lineales discretos, no fue posible encontrar referencias bibliográficas sobre el diseño de observadores.

Es por eso que nuestro trabajo se concentra en el tratamiento de los temas que, de acuerdo con lo comentado, no están estudiados suficientemente: observadores no lineales para sistemas generales, tanto en tiempo continuo como discreto, y su comportamiento en lazos cerrados de control. Expondremos a continuación un esquema básico de la organización del trabajo que presentamos acerca de los tópicos mencionados.

### 1.3 Organización de la tesis.

Los lineamientos de organización de esta tesis son los siguientes.

- En el Capítulo 2 definiremos el problema del observador en tiempo continuo. Para ello estableceremos dos hipótesis básicas acerca del comportamiento de un observador, y daremos un marco preciso de referencia de los sistemas no lineales para los cuales pretendemos construir dicho observador. A diferencia de lo realizado en otros trabajos en cuanto a la formulación de sistemas sobre los que se aplicará el observador, adoptaremos las definiciones más generales posibles de sistema no lineal descrito desde el ámbito geométrico diferencial, dadas en [29] y [30], con el fin de no introducir restricciones innecesarias en el tratamiento del problema. A partir de esto definiremos lo que entendemos por un *observador general* para un sistema no lineal, y demostraremos que tal observador es el que cumple con la primera de las hipótesis antedichas.

Con el objeto de establecer la existencia de tal observador generalizaremos el concepto de *distribución de invariancia condicionada*, presentado por Isidori et. al. en [33] para sistemas lineales analíticos, y obtendremos un teorema fundamental que liga la existencia de tales distribuciones con la de los observadores generales.

Estos resultados que presentamos generalizan los obtenidos por Willems en [34] para sistemas lineales, y por van der Schaft en [35] para

sistemas no lineales autónomos, es decir del tipo (1.1).

- En el Capítulo 3 completamos la forma de los observadores que se obtienen naturalmente en el Capítulo 2, a fin de asegurar el cumplimiento de la segunda hipótesis de comportamiento del observador, es decir, la convergencia de las estimaciones; para ello demostraremos que la propiedad de ser observador general es invariante frente a la adición en la expresión del mismo de funciones pertenecientes a una clase determinada. La restricción de este resultado general al caso de observadores idénticos en  $\mathcal{R}^n$  permite recuperar la notable observación de Xai y Gao, de la canonicidad de la estructura de tales observadores (Cfr.[40]). Seguidamente, y dado que nuestra intención es tratar sistemas que puedan seguir trayectorias y modelos dados, introduciremos el tipo de observabilidad que exigiremos para ellos, y demostraremos que es un caso particular de la observabilidad local débil de Hermann y Krener (Cfr.[45]), pero que sin embargo abarca a todos los conceptos de observabilidad para los cuales se construyeron observadores no lineales. Para este tipo de sistemas, a partir de los resultados del Capítulo 2 — que destacamos, son constructivos— obtendremos primeramente el observador general canónico, y para garantizar la convergencia del error de observación, lo modificaremos según lo expuesto anteriormente para obtener el observador completo de tipo Luenberger. Este observador, a diferencia de los existentes, trata sistemas con múltiples entradas y salidas y no exige una especial estructura del sistema tal como ser lineal analítico, u otras. En este aspecto, es superior a los obtenidos recientemente por Ciccarella et. al. en [22]- [23], y por Gauthier et. al. en [11]. Finalmente, y siguiendo la misma metodología que para el observador completo, construiremos el observador reducido de tipo Luenberger, que —salvo en [7], donde se utiliza el método de linealización extendida (es decir esencialmente técnicas lineales)— es el primero construido para sistemas no lineales de que tengamos conocimiento.
- En el Capítulo 4, trataremos la convergencia del observador tanto completo como reducido, a lazo abierto y a lazo cerrado; esto último se hará para el seguimiento tanto de trayectorias como de modelos. Comenzaremos por establecer las hipótesis que aseguren la convergencia del observador completo en forma exponencial y con velocidad deseada, para una subclase de los sistemas considerados, y suponiendo

solamente la acotación uniforme de los controles admisibles. Veremos a continuación que es posible debilitar dichas hipótesis siempre que los controles hagan que los estados del sistema se mantengan en un conjunto acotado, como sucede en muchos casos reales.

Para sistemas que no pertenezcan a la subclase antedicha demostraremos que el problema de la convergencia se reduce al de la perturbación no lineal de un sistema lineal estable con perturbaciones no estructuradas, y estableceremos hipótesis que permitan asegurar la convergencia asintótica del error de observación a cero, aunque no exponencial.

En lo que respecta a la convergencia a lazo cerrado, comenzaremos tratando el problema del seguimiento de trayectorias, para lo cual lo replantearemos en el contexto de los sistemas que estamos tratando, generalizando los resultados obtenidos para los lineales analíticos en [25], y [31]. Obtendremos las expresiones de las leyes de seguimiento de trayectorias, y estableceremos las hipótesis que aseguren el seguimiento de una trayectoria deseada, con error de seguimiento decayendo exponencialmente con velocidad deseada y con el control obtenido a través del observador, para lo cual deberemos introducir una especie de *principio de separabilidad*. Probaremos dicha convergencia, así como la del observador, y veremos que es posible relajar las hipótesis siempre que se restrinja adecuadamente la clase de trayectorias a seguir.

Para el problema del seguimiento de modelos, dado que los resultados obtenidos para sistemas tan generales como los que estamos tratando no dan una ley explícita de seguimiento, deduciremos bajo qué condiciones se puede obtener dicha ley, y la exhibiremos. Este resultado generaliza los habituales de leyes de seguimientos de modelos para sistemas lineales analíticos, que se pueden ver en [25], [58], [59]. Una vez resuelto en nuestro contexto el problema de seguimiento de modelos, mostraremos que cuando se utilizan observadores en el lazo de control el problema es similar al de seguimiento de trayectorias, y, por lo tanto, la prueba de convergencia se reduce a la anterior. Finalmente probaremos la convergencia del observador reducido a lazo cerrado, para los problemas mencionados.

Como fue expresado anteriormente, no hay —salvo contados casos, sobre todo los artículos de Canudas de Witt, [15], [16], [19] y [18], referidos a casos muy particulares— antecedentes sobre el estudio de observadores no lineales en el seguimiento de trayectorias. Tampoco se registran en el seguimiento de modelos, y menos aún considerando

controles uniformemente acotados, tema en el cual nuestro trabajo es pionero (Cf. [52]).

- En el Capítulo 5 encararemos los problemas de los capítulos anteriores para sistemas no lineales discretos, sobre los que definiremos el problema del observador, el tipo de sistemas no lineales para los cuales lo construiremos, encontraremos relaciones estructurales similares al caso continuo que permitan asegurar la existencia del observador, construiremos el observador completo, y probaremos la convergencia del mismo a lazo abierto.

Nuevamente, plantearemos las hipótesis básicas que debe cumplir un observador discreto, adoptaremos la definición más general posible de sistema no lineal discreto siguiendo los lineamientos de Grizzle en [61] y definiremos el observador general discreto. Dado que el contexto en que trabajamos es diferente al del caso continuo, definiremos las distribuciones de invariancia condicionada discreta, y probaremos la relación entre la existencia de las mismas y la de los observadores generales discretos.

A continuación estableceremos el tipo de observabilidad que consideraremos, y construiremos el observador canónico de tipo Luenberger discreto. Como en el caso continuo, exhibiremos las modificaciones de-  
jan invariante a este observador, y las introduciremos a fin de lograr la convergencia del mismo. Seguidamente construiremos los observadores de tipo Luenberger, tanto completo como reducido.

Para finalizar el Capítulo, estableceremos las hipótesis que permitan asegurar la convergencia de ambos observadores a lazo abierto, para controles uniformemente acotados, y con velocidad de convergencia potencial. Veremos a continuación que es posible relajar dichas hipótesis a cambio de sacrificar la velocidad de convergencia.

Como hemos expresado anteriormente, no se han podido obtener antecedentes bibliográficos sobre el tema, por lo que no se puede comparar la performance de este observador con ningún otro.

- En el Capítulo 6, finalmente, mostraremos simulaciones para sistemas continuos reales, tanto en el seguimiento de trayectorias como de modelos, a lazo cerrado, y con la inserción de observadores en el lazo de control.

En el primer caso, obtendremos el modelo matemático de un brazo de robot de un solo vínculo con juntas flexibles, y diseñaremos, de acuerdo

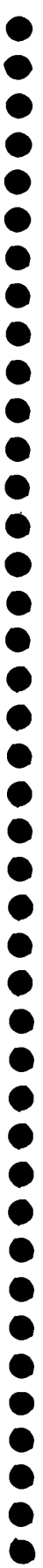
con nuestro trabajo [52], una ley de control que permita el seguimiento de un sistema bilineal completamente controlable con controles acotados, insertando el observador en el lazo de control, y simulando el conjunto para una ley de control externo de tipo bang-bang, obtenida siguiendo lo desarrollado en nuestro trabajo [51].

En el segundo caso simularemos el funcionamiento del observador en el lazo de control del manipulador robótico PUMA 560 en el seguimiento de una trayectoria predeterminada, a partir del modelo del mismo en el caso de tener tres articulaciones fijas.

También mostraremos el comportamiento a lazo abierto del observador para un sistema discreto no lineal definido a partir de sus ecuaciones en diferencias.

En todos los casos explicitaremos los pasos seguidos en la construcción del observador, así como la determinación de las constantes de diseño.

- En el Apéndice A adjuntamos copias de nuestros trabajos [50] y [52]



## Capítulo 2

# El observador continuo

### 2.1 Introducción

En este Capítulo trataremos el problema del observador en tiempo continuo, y estableceremos las definiciones básicas que se utilizarán con ese fin.

Primeramente se presentarán los sistemas no lineales que se considerarán, las hipótesis sobre los mismos y su significado. A continuación se definirá un *observador general* para este tipo de sistemas, mostrando que se reduce, en el caso lineal, al observador de Luenberger.

Finalmente, se introducirá una generalización del concepto de *distribuciones de invariancia condicionada*, y se relacionará la existencia de esas distribuciones con la de un observador general.

### 2.2 El problema del observador en tiempo continuo

El problema de la construcción de observadores en tiempo continuo se puede resumir en la siguiente forma.

Dado un sistema  $\Sigma$  con entradas  $u(t)$  y salidas  $y(t)$ , si denominamos  $x(t)$  a sus estados en una cierta realización, se pretende construir un sistema  $\Sigma'$ , (el observador), que tenga por entradas al control  $u(t)$  y a las salidas  $y(t)$ , de tal manera que a partir de sus variables de estado  $w(t)$ , se pueda obtener una estimación  $\hat{x}(t)$  del estado  $x(t)$  de  $\Sigma$  como muestra la figura 2.1. .



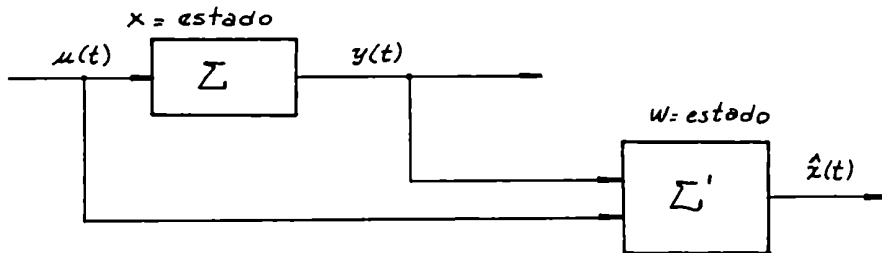


Figura 2.1

La estimación debe verificar las siguientes condiciones:

- H1c. si para algún  $t_0$ ,  $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ , entonces  $\hat{x}(t) = x(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$  donde esté definida  $x(t)$ .
- H2c.  $\hat{x}(t)$  converge a  $x(t)$  independientemente de las condiciones iniciales  $\hat{x}(t_0)$  y  $x(t_0)$ .

En este Capítulo veremos bajo qué condiciones existe un observador que cumple con H1c., y a tal observador lo denominaremos *observador general* para el sistema  $\Sigma$ .

El análisis de las condiciones para el cumplimiento de H2c., lo realizaremos en los capítulos siguientes.

## 2.3 Generalidades

Resumimos en este apartado algunas definiciones de Geometría Diferencial que utilizaremos en lo sucesivo tanto para la definición de los sistemas no lineales con que trabajaremos, como para la de los observadores para tales sistemas.

### Definición 2.1

Un *haz fibrado* (o fibrado) es una terna  $\lambda = (B, M, \Pi)$  donde  $B$  y  $M$  son variedades diferenciables y  $\Pi : B \rightarrow M$  es una aplicación  $C^\infty$  y suryectiva que verifica la siguiente condición, llamada de *trivialidad local*:

$\forall x \in M \exists O$  entorno abierto de  $x$  en  $M$ , una variedad diferenciable  $U$  y un difeomorfismo  $\eta : O \times U \rightarrow \Pi^{-1}(O)$  que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 O \times U & \xrightarrow{\eta} & \Pi^{-1}(O) \\
 p_{r1} \searrow & & \swarrow \Pi \\
 & O &
 \end{array}$$

Figura 2.2

esto es,  $\forall y \in O, \forall t \in U, \Pi(\eta(y, t)) = y$ .

Se dice que  $B$  es el *espacio fibrado*,  $M$  su *base* y  $\Pi$  su *proyección*.  
A  $(O \times U, \eta)$  se la llama *trivialización*.

### Observación 2.1

1. Dado que  $\Pi|_{\Pi^{-1}(O)} = p_{r1} \circ \eta^{-1}$ ,  $\Pi$  resulta una *sumersión* y por lo tanto,  $\forall x \in M, \Pi^{-1}(x) = B_x$  es una subvariedad cerrada de  $B$  llamada *fibra* de  $x$  para  $\lambda$ .
2. Si  $TM$  es el fibrado tangente a  $M$ , entonces  $(TM, M, \Pi_M)$  es un fibrado.

Dado  $b \in B$ , se dirá que  $B_{\Pi(b)}$  es la *fibra* en el punto  $b$ . Si todas las fibras son difeomorfas a una misma variedad  $F$  (como por ejemplo cuando  $B$  es conexo) se dirá que  $B$  es un espacio fibrado de tipo  $F$ , y  $F$  su fibra standard.

Como el espacio tangente a una fibra  $B_x$  en un punto  $b \in B$  (i.e.  $\Pi(b) = x$ ), está canónicamente identificado a un subespacio de  $T_b(B)$ , se dice que los vectores de este espacio son los *vectores tangentes verticales* en el punto  $b$  y ellos forman el núcleo de  $\Pi_{*b}$ , Diferencial de  $\Pi$  en  $b$ .

### Definición 2.2

Dados dos fibrados  $\lambda = (B, M, \Pi)$ ,  $\lambda' = (B', M', \Pi')$  se llama *morfismo* de  $\lambda$  en  $\lambda'$  a todo par  $(f, g)$  tal que  $g : M \rightarrow M', f : B \rightarrow B'$  son aplicaciones  $C^\infty$  que hacen conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & B' \\
 \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\
 M & \xrightarrow{g} & M'
 \end{array}$$

Figura 2.3

Si  $f$  y  $g$  son difeomorfismos, el morfismo de  $\lambda$  sobre  $\lambda'$  se llama *isomorfismo*. Si  $M = M'$  y  $(f, I_M)$  es un morfismo (isomorfismo) se dice que  $f$  es un  $M$ -morfismo ( $M$ -isomorfismo) de  $B$  en  $B'$ .

### Observación 2.2

Notar que  $f$  aplica fibras de  $B$  en fibras de  $B'$ .

Sea ahora  $b \in B$  y consideremos una carta coordenada  $(x, O')$  alrededor de  $\Pi(b)$  en  $M$ , donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Identificando  $x_i : M \rightarrow \mathcal{R}$  con  $x_i \circ \Pi : B \rightarrow \mathcal{R}$ , podemos considerar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como funciones coordenadas en  $B$ . Si tomamos en  $B$  funciones coordenadas adicionales  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , de forma que  $(x, u)$  sea un sistema coordenado en  $B$ , entonces las fibras vendrán dadas por los conjuntos  $x = \text{constante}$ . Tal sistema de coordenadas en  $B$  se dice que *preserva fibras*.

## 2.4 Sistemas no lineales en tiempo continuo

### Definición 2.3

Un *sistema no lineal de control (en tiempo continuo)*, sobre un fibrado  $(B, M, \Pi)$ , es un  $M$ -morfismo  $F$  de  $B$  en  $TM$ ; es decir que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & TM \\ \Pi \searrow & & \swarrow \Pi_M \\ & M & \end{array}$$

Figura 2.4

Se notará al sistema  $\Sigma = (B, M, F)$

Aquí  $M$  ha de considerarse como el espacio de estados, mientras que las fibras de  $B$  representan el espacio de entrada (dependiente de los estados), y  $F$  representa la dinámica del sistema.

Consideremos  $b_0 \in B$  y, en la notación de la Definición 2.1, supongamos que  $x_0 = \Pi(b_0) \in O$ . Sean  $x = (x_1, \dots, x_n)$  coordenadas alrededor de  $x_0$ , y si  $\eta^{-1}(b_0) = (x_0, v_0)$ , sean  $u = (u_1, \dots, u_m)$  coordenadas en  $U$  alrededor de  $v_0$ .

Entonces,  $(x_1 \circ \eta^{-1}, \dots, x_n \circ \eta^{-1}, u_1 \circ \eta^{-1}, \dots, u_m \circ \eta^{-1})$  son coordenadas locales en  $B$  alrededor de  $b_0$ , que notamos  $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = (x, u)$ .

Tomando en  $TM$  la carta local  $(x, \dot{x})$ , en ésta y las cartas anteriores,  $F$  vendrá dada localmente por:

$$F(x, u) = (x, f(x, u)), \quad (2.1)$$

recobrando la expresión común de un sistema no lineal definido en un abierto de  $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.2)$$

### Observación 2.3

Conviene aquí puntualizar los hechos que motivan la Definición 2.3.

A partir del sistema definido por la ecuación (2.1), la definición global de un sistema no lineal de control en tiempo continuo vendría dada por el siguiente diagrama conmutativo (Cfr.[29],[30]):

$$\begin{array}{ccc} M \times U & \xrightarrow{F} & TM \\ \Pi_1 \searrow & & \swarrow \Pi_M \\ & M & \end{array}$$

Figura 2.5

donde  $U \subset \mathcal{R}^m$  es el espacio de entradas y  $M$  es el espacio de estados.

Si  $(x_0, u_0) \in M \times U$  y  $x, u$  son funciones coordenadas alrededor de  $x_0$  y  $u_0$ , respectivamente, entonces en las cartas locales  $(x, u)$  en  $M \times U$ , y  $(x, \dot{x})$  en  $TM$ , se obtendrán nuevamente las expresiones (2.1) - (2.2). Pero en esta descripción se supone que:

1. el espacio de entrada,  $U$ , es independiente de los estados, lo que no contempla en general controles realimentados.
2. el campo  $f(x, u)$  está globalmente definido en  $U$ .

La última suposición no es cierta para cualquier sistema no lineal (Cfr.[31]). En cuanto a la primera, si bien el hecho de recurrir a un observador sugiere que no se dispone de todo el vector de estados  $x$ , y por lo tanto no hay realimentación de estados, sí se utiliza el estimado  $\hat{x}$  para las leyes de control del sistema para tareas tales como el seguimiento de trayectorias o la regulación, etc.

Ahora bien, como dichos controles también actúan sobre el observador, si éste ha de ser un sistema no lineal, necesariamente vendrá dado por la Definición 2.3. De ahí, la utilidad de considerar tanto al sistema como al observador con esta definición.

**Definición 2.4**

Un *sistema no lineal con salidas*, (en tiempo continuo), es una pentau-  
pla  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , donde  $\Sigma = (B, M, F)$  es un sistema no lineal de  
control,  $Y$  una variedad diferenciable, y  $h : M \rightarrow Y$ ,  $C^\infty$ , es una sumersión  
surgectiva.

**Observación 2.4**

1. El hecho que  $h$  esté definida sobre la base  $M$  indica la independencia  
de la función de salida con respecto a las entradas.
2. Sea  $y$  una función coordenada en  $Y$  alrededor de  $h(\Pi(b_0))$ , entonces en  
estas coordenadas para  $Y$ , y  $(x, u)$  para  $B, \Sigma_s$  se escribirá localmente:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

donde, por abuso de notación se escribió  $h$  en vez de  $y \circ h \circ x^{-1}$ .

Finalmente, para dar una definición de *observadores generales*, introducimos  
la siguiente:

**Definición 2.5**

Un *sistema no lineal extendido* es una terna  $\Sigma = (B \times Y, M, K)$ , tal que  $B$   
es un fibrado de base  $M$ ,  $Y$  es una variedad diferenciable y  $K : B \times Y \rightarrow TM$   
es una función  $C^\infty$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B \times Y & \xrightarrow{K} & TM \\ \Pi \circ \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \Pi_M \\ & M & \end{array}$$

Figura 2.6

Diremos que  $K$  es un *M - morfismo Y - extendido* de  $B$  en  $TM$  ( o  
*morfismo extendido* cuando no haya confusión).

**Observación 2.5**

En coordenadas locales  $(x, u)$  para  $B$ , e  $y$  para  $Y$ , el diagrama se reduce  
a la ecuación

$$\dot{x} = k(x, u, y) \quad (2.4)$$

## 2.5 Observadores generales

### Definición 2.6

Dado un sistema no lineal con salidas  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , se dice que el sistema no lineal extendido  $\Sigma' = (B' \times Y, W, K)$  es un *observador general* de  $\Sigma_s$  si:

1. existe un morfismo  $(\Phi, \varphi)$  de  $(B, M, \Pi)$  en  $(B', W, \Pi')$  tal que  $\varphi$  es una sumersión suryectiva.
2. Si  $(O \times U, \eta)$  y  $(O' \times U', \eta')$  son trivializaciones de  $B$  y  $B'$  respectivamente con  $\Phi(\Pi^{-1}(O)) \subset \Pi'^{-1}(O')$ , entonces  $\eta'^{-1} \circ \Phi \circ \eta = (\varphi, \sigma)$ , donde  $\sigma : U \rightarrow U'$  es un difeomorfismo.
3. Si  $\bar{h} : B \rightarrow Y$  está definida por

$$\bar{h} = h \circ \Pi \tag{2.5}$$

el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & TM \\ \Phi \downarrow \searrow \bar{h} & & \downarrow \varphi_* \\ B' \times Y & \xrightarrow{K} & TW \end{array}$$

Figura 2.7

Notar que 1. y 3. implican que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Phi} & B' \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Figura 2.8

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ \Pi \downarrow \searrow \bar{h} & & \\ M & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Figura 2.9

Si, como antes,  $((x, u), O \times U)$  es una carta local alrededor de  $b_0 \in B$ , que

preserva fibras, donde, por abuso de notación se identificó localmente  $B$  con su imagen difeomorfa según la *trivialidad local*, y  $((w, v), O' \times U')$  es otra similar alrededor de  $b'_0 = \Phi(b_0) \in B'$ , tomando coordenadas  $y$  alrededor de  $h(\Pi(b_0))$  y las canónicas  $(x, \dot{x})$  y  $(w, \dot{w})$ , para  $TM$  y  $TW$  respectivamente, de los diagramas de las figuras 2.7, 2.8 y 2.9 se deduce que localmente se cumple:

$$F(x, u) = (x, f(x, u)) = (x, \dot{x}) \quad (2.6)$$

$$\Phi(x, u) = (w, v) = (\varphi(x), \sigma(u)) \quad (2.7)$$

$$\bar{h}(x, u) = h(x) = y \quad (2.8)$$

$$K(w, v, y) = (w, k(w, v, y)) = (w, \dot{w}) \quad (2.9)$$

donde, por abuso de notación se nota con las mismas letras las funciones y campos que sus expresiones en coordenadas locales, y con esta convención se tiene que

$$\begin{aligned} f : O'' \times U'' \subset \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m &\rightarrow \mathcal{R}^n \\ \varphi : O''' \subset \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^k \\ \sigma : U'' &\rightarrow U'' \\ h : O^{iv} \subset \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^l \\ k : O^v \times U'' \times Z \subset \mathcal{R}^k \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^l &\rightarrow \mathcal{R}^k. \end{aligned}$$

### Observación 2.6

1. De 2. de la Definición 2.6, se deduce que  $\Phi$  es una sumersión suryectiva.
2. Dado que  $\sigma$  es un difeomorfismo, por abuso de notación identificaremos  $v$  con  $u$ .
3. La Definición 2.6 establece un cierto relajamiento sobre la hipótesis H1c. .

En efecto, si  $(\Phi, \bar{h}) : B \rightarrow B' \times Y$  no es un difeomorfismo, entonces de (2.7) - (2.8), como  $(\Phi, \bar{h})(x, u) = (w, u, y)$  no tiene inversa, no se podrá estimar todo  $x$  a partir de  $(w, u, y)$ , sino sólo una parte  $\hat{x} = G(w, u, y)$ , y tendremos por lo tanto un *observador parcial*. En este caso H1c. se reduce localmente a :

**H3c.** si para algún  $t_0 \geq 0$   $w(t_0) = \varphi(x(t_0))$ , entonces  $w(t) = \varphi(x(t)) \forall t \in [t_0, t_1]$ , intervalo de definición de  $x(t)$ .

4. Si  $(\Phi, \bar{h})$  es un difeomorfismo,  $x$  se puede recuperar a partir de  $(w, u, y)$  y el observador se dirá *completo*, y  $\hat{x} = G(w, u, y)$ , con  $G$  inversa de  $(\Phi, \bar{h})$ , estimará a  $x$ .

### Definición 2.7

Un control admisible para un sistema no lineal de control definido localmente por la ecuación (2.6) en un entorno  $O'' \times U''$  de  $(x_0, u_0)$ , es una función medible  $u : [t_0, t_1] \rightarrow U''$ , tal que existe solución  $x(t)$  de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

con  $x(t) \in O'' \forall t \in [t_0, t_1]$ .

Vale la siguiente:

### Proposición 2.1

Localmente, el observador general  $\Sigma'$  de  $\Sigma_s$ , cumple la hipótesis H3c.

### Demostración

Supongamos que  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  vienen descriptos localmente por las ecuaciones (2.6) - (2.9), y que  $u$  es un control admisible para (2.10) en  $[t_0, t_1]$ . Supongamos también, sin pérdida de generalidad que  $h$  está definida en  $O''$ .

Entonces, la conmutatividad del diagrama de la figura 2.7 se expresará localmente por

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} f_j(x, u) = k_i(\varphi(x), u, h(x)) \quad (2.11)$$

$\forall (x, u) \in O'' \times U''$ ,  $1 \leq i \leq k$ , donde

$$\begin{aligned} f(x, u) &= (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u)) \\ \varphi(x) &= (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) \\ k(w, u, y) &= (k_1(w, u, y), \dots, k_k(w, u, y)) \end{aligned}$$



Por lo tanto, si  $x(t)$  es solución de (2.10), y  $\bar{w}(t) = \varphi(x(t))$ , de (2.11) tendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{w}_i(t)}{dt} &= \frac{d\varphi_i(x(t))}{dt} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x(t))}{\partial x_j} f_j(x(t), u(t)) \\
&= k_i(\varphi(x(t)), u(t), h(x(t))) \\
&= k_i(\bar{w}(t), u(t), y(t))
\end{aligned} \tag{2.12}$$

con  $y(t) = h(x(t))$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Por otra parte, la solución  $w(t)$  de la ecuación del observador,  $\dot{w} = k(w, u, y)$  con las entradas  $u(t)$  e  $y(t)$  anteriores y una condición inicial arbitraria  $w(t_0) = w_0 \in \varphi(O'')$ , satisface

$$\begin{aligned}
\frac{dw_i(t)}{dt} &= k_i(w(t), u(t), y(t)) \\
w_i(t_0) &= w_{i_0}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$1 \leq i \leq k, \forall t \in [t_0, t'_1]$ , con  $t'_1 \leq t_1$ .

Por lo tanto, si  $w_0 = \varphi(x_0)$ , de (2.12) - (2.13), por la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales,  $t'_1 = t_1$ , y  $w(t) = \varphi(x(t)) = \bar{w}(t)$ . ■

### Observación 2.7

En el caso de tener un sistema *lineal* con salidas  $\Sigma_s = (\mathcal{R}^n \times U, F, Y, h)$ , con  $U \subset \mathcal{R}^m, Y \subset \mathcal{R}^l$ , abiertos y  $F : \mathcal{R}^n \times U \rightarrow \mathcal{R}^n$ ,  $h : \mathcal{R}^n \rightarrow Y \subset \mathcal{R}^l$  lineales, es decir:

$$\begin{aligned}
F(x, u) &= Ax + Bu \\
h(x) &= Cx
\end{aligned}$$

un observador general  $\Sigma' = (\mathcal{R}^k \times U \times Y, \mathcal{R}^k, K)$  de  $\Sigma_s$ , es tal que con  $K : \mathcal{R}^k \times U \times Y \rightarrow \mathcal{R}^k$  también lineal, es decir,  $K(w, u, y) = Gw + B'u + Ly$ , hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}^n \times U & \xrightarrow{F} & \mathcal{R}^n \\
\downarrow T \quad \swarrow id_U \quad \searrow C & & \downarrow T \\
\mathcal{R}^k \times U \times Y & \xrightarrow{K} & \mathcal{R}^k
\end{array}$$

Figura 2.10

con  $T : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^k$  lineal.

La conmutatividad indica que

$$TAx + TBu = GTx + B'u + LCx = (GT + LC)x + B'u \quad (2.14)$$

y como se cumple para todo  $x$  y para todo  $u$ , han de valer:

$$B' = TB \quad (2.15)$$

$$TA = GT + LC \quad (2.16)$$

Las condiciones (2.15) y (2.16) son exactamente las condiciones para la existencia de un observador lineal de Luenberger. (Cfr.[32])

Mas aún, en este caso  $(\Phi, \bar{h}) = (T, C)$  es un isomorfismo de  $\mathcal{R}^n$  en  $\mathcal{R}^k \times Y$  si y sólo si la matriz  $\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}$  de  $\mathcal{R}^{(k+l) \times n}$  tiene rango  $n$ , lo que de acuerdo con [32] es la condición para la existencia de un observador lineal *reducido*, es decir aquel que permite determinar todo el vector de estados con un número de ecuaciones diferenciales *menor* que la dimension de dicho vector.

## 2.6 Distribuciones de Invariancia Condicionada. Existencia de observadores generales

Precisaremos aquí el concepto de *distribución de invariancia condicionada* para un sistema no lineal en tiempo continuo, concepto que generaliza el usual para sistemas *afines en el control* introducido en [33].

Mostraremos que la existencia local de tal distribución es equivalente a la existencia de un observador general, generalizando los resultados obtenidos para los sistemas lineales por [34], y para los no lineales autónomos por [35].

### Definición 2.8

Dado  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , sistema no lineal con salidas, se dice que una distribución involutiva  $D$  en  $M$  es de *invariancia condicionada local* para

$\Sigma_s$ , si para todo punto  $x_0 \in M$ , existe una carta coordenada  $((x, u), O \times U)$  en  $B$  que preserva fibras, con  $(x, O)$  carta en  $M$  alrededor de  $x_0$ , tal que :

$$[f(\cdot, u), D \cap \text{Ker}(dh)] \subset D \quad (2.17)$$

para todo  $u$  fijo en  $U$ .

**Observación 2.8**

Si bien los resultados que se obtendrán son de carácter local y por lo tanto basta con la Definición 2.8, hay una extensión obvia de la misma a la de *invariancia condicionada (global)* .

Consideremos  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , y sea  $(O_i)_{i \in I}$  un cubrimiento de  $M$  por dominios de cartas trivializantes para  $B$ , con  $(\eta_i, O_i \times U)$  las trivializaciones; si  $O_i \cap O_j \neq \emptyset$ , se tendrá el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \Pi^{-1}(O_i \cap O_j) & \\ \swarrow & & \searrow \\ (O_i \cap O_j) \times U & \xrightarrow{\Gamma_{ij}} & (O_i \cap O_j) \times U \end{array}$$

Figura 2.11

con  $\Gamma_{ij}(x, u) = (x, \gamma_{ij}(x, u))$ ,  $\forall (x, u) \in O_i \cap O_j \times U$ . Podemos dar entonces la siguiente:

**Definición 2.9**

Sea  $D$  una distribución de invariancia condicionada local para  $\Sigma_s$ ; se dice que  $D$  es de *invariancia condicionada (global)* para  $\Sigma_s$ , si se puede encontrar un cubrimiento abierto de  $M$  por dominios de cartas trivializantes  $(O_i)_{i \in I}$  tal que:

1.  $D$  es de invariancia condicionada local en cada  $O_i, i \in I$ , con las respectivas coordenadas  $(x^i, u^i)$ , que preservan fibras.
2. en el diagrama de la figura 2.11,  $\gamma_{ij}$  es independiente de  $x \forall i, j \in I$

**Observación 2.9**

Sea  $P$  una codistribución en  $M$  tal que  $\text{Ker}(P) = \{X \in TM : \theta(X) = 0 \forall \theta \in P\} = D$ .

Entonces, se puede ver (Cfr.[25],[33]) que (2.17) es equivalente a:

$$L_{f(\cdot, u)}P \subset P + dh \quad (2.18)$$

para todo  $u$  fijo en  $U$ , donde  $L_{f(\cdot, u)}P$  es la codistribución que contiene *todas* las derivadas de Lie de todas las 1 - formas de  $P$  a lo largo del campo  $f(\cdot, u)$ .

**Teorema 2.1**

1. Sea  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$  un sistema no lineal con salidas, y sea  $\Sigma' = (B' \times Y, W, K)$  un observador general de  $\Sigma_s$ . Entonces la distribución  $Ker(\varphi_*)$ , con  $\varphi_*$  el Diferencial de  $\varphi$ , es de invariancia condicionada local para  $\Sigma_s$ .
2. Recíprocamente, sea  $D$  una distribución en  $M$  involutiva, de dimensión constante y de invariancia condicionada local. Entonces  $M$  se puede factorizar localmente mediante las hojas de la foliación inducida por  $D$ , a una variedad diferencial  $W$ , esto es, existe  $\varphi : M \rightarrow W$ , tal que  $Ker(\varphi_*) = D$ . Además, existe (localmente) un observador general  $\Sigma'$  de  $\Sigma_s$ .

**Demostración.**

1. De los diagramas conmutativos de las figuras 2.7, 2.8 y 2.9, se deducen estos tres también conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TB & \xrightarrow{\Phi_*} & TB' \\
 & \swarrow & \downarrow \Pi_* & & \downarrow \Pi'_* \\
 h_* & & TM & \xrightarrow{\varphi_*} & TW \\
 & \nwarrow & \longleftarrow h_* & & \\
 & & TY & & 
 \end{array}$$

Figura 2.12

$$\begin{array}{ccc}
 TB & \xrightarrow{F_*} & TTM \\
 \Phi_* \swarrow & & \searrow h_* \\
 TB' \times TY & \xrightarrow{K_*} & TTW \\
 & & \downarrow \varphi_{**}
 \end{array}$$

Figura 2.13

$$\begin{array}{ccc}
 TTM & \xrightarrow{\varphi_{**}} & TTW \\
 (\Pi_M)_* \downarrow & & \downarrow (\Pi_W)_* \\
 TM & \xrightarrow{\varphi_*} & TW
 \end{array}$$

Figura 2.14

Como  $\Phi, h$  y  $\varphi$  son sumersiones suryectivas, inducen las siguientes distribuciones involutivas:

$$E = \{X \in TB : (\Phi_*, \bar{h}_*)X = 0\} \quad (2.19)$$

$$D = \{X \in TM : \varphi_*X = 0\} = Ker(\varphi_*) \quad (2.20)$$

Valen entonces :

a.

$$\Pi_* E = D \cap D^\circ = D \cap \text{Ker}(dh) = D \cap \text{Ker}(h_*) \quad (2.21)$$

b.

$$F_* E \subset \dot{D} \quad (2.22)$$

donde  $\dot{D}$  es la prolongación, (o levantamiento completo) de  $D$  en  $TTM$ .

• Validez de a.

Del diagrama de la figura 2.12 se deduce que

$$\Pi'_* \circ \Phi_* = \varphi_* \circ \Pi_* \quad (2.23)$$

$$\bar{h}_* = h_* \circ \Pi_* \quad (2.24)$$

Por otra parte,  $X \in E \Rightarrow (\varphi_* \circ \Pi_*)X = (\Pi'_* \circ \Phi_*)X = 0 \Rightarrow \Pi_* X \in D$  y  $(h_* \circ \Pi_*)X = \bar{h}_* X = 0 \Rightarrow \Pi_* X \in D^\circ$ ,  
 $\Rightarrow \Pi_* E \subset D \cap D^\circ$ .

Para la otra inclusión, consideremos coordenadas  $(x, u)$  en  $B$  y  $(w, u)$  en  $B'$ , que preserven fibras. Si  $((x, u), (\dot{x}, \dot{u}))$  y  $((w, u), (\dot{w}, \dot{u}))$  son las coordenadas correspondientes en  $TB$  y  $TB'$ , respectivamente, en estas coordenadas tendremos :

$$\begin{aligned} \Pi_* &= \begin{bmatrix} Id_{n \times n} & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \\ \Pi'_* &= \begin{bmatrix} Id_{k \times k} & 0_{k \times m} \end{bmatrix} \\ \varphi_* &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ \Phi_* &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m} \\ \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{k+m}}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_{k+m}}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_{k+m}}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_{k+m}}{\partial u_m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De (2.23) se deduce que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m} \end{bmatrix} = 0_{k \times m} \quad (2.26)$$

Consideremos ahora  $X \in D \cap D^\circ$ , que en las cartas anteriores se escribe como  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  y tomemos

$$Y_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} X_i \quad \forall k+1 \leq j \leq k+m$$

Como  $\Phi_*$  restringido a las fibras es un isomorfismo, entonces

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{k+m}}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_{k+m}}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

es inversible, y por lo tanto existen (únicas) funciones  $C^\infty U_1, \dots, U_m$  tales que

$$Y_j = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_l} U_l. \quad (2.27)$$

Consideremos ahora

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^n (X_i \circ \Pi) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m U_j \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (2.28)$$

Claramente  $\Pi_* \tilde{X} = X \in D$ , y además, como  $\varphi_* X = 0$ , de (2.25) y (2.26), y de la construcción de los  $U_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , sale necesariamente que  $\Phi_* \tilde{X} = 0$ .

Además, como  $X \in D^\circ$ ,

$$\begin{aligned} \bar{h}_* \tilde{X} &= (h_* \circ \Pi_*) \tilde{X} = (h_* \circ \Pi_*) \left( \sum_{i=1}^n (X_i \circ \Pi) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= h_* \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = h_* X = 0 \Rightarrow \\ \tilde{X} &\in E \Rightarrow X = \Pi_* \tilde{X} \in \Pi_* E. \end{aligned}$$

Es decir,  $D \cap D^\circ \subset \Pi_* E$

- Validez de b.

Veamos que  $Ker(\varphi_{**}) \subset \dot{D}$  : del diagrama de la figura 2.14, se tiene que

$$(\Pi_W)_* \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ (\Pi_M)_* \quad (2.29)$$

Si  $X \in Ker(\varphi_{**}) \subset TTM$ , entonces

$$\begin{aligned} (\varphi_* \circ (\Pi_M)_*)X &= ((\Pi_W)_* \circ \varphi_{**})X = 0 \Rightarrow \\ (\Pi_M)_*X &\in Ker(\varphi_*) = D, \end{aligned}$$

por lo tanto,  $X \in \dot{D}$ .

Del diagrama de la figura 2.13 tenemos que

$$\varphi_{**} \circ F_* = K_* \circ (\Phi_*, \bar{h}_*) \quad (2.30)$$

Si  $X \in E$ , entonces  $(\varphi_{**} \circ F_*)X = K_* \circ (\Phi_*, \bar{h}_*)(X) = 0 \Rightarrow F_*X \in Ker(\varphi_{**}) \subset \dot{D}$ ; por lo tanto  $F_*E \subset \dot{D}$ .

Veamos ahora la validez de 1., es decir, que existen localmente coordenadas en  $B$  que preservan fibras tales que se cumple (2.17).

Dado que  $D \cap D^\circ$  es involutiva y de dimensión constante, induce una foliación en  $M$ , (Cfr. [36]); sean  $\mathcal{F}$  una hoja de esa foliación y  $B_{\mathcal{F}}$  la restricción de  $B$  a dicha hoja.

Como  $E$  es involutiva y  $\Pi_* E = D \cap D^\circ$ , las intersecciones de las subvariedades integrales de  $E$  con  $B_{\mathcal{F}}$  proyectan sobre  $\mathcal{F}$ . Se puede por lo tanto definir coordenadas  $u$  para las fibras de  $B_{\mathcal{F}}$  tales que  $u^{-1}(c)$ , con  $c$  constante, son dichas intersecciones.

Además, como  $\Phi_*$  restringido a las fibras de  $B$  es un isomorfismo,  $E$  restringido a dichas fibras es el vector nulo.

Sean  $x = (x_1, \dots, x_n)$  coordenadas locales en  $M$  tales que  $D = span\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\}$ ,  $D^\circ = span\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\}$ , donde, sin pérdida de generalidad se puede tomar  $s \leq r$ .

Por las consideraciones anteriores,  $(x, u)$  preservará fibras, y además en estas coordenadas,

$$E = span\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right\}$$

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_r} \right\} \\ \text{y } F(x, u) &= (x, f(x, u)) = (x, (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u))) \end{aligned}$$

Entonces, localmente,

$$F_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto (2.22) implica que  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, u) = 0, \forall 1 \leq i \leq s, r+1 \leq j \leq n$ , pero esto es equivalente a  $[f(\cdot, u), D \cap D^\circ] \subset D$ , esto es, (2.17).

2. Dado que  $D$  es involutiva y de dimensión constante, por el teorema de Frobenius (Cfr.[25]), existen localmente  $k$  funciones

$\varphi_i : O \subset M \rightarrow \mathcal{R}, C^\infty, 1 \leq i \leq k$ , tales que sus diferenciales son linealmente independientes, y que si  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : O \rightarrow W \subset \mathcal{R}^k$ , entonces  $D = \text{Ker}(d\varphi) = \text{Ker}(\text{span}_{\mathcal{R}}\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_k\})$ .

Ahora bien, se puede identificar  $\text{Ker}(d\varphi)$ , con  $\text{Ker}(\varphi_*) = D$ . Por hipótesis  $dh + d\varphi$  tiene dimensión constante y es involutiva, y por lo tanto, nuevamente por el teorema de Frobenius existen coordenadas locales  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , que sin pérdida de generalidad podemos suponer definidas en  $O$ , tales que

$$dh + d\varphi = \text{span}\{dx_1, \dots, dx_r\} \quad r \leq n \quad (2.31)$$

Pero  $D$  es de invariancia condicionada local y por tanto existen coordenadas en  $B$  que preservan fibras,  $(\tilde{x}, u) : \tilde{O} \times U \rightarrow \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$  tales que se cumple (2.17) - (2.18), condición que sigue verificándose bajo difeomorfismos locales en la base  $M$ , por lo que podemos suponer que  $((\tilde{x}, u), \tilde{O} \times U) = ((x, u), O \times U)$ , y por lo tanto:

$$L_{f(\cdot, u)}(d\varphi) \subset dh + d\varphi \quad \forall u \in U \quad (2.32)$$

Sea ahora  $\lambda : O \times U \rightarrow \mathcal{R}, C^\infty$ ; indicaremos con

$$d_x \lambda(x, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x, u) dx_i.$$



Entonces de (2.32) tendremos:

$$d_x(L_{f(\cdot, u)}\varphi_i) = L_{f(\cdot, u)}(d\varphi_i) \subset dh + d\varphi \quad 1 \leq i \leq k \quad (2.33)$$

Sean ahora  $L_{f(x, u)}\varphi_i(x) = \widetilde{K}_i(x_1, \dots, x_n, u)$   $1 \leq i \leq k$ ,  $\forall (x, u) \in O \times U$ , de (2.31) y (2.33) sale que  $d_x(\widetilde{K}_i(x_1, \dots, x_n, u)) \subset \text{span}\{dx_1, \dots, dx_r\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , y por lo tanto

$$\widetilde{K}_i(x_1, \dots, x_n, u) = \widetilde{K}_i(x_1, \dots, x_r, u) \quad (2.34)$$

$1 \leq i \leq k$ ,  $(x, u) \in O \times U$ , y entonces existen localmente  $k$  funciones  $k_i$  tales que

$$L_{f(x, u)}\varphi_i(x) = k_i(\varphi(x), u, h(x)) \quad (2.35)$$

$1 \leq i \leq k$ ,  $(x, u) \in O \times U$ . Por lo tanto

$$L_{f(x, u)}\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} f_j(x, u) = k_i(\varphi(x), u, h(x)) \quad (2.36)$$

$1 \leq i \leq k$ ,  $(x, u) \in O \times U$ , y localmente tendremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} O \times U & \xrightarrow{F} & TO \\ \swarrow \varphi & \searrow \text{id}_U \times h & \downarrow \varphi_* \\ W \times U \times h(O) & \xrightarrow{K} & TW \end{array}$$

Figura 2.15

con  $F(x, u) = (x, f(x, u))$ ,  $K = (k_1, \dots, k_k)$ , es decir, un observador general para  $\Sigma_s^l = (O \times U, F, h(O), h)$ , observador general local de  $\Sigma_s$

■

### Observación 2.10

1. En el caso lineal, donde  $\Sigma_s = (\mathcal{R}^n \times U, F, Y, h)$ , si definimos *subespacios de invariancia condicionada*, como aquellos subespacios  $S \subset \mathcal{R}^n$  tales que existen  $k, T$  y  $K$  tales que el diagrama de la figura 2.10 sea conmutativo y  $S = \text{Ker}(T)$ , entonces el teorema anterior afirma que  $S$  es de invariancia condicionada (global) si y sólo si  $(A + Bu)(S \cap \text{Ker}(C)) \subset S \forall u \in U$ .

Este resultado generaliza el obtenido por Willems para sistemas lineales autónomos (Cfr.[34]).

2. El teorema anterior también generaliza los resultados de van der Schaft sobre observadores no lineales autónomos (Cfr.[35]).

## 2.7 Conclusiones

1. La existencia local de observadores generales en tiempo continuo, es decir, aquellos que cumplen las hipótesis **H1c.**- **H3c.** , es equivalente a la existencia de distribuciones de invariancia condicionada local.
2. Aún en modelo más simplificado de un sistema no lineal con salidas, es decir  $\Sigma_s = (M \times U, F, Y, h)$ , la demostración de la parte 2) del Teorema 2.1 muestra que sólo es posible construir localmente un observador general para dicho sistema.
3. Los resultados anteriores generalizan los previos para sistemas lineales y no lineales autónomos (Cfr. [34], [35]).
4. La hipótesis **H2c.** de estabilidad no puede deducirse de lo anterior, e impone pautas adicionales en el diseño del observador general en tiempo continuo, lo que se verá en capítulos posteriores.



## Capítulo 3

# El observador de tipo Luenberger

### 3.1 Introducción

En este Capítulo se presenta el observador de tipo Luenberger que se propone para sistemas no lineales en tiempo continuo.

Primeramente se establece un resultado fundamental en lo que hace al cumplimiento de la hipótesis **H2c.** de convergencia del observador. A continuación se presentan los sistemas no lineales, descritos en forma local, para los cuales se construirá el observador, así como el tipo de observabilidad que involucra la restricción a tales modelos. Posteriormente, se construye el observador *completo* para dichos sistemas, finalizando con la construcción del observador *reducido* para los mismos.

### 3.2 Sobre la hipótesis de convergencia

La hipótesis **H2c.** del Capítulo 2 establece que el estimado  $\hat{x}$ , de todo (o parte) el estado  $x$  debe converger al valor real (o parte) de dicho estado.

En términos de la Definición 2.6 del observador general, esto significa que la solución  $w(t)$  de la ecuación (2.13) debe converger a la de la ecuación (2.12), independientemente de las condiciones iniciales  $w_0 = w(t_0)$ , y  $\bar{w}(t_0) = \varphi(x_0)$ , para cualquier control admisible  $u(t)$ . (Conviene aquí convenir que cuando se hable de controles admisibles en los problemas de convergencia se ha de entender que en la Definición 2.7  $t_1 = \infty$ .)

En otros términos, el sistema de control

$$\frac{dw(t)}{dt} = K(w(t), u(t), y(t)) \quad (3.1)$$

debe tener para  $u$  admisible cualquiera, *pero fijo*, una *única solución estacionaria*, para *cualquier* función  $y(t)$  también admisible.

Ahora bien, esta condición es difícil de satisfacer en general para  $K$  función arbitraria (Cfr. [37]). Una posible excepción se da en el caso en que la ecuación (3.1) toma la forma:

$$\frac{dw(t)}{dt} = K \cdot w(t) + L(y(t), u(t)) \quad (3.2)$$

con  $K$  una matriz constante y  $L$  una función  $C^\infty$ .

En efecto, en este caso, si  $w(t)$ , y  $\bar{w}(t)$ , son soluciones de (3.2) correspondientes a las condiciones iniciales  $w_0$  y  $\bar{w}_0$  respectivamente, para  $t = t_0$ , y si llamamos  $\varepsilon(t) = w(t) - \bar{w}(t) \forall t \geq t_0$ , al error entre las dos soluciones, tendremos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= K \cdot \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t_0) &= w(t_0) - \bar{w}(t_0), \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) \cdot e^{K(t-t_0)}.$$

De esta ecuación se ve que el error  $\varepsilon$  entre ambas soluciones (y por lo tanto entre *todas*), tenderá a cero si y sólo si  $K$  es una matriz de Hurwitz, es decir tiene todos sus autovalores con parte real negativa. Por tanto, bajo estas condiciones habrá una *única solución estacionaria* de la ecuación (3.2).

Sin embargo, aún fijadas las propiedades que ha de tener la función  $K$  a fin de que se tenga unicidad de la solución estacionaria de (3.1), queda el problema de encontrar la distribución de invariancia condicionada local que resuelva el observador general para dicha  $K$ , es decir, que se debe resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.35) para tal  $K$ .

Desarrollos en ese sentido para  $\varphi$  un difeomorfismo, (ver la Definición 2.6), que permiten obtener localmente (3.2) para sistemas mucho más restringidos que los que trataremos aquí, se pueden ver en [38], [39], [41] y [48].

Un enfoque diferente del problema de la convergencia, se basa en la siguiente:

**Observación 3.1**

Consideremos el sistema lineal de la figura 2.10 con  $x(t)$  solución de

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C \cdot x(t).\end{aligned}$$

De las ecuaciones (2.14), (2.15), identificando a  $T$ , al que supondremos un isomorfismo, con su matriz asociada en la base canónica, y tomando  $w = T \cdot x$ , tendremos que  $w(t)$  cumple:

$$\frac{dw(t)}{dt} = G \cdot w(t) + L \cdot y(t) + TB \cdot u(t). \quad (3.3)$$

con  $w(t_0) = T \cdot x_0$ .

Por otra parte, si  $\bar{w}(t)$  es solución de la ecuación del observador:

$$\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = K(\bar{w}(t), u(t), y(t)) = G \cdot \bar{w}(t) + L \cdot y(t) + TB \cdot u(t) \quad (3.4)$$

con  $\bar{w}_0 = \bar{w}(t_0) \neq T \cdot x_0$ , y  $\varepsilon(t) = w(t) - \bar{w}(t)$  es el error de observación, de las ecuaciones anteriores, tendremos que se cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = G \cdot \varepsilon(t) \quad (3.5)$$

con solución

$$\varepsilon(t) = (T \cdot x_0 - \bar{w}_0)e^{G(t-t_0)},$$

que no tiende a cero si  $G$  no es Hurwitz.

Consideremos ahora  $K_1(w, u, y) = L_1 \cdot (y - CT^{-1} \cdot w)$ , con  $L_1 \in \mathcal{R}^{n \times l}$  arbitraria.

Si tomamos  $\tilde{K}(w, u, y) = K(w, u, y) + K_1(w, u, y)$ , entonces, como  $K_1(T \cdot x, u, C \cdot x) = 0 \quad \forall x \quad \forall u$ , el diagrama de la figura 2.10 seguirá siendo conmutativo, y por lo tanto  $\Sigma'' = (\mathcal{R}^n \times U \times Y, \mathcal{R}^n, \tilde{K})$  también será un observador general para  $\Sigma_s$ .

Sea ahora  $\tilde{w}(t)$  la solución de la ecuación de este nuevo observador, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{w}(t)}{dt} &= G \cdot \tilde{w}(t) + L \cdot y(t) + TB \cdot u(t) + L_1 \cdot (y(t) - CT^{-1} \cdot \tilde{w}(t)) \\ \tilde{w}(t_0) &= \bar{w}_0,\end{aligned}$$

y si tomamos  $\bar{\varepsilon}(t)$  el nuevo error de observación, tendremos que cumplirá la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} = (G - L_1CT^{-1}) \cdot \bar{\varepsilon}(t), \quad (3.6)$$

que es similar a la (3.5).

Si el par  $(A, C)$  es observable, de (2.15), y del hecho que  $T$  es un isomorfismo, se deduce que el par  $(G, CT^{-1})$  también es observable, y por lo tanto se puede elegir  $L_1$  tal que  $(G - L_1CT^{-1})$  sea Hurwitz, con lo que  $\bar{\varepsilon}(t)$  tenderá a cero.

Por lo tanto, el agregar la función  $K_1$  no sólo no alteró la esencia del observador, (en el sentido de seguir siendo un observador general), sino que aseguró el cumplimiento de H2c.

A fin de tratar de adaptar este esquema a los sistemas no lineales, se pueden resumir las principales características del mismo, en términos locales para los sistemas no lineales:

1.  $\varphi_*$  es un isomorfismo, con lo que  $\varphi$  resulta un difeomorfismo.
2. se puede modificar  $K$  en forma *aditiva*, sin modificar el carácter de observador general.
3. alguna hipótesis de observabilidad permite que la modificación anterior asegure que se cumpla H2c.

La primera característica determina que el observador sea *completo*, y veremos que es posible relajar tal condicionamiento para el caso del observador *reducido*. En cuanto a la tercera, veremos que está ligada fuertemente a la primera, para los sistemas que consideraremos.

Analizaremos a continuación la segunda característica en detalle.

Para ver qué tipo de modificaciones son admisibles para un sistema no lineal con salidas  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , con observador general  $\Sigma' = (B' \times Y, W, K)$ , consideremos

$$\mathcal{S} = (\Phi, \bar{h})(B) = \{(b', y) \in B' \times Y : \exists b \in B \wedge (b', y) = (\Phi, \bar{h})(b)\}, \quad (3.7)$$

y la clase  $\mathcal{K}$  de  $W$  - morfismos  $Y$  - extendidos de  $B'$  en  $TW$  :

$$\mathcal{K} = \{K_1 : B' \times Y \rightarrow TW : K_1|_{\mathcal{S}} = \bar{0}\}, \quad (3.8)$$

donde  $\bar{0}$  es el morfismo nulo, es decir, si  $(b', y) \in B' \times Y$ , y  $\Pi'(b') = w$ , entonces  $\bar{0}(b', y) = 0_w$ , (el vector nulo de  $T_w W$ ).

Vale entonces la siguiente

**Proposición 3.1**

Si  $K_1 \in \mathcal{K}$ , entonces  $\Sigma'' = (B' \times Y, W, K + K_1)$  es un observador general para  $\Sigma$ ,

**Demostración**

1.  $K + K_1$  está bien definida: sea  $(b', y) \in B' \times Y$ , entonces como  $K$  y  $K_1$  son morfismos extendidos

$$K(b', y) \in T_{\Pi'(b')} W, K_1(b', y) \in T_{\Pi'(b')} W \quad \forall y \in Y,$$

y por lo tanto tiene sentido la suma:

$$(K + K_1)(b', y) = K(b', y) + K_1(b', y) \quad (3.9)$$

2.  $K + K_1$  hace conmutativo el diagrama de la figura 2.7:  
Sea  $b \in B$ , entonces

$$\begin{aligned} (K + K_1)(\Phi(b), \bar{h}(b)) &= K(\Phi(b), \bar{h}(b)) + K_1(\Phi(b), \bar{h}(b)) \\ &= K(\Phi(b), \bar{h}(b)) + 0_w \\ &= \varphi_* \circ F(b) \end{aligned}$$

■

**Observación 3.2**

1. Para el sistema dado en coordenadas locales por las ecuaciones (2.6) - (2.9), tendremos que:

$$\mathcal{K} = \left\{ k_1 : \mathcal{R}^k \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^l \rightarrow \mathcal{R}^k, \mathcal{C}^\infty : k_1(\varphi(x), u, h(x)) = 0 \right. \\ \left. \forall (x, u) \in O \times U \right\},$$

y la Proposición 3.1 expresa que el observador general tiene como su expresión más completa

$$\frac{dw}{dt} = k(w, u, y) + \bar{k}(w, u, y) \quad (3.10)$$

con  $\bar{k} \in \mathcal{K}$ , y  $k$  tal que se cumple

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x, u) f_j(x, u) = k_i(\varphi(x), u, h(x)) \quad (3.11)$$

$$1 \leq i \leq k, \quad \forall (x, u) \in O \times U$$



2. El resultado de la Proposición 3.1, si bien elemental en el contexto del observador general, sólo aparece en la literatura en un marco mucho más limitado (el de los observadores de identidad en  $\mathcal{R}^n$ ), recién en 1988. (Cfr.[40]).

Notablemente, en varios artículos que tratan el diseño de observadores para sistemas no lineales autónomos en  $\mathcal{R}^n$ , se obtiene para los observadores expresiones similares a la ecuación (3.10), aunque en todos los casos es  $k(w, y) = k(y - h(x))$ . (Cfr. [42], [43], [44]).

En lo subsiguiente se aprovechará el resultado anterior para modificar convenientemente un observador general con el objeto de obtener uno que cumpla con la hipótesis H2c.

### 3.3 Sistemas a observar. Observabilidad

En este apartado consideraremos el tipo de sistemas no lineales para los cuales construiremos el observador, definiendo el tipo de observabilidad que exigiremos para los mismos.

En principio, a partir del Teorema 2.1 y de las conclusiones del Capítulo anterior, vemos que es suficiente considerar el sistema no lineal *localmente*. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad supondremos en lo sucesivo que el sistema está definido por :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} f &= (f_1, f_2, \dots, f_n) : O \times U \rightarrow \mathcal{R}^n, \mathcal{C}^\infty \\ h &= (h_1, h_2, \dots, h_l) : O \rightarrow \mathcal{R}^l, \mathcal{C}^\infty \end{aligned}$$

con  $O$  abierto de  $\mathcal{R}^n$  y  $U$  abierto de  $\mathcal{R}^m$ .

Sea  $(x_0, u_0) \in O \times U$ , y supongamos que existe  $O' \times U'$  entorno de  $(x_0, u_0)$ , tal que  $\forall (x, u) \in O' \times U'$  se verifica para  $k$  entero no nulo arbitrario pero fijo:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} L_{f(x,u)}^k h_i(x) \right] = 0 \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq l$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$   $m$ -upla de enteros no nulos tal que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i = k$ .

Entonces existen funciones  $\hat{f}_i^k, \hat{g}_{ij_{\alpha_1} \dots j_{\alpha_m}}^k, C^\infty$ , definidas en  $O'$ ,  $1 \leq j_\alpha \leq m, 1 \leq i \leq l$  que cumplen

$$\begin{aligned} L_{f(x,u)}^k h_i(x) &= \hat{f}_i^k(x) \\ &+ \sum_{|\alpha|=1}^k \sum_{j_{\alpha_1} \dots j_{\alpha_m}} \hat{g}_{ij_{\alpha_1} \dots j_{\alpha_m}}^k(x) (u_{j_{\alpha_1}} - u_{0j_{\alpha_1}}) \dots (u_{j_{\alpha_m}} - u_{0j_{\alpha_m}}) \\ &= \hat{f}_i^k(x) + \hat{g}_i^k(x, u) \end{aligned} \quad (3.13)$$

con  $u = (u_1, \dots, u_m) \in U'$  y  $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0m})$ .

### Definición 3.1

El sistema no lineal (3.12) es *observable-c* en  $(x_0, u_0)$  si existen un entorno  $O' \times U'$  de  $(x_0, u_0)$  y una  $l$ -upla de números naturales  $\rho_1, \dots, \rho_l$ , (que sin pérdida de generalidad podemos suponer ordenados según  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_l \geq 1$ ) tales que

1.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} L_{f(x,u)}^k h_i(x) \right] = 0 \quad |\alpha| = k \quad \forall (x, u) \in O' \times U'$$

$$1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k \leq \rho_i - 1, \quad 1 \leq i \leq l$$

2. Las funciones  $\hat{f}_i^k$  definidas en (3.13) son tales que sus diferenciales  $\{d\hat{f}_i^k(x_0), 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l\}$  son linealmente independientes en  $T_{x_0}^* O'$ .

3.  $\sum_{i=1}^l \rho_i = n$

### Observación 3.3

1. Si el sistema (3.12) es observable-c en  $(x_0, u_0)$ , es *localmente débilmente observable* en  $x_0$  en el sentido de Hermann - Krener (Cfr.[45])

En efecto, consideremos  $u^1, \dots, u^p$  controles *constantes* en  $U'$ , entonces de (3.13) se tendrá

$$\begin{aligned} L_{f(x,u^1)} h_i(x) &= \hat{f}_i^1(x) + \sum_{j=1}^m \hat{g}_{ij}^1(x) (u_j^1 - u_{0j}) \\ L_{f(x,u^2)} \hat{f}_i^1(x) &= \hat{f}_i^2(x) + \sum_{j=1}^m \hat{g}_{ij}^2(x) (u_j^2 - u_{0j}) \\ L_{f(x,u^2)} \hat{g}_{ij}^1(x) &= \hat{g}_{ij}^2(x) + \sum_{r=1}^m \hat{g}_{ijr}^2(x) (u_r^2 - u_{0r}) \end{aligned}$$

por lo tanto se tendrá

$$\begin{aligned}
L_{f(x,u^2)}L_{f(x,u^1)}h_i(x) &= \hat{f}_i^2(x) + \sum_{j=1}^m \tilde{g}_{ij}^2(x)(u_j^2 - u_{0j}) \\
&+ \sum_{j=1}^m \hat{g}_{ij}^2(x)(u_j^1 - u_{0j}) \\
&+ \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^m \tilde{g}_{ijr}^2(x)(u_r^2 - u_{0r})(u_j^1 - u_{0j})
\end{aligned}$$

En general se cumplirá

$$L_{f(x,u^p)} \dots L_{f(x,u^1)}h_i(x) = \hat{f}_i^p(x) + Q_i^p(x, u^1, \dots, u^p, u_0) \quad (3.14)$$

$\forall x \in O', 1 \leq i \leq l$ , con  $Q_i^p$  polinomio de grado  $p$  en las variables  $(u^r - u_0), 1 \leq r \leq p$  con coeficientes en  $C^\infty(O')$  tal que  $Q_i^p(x, u_0, \dots, u_0, u_0) = 0 \forall x \in O'$ .

Pero, si  $u^1 = u^2 = \dots = u^p = u_0$ , de (3.14) sale que  $L_{f(x,u_0)}^p h_i(x) = \hat{f}_i^p(x)$ , y si consideramos  $p = \rho_1$ , el conjunto de covectores de  $T_{x_0}^* O'$

$$\{dL_{f(x_0, u_0)}^k h_i(x_0), 1 \leq i \leq l, 0 \leq k \leq p\}$$

tiene rango  $n$  y por lo tanto existe un entorno  $O'' \subset O'$  de  $x_0$ , tal que

$$\{dL_{f(x, u_0)}^k h_i(x), 1 \leq i \leq l, 0 \leq k \leq p \forall x \in O''\}$$

también tiene rango  $n$ .

Pero de (3.14), debido a la continuidad respecto de  $u^1, \dots, u^p$ , existe un entorno  $U'' \subset U'$  de  $u_0$  tal que

$$\{d(L_{f(x, u^p)}L_{f(x, u^{p-1})} \dots L_{f(x, u^1)}h_i(x)), 1 \leq i \leq l\}$$

tiene rango  $n \forall (x, u^1, \dots, u^p) \in O'' \times U''$ , es decir, el sistema satisface la *condición de rango de observabilidad* en  $x_0$ , (Cfr.[45]), y por lo tanto es localmente débilmente observable en  $x_0$ .

2. La noción de observabilidad - c comprende también la de los sistemas autónomos

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

y la de los del tipo (3.12), "autonomizados" según

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u^*) \\ y &= h(x) \end{cases}$$

con  $u^*$  genérico fijo, dadas por Krener y Respondek (Cfr. [38]).

### Definición 3.2

Denominaremos *índices de observabilidad* del sistema (3.12) a los números  $\rho_1, \dots, \rho_l$  de la Definición 3.1.

Consideremos ahora el siguiente resultado, que será de importancia en lo sucesivo:

### Proposición 3.2

Dado el sistema (3.12), con  $l \leq m$ , es decir, cuyo número de salidas no supera al de entradas, supongamos que existen enteros positivos  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ , que cumplen:

1. Existe  $O' \times U' \subset O \times U$ , entorno de  $(x_0, u_0)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(x,u)}^k h_i(x) = 0$$

$$\forall (x, u) \in O' \times U', 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m$$

2. la matriz

$$\begin{aligned} A(x, u) &= \{a_{ij}(x, u), 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m\} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(x,u)}^{\rho_i} h_i(x), 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m \right\} \end{aligned}$$

tiene rango  $l$  en  $(x_0, u_0)$ .

3.  $\sum_{i=1}^l \rho_i = n$

Entonces, el sistema (3.12) es observable-c en  $(x_0, u_0)$

### Demostración.

De 1. se deduce que

$$L_{f(x,u)}^k h_i(x) = \hat{f}_i^k(x) \quad \forall (x, u) \in O' \times U', 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l$$

De 2. se ve que existe un entorno  $O'' \times U'' \subset O' \times U'$  de  $(x_0, u_0)$ , tal que  $A(x, u)$  tiene rango  $l$  en  $O'' \times U''$  por la continuidad de  $A(x, u)$  respecto de  $(x, u)$ . Veamos que las funciones  $\{\hat{f}_i^k, 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l\}$  tienen diferenciales linealmente independientes en  $O''$ . Supongamos en principio que no.

Sean  $f^j, 1 \leq j \leq m$ , los campos vectoriales en  $O'$ , paramétricos en  $u \in U'$ , definidos por:

$$f^j(x, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Entonces, si  $\lambda : O' \rightarrow \mathcal{R}, C^\infty$ , se tiene

$$L_{f^j(x, u)}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial u_j}(L_{f(x, u)}\lambda) \quad (3.15)$$

Sea  $(x^*, u^*) \in O'' \times U''$  arbitrario pero fijo y consideremos la función  $\lambda_1 : O'' \rightarrow \mathcal{R}, C^\infty$ , dada por

$$\lambda_1(x) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^{\rho_i-1} c_{ik} \hat{f}_i^k(x)$$

con  $c_{ik} \in \mathcal{R} \forall i, k$ , tales que

$$d\lambda_1(x^*) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^{\rho_i-1} c_{ik} d\hat{f}_i^k(x^*) = 0 \quad (3.16)$$

Entonces,  $\forall 1 \leq j \leq m$  vale

$$\begin{aligned} 0 &= \langle d\lambda_1(x^*), f^j(x^*, u^*) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^{\rho_i-1} c_{ik} \langle d\hat{f}_i^k(x^*), f^j(x^*, u^*) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{\rho_i-1} c_{ik} L_{f^j(x^*, u^*)} \hat{f}_i^k(x^*). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pero de las hipótesis 1., 2. y (3.15)

$$L_{f^j(x^*, u^*)} \hat{f}_i^k(x^*) = \begin{cases} 0 & k < \rho_i - 1 \\ a_{ij}(x^*, u^*) & k = \rho_i - 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Por lo tanto, de (3.17) se deduce que

$$\sum_{i=1}^l c_{i\rho_i-1} a_{ij}(x^*, u^*) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m,$$

y si  $c_1 = [c_{1\rho_1-1}, \dots, c_{l\rho_l-1}]$ , tendremos  $c_1 \cdot A(x^*, u^*) = 0$ ; pero  $A$  tiene rango  $l$  en  $O'' \times U''$ , de donde

$$c_1 = 0. \quad (3.19)$$

Consideremos ahora

$$\lambda_2(x) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^{\rho_i-2} c_{ik} \hat{f}_i^k(x);$$

de (3.16) y (3.19) se deduce que

$$d\lambda_2(x^*) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=0}^{\rho_i-2} c_{ik} d\hat{f}_i^k(x^*) = 0. \quad (3.20)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \langle d\hat{f}_i^k(x^*), [f, f^j](x^*, u^*) \rangle &= L_{f(x^*, u^*)} L_{f^j(x^*, u^*)} \hat{f}_i^k(x^*) \\ &\quad - L_{f^j(x^*, u^*)} L_{f(x^*, u^*)} \hat{f}_i^k(x^*). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pero de (3.18), si  $k \leq \rho_i - 1$ ,

$$\begin{aligned} L_{f^j(x^*, u^*)} \hat{f}_i^k(x^*) &= 0 \\ \text{y } L_{f^j(x^*, u^*)} L_{f(x^*, u^*)} \hat{f}_i^k(x^*) &= L_{f^j(x^*, u^*)} \hat{f}_i^{k+1}(x^*) \end{aligned}$$

Por lo tanto tendremos, de nuevo por (3.18) y de (3.21),

$$\langle d\hat{f}_i^k(x^*), [f, f^j](x^*, u^*) \rangle = \begin{cases} 0 & k < \rho_i - 2 \\ -a_{ij}(x^*, u^*) & k = \rho_i - 2 \end{cases} \quad (3.22)$$

$1 \leq j \leq m$ . Entonces, de (3.20) y (3.22),

$$0 = \langle d\lambda_2(x^*), [f, f^j](x^*, u^*) \rangle = - \sum_{i=1}^l c_{i\rho_i-2} a_{ij}(x^*, u^*)$$

$1 \leq j \leq m$ , y si  $c_2 = [c_{1\rho_1-2}, \dots, c_{l\rho_l-2}]$ , quedará nuevamente  $c_2 \cdot A(x^*, u^*) = 0$  y por lo tanto

$$c_2 = 0.$$

Prosiguiendo con corchetes de mayor orden, esto es, del tipo

$$[f, [f, [\dots [f, f^j]]]]],$$

se obtiene análogamente que  $c_3 = \dots = c_l = 0$ , y por lo tanto

$$\{df_i^k(x), 1 \leq i \leq l, 0 \leq k \leq \rho_i - 1\}$$

son linealmente independientes en  $O''$ . Por lo tanto, considerando la hipótesis 3., el sistema es observable-c. ■

#### Observación 3.4

1. Es conveniente notar que los sistemas (3.12) que cumplen con las hipótesis 1. y 2. de la Proposición 3.2, son aquellos para los cuales existe el *grado relativo vectorial* en  $(x_0, u_0)$  (Cfr. [25], [31]).

En este caso, cuando además se verifica la hipótesis 3., los índices de observabilidad coinciden con los *números característicos* del sistema.

2. Los índices de observabilidad no son en general invariantes para cambios de coordenadas que preservan fibras.

En efecto, sean  $(x, u)$ , y  $(x', v)$  dos tales pares de coordenadas definidos en un entorno de  $(x_0, u_0)$ ; por simplicidad supondremos que  $x = x'$ .

El cambio de coordenadas, al preservar fibras, será de la forma

$$\begin{aligned} (x, u) &= (x, \alpha(x, v)) \quad \text{con} \\ \text{rango matriz } \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial v}(x, v) \right\} &= m \end{aligned} \quad (3.23)$$

localmente en un entorno  $O' \times U'$  de  $(x_0, u_0)$ .

Sean  $\rho_1, \dots, \rho_l$  los índices de observabilidad del sistema (3.12) respecto de las coordenadas  $(x, u)$ ; si  $1 \leq r, s \leq m$ ,  $1 \leq i \leq l$ ,  $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ ,  $(x, u) \in O' \times U'$ , se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial v_r \partial v_s} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) = \frac{\partial}{\partial v_r} \left[ \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial v_s} \frac{\partial}{\partial u_\mu} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 \alpha_\mu}{\partial v_r \partial v_s} \frac{\partial}{\partial u_\mu} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) \\
&+ \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial v_s} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial v_r} \frac{\partial^2}{\partial u_\mu \partial u_\nu} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) \\
&= \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial^2 \alpha_\mu}{\partial v_r \partial v_s} \frac{\partial}{\partial u_\mu} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

pues  $\frac{\partial^2}{\partial u_\mu \partial u_\nu} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) = 0$ , al ser  $k \leq \rho_i - 1$  y  $(x, u) \in O' \times U'$ .

La sumatoria (3.24) se anulará en  $O' \times U'$ , y la propiedad 1. de la Definición 3.1 será válida en términos de las coordenadas  $(x, v)$  sólo cuando una de estas condiciones se cumpla:

•

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu} (L_{f(x,u)}^k h_i(x)) = 0 \quad (3.25)$$

$1 \leq \mu \leq m$ ,  $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ , en cuyo caso  $\hat{g}_i^k(x) = 0 \forall x \in O'$

•

$$\frac{\partial^2 \alpha_\mu(x, u)}{\partial v_r \partial v_s} = 0 \quad (3.26)$$

$1 \leq r, s \leq m$ ,  $\forall (x, u) \in O' \times U'$ , es decir, el cambio de coordenadas  $u = \alpha(x, v)$  es *Afin.*

De 2. de la observación anterior, se podría concluir que la clase de los sistemas observables - c es demasiado amplia y que habría que restringirse sólo a aquellos que no presentan la patología allí mencionada.

Pero el tipo de cambio de coordenadas  $u = \alpha(x, v)$  es en realidad un cambio de coordenadas en el *espacio de control*, con realimentación no lineal de los estados, y tal estructura de control aparece en tareas tales como estabilización, seguimiento de trayectorias y seguimiento de modelos. En este contexto, dicha patología influiría en la convergencia del observador a lazo cerrado si se lo utiliza para obtener dicho control.

Pero los problemas antes mencionados son resolubles en el contexto del control geométrico, para sistemas que cumplen con (3.25) o (3.26), (Cfr. [25], [31]). Dado que analizaremos la convergencia del observador a lazo cerrado justamente para la realización de controles que permitan la solución de estos



problemas, que por otra parte abarcan prácticamente todo el espectro de tareas de un sistema de control realimentado, la limitación anterior no influirá en nuestro caso.

Para el funcionamiento a lazo abierto, como el control  $u$  es *exterior* tanto al sistema como al observador, no aparece la limitación antes citada.

Por lo tanto, de aquí en más los sistemas (3.12) para los cuales construiremos el observador serán aquellos que son observables - c en un punto  $(x_0, u_0)$ , y dicho observador será local en un entorno de dicho punto.

### 3.4 El observador completo de tipo Luenberger

Presentaremos inicialmente un resultado fundamental que vincula el concepto de observabilidad-c con la existencia de observadores.

#### Proposición 3.3

Si el sistema (3.12) es observable-c en  $(x_0, u_0)$ , entonces admite un observador general local alrededor de  $(x_0, u_0)$ .

#### Demostración

Notemos

$$\varphi_{k+1}^i = \hat{f}_i^k \quad \forall 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l \quad (3.27)$$

$$\varphi^i = (\varphi_1^i, \dots, \varphi_{\rho_i}^i), \quad 1 \leq i \leq l \quad (3.28)$$

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^l) = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_{\rho_1}^1, \dots, \varphi_1^l, \dots, \varphi_{\rho_l}^l) \quad (3.29)$$

donde las  $\hat{f}_i^k$  vienen dadas por la ecuación (3.13).

Sea  $d\varphi = \text{span}\{d\varphi_k^i, 1 \leq k \leq \rho_i, 1 \leq i \leq l\}$ , el conjunto de combinaciones lineales de las 1 - formas  $d\varphi_k^i \quad \forall i, k$  con coeficientes funciones  $C^\infty$ , sobre  $O$ , entorno de  $x_0$ . Como el sistema es observable-c en  $(x_0, u_0)$ ,  $\dim(d\varphi(x_0)) = n$ , y por lo tanto existe un entorno  $O' \subset O$  de  $x_0$ , donde dicha dimensión se mantiene constante. Por lo tanto

$$\varphi : O' \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \varphi(O') \subset \mathcal{R}^n$$

será un difeomorfismo.

Pero entonces  $\text{Ker}(\varphi_*) = \text{Ker}(d\varphi) = 0$  es la distribución nula en  $TO'$ , y por lo tanto, claramente es involutiva y cumple

$$[f(\cdot, u), \text{Ker}(\varphi_*) \cap \text{Ker}(dh)] = \text{Ker}(\varphi_*),$$

para todo  $u$  fijo, es decir, es de invariancia condicionada local.

Por lo tanto, por el Teorema 2.1, existe un observador general local para el sistema dado alrededor de  $(x_0, u_0)$ .

■

Pero la demostración del Teorema 2.1 también nos indica cómo construir dicho observador a partir de (3.29) y (3.13). En efecto, de (2.35) tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{f(x,u)}\varphi_1^i(x) = L_{f(x,u)}h_i(x) \\ \quad = \hat{f}_i^1(x) + \hat{g}_i^1(x, u) \\ \quad = \varphi_2^i(x) + \eta_2^i(x, u) \\ L_{f(x,u)}\varphi_2^i(x) = L_{f(x,u)}(L_{f(x,u)}h_i(x) - \varphi_2^i(x, u)) \\ \quad = L_{f(x,u)}^2 h_i(x) - L_{f(x,u)}(\varphi_2^i(x, u)) \\ \quad = \varphi_3^i(x) + \hat{g}_i^2(x, u) - L_{f(x,u)}(\varphi_2^i(x, u)) \\ \quad = \varphi_3^i(x) + \eta_3^i(x, u) \\ \\ L_{f(x,u)}\varphi_{\rho_i-1}^i(x) = L_{f(x,u)}(L_{f(x,u)}^{\rho_i-2} h_i(x) - \varphi_{\rho_i-1}^i(x, u)) \\ \quad = L_{f(x,u)}^{\rho_i-1} h_i(x) - L_{f(x,u)}(\varphi_{\rho_i-1}^i(x, u)) \\ \quad = \varphi_{\rho_i}^i(x) + \eta_{\rho_i}^i(x, u) \\ L_{f(x,u)}\varphi_{\rho_i}^i(x) = L_{f(x,u)}(L_{f(x,u)}^{\rho_i-1} h_i(x) - \eta_{\rho_i}^i(x, u)) \\ \quad = \gamma^i(x, u) + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

$$\forall 1 \leq i \leq l, \forall (x, u) \in O' \times U'$$

Tomando

$$\begin{aligned} w^i &= (w_1^i, \dots, w_{\rho_i}^i) = (\varphi_1^i(x), \dots, \varphi_{\rho_i}^i(x)) \quad \forall 1 \leq i \leq l \\ w &= (w^1, \dots, w^l) = \varphi(x) \end{aligned} \quad (3.31)$$

se tendrá

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{w}_1^i = w_2^i + \eta_2^i(\varphi^{-1}(w), u) \\ \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i = w_{\rho_i}^i + \eta_{\rho_i}^i(\varphi^{-1}(w), u) \\ \dot{w}_{\rho_i}^i = \gamma^i(\varphi^{-1}(w), u) + \eta_{\rho_i+1}^i(\varphi^{-1}(w), u) \\ y_i = h_i(x) = w_1^i \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$1 \leq i \leq l, \forall (w, u) \in \varphi(O') \times U', \text{ entorno de } (w_0, u_0) = (\varphi(x_0), u_0).$$

Por lo tanto, si definimos

$$\begin{aligned}
 A^i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times \rho_i} \\
 B^i &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times 1} \\
 C^i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times \rho_i} \quad \forall 1 \leq i \leq l. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 A &= \text{diag}\{A^1, \dots, A^l\} \\
 B &= \text{diag}\{B^1, \dots, B^l\} \\
 C &= \text{diag}\{C^1, \dots, C^l\} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma(x, u) = \begin{bmatrix} \gamma^1(x, u) \\ \vdots \\ \gamma^l(x, u) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{l \times 1} \quad (3.35)$$

$$\Delta^i(x, u) = \begin{bmatrix} \eta_2^i(x, u) \\ \vdots \\ \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times 1} \quad \forall 1 \leq i \leq l \quad (3.36)$$

$$\Delta(x, u) = \begin{bmatrix} \Delta^1(x, u) \\ \vdots \\ \Delta^l(x, u) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times 1} \quad (3.37)$$

$\forall (x, u) \in O' \times U'$ , tendremos que

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A \cdot w(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) + \Delta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) \\ y(t) = C \cdot w(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

**Observación 3.5**

1. De las ecuaciones (3.38) y (2.36), tenemos en este caso

$$K \quad \varphi(O') \times U' \times Y \rightarrow \varphi(O'),$$

$$K(w, u, y) = A \cdot w + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w), u) + \Delta(\varphi^{-1}(w), u)$$

2. Si el sistema (3.12) es autónomo y observable-c, tendremos que  $\Delta = 0$ , y

$$\Gamma = \Gamma(x) = \begin{bmatrix} L_{f(x)}^{\rho_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_{f(x)}^{\rho_l} h_l(x) \end{bmatrix}$$

y (3.38) se escribirá:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A \cdot w(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w(t))) \\ y(t) = C \cdot w(t) \end{cases} \quad (3.39)$$

Si en particular el sistema es *lineal* y  $l = 1$ , obtenemos

$$\begin{cases} \dot{w}_1(t) = w_2(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_{n-1}(t) = w_n(t) \\ \dot{w}_n(t) = CA^n \cdot T^{-1} \cdot w(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j(t) \\ y(t) = w_1(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

con  $\alpha_j \in \mathcal{R}$   $1 \leq j \leq n$ , y

$$T = \begin{bmatrix} A \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Esta es la forma *observable* del sistema lineal autónomo (Cfr.[46]), y por lo tanto diremos que (3.38), es la descripción del sistema (3.12) en forma observable.

Esta forma, si bien canónica, no lo es respecto del seudogrupo de cambios de coordenadas de salida, pues diferentes coordenadas de salida hacen que  $\Gamma$  sea diferente (Cfr.[47]). De todas formas, la expresión (3.38) *sí* es canónica en el sentido del observador general, y como tal, nos referiremos a ella como al *observador general canónico* del sistema (3.12), observable-c.

Para obtener la expresión del observador completo de tipo Luenberger, de acuerdo a las conclusiones del párrafo 3.2 y a la Proposición 3.1 modificaremos el observador general canónico de (3.38) de acuerdo con

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} &= A \cdot w(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) \\ &+ \Delta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) + K \cdot (y(t) - C \cdot w(t)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  es una matriz en principio arbitraria.

### Observación 3.6

1.

$$\begin{aligned} K_1 & \quad \varphi(O') \times Y \rightarrow \varphi(O'), \text{ dada por} \\ K_1(w, y) &= K \cdot (y - C \cdot w) \end{aligned}$$

es claramente una función de  $\mathcal{K}$ , de acuerdo a la ecuación (3.8).

2. Si bien en principio  $K$  es una matriz arbitraria, será su adecuada selección la que asegure el cumplimiento de H2c.

Consideremos ahora  $x(t)$ , solución de (3.12) con condición inicial  $x(t_0)$ , y control admisible  $u(t)$ . Si  $w(t) = \varphi(x(t))$ , como (3.38) es un observador general, se tendrá :

$$\frac{dw(t)}{dt} = A \cdot w(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) + \Delta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) \quad (3.43)$$

Naturalmente, de la conmutatividad del diagrama de la figura 2.7 sale que

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), u(t)) = \varphi_*^{-1}(w(t)) \cdot [A \cdot w(t) \\ &+ B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) + \Delta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t))] \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde por abuso de notación hemos identificado a  $\varphi_*$ , diferencial de  $\varphi$ , con su expresión matricial, es decir, la matriz jacobiana de  $\varphi$ .

Sea ahora  $\hat{w}(t)$ , la solución de (3.42), con  $y(t) = h(x(t))$  y  $u(t)$ , con condición inicial  $\hat{w}(t_0) \neq \varphi(x(t_0))$ , es decir,  $\hat{w}(t)$  cumple

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}(t)}{dt} &= A \cdot \hat{w}(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), u(t)) \\ &+ \Delta(\varphi(\hat{w}(t)), u(t)) + K \cdot (y(t) - C \cdot \hat{w}(t)) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Como (3.42) también es un observador general, si  $\hat{x}(t) = \varphi^{-1}(\hat{w}(t))$ , nuevamente por la conmutatividad del diagrama de la figura 2.7 tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= f(\hat{x}(t), u(t)) \\ &+ \varphi_*^{-1}(\hat{w}(t)) \cdot K \cdot (y(t) - C \cdot \hat{w}(t)) \end{aligned} \quad (3.46)$$

y como

$$C \cdot \hat{w}(t) = \begin{bmatrix} h_1(\hat{x}(t)) \\ \vdots \\ h_l(\hat{x}(t)) \end{bmatrix}$$

tendremos

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = f(\hat{x}(t), u(t)) + \varphi_*^{-1}(\varphi(\hat{x}(t))) \cdot K \cdot (y(t) - h(\hat{x}(t))) \quad (3.47)$$

Se tiene entonces la siguiente

### Definición 3.3

La ecuación (3.47), con  $K$  arbitraria representa un *observador completo de tipo Luenberger* para el sistema observable-c (3.12).

### Observación 3.7

1. Si bien la ecuación (3.45) ya es el observador completo, por lo menos en los términos que hemos establecido, es preferible la ecuación (3.47), debido a que en el primer caso,  $\hat{x}$  se debe evaluar mediante  $\hat{x} = \varphi^{-1}(\hat{w})$ , en cambio en el segundo, se debe evaluar la inversa de la matriz jacobiana,  $\varphi_*^{-1}(\varphi(\hat{x}))$ , lo que es más fácil.
2. En el caso en que el sistema sea lineal analítico definido en  $\mathcal{R}^n$ , con una entrada, una salida y grado relativo  $n$ , la expresión (3.47), coincide con la obtenida en [22].

### 3.5 El observador reducido de tipo Luenberger

Veremos que en principio es posible construir para sistemas observables-c dados por la ecuación (3.12), observadores reducidos, es decir que estiman *todos* los estados del sistema, pero con un número de ecuaciones diferenciales menor que en el caso del observador completo.

Para ello , a partir de la ecuación (3.27), si definimos

$$\mu_k^i = \varphi_{k+1}^i, \quad 1 \leq k \leq \rho_i - 1, \quad 1 \leq i \leq l \quad (3.48)$$

$$\mu^i = (\mu_1^i, \dots, \mu_{\rho_i-1}^i) \quad \forall 1 \leq i \leq l$$

$$\mu = (\mu^1, \dots, \mu^l) \quad (3.49)$$

de (3.30) se deduce

$$\begin{cases} L_{f(x,u)} h_i(x) &= \mu_1^i(x) + \eta_2^i(x, u) \\ L_{f(x,u)} \mu_1^i(x) &= \mu_2^i(x) + \eta_3^i(x, u) \\ \\ L_{f(x,u)} \mu_{\rho_i-2}^i(x) &= \mu_{\rho_i-1}^i(x) + \eta_{\rho_i}^i(x, u) \\ L_{f(x,u)} \mu_{\rho_i-1}^i(x) &= \gamma^i(x, u) + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) \end{cases} \quad (3.50)$$

$\forall (x, u) \in O' \times U', \quad 1 \leq i \leq l$

Ahora bien, si  $d\mu = \text{span}\{d\mu_k^i, 1 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l\}$ , razonando en forma simular que en la Proposición 3.3, se vé que  $Ker(\mu_*) = Ker(d\mu)$  es regular, ( esto es, tiene dimensión constante  $n - l$  localmente alrededor de  $x_0$  ), e involutiva, y como  $d\varphi = dh + d\mu$ , entonces

$$Ker(\mu_*) \cap Ker(dh) = Ker(\varphi_*) = 0 \text{ en } TO'$$

y por lo tanto  $Ker(\mu_*)$  es de invariancia condicionada local en  $x_0$ . Consideremos ahora

$$K^i = \begin{bmatrix} k_1^i \\ \vdots \\ k_{\rho_i-1}^i \end{bmatrix} \neq 0 \in \mathcal{R}^{\rho_i-1} \quad \forall 1 \leq i \leq l \quad (3.51)$$

$$K = \text{diag}\{K^1, \dots, K^l\} \quad (3.52)$$

y sea

$$\begin{aligned} \phi & O' \rightarrow W' \subset \mathcal{R}^{n-l} \\ \phi(x) &= \mu(x) - K \cdot h(x) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como  $Ker(\phi_*) = Ker(d\phi) = Ker(d\mu) \cap Ker(dh) = 0$ , entonces  $Ker(\phi_*)$  es regular, involutiva y de invariancia condicionada local, y por el Teorema 2.1 se tendrá un observador general local para el sistema (3.12), con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 O' \times U' & \xrightarrow{f} & TO' \\
 \swarrow \phi & \searrow Id_{U'} & \downarrow \phi_* \\
 W' \times U' \times h(O') & \xrightarrow{K} & TW'
 \end{array}$$

Figura 3.1

Para obtener las ecuaciones del observador reducido, procederemos como en el caso del completo. Para ello, de (3.50) y (3.53), se tiene

$$\begin{cases}
 \phi_1^i(x) & = \mu_1^i(x) - k_1^i \cdot h_i(x) \\
 \phi_{\rho_i-1}^i(x) & = \mu_{\rho_i-1}^i(x) - k_{\rho_i-1}^i \cdot h_i(x) \\
 & \forall 1 \leq i \leq l, \quad x \in O'
 \end{cases} \quad (3.54)$$

Entonces, procediendo como en (3.30), se tendrá

$$\left\{ \begin{array}{l}
 L_{f(x,u)}\phi_1^i(x) = L_{f(x,u)}\mu_1^i(x) - k_1^i L_{f(x,u)}h_i(x) \\
 = \mu_2^i(x) + \eta_3^i(x, u) - k_1^i L_{f(x,u)}h_i(x) \\
 = \phi_2^i(x) + k_2^i h_i(x) + \eta_3^i(x, u) - k_1^i \mu_1^i(x) - k_1^i \eta_2^i(x, u) \\
 = -k_1^i \phi_1^i(x) + \phi_2^i(x) + (k_2^i - k_1^i k_1^i) h_i(x) \\
 + \eta_3^i(x, u) - k_1^i \eta_2^i(x, u) \\
 L_{f(x,u)}\phi_2^i(x) = L_{f(x,u)}\mu_2^i(x) - k_2^i L_{f(x,u)}h_i(x) \\
 = \mu_3^i(x) + \eta_4^i(x, u) - k_2^i L_{f(x,u)}h_i(x) \\
 = \phi_3^i(x) + k_3^i h_i(x) + \eta_4^i(x, u) - k_2^i \mu_2^i(x) - k_2^i \eta_2^i(x, u) \\
 = -k_2^i \phi_1^i(x) + \phi_3^i(x) + (k_3^i - k_2^i k_1^i) h_i(x) \\
 + \eta_4^i(x, u) - k_2^i \eta_2^i(x, u) \\
 L_{f(x,u)}\phi_{\rho_i-2}^i(x) = -k_{\rho_i-2}^i \phi_1^i(x) + \phi_{\rho_i-1}^i(x) + (k_{\rho_i-1}^i - k_{\rho_i-2}^i k_1^i) h_i(x) \\
 + \eta_{\rho_i}^i(x, u) - k_{\rho_i-2}^i \eta_2^i(x, u) \\
 L_{f(x,u)}\phi_{\rho_i-1}^i(x) = L_{f(x,u)}\mu_{\rho_i-1}^i(x) - k_{\rho_i-1}^i L_{f(x,u)}h_i(x) \\
 = \gamma^i(x, u) + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) - k_{\rho_i-1}^i \mu_1^i(x) - k_{\rho_i+1}^i \eta_2^i(x, u) \\
 = -k_{\rho_i-1}^i \phi_1^i(x) + \gamma^i(x, u) - k_{\rho_i-1}^i k_1^i h_i(x) \\
 + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) - k_{\rho_i-1}^i \eta_2^i(x, u)
 \end{array} \right.$$



$1 \leq i \leq l$   $(x, u) \in O' \times U'$ . Tomando

$$\begin{aligned} w^i &= (w_1^i, \dots, w_{\rho_i-1}^i) = (\phi_1^i(x), \dots, \phi_{\rho_i-1}^i(x)) \quad \forall 1 \leq i \leq l \\ w &= (w_1, \dots, w^l) \end{aligned} \quad (3.55)$$

se tendrá

$$\begin{cases} \dot{w}_1^i &= -k_1^i w_1^i + w_2^i + (k_2^i - k_1^i k_1^i) y_i \\ &\quad + \eta_3^i(x, u) - k_1^i \eta_2^i(x, u) \\ \dot{w}_{\rho_i-2}^i &= -k_{\rho_i-2}^i w_1^i + w_{\rho_i-1}^i + (k_{\rho_i-1}^i - k_{\rho_i-2}^i k_1^i) y_i \\ &\quad + \eta_{\rho_i}^i(x, u) - k_{\rho_i-2}^i \eta_2^i(x, u) \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i &= -k_{\rho_i-1}^i w_1^i + \gamma^i(x, u) - k_{\rho_i-1}^i k_1^i y_i \\ &\quad + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) - k_{\rho_i-1}^i \eta_2^i(x, u) \\ y_i &= h_i(x) \end{cases} \quad (3.56)$$

$\forall 1 \leq i \leq l$ ,  $(x, u) \in O' \times U'$ .

Si tomamos  $A^i \in \mathcal{R}^{(\rho_i-1) \times (\rho_i-1)}$ ,  $B^i \in \mathcal{R}^{(\rho_i-1) \times 1}$ ,  $C^i \in \mathcal{R}^{1 \times (\rho_i-1)}$ ,  $1 \leq i \leq l$ , como en (3.33), y  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\Gamma(x, u)$ , como en (3.34) y (3.35) respectivamente, y

$$\tilde{\Delta}^i(x, u) = \begin{bmatrix} \eta_3^i(x, u) - k_1^i \eta_2^i(x, u) \\ \vdots \\ \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) - k_{\rho_i-1}^i \eta_2^i(x, u) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(\rho_i-1) \times 1} \quad (3.57)$$

con  $1 \leq i \leq l$ , y

$$\tilde{\Delta}(x, u) = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}^1(x, u) \\ \vdots \\ \tilde{\Delta}^l(x, u) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(n-l) \times 1} \quad (3.58)$$

$\forall (x, u) \in O' \times U'$ , tendremos

$$\dot{w} = (A - KC) \cdot w + (A - KC)K \cdot y + B \cdot \Gamma(x, u) + \tilde{\Delta}(x, u). \quad (3.59)$$

Dado que  $\varphi = (\varphi_1^1, \mu^1, \varphi_1^2, \mu^2, \dots, \varphi_1^l, \mu^l)$  es un difeomorfismo en  $O'$ ,

$$\begin{aligned} \psi &= (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^l, \mu^1, \dots, \mu^l) \\ &= (h_1, \dots, h_l, \mu^1, \dots, \mu^l) \end{aligned} \quad (3.60)$$

también lo será. Pero

$$\begin{aligned}\psi(x) &= (h_1(x), \dots, h_l(x), \phi(x) + K(h_1(x), \dots, h_l(x))) \\ &= (y, w + K \cdot y)\end{aligned}\quad (3.61)$$

en  $O'$ , y por lo tanto tendremos

$$x = \psi^{-1}(y, w + Ky) \quad \forall (y, w) \in h(O') \times \phi(O') \subset \mathcal{R}^l \times \mathcal{R}^{n-l}$$

con lo que (3.59) se escribirá

$$\begin{aligned}\dot{w} &= (A - KC) \cdot w + (A - KC)K \cdot y \\ &+ B \cdot \Gamma(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) \\ &+ \tilde{\Delta}(\psi^{-1}(y, w + Ky), u)\end{aligned}\quad (3.62)$$

$\forall (w, u, y) \in \phi(O') \times U' \times h(O')$ .

Sea como antes  $x(t)$  la solución de (3.12), con control admisible  $u(t)$ , condición inicial  $x(t_0)$  y salida  $y(t) = h(x(t))$ ; si  $\hat{w}$  es la solución de (3.62) para  $\hat{w}(t_0) \neq \phi(x(t_0))$ , es decir

$$\begin{aligned}\dot{\hat{w}}(t) &= (A - KC)\hat{w}(t) + (A - KC)K \cdot y(t) \\ &+ B \cdot \Gamma(\psi^{-1}(y(t), \hat{w}(t) + Ky(t)), u(t)) \\ &+ \tilde{\Delta}(\psi^{-1}(y(t), \hat{w}(t) + Ky(t)), u(t))\end{aligned}\quad (3.63)$$

entonces

$$\hat{x}(t) = \psi^{-1}(y(t), \hat{w}(t) + Ky(t))\quad (3.64)$$

es la estimación de  $x(t)$ . Se tiene pues la siguiente

#### Definición 3.4

Las ecuaciones (3.63) - (3.64) con  $K$  dada por (3.52) pero arbitraria, representa un *observador reducido de tipo Luenberger* para el sistema observable-c (3.12).

#### Observación 3.8

1. Como

$$\phi_*(x_0) : T_{x_0}O' \in \mathcal{R}^n \rightarrow T_{\phi(x_0)}\phi(O') \in \mathcal{R}^{n-l},$$

no se podrá obtener una expresión como la (3.47) para la evolución del estimado  $\hat{x}$  de  $x$ , siendo necesario en general recurrir a (3.64), la que trae aparejada la complicación adicional de tener que calcular  $\psi^{-1}$ .

2. Sin embargo, para sistemas no lineales para los que  $\psi$  es *lineal*, como en algunos casos de manipuladores robóticos de juntas rígidas, el observador reducido presenta ventajas computacionales evidentes frente al completo. (Ver Capítulo 6.)
3. Sea un sistema lineal con una salida observable-c, entonces  $\varphi(x) = T \cdot x$  con  $T$  dada por (3.41) es un isomorfismo. Sean

$$D = \begin{bmatrix} C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times 1}$$

y sea  $w = \mu(x) - K \cdot h(x) = D \cdot x - K \cdot y$ .

Por el teorema de Cayley - Hamilton, existe

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] \in \mathcal{R}^{n \times 1}$$

tal que  $\alpha \cdot T = C \cdot A^n$ .

Entonces, (3.62) se escribirá

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \vdots \\ \dot{w}_{n-2} \\ \dot{w}_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_{n-2} & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 - k_{n-1} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_{n-2} & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 - k_{n-1} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} y \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} CA & -k_1C \\ CA^2 & -k_2C \\ \vdots & \vdots \\ CA^{n-2} & -k_{n-2}C \\ CA^{n-1} & -k_{n-1}C \end{bmatrix} \cdot Bu \quad (3.65) \end{aligned}$$

Pero llamando

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times 1}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times 1}$$

$$B_1 = C \cdot B \in \mathcal{R}^{1 \times m}, A_{12} = [1, 0, \dots, 0] \in \mathcal{R}^{1 \times (n-1)}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

(3.65) queda:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (A_{22} - K \cdot A_{12}) \cdot w + (A_{22} - K \cdot A_{12}) \cdot Ky + A_{21}y \\ &+ (B_2 - K \cdot B_1)u \end{aligned} \quad (3.66)$$

que es justamente la ecuación del observador reducido de Luenberger (Cfr.[32]).

### 3.6 Conclusiones

1. Los sistemas *observables-c* admiten una forma canónica de observador general dada por (3.38).
2. Se puede modificar el observador canónico mediante la adición de funciones, cuya adecuada selección permite el cumplimiento de **H2c.**, según lo veremos en el próximo Capítulo.
3. En el observador *completo* de tipo Luenberger, puede evaluarse la evolución de la estimación de los estados, utilizando (3.47).
4. En el observador *reducido* no existe esta posibilidad, y por ello es necesario, en cada caso, evaluar las ventajas computacionales que se puedan obtener usando este observador, haciendo una comparación entre las dificultades aparejadas en evaluar  $\psi^{-1}$ , y las que aparecen en la integración de un número mayor de ecuaciones diferenciales.



## Capítulo 4

# La convergencia del observador

### 4.1 Introducción

En este Capítulo se establecerán las hipótesis que determinan la convergencia del observador en tiempo continuo, y se demostrará dicha convergencia. En principio se tratará la convergencia del observador a lazo abierto, es decir cuando el control  $u$  es una función arbitraria del tiempo, (o sea que para su construcción no se recurre a realimentación de los estados).

En este caso, se probará la convergencia exponencial con velocidad arbitraria, del observador, para sistemas observables-c que cumplen con la hipótesis 1. de la Proposición 3.2, a los que de aquí en adelante llamaremos *sistemas Oc1*. Para aquellos que no la cumplan, sólo se podrá demostrar convergencia asintótica del observador.

Posteriormente se tratará la convergencia del observador a lazo cerrado, o sea, cuando  $u = u(\hat{x}, v)$ , con  $v$  función arbitraria.

Este análisis se hará para estrategias de control que resuelvan el seguimiento, tanto de trayectorias como de modelos, con lo cual se abarcarán prácticamente todos los problemas de diseño de control realimentado. Los sistemas que se considerarán serán aquellos que cumplan con todas las hipótesis de la Proposición 3.2, ya que es para estos sistemas que se puede encontrar los controles  $u$  que resuelven esos problemas.

Finalmente, se demostrará la convergencia del observador reducido.

## 4.2 La convergencia del observador completo a lazo abierto

### 4.2.1 Convergencia de los sistemas Ocl.

Consideremos un sistema Ocl.; entonces, de (3.13), existe  $O' \times U'$ , entorno de  $(x_0, u_0)$ , tal que

$$\begin{aligned} L_{f(x,u)}^k h_i(x) &= \hat{f}_i^k(x) \\ \hat{g}_i^k(x, u) &= 0 \end{aligned}$$

$\forall (x, u) \in O' \times U', 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l.$

Por lo tanto, en (3.30), se tendrá que en dicho entorno

$$\eta_j^i(x, u) = 0 \quad (4.1)$$

$2 \leq j \leq \rho_i, 1 \leq i \leq l.$  Entonces, de (4.1), (3.32) se escribirá

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{w}_1^i &= w_2^i \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i &= w_{\rho_i}^i \\ \dot{w}_{\rho_i}^i &= \gamma^i(\varphi^{-1}(w), u) = L_{f(\varphi^{-1}(w), u)}^{\rho_i} h_i(\varphi^{-1}(w)) \\ y_i &= h_i(x) = w_1^i \end{aligned} \right. \quad (4.2)$$

$1 \leq i \leq l, \forall (w, u) \in \varphi(O') \times U',$  entorno de  $(w_0, u_0) = (\varphi(x_0), u_0).$

Entonces, con  $A, B, \Gamma$  definidas en (3.34) y (3.35), las ecuaciones (3.43) y (3.45) se escribirán

$$\frac{dw(t)}{dt} = A \cdot w(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) \quad (4.3)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{w}(t)}{dt} &= A \cdot \hat{w}(t) + B \cdot \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), u(t)) \\ &+ K \cdot (y(t) - C \cdot \hat{w}(t)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde nuevamente  $x(t)$ , es solución de (3.12) con condición inicial  $x(t_0)$ , y control admisible  $u(t)$ ,  $w(t) = \varphi(x(t))$  y  $\hat{w}(t)$  la solución de (4.4), con  $y(t) = h(x(t))$ , y con condición inicial  $\hat{w}(t_0) \neq \varphi(x(t_0))$ .

Consideremos ahora  $M > 0$  arbitrario, entonces, si  $\mathcal{A}_{(x_0, u_0)}$  es la clase de controles admisibles para (3.12) según la Definición 2.7, notaremos  $\mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M = \{u \in \mathcal{A}_{(x_0, u_0)} : \|u(t)\| \leq M \forall t \geq t_0\}$ .

Supongamos que  $x(t), \hat{w}(t)$  son las soluciones anteriores para  $u \in \mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$ , y  $\hat{x}(t) = \varphi^{-1}(\hat{w}(t))$ ; entonces vale el siguiente

**Teorema 4.1**

Supongamos que

1.  $\varphi^{-1}$  es uniformemente de Lipschitz de constante  $m_{\varphi^{-1}}$  en  $\varphi(O')$ ,
2. existe  $\nabla : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$  creciente, que transforma acotados en acotados, tal que

$$\|\Gamma(x_1, u) - \Gamma(x_2, u)\| \leq \nabla(\|u\|)\|x_1 - x_2\|$$

$$\forall (x_1, u), (x_2, u) \in O' \times U'$$

Entonces, dado  $\alpha > 0$  arbitrario, existe una matriz  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tal que

$$\|\hat{w}(t) - w(t)\| \leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$\forall t \geq t_0$ , con  $\delta_1$  constante;

3. si además  $\varphi$  es uniformemente de Lipschitz con constante  $m_\varphi$  en  $O'$

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_2 \|\hat{x}_0 - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$\forall t \geq t_0$ ,  $\hat{x}_0 = \varphi^{-1}(\hat{w}(t_0))$  y  $\delta_2$  constante.

Es decir, el observador completo converge a lazo abierto en forma exponencial con velocidad de convergencia arbitraria.

**Demostración**

Sea

$$\varepsilon(t) = \hat{w}(t) - w(t) \tag{4.5}$$

el error de observación; de (4.3) y (4.4) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= A(\hat{w}(t) - w(t)) + B\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), u(t)) \\ &\quad - B\Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) + K(Cw(t) - C\hat{w}(t)) \end{aligned}$$



es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= (A - KC)\varepsilon(t) + B[\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), u(t)) \\ &\quad - \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), u(t))] \end{aligned} \quad (4.6)$$

de solución

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= e^{(A-KC)(t-t_0)}\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(A-KC)(t-\tau)} B[\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(\tau)), u(\tau)) \\ &\quad - \Gamma(\varphi^{-1}(w(\tau)), u(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Consideremos la matriz  $K$  de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1^1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ k_{\rho_1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{\rho_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & k_1^l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & k_{\rho_l}^l \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Entonces, si  $\forall 1 \leq i \leq l$ ,

$$D^i = \begin{bmatrix} -k_1^i & 1 & 0 & 1 \\ -k_2^i & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_{\rho_i-1}^i & 0 & 0 & 1 \\ -k_{\rho_i}^i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times \rho_i}, \quad (4.9)$$

se tendrá

$$D = (A - KC) = \text{diag}\{D^1, \dots, D^l\}. \quad (4.10)$$

Dado que  $D^i$  es una matriz en forma *companion*,  $\{k_1^i, \dots, k_{\rho_i}^i\}$  son los coeficientes de su polinomio característico, y por lo tanto se pueden elegir de forma que su espectro  $\sigma(D^i) = \{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i\rho_i}\}$ , se sitúe adecuadamente, y como de (4.10) se deduce que el espectro de  $D$  es la unión disjunta de los espectros de las  $D^i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , se puede elegir  $K$  de forma que

$$\lambda_{l\rho_l} < \dots < \lambda_{l1} < \lambda_{l-1\rho_{l-1}} < \dots < \lambda_{1\rho_1} \dots < \lambda_{11} < 0. \quad (4.11)$$

Pero entonces, cada  $D^i$  tiene sus autovalores distintos, con lo que es diagonalizable, y si llamamos  $V_{ij}$  al siguiente vector fila

$$V_{ij} = [\lambda_{ij}^{\rho_i-1}, \lambda_{ij}^{\rho_i-2}, \dots, \lambda_{ij}, 1] \quad (4.12)$$

este será autovector a izquierda de  $D^i$  para  $\lambda_{ij}$   $1 \leq j \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ . Por lo tanto, si

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ \vdots \\ V_{i\rho_i} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & & 0 \\ & \lambda_{i2} & \\ 0 & & \lambda_{i\rho_i} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

entonces

$$D^i = \Lambda_i^{-1} \Delta_i \Lambda_i \quad (4.15)$$

$\forall 1 \leq i \leq l$ . Consideremos ahora los vectores fila

$$\hat{V}_{ij} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{a_i}, V_{ij}, \underbrace{0, \dots, 0}_{b_i}] \quad (4.16)$$

$\forall 1 \leq j \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , donde

$$\begin{cases} a_i = \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j & 1 < i \leq l \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_i = n - \sum_{j=1}^i \rho_j & 1 \leq i < l \\ b_l = 0 \end{cases}$$

Por la forma de  $D$ , claramente  $\hat{V}_{ij}$  es un autovector a izquierda cuyo correspondiente al autovalor  $\lambda_{ij}$ , y si

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{V}_{11} \\ \hat{V}_{1\rho_1} \\ \vdots \\ \hat{V}_{l\rho_l} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

se deduce de (4.15) que

$$D = \Lambda^{-1} \Delta \Lambda \quad \text{para} \quad (4.18)$$

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_l\}. \quad (4.19)$$

Simbolizando con  $\lambda = \sigma(D)$ , se tendrá que  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ , será función de este conjunto de autovalores.

Si reemplazamos ahora (4.18) en (4.7) tendremos

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \Lambda^{-1}(\lambda) e^{\Delta(t-t_0)} \Lambda(\lambda) \varepsilon(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t \Lambda^{-1}(\lambda) e^{\Delta(t-\tau)} \Lambda(\lambda) B [\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(\tau)), u(\tau)) \\ &- \Gamma(\varphi^{-1}(w(\tau)), u(\tau))] d\tau \end{aligned} \quad (4.20)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq e^{\lambda_{11}(t-t_0)} \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| \|\varepsilon(t_0)\| \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)B\| \|\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(\tau)), u(\tau)) \\ &- \Gamma(\varphi^{-1}(w(\tau)), u(\tau))\| d\tau. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ahora bien, de la forma de  $B$ , (ecuación (3.34)), se deduce que

$$\Lambda(\lambda)B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y, por el orden establecido en los  $\rho_i$ , tendremos que  $\|\Lambda(\lambda)B\| = \sqrt{\rho_1}$ . Por lo tanto, de esto y de las hipótesis del teorema, (4.21) queda

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq e^{\lambda_{11}(t-t_0)} \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| \|\varepsilon(t_0)\| \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \sqrt{\rho_1} m_{\varphi^{-1}} \nabla(\|u(\tau)\|) \|\varepsilon(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Pero, como  $u \in \mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$ ,  $\nabla(\|u(\tau)\|) \leq \nabla(M) = M_1 \forall \tau$ , y entonces

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq e^{\lambda_{11}(t-t_0)} \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| \|\varepsilon(t_0)\| \\ &+ L \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \int_{t_0}^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} \|\varepsilon(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (4.22)$$

con  $L = M_1 m_{\varphi^{-1}} \sqrt{\rho_1}$ . Tomando  $\delta(t) = e^{-\lambda_{11}(t-t_0)} \|\varepsilon(t)\|$ , (4.22) queda

$$\delta(t) \leq \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| \|\varepsilon(t_0)\| + L \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau,$$

y por el lema de Gronwall (Cfr.[24])

$$\delta(t) \leq \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| \|\varepsilon(t_0)\| e^{(L\|\Lambda^{-1}(\lambda)\|)(t-t_0)}$$

$\forall t \geq t_0$ , con lo que

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| \|\varepsilon(t_0)\| e^{((\lambda_{11} + L\|\Lambda^{-1}(\lambda)\|)(t-t_0))} \quad (4.23)$$

$\forall t \geq t_0$ . Veamos ahora que existe  $\lambda$  tal que  $\lambda_{11} + L\|\Lambda^{-1}(\lambda)\| = -\alpha$ .

Sea  $p \in \mathcal{R}_{>0}$  arbitrario, y consideremos

$$\lambda_{ij} = -p(\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k) + j \quad 1 \leq j \leq \rho_i \quad 1 \leq i \leq l \quad (4.24)$$

con  $\sum_{k=1}^0 \rho_i = 0$ ; entonces

$$\Lambda_i(\lambda) = \begin{bmatrix} \left(-p(1+\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k)\right)^{\rho_i-1} & \left(-p(1+\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k)\right)^{\rho_i-2} & 1 \\ \left(-p(2+\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k)\right)^{\rho_i-1} & \left(-p(2+\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k)\right)^{\rho_i-2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(-p(\rho_i+\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k)\right)^{\rho_i-1} & \left(-p(\rho_i+\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k)\right)^{\rho_i-2} & 1 \end{bmatrix}$$

Pero, si  $t_i = \sum_{j=1}^{\rho_i} j(j-1)$ , entonces  $\det(\Lambda_i) = P^i(p)$  es un polinomio mónico en  $p$ , de grado  $\text{grad}(P^i) = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \rho_j\right) t_i$ , y

$$\Lambda_i^{-1}(p) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q^i(p) & * & * \end{bmatrix} \frac{1}{P^i(p)} \quad (4.25)$$

donde  $Q^i(p)$  también es un polinomio mónico en  $p$ , con el mismo grado que  $P^i(p)$ , y los otros elementos de la matriz son también polinomios en  $p$ , pero de menor grado. Por lo tanto, cuando  $p$  tiende a  $+\infty$ ,  $\Lambda^{-1}(p)$  tiende a la matriz

$$E^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times \rho_i}. \quad (4.26)$$

Por otra parte, de (4.17), se ve que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \Lambda_2 & \\ 0 & & \Lambda_l \end{bmatrix},$$

con lo que

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} (\Lambda_1)^{-1} & & 0 \\ & (\Lambda_2)^{-1} & \\ 0 & & (\Lambda_l)^{-1} \end{bmatrix},$$

y por lo tanto, cuando  $p$  tiende a  $+\infty$ ,  $\Lambda^{-1}(p)$  tiende a

$$E = \begin{bmatrix} E^1 & & 0 \\ & E^2 & \\ 0 & & E^l \end{bmatrix}.$$

De allí, por la continuidad de la norma

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\Lambda^{-1}(p)\| = 1, \quad (4.27)$$

y además

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|\Lambda^{-1}(p)\| = +\infty. \quad (4.28)$$

Pero entonces, para el  $\alpha$  dado  $\exists \lambda^*$  tal que  $\lambda_{11}^* + L\|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| = -\alpha$ , y tomando  $\delta_1 = \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \|\Lambda(\lambda^*)\|$ , de (4.23) tendremos

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \delta_1 \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0,$$

o sea,

$$\|\hat{w}(t) - w(t)\| \leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.29)$$

Si además  $\varphi$  es uniformemente de Lipschitz en  $O'$ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t) - x(t)\| &= \|\varphi^{-1}(\hat{w}(t)) - \varphi^{-1}(w(t))\| \\ &\leq m_{\varphi^{-1}} \|\hat{w}(t) - w(t)\| \\ &\leq m_{\varphi^{-1}} \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ &= m_{\varphi^{-1}} \delta_1 \|\varphi(\hat{x}(t_0)) - \varphi(x(t_0))\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ &\leq m_{\varphi^{-1}} \delta_1 m_{\varphi} \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

y si tomamos  $\delta_2 = m_{\varphi^{-1}} \delta_1 m_{\varphi}$ ,

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_2 \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.30)$$

■

#### Observación 4.1

1. Esta demostración se basa en la obtenida en [49] para el caso particular de un manipulador robótico, la cual es una generalización de la obtenida en [22] para un sistema lineal analítico en  $\mathcal{R}^n$  de una entrada y una salida con grado relativo  $n$ .
2. Para el caso de los sistemas afines en el control, dados por

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.31)$$

que cumplen las hipótesis 1. y 3. de la Proposición 3.2, se tiene que

$$\Gamma_i(x, u) = L_{f(x)}^{\rho_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j(x)} L_{f(x)}^{\rho_i-1} h_i(x) u_j \quad \forall 1 \leq i \leq l, \quad (4.32)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\Gamma_i(\hat{x}, u) - \Gamma_i(x, u)| &\leq |L_{f(\hat{x})}^{\rho_i} h_i(\hat{x}) - L_{f(x)}^{\rho_i} h_i(x)| \\ &+ \sum_{j=1}^m |L_{g_j(\hat{x})} L_{f(\hat{x})}^{\rho_i-1} h_i(\hat{x}) - L_{g_j(x)} L_{f(x)}^{\rho_i-1} h_i(x)| |u_j| \end{aligned} \quad (4.33)$$

En consecuencia la hipótesis 2. del teorema se reduce a que sean uniformemente de Lipschitz las funciones  $L_{f_j}^{\rho_i} h_i$ ,  $L_{g_j} L_{f_j}^{\rho_i-1} h_i \forall 1 \leq i \leq l$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Veamos ahora que en ciertos casos es posible debilitar las hipótesis del Teorema 4.1 :

#### Corolario 4.1

Supongamos que  $\mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$  es tal que

1.  $\exists r_1 > 0 : \forall u \in \mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$  la solución  $x(t)$  de la ecuación (3.12) verifica  $x(t) \in B(x_0, r_1) \forall t \geq t_0$ , donde  $B(x_0, r_1)$  es la bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $r_1$  en  $\mathcal{R}^n$ ;
2. existe  $s > 1$  tal que si  $r_2 = \max \{ \|\varphi(p) - \varphi(x_0)\|, p \in \overline{B(x_0, r_1)} \}$  y  $r_3 = 2 \text{ radio } \{ \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), (1+s)r_2)) \}$ ,  $\overline{B(x_0, r_1 + r_3)} \subset O'$ .

Entonces, dado  $\alpha > 0$  arbitrario, existen una matriz  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$ , y un número  $\nu > 1$  tales que si  $\hat{x}(t_0), x(t_0) \in B(x_0, r_1) \cap \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), \frac{r_2}{\nu}))$ , se cumple:

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_1 e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

#### Demostración

De la ecuación (4.20), tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda)\varepsilon(t) &= e^{\Delta(t-t_0)} \Lambda(\lambda)\varepsilon(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\Delta(t-\tau)} \Lambda(\lambda) B[\Gamma(\varphi^{-1}(\Lambda^{-1}(\lambda)\Lambda(\lambda)\hat{w}(\tau)), u(\tau)) \\ &- \Gamma(\varphi^{-1}(\Lambda^{-1}(\lambda)\Lambda(\lambda)w(\tau)), u(\tau))] d\tau \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pero, por la diferenciabilidad de  $\Gamma$  y  $\varphi^{-1}$

$$\begin{aligned} &\Gamma(\varphi^{-1}(\Lambda^{-1}(\lambda)\Lambda(\lambda)\hat{w}(\tau)), u(\tau)) - \Gamma(\varphi^{-1}(\Lambda^{-1}(\lambda)\Lambda(\lambda)w(\tau)), u(\tau)) \\ &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(\hat{\theta}(\tau), u(\tau)) \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w}(\tilde{\theta}(\tau)) \Lambda^{-1}(\lambda) [\Lambda(\lambda)\hat{w}(\tau) - \Lambda(\lambda)w(\tau)]. \end{aligned}$$

Como por hipótesis  $x(t_0), \hat{x}(t_0) \in B(x_0, r_1)$ , por continuidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, existe  $t^* > t_0$ , tal que

$$x(t), \hat{x}(t) \in B(x_0, r_1 + r_3) \quad (4.35)$$

$\forall t_0 \leq t < t^*$ . Sean

$$\begin{aligned} L_1 &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(\hat{\theta}, u) \right\|, \hat{\theta} \in \overline{B(x_0, r_1 + r_3)}, u \in \overline{B(0, M)} \right\}, \\ m_{\varphi^{-1}} &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w}(\tilde{\theta}) \right\|, \tilde{\theta} \in \varphi(\overline{B(x_0, r_1 + r_3)}) \right\}, \\ m_{\varphi} &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial w}(\tilde{p}) \right\|, \tilde{p} \in \overline{B(x_0, r_1 + r_3)} \right\}, \end{aligned}$$

entonces, se cumplirá

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\lambda)\varepsilon(t)\| &\leq e^{\lambda_{11}(t-t_0)}\|\Lambda(\lambda)\varepsilon(t_0)\| \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)}\sqrt{\rho_1}L_1m_{\varphi^{-1}}\|\Lambda^{-1}(\lambda)\|\|\Lambda(\lambda)\varepsilon(\tau)\| d\tau \quad (4.36) \end{aligned}$$

$\forall t_0 \leq t < t^*$ , y por lo tanto, procediendo como en el Teorema (4.1), tendremos

$$\|\Lambda(\lambda)\varepsilon(t)\| \leq e^{\bar{\lambda}(t-t_0)}\|\Lambda^{-1}(\lambda)\varepsilon(t_0)\| \quad (4.37)$$

$\forall t_0 \leq t < t^*$ , con

$$\bar{\lambda} = \lambda_{11} + \|\Lambda^{-1}(\lambda)\|\sqrt{\rho_1}L_1m_{\varphi^{-1}}.$$

Consideremos ahora, para  $\alpha > 0$  arbitrario pero fijo,

$$\lambda_{11} = -\alpha - sL_1m_{\varphi^{-1}}\sqrt{\rho_1}. \quad (4.38)$$

Si numeramos consecutivamente

$$\lambda = \{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{l\rho_l}\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$$

y para  $\delta > 0$  arbitrario hacemos

$$\mu_1 = \lambda_{11}, \mu_i = \mu_1 - \delta^i = \lambda_{11} - \delta^i \quad \forall 2 \leq i \leq n,$$



de las expresiones (4.25) para  $\Lambda_i^{-1}$ , y  $\Lambda^{-1}$ , tendremos que

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\Lambda^{-1}(\lambda(\delta))\| &= +\infty \\ \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \|\Lambda^{-1}(\lambda(\delta))\| &= 1,\end{aligned}$$

y por lo tanto existe  $\delta^*$  tal que si  $\mu_i = \lambda_{11} - \delta^*$   $2 \leq i \leq n$ , entonces  $\|\Lambda^{-1}(\lambda(\delta^*))\| = \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \leq s$ , y de (4.38)

$$\begin{aligned}\lambda_{11} + \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \sqrt{\rho_1} L_1 m_{\varphi-1} &\leq \\ \lambda_{11} + s\sqrt{\rho_1} L_1 m_{\varphi-1} = -\alpha - s\sqrt{\rho_1} L_1 m_{\varphi-1} + s\sqrt{\rho_1} L_1 m_{\varphi-1} &= -\alpha;\end{aligned}$$

por lo tanto (4.37) queda:

$$\|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t)\| \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t_0)\| \quad (4.39)$$

$\forall t_0 \leq t < t^*$ . Tomando  $\nu = \max\{2\|\Lambda(\lambda^*)\|, 1\}$ ,

$$\begin{aligned}\|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t_0)\| &= \|\Lambda(\lambda^*)(\varphi(\hat{x}(t_0)) - \varphi(x(t_0)))\| \leq \\ \|\Lambda(\lambda^*)\| (\|\varphi(\hat{x}(t_0)) - \varphi(x_0)\| + \|\varphi(x(t_0)) - \varphi(x_0)\|) & \\ < \|\Lambda(\lambda^*)\| \left( \frac{r_2}{\nu} + \frac{r_2}{\nu} \right) &\leq r_2\end{aligned}$$

y por lo tanto, por continuidad

$$\begin{aligned}\|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t^*)\| &= \lim_{t \rightarrow t^*} \|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t)\| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow t^*} \|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ &= \|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t^*-t_0)} \\ &< \|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t_0)\| < r_2.\end{aligned}$$

Pero entonces

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(t^*)\| &\leq \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \|\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t^*)\| < sr_2 \\ \Rightarrow \|\varphi(\hat{x}(t^*)) - \varphi(x(t^*))\| &\in B(0, sr_2).\end{aligned}$$

Pero por hipótesis,  $\varphi(x(t)) \in B(\varphi(x_0), r_2) \subset B(\varphi(x_0), r_2(1+s))$   
 $\forall t \geq t_0$ , con lo que

$$\begin{aligned}\|\varphi(\hat{x}(t^*)) - \varphi(x_0)\| &< sr_2 + \|\varphi(x(t^*)) - \varphi(x_0)\| \leq r_2(1+s) \\ \Rightarrow \hat{x}(t^*), x(t^*) &\in \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), r_2(1+s))) \\ \Rightarrow \|\hat{x}(t^*) - x_0\| &\leq \|\hat{x}(t^*) - x(t^*)\| + \|x(t^*) - x_0\| \\ &< r_3 + r_1.\end{aligned}$$

Pero entonces la ecuación (4.35) es válida para tiempos mayores que  $t^*$  por la misma razón que antes y por lo tanto, repitiendo el razonamiento anterior, se tendrá que la ecuación (4.39) vale  $\forall t \geq t_0$ , con lo que

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \|\Lambda(\lambda^*)\| \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} & \text{y} \\ \|\hat{x}(t) - x(t)\| &\leq \delta_1 \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} & (4.40) \\ \text{donde } \delta_1 &= m_{\varphi^{-1}} m_{\varphi} \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \|\Lambda(\lambda^*)\| \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$  ■

#### 4.2.2 Convergencia de los sistemas observables-c generales

A diferencia de los sistemas Oc1., no será posible asegurar convergencia exponencial para los sistemas observables-c generales, salvo para casos particulares, y restringiendo el valor del error inicial de observación.

La razón esencial puede entreverse de la ecuación (4.6) de error, que sin pérdida de generalidad consideraremos para  $l = 1$ . Entonces tendremos

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1(t) \\ \dot{\varepsilon}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1}(t) \\ \dot{\varepsilon}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Upsilon(t) \varepsilon(t) \quad (4.41)$$

con

$$\begin{aligned} \Upsilon(t) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(\theta_1(t)) \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w}(\theta_2(t)) \\ \theta_1(t) &= (w(t) + \mu_1(t)\varepsilon(t), u(t)), \quad 0 < \mu_1(t) < 1 \\ \theta_2(t) &= w(t) + \mu_2(t)\varepsilon(t) \quad 0 < \mu_2(t) < 1 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1(t) \\ \dot{\varepsilon}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1}(t) \\ \dot{\varepsilon}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_{n-1} & 0 & 0 & 1 \\ -k_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}(t) \\ \varepsilon_n(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \Upsilon_{n1}(t) & \Upsilon_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}(t) \\ \varepsilon_n(t) \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

De esta ecuación se ve que el término no lineal de (4.41) se traduce en una perturbación  $\hat{\Upsilon}(t)$  sobre la matriz  $(A - KC)$  que aparece sólo en su última fila, esto es, una *perturbación estructurada* (Cfr.[54]), y es este tipo particular de estructura de la perturbación la que permite dado  $\alpha > 0$  arbitrario, asegurar la existencia de la matriz  $K$  tal que  $\Re(\sigma(A - KC + \hat{\Upsilon}(t))) \leq -\alpha \forall t \geq t_0$ .

Para el caso general, no pasará esto, pues si por ejemplo la perturbación es

$$\hat{\Upsilon}(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_n(t) \end{bmatrix}$$

con lo que

$$A - KC + \hat{\Upsilon}(t) = \begin{bmatrix} -k_1 + \delta_1(t) & 0 & 0 \\ -k_2 & \delta_2(t) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n & 0 & \delta_n(t) \end{bmatrix},$$

$\sigma(A - KC + \hat{\Upsilon}(t)) = \{\delta_1(t) - k_1, \dots, \delta_n(t)\}$  resulta independiente de  $K$  y por lo tanto no se podrá asegurar convergencia, (y mucho menos exponencial), de la ecuación de error. Se tiene pues, que para sistemas observables-c generales la pretensión de convergencia exponencial impondrá restricciones adicionales.

Consideremos de (3.38)

$$\begin{aligned} \Theta(x, u) &= B \cdot \Gamma(x, u) + \Delta(x, u) \\ &= B \cdot \begin{bmatrix} \gamma^1(x, u) \\ \vdots \\ \gamma^l(x, u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta^1(x, u) \\ \vdots \\ \Delta^l(x, u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces las ecuaciones (3.38) y (3.45) se escribirán

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A \cdot w(t) + \Theta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) \\ y(t) = C \cdot w(t) \end{cases} \quad (4.43)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}(t) &= A \cdot \hat{w}(t) + \Theta(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), u(t)) \\ &+ K \cdot (y(t) - C \cdot \hat{w}(t)), \end{aligned} \quad (4.44)$$

con lo que la ecuación del error de observación quedará:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= (A - KC)\varepsilon(t) + \Theta(\varphi^{-1}(w(t) + \varepsilon(t)), u(t)) \\ &- \Theta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Sea

$$\bar{\Theta}(w, u) = \frac{\partial}{\partial w} [\Theta(\varphi^{-1}(w), u)]$$

entonces vale el siguiente

#### Teorema 4.2

Supongamos que

1.  $\varphi^{-1}$  y  $\varphi$  son uniformemente Lipschitz de constantes  $m_{\varphi^{-1}}$  y  $m_{\varphi}$  en  $\varphi(O')$  y  $O'$  respectivamente
2.  $\sup \{ \|\bar{\Theta}(w, u)\|, w \in \varphi(O'), u \in \mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M \} = M_1 < \infty$
3. existen  $P, Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , matrices definidas positivas, y una matriz  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tales que

$$Q(A - KC) + (A - KC)^T Q = -P \quad (4.46)$$

$$\frac{\lambda_{\min}(P)}{2\lambda_{\max}(Q)} > M_1; \quad (4.47)$$

entonces, existen  $\alpha, \delta > 0$  tales que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$\forall t \geq t_0$ .

### Demostración

Consideremos la función  $V(t) = \varepsilon(t)^T Q \varepsilon(t)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= 2\varepsilon(t)^T Q \dot{\varepsilon}(t) \\
 &= 2\varepsilon(t)^T Q (A - KC) \varepsilon(t) \\
 &+ 2\varepsilon(t)^T Q \left[ \Theta(\varphi^{-1}(w(t) + \varepsilon(t)), u(t)) - \Theta(\varphi^{-1}(w(t)), u(t)) \right] \\
 &= -\varepsilon(t)^T P \varepsilon(t) + 2\varepsilon(t)^T Q \left( \int_0^1 \bar{\Theta}(w(t) + s\varepsilon(t), u(t)) ds \right) \varepsilon(t) \\
 &\leq -\lambda_{\min}(P) \|\varepsilon(t)\|^2 \\
 &+ 2\varepsilon(t)^T Q \left( \int_0^1 \|\bar{\Theta}(w(t) + s\varepsilon(t), u(t))\| ds \right) \varepsilon(t) \\
 &\leq -(\lambda_{\min}(P) - 2\|Q\|M_1) \|\varepsilon(t)\|^2 = -\mu \|\varepsilon(t)\|^2.
 \end{aligned}$$

Pero  $\lambda_{\min}(Q) \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{\max}(Q) \|\varepsilon(t)\|^2 \forall t$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} &\leq -\frac{\mu}{\lambda_{\max}(Q)} = -2\alpha \\
 \Rightarrow V(t) &\leq V(t_0) e^{-2\alpha(t-t_0)} \\
 \Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 &\leq \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \|\varepsilon(t_0)\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \\
 \Rightarrow \|\varepsilon(t)\| &\leq \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}
 \end{aligned}$$

y tomando

$$\delta = \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}} m_\varphi m_{\varphi^{-1}}$$

obtenemos

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

■

Como en el caso del Teorema 4.1 es posible relajar las hipótesis del teorema anterior en la siguiente forma:

**Corolario 4.2**

Supongamos que  $\mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$  es tal que

1.  $\exists r_1 > 0 : \forall u \in \mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$  la solución  $x(t)$  de la ecuación (3.12) verifica  $x(t) \in B(x_0, r_1) \forall t \geq t_0$ , donde  $B(x_0, r_1)$  es la bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $r_1$  en  $\mathcal{R}^n$ ;
2. si  $r_2 = \max \{ \|\varphi(p) - \varphi(x_0)\| \mid p \in \overline{B(x_0, r_1)} \}$  y  $r_3 = 2 \text{ radio } \{ \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), 2r_2)) \}$ ,  $\overline{B(x_0, r_1 + r_3)} \subset O'$ ;
3. si  $\max \{ \|\tilde{\Theta}(w, u)\|, w \in \varphi(\overline{B(x_0, r_1 + r_3)}) \}$ ,  $u \in \overline{B(0, M)} \} = M_1$ , existen matrices  $P, Q, K$ , como en el Teorema 4.2.

Entonces, existen  $\alpha > 0, \nu > 1$  tales que si  $\hat{x}(t_0), x(t_0) \in B(x_0, r_1) \cap \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), \frac{r_2}{\nu}))$ , se verifica

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_1 \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

con  $\delta_1$  constante.

**Demostración**

Nuevamente, como por hipótesis  $x(t_0), \hat{x}(t_0) \in B(x_0, r_1)$ , por la continuidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, existe  $t^* > t_0$ , tal que

$$x(t), \hat{x}(t) \in B(x_0, r_1 + r_3)$$

$$\forall t_0 \leq t < t^*$$

Pero, por el teorema anterior, para tales  $t$  vale

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (4.48)$$

con  $\alpha$  definido allí. Pero entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t^*} \|\varepsilon(t)\| &= \|\varepsilon(t^*)\| \leq \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\alpha(t^*-t_0)} \\ &\Rightarrow \|\varepsilon(t^*)\| < \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon(t_0)\| \end{aligned}$$

Sea ahora

$$\nu = \max \left\{ 2 \left[ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}}, 1 \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t_0)\| &= \|\varphi(\hat{x}(t_0)) - \varphi(x(t_0))\| \\ &\leq \|\varphi(\hat{x}(t_0)) - \varphi(x_0)\| + \|\varphi(x(t_0)) - \varphi(x_0)\| \\ &< \frac{r_2}{\nu} + \frac{r_2}{\nu} \leq r_2. \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\|\varepsilon(t^*)\| < r_2$ . Pero

$$\begin{aligned} x(t^*) \in B(x_0, r_1) &\Rightarrow \varphi(x(t^*)) \in B(\varphi(x_0), r_2) \Rightarrow \\ \|\varphi(\hat{x}(t^*)) - \varphi(x_0)\| &\leq \|\varphi(\hat{x}(t^*)) - \varphi(x(t^*))\| + \|\varphi(x(t^*)) - \varphi(x_0)\| \\ &< r_2 + r_2 = 2r_2 \quad \Rightarrow \\ \hat{x}(t^*), x(t^*) &\in \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), 2r_2)) \quad \Rightarrow \\ \|\hat{x}(t^*) - x_0\| &\leq \|\hat{x}(t^*) - x(t^*)\| + \|x(t^*) - x_0\| \\ &< r_2 + r_1, \end{aligned}$$

con lo que

$$\hat{x}(t^*), x(t^*) \in B(x_0, r_1 + r_2)$$

y razonando como antes, la ecuación (4.48) vale  $\forall t \geq t_0$ , por lo que, si tomamos

$$\begin{aligned} m_{\varphi^{-1}} &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w}(\tilde{\theta}) \right\|, \tilde{\theta} \in \overline{B(x_0, r_1 + r_2)} \right\}, \\ m_{\varphi} &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial w}(\tilde{p}) \right\|, \tilde{p} \in \overline{B(x_0, r_1 + r_2)} \right\} \text{ y} \\ \delta_1 &= \left[ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \right]^{\frac{1}{2}} m_{\varphi} m_{\varphi^{-1}} \end{aligned}$$

tendremos

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_1 \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

■

**Observación 4.2**

Del teorema y el corolario anteriores, se ve que no es posible en general fijar la velocidad de convergencia del error de observación. Además, la existencia de la solución de la ecuación de Lyapunov (4.46) que cumple con (4.47) será posible en general cuando  $M_1$  sea pequeño, es decir, para perturbaciones pequeñas de la matriz  $A - KC$ .

Con el objeto de determinar condiciones sobre la perturbación de  $A - KC$ , consideremos ahora las siguientes definiciones y proposiciones: Sea  $M$  una matriz estable de  $K^{n \times n}$ ,  $K = \mathcal{R}$  o  $K = \mathcal{C}$ .

**Definición 4.1** (Cfr.[55])

El radio de estabilidad de  $M$ ,

$$r_K(M) = \inf\{\|D\| : \sigma(A + D) \cap \overline{\mathcal{C}_+} \neq \emptyset\}$$

es la norma de la “menor” perturbación desestabilizante  $D \in K^{n \times n}$  de  $M$ .

En general se verifica

$$0 \leq r_{\mathcal{C}} \leq r_{\mathcal{R}} \leq s_n(M) \quad \text{donde} \quad (4.49)$$

$$s_n(M) = \min\{\tilde{\lambda} : \tilde{\lambda} \in \sigma(M^*M)\} = \|M^{-1}\|^{-1} \quad (4.50)$$

si  $\det(M) \neq 0$ .

Obsérvese que el radio de estabilidad no contempla estructura alguna de la perturbación, que es justamente nuestro caso.

Que la distancia de  $\sigma(M)$  al eje imaginario no es un indicador válido de la inmunidad de  $M$  frente a perturbaciones se puede ver en el siguiente ejemplo: sea

$$\begin{aligned} M_k &= \begin{bmatrix} -k & -k^3 \\ 0 & -k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{N} \Rightarrow \\ M_k^{-1} &= \begin{bmatrix} -k^{-1} & k \\ 0 & -k^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \sigma(M_k) &= \{-k, -k\}, \quad \|M_k\| = O(k) \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Re(\sigma(M_k)) &= -\infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_n(M_k) &= 0. \end{aligned}$$



y por (4.49),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_{\mathcal{R}}(M_k) = 0$$

El único caso en que se puede asegurar una relación directa, viene dado por la siguiente

**Proposición 4.1** (Cfr.[55])

Sea  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  estable y normal con autovalores  $\lambda_j = -\alpha_j + i\omega_j$ ,  $\alpha_1 \geq \dots \alpha_n \geq 0$ . Entonces

1.  $r_{\mathbb{C}}(M) = \alpha_n$
2. si  $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $r_{\mathbb{C}}(M) = r_{\mathcal{R}}(M) = \alpha_n$

■

Si bien en esta proposición se requiere la normalidad de  $M$ , el siguiente resultado muestra la "casi normalidad", en este sentido, de las matrices estables:

**Proposición 4.2** (Cfr.[55])

Sea  $M \in K^{n \times n}$  estable con autovalores  $\lambda_n < \dots < \lambda_1 < 0$ . Entonces,  $\exists T \in Gl(n, K)$  tal que  $|\lambda_1| = r_K(TMT^{-1})$ . ■

Para ver cómo se pueden utilizar estos resultados en nuestro problema, consideremos el sistema no lineal dado localmente por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 &= x_2 + |x_1 u|^{\frac{1}{2}} & + & |x_2 u|^{\frac{1}{2}} \\ x_2 &= x_3 + |x_2 u|^{\frac{1}{2}} & + & |x_3 u|^{\frac{1}{2}} \\ & & & \\ x_{n-1} &= x_n + |x_{n-1} u|^{\frac{1}{2}} & + & |x_n u|^{\frac{1}{2}} \\ x_n &= x_1 + |x_n u|^{\frac{1}{2}} & + & |x_1 u|^{\frac{1}{2}} \\ y &= x_2 & & \end{cases} \quad (4.51)$$

En este caso, de (3.29), se deduce que

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos ahora

$$\varphi_{(T,\mu)} = \mu T \varphi(x) : O' \rightarrow \mu T(\varphi(O')) \quad (4.52)$$

con  $\mu > 0$ , y  $T \in Gl(n, \mathcal{C})$  cualesquiera; entonces si  $w = \varphi_{(T,\mu)}(x)$   
 $\hat{w} = \varphi_{(T,\mu)}(\hat{x})$ , (4.43) se escribirá

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = TAT^{-1} + \mu T \Theta(\varphi_{(T,\mu)}^{-1}(w(t)), u(t)) \\ y(t) = \mu^{-1} CT^{-1} w(t) \end{cases} \quad (4.53)$$

y (4.44),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}(t) &= TAT^{-1} \hat{w}(t) + \mu T \Theta(\varphi_{(T,\mu)}^{-1}(\hat{w}(t)), u(t)) \\ &+ \mu TK \cdot (y(t) - \mu^{-1} CT^{-1} \hat{w}(t)) \end{aligned} \quad (4.54)$$

con lo que la ecuación del error de observación para este observador modificado quedará:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= T(A - KC)T^{-1} \varepsilon(t) \\ &+ \mu T \left[ \Theta(\varphi_{(T,\mu)}^{-1}(w(t) + \varepsilon(t)), u(t)) - \Theta(\varphi_{(T,\mu)}^{-1}(w(t)), u(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para este ejemplo particular, tendremos

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= T(A - KC)T^{-1} \varepsilon + \mu^{\frac{1}{2}} T \Delta \\ \text{con } \Delta &= \text{col}\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left[ |(T^{-1}(w + \varepsilon))_n|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_n|^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + |(T^{-1}(w + \varepsilon))_1|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_1|^{\frac{1}{2}} \right] |u|^{\frac{1}{2}} \\ \Delta_i &= \left[ |(T^{-1}(w + \varepsilon))_{i+1}|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_{i+1}|^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + |(T^{-1}(w + \varepsilon))_i|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_i|^{\frac{1}{2}} \right] |u|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$2 \leq i \leq n$ . Es evidente, que en un entorno de  $w = 0$ , el Teorema (4.2) no es aplicable, pues las derivadas de  $\Delta$  no son acotadas, y por lo tanto, las

perturbaciones tampoco. Sin embargo, de (4.57) tenemos

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \left[ |(T^{-1}(w))_n + (T^{-1}(\varepsilon))_n|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_n|^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + |(T^{-1}(w))_1 + (T^{-1}(\varepsilon))_1|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_1|^{\frac{1}{2}} \right] |u|^{\frac{1}{2}} \\ \Delta_i &= \left[ |(T^{-1}(w))_{i+1} + (T^{-1}(\varepsilon))_{i+1}|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_{i+1}|^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + |(T^{-1}(w))_i + (T^{-1}(\varepsilon))_i|^{\frac{1}{2}} - |(T^{-1}(w))_i|^{\frac{1}{2}} \right] |u|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}|\Delta_1| &\leq \left[ |(T^{-1}(\varepsilon))_n|^{\frac{1}{2}} + |(T^{-1}(\varepsilon))_1|^{\frac{1}{2}} \right] |u|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\|T^{-1}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} \\ |\Delta_i| &\leq \left[ |(T^{-1}(\varepsilon))_{i+1}|^{\frac{1}{2}} + |(T^{-1}(\varepsilon))_i|^{\frac{1}{2}} \right] |u|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\|T^{-1}(\varepsilon)\|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Pero entonces

$$\|\mu^{\frac{1}{2}} T \Delta\| \leq 2n\mu^{\frac{1}{2}} \|T\| \|T^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon\|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}}$$

y si en particular tomamos, para  $M_1 > 0$  arbitrario

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{M_1}{2n\|T\| \|T^{-1}\|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{sale}$$

$$\|\mu^{\frac{1}{2}} T \Delta\| \leq M_1 \|\varepsilon\|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}}$$

y por lo tanto en este caso el operador  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{(\mu, T, w, u)}$  dado por :

$$\mathcal{P} : \varepsilon \rightarrow \mu T \left[ \Theta(\varphi_{(T, \mu)}^{-1}(w + \varepsilon), u) - \Theta(\varphi_{(T, \mu)}^{-1}(w), u) \right] \quad (4.58)$$

será un operador de  $L^2([t_0, \infty), \mathcal{C}^n)$ , en tanto y en cuanto  $u \in L^2([t_0, \infty), \mathcal{R})$ . Además, en este caso

$$\|\mathcal{P}\| = \inf\{\gamma \in \mathcal{R} : \|\mathcal{P}(y)\|_{L^2} \leq \gamma \|y\|_{L^2}\} \leq M_1 M_U$$

donde ahora  $M_U$  es la cota en  $L^2$ , de la clase de controles admisibles considerados que simbolizaremos con  $\mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^{L^2}$ .

Veremos ahora que la posibilidad de elegir  $T$ , y por lo tanto  $\mu$  tales que la solución de la ecuación de error (4.55) tienda a cero asintóticamente se deriva del siguiente

**Teorema 4.3**

Dado el observador descrito por la ecuación (4.54), con  $\varphi_{(T,\mu)}$  dada por (4.52), si  $\forall T \in Gl(n, \mathcal{C}) \exists \mu = \mu(T) \in \mathcal{R}_{>0}$  tal que el operador  $\mathcal{P}$  definido por (4.58) resulta acotado, independientemente de  $T$ , entonces  $\exists K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tal que el error de observación dado por (4.55) converge asintóticamente a cero.

**Demostración.**

Sea  $\|\mathcal{P}\| = M_1$ , por lo tanto existe  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tal que si

$$\sigma(A - KC) = \{\lambda_n < \dots < \lambda_1 < 0\}$$

entonces  $M_1 < |\lambda_1|$ . Pero de la Proposición 4.2 se vé que  $\exists T^* \in Gl(n, \mathcal{C}) : |\lambda_1| = r_C(T^*(A - KC)(T^*)^{-1})$ . Consideremos esta matriz  $T^*$  y el  $\mu^*$  correspondiente, y denominemos por simplicidad  $\tilde{A}$  a  $T^*(A - KC)(T^*)^{-1}$ .

Sea el operador de convolución  $\mathcal{L}$  de  $L^2([t_0, \infty), \mathcal{C}^n)$  dado por

$$(\mathcal{L}v)(t) = \int_{t_0}^{\infty} e^{\tilde{A}(t-s)}v(s) ds;$$

en [54] se prueba que

$$\|\mathcal{L}\|_{L^2} = \frac{1}{r_C(\tilde{A})}$$

y como de (4.55) se obtiene

$$\varepsilon(t) = e^{\tilde{A}(t-t_0)}\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\mathcal{P}_{(\mu^*, T^*, w(\tau), u(\tau))}(\varepsilon(\tau)) d\tau \quad (4.59)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\|_{L^2} &\leq \|e^{\tilde{A}(\cdot)}\varepsilon(t_0)\|_{L^2} + \|\mathcal{L}\|_{L^2}\|\mathcal{P}\| \|\varepsilon\|_{L^2} \\ &= \|e^{\tilde{A}(\cdot)}\varepsilon(t_0)\|_{L^2} + \frac{M_1}{|\lambda_1|}\|\varepsilon\|_{L^2} \\ &= \|e^{\tilde{A}(\cdot)}\varepsilon(t_0)\|_{L^2} + \alpha\|\varepsilon\|_{L^2} \end{aligned}$$

con  $\alpha = \frac{M_1}{|\lambda_1|} < 1$ .

Pero como  $\tilde{A}$  es estable

$$\|\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{1}{1-\alpha} \|e^{\tilde{A}(\cdot)} \varepsilon(t_0)\|_{L^2} < \infty.$$

Veamos ahora que  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  : como

$$\|e^{\tilde{A}(t-t_0)} \varepsilon(t_0)\| \leq M e^{\lambda_1(t-t_0)} \|\varepsilon(t_0)\|$$

con  $M > 0$  fijo, el primer término de (4.59) tiende a cero. Consideremos el segundo término, escribiendo por simplicidad

$$\mathcal{P}(\mu^*, T^*, w(t), u(t))(\varepsilon(t)) = \delta(t)$$

se tiene que  $\delta(\cdot) \in L^2([t_0, \infty), \mathcal{C}^n)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{t_0}^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{\frac{t}{2}} e^{\tilde{A}(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau \\ &= \int_{\frac{t}{2}}^{t-t_0} e^{\tilde{A}\tau} \delta(t-\tau) d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que  $t > 2t_0$ , con lo que

$$\|\phi(t)\| \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t-t_0} \|e^{\tilde{A}\tau}\| \|\delta(t-\tau)\| d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \|e^{\tilde{A}(t-\tau)}\| \|\delta(\tau)\| d\tau$$

y por la desigualdad de Schwartz en  $L^2$ , se tiene

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\| &\leq \left[ \int_{\frac{t}{2}}^{t-t_0} \|e^{\tilde{A}\tau}\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\frac{t}{2}}^{t-t_0} \|\delta(t-\tau)\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left[ \int_{\frac{t}{2}}^t \|e^{\tilde{A}(t-\tau)}\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\frac{t}{2}}^t \|\delta(\tau)\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[ \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \|e^{\tilde{A}\tau}\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \|\delta\|_{L^2} \\ &+ \left[ \int_0^{\infty} \|e^{\tilde{A}\tau}\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \|\delta(\tau)\|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pero  $\|e^{\hat{A}(\cdot)}\|, \|\delta(\cdot)\| \in L^2([t_0, \infty), \mathcal{R})$ , y como para toda  $f \in L^2([t_0, \infty), \mathcal{R})$ , vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty |f(\tau)|^2 d\tau = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = 0.$$

■

### Observación 4.3

De lo anterior se observa que es posible obtener para los sistemas observables - c generales, convergencia asintótica considerando en la clase de controles admisibles aquellos que son acotados en norma  $L^2$ , y no en valor absoluto, bajo la hipótesis de que un cambio adecuado del modelo inicial del observador, vía  $T^*$  conduzca a un operador  $\mathcal{P}$  adecuado.

## 4.3 La convergencia del observador completo a lazo cerrado

Trataremos en este apartado la convergencia del observador completo a lazo cerrado para un sistema no lineal de control, cuando el objetivo del control de tal sistema sea

- El seguimiento de una trayectoria arbitraria en el espacio de salida.
- El seguimiento del comportamiento entrada - salida de un sistema modelo dado, el *modelo de referencia*, de comportamiento más simple que el sistema original y por lo tanto más fácil de controlar.

Ahora bien, se puede ver (Cfr.[25], [31]) que los sistemas observables-c para los cuales es posible diseñar controles que cumplan con estos objetivos, aún conociendo **exactamente** los estados del sistema, son aquellos para los que se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.2. Por ello, de aquí en más supondremos que trataremos con un sistema de esas características.

### 4.3.1 La convergencia en el seguimiento de trayectorias

Consideremos un sistema con  $m$  entradas y  $l$  salidas; de acuerdo a (4.2) tendremos

$$\begin{cases} \dot{w}_1^i &= w_2^i \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i &= w_{\rho_i}^i \\ \dot{w}_{\rho_i}^i &= \gamma^i(\varphi^{-1}(w), u) = L_{f(\varphi^{-1}(w), u)}^{\rho_i} h_i(\varphi^{-1}(w)) \end{cases} \quad (4.60)$$

$\forall 1 \leq i \leq l$ ,  $(w, u) \in \varphi(O') \times U'$ , entorno de  $(w_0, u_0) = (\varphi(x_0), u_0)$ .

Además, de acuerdo con la hipótesis 2. de la Proposición 3.2, si  $\Gamma = \text{col}\{\gamma^1, \dots, \gamma^l\}$ ,

$$\text{rango matriz } \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(x_0, u_0) \right\} = l. \quad (4.61)$$

Sea ahora la trayectoria a seguir

$$y_d(t) = \text{col}\{y_{d1}(t), \dots, y_{dl}(t)\}, \quad t \geq t_0 \quad (4.62)$$

tal que  $\tilde{Y}_d = \{y_{di}^{(j)}, 0 \leq j \leq \rho_i, 1 \leq i \leq l, t \geq t_0\}$  está definido.

Si se tiene acceso a todos los estados del sistema, tomando de acuerdo a [25], [31],

$$v_i = y_{di}^{(\rho_i)} - \sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} (w_j^i - y_{di}^{(j-1)}) \quad (4.63)$$

$1 \leq i \leq l$  con  $g_{ij} \in \mathcal{R}$  arbitrarias y suponiendo que existe  $u^*$  tal que

$$v_i = \gamma^i(\varphi^{-1}(w), u^*) \quad \forall 1 \leq i \leq l, \quad (4.64)$$

reemplazando en (4.60) se tendrá :

$$\begin{cases} \dot{w}_1^i &= w_2^i \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i &= w_{\rho_i}^i \\ \dot{w}_{\rho_i}^i &= y_{di}^{(\rho_i)} - \sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} (w_j^i - y_{di}^{(j-1)}) \end{cases} \quad (4.65)$$

$1 \leq i \leq l$ . Si llamamos  $\delta_1^i = w_1^i - y_{d_i}$  al  $i$ -ésimo error de seguimiento, tendremos que

$$\begin{aligned} \delta_2^i &= \delta_1^i &= w_1^i - y_{d_i}^{(1)} &= w_2^i - y_{d_i}^{(1)} \\ \delta_3^i &= \delta_2^i &= w_2^i - y_{d_i}^{(2)} &= w_3^i - y_{d_i}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\delta_{\rho_i}^i = \delta_{\rho_i-1}^i = w_{\rho_i-1}^i - y_{d_i}^{(\rho_i-1)} = w_{\rho_i}^i - y_{d_i}^{(\rho_i-1)}$$

Como se tiene que  $\delta_j^i = \delta_1^{i(j-1)}$   $1 \leq j \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , de (4.65) tendremos

$$\begin{cases} \delta_1^i &= \delta_2^i \\ \delta_{\rho_i-1}^i &= \delta_{\rho_i}^i \\ \delta_{\rho_i}^i &= -\sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} \delta_j^i = -\sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} (\delta_1^i)^{(j-1)} \end{cases} \quad (4.67)$$

$1 \leq i \leq l$ . Y si  $\delta^i = \text{col}\{\delta_1^i, \dots, \delta_{\rho_i}^i\}$ , se tendrá

$$\delta^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g_{i1} & -g_{i2} & -g_{i3} & -g_{i\rho_i} \end{bmatrix} \delta^i = \Sigma_1^i \delta^i \quad (4.68)$$

$\forall 1 \leq i \leq l$ , y como las matrices  $\Sigma_1^i$  están dadas en forma *companion*, una adecuada elección de los  $g_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , hará que los errores  $\delta^i$  converjan a cero, independientemente de sus valores iniciales, es decir, se seguirá la trayectoria deseada con error decreciente exponencialmente, y con la velocidad deseada.

Para verificar la existencia de  $u^*$  en (4.64), consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: \varphi(O') \times U' \times \mathcal{R}^{n+l} \times \mathcal{R}^{nl} \rightarrow \mathcal{R}^l \\ \mathcal{F}(w, u, \tilde{Y}_d, \tilde{G}) &= \Gamma(\varphi^{-1}(w), u) - v \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v &= \text{col}\{v_1, \dots, v_l\} \\ \tilde{G} &= \{g_{11}, \dots, g_{1\rho_1}, \dots, g_{l\rho_l}\}. \end{aligned}$$



Si

$$\begin{aligned} w_0 &= \varphi(x_0) \\ \tilde{Y}_d^0 &= \{0, \dots, 0, \gamma^1(\varphi^{-1}(w_0), u_0), \dots, 0, \dots, 0, \gamma^l(\varphi^{-1}(w_0), u_0)\} \end{aligned}$$

entonces, de (4.61)

$$\begin{aligned} \text{rango matriz } \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(w_0, u_0, \tilde{Y}_d^0, 0) \right\} &= \text{rango } (\tilde{\mathcal{F}}) = l \quad y \\ \mathcal{F}(w_0, u_0, \tilde{Y}_d^0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las  $l$  últimas columnas de la matriz  $\tilde{\mathcal{F}}$  son linealmente independientes, y fijando  $u_i^* = u_{0i}$   $1 \leq i \leq m-l$ , tendremos por el teorema de la función implícita que existen  $O'' \subset \varphi(O')$ ,  $U'' \subset U'$ ,  $A_1$  entorno de  $\tilde{Y}_d^0$  en  $\mathcal{R}^{n+l}$ ,  $A_2$  entorno de  $0 \in \mathcal{R}^{nl}$ , y una única función  $C^\infty$

$$\begin{aligned} \Omega : O'' \times A_1 \times A_2 &\rightarrow U'' \quad \text{tal que} \\ \mathcal{F}(w, \Omega(w, \tilde{Y}_d, \tilde{G}), \tilde{Y}_d, \tilde{G}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

donde  $\Omega_i = u_{0i}$   $1 \leq i \leq m-l$ , es decir que existe

$$\begin{aligned} u^* &= \Omega(w, \tilde{Y}_d, \tilde{G}) : \\ \gamma^i(\varphi^{-1}(w), u^*) &= v_i \quad \forall 1 \leq i \leq l \end{aligned}$$

en el dominio antedicho.

#### Observación 4.4

El resultado anterior exhibe la limitación en las trayectorias a seguir, (aquellas tales que  $Y_d \in A_1$ ), y la de la velocidad de convergencia del error, dada por  $\tilde{G}$ , y por lo tanto restringida a  $A_2$ .

En lo sucesivo, supondremos la validez de ambas sin notarlo explícitamente dado que un cómputo exacto de las mismas sólo es posible en los casos particulares. Asimismo, por simplicidad, supondremos que  $\varphi^{-1}(O'') = O'$ ,  $U'' = U'$ , y notaremos  $\Omega = \Omega(w)$ , sin hacer, a menos que sea necesario, mención explícita de su dependencia respecto de  $Y_d$  y  $\tilde{G}$ .

Supongamos ahora que no disponemos de los estados del sistema, sino de sus estimaciones por el observador completo. En este caso, para determinar los controles  $v_i$  en (4.63), y por ende  $u^*$  en (4.64), lo natural es tomar:

$$v_i = y_{di}^{(\rho_i)} - \sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} (\hat{w}_j^i - y_{di}^{(j-1)}) \quad (4.69)$$

$1 \leq i \leq l, y$

$$u^* = \Omega(\hat{w}). \quad (4.70)$$

De (4.69), identificando de ahora en más  $\tilde{G}$  con la matriz

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{1\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{21} & g_{2\rho_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{l1} & g_{l\rho_l} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

y notando

$$Y_d = \text{col}\{y_{d1}, \dots, y_{d1}^{(\rho_1-1)}, \dots, y_{dl}, \dots, y_{dl}^{(\rho_l-1)}\} \quad (4.72)$$

tendremos

$$v = \begin{bmatrix} y_{d1}^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_{dl}^{(\rho_l)} \end{bmatrix} - \tilde{G}(\hat{w} - Y_d) \quad (4.73)$$

y resolviendo (4.64) en este caso, es decir obteniendo  $u = \Omega(\hat{w})$ , y reemplazando este control en (4.60) y su similar para el observador, tendremos

$$\begin{cases} \dot{w}_1^i & = w_2^i \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i & = w_{\rho_i}^i \\ \dot{w}_{\rho_i}^i & = \gamma^i(\varphi^{-1}(w), \Omega(\hat{w})) \\ y_i & = w_1^i \end{cases} \quad (4.74)$$

$1 \leq i \leq l,$

$$\begin{cases} \dot{\hat{w}}_1^i & = -k_1^i \hat{w}_1^i + \hat{w}_2^i + k_1^i y_i \\ \dots & \dots \\ \dot{\hat{w}}_{\rho_i-1}^i & = -k_{\rho_i-1}^i \hat{w}_1^i + \hat{w}_{\rho_i}^i + k_{\rho_i-1}^i y_i \\ \dot{\hat{w}}_{\rho_i}^i & = -k_{\rho_i}^i \hat{w}_1^i + \gamma^i(\varphi^{-1}(\hat{w}), \Omega(\hat{w})) + k_{\rho_i}^i y_i \end{cases} \quad (4.75)$$



$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

donde  $B$  viene dada por (3.34), y consideramos

$$\mu = \text{col}\{\delta^1, \dots, \delta^l, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^l\} = \text{col}\{\delta, \varepsilon\}$$

el error del sistema a lazo cerrado, tendremos que

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= \Sigma \cdot \mu(t) \\ &+ \tilde{B} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(\hat{w}(t))) - \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(w(t))) \\ \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), \Omega(\hat{w}(t))) - \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(\hat{w}(t))) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.84)$$

es su dinámica.

Podemos ahora establecer la convergencia a lazo cerrado del observador, es decir, la convergencia a cero de  $\mu$ , con velocidad arbitraria de convergencia:

#### Teorema 4.4

Supongamos que

1.  $\varphi^{-1}$  es uniformemente Lipschitz de constante  $m_{\varphi^{-1}}$  en  $\varphi(O')$ ,
2. existe  $\nabla : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$  que transforma acotados en acotados, tal que

$$\|\Gamma(x_1, \Omega(\varphi(x_2), \tilde{G})) - \Gamma(x_1, \Omega(\varphi(x_1), \tilde{G}))\| \leq \nabla(\|\tilde{G}\|) \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|$$

$$\forall x_1, x_2 \in O',$$

3.  $\Gamma$  cumple :

$$\|\Gamma(x_2, \Omega(\varphi(x_2), \tilde{G})) - \Gamma(x_1, \Omega(\varphi(x_2), \tilde{G}))\| \leq m_{\Gamma}(\|\tilde{G}\|) \|x_1 - x_2\|$$

$$\forall x_1, x_2 \in O', \tilde{G} \in \mathcal{R}^{l \times n}.$$

Entonces, dado  $\alpha > 0$  arbitrario, existen matrices  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$ ,  $\tilde{G} \in \mathcal{R}^{l \times n}$  tales que

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(t) - w(t)\| &\leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ \|y(t) - y_d(t)\| &\leq \delta_2 \|y(t_0) - y_d(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$ , con  $\delta_1, \delta_2$  constantes;

4. si además  $\varphi$  es uniformemente de Lipschitz con constante  $m_\varphi$  en  $O'$

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_3 \|\hat{x}_0 - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$\forall t \geq t_0$ ,  $\hat{x}_0 = \varphi^{-1}(\hat{w}(t_0))$  y  $\delta_3$  constante.

Es decir, el observador completo converge a lazo cerrado en forma exponencial con velocidad de convergencia arbitraria, para el seguimiento de trayectorias.

### Demostración

De la ecuación (4.84), tenemos los dos sistemas siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \Sigma_1 \delta(t) + B \left[ \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(\hat{w}(t), \tilde{G})) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(w(t), \tilde{G})) \right] \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \Sigma_2 \varepsilon(t) + B \left[ \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), \Omega(\hat{w}(t), \tilde{G})) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(\hat{w}(t), \tilde{G})) \right] \end{aligned} \quad (4.86)$$

Pero  $\sigma(\Sigma_1) = \cup \sigma(\Sigma_1^i)$  y por lo tanto se podrá fijar a voluntad eligiendo convenientemente los  $g_{ij}$ , dado que las matrices  $\Sigma_1^i$  son *companion*; por lo tanto existe una matriz  $\tilde{G}^* \in \mathcal{R}^{l \times n}$  tal que

$$\sigma(\Sigma_1) = \{\lambda_{l\rho_1} < \dots < \lambda_{l1} < \dots < \lambda_{1\rho_1} < \dots < \lambda_{11} = -\alpha < 0\}.$$

Consideremos esta matriz fija, y simbolicemos con  $\Sigma_1^*$  la matriz correspondiente dada por (4.80). De las hipótesis 1. y 3. se deduce

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}), \Omega(\hat{w}, \tilde{G}^*)) - \Gamma(\varphi^{-1}(w), \Omega(\hat{w}, \tilde{G}^*))\| &\leq \\ m_{\varphi^{-1}} m_\Gamma (\|\tilde{G}^*\|) \|\hat{w} - w\| \end{aligned}$$

y por lo tanto, para (4.86), vale lo expuesto en el Teorema 4.1 con lo que, dado

$$\beta > \alpha \quad (4.87)$$

arbitrario pero fijo, existirá  $K^* \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tal que

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(t) - w(t)\| &\leq \hat{\delta}_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)} \\ &\leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Pero, de (4.85) se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= e^{\Sigma_1^*(t-t_0)}\delta(t_0) \\
&+ \int_{t_0}^t e^{\Sigma_1^*(t-\tau)} B \left[ \Gamma(\varphi^{-1}(w(\tau)), \Omega(\hat{w}(\tau), \tilde{G}^*)) \right. \\
&- \left. \Gamma(\varphi^{-1}(w(\tau)), \Omega(w(\tau), \tilde{G}^*)) \right] d\tau \quad \Rightarrow \\
\|\delta(t)\| &\leq e^{-\alpha(t-t_0)} M_1 \|\delta(t_0)\| \\
&+ \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} M_1 \|B\| \nabla(\|\tilde{G}^*\|) \|\hat{w}(\tau) - w(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

y de (4.88), dado que  $\|B\| = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\|\delta(t)\| &\leq e^{-\alpha(t-t_0)} M_1 \|\delta(t_0)\| & (4.89) \\
&+ M_1 \nabla(\|\tilde{G}^*\|) \hat{\delta}_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \\
&= e^{-\alpha(t-t_0)} M_1 \|\delta(t_0)\| \\
&+ M_1 M_2 \left(1 - e^{-(\beta-\alpha)(t-t_0)}\right) e^{-\alpha(t-t_0)} & (4.90)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\delta(t)\| \leq \delta_2 \|y(t_0) - y_d(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{\nabla(\|\tilde{G}^*\|) \hat{\delta}_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\|}{\beta - \alpha} \quad y \\
\delta_2 &= M_1 \left(1 + \frac{M_2}{\|\delta(t_0)\|}\right)
\end{aligned}$$

donde hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que  $\|\delta(t_0)\| \neq 0$ . La demostración de la última afirmación del teorema es igual a la dada en el Teorema 4.1 y la omitimos. ■

#### Observación 4.5

1. Las hipótesis 2. y 3. del teorema establecen una especie de *Principio de Separabilidad*, (Cfr.[56], [57]) para el sistema a lazo cerrado. En efecto, la hipótesis 3. y las estructuras de las ecuaciones (4.85) y (4.86) marcan la independencia de la dinámica del observador respecto de la

selección de la matriz  $\tilde{G}$ , salvo la desigualdad (4.87), natural por otra parte en toda estrategia de control que involucra observadores, a saber: la dinámica del observador ha de ser más rápida que la del controlador.

La hipótesis 2. junto con (4.85) y (4.86) establecen esencialmente la posibilidad de fijar la dinámica del controlador según las exigencias externas ( $\alpha$ ), independientemente del observador.

2. Es fácil ver que los sistemas analíticos con grado relativo global que cumplen con la hipótesis 3. de la Proposición 3.2, tales que la matriz de desacople  $A$  depende sólo de las salidas  $\{y_1, \dots, y_l\}$ , y las otras no linealidades de la *forma normal* (Cfr.[25],[29]) son uniformemente Lipschitz, cumplen con las hipótesis del teorema.

Para dar un resultado similar al Corolario 4.1, debemos especificar las clases de trayectorias a seguir. Con precisión, consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^r = \{ & y_d \in C^{r_1}([t_0, \infty), \mathcal{R}) \times \dots \times C^{r_l}([t_0, \infty), \mathcal{R}) \\ & \|Y_d(t) - \varphi(x_0)\| < r \ \forall t \geq t_0 \} \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde  $y_d$  e  $Y_d$  vienen dados por (4.62) y (4.72) respectivamente. Vale entonces el siguiente:

#### Corolario 4.3

Dados  $\alpha, r_1$  reales positivos arbitrarios, e  $y_d \in \mathcal{T}^{r_1}$ , existen matrices  $K^* \in \mathcal{R}^{n \times l}$  y  $\tilde{G}^* \in \mathcal{R}^{l \times n}$ , y un número positivo  $\epsilon_0(\alpha, r_1)$ , tales que si  $y(t)$  es la salida del sistema no lineal a lazo cerrado correspondiente a la solución  $x(t)$  de (3.12), con condición inicial  $x(t_0) \in \varphi^{-1}(B(Y_d(t_0), \epsilon_0))$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(t) - w(t)\| &\leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ \|y(t) - y_d(t)\| &\leq \delta_2 \|y(t_0) - y_d(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$ , con  $\delta_1, \delta_2$  constantes. En otras palabras, el observador converge a lazo cerrado en el seguimiento de la trayectoria  $y_d$ , y este seguimiento se hace con decrecimiento exponencial del error.

#### Demostración

Dado  $\alpha$ , sea como en el Teorema 4.4  $\tilde{G}^*$  la matriz correspondiente, y consideremos

$$L_1 = \max \left\{ \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \Big|_{(\varphi^{-1}(p), \Omega(q, \tilde{G}^*))} \right\|, p, q \in \overline{B(\varphi(x_0), 3r_1)} \right\}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\|\tilde{G}^*\|) &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \Big|_{(\varphi^{-1}(p), \Omega(q, \tilde{G}^*))} \right\| \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial w} \Big|_{(q, \tilde{G}^*)} \right\| \\ &\quad p, q \in \overline{B(\varphi(x_0), 3r_1)} \right\} \\ m_{\varphi^{-1}} &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w} \Big|_p \right\|, p \in \overline{B(\varphi(x_0), 3r_1)} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, como en el Teorema 4.1, existe  $K^* \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tal que

$$-\lambda_{11}^* + \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \sqrt{\rho_1} m_{\varphi^{-1}} L_1 = -(\alpha + 1).$$

Sean

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_1(\lambda^*) &= \|\Lambda^{-1}(\lambda^*)\| \|\Lambda(\lambda^*)\| > 1 \quad y \\ \epsilon_0 &= \frac{r_1}{M_1(1 + \nabla(\|\tilde{G}^*\|)\bar{\delta}_1(\lambda^*))} < r_1, \end{aligned}$$

donde  $\Lambda$  viene dado por el Teorema 4.1 y  $M_1$  por el Teorema 4.4.

Como  $\hat{w}(t_0)$  es arbitrario, podemos tomarlo como:

$$\hat{w}(t_0) = Y_d(t_0).$$

Si suponemos que  $x(t_0)$  cumple con las condiciones de la hipótesis, tendremos que

$$\begin{aligned} \|w(t_0) - \varphi(x_0)\| &\leq \|w(t_0) - Y_d(t_0)\| + \|Y_d(t_0) - \varphi(x_0)\| \\ &< \epsilon_0 + r_1 < 2r_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto por la continuidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, existe  $t^* > t_0$  tal que

$$\begin{aligned} w(t) &\in B(\varphi(x_0), 2r_1) \quad \forall t_0 \leq t < t^* \\ \hat{w}(t) &\in B(\varphi(x_0), 3r_1) \quad \forall t_0 \leq t < t^*, \end{aligned}$$

y por lo tanto, como por el teorema del valor medio allí se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}(t)), \Omega(\hat{w}(t), \tilde{G}^*)) - \Gamma(\varphi^{-1}(w(t)), \Omega(\hat{w}(t), \tilde{G}^*)) &= \\ &= \left[ \frac{\partial \Gamma(\varphi^{-1}(p), \Omega(\hat{w}(t), \tilde{G}^*))}{\partial x} \Big|_{p=p(t)} \right] \epsilon(t) \end{aligned}$$



con  $p(t) = \mu(t)w(t) + (1 - \mu(t))\hat{w}(t)$ ,  $0 < \mu(t) < 1$ , de (4.86) se deduce como en el Teorema 4.1,

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \Lambda^{-1}(\lambda^*)e^{-\Delta(t-t_0)}\Lambda(\lambda^*)\varepsilon(t_0) + \\ &\int_{t_0}^t \Lambda^{-1}(\lambda^*)e^{-\Delta(t-\tau)}\Lambda(\lambda^*)B \left[ \frac{\partial \Gamma(\varphi^{-1}(p), \Omega(\hat{w}(\tau), \tilde{G}^*)}{\partial x} \Big|_{p=p(\tau)} \right] \varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned}$$

con lo que

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \bar{\delta}_1(\lambda^*)e^{-(\alpha+1)(t-t_0)}\|\varepsilon(t_0)\| < r_1. \quad (4.92)$$

$\forall t_0 \leq t < t^*$ . Pero entonces, al igual que en el Corolario 4.1,

$$\|\varepsilon(t^*)\| < r_1$$

con lo que

$$\|\hat{w}(t^*) - \varphi(x_0)\| \leq \|w(t^*) - \varphi(x_0)\| + \|\varepsilon(t^*)\| < 2r_1 + r_1 = 3r_1.$$

Además, de (4.89)

$$\|\delta(t)\| \leq M_1 \left( \|\delta(t_0)\| + \nabla(\|\tilde{G}^*\|)\bar{\delta}_1(\lambda^*)\|\varepsilon(t_0)\| \right) e^{-\alpha(t-t_0)},$$

y como  $\|\delta(t_0)\| = \|\varepsilon(t_0)\|$ ,

$$\begin{aligned} \|\delta(t)\| &\leq M_1\|\varepsilon(t_0)\| \left( 1 + \nabla(\|\tilde{G}^*\|)\bar{\delta}_1(\lambda^*) \right) e^{-\alpha(t-t_0)} \\ &< r_1 e^{-\alpha(t-t_0)} < r_1 \end{aligned} \quad (4.93)$$

$\forall t_0 \leq t < t^*$ , con lo que

$$\|\delta(t^*)\| < r_1.$$

Pero entonces,

$$\|w(t^*) - \varphi(x_0)\| \leq \|Y_d(t^*) - \varphi(x_0)\| + \|\delta(t^*)\| < r_1 + r_1 = 2r_1$$

y por lo tanto existe  $t^{**} > t^*$  tal que (4.92) y (4.93) se cumplen  $\forall t_0 \leq t \leq t^{**}$ , de lo cual se deduce que estas ecuaciones valen  $\forall t \geq t_0$ .

■

**Observación 4.6**

1.  $\bar{\delta}_1(\lambda^*)$  crece con  $r_1$ , y por ello no debe esperarse sin más un crecimiento de  $\epsilon_0$  aumentando  $r_1$ , es decir permitiendo trayectorias de mayor excursión.
2. Asimismo,  $M_1$ , (y eventualmente  $\nabla(\|\tilde{G}^*\|)$ ) aumenta al crecer  $\alpha$ , y por lo tanto, una mayor velocidad de convergencia disminuirá la tolerancia al error inicial, o el conjunto de trayectorias a seguir admisibles.
3. Se verá posteriormente que los resultados de esta sección son aplicables directamente al caso de manipuladores robóticos de juntas rígidas.

### 4.3.2 La convergencia en el seguimiento de modelos

El objetivo esencial en el seguimiento de modelos es establecer leyes de control que permitan que un sistema no lineal con salidas siga el comportamiento entrada - salida de otro sistema, el modelo, de estructura considerablemente más simple que el original, (y por lo tanto más fácil de controlar), o que tiene características especiales que lo hacen atractivo para la emulación por parte del sistema original. Si bien es posible establecer condiciones para que un sistema no lineal con salidas, como el dado por la Definición 2.4 siga un sistema modelo dado también así definido (Cfr.[31]), ya que trataremos con sistemas que cumplen con las hipótesis de la Proposición 3.2, plantearemos el problema del seguimiento de modelos (local) en los siguientes términos:

#### Definición 4.2

Dado un sistema *analítico*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} f & \quad O' \times U' \rightarrow \mathcal{R}^n, f \in C^\omega \\ h & \quad O' \rightarrow \mathcal{R}^m, h \in C^\omega \end{aligned}$$

donde  $O' \times U' \subset \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$  es, como antes un entorno de  $(x_0, u_0)$ , y un sistema modelo también analítico a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = f_M(\zeta, \omega) \\ y_M = h_M(\zeta) \end{cases} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} f_M & O'' \times U'' \rightarrow \mathcal{R}^{n_M}, f_M \in C^\omega \\ h_M & O'' \rightarrow \mathcal{R}^m, h_M \in C^\omega \end{aligned}$$

donde  $O'' \times U'' \subset \mathcal{R}^{n_M} \times \mathcal{R}^{m_M}$ , es un entorno de  $(\zeta_0, \omega_0)$ , el problema de seguimiento local de modelos consiste en encontrar una función analítica  $\alpha : O_1 \times O_2 \times O_3 \rightarrow U'$ , con  $O_1 \times O_2 \times O_3 \subset O' \times O'' \times U''$  entorno de  $(x_0, \zeta_0, \omega_0)$ , tal que si  $\tilde{y}(t, x_0)$  es la solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), \alpha(x(t), \zeta(t), \omega(t))) \\ y(t) &= h(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.96)$$

con  $\omega(t)$  control exterior admisible y  $\zeta(t)$  dada por el sistema

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) &= f_M(\zeta(t), \omega(t)) \\ y_M &= h_M(\zeta) \\ \zeta(t_0) &= \zeta_0 \\ \omega(t_0) &= \omega_0 \end{cases} \quad (4.97)$$

de salida simbolizada por  $y_M(t, \zeta_0, \omega_0)$ , entonces  $\tilde{y}(t, x_0) - y_M(t, \zeta_0, \omega_0)$  es independiente de  $\omega(t) \forall t \geq t_0$ .

Para los sistemas lineales analíticos, se establecieron condiciones para la solución del problema de seguimiento de modelos, en términos de *sistemas extendidos y estructuras de infinito*, en [59] y [31]. En el caso particular en que además el modelo es *lineal*, se solucionó el problema, en términos de *dinámica de los ceros y desacople de perturbaciones*, en [58], [31]. En todos estos casos se exhiben cómputos explícitos de  $\alpha$ .

Para sistemas no lineales como los de la definición anterior, si bien en [31] se obtienen condiciones para la resolución del problema, no se exhibe ningún método para la obtención de  $\alpha$ . En lo que sigue, y basándonos en el *desacople de perturbaciones*, obtendremos para los sistemas (4.94) y (4.95)  $\alpha$  explícitamente.

#### Definición 4.3 ([31])

Dado el sistema no lineal analítico

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u, q) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} f & O' \times U' \times Q \rightarrow \mathcal{R}^n, f \in C^\omega \\ h & O' \rightarrow \mathcal{R}^m, h \in C^\omega \end{aligned}$$

donde  $q \in \mathcal{R}^m$  se considera una perturbación, el problema del desacople local de perturbaciones consiste en encontrar localmente una función analítica  $\alpha : O'_1 \times O'_2 \rightarrow U'$ , con  $O'_1 \times O'_2 \subset O' \times U'$  entorno de  $(x_0, u_0)$ , tal que en el sistema transformado de (4.98)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), \alpha(x(t), v(t)), q(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.99)$$

la salida  $y(t)$  sea independiente de  $q(t) \forall t \geq t_0$ , donde  $v(t)$  es el control exterior.

Si se puede medir las perturbaciones, entonces la función analítica que se busca es  $\alpha : O'_1 \times O'_2 \times O'_3 \rightarrow U'$ , con  $O'_1 \times O'_2 \times O'_3 \subset O' \times U' \times Q$  entorno de  $(x_0, u_0, q_0)$ , tal que en el sistema transformado de (4.98)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), \alpha(x(t), v(t), q(t)), q(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \\ q(t_0) &= q_0 \end{cases} \quad (4.100)$$

la salida  $y(t)$  sea independiente de  $q(t) \forall t \geq t_0$ .

### Proposición 4.3

Consideremos el sistema (4.98), tal que en un entorno  $O_1 \times O_2 \times O_3$  de  $(x_0, u_0, q_0)$  se cumplan:

1.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(x,u,q)}^k h_i(x) = 0$$

$$0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m,$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial q_j} L_{f(x,u,q)}^k h_i(x) = 0$$

$$0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m,$$

3. dada

$$A(x, u, q) = \text{matriz} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(x, u, q)}^{\rho_i} h_i(x), 1 \leq i, j \leq m \right\},$$

$$\text{rango} A(x_0, u_0, q_0) = m,$$

entonces el problema de desacople local de perturbaciones tiene solución local.

### Demostración

De 1. y 2. se ve que las funciones  $L_{f(x, u, q)} h_i(x)$  dependen sólo de  $x$  en un entorno de  $(x_0, u_0, q_0)$   $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Consideremos la codistribución regular

$$\Omega = \text{span} \left\{ dh_1, dL_f h_1, \dots, dL_f^{\rho_1 - 2} h_1, \dots, dh_M, \dots, dL_f^{\rho_M - 2} h_M \right\}$$

y los campos vectoriales en  $\mathcal{R}^n$  paramétricos en  $u, q$  dados localmente por

$$\chi_j(\cdot, u, q) = \frac{\partial f}{\partial q_j}(\cdot, u, q) \quad 1 \leq j \leq m,$$

donde por abuso de notación identificamos un campo en  $\mathcal{R}^n$  con sus componentes en la carta canónica. Entonces, la hipótesis 2. indica que

$$\chi_j(x, u, q) \in \Omega(x)^\perp \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.101)$$

Consideremos  $O'_1 \times O'_2 \times O'_3$  entorno de  $(x_0, u_0, q_0)$  contenido en  $O_1 \times O_2 \times O_3$  a determinar, y supongamos que existe  $\alpha : O'_1 \times O'_2 \times O'_3 \rightarrow O'_2 \in \mathcal{C}^\omega$ , con  $\alpha(x_0, v_0, q_0) = u_0, v_0 \in O'_2$  arbitrario. Sea  $y(t)$  la salida de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), \alpha(x(t), v(t), q(t)), q(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \\ q(t_0) &= q_0 \end{cases}$$

con  $v(t_0) = v_0$ , y  $v(t) \in O'_2, x(t) \in O'_1 \forall t \geq t_0$ . Supondremos además que  $q(t) \in O'_3 \forall t \geq t_0$ . Entonces, por la hipótesis 2.,

$$\frac{\partial}{\partial q_j} y_i = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}(x) = 0,$$

y por la hipótesis 1. y (4.101), se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_i &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) f(x, \alpha(x, v, q), q) \Rightarrow \\
 \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{y}_i &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) f(x, \alpha(x, v, q), q) \right] \\
 &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) \frac{\partial}{\partial q_j} f(x, \alpha(x, v, q), q) \\
 &= \frac{\partial h_i}{\partial x}(x) [\chi_j(x, \alpha(x, v, q), q) \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(x, \alpha(x, v, q), q) \frac{\partial \alpha}{\partial q_j}(x, v, q)] \\
 &= 0 \quad 1 \leq j \leq l.
 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial q_j}(x) = 0 \quad 2 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq j \leq m.$$

Además

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial q_j} y_i^{(\rho_i)} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial x} L_f^{\rho_i-1} h_i(x) \right] f(x, \alpha(x, v, q), q) \right] \\
 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} L_f^{\rho_i-1} h_i(x) \right] [\chi_j(x, \alpha(x, v, q), q) \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(x, \alpha(x, v, q), q) \frac{\partial \alpha}{\partial q_j}(x, v, q)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} L_{f(x, \alpha(x, v, q), q)}^{\rho_i} h_i(x) \frac{\partial \alpha}{\partial q_j}(x, v, q) \\
 &\quad + L_{\chi_j(x, \alpha(x, v, q), q)} L_{f(x, \alpha(x, v, q), q)}^{\rho_i-1} h_i(x) \\
 &= A_i(x, \alpha(x, v, q), q) \frac{\partial \alpha}{\partial q_j}(x, v, q) \\
 &\quad + L_{\chi_j(x, \alpha(x, v, q), q)} L_{f(x, \alpha(x, v, q), q)}^{\rho_i-1} h_i(x) \quad (4.102)
 \end{aligned}$$

$1 \leq i, j \leq m$  con  $A_i$  la  $i$ -ésima fila de  $A$ .

Si pretendemos que la salida sea independiente de  $q$ , necesariamente ha de cumplirse en (4.102)  $\frac{\partial}{\partial q_j} y_i^{(\rho_i)}(t) = 0$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $\forall t \geq t_0$ ,

por lo que

$$A_i(x, \alpha(x, v, q), q)(t) \frac{\partial \alpha}{\partial q_j}(x, v, q) \\ + L_{\chi_j}(x, \alpha(x, v, q), q) L_{f(x, \alpha(x, v, q), q)}^{\rho_i - 1} h_i(x)(t) = 0$$

$1 \leq i, j \leq m, \forall t \geq t_0$ . Si

$$B_{ij}(x, \alpha(x, v, q), q) = L_{\chi_j}(x, \alpha(x, v, q), q) L_{f(x, \alpha(x, v, q), q)}^{\rho_i - 1} h_i(x)$$

$1 \leq i, j \leq m$ , debe cumplirse

$$A(x, \alpha(x, v, q), q)(t) \frac{\partial \alpha}{\partial q}(x, v, q)(t) \\ + B(x, \alpha(x, v, q), q)(t) = 0 \quad (4.103)$$

$\forall t \geq t_0$ .

Pero

$$A(x_0, \alpha(x_0, v_0, q_0), q_0) = A(x_0, u_0, q_0)$$

es inversible, y por lo tanto en un entorno de  $(x_0, v_0, q_0)$  también lo será, por lo que allí (4.103) se escribirá

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q}(x, v, q) - A^{-1}(x, \alpha(x, v, q), q) B(x, \alpha(x, v, q), q) = 0. \quad (4.104)$$

Pero el segundo término de esta ecuación es analítico en  $(x, \alpha, q)$  con lo que resulta una ecuación cuasilineal analítica, y por el teorema de Cauchy - Kowalewsky (Cfr.[60]), admite solución analítica en un entorno  $O'_1 \times O'_2 \times O'_3$  de  $(x_0, v_0, q_0)$ , con lo que (4.103) se cumplirá  $\forall t \geq t_0$ .

■

#### Observación 4.7

Si bien en la proposición anterior se supuso que los sistemas son analíticos, es posible relajar dicha hipótesis para los sistemas afines, para los cuales

$$f(x, u, q) = f(x) + g(x)u + p(x)q,$$

con lo que, en este caso,

$$\alpha(x, v, q) = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)q$$

y en consecuencia la ecuación (4.103) se reduce a

$$A(x)\gamma(x) + B(x) = 0$$

con  $A$  inversible, es decir a una ecuación algebraica lineal. (Cfr.[25], [31]).

Consideremos ahora el problema de seguimiento local de modelos; vale el siguiente:

**Teorema 4.5**

Dados los sistemas (4.94), (4.95), si se cumple localmente alrededor de  $(x_0, u_0)$  y  $(\zeta_0, \omega_0)$

1.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(x,u)}^k h_i(x) = 0$$

$$0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j} L_{f_M(\zeta,\omega)}^k h_{M_i}(\zeta) = 0$$

$$0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$$

3. dada

$$A(x, u) = \text{matriz} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(x,u)}^{\rho_i} h_i(x), 1 \leq i, j \leq m \right\},$$

$$\text{rango } A(x_0, u_0) = m,$$

entonces el problema de seguimiento local de modelos es resoluble.

**Demostración**

Consideremos el *sistema extendido*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}(x, \zeta, u, \omega) \\ \hat{h}(x, \zeta) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.105)$$



$$\begin{aligned}\hat{f}(x, \zeta, u, \omega) &= \begin{bmatrix} f(x, u) \\ f_M(\zeta, \omega) \end{bmatrix} \\ \hat{h}(x, \zeta) &= h(x) - h_M(\zeta)\end{aligned}$$

Entonces, el problema de seguimiento local de modelos, es equivalente al de desacople local de la salida  $y$  de (4.105) de la "perturbación"  $\omega$ . Pero,

$$\begin{aligned}L_{\hat{f}(x, \zeta, u, \omega)} \hat{h}_i &= \langle d\hat{h}_i, \hat{f}(x, \zeta, u, \omega) \rangle \\ &= \langle d_x h_i(x) - d_\zeta h_{Mi}(\zeta), \hat{f}(x, \zeta, u, \omega) \rangle \\ &= \langle d_x h_i(x), f(x, u) \rangle + \langle d_\zeta h_{Mi}(\zeta), f_M(\zeta, \omega) \rangle \\ &= L_{f(x, u)} h_i(x) - L_{f_M(\zeta, \omega)} h_{Mi}(\zeta)\end{aligned}$$

y análogamente,

$$L_{\hat{f}(x, \zeta, u, \omega)}^k \hat{h}_i = L_{f(x, u)}^k h_i(x) - L_{f_M(\zeta, \omega)}^k h_{Mi}(\zeta)$$

$$0 \leq k \leq \rho_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Además, si  $0 \leq k \leq \rho_i - 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ , por las hipótesis 1. y 2., se tiene

$$\frac{\partial}{\partial u_j} L_{\hat{f}(x, \zeta, u, \omega)}^k \hat{h}_i = \frac{\partial}{\partial u_j} [L_{f(x, u)}^k h_i(x) - L_{f_M(\zeta, \omega)}^k h_{Mi}(\zeta)] = 0$$

$$1 \leq j \leq m, \text{ y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_j} L_{\hat{f}(x, \zeta, u, \omega)}^{\rho_i} \hat{h}_i &= \frac{\partial}{\partial u_j} [L_{f(x, u)}^{\rho_i} h_i(x) - L_{f_M(\zeta, \omega)}^{\rho_i} h_{Mi}(\zeta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_j} [L_{f(x, u)}^{\rho_i} h_i(x)]\end{aligned}$$

$1 \leq i, j \leq m$ , por lo que, considerando la hipótesis 3., se deduce que se cumplen las hipótesis 1. y 3. de la Proposición 4.3. Además, considerando

$$\Omega = \text{span}\{d\hat{h}_1, dL_j \hat{h}_1, \dots, dL_j^{\rho_1-2} \hat{h}_1, \dots, d\hat{h}_m, \dots, dL_j^{\rho_m-2} \hat{h}_m\}$$

como

$$dL_j^k \hat{h}_i = \left[ \frac{\partial}{\partial x} L_f^k h_i, -\frac{\partial}{\partial \zeta} L_{f_M}^k h_{Mi} \right]$$

y

$$\chi_j(x, \zeta, u, \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega_j} \hat{f}(x, \zeta, u, \omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_j} f_M(\zeta, \omega) \end{bmatrix},$$

donde por abuso de notación hemos identificado los diferenciales y campos con los vectores de sus componentes en las respectivas bases canónicas, de la forma de  $\Omega$  y  $\chi_j$  y de la hipótesis 2, tenemos que también se cumple (4.101) para el sistema extendido, por lo que de acuerdo a la Proposición 4.3, el problema local de desacople es resoluble para el sistema (4.105).

Además, en este caso  $\alpha = \alpha(x, \zeta, \omega)$  cumplirá

$$A(x, \alpha(x, \zeta, \omega)) \frac{\partial \alpha}{\partial \omega}(x, \zeta, \omega) + \chi(\zeta, \omega) = 0 \quad (4.106)$$

donde  $\chi = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ , y nuevamente, si pedimos que  $\alpha(x_0, \zeta_0, \omega_0) = u_0$ , (4.106) tendrá solución en un entorno de ese punto. ■

#### Observación 4.8

1. En el contexto general aquí planteado, se ve que para resolver el problema de seguimiento de modelos, es necesario encontrar la solución del sistema cuasilineal analítico de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (4.106), lo que es en general dificultoso, aún haciéndolo en forma numérica. Sin embargo, veremos en seguida que agregando hipótesis sobre el sistema modelo, será posible *para los sistemas que cumplen con las hipótesis de la Proposición 3.2* solucionar el problema de seguimiento de modelos resolviendo un sistema de ecuaciones implícitas.
2. En la Definición 4.2 se planteó que la diferencia de salidas  $\tilde{y}(t, x_0) - y_m(t, \zeta_0, \omega_0)$  fuera independiente de  $\omega(t) \forall t \geq t_0$ . Veremos que en el caso referido anteriormente, se pueden hacer modificaciones en el cálculo de  $\alpha$  para que haya convergencia exponencial entre ambas salidas.

Supongamos que el sistema (4.94) cumple con las hipótesis de la Proposición 3.2, que el sistema modelo cumple con la hipótesis 2. del Teorema 4.5, y que además:

1. las diferenciales

$$\{dL_{f_M}^k h_{M_i}(\zeta_0), 0 \leq k \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq m\} \quad (4.107)$$

son linealmente independientes;

2.

$$L_{f_M(\zeta_0, \omega_0)}^{\rho_i} h_{M_i}(\zeta_0) = L_{f(x_0, u_0)}^{\rho_i} h_i(x_0) \quad (4.108)$$

$$1 \leq i \leq m.$$

De acuerdo con el Teorema 4.5 el problema de seguimiento de modelos tendrá solución; pero si por otra parte consideramos

$$\begin{aligned} \varphi_j^i(x) &= L_f^{j-1} h_i(x), \quad 1 \leq j \leq \rho_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ \varphi^i &= (\varphi_1^i, \dots, \varphi_{\rho_i}^i) \\ \varphi &= (\varphi^1, \dots, \varphi^m) \\ \varphi_{M_j}^i(\zeta) &= L_{f_M}^{j-1} h_{M_i}(\zeta), \quad 1 \leq j \leq \rho_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ \varphi_M^i &= (\varphi_{M_1}^i, \dots, \varphi_{M_{\rho_i}}^i) \\ \varphi_M &= (\varphi_M^1, \dots, \varphi_M^m) \end{aligned}$$

sabemos que  $\varphi$  es un difeomorfismo local, y por lo tanto un cambio de coordenadas, y si completamos  $\varphi_M$  con  $\hat{\varphi}_M$  a un cambio de coordenadas, y tomamos

$$w = \varphi(x) \quad z = \varphi_M(\zeta) \quad \bar{z} = \hat{\varphi}_M(\zeta) \quad \zeta = \Phi_M(z, \bar{z}),$$

entonces en forma similar a (3.32) se tendrá

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{w}_1^i = w_2^i \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i = w_{\rho_i}^i \\ \dot{w}_{\rho_i}^i = \gamma^i(\varphi^{-1}(w), u) = L_{f(\varphi^{-1}(w), u)}^{\rho_i} h_i(\varphi^{-1}(w)) \\ y_i = h_i(x) = w_1^i \end{array} \right. \quad (4.109)$$

$1 \leq i \leq m, \forall (w, u) \in \varphi(O') \times U',$  entorno de  $(w_0, u_0) = (\varphi(x_0), u_0)$  y

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &= z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &= \gamma_{M_i}^i(\Phi_M^{-1}(z, \bar{z}), \omega) = L_{f_M(\Phi_M^{-1}(z, \bar{z}), \omega)}^{\rho_i} h_{M_i}(\Phi_M^{-1}(z, \bar{z})) \\ y_{M_i} &= h_{M_i}(x) = z_1^i \end{cases} \quad (4.110)$$

$1 \leq i \leq m, \forall ((z, \bar{z}), \omega) \in \Phi(O'') \times U''$ , entorno de  $((z_0, \bar{z}_0), \omega_0) = (\Phi(\zeta_0), \omega_0)$ .

Seguindo las líneas de (3.33) - (3.38), (4.109) y (4.110) se pueden resumir en

$$\dot{w} = Aw + B\Gamma(\varphi^{-1}(w), u) \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B\Gamma_M(\Phi^{-1}(z, \bar{z}), \omega) \\ &= Az + B\Gamma_M(\zeta, \omega). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Como por hipótesis

$$\text{matriz} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Gamma(\varphi^{-1}(w_0), u_0) \right\}$$

es inversible, entonces por el teorema de la función implícita, existirán  $O_1$  entorno de  $(w_0, \zeta_0, \omega_0)$ ,  $O_2$  entorno de  $u_0$  y una función  $C^\omega \alpha : O_1 \rightarrow O_2$  tal que

$$\Gamma(\varphi^{-1}(w), \alpha(w, \zeta, \omega)) = \Gamma_M(\zeta, \omega) \quad (4.113)$$

$\forall (w, \zeta, \omega) \in O_1$  por lo que (4.111) se escribirá

$$\dot{w} = Aw + B\Gamma_M(\zeta, \omega). \quad (4.114)$$

Si consideramos las soluciones de (4.111) - (4.114) con condiciones iniciales  $w(t_0) = \varphi(x_0), z(t_0) = \varphi_M(\zeta_0)$  tendremos

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{A(t-t_0)} w(t_0) + B \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \Gamma_M(\zeta(\tau), \omega(\tau)) d\tau \\ z(t) &= e^{A(t-t_0)} z(t_0) + B \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \Gamma_M(\zeta(\tau), \omega(\tau)) d\tau \Rightarrow \\ w(t) - z(t) &= e^{A(t-t_0)} (w(t_0) - z(t_0)) \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

es decir,  $w(t) - z(t)$  es independiente de  $\omega(t) \forall t \geq t_0$ , y como las salidas de los sistemas son parte de estos vectores, también su diferencia será independiente de  $\omega$ , es decir, hay seguimiento de modelo.

Supongamos ahora, que como en el caso del seguimiento de trayectorias, planteamos el sistema de ecuaciones

$$\gamma^i(\varphi^{-1}(w), \alpha(w, \zeta, \omega)) = \gamma_M^i(\zeta, \omega) - \sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} (w_j^i - \varphi_{M_j}^i(\zeta)) \quad (4.115)$$

$1 \leq i \leq m$  con  $g_{ij} \in \mathcal{R}$  arbitrarias; si llamamos

$$\delta^i = w_j^i - z_j^i = w_j^i - \varphi_{M_j}^i(\zeta) \quad (4.116)$$

el  $i$ -ésimo error de seguimiento de modelos, tendremos de (4.109)- (4.110), como en (4.67)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}_1^i = \delta_2^i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\delta}_{\rho_i-1}^i = \delta_{\rho_i}^i \\ \dot{\delta}_{\rho_i}^i = -\sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} \delta_j^i \end{array} \right. \quad (4.117)$$

$1 \leq i \leq m$ . Y si  $\delta^i = \text{col}\{\delta_1^i, \dots, \delta_{\rho_i}^i\}$ , se tendrá

$$\delta^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g_{i1} & -g_{i2} & -g_{i3} & -g_{i\rho_i} \end{bmatrix} \delta^i = \Sigma_1^i \delta^i \quad (4.118)$$

$1 \leq i \leq m$ , y como las matrices  $\Sigma_1^i$  están dadas en forma *companion*, una adecuada elección de los  $g_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq \rho_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , hará que los errores  $\delta^i$  converjan a cero, independientemente de sus valores iniciales, es decir, se seguirá el modelo con error decreciente exponencialmente, y con la velocidad deseada.

Tomando, como en el seguimiento de trayectorias la matriz  $\tilde{G}$  que involucra la  $g_{ij}$ , en vez de la ecuación (4.113) se deberá resolver la siguiente:

$$\Gamma(\varphi^{-1}(w), \alpha(w, \zeta, \omega, \tilde{G})) = \Gamma_M(\zeta, \omega) - \tilde{G}(w - \varphi_M(\zeta)) \quad (4.119)$$

lo que será posible, por lo anterior, y consideraciones similares al caso de seguimiento de trayectorias.

Se ve entonces, que el problema de seguimiento asintótico local de modelos es formalmente similar, cuando se tiene acceso a los estados del sistema, al problema de seguimiento de trayectorias. Por lo tanto, los resultados obtenidos para este caso, cuando se utiliza los estados dados por el observador completo, serán aplicables también en el seguimiento de modelos.

#### Observación 4.9

1. De lo anterior, se ve que es posible relajar la condición de analiticidad, dado que la función  $\alpha$  se determina mediante el teorema de la función implícita.
2. Si se omite la exigencia (4.108) en el seguimiento asintótico, se obtendrá un seguimiento, también exponencial del modelo, pero con un error final que se puede hacer tan pequeño como se quiera eligiendo la velocidad de convergencia lo suficientemente grande.

Consideremos ahora el problema de seguimiento de modelos cuando no se dispone de los estados del sistema sino de sus estimados por el observador completo. Supondremos que el modelo cumple (4.107), (4.108) y la hipótesis 2. del Teorema 4.5 y además  $(w(t), \zeta(t), \omega(t)) \in O_1 \forall t \geq t_0$ , en cuyo caso diremos que es un modelo *admisibile*, y que el sistema cumple las hipótesis de la Proposición 3.2. El problema que se plantea en este caso es la determinación de  $u^* = \alpha(w, \zeta, \omega, \tilde{G})$  en (4.119), cuando no se tiene  $w$  sino  $\hat{w}$ , el estimado dado por el observador.

Tomando, en forma natural,

$$\Omega(\hat{w}, \tilde{G}) = \alpha(\hat{w}, \zeta, \omega, \tilde{G})$$

solución de

$$\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w})), \alpha(\hat{w}, \zeta, \omega, \tilde{G}) = \Gamma_M(\zeta, \omega) - \tilde{G}(\hat{w} - \varphi_M(\zeta))$$

tendremos, reemplazando en (4.60) y su similar para el observador:

$$\begin{cases} \dot{w}_1^i & = w_2^i \\ \dot{w}_{\rho_i-1}^i & = w_{\rho_i}^i \\ \dot{w}_{\rho_i}^i & = \gamma^i(\varphi^{-1}(w), \Omega(\hat{w}, \tilde{G})) \\ y_i & = w_1^i \end{cases} \quad (4.120)$$



3.  $\Gamma$  cumple :

$$\|\Gamma(x_2, \Omega(\varphi(x_2), \tilde{G})) - \Gamma(x_1, \Omega(\varphi(x_2), \tilde{G}))\| \leq m_\Gamma(\|\tilde{G}\|)\|x_1 - x_2\|$$

$$\forall x_1, x_2 \in O', \tilde{G} \in \mathcal{R}^{l \times n}.$$

Entonces, dado  $\alpha > 0$  arbitrario, existen matrices  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$ ,  $\tilde{G} \in \mathcal{R}^{l \times n}$  tales que

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(t) - w(t)\| &\leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ \|y(t) - y_M(t)\| &\leq \delta_2 \|y(t_0) - y_M(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$ , con  $\delta_1, \delta_2$  constantes;

4. si además  $\varphi$  es uniformemente de Lipschitz con constante  $m_\varphi$  en  $O'$ ,

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \delta_3 \|\hat{x}_0 - x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Es decir, el observador completo converge a lazo cerrado en forma exponencial con velocidad de convergencia arbitraria en el seguimiento de modelos admisibles. ■

Para obtener un resultado similar al Corolario 4.3 debemos restringir los modelos y controles de forma que sus trayectorias resulten acotadas. Con precisión, sea

$$\mathcal{F}^r = \{(f_M, h_M, \omega_M) : \sup\{\|z(t) - \varphi(x_0)\|, t \geq t_0\} < r, \omega_m(t_0) = \omega_0\}$$

donde  $z(t) = \varphi_M(\zeta(t, \zeta_0, \omega(t)))$  y  $(f_M, h_M)$  es un modelo admisible. Entonces vale el siguiente:

#### Corolario 4.4

Dados  $\alpha, r_1$  reales positivos arbitrarios, y  $(f_M, h_M, \omega_M) \in \mathcal{F}^{r_1}$ , existen matrices  $K^* \in \mathcal{R}^{n \times l}$  y  $\tilde{G}^* \in \mathcal{R}^{l \times n}$ , y un número positivo  $\epsilon_0(\alpha, r_1)$ , tales que si  $y(t)$  es la salida del sistema no lineal a lazo cerrado correspondiente a la solución  $x(t)$  de (3.12), con condición inicial  $x(t_0) \in \varphi^{-1}(B(z(t_0), \epsilon_0))$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(t) - w(t)\| &\leq \delta_1 \|\hat{w}(t_0) - w(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \\ \|y(t) - y_M(t)\| &\leq \delta_2 \|y(t_0) - y_M(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0$ , con  $\delta_1, \delta_2$  constantes. En otras palabras, el observador converge a lazo cerrado en el seguimiento del modelo admisible, y este seguimiento se hace con error que decrece en forma exponencial. ■



**Observación 4.10**

1. Que  $\mathcal{F}^r$  no es vacío se ve tomando  $(f_M, h_M) = (A, B, C)$  con  $A$  matriz estable; entonces si  $\|\omega_M(t)\| \leq c_1 \forall t \geq t_0$ , tomando  $\|C\|$  suficientemente pequeña, resulta  $(f_M, h_M, \omega_M) \in \mathcal{F}^r$ .
2. Un caso particularmente importante en el seguimiento de modelos se da cuando el sistema (4.94) es lineal analítico con grado relativo global y una entrada y una salida, es decir

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} f, g & \quad \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n, f, g \in C^\omega \\ h & \quad : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}, h \in C^\omega \\ u & \in U \subset \mathcal{R} \\ y & \in Y \subset \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Para este sistema es posible resolver el problema de la controlabilidad de la salida utilizando *realimentación dinámica*

$$u = \alpha(x, \zeta) + \beta(x, \zeta) \omega \quad (4.125)$$

para  $\omega$  uniformemente acotado, con cota independiente de la salida que se pretende alcanzar. Con precisión, dado  $\bar{y} \in Y$  cualquiera, y dada  $M$  independiente de  $\bar{y}$ , tal que  $|\omega(t)| \leq M \forall t \geq t_0$ , utilizando (4.125) en (4.124), la salida  $y(t)$  de este sistema alcanza a  $\bar{y}$  en tiempo finito.

En [52] se demuestra que la ley de control (4.125), se puede obtener siempre, y esto se hace a partir del seguimiento de un modelo bilineal

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = A\zeta + N\zeta\omega + b\omega \\ y = c\zeta \end{cases} \quad (4.126)$$

con

$$\begin{aligned} A, N & \in \mathcal{R}^{n_M \times n_M} \\ b & \in \mathcal{R}^{n_M \times 1} \\ c & \in \mathcal{R}^{1 \times n_M} \\ \zeta & \in \mathcal{R}^{n_M} \end{aligned}$$

con grado relativo global  $r_b$  igual al del sistema (4.124),  $r$ , y con  $n_M \geq n$ . Dicho sistema bilineal es de *mínima fase*, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n_M} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & \vdots & n_{n_M} \end{bmatrix},$$

$$b = [0, 0, 0, \dots, b_{n_M}]^T \quad c = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n_M}],$$

y la ley de control (4.125) vendrá dada por

$$u = \frac{cA^r \zeta - L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{cA^{r-1} b + cA^{r-1} N \zeta}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \omega. \quad (4.127)$$

En nuestro caso, suponiendo  $r = n$ , se cumplen las hipótesis del Teorema 4.5, (suponiendo que  $\varphi^{-1}$  es uniformemente Lipschitz) y por lo tanto se puede plantear, en términos del observador, la ley de control como

$$u = \frac{cA^n \zeta - L_f^n h(\hat{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\hat{x})} + \frac{cA^{n-1} b + cA^{n-1} N \zeta}{L_g L_f^{n-1} h(\hat{x})} \omega$$

$$- \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\hat{x})} \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij} (L_f^{j-1} h(\hat{x}) - cA^{j-1} \zeta) \right\} \quad (4.128)$$

Con esta ley de control es posible pues, bajo las hipótesis de convergencia del sistema a lazo cerrado, obtener controlabilidad *asintótica* de la salida para el sistema (4.124), con el observador completo y el modelo bilineal en el lazo de control, manteniendo el control exterior  $\omega$  uniformemente acotado para todo el espacio de salida según el esquema de la figura:

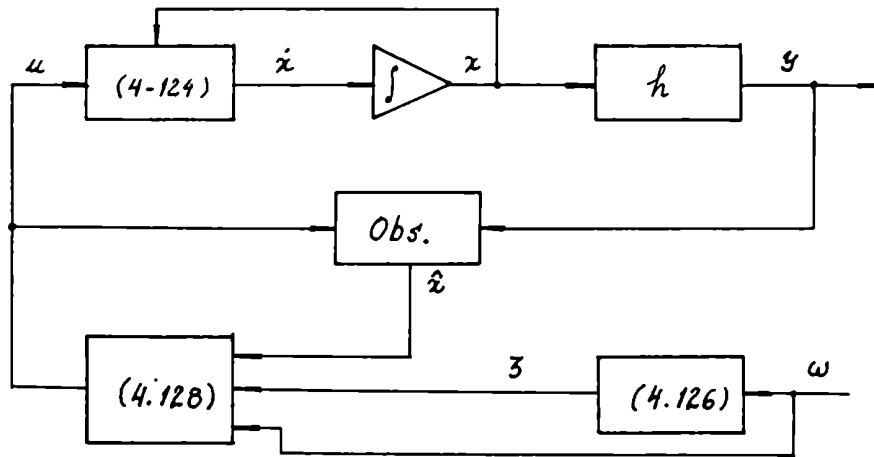


Figura 4.1

#### 4.4 La convergencia del observador reducido

En este apartado consideraremos la convergencia, tanto a lazo abierto, como a lazo cerrado, del observador reducido.

Lo haremos sólo para sistemas observables-c que cumplen las hipótesis de la Proposición 3.2, (aunque esto se puede relajar para la convergencia a lazo abierto), por dos razones:

- A partir de la ecuación (3.57), se puede ver que los términos  $\tilde{\Delta}^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), u)$  son de la forma

$$\left[ \eta_3^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) - k_1^i \eta_2^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), u), \right. \\ \left. \dots, \eta_{\rho_i+1}^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) - k_{\rho_i-1}^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) \right]$$

y por lo tanto dependen de la matriz  $K$  no sólo en el término  $w + Ky$ , por lo que resultados similares a los del observador completo a lazo abierto, sólo serán válidos para casos particulares.

- Para la convergencia a lazo cerrado que involucra los problemas más importantes del control, se trató anteriormente sólo este tipo de sistemas.

Consideraremos pues, bajo las antedichas hipótesis las ecuaciones (3.62) y (3.63); dado que entonces  $\tilde{\Delta} \equiv 0$ , tenemos que con el cambio de coordenadas  $w = \phi(x) = \mu(x) - Kh(x)$ , las ecuaciones para el sistema y el observador se escribirán :

$$\begin{aligned}\dot{w} &= (A - KC)w + (A - KC)Ky + B\Gamma(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) \\ \dot{\hat{w}} &= (A - KC)\hat{w} + (A - KC)Ky + B\Gamma(\psi^{-1}(y, \hat{w} + Ky), u),\end{aligned}$$

y la ecuación del error de observación será:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= (A - KC)\varepsilon \\ &+ B \left[ \Gamma(\psi^{-1}(y, \hat{w} + Ky), u) - \Gamma(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) \right]\end{aligned}\quad (4.129)$$

que es similar a la (4.6).

Ahora bien, si  $\psi^{-1}$  es uniformemente Lipschitz, y  $\Gamma$  cumple con las hipótesis del Teorema 4.1, se tendrá

$$\begin{aligned}& \|\Gamma(\psi^{-1}(y, \hat{w} + Ky), u) - \Gamma(\psi^{-1}(y, w + Ky), u)\| \\ & \leq m_{\psi^{-1}} \nabla(\|u\|) \|\hat{w} - w\|\end{aligned}$$

pue  $K$  afecta solamente a  $y$ , que es conocida.

De esta observación se deduce que bajo las mismas hipótesis, valen también para el observador reducido, el Teorema 4.1 y el Corolario 4.1.

Para el seguimiento de trayectorias mediante observadores, si consideramos

$$\begin{aligned}\delta_1^i &= y_i - y_{di} \\ \delta_2^i &= \mu_1^i(x) - y_{di}^{(1)} \\ \dots &\dots \\ \delta_{\rho_i}^i &= \mu_{\rho_i-1}^i - y_{di}^{(\rho_i-1)}\end{aligned}\quad (4.130)$$

$1 \leq i \leq l$ , como

$$\mu_j^i(x) = \mu_{j+1}^i(x) \quad 1 \leq j \leq \rho_i - 2 \quad 1 \leq i \leq l$$

tendremos de (3.50)

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_1^i &= \delta_2^i \\ \dots &\dots \\ \delta_{\rho_i-1}^i &= \delta_{\rho_i}^i \\ \delta_{\rho_i}^i &= \gamma^i(\psi^{-1}(w), u) - y_{di}^{(\rho_i)} = \gamma^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), u) - y_{di}^{(\rho_i)} \end{aligned} \right. \quad (4.131)$$

$1 \leq i \leq l$ , y si, como en (4.63), tomamos

$$v_i = y_{di}^{(\rho_i)} - \sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} (\mu_{j-1}^i - y_{di}^{(j-1)}) \quad (4.132)$$

$1 \leq i \leq l$  con  $\mu_0^i = y_i$  y  $u^*$  como en (4.64), entonces (4.131) será

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1^i & = \delta_2^i \\ \dots\dots\dots & \\ \dot{\delta}_{\rho_i-1}^i & = \delta_{\rho_i}^i \\ \dot{\delta}_{\rho_i}^i & = -\sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} \delta_j^i \end{cases} \quad (4.133)$$

$1 \leq i \leq l$ , ecuación similar a (4.68).

A partir de (4.132) y recordando que

$$\begin{aligned} \mu_j^i(x) &= w_j^i - k_j^i h_i(x) \\ &= w_j^i - k_j^i y_i \quad 1 \leq j \leq \rho_i - 1, \quad 1 \leq i \leq l \end{aligned}$$

podemos establecer que (4.133) será válido para  $u = \Omega(w, y, K, \tilde{G})$  tal que

$$\begin{aligned} \gamma^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), \Omega(w, y, K, \tilde{G})) &= y_{di}^{(\rho_i)} - g_{i1}(y_i - y_{di}) \\ - \sum_{j=2}^{\rho_i} g_{ij}(w_{j-1}^i - k_{j-1}^i y_i - y_{di}^{(j-1)}) & \end{aligned} \quad (4.134)$$

$1 \leq i \leq l$ , donde  $\tilde{G}$  viene dada por (4.71). Nuevamente, como en el caso del observador completo, la obtención de  $u$ , viene dada por el teorema de la función implícita.

En forma similar a (4.76) y (4.77), podemos escribir

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1^i & = \delta_2^i \\ \dots\dots\dots & \\ \dot{\delta}_{\rho_i-1}^i & = \delta_{\rho_i}^i \\ \dot{\delta}_{\rho_i}^i & = -\sum_{j=1}^{\rho_i} g_{ij} \delta_j^i + \gamma^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), \Omega(\hat{w}, y, K, \tilde{G})) \\ & \quad - \gamma^i(\psi^{-1}(w), \Omega(w, y, K, \tilde{G})) \end{cases} \quad (4.135)$$

$1 \leq i \leq l, y$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1^i &= -k_1^i \varepsilon_1^i + \varepsilon_2^i \\ \dot{\varepsilon}_{\rho_i-1}^i &= -k_{\rho_i-1}^i \varepsilon_1^i + \varepsilon_{\rho_i}^i \\ \dot{\varepsilon}_{\rho_i}^i &= -k_{\rho_i}^i \varepsilon_1^i + \gamma^i(\psi^{-1}(y, \hat{w} + Ky), \Omega(\hat{w}, y, K, \tilde{G})) - \\ &\quad - \gamma^i(\psi^{-1}(y, w + Ky), \Omega(\hat{w}, y, K, \tilde{G})) \end{cases} \quad (4.136)$$

$1 \leq i \leq l.$

Si se cumplen las hipótesis 2. y 3. del Teorema 4.4, y  $\psi^{-1}$  es uniformemente Lipschitz, se tendrá

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(\psi^{-1}(y, \hat{w} + Ky), \Omega(\hat{w}, y, K, \tilde{G})) - \\ & \Gamma(\psi^{-1}(y, w + Ky), \Omega(\hat{w}, y, K, \tilde{G}))\| \leq \nabla(\|\tilde{G}\|) m_{\psi^{-1}} \|\hat{w} - w\| \end{aligned}$$

pues nuevamente,  $K$  afecta sólo a  $y$ . Por lo tanto, el Teorema 4.4 también vale en el caso de seguimiento de trayectorias utilizando el observador reducido.

Respecto del seguimiento asintótico de modelos, dado que en nuestro contexto es un caso particular del seguimiento de trayectorias, los resultados obtenidos en el apartado anterior, se aplican también para el observador reducido.

## 4.5 Conclusiones

1. Para los sistemas observables-c que cumplen con la hipótesis 1. de la Proposición 3.2 se demostró, para funciones uniformemente Lipschitz y controles uniformemente acotados, la convergencia exponencial a lazo abierto, con velocidad de convergencia fijada a voluntad, tanto del observador completo como la del reducido.
2. Para aquellos que no cumplen con tal hipótesis, se probó suponiendo acotación de derivadas y controles uniformemente acotados, ó comportamiento de las no linealidades del sistema como un operador de  $L^2$ , y controles acotados en dicha norma, la convergencia asintótica del observador completo modificado a lazo abierto.

Para el observador reducido no es posible obtener estos últimos resultados en forma general.

3. Para sistemas que cumplen con las hipótesis de la Proposición 3.2, se probó que se puede seguir trayectorias deseadas con convergencia exponencial y con velocidad fijada a voluntad, utilizando para el control las variables de estado estimadas por el observador, tanto completo como reducido; es decir se probó en este caso la convergencia a lazo cerrado del sistema compuesto por el sistema más el observador.
4. A partir del resultado anterior se probó la convergencia, (también exponencial con velocidad de convergencia deseada), del sistema a lazo cerrado, tanto para el observador completo, como para el reducido, en el seguimiento de modelos.

## Capítulo 5

# El observador discreto

### 5.1 Introducción

En este Capítulo se presenta el problema del observador para sistemas en tiempo discreto, a los que indistintamente llamaremos *sistemas discretos*, estableciendo, en lo posible, un paralelismo con el de tiempo continuo.

Para ello, a semejanza con el Capítulo 2, plantearemos el problema del observador, definiremos un sistema no lineal discreto, el observador discreto general, adaptaremos la definición de distribución de invariancia condicionada en este nuevo marco y obtendremos el resultado que vincula la existencia de esas distribuciones con la de los observadores, al igual que en el caso de tiempo continuo.

Posteriormente, definiremos el tipo de sistemas discretos para los cuales se construirá el observador y el tipo de observabilidad involucrada en esta definición. Luego se construirá el observador discreto, tanto completo como reducido.

Finalmente se establecerán las condiciones de convergencia del observador, completo y reducido, a lazo abierto.

### 5.2 El problema del observador en tiempo discreto

De aquí en más, y hasta el final del Capítulo, consideraremos una sucesión arbitraria pero fija de números reales  $\{t_k, k \in \mathcal{N}_0\}$ , como los instantes en los que se considera la evolución de los sistemas discretos. Por simplicidad,



para cualquier variable  $s$  de alguno de estos sistemas, notaremos  $s_k = s(t_k) \forall k \in \mathcal{N}_0$ .

El problema de la construcción de observadores en tiempo discreto, a semejanza del caso en tiempo continuo, se puede resumir en la siguiente forma.

Dado un sistema discreto  $\Sigma$  con entradas  $u_k$  y salidas  $y_k$ , si denominamos  $x_k$  a sus estados en una cierta realización, se pretende construir un sistema  $\Sigma'$  también discreto, (el observador), que tenga por entradas al control  $u_k$  y a las salidas  $y_k$ , de tal manera que a partir de sus variables de estado  $w_k$ , se pueda obtener una estimación  $\hat{x}_k$  del estado  $x_k$  de  $\Sigma$  como muestra la figura 5.1.

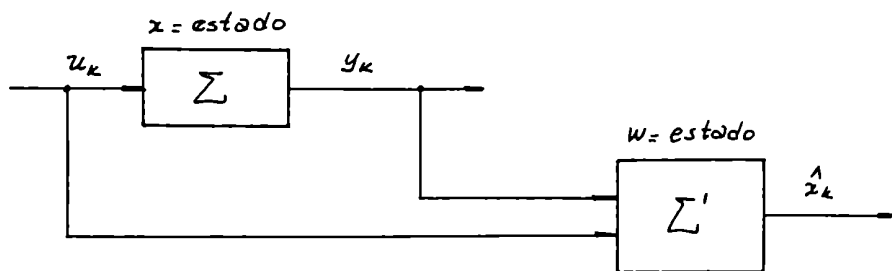


Figura 5.1

La estimación debe verificar las siguientes condiciones:

- H1d. si para algún  $k_0$ ,  $\hat{x}_{k_0} = x_{k_0}$ , entonces  $\hat{x}_k = x_k, \forall k \geq k_0$ .
- H2d.  $\hat{x}_k$  converge a  $x_k$  independientemente de las condiciones iniciales  $\hat{x}_{k_0}$  y  $x_{k_0}$ .

### 5.3 Sistemas no lineales en tiempo discreto

**Definición 5.1** (Cfr.[61])

Un sistema no lineal de control (en tiempo discreto), sobre un fibrado  $(B, M, \Pi)$ , es una función  $F: B \rightarrow M, C^\infty$ .

Se notará al sistema  $\Sigma = (B, M, F)$ .

Aquí  $M$  ha de considerarse como el espacio de estados, mientras que las fibras de  $B$  representan el espacio de entrada (dependiente de los estados), y  $F$  representa la dinámica del sistema.

### Observación 5.1

1. En el caso de los sistemas discretos, los cálculos en coordenadas locales son más delicados que para los sistemas en tiempo continuo, ya que se debe trabajar con *un par* de cartas coordenadas, una en el dominio de  $F$  y otra en la imagen.

Sean  $(x_0, u_0) \in B$  y  $F(x_0, u_0) \in M$ , si  $(\phi_M, U_M)$  es una carta en  $M$  alrededor de  $F(x_0, u_0)$ , tomemos una carta trivializante  $(\phi_B, U_B)$  alrededor de  $(x_0, u_0)$ , tal que  $U_B \subset F^{-1}(U_M)$ , entonces (Cfr.[61]),  $\{(\phi_B, U_B), (\phi_M, U_M)\}$  es un *par de cartas coordenadas*.

Notaremos, con cierto abuso,  $(x, u)$  las coordenadas de  $(\phi_B, U_B)$  y por  $x$  las de  $(\phi_M, U_M)$ , lo que permitirá hacer cálculos locales como si se trabajara con una sola carta coordenada, que preserva fibras. Al par de cartas coordenadas lo designaremos simplemente por  $(x, u)$ .

2. En caso de ser necesario distinguir entre los diferentes dominios de  $x$ , lo haremos por medio de los abiertos  $U_B$  y  $U_M$ .
3. Si  $x_0$  es un *punto fijo*, i.e.  $F(x_0, u_0) = x_0 \forall u_0$ , se puede elegir siempre  $U_B$  tal que

$$\begin{aligned} \Pi(U_B) &\subset U_M \quad \text{y} \\ \Pi \circ \phi_B &= \phi_M|_{\Pi(U_B)}, \end{aligned}$$

con lo que se está usando esencialmente una sola carta coordenada.

La dinámica del sistema, en un par coordenado  $(x, u)$ , está definido por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F(x_k, u_k) \quad \text{para} \\ u_k &\in \Pi^{-1}(x_k). \end{aligned} \tag{5.1}$$

### Definición 5.2

Un *Sistema no lineal con salidas*, (en tiempo discreto), es una pentaupla  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , donde  $\Sigma = (B, M, F)$  es un sistema no lineal discreto,  $Y$  una variedad diferenciable, y  $h : M \rightarrow Y$ ,  $C^\infty$ , es una sumersión suryectiva.

**Observación 5.2**

1. El hecho que  $h$  esté definida sobre la base  $M$  indica la independencia de la función de salida con respecto a las entradas.
2. Sea  $y$  una función coordinada en  $Y$  alrededor de  $h(x_0)$ , entonces en estas coordenadas para  $Y$ , y  $(x, u)$  para  $B$ ,  $\Sigma_s$  se escribirá localmente:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases} \quad (5.2)$$

donde, por abuso de notación se escribió  $h$  en vez de  $y \circ h \circ x^{-1}$ .

3. Si

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \\ F &\quad \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n, \quad C^\infty \\ h &\quad \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p, \quad C^\infty \end{aligned}$$

entonces  $\Sigma_s = (\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m, \mathcal{R}^n, F, \mathcal{R}^p, h)$  es la clase usual de sistemas discretos en  $\mathcal{R}^n$ .

4. Si

$$\begin{aligned} F(x, u) &= Ax + Bu \\ h(x) &= Cx \end{aligned}$$

con  $A, B, C$  operadores lineales, se tiene el sistema lineal en tiempo discreto :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (5.3)$$

Finalmente, en forma similar al caso de tiempo continuo, introducimos la siguiente:

**Definición 5.3**

Un *Sistema no lineal discreto extendido*  $\Sigma = (B \times Y, M, K)$ , es una terna tal que  $B$  es un fibrado de base  $M$ ,  $Y$  es una variedad diferenciable y  $K : B \times Y \rightarrow M$  es una función  $C^\infty$ .

**Observación 5.3**

En coordenadas locales  $(x, u)$  para  $B$ , e  $y$  para  $Y$ , se tiene para la dinámica del sistema extendido la ecuación

$$x_{k+1} = K(x_k, u_k, y_k). \quad (5.4)$$

## 5.4 Observadores Generales Discretos

### Definición 5.4

Dado un sistema discreto con salidas  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , se dice que el sistema no lineal discreto extendido  $\Sigma' = (B' \times Y, W, K)$  es un *observador general discreto* de  $\Sigma_s$  si:

1. existe un morfismo  $(\Phi, \varphi)$  de  $(B, M, \Pi)$  en  $(B', W, \Pi')$  tal que  $\varphi$  es una sumersión suryectiva.
2. Si  $(O \times U, \eta)$  y  $(O' \times U', \eta')$  son trivializaciones de  $B$  y  $B'$  respectivamente con  $\Phi(\Pi^{-1}(O)) \subset \Pi'^{-1}(O')$ , entonces  $\eta'^{-1} \circ \Phi \circ \eta = (\varphi, \sigma)$ , donde  $\sigma : U \rightarrow U'$  es un difeomorfismo.
3. Si  $\bar{h} : B \rightarrow Y$  está definida por

$$\bar{h} = h \circ \Pi \tag{5.5}$$

el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & M \\ \Phi \downarrow \searrow \bar{h} & & \downarrow \varphi \\ B' \times Y & \xrightarrow{K} & W \end{array}$$

Figura 5.2

De 1. y 3. igual que en el caso continuo, se deducen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Phi} & B' \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Figura 5.3

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ \Pi \downarrow & \searrow \bar{h} & \\ M & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Figura 5.4

Si  $((x, u), O \times U)$  es un par coordenado alrededor de  $(x_0, u_0) \in B$ , y  $((w, v), O' \times U')$  es otro alrededor de  $(x'_0, u'_0) = \Phi(x_0, u_0) \in B'$ , tomando

coordenadas  $y$  alrededor de  $h(x_0)$ , de los diagramas de las figuras 5.2, 5.3 y 5.4 se deduce que localmente se cumple:

$$F(x, u) = f(x, u) \quad (5.6)$$

$$\Phi(x, u) = (w, v) = (\varphi(x), \sigma(u)) \quad (5.7)$$

$$\bar{h}(x, u) = h(x) = y \quad (5.8)$$

$$K(w, v, y) = k(w, v, y) \quad (5.9)$$

donde, por abuso de notación, se nota con las mismas letras a las funciones que a sus expresiones en coordenadas locales, y con esta convención se tiene que

$$\begin{aligned} f : O'' \times U'' \subset \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m &\rightarrow \mathcal{R}^n \\ \varphi : O''' \subset \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^k \\ \sigma : U'' &\rightarrow U'' \\ h : O^{iv} \subset \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^l \\ k : O^v \times U'' \times Z \subset \mathcal{R}^k \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^l &\rightarrow \mathcal{R}^k. \end{aligned}$$

#### Observación 5.4

1. De 2. de la Definición 5.4 se deduce que  $\Phi$  es una sumersión suryectiva.
2. Dado que  $\sigma$  es un difeomorfismo, por abuso de notación identificaremos  $v$  con  $u$ .
3. La Definición 5.4 establece un cierto relajamiento sobre la hipótesis H1d.

En efecto, si  $(\Phi, \bar{h}) : B \rightarrow B' \times Y$  no es un difeomorfismo, entonces de (5.7) - (5.8), como  $(\Phi, \bar{h})(x, u) = (w, u, y)$  no tiene inversa, no se podrá estimar todo  $x$  a partir de  $(w, u, y)$ , sino sólo una parte  $\hat{x} = G(w, u, y)$ , y tendremos por lo tanto un observador *parcial*. En este caso H1d. se reduce localmente a :

H3d. Si para algún  $k_0 \geq 0$   $w_{k_0} = \varphi(x_{k_0})$ , entonces  $w_k = \varphi(x_k)$   
 $\forall k \geq k_0$ .

4. Si  $(\Phi, \bar{h})$  es un difeomorfismo,  $x$  se puede recuperar a partir de  $(w, u, y)$  y el observador se dirá *completo*, y  $\hat{x} = G(w, u, y)$ , con  $G$  inversa de  $(\Phi, \bar{h})$ , estimará a  $x$ .

**Definición 5.5**

Un *control admisible* para un sistema no lineal discreto definido localmente por

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ x_{k_0} = x_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

en un entorno  $(O'' \times U'')$  de  $(x_0, u_0)$ , es una sucesión de  $\mathcal{R}^m, \{u_k, k \geq k_0\}$ , tal que  $(x_k, u_k) \in O'' \times U'' \forall k \geq k_0$ , y  $u_{k_0} = u_0$ .

Vale la siguiente:

**Proposición 5.1**

Localmente, el observador general  $\Sigma'$  de  $\Sigma_s$ , cumple la hipótesis H3d.

**Demostración**

Supongamos que  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  vienen descriptos localmente por las ecuaciones (5.6) - (5.9), y que  $\{u_k\}$  es un control admisible para (5.10). Supongamos también, sin pérdida de generalidad que  $h$  está definida en  $O''$ .

Entonces, la conmutatividad del diagrama de la Figura 5.2, se expresará localmente por

$$(\varphi \circ f)(x, u) = k(\varphi(x), u, h(x)) \quad (5.11)$$

$\forall (x, u) \in O'' \times U''$ . Por lo tanto, si  $x_k$  es solución de (5.10), y  $\bar{w}_k = \varphi(x_k) \forall k \geq k_0$ , de (5.11) sale:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{k+1} &= \varphi(x_{k+1}) \\ &= \varphi(f(x_k, u_k)) \\ &= k(\varphi(x_k), u_k, h(x_k)) \\ &= k(\bar{w}_k, u_k, y_k) \end{aligned} \quad (5.12)$$

con  $y_k = h(x_k), \forall k \geq k_0$ .

Por otra parte, la solución  $w_k$  de la ecuación del observador

$$\begin{cases} w_{k+1} = k(w_k, u_k, y_k) \\ w_{k_0} = w_0 \end{cases} \quad (5.13)$$

con las entradas  $u_k$ , e  $y_k$ , anteriores y una condición inicial arbitraria  $w_0 \in \varphi(O'')$ , es tal que si  $w_0 = \varphi(x_0)$ , de (5.11) - (5.13), por la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones en diferencias,  $w_k = \varphi(x_k) = \bar{w}_k \forall k \geq k_0$  y H3d. se satisface. ■

## 5.5 Distribuciones de Invariancia Condicionada. Existencia de observadores generales discretos

La diferencia más importante entre los sistemas no lineales de tiempo continuo y los de tiempo discreto es que para los primeros, las imágenes de  $F$  están en el fibrado tangente a la variedad  $M$ , mientras que para los segundos están en la variedad  $M$ . Por esto, en coordenadas locales,  $f(\cdot, u)$  será en el primer caso un *campo vectorial*, mientras que en el segundo será una *aplicación de una variedad en sí misma*. Por ello, para sistemas discretos no tiene sentido una definición de distribuciones de invariancia condicionada como la dada por la Definición 2.8 para los sistemas continuos. Presentaremos por ello, una definición alternativa siguiendo el método utilizado por Grizzle (Cfr.[62]) en su definición de distribuciones de invariancia *controlada*.

### Definición 5.6

Sea  $\Sigma = (M \times U, M, F)$  un sistema de control discreto, y sea  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia en  $M$ . Se dice que  $\mathcal{R}$  es *invariante* si  $\forall u \in U, F(x, u)\mathcal{R}F(\bar{x}, u)$  cada vez que  $x\mathcal{R}\bar{x}$ .

### Observación 5.5

Dado  $\Sigma = (\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m, \mathcal{R}^n, Ax + Bu)$ , sistema lineal discreto en  $\mathcal{R}^n$ , sea  $V$  un subespacio de  $\mathcal{R}^n$ . Entonces

$$\mathcal{R}_V = \{(x, \hat{x}) : x - \hat{x} \in V\}$$

es una relación de equivalencia, y la condición  $F(x, u)\mathcal{R}_VF(\hat{x}, u)$  se traduce aquí como

$$(Ax + Bu) - (A\hat{x} + Bu) = A(x - \hat{x}) \in V \quad \text{si} \\ x - \hat{x} \in V$$

o, equivalentemente,  $AV \subset V$ , es decir,  $V$  es un subespacio invariante de  $A$ .

Consideremos ahora una distribución  $\Delta$  en  $M$  que origine una foliación regular  $\mathcal{F}$  en  $M$ . Entonces  $\mathcal{F}$  induce en  $M$  la siguiente relación de equivalencia:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \{(x, \hat{x}) \in M \times M : x \text{ y } \hat{x} \text{ pertenecen a la misma hoja de } \mathcal{F}\}.$$

**Definición 5.7**

$\mathcal{F}$  es localmente invariante si  $\forall (x_0, u) \in M \times U$ , existe un entorno abierto  $U_{x_0}$  de  $x_0$  tal que  $F(x, u) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} F(\hat{x}, u)$  cada vez que  $(x, \hat{x}) \in U_{x_0} \times U_{x_0}$  y  $x \mathcal{R}_{\mathcal{F}} \hat{x}, \forall u \in U$ .

Esta propiedad se puede caracterizar de la siguiente forma:

**Proposición 5.2**

$\mathcal{F}$  es localmente invariante si y sólo si  $\forall X \in \Delta \exists \epsilon_X > 0$  tal que

$$F(X^t(x), u) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} F(x, u) \quad (5.14)$$

$\forall (x, u) \in M \times U, \forall t : |t| < \epsilon_X$  donde  $X^t(\cdot)$  es el flujo de  $X$ .

**Demostración**

En efecto, dada  $x \in U_{x_0}, \forall X \in \Delta, \exists \epsilon_X > 0 : X^t(x) \in U_{x_0} \forall t : |t| < \epsilon_X$ .

Pero  $x$  y  $X^t(x)$  pertenecen a la misma hoja de  $\mathcal{F}$ , o sea

$$\begin{aligned} X^t(x) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} x \quad \forall t : |t| < \epsilon_X \Rightarrow \\ F(X^t(x), u) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} F(x, u) \quad \forall t : |t| < \epsilon_X. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea

$$\tilde{U}_{x_0} = \bigcup_{X \in \Delta} \{X^t(x_0), |t| < \epsilon_X\},$$

que es un abierto de la hoja  $\mathcal{F}_{x_0}$  de  $\mathcal{F}$  que pasa por  $x_0$ ; por lo tanto existe un abierto  $U_{x_0} \subset M$  tal que

$$\tilde{U}_{x_0} = U_{x_0} \cap \mathcal{F}_{x_0} \subset \mathcal{F}.$$

Sean  $x, \hat{x} \in U_{x_0}$  tales que  $x \mathcal{R}_{\mathcal{F}} \hat{x}$ ; sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $x, \hat{x} \in \tilde{U}_{x_0}$ . Entonces existen

$$\begin{aligned} X_1, X_2 \in \Delta, t_1, t_2 : \\ |t_1| < \epsilon_{X_1}, |t_2| < \epsilon_{X_2} \end{aligned}$$

tales que

$$\begin{aligned} x = X_1^{t_1}(x_0), \hat{x} = X_2^{t_2}(x_0) \Rightarrow \\ (F(x, u) = F(X_1^{t_1}(x_0), u)) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} F(x_0, u) \\ (F(\hat{x}, u) = F(X_2^{t_2}(x_0), u)) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} F(x_0, u) \Rightarrow \\ F(x, u) \mathcal{R}_{\mathcal{F}} F(\hat{x}, u) \end{aligned}$$

$\forall u \in U$ . ■



Ahora bien, de (5.14),  $F(X^t(x), u)$  está en la hoja de  $\mathcal{F}$  que pasa por  $F(x, u) \forall t : |t| < \epsilon_X$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(X^t(x), u) \Big|_{t=0} \in \Delta(F(x, u)) &\Rightarrow \\ F_*(X^t(x, u))X(X^t(x)) \Big|_{t=0} \in \Delta(F(x, u)) &\Rightarrow \\ F_*(\cdot, u)X \subset \Delta \quad \forall X \in \Delta, u \in U. \end{aligned}$$

Esto conduce a la siguiente

**Definición 5.8**

Sea  $\Delta$  una distribución involutiva en  $M$ , entonces  $\Delta$  es una *distribución invariante* de  $\Sigma = (M \times U, M, F)$  si

$$F_*(\cdot, u)\Delta \subset \Delta \quad \forall u \in U. \quad (5.15)$$

Estamos ahora en condiciones de extender la definición de distribución de invariancia condicionada, dado que localmente  $B$  es un producto cartesiano.

**Definición 5.9**

Dado  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , sistema discreto con salidas, se dice que una distribución involutiva  $D$  en  $M$  es de *invariancia condicionada local discreta* para  $\Sigma_s$ , si para todo punto  $x_0 \in M$ , existe una carta coordenada  $((x, u), O \times U)$  en  $B$  que preserva fibras, con  $(x, O)$  carta en  $M$  alrededor de  $x_0$ , tal que :

$$f_*(\cdot, u)(D \cap \text{Ker}(dh)) \subset D \quad (5.16)$$

para todo  $u \in U$  fijo y  $f$  representación local de  $F$ .

**Observación 5.6**

La globalización de la Definición 5.9 es similar a la de la Definición 2.8 para sistemas a tiempo continuo.

Tenemos ahora el siguiente

**Teorema 5.1**

1. Sea  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$  un sistema discreto con salidas, y sea  $\Sigma' = (B' \times Y, W, K)$  un observador general discreto de  $\Sigma_s$ . Entonces la distribución  $\text{Ker}(\varphi_*)$ , es de invariancia condicionada local discreta para  $\Sigma_s$ .

2. Recíprocamente, sea  $D$  una distribución en  $M$  involutiva, de dimensión constante y de invariancia condicionada local discreta. Entonces  $M$  se puede factorizar localmente mediante las hojas de la foliación inducida por  $D$ , a una variedad diferencial  $W$ , esto es, existe  $\varphi : M \rightarrow W$ , tal que  $Ker(\varphi_*) = D$ . Además, existe (localmente) un observador general discreto  $\Sigma'$  de  $\Sigma_g$ .

**Demostración.**

1. Del diagrama conmutativo de la figura 5.2, se deducen estos tres, también conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TB & \xrightarrow{\Phi_*} & TB' \\
 & \swarrow & \downarrow \Pi_* & & \downarrow \Pi'_* \\
 \bar{h}_* & & TM & \xrightarrow{\varphi_*} & TW \\
 & \swarrow h_* & & & \\
 TY & & & & 
 \end{array}$$

Figura 5.5

$$\begin{array}{ccc}
 TB & \xrightarrow{F_*} & TM \\
 \Phi_* \swarrow & & \downarrow \varphi_* \\
 TB' \times TY & \xrightarrow{K_*} & TW \\
 & \searrow \bar{h}_* & 
 \end{array}$$

Figura 5.6

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{\varphi_*} & TW \\
 \Pi_M \downarrow & & \downarrow \Pi_W \\
 M & \xrightarrow{\varphi} & W
 \end{array}$$

Figura 5.7

Como  $\Phi$ ,  $h$  y  $\varphi$  son sumersiones suryectivas, inducen las siguientes distribuciones involutivas:

$$E = \{X \in TB : (\Phi_*, \bar{h}_*)X = 0\} \quad (5.17)$$

$$D = \{X \in TM : \varphi_*X = 0\} = Ker(\varphi_*) \quad (5.18)$$

Valen entonces

a.

$$\Pi_* E = D \cap D^\circ = D \cap \text{Ker}(dh) = D \cap \text{Ker}(h_*) \quad (5.19)$$

b.

$$F_* E \subset D \quad (5.20)$$

- Validez de a.

Considerando los diagramas de las figuras 2.12 y 5.5, se ve que la demostración de la validez de a. del Teorema 2.1 sirve también en este caso.

- Validez de b.

Del diagrama de la figura 5.6, se tiene que si  $X \in E$  entonces

$$\begin{aligned} (\varphi_* \circ F_*)X &= (K_* \circ (\Phi_*, \bar{h}_*))(X) \\ &= K_*((\Phi_*, \bar{h}_*)(X)) = 0 \Rightarrow \\ F_* X &\in \text{Ker}(\varphi_*) = D \end{aligned}$$

por lo tanto  $F_* E \subset D$ .

Veamos ahora la validez de 1). Razonando igual que en el caso del Teorema 2.1, existen coordenadas  $u$  para las fibras de  $B_{\mathcal{F}}$  de forma que si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas locales en  $M$  tales que  $D = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\}$ ,  $D^\circ = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\}$ , donde, sin pérdida de generalidad se puede tomar  $s \leq r$ ,  $(x, u)$  son coordenadas en  $B$  que preservan fibras, y en esas coordenadas

$$\begin{aligned} E &= \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right\} \\ F(x, u) &= f(x, u) = (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u)). \end{aligned}$$

Entonces, localmente,

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, (5.20) implica que  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x, u) = 0$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $r + 1 \leq j \leq n$ , pero esto es equivalente a  $f_*(\cdot, u)(D \cap D^\circ) \subset D$ , esto es, (5.16).

2. Nuevamente, como en el Teorema 2.1, dado que  $D$  es involutiva y de dimensión constante, por el teorema de Frobenius (Cfr.[25]), existen localmente  $k$  funciones  $\varphi_i : O \subset M \rightarrow \mathcal{R}, C^\infty, 1 \leq i \leq k$ , tales que sus diferenciales son linealmente independientes, y que si

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : O \rightarrow W \subset \mathcal{R}^k, \text{ entonces}$$

$$D = Ker(d\varphi) = Ker(span_{\mathcal{R}}\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_k\}).$$

Nuevamente, se puede identificar  $Ker(d\varphi)$ , con  $Ker(\varphi_*) = D$ . Por hipótesis  $dh + d\varphi$  tiene dimensión constante y es involutiva, y por lo tanto, nuevamente por el teorema de Frobenius existen coordenadas locales  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , que sin pérdida de generalidad podemos suponer definidas en  $O$ , tales que

$$dh + d\varphi = span\{dx_1, \dots, dx_r\} \quad r \leq n. \quad (5.21)$$

Pero  $D$  es de invariancia condicionada local discreta, y por tanto existen coordenadas en  $B$  que preservan fibras,  $(\tilde{x}, u) : \tilde{O} \times U \rightarrow \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$  tales que se cumple (5.16), lo que sigue valiendo via difeomorfismos locales en la base  $M$ , por lo que podemos suponer que  $((\tilde{x}, u), \tilde{O} \times U) = ((x, u), O \times U)$ . Sean  $X \in D \cap D^\circ$ , entonces para  $\varphi_i, 1 \leq i \leq k$ ; valdrá:

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_i, f_*(\cdot, u)X \rangle &= 0 \Rightarrow \\ (f_*(\cdot, u)X)(\varphi_i) &= 0 \Rightarrow \\ X(\varphi_i \circ f(\cdot, u)) &= 0 \Rightarrow \\ \langle d(\varphi_i \circ f(\cdot, u)), X \rangle &= 0 \Rightarrow \\ d(\varphi_i \circ f(\cdot, u)) \in (D \cap D^\circ)^\perp &= d\varphi + dh \end{aligned} \quad (5.22)$$

$\forall u \in U, 1 \leq i \leq k$ . Sean ahora

$$\varphi_i \circ f(x, u) = \tilde{K}_i(x_1, \dots, x_n, u) \quad (5.23)$$

$1 \leq i \leq k, \forall (x, u) \in O \times U$ ; de (5.21) y (5.22) sale que

$$d_x(\tilde{K}_i(x_1, \dots, x_n, u)) \in span\{dx_1, \dots, dx_r\} \quad (5.24)$$

$1 \leq i \leq k$ , y por lo tanto

$$\tilde{K}_i(x_1, \dots, x_n, u) = \tilde{K}_i(x_1, \dots, x_r, u) \quad (5.25)$$

$1 \leq i \leq k, (x, u) \in O \times U$ , y entonces existen localmente  $k$  funciones  $k_i$  tales que

$$\varphi_i \circ f(x, u) = k_i(\varphi(x), u, h(x)) \quad (5.26)$$

$1 \leq i \leq k$ ,  $(x, u) \in O \times U$ . Por lo tanto localmente tendremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & O \times U & \xrightarrow{f} O \\
 \swarrow \varphi & \times & \downarrow \varphi \\
 W \times U & \xrightarrow{h} h(O) & \\
 \uparrow id_U & & \\
 W \times U & \xrightarrow{K} W & 
 \end{array}$$

Figura 5.8

con  $K = (k_1, \dots, k_k)$ , es decir, un observador general discreto para  $\Sigma_s^l = (O \times U, f, h(O), h)$ , observador general local discreto de  $\Sigma_s$ . ■

## 5.6 Sobre la hipótesis de convergencia H2d.

Al igual que en el caso de tiempo continuo, la hipótesis de convergencia, H2d. en este caso, se traduce en que el sistema de control discreto

$$w_{k+1} = K(w_k, u_k, y_k) \quad (5.27)$$

tenga para cualquier control  $\{u_k, k \in \mathcal{N}_0\}$  fijo, una única *solución estacionaria*, cualquiera sea  $\{y_k, k \in \mathcal{N}_0\}$ .

En el caso en que (5.27) sea de la forma

$$w_{k+1} = K \cdot w_k + L(y_k, u_k) \quad (5.28)$$

con  $K$  una matriz constante y  $L$  una función  $C^\infty$ , pueden obtenerse condiciones sobre  $K$  para que haya convergencia.

En efecto, en este caso, si  $w_k$ , y  $\bar{w}_k$ , son soluciones de (5.28), correspondientes a las condiciones iniciales  $w_0$  y  $\bar{w}_0$ , respectivamente, para  $k = k_0$ , si llamamos  $\varepsilon_k = w_k - \bar{w}_k \forall k \geq k_0$ , al error entre las dos soluciones, tendremos la ecuación

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} & = K \cdot \varepsilon_k \\ \varepsilon_{k_0} & = w_0 - \bar{w}_0, \end{cases}$$

de solución

$$\varepsilon_k = K^{(k-k_0)} \cdot \varepsilon_{k_0}.$$

De esta ecuación se ve que el error  $\varepsilon$  entre ambas soluciones (y por lo tanto entre *todas*), tenderá a cero si y sólo si  $K$  es una matriz de Schur, es decir

tiene todos sus autovalores con módulo menor que uno. Por tanto, bajo estas condiciones habrá una única solución estacionaria de la ecuación (5.28).

Siguiendo las líneas de desarrollo del observador continuo, nos proponemos buscar modificaciones de la ecuación (5.27), que eventualmente permitan lograr la convergencia sin por eso alterar el carácter del observador discreto.

Para ello, dado que el Teorema 5.1 es local, y como basaremos la construcción del observador en la demostración del mismo, supondremos, sin pérdida de generalidad que dado un sistema discreto con salidas  $\Sigma_s = (B, M, F, Y, h)$ , con observador general discreto  $\Sigma' = (B' \times Y, W, K)$ , existe una carta global  $(\eta, W)$ ,  $\eta : W \rightarrow \mathcal{R}^k$ , con  $0 \in \eta(W)$ .

Consideremos

$$\mathcal{S} = (\Phi, \bar{h})(B) = \{(b', y) \in B' \times Y : \exists b \in B \wedge (b', y) = (\Phi, \bar{h})(b)\}. \quad (5.29)$$

y la clase  $\mathcal{K}$  de funciones :

$$\mathcal{K} = \{K_1 : B' \times Y \rightarrow \eta(W) \mathcal{C}^\infty : K_1|_{\mathcal{S}} = 0\}; \quad (5.30)$$

vale entonces la siguiente

### Proposición 5.3

Si  $K_1 \in \mathcal{K}$ , entonces  $\Sigma'' = (B' \times Y, W, \eta^{-1} \circ (\eta \circ K + K_1))$  es un observador general para  $\Sigma_s$

### Demostración

1. Como

$$\begin{array}{ll} \eta \circ K & B' \times W \rightarrow \mathcal{R}^k \quad \text{y} \quad K_1 \in \mathcal{K}, \\ \eta^{-1} \circ (\eta \circ K + K_1) & B' \times Y \rightarrow W \quad \mathcal{C}^\infty \end{array}$$

2.  $\eta^{-1} \circ (\eta \circ K + K_1)$  hace conmutativo el diagrama de la figura 5.2: sea  $b \in B$ , entonces

$$\begin{aligned} \eta^{-1} \circ (\eta \circ K + K_1)(\Phi(b), \bar{h}(b)) &= \eta^{-1} \circ [\eta \circ K(\Phi(b), \bar{h}(b)) \\ &\quad + K_1(\Phi(b), \bar{h}(b))] \\ &= K(\Phi(b), \bar{h}(b)) \\ &= \varphi \circ F(b). \end{aligned}$$

■

### Observación 5.7

Para el sistema dado en coordenadas locales por las ecuaciones (5.6) - (5.9), tendremos que:

$$\mathcal{K} = \{k_1 : \mathcal{R}^k \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^l \rightarrow \mathcal{R}^k, \mathcal{C}^\infty : k_1(\varphi(x), u, h(x)) = 0 \\ \forall (x, u) \in O \times U\}$$

y la Proposición 5.3 expresa que el observador general discreto tiene como su expresión más completa, tomando, por abuso de notación  $w = \eta$ ,

$$w_{k+1} = k(w_k, u_k, y_k) + \bar{k}(w_k, u_k, y_k) \quad (5.31)$$

con  $\bar{k} \in \mathcal{K}$ , y  $k$  tal que se cumple

$$\varphi_i \circ F(x, u) = k_i(\varphi(x), u, h(x)) \quad (5.32)$$

$$1 \leq i \leq k, \quad \forall (x, u) \in O \times U.$$

En lo subsiguiente se aprovechará el resultado anterior para modificar convenientemente un observador general discreto con el objeto de obtener uno que cumpla con la hipótesis H2d.

## 5.7 Sistemas discretos a observar. Observabilidad

En este apartado consideraremos el tipo de sistemas discretos para los cuales construiremos el observador, definiendo el tipo de observabilidad que exigiremos para los mismos.

En principio, a partir del Teorema 5.1, vemos que es suficiente considerar el sistema discreto *localmente*. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad supondremos en lo sucesivo que el sistema está definido por :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases} \quad (5.33)$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : O \times U \rightarrow \mathcal{R}^n, \mathcal{C}^\infty \\ h = (h_1, h_2, \dots, h_l) : O \rightarrow \mathcal{R}^l, \mathcal{C}^\infty$$

con  $O$  abierto de  $\mathcal{R}^n$  y  $U$  abierto de  $\mathcal{R}^m$ .

Sea  $(x_0, u_0) \in O \times U$ , y supongamos que existe  $O' \times U'$  entorno de  $(x_0, u_0)$ , tal que  $\forall (x, u) \in O' \times U'$  se verifica para  $\nu$  entero no nulo, arbitrario pero fijo:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} h_i \circ f^\nu(x, u) \right] = 0 \quad 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq l$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$   $m$ -upla de enteros no nulos tal que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i = \nu$ , y con

$$f^\nu(x, u) = \underbrace{f(\cdot, u_0) \circ \dots \circ f(\cdot, u_0)}_{\nu-1 \text{ veces}} \circ f(x, u)$$

Nuevamente, como en el caso continuo, existen funciones  $\hat{f}_i^\nu, \hat{g}_{i j_{\alpha_1} \dots j_{\alpha_m}}^\nu \in C^\infty$ , definidas en  $O'$ ,  $1 \leq j_\alpha \leq m$ ,  $1 \leq i \leq l$  que cumplen

$$\begin{aligned} h_i \circ f^\nu(x, u) &= \hat{f}_i^\nu(x) \\ &+ \sum_{|\alpha|=1}^{\nu} \sum_{j_{\alpha_1} \dots j_{\alpha_m}} \hat{g}_{i j_{\alpha_1} \dots j_{\alpha_m}}^\nu(x) (u_{j_{\alpha_1}} - u_{0j_{\alpha_1}}) \dots (u_{j_{\alpha_m}} - u_{0j_{\alpha_m}}) \\ &= \hat{f}_i^\nu(x) + \hat{g}_i^\nu(x, u) \end{aligned} \quad (5.34)$$

con  $u = (u_1, \dots, u_m) \in U'$  y  $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0m})$   
y  $f_i^0 = h_i(x), g_i^0(x, u) = 0$ .

#### Definición 5.10

El sistema no lineal discreto (5.33) es *observable-d* en  $(x_0, u_0)$  si existen un entorno  $O' \times U'$  de  $(x_0, u_0)$  y una  $l$ -upla de números naturales  $\rho_1, \dots, \rho_l$ , (que sin pérdida de generalidad podemos suponer ordenados según  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_l \geq 1$ ) tales que

1.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} h_i \circ f^\nu(x, u) \right] = 0 \quad |\alpha| = \nu \quad \forall (x, u) \in O' \times U'$$

$$1 \leq j \leq m, 0 \leq \nu \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l.$$

2. Las funciones  $\hat{f}_i^\nu$  definidas en (5.34) son tales que sus diferenciales  $\{d\hat{f}_i^\nu(x_0), 0 \leq \nu \leq \rho_i - 1, 1 \leq i \leq l\}$  son linealmente independientes en  $T_{x_0}^* O'$ .



$$3. \sum_{i=1}^l \rho_i = n.$$

### Observación 5.8

1. Esta definición es la adaptación de la de *observable-c* al caso discreto.
2. Si consideramos sistemas discretos autónomos

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ y_k = h(x_k) \end{cases},$$

esta definición de observabilidad coincide con la de *observabilidad local fuerte* dada en [63].

3. Si  $g_i^\nu(x, u) = 0 \forall (x, u) \in O' \times U'$ ,  $0 \leq \nu \leq \rho_i - 1$ ,  $1 \leq i \leq l$ , y la matriz

$$\begin{aligned} A(x, u) &= \{a_{ij}(x, u), 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m\} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial u_j} h_i \circ f^{\rho_i}(x, u), 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m \right\} \end{aligned}$$

tiene rango  $l$  en  $(x_0, u_0)$ , (suponiendo  $l \leq m$ ), entonces  $\{\rho_1, \dots, \rho_l\}$  son los *índices característicos* de (5.33) en  $(x_0, u_0)$  (Cfr.[64]), concepto que extiende el de grado relativo a los sistemas discretos.

## 5.8 El observador de tipo Luenberger en tiempo discreto

Al igual que en el caso continuo, vale el siguiente resultado fundamental que vincula el concepto de observabilidad-d con la existencia de observadores discretos.

### Proposición 5.4

Si el sistema (5.33) es observable-d en  $(x_0, u_0)$ , entonces admite un observador general local discreto alrededor de  $(x_0, u_0)$ .

### Demostración

Notemos

$$\varphi_{\nu+1}^i = f_i^\nu, \quad 0 \leq \nu \leq \rho_i - 1 \quad 1 \leq i \leq l \quad (5.35)$$

$$\varphi^i = (\varphi_1^i, \dots, \varphi_{\rho_i}^i), \quad 1 \leq i \leq l \quad (5.36)$$

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^l) = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_{\rho_1}^1, \dots, \varphi_1^l, \dots, \varphi_{\rho_l}^l) \quad (5.37)$$



$1 \leq i \leq l, \forall (x, u) \in O' \times U'$ . Resumiendo, tendremos

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_1^i \circ f)(x, u) = \varphi_2^i(x) + \eta_2^i(x, u) \\ (\varphi_2^i \circ f)(x, u) = \varphi_3^i(x) + \eta_3^i(x, u) \\ \dots \\ (\varphi_{\rho_i-1}^i \circ f)(x, u) = \varphi_{\rho_i}^i(x) + \eta_{\rho_i}^i(x, u) \\ (\varphi_{\rho_i}^i \circ f)(x, u) = \gamma^i(x, u) + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) \end{array} \right. \quad (5.39)$$

$1 \leq i \leq l, \forall (x, u) \in O' \times U'$ . Tomando

$$w^i = (w_1^i, \dots, w_{\rho_i}^i) = (\varphi_1^i(x), \dots, \varphi_{\rho_i}^i(x)), \quad 1 \leq i \leq l \quad (5.40)$$

$$y \ w = (w^1, \dots, w^l) = \varphi(x) \quad (5.41)$$

se tendrá

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_1^i)_{k+1} = \varphi_1^i(x_{k+1}) = (\varphi_1^i \circ f)(x_k, u_k) \\ \quad = \varphi_2^i(x_k) + \eta_2^i(x_k, u_k) \\ \quad = (w_2^i)_k + \eta_2^i(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \\ \dots \\ (w_{\rho_i-1}^i)_{k+1} = \varphi_{\rho_i-1}^i(x_{k+1}) = (\varphi_{\rho_i-1}^i \circ f)(x_k, u_k) \\ \quad = \varphi_{\rho_i}^i(x_k) + \eta_{\rho_i}^i(x_k, u_k) \\ \quad = (w_{\rho_i}^i)_k + \eta_{\rho_i}^i(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \\ (w_{\rho_i}^i)_{k+1} = \varphi_{\rho_i}^i(x_{k+1}) = (\varphi_{\rho_i}^i \circ f)(x_k, u_k) \\ \quad = \gamma^i(x_k, u_k) + \eta_{\rho_i+1}^i(x_k, u_k) \\ \quad = \gamma^i(\varphi^{-1}(w_k), u_k) + \eta_{\rho_i+1}^i(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \\ (y_i)_k = h_i(x_k) = (w_1^i)_k \end{array} \right. \quad (5.42)$$

$1 \leq i \leq l$ , y  $\{u_k, k \in \mathcal{N}_0\}$  tal que  $(w_k, u_k) \in \varphi(O') \times U'$ , entorno de  $(w_0, u_0) = (\varphi(x_0), u_0) \forall k \geq k_0$ . Por lo tanto, si definimos como en el caso continuo,

$$A^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times \rho_i}$$

$$C^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times \rho_i} \quad 1 \leq i \leq l, \quad (5.43)$$

y

$$A = \text{diag}\{A^1, \dots, A^l\}, \quad (5.44)$$

$$C = \text{diag}\{C^1, \dots, C^l\}, \quad (5.45)$$

$$\Gamma^i(x, u) = \begin{bmatrix} \eta_2^i(x, u) \\ \vdots \\ \gamma^i(x, u) + \eta_{\rho_i+1}^i(x, u) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{\rho_i \times 1}, \quad (5.46)$$

$$\Gamma(x, u) = \begin{bmatrix} \Gamma^1(x, u) \\ \vdots \\ \Gamma^l(x, u) \end{bmatrix}, \quad \in \mathcal{R}^{n \times 1} \quad (5.47)$$

$\forall(x, u) \in O' \times U'$ , tendremos si  $w_k = \varphi(x_k)$

$$\begin{cases} w_{k+1} = A \cdot w_k + \Gamma(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \\ y_k = C \cdot w_k \end{cases} \quad (5.48)$$

#### Observación 5.9

1. De las ecuaciones (5.48) y (5.23), tenemos

$$\begin{aligned} K & \quad \varphi(O') \times U' \times Y \rightarrow \varphi(O'), \text{ es} \\ K(w, u, y) & = A \cdot w + \Gamma(\varphi^{-1}(w), u). \end{aligned}$$

2. En forma similar al caso de tiempo continuo, nos referiremos a (5.48) como al *observador general canónico discreto* del sistema observable-d (5.33).

Teniendo en cuenta la Proposición 5.3, si se modifica el observador dado por (5.48) de acuerdo con:

$$w_{k+1} = A \cdot w_k + \Gamma(\varphi^{-1}(w_k), u_k) + K \cdot (y_k - C \cdot w_k) \quad (5.49)$$

donde  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  es una matriz en principio arbitraria, (5.49) también será un observador general discreto para el sistema observable-d (5.33), local alrededor de  $(x_0, u_0)$ , pues

$$\begin{aligned} K_1 & \quad \varphi(O') \times Y \rightarrow \varphi(O'), \quad \text{dada por} \\ K_1(w, y) & = K \cdot (y - C \cdot w) \end{aligned}$$

es claramente una función de  $\mathcal{K}$ . Consideremos ahora  $x_k$ , solución de (5.33) con condición inicial  $x_{k_0}$ , y control admisible  $u_k$ . Si  $w_k = \varphi(x_k)$ , como (5.48) es un observador general, se tendrá :

$$w_{k+1} = A \cdot w_k + \Gamma(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \quad (5.50)$$

De la conmutatividad del diagrama de la figura 5.2 sale que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, y_k) \\ &= \varphi^{-1} [A \cdot \varphi(x_k) + \Gamma(x_k, u_k)]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Sea ahora  $\hat{w}_k$ , la solución de (5.49), con  $y_k = h(x_k)$  y  $u_k$  el mismo control anterior, con condición inicial  $\hat{w}_{k_0} \neq \varphi(x_{k_0})$ , es decir,  $\hat{w}_k$  cumple

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k+1} &= A \cdot \hat{w}_k + \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}_k), u_k) \\ &+ K \cdot (y_k - C \cdot \hat{w}_k). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Como (5.52) también es un observador general discreto, si  $\hat{x}_k = \varphi^{-1}(\hat{w}_k)$ , nuevamente por la conmutatividad del diagrama de la figura 5.2 tendremos

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= f(\hat{x}_k, u_k) \\ &= \varphi^{-1} [A \cdot \varphi(\hat{x}_k) + \Gamma(\hat{x}_k, u_k) + K \cdot (y_k - C \cdot \hat{w}_k)], \end{aligned} \quad (5.53)$$

y como

$$C \cdot \hat{w}_k = \begin{bmatrix} h_1(\hat{x}_k) \\ \vdots \\ h_l(\hat{x}_k) \end{bmatrix}$$

tendremos

$$\hat{x}_{k+1} = \varphi^{-1} [A \cdot \varphi(\hat{x}_k) + \Gamma(\hat{x}_k, u_k) + K \cdot (y_k - C \cdot h(\hat{x}_k))]. \quad (5.54)$$

Se tiene entonces la siguiente

#### Definición 5.11

La ecuación (5.54), con  $K$  arbitraria representa un *observador completo de tipo Luenberger discreto* para el sistema observable-d (5.33).

#### Observación 5.10

A diferencia del caso en tiempo continuo, (ecuación (3.47)), de (5.54) se ve que para los sistemas discretos, es necesario evaluar  $\hat{x} = \varphi^{-1}(\hat{w})$ .



$\forall (x, u) \in O' \times U'$ , tendremos

$$w_{k+1} = (A - KC) \cdot w_k + (A - KC)K \cdot y_k + \tilde{\Gamma}(x_k, u_k). \quad (5.62)$$

Dado que  $\varphi = (\varphi_1^1, \mu^1, \varphi_1^2, \mu^2, \dots, \varphi_1^l, \mu^l)$  es un difeomorfismo en  $O'$ ,

$$\begin{aligned} \psi &= (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^l, \mu^1, \dots, \mu^l) \\ &= (h_1, \dots, h_l, \mu^1, \dots, \mu^l) \end{aligned} \quad (5.63)$$

también lo será. Pero

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (h_1(x), \dots, h_l(x), \phi(x) + K(h_1(x), \dots, h_l(x))) \\ &= (y, w + Ky) \end{aligned} \quad (5.64)$$

en  $O'$ , y por lo tanto tendremos

$$x = \psi^{-1}(y, w + Ky) \quad \forall (y, w) \in h(O') \times \phi(O') \subset \mathcal{R}^l \times \mathcal{R}^{n-l}$$

y por lo tanto, (5.62) se escribirá

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= (A - KC) \cdot w_k + (A - KC)K \cdot y_k \\ &+ \tilde{\Gamma}(\psi^{-1}(y_k, w_k + K \cdot y_k), u_k) \end{aligned} \quad (5.65)$$

$\forall (w, u, y) \in \phi(O') \times U' \times h(O')$ . Sea como antes  $x_k$  la solución de (5.33), con control admisible  $u_k$ , condición inicial  $x_{k_0}$  y salida  $y_k = h(x_k)$ , si  $\hat{w}_k$  es la solución de (5.65), para  $\hat{w}_{k_0} \neq \psi(x_{k_0})$ , es decir

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k+1} &= (A - KC) \cdot \hat{w}_k + (A - KC)K \cdot y_k \\ &+ \tilde{\Gamma}(\psi^{-1}(y_k, \hat{w}_k + K \cdot y_k), u_k) \end{aligned} \quad (5.66)$$

entonces

$$\hat{x}_k = \psi^{-1}(y_k, \hat{w}_k + K \cdot y_k) \quad (5.67)$$

es la estimación de  $x_k \forall k \geq k_0$ . Se tiene pues la siguiente

#### Definición 5.12

Las ecuaciones (5.66) - (5.67) con  $K$  dada por (3.52) pero arbitraria, representa un *observador reducido de tipo Luenberger discreto* para el sistema observable-d (5.33).

## 5.9 La convergencia del observador de tipo Luem-berger discreto

Consideraremos solamente la convergencia a lazo abierto del observador, para controles uniformemente acotados, esto es, dado  $M > 0$  arbitrario, si  $\mathcal{A}_{(x_0, u_0)}$  es la clase de controles admisibles para (5.33) según la Definición 5.5, notaremos  $\mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M = \{u \in \mathcal{A}_{(x_0, u_0)} : \|u_k\| \leq M \forall k \geq k_0, u_{k_0} = u_0\}$ .

Supongamos que  $x_k, \hat{x}_k$  son las soluciones de (5.33) y (5.54) con condiciones iniciales  $x_{k_0}$  y  $\hat{x}_{k_0} \in U'$  para  $u \in \mathcal{U}_{(x_0, u_0)}^M$ , entonces, con  $\varphi, \Gamma$  dadas por (5.37) y (5.47) respectivamente, vale el siguiente

### Teorema 5.2

Supongamos que

1.  $\varphi^{-1}$  es uniformemente de Lipschitz de constante  $m_{\varphi^{-1}}$  en  $\varphi(O')$
2. existe  $\nabla : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$  continua, creciente, con  $\nabla(0) = 0$ , tal que

$$\|\Gamma(x_1, u) - \Gamma(x_2, u)\| \leq \nabla(\|u\|)\|x_1 - x_2\|$$

$$\forall (x_1, u), (x_2, u) \in O' \times U'.$$

Entonces, dado  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$  arbitrario, existe una matriz  $K \in \mathcal{R}^{n \times l}$  tal que

$$\|\hat{w}_k - w_k\| \leq \delta_1 \|\hat{w}_{k_0} - w_{k_0}\| \beta^{(k-k_0)}$$

$$\forall k \geq k_0, \text{ con } \delta_1 \text{ constante.}$$

3. Si además  $\varphi$  es de uniformemente de Lipschitz con constante  $m_\varphi$  en  $O'$

$$\|\hat{x}_k - x_k\| \leq \delta_2 \|\hat{x}_{k_0} - x_{k_0}\| \beta^{(k-k_0)}$$

$$\forall k \geq k_0, \text{ y } \delta_2 \text{ constante.}$$

En otras palabras, el observador completo discreto converge a lazo abierto en forma potencial con velocidad de convergencia arbitraria.

### Demostración.

Sea

$$\varepsilon_k = \hat{w}_k - w_k$$



el error de observación; de (5.48) y (5.52) se deduce que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k+1} &= (A - KC)\varepsilon_k + \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}_k), u_k) \\ &\quad - \Gamma(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \\ &= (A - KC)\varepsilon_k + \Upsilon_k\end{aligned}\quad (5.68)$$

$$\Upsilon_k = \Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}_k), u_k) - \Gamma(\varphi^{-1}(w_k), u_k) \quad (5.69)$$

cuya solución es (Cfr.[65])

$$\varepsilon_k = (A - KC)^{(k-k_0)}\varepsilon_{k_0} + \sum_{s=k_0}^{k-1} (A - KC)^{(k-s-1)}\Upsilon_s; \quad (5.70)$$

entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_k\| &\leq \|A - KC\|^{(k-k_0)}\|\varepsilon_{k_0}\| \\ &\quad + \sum_{s=k_0}^{k-1} \|A - KC\|^{(k-s-1)}\|\Upsilon_s\|.\end{aligned}\quad (5.71)$$

Consideremos la matriz  $K$  como en el Teorema 4.1 de forma de obtener la descomposición:

$$A - KC = \Lambda^{-1}(\lambda)\Delta\Lambda(\lambda)$$

con  $\Delta$  dada por (4.19) y  $\Lambda(\lambda)$  por (4.17) con  $\lambda = \{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1\rho_1}\}$  y  $\Delta_i$  dados por

$$\begin{cases} \Delta_i = \text{diag}\{\text{diag}\{\lambda_{1(\rho_1-\rho_i+1)}, \dots, \lambda_{1(\rho_1-\rho_{i+1})}\}, \Delta_{i+1}\} & \rho_i > \rho_{i+1} \\ \Delta_i = \Delta_{i+1} & \rho_i = \rho_{i+1} \end{cases}$$

$1 \leq i < l$ ,

$$\Delta_l = \text{diag}\{\lambda_{1(\rho_1-\rho_l+1)}, \dots, \lambda_{1\rho_1}\},$$

y

$$1 > |\lambda_{11}| > |\lambda_{12}| > \dots, |\lambda_{1\rho_1}| > 0.$$

Tenemos entonces que

$$\|A - KC\|^s \leq \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| \|\Lambda(\lambda)\| |\lambda_{11}|^s = M(\lambda)|\lambda_{11}|^s$$

por lo que de (5.71),

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_k\| &\leq M(\lambda)|\lambda_{11}|^{(k-k_0)}\|\varepsilon_{k_0}\| \\ &+ \sum_{s=k_0}^{k-1} M(\lambda)|\lambda_{11}|^{(k-s-1)}\|\Upsilon_s\|.\end{aligned}\quad (5.72)$$

Pero

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_k\| &= \|\Gamma(\varphi^{-1}(\hat{w}_k), u_k) - \Gamma(\varphi^{-1}(w_k), u_k)\| \\ &\leq \nabla(\|u_k\|) \|\varphi^{-1}(w_k + \varepsilon_k) - \varphi^{-1}(w_k)\| \\ &\leq m_{\varphi^{-1}} M_1 \|\varepsilon_k\|,\end{aligned}$$

con  $M_1 = \nabla(M)$ , por lo que (5.72) quedará

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_k\| &\leq M(\lambda)|\lambda_{11}|^{(k-k_0)}\|\varepsilon_{k_0}\| \\ &+ \sum_{s=k_0}^{k-1} M(\lambda)M_1 m_{\varphi^{-1}} |\lambda_{11}|^{(k-s-1)}\|\varepsilon_s\|,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}|\lambda_{11}|^{-(k-k_0)}\|\varepsilon_k\| &\leq \\ M(\lambda)\|\varepsilon_{k_0}\| &+ \sum_{s=k_0}^{k-1} M(\lambda)M_1 m_{\varphi^{-1}} |\lambda_{11}|^{-1} |\lambda_{11}|^{-(s-k_0)}\|\varepsilon_s\|\end{aligned}\quad (5.73)$$

Supongamos que es válido el siguiente:

### Lema 5.1

Sean  $N, k_0$  naturales,  $N > k_0$ ,  $f : \{k_0, \dots, N\} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$ ,  
 $\xi, \mu \in \mathcal{R}_{>0}, \nu \in \mathcal{R}_{\geq 0}$  tales que

$$0 \leq f(k) \leq \xi + \sum_{s=k_0}^{k-1} (\mu f(s) + \nu), \quad k_0 < k \leq N$$

entonces

$$f(k) \leq (\xi + N\nu + \mu f(k_0))(1 + \mu)^{(k-k_0-1)}$$

$k_0 < k \leq N$ . ■

Tomando en el lema,

$$\begin{aligned}
 N &\rightarrow \infty, \nu = 0, \\
 \xi &= M(\lambda)\|\varepsilon_{k_0}\|, \\
 \mu &= M(\lambda)m_{\varphi-1}|\lambda_{11}|^{-1}M_1 \text{ y} \\
 f(k) &= |\lambda_{11}|^{-(k-k_0)}\|\varepsilon_k\|,
 \end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{11}|^{-(k-k_0)}\|\varepsilon_k\| &\leq \left( M(\lambda)\|\varepsilon_{k_0}\| \right. \\
 &\quad \left. + M(\lambda)M_1m_{\varphi-1}|\lambda_{11}|^{-1}\|\varepsilon_{k_0}\| \right) \\
 &\quad \left( 1 + M(\lambda)M_1m_{\varphi-1}|\lambda_{11}|^{-1} \right)^{k-k_0-1} \Rightarrow \\
 \|\varepsilon_k\| &\leq M(\lambda)\|\varepsilon_{k_0}\| \left( |\lambda_{11}| + M_1m_{\varphi-1} \right) \\
 &\quad \left( |\lambda_{11}| + M(\lambda)M_1m_{\varphi-1} \right)^{k-k_0-1} \\
 &= \delta_1\|\varepsilon_{k_0}\| \left( |\lambda_{11}| + M(\lambda)M_1m_{\varphi-1} \right)^{k-k_0} \quad (5.74)
 \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \frac{M(\lambda) \left( |\lambda_{11}| + m_{\varphi-1}M_1 \right)}{|\lambda_{11}| + M(\lambda)m_{\varphi-1}M_1}.$$

Ahora bien, de las estructuras diagonales de  $\Lambda(\lambda)$  y  $\Delta$ , y de la forma en que se tomó los  $\Delta_i$ , (y por ende los  $\Lambda_i(\lambda)$ ), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda(\lambda)\| &= \|\Lambda_1(\lambda)\| \text{ y} \\
 \|\Lambda^{-1}(\lambda)\| &= \|\Lambda_1^{-1}(\lambda)\|.
 \end{aligned}$$

Tomemos

$$\Lambda_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{\rho_1-1} & \lambda_{11}^{\rho_1-2} & \lambda_{11} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1\rho_1}^{\rho_1-1} & \lambda_{1\rho_1}^{\rho_1-2} & \lambda_{1\rho_1} & 1 \end{bmatrix},$$

y supongamos relaciones fijas entre los autovalores, a saber:

$$\lambda_{1j} = \alpha_{j-1}\lambda_{11} \quad 2 \leq j \leq \rho_1$$

entonces,

$$\Lambda_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1^{\rho_1-1} & \alpha_1^{\rho_1-2} & \alpha_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\rho_1-1}^{\rho_1-1} & \alpha_{\rho_1-1}^{\rho_1-2} & \alpha_{\rho_1-1} & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{\rho_1-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11}^{\rho_1-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \tilde{\Lambda}(\alpha)\tilde{D}(\lambda_{11})$$

con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\rho_1-1})$ ,  $\alpha_i < 1 \forall i$ . Por lo tanto,

$$\Lambda_1^{-1}(\lambda) = \tilde{D}^{-1}(\lambda_{11})\tilde{\Lambda}^{-1}(\alpha) \\ \|\Lambda_1(\lambda)\| \|\Lambda_1^{-1}(\lambda)\| \leq \|\tilde{D}(\lambda_{11})\| \|\tilde{D}^{-1}(\lambda_{11})\| \|\tilde{\Lambda}(\alpha)\| \|\tilde{\Lambda}^{-1}(\alpha)\| \\ = \frac{\tilde{M}(\alpha)}{|\lambda_{11}|^{\rho_1-1}}. \quad (5.75)$$

La ecuación

$$\theta(x) = x + \frac{\tilde{M}(\alpha)m_{\varphi-1}M_1}{x^{\rho_1-1}}$$

tiene un mínimo

$$\theta \left[ \left( (\rho_1 - 1)\tilde{M}(\alpha)m_{\varphi-1}M_1 \right)^{\frac{1}{\rho_1}} \right] = \frac{\rho_1}{\rho_1 - 1} \left[ (\rho_1 - 1)\tilde{M}(\alpha)m_{\varphi-1}M_1 \right]^{\frac{1}{\rho_1}}.$$

Por lo tanto, si

$$M_1 \leq \left( \frac{\beta(\rho_1 - 1)}{\rho_1} \right)^{\rho_1} \frac{1}{(\rho_1 - 1)\tilde{M}(\alpha)m_{\varphi-1}}, \quad (5.76)$$

$$\text{y } \lambda_{11} = \left[ (\rho_1 - 1)\tilde{M}(\alpha)m_{\varphi-1}M_1 \right]^{\frac{1}{\rho_1}} \leq \frac{\beta(\rho_1 - 1)}{\rho_1} \quad (5.77)$$

tendremos que

$$\|\hat{w}_k - w_k\| = \|\varepsilon_k\| \leq \delta_1 \|\varepsilon_{k_0}\| \beta^{(k-k_0)} = \delta_1 \|\hat{w}_{k_0} - w_{k_0}\| \beta^{(k-k_0)}$$

$\forall k \geq k_0$  y por lo tanto, razonando igual que en el caso continuo,  
 $\|\hat{x}_k - x_k\| \leq m_{\varphi^{-1}} m_{\varphi} \delta_1 \|\hat{x}_{k_0} - x_{k_0}\| \beta^{(k-k_0)} = \delta_2 \|\hat{x}_{k_0} - x_{k_0}\| \beta^{(k-k_0)}$   
 $\forall k \geq k_0$  ■

### Demostración del Lema 5.1.

Lo haremos por inducción sobre  $k$  :

- Para  $k = k_0 + 1$ ,

$$f(k) \leq \xi + N\nu + \mu f(k_0) = (\xi + N\nu + \mu f(k_0))^{k_0+1-k_0-1}$$

- supongamos que vale para  $k = h$ , entonces

$$\begin{aligned} f(h+1) &\leq \xi + \sum_{s=k_0}^h (\mu f(s) + \nu) \\ &= \xi + \mu f(k_0) + (h - k_0)\nu + \mu \sum_{s=k_0+1}^h f(s) \\ &\leq \xi + \mu f(k_0) + N\nu \\ &\quad + (\xi + \mu f(k_0) + N\nu) \mu \sum_{s=k_0+1}^h (1 + \mu)^{s-k_0-1} \\ &= (\xi + \mu f(k_0) + N\nu) \left( 1 + \mu \frac{(1 + \mu)^{(h-k_0)} - 1}{\mu} \right) \\ &= (\xi + \mu f(k_0) + N\nu) (1 + \mu)^{(h-k_0)} \end{aligned}$$

con lo que el lema es válido. ■

### Observación 5.11

1. El Lema 5.1 es la versión discreta del lema de Gronwall.
2. A partir de (5.65) y (5.66), si  $\psi^{-1}$  y  $\psi$  son uniformemente de Lipschitz y se cumple para  $\tilde{\Gamma}$  la hipótesis 2. del Teorema 5.2, como la ecuación del error del observador reducido discreto es

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= (A - KC) \cdot \varepsilon_k + \tilde{\Gamma}(\psi^{-1}(y_k, \hat{w}_k + K \cdot y_k), u_k) \\ &\quad - \tilde{\Gamma}(\psi^{-1}(y_k, w_k + K \cdot y_k), u_k), \end{aligned}$$

$K$  sólo afecta a  $y$ , y por lo tanto, tendremos

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Gamma}(\psi^{-1}(y_k, \hat{w}_k + K \cdot y_k), u_k) - \tilde{\Gamma}(\psi^{-1}(y_k, w_k + K \cdot y_k), u_k)\| \\ \leq m_{\psi^{-1}} \nabla(\|u_k\|) \|\hat{w}_k - w_k\|, \end{aligned}$$

por lo que el Teorema 5.2 también será válido para el observador reducido discreto.

3. A diferencia con el observador en tiempo continuo, para lograr la convergencia del observador discreto, es decir poder tomar  $0 < \beta < 1$  no basta con la selección adecuada de la matriz  $K$ . En efecto, para  $\rho_1$  dado, existe una configuración óptima  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\rho_1-1})$  tal que  $\bar{M}(\alpha)$  sea mínimo. Como  $\lambda_{11}$  viene dada por (5.77), de (5.76) se deduce que se debe cumplir

$$M_1 m_{\varphi^{-1}} \leq \left( \frac{(\rho_1 - 1)\beta}{\rho_1} \right)^{\rho_1} \frac{1}{(\rho_1 - 1)\bar{M}(\alpha)}$$

independientemente de  $K$ . Esto impone severas restricciones en la cota  $M$  de los controles, en el caso en que valga la hipótesis 2. del Teorema 5.2.

La razón de este fenómeno, puede verse a partir de la ecuación (5.68); en efecto, usando allí el teorema del valor medio, se obtiene

$$\varepsilon_{k+1} = (A - KC) \cdot \varepsilon_k + \tilde{\Upsilon}_k \cdot \varepsilon_k \quad (5.78)$$

donde

$$\tilde{\Upsilon}_k = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right|_{(\varphi^{-1}(\bar{\theta}_k), u_k)} \cdot \left. \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial w} \right|_{\bar{\theta}_k} \quad (5.79)$$

y

$$\bar{\theta}_k = \mu_k w_k + (1 - \mu_k) \hat{w}_k, \quad 0 < \mu_k < 1,$$

con lo que

$$\varepsilon_{k+1} = (A - KC + \tilde{\Upsilon}_k) \cdot \varepsilon_k. \quad (5.80)$$

La matriz  $A - KC$  sufre una perturbación *aditiva*  $\tilde{\Upsilon}_k$ , y si  $A - KC + \tilde{\Upsilon}_k$  ha de ser de Schur, deberá cumplirse en todos los casos

que  $\|\tilde{\Upsilon}_k\| < 1$ , (Cfr.[66]). De esto se deduce, que para los sistemas observables-d, para los cuales el observador general es del tipo

$$w_{k+1} = A \cdot w_k + \Gamma(x_k, u_k)$$

el problema anterior subsistirá. Una posible solución es obtener un observador general de la forma

$$w_{k+1} = A \cdot w_k + \Gamma(y_k, u_k)$$

lo que naturalmente impondrá restricciones más severas sobre los sistemas observables-d.(Cfr.[38], [41], [48] para el caso de tiempo continuo, para el caso de tiempo discreto no hay referencias de resultados en tal sentido).

4. Si bien se puede establecer hipótesis para la convergencia a lazo cerrado del observador discreto en el seguimiento de trayectorias y modelos, a partir de las consideraciones anteriores, y del hecho que el control depende tanto de la amplitud de las trayectorias, (o el tipo de modelos), a seguir, como de la velocidad del controlador, (matriz  $\tilde{G}$ ), la convergencia del observador discreto se dará para trayectorias, (y modelos), muy restringidos y para velocidades de respuesta muy pequeñas.

Es posible relajar las exigencias de la cota en el control dadas por el Teorema 5.2, imponiendo cotas en las perturbaciones, y sacrificando la velocidad de convergencia  $\beta$ .

En efecto, en (5.78), supongamos que  $\|\tilde{\Upsilon}_k\| \leq \bar{c} \forall k \geq k_0$  y que  $\tilde{A} = A - KC$  es de Schur. Entonces, dada  $Q$ , simétrica y positiva definida, existe una única matriz  $P$ , también simétrica y positiva definida que verifica (Cfr.[65])

$$\tilde{A}^T P \tilde{A} - P = -Q \quad (5.81)$$

y

$$P = \sum_{s=0}^{\infty} (\tilde{A}^T)^s Q \tilde{A}^s. \quad (5.82)$$

Sea  $V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon$  una función de Lyapunov, entonces, de (5.78), sale

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon_k) &= V(\varepsilon_{k+1}) - V(\varepsilon_k) = \varepsilon_{k+1}^T P \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k^T P \varepsilon_k \\ &= \varepsilon_k^T \left[ (\tilde{A} + \tilde{\Upsilon}_k)^T (\tilde{A} + \tilde{\Upsilon}_k) - P \right] \varepsilon_k \\ &= \varepsilon_k^T \left[ \tilde{A}^T P \tilde{A} + \tilde{\Upsilon}_k^T P \tilde{A} + \tilde{A}^T P \tilde{\Upsilon}_k + \tilde{\Upsilon}_k^T P \tilde{\Upsilon}_k - P \right] \varepsilon_k \end{aligned}$$

y de (5.81)

$$\dot{V}(\varepsilon_k) = -\varepsilon_k^T Q \varepsilon_k + 2\varepsilon_k^T \tilde{Y}_k^T P \tilde{A} \varepsilon_k + \varepsilon_k^T \tilde{Y}_k^T P \tilde{Y}_k \varepsilon_k$$

y si para  $F$  matriz arbitraria definida no negativa escribimos

$$x^T F x = \|x\|_F^2$$

tendremos

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon_k) &\leq -\|\varepsilon_k\|_Q^2 + 2\tilde{c}\|\varepsilon_k\| \|P \tilde{A} \varepsilon_k\| + \tilde{c}^2 \|P\| \|\varepsilon_k\|^2 \\ &= \left[ \frac{-\|\varepsilon_k\|_Q^2 + 2\tilde{c}\|\varepsilon_k\| \|P \tilde{A} \varepsilon_k\| + \tilde{c}^2 \|P\| \|\varepsilon_k\|^2}{\|\varepsilon_k\|_P^2} \right] V(\varepsilon_k). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Pero, dadas  $F, G$ , matrices simétricas definidas no negativas, y  $G$  definida positiva, vale (Cfr.[67]):

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{\|\varepsilon\|_F^2}{\|\varepsilon\|_G^2}, \varepsilon \neq 0 \right\} &= \lambda_{\max}(FG^{-1}), \\ \min \left\{ \frac{\|\varepsilon\|_F^2}{\|\varepsilon\|_G^2}, \varepsilon \neq 0 \right\} &= \lambda_{\min}(FG^{-1}), \\ \lambda_{\min}(G)\|\varepsilon\|^2 &\leq \|\varepsilon\|_G^2 \leq \lambda_{\max}(G)\|\varepsilon\|^2, \end{aligned}$$

con  $\lambda_{\max}(\cdot), \lambda_{\min}(\cdot)$  el mayor y el menor autovalores respectivamente. Por lo tanto

$$-\frac{\|\varepsilon_k\|_Q^2}{\|\varepsilon_k\|_P^2} \leq -\lambda_{\min}(QP^{-1}) = \eta_1 \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\tilde{c}\|\varepsilon_k\| \|P \tilde{A} \varepsilon_k\|}{\|\varepsilon_k\|_P^2} &= \frac{2\tilde{c}\|\varepsilon_k\| \|\varepsilon_k\|_{\tilde{A}^T P^2 \tilde{A}}}{\|\varepsilon_k\|_P \|\varepsilon_k\|_P} \\ &\leq 2\tilde{c} \left[ \frac{\lambda_{\min}(\tilde{A}^T P^2 \tilde{A} P^{-1})}{\lambda_{\max}(P)} \right]^{\frac{1}{2}} = \eta_2 \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\frac{\tilde{c}^2 \|\varepsilon_k\|^2 \|P\|}{\|\varepsilon_k\|_P^2} \leq \tilde{c}^2 \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} = \eta_3. \quad (5.86)$$

Por lo tanto, si  $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \eta < 0$ ,  $\dot{V}(\varepsilon_k) \leq \eta V(\varepsilon_k)$  y entonces  $\dot{V}$  es monótona decreciente y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} V(\varepsilon_k) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k &= 0, \end{aligned}$$



con lo que el observador converge, con una velocidad de decaimiento que se puede estimar como dada por  $\lambda_{\min}(QP^{-1})$ .

Naturalmente, para obtener tal convergencia no sólo ha de ser  $\bar{A}$  de Schur, lo que viene garantizado por la elección de  $K$ , sino también debe ser pequeña la cota  $\bar{c}$  de la perturbación, de acuerdo con (5.85) y (5.86).

## 5.10 Conclusiones.

1. Al igual que para los sistemas en tiempo continuo, la existencia de observadores generales locales discretos es equivalente a la existencia de distribuciones de invariancia condicionada local discreta.
2. Los sistemas observables-d admiten una forma canónica de observador general, dada por la ecuación (5.48), que se puede modificar por adición de funciones convenientes a fin de cumplir con la hipótesis de convergencia H2d.
3. Tanto para el observador completo discreto como para el reducido, es necesario evaluar la estimación  $\hat{x}_k$  de los estados del sistema mediante las inversas de las funciones  $\varphi$  y  $\psi$ , dadas por (5.37) y (5.63) respectivamente, lo que implica la determinación de dichas inversas, y esto es en general complicado.
4. A diferencia con el caso continuo, la convergencia del observador discreto, aún a lazo abierto, impone severas restricciones, tanto en el sistema a observar como en la amplitud de los controles utilizados, restricción que se extiende a la velocidad de convergencia, así como al tipo de trayectorias (y modelos) a seguir en el caso de la operación a lazo cerrado.

# Capítulo 6

## Simulaciones

### 6.1 Introducción

En este Capítulo mostraremos simulaciones del comportamiento del observador tanto continuo como discreto. Para el caso continuo, exhibiremos el funcionamiento del observador completo a lazo cerrado en dos problemas de control:

1. El seguimiento, por parte de un brazo de robot de un sólo vínculo acoplado elásticamente a un actuador, de un modelo bilineal completamente controlable con controles acotados.
2. El seguimiento, por parte del brazo de robot de juntas rígidas PUMA 560, de una trayectoria arbitrariamente fijada en el espacio de estados.

En ambos casos se desarrollan los modelos matemáticos de los sistemas, se construyen los observadores y los controladores, y se muestran las simulaciones correspondientes.

Para el caso discreto, también se construye el observador completo para un modelo ya dado en ecuaciones de estado, y se lo simula para un control exterior de conmutación, es decir a lazo abierto.

### 6.2 El seguimiento de un modelo.

#### 6.2.1 El sistema a controlar.

Consideremos un brazo de robot de un sólo vínculo, cuyo movimiento de rotación está controlado por un motor acoplado a él elásticamente. Tal

acoplamiento entre actuadores y vínculos, aparece cuando la transmisión del movimiento se hace mediante correas, cuando hay una caja reductora entre ellos, o cuando el eje del actuador es muy largo.

Generalmente se modela dicho acoplamiento, llamado *junta elástica*, mediante un resorte lineal de torsión que vincula al eje del actuador, supuesto rígido, y el extremo del vínculo. En nuestro caso, el modelo obtenido es el que muestra la figura:

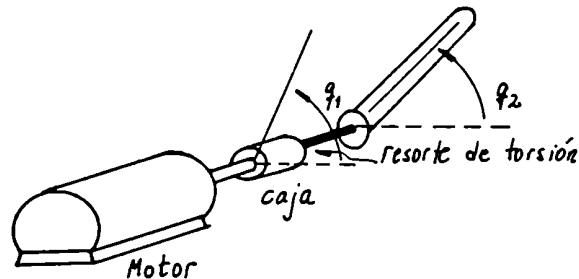


Figura 6.1

El sistema viene descrito por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, una que caracteriza el balance mecánico en el eje del actuador, y otra que caracteriza el balance mecánico del vínculo. Llamando  $q_1$  y  $q_2$  a los ángulos que forman el eje y el vínculo, respectivamente, respecto de un marco fijo de referencia, la ecuación del actuador se puede escribir:

$$J_1 \ddot{q}_1 + F_1 \dot{q}_1 - \frac{K_r}{N} \left( q_2 - \frac{q_1}{N} \right) = T \quad (6.1)$$

en la cual  $J_1$  es el momento de inercia del eje y la caja de reducción,  $F_1$  es la constante de fricción viscosa,  $K_r$  la constante de elasticidad del resorte que representa el acoplamiento elástico,  $N$  es la relación de transmisión de la caja reductora, y  $T$  el torque producido por el actuador en el eje. Por otra parte, la ecuación en el vínculo es:

$$J_2 \ddot{q}_2 + F_2 \dot{q}_2 + K_r \left( q_2 - \frac{q_1}{N} \right) + mg \cos(q_2) = 0 \quad (6.2)$$

en la cual  $m$  y  $d$  son la masa y la posición del centro de masa del vínculo, respectivamente.

Si elegimos el vector de estados

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

y como salida tomamos, como es natural, la posición angular  $q_2$  del vínculo respecto del marco fijo de referencia, el sistema completo se escribirá en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6.4)$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-K_r}{J_1 N^2} x_1 + \frac{K_r}{J_1 N} x_2 - \frac{F_1}{J_1} x_3 \\ \frac{K_r}{J_2 N} x_1 - \frac{K_r}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos(x_2) - \frac{F_2}{J_2} x_4 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

y

$$h(x) = x_2, \quad (6.6)$$

donde hemos tomado  $u = T$  la entrada al sistema.

### 6.2.2 El observador.

Como

$$L_f h(x) = x_4 \quad (6.7)$$

$$L_f^2 h(x) = \frac{K_r}{J_2 N} x_1 - \frac{K_r}{J_2} x_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos(x_2) - \frac{F_2}{J_2} x_4 \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} L_f^3 h(x) &= \frac{K_r}{J_2 N} x_3 - \frac{F_2 K_r}{J_2^2 N} x_1 + \frac{F_2}{J_2^2} x_2 + \frac{F_2}{J_2^2} m g d \cos(x_2) \\ &\quad - \left[ \frac{F_2}{J_2} + \frac{K_r}{J_2} - \frac{mgd}{J_2^2} \text{sen}(x_2) \right] x_2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

se vé que

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= L_g L_f h(x) = L_g L_f^2 h(x) = 0 \\ L_g L_f^3 h(x) &= \frac{K_r}{J_2^2 N} \neq 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

$\forall x$ . Por lo tanto, con  $l = m = 1$ ,  $\rho = 4$  se vé que el sistema cumple con las hipótesis de la Proposición 3.2 y por lo tanto admite un observador de tipo Luenberger.

Por otra parte, de (6.7) - (6.10), (3.13) y (3.27), se tiene

$$w = \varphi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ L_f^3 h(x) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

y

$$x = \varphi^{-1} \begin{bmatrix} \frac{J_2 N}{K_r} w_3 + N w_1 + \frac{Nmgd}{K_r} \cos(w_1) + \frac{NF_2}{K_r} w_2 \\ w_1 \\ \frac{J_2 N}{K_r} w_4 + N w_2 + \frac{NF_2}{K_r} w_3 - \frac{Nmgd}{K_r} \text{sen}(w_1) w_2 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

De (6.11), obtenemos

$$(\varphi^{-1})_*(\varphi(\hat{x})) = \begin{bmatrix} N - \frac{Nmgd}{K_r} \text{sen}(\hat{x}_2) & \frac{NF_2}{K_r} & \frac{NJ_2}{K_r} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Nmgd}{K_r} \hat{x}_4 \cos(\hat{x}_2) & N - \frac{Nmgd}{K_r} \text{sen}(\hat{x}_2) & \frac{NF_2}{K_r} & \frac{NJ_2}{K_r} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, a partir de (3.47), tomando

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

las ecuaciones del observador serán:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_3 + \left[ \left( N - \frac{Nmgd}{K_r} \text{sen}(\hat{x}_2) \right) k_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{NF_2}{K_r} k_2 + \frac{NJ_2}{K_r} k_3 \right] (y - \hat{x}_2) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_4 + k_1(y - \hat{x}_2) \quad (6.15)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -\frac{K_r}{J_1 N^2} \hat{x}_1 + \frac{K_r}{J_1 N} \hat{x}_2 - \frac{F_1}{J_1} \hat{x}_3 + \frac{1}{J_1} u \quad (6.16)$$

$$+ \left[ -\frac{Nmgd}{K_r} \hat{x}_4 \cos(\hat{x}_2) k_1 + \left( N - \frac{Nmgd}{K_r} \sin(\hat{x}_2) \right) k_2 \right. \\ \left. + \frac{NF_2}{K_r} k_3 + \frac{NJ_2}{K_r} k_4 \right] (y - \hat{x}_2) \quad (6.17)$$

$$\dot{\hat{x}}_4 = \frac{K_r}{J_2 N} \hat{x}_1 - \frac{K_r}{J_2} \hat{x}_2 - \frac{mgd}{J_2} \cos(\hat{x}_2) - \frac{F_2}{J_2} \hat{x}_4 + k_2(y - \hat{x}_2) \quad (6.18)$$

### 6.2.3 El modelo a seguir y el control de seguimiento.

El modelo cuyo comportamiento entrada - salida pretendemos seguir es uno completamente controlable con controles acotados. Esto es particularmente importante porque al ser el modelo capaz de alcanzar cualquier punto de su espacio de estados en tiempo finito, con un control acotado independientemente de tal punto, lo mismo sucederá con el espacio de salida de nuestro sistema, es decir, se podrá alcanzar cualquier punto de él en tiempo finito. Además, para el modelo bilineal que se pretende seguir, basta tomar el control saturado en los valores máximo y mínimo, lo que permite determinarlo mediante métodos de minimización estocástica (Cfr.[51]). La ventaja de esto reside en el hecho de que no es necesario cambiar la cota del control cada vez que se pretende alcanzar algún punto del espacio de salida del sistema no lineal. El modelo que se pretende seguir responde a las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = A\eta + N\eta w + b\eta \\ y_b = c\eta \end{cases} \quad (6.19)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En [52] se dan las condiciones para que un sistema no lineal pueda seguir a este modelo bilineal, y se puede ver que nuestro sistema cumple con las hipótesis allí establecidas.

La ley de control conociendo los estados del sistema, de acuerdo a (4.127), vendrá dada por

$$u = \frac{cA^4\eta - L_f^4h(x)}{L_gL_f^3h(x)} + \frac{cA^3b + cA^3N\eta}{L_gL_f^3h(x)}w. \quad (6.20)$$

Dado que en nuestro caso utilizaremos las variables de estado estimadas por el observador, el control vendrá dado por la ecuación (4.128):

$$u = \frac{cA^4\eta - L_f^4h(\hat{x})}{L_gL_f^3h(\hat{x})} + \frac{cA^3b + cA^3N\eta}{L_gL_f^3h(\hat{x})}w - \frac{1}{L_gL_f^3h(\hat{x})} \sum_{j=1}^4 g_j (L_f^{j-1}h(\hat{x}) - cA^{j-1}\eta). \quad (6.21)$$

#### 6.2.4 Simulaciones.

En este apartado se muestran los resultados de la simulación del seguimiento del modelo bilineal, cuando se supone que el control exterior, ( $w$ ), está acotado por el valor  $M = 0.3$ .

En este caso, y de acuerdo a [52], obtenemos los siguientes valores para las matrices  $A$  y  $N$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= -8.5, a_2 = 6, a_3 = -9, a_4 = 0 \\ n_1 &= -7.5, n_2 = 10, n_3 = -3, n_4 = 4. \end{aligned}$$

Supusimos además las siguientes constantes para el sistema:

$$\begin{aligned} K_r &= 60, N = 10, m = 1, g = 9.81, d = 0.3 \\ J_1 &= 0.1, J_2 = 0.3, F_1 = 0.1, F_2 = 0.15. \end{aligned}$$

Con el objeto de tener una cierta velocidad de respuesta en el seguimiento, tomamos los autovalores del controlador, y del observador como

$$\{-5, -5.1, -5.2, -5.3\}$$

y

$$\{-6, -6.1, -6.2, -6.3\},$$

lo que resultó en los siguientes valores para los coeficientes de las matrices  $\tilde{G}$ , y  $K$  respectivamente:

$$\begin{aligned}g_1 &= 296.184, g_2 = 285.686, g_3 = 103.31, g_4 = 16.6 \\k_1 &= 24.6, k_2 = 226.9, k_3 = 930.1, k_4 = 1429.6.\end{aligned}$$

Los resultados de las simulaciones se muestran en las figuras 6.2 a 6.9:

Las figuras 6.2 a 6.5 muestran los errores de observación  $e_i = \hat{x}_i - x_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  respectivamente; en ellas se puede ver que la convergencia a cero de dichos errores se da en aproximadamente  $1.6\text{seg.}$ , es decir aproximadamente tres veces la constante de tiempo más lenta del observador.

En la figura 6.6 se puede ver el error de seguimiento de la salida del modelo,  $e_y = y - y_b$ , que está en la banda de 0.2, y que converge a cero en aproximadamente  $2.1\text{seg.}$ , ligeramente más lento que para el observador, ya que esta dinámica viene regida por los autovalores del controlador.

En la figura 6.7 se vé la trayectoria de las salidas del modelo y del sistema, y como esta prácticamente se confunde con aquella a los  $2.1\text{seg.}$ .

La figura 6.8 muestra el control  $w$  que se le aplica al modelo, para que este siga la trayectoria de salida que se vió en la figura anterior, y la figura 6.9 muestra el control  $u$ , esto es, el control que efectivamente se le aplica al sistema para seguir al modelo.

Los errores iniciales de observación y salida se tomaron como :

$$e_1 = -0.1, e_2 = -0.1, e_3 = -0.2, e_4 = -0.2, e_y = 0.1$$

En estas figuras se puede ver el correcto comportamiento del observador a lazo cerrado en el seguimiento del modelo propuesto.

## 6.3 El seguimiento de una trayectoria.

### 6.3.1 El sistema a controlar.

En este apartado consideraremos el seguimiento de una trayectoria por parte de un brazo de robot de juntas rígidas. Este sistema se puede considerar como una cadena cinemática abierta constituida por  $n$  cuerpos rígidos, (*los vínculos*) unidos entre sí y a un punto fijo mediante  $n$  articulaciones, en las cuales están ubicados los actuadores, (*motores*).



Si, por simplicidad suponemos que las juntas son rotatorias, el comportamiento del brazo de robot de juntas rígidas viene descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden (Cfr.[26])

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j + D_i = T_i \quad (6.22)$$

$1 \leq i \leq n$ , donde

- $n$  es el número de juntas,
- $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$  son la posición, la velocidad y la aceleración angulares de la junta  $i$ ,
- $T_i$  es el torque actuante en la junta  $i$ ,
- $D_{ii}, D_{ij}$  son las inercias efectivas y acopladas,
- $I_{ai}$  es la inercia del actuador refejada en la junta  $i$ ,
- $D_{ijj}, D_{ijk}$  son los coeficientes de las fuerzas centrípetas y de Coriolis,
- $D_i$  es la fuerza de gravedad.

Supondremos que los actuadores del manipulador robótico son motores de corriente continua controlados por armadura, y cuyos voltajes de entrada son las variables de control. La tensión de armadura del  $i$ -ésimo motor viene regida por la siguiente ecuación:

$$R_i i_i + L_i \frac{di_i}{dt} + K_i^e \frac{d\omega_i}{dt} = u_i \quad (6.23)$$

$1 \leq i \leq n$ , con

- $\omega_i$  es la posición angular del rotor,
- $R_i$  es la resistencia del circuito de armadura,
- $L_i$  es la inductancia del circuito de armadura,
- $i_i$  es la corriente de armadura,
- $K_i^e$  es la constante de tensión del motor,
- $u_i$  es la tensión de armadura.

Más aún,

$$\omega_i = N_i q_i, \quad (6.24)$$

$$T_i = N_i K_i^T i_i \quad (6.25)$$

donde

- $N_i$  es la relación de transmisión de la  $i$ -ésima junta, y
- $K_i^T$  es la constante de torque del  $i$ -ésimo motor.

Para obtener una ecuación dinámica que tenga en cuenta tanto a los actuadores como al brazo robótico, se debe combinar las ecuaciones (6.22), (6.23) y (6.24), con lo que se obtiene (Cfr.[20]), si  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ , y

$$D(q) = D_1 \begin{bmatrix} D_{11} + I_{a1} & D_{12} & D_{1n} \\ D_{12} & D_{22} + I_{a2} & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{nn} + I_{an} \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \text{diag} \left\{ \frac{L_1}{N_1 K_1^T}, \dots, \frac{L_n}{N_n K_n^T} \right\}$$

$$P(q, \dot{q}, \ddot{q}) = [P_1(q, \dot{q}, \ddot{q}), \dots, P_n(q, \dot{q}, \ddot{q})]^T,$$

donde

$$\begin{aligned} P_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= \frac{R_i}{N_i K_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \right] + \\ &+ \frac{L_i}{N_i K_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n \dot{D}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\dot{D}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \right. \\ &\quad \left. + 2D_{ijk} \ddot{q}_j \dot{q}_k) + \dot{D}_i \right] + K_i^e N_i \dot{q}_i \quad i : 1, \dots, n, \end{aligned}$$

el sistema completo escrito en la variable de estados  $x$  (Cfr.[28]):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ -D^{-1}(x^1)P(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D^{-1}(x^1) \end{bmatrix} u, \quad (6.26)$$

con  $x^1 = q$ ,  $x^2 = \dot{q}$  and  $x^3 = \ddot{q}$ , o

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^n g_j(x) u_j(t),$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ -D^{-1}P(x) \end{bmatrix}$$

y

$d_j(x)$  el la  $j$ -ésima columna de la matriz  $D^{-1}$  (dimensión  $n$ ),  
 $g_j(x) = (0, \dots, 0, d_j(x))^T$  (dimensión  $3n$ ).

En nuestro problema de seguimiento de trayectorias, supondremos que los estados a los que tenemos acceso son sólo las posiciones angulares  $q$ , suposición que se ve corroborada en la práctica por la dificultad de la medición de velocidades o aceleraciones (Cfr.[50]). Por lo tanto, las salidas del sistema serán

$$y_i = h_i(x) = x_i^1 = q_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.27)$$

### 6.3.2 El observador.

De las ecuaciones del modelo (6.26) y (6.27), se tiene

$$\begin{aligned} L_f h_i(x) &= \dot{q}_i \\ L_{g_j} L_f h_i(x) &= 0 \\ L_f^2 h_i(x) &= \ddot{q}_i \\ L_{g_j} L_f^2 h_i(x) &= d_{ji}(x) \end{aligned}$$

donde  $d_{ji}(x)$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $d_j(x)$ .

Dado que la matriz  $D^{-1}$  es inversible globalmente, (es la matriz de los términos de inercia y por lo tanto simétrica y definida positiva), el sistema cumple con las hipótesis de la Proposición 3.2, con  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = 3$

En este caso, podemos pues tomar el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} w = \varphi(x) &= [h_1, L_f h_1, L_f^2 h_1, \dots, h_n, L_f h_n, L_f^2 h_n]^T \\ &= [q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n]^T. \end{aligned}$$

En las nuevas variables  $w$  el sistema (6.26) se escribe

$$\begin{aligned} \dot{w}_i^1 &= w_i^2 \\ \dot{w}_i^2 &= w_i^3 \\ \dot{w}_i^3 &= L_f^3 h_i(\varphi^{-1}(w)) + \sum_{j=1}^n L_{g_j} L_f^2 h_i(\varphi^{-1}(w)) u_j(t) \end{aligned} \quad (6.28)$$

con  $w_i^1 = q_i$  (posiciones),  $w_i^2 = \dot{q}_i$  (velocidades),  $w_i^3 = \ddot{q}_i$  (aceleraciones),  $i = 1, \dots, n$ , y la matrix  $L_g L_f h = D^{-1}$ .

Tomando, como en el Capítulo 3, las matrices siguientes:

$$A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag}\{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{R}^{3n \times n}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L_F H = (L_f^3 h_1, \dots, L_f^3 h_n) \in \mathcal{R}^{n \times 1},$$

$$C = \text{diag}\{C_1, \dots, C_n\} \in \mathcal{R}^{n \times 3n}, \quad C_i = [1 \ 0 \ 0],$$

la ecuación (6.28) se escribe

$$\dot{w} = Aw + B [L_F H(\varphi^{-1}(w)) + D^{-1}(\varphi^1(w))u(t)] \quad (6.29)$$

$$y = Cw, \quad (6.30)$$

De la forma de  $\varphi$ , que es una transformación *lineal*, (en realidad es una permutación), se deduce que es indistinto considerar la variable  $x$  o la  $w$ . Por lo tanto podemos construir el observador según la ecuación (3.45), en vez de la (3.47) como en el ejemplo anterior. Entonces, teniendo en cuenta (6.30), la ecuación del observador será

$$\dot{\hat{w}} = (A - KC)\hat{w} + BL_F H(\varphi^{-1}(\hat{w})) + B\hat{D}^{-1}(\varphi^{-1}(z^1))u + Ky \quad (6.31)$$

con  $K \in \mathcal{R}^{3n \times n}$ , de la forma

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ k_{12} & 0 & 0 \\ k_{13} & 0 & 0 \\ 0 & k_{21} & 0 \\ 0 & k_{22} & \vdots \\ 0 & k_{23} & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & k_{n1} \\ \vdots & \vdots & k_{n2} \\ 0 & 0 & k_{n3} \end{bmatrix}$$

### 6.3.3 La trayectoria a seguir y el control de seguimiento.

Consideremos la trayectoria a seguir, dada en el espacio de estados según

$$w_d(t) = ( q_{d1} \quad \dot{q}_{d1} \quad \ddot{q}_{d1} \quad \dots \quad q_{dn} \quad \dot{q}_{dn} \quad \ddot{q}_{dn} );$$

si tomamos los errores siguientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \hat{w}(t) - w(t) \\ \delta(t) &= w(t) - w_d(t) \\ e(t) &= \hat{w}(t) - w_d(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) \end{aligned}$$

entonces, si disponemos de los estados verdaderos del sistema, de acuerdo a (4.63), tendremos que el control exterior para el seguimiento de la trayectoria en forma asintótica será

$$v = \begin{bmatrix} q_{d1}^{(3)}(t) \\ \vdots \\ q_{dn}^{(3)}(t) \end{bmatrix} - \tilde{G}\delta(t), \quad (6.32)$$

donde la matriz de ganancia de seguimiento  $\tilde{G}$  es

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

y el control de realimentación, que entra efectivamente al sistema, de acuerdo a (4.64) es

$$u = -D(\varphi^{-1}(w))L_F H(\varphi^{-1}(w)) + D(\varphi^{-1}(w))v. \quad (6.34)$$

Como en nuestro caso se usa la estimación  $\hat{w}$ , utilizamos para  $v$  la ecuación (4.69), con lo que

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} q_{d1}^{(3)}(t) \\ \vdots \\ q_{dn}^{(3)}(t) \end{bmatrix} - \tilde{G}e(t). \quad (6.35)$$

y para  $u$  la (4.70)

$$u = -D(\varphi^{-1}(\hat{w}))L_F H(\varphi^{-1}(\hat{w})) + D(\varphi^{-1}(\hat{w}))\hat{v}. \quad (6.36)$$

Dada la particular estructura del sistema robótico aquí considerado, se puede ver (Cfr.[50]) que este cumple las hipótesis del Teorema 4.4 y por lo tanto se podrá encontrar matrices  $K$  y  $\tilde{G}$  que permitan seguir la trayectoria con la velocidad de convergencia deseada.

#### 6.3.4 Simulaciones.

En la simulación se implementa el seguimiento por parte del modelo del brazo de robot de la siguiente trayectoria:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} q_{d1}(t) \\ q_{d2}(t) \\ q_{d3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04\pi t^2 + 0.125\pi \\ 0.5\text{scn}(0.4\pi t) \\ 0.4t \end{bmatrix},$$

con  $0 \leq t \leq 5$  segundos.

Este seguimiento se realiza a lazo cerrado con el observador anterior y según la ley de control dada por (6.35) - (6.36). Usamos el modelo dinámico del manipulador robótico PUMA 560 ([27], [28]). Sólo las tres primeras

juntas de este manipulador se modelaron y simularon. Los motores tienen una potencia de 100 Watts, y voltajes de saturación  $\pm 45$  volts.

La matriz  $\tilde{G}$  se eligió de forma tal que los autovalores en las ecuaciones de error de seguimiento del sistema controlado (4.76) para cada junta fueran:

$$\{-15, -14 - 13\}.$$

La matriz  $K$  se eligió para que los autovalores en las ecuaciones de error de observación (4.77) fueran:

$$\{-17, -18, -19, -20, -21, -22, -23, -24, -25\}.$$

Las condiciones iniciales para la simulación se tomaron:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0.6, & q_2(0) &= 0.1, & q_3(0) &= 0.2 \\ \hat{q}_1(0) &= 0.5, & \hat{q}_2(0) &= 0.2, & \hat{q}_3(0) &= 0.35 \\ \dot{q}_i(0) &= \dot{\hat{q}}_i(0) = \ddot{q}_i(0) = \ddot{\hat{q}}_i = 0 & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 6.10 a 6.17. Las figuras 6.10 - 6.12 muestran los errores de seguimiento angulares, de velocidad y de aceleración respectivamente, según

$$\begin{aligned} e_j &= q_j(t) - q_{d_j}(t) \\ e_{j+3} &= \dot{q}_j - \dot{q}_{d_j}(t) \quad j = 1, 2, 3 \\ e_{j+6} &= \ddot{q}_j(t) - \ddot{q}_{d_j}(t). \end{aligned}$$

Las figuras 6.13 - 6.15 muestran la performance del observador a lazo cerrado, exhibiendo los errores

$$\begin{aligned} eo_j &= \hat{q}_j(t) - q_j(t) \\ eo_{j+3} &= \dot{\hat{q}}_j(t) - \dot{q}_j(t) \quad j = 1, 2, 3 \\ eo_{j+6} &= \ddot{\hat{q}}_j(t) - \ddot{q}_j(t). \end{aligned}$$

La figura 6.16 muestra los voltajes de control reales de los motores de las tres juntas. La comparación entre las trayectorias real y deseada del efector del brazo en el espacio de trabajo se muestran en la figura 6.17, donde se pueden ver los errores de posición en las tres coordenadas  $e_x, e_y, y e_z$ .

En las figuras anteriores se puede apreciar la diferencia de velocidades de convergencia del observador y de las trayectorias, lo que refleja las diferencias entre los autovalores de diseño. También se puede apreciar el excelente comportamiento de todo el sistema a lazo cerrado, pese a que las condiciones iniciales fueron elegidas en forma por demás desfavorables. Asimismo, se vé que los voltajes de control se mantienen dentro de la zona de no saturación.

## 6.4 Un observador en tiempo discreto.

### 6.4.1 El sistema y el observador

Con el objeto de mostrar las técnicas de diseño del observador discreto completo expuestas en el Capítulo 5., consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x_1)_{k+1} = (1 + (x_1)_k)u_k \\ (x_2)_{k+1} = (x_1)_k + (x_3)_k \\ (x_3)_{k+1} = ((x_3)_k + \cos((x_2)_k))u_k, \end{cases} \quad (6.37)$$

con salidas

$$\begin{cases} (y_1)_k = (x_2)_k \\ (y_2)_k = (x_1)_k. \end{cases} \quad (6.38)$$

Entonces, a partir de (5.37), (5.39) y (5.48), obtenemos:

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

$$\Gamma(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + x_1 + \cos(x_2) + x_3 \\ 1 + x_1 \end{bmatrix} u, \quad (6.40)$$

y además,  $\rho_1 = 2$ ,  $\rho_2 = 1$ . Entonces, se puede ver que si  $w = \varphi(x)$ , tendremos

$$\begin{cases} (w_1)_{k+1} = (w_2)_k \\ (w_2)_{k+1} = ((w_2)_k + \cos((w_1)_k) + u_k)u_k \\ (w_3)_{k+1} = ((w_3)_k + u_k)u_k, \end{cases} \quad (6.41)$$

y

$$\varphi^{-1}(w) = \begin{bmatrix} w_3 \\ w_1 \\ w_2 - w_1 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Por lo tanto la ecuación del observador, de acuerdo a (5.54), será:

$$\begin{cases} (\hat{x}_1)_{k+1} = (1 + (\hat{x}_1)_k)u_k + k_2^1((y_2)_k - (\hat{x}_1)_k) \\ (\hat{x}_2)_{k+1} = (\hat{x}_1)_k + (\hat{x}_3)_k + k_1^1((y_1)_k - (\hat{x}_2)_k) \\ (\hat{x}_3)_{k+1} = ((\hat{x}_3)_k + \cos((\hat{x}_2)_k))u_k \\ \quad + k_1^2((y_1)_k - (\hat{x}_2)_k) - k_2^1((y_2)_k - (\hat{x}_1)_k). \end{cases} \quad (6.43)$$



Como  $m_{\varphi^{-1}} = \|(\varphi^{-1})_*\| = 1.618$  y

$$\|\Gamma(\bar{x}, u) - \Gamma(x, u)\| \leq \|B_1\| \|\bar{x} - x\| |u| \quad \text{con}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces}$$

$$\nabla(\|u\|) = 1.8478|u|.$$

Si tomamos  $\beta = 0.8$  y  $\alpha = 0.1$ , tendremos  $\lambda_{11} = 0.4, \lambda_{12} = \lambda_{22} = 0.04$ ,  $M(\alpha) = 3.0125$  y

$$K = \begin{bmatrix} 0.36 & 0 \\ 0.016 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

#### 6.4.2 Simulaciones.

En las figuras 6.18 - 6.24 se exhiben los resultados de la simulación del comportamiento del observador a lazo abierto para un control de conmutación con valor de saturación 0.6 y un tiempo de muestreo de 0.05 *seg.* Las condiciones iniciales se tomaron como:

$$x_1 = 0.3, x_2 = 0.5, x_3 = -0.2, \hat{x}_1 = -2.3, \hat{x}_2 = -0.5, \hat{x}_3 = 1.2.$$

En las figuras 6.18 - 6.20 se pueden ver los errores de observación  $e_i = \hat{x}_i - x_i, i = 1, \dots, 3$ ; en ellas se puede apreciar que el error cae prácticamente a cero para  $t = 0.6$  *seg.*, lo que es coherente con la adopción de  $\beta$ , pues al ser el tiempo de muestreo  $\Delta t = 0.05$  *seg.*, el tiempo de decaimiento corresponde a doce pasos de evolución, y  $\beta^{12} \cong 0.055$ .

En las figuras 6.21 - 6.23 se ven las trayectorias reales en el espacio de estados, y en la 6.24 el control exterior aplicado.

Es importante notar que de acuerdo a la ecuación (5.76) debería ser  $|u| \leq 0.06$ ; sin embargo la simulación muestra el adecuado funcionamiento del observador para controles diez veces mayores que tal cota, por lo que podemos concluir que limitación en las amplitudes de los controles dada por la ecuación antedicha es bastante conservativa. De todas formas el comportamiento, respecto de la velocidad de convergencia es el predicho por los resultados del Capítulo 5.

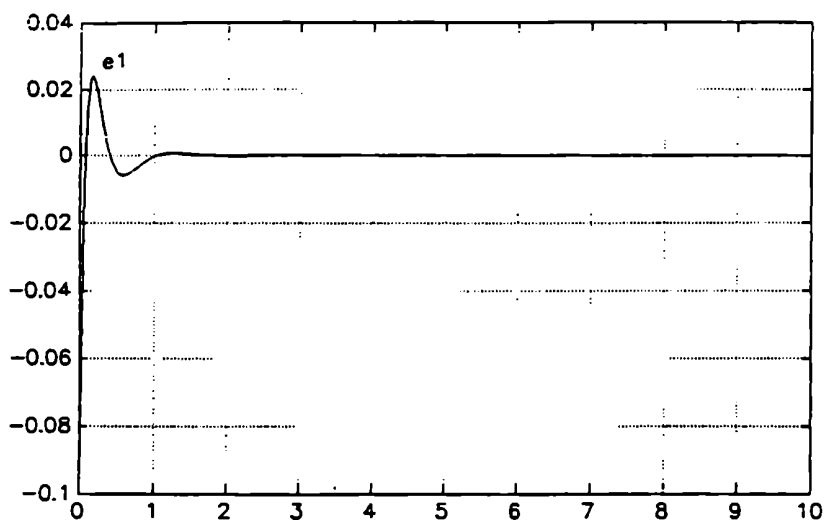
## 6.5 Conclusiones.

En este capítulo se simuló el comportamiento del observador continuo a lazo cerrado tanto en el seguimiento de modelos como en el de trayectorias, y el del observador discreto a lazo abierto. Las simulaciones para el observador continuo se hicieron sobre sistemas reales con los siguientes resultados:

- En el primer caso se simuló un brazo simple de junta elástica, y se siguió el comportamiento entrada - salida de un modelo completamente controlable con controles acotados, tarea particularmente importante, dada la relativa sencillez del modelo, así como la posibilidad de determinar fácilmente para éste controles saturados de amplitud fija. El comportamiento del observador se ajustó a las pautas fijadas en el Capítulo 4.
- En el segundo caso se simuló el comportamiento de un modelo comercial de manipulador robótico, en el seguimiento de trayectorias. De nuevo, el comportamiento del sistema a lazo cerrado, se ajustó a los resultados obtenidos para el observador presentado.

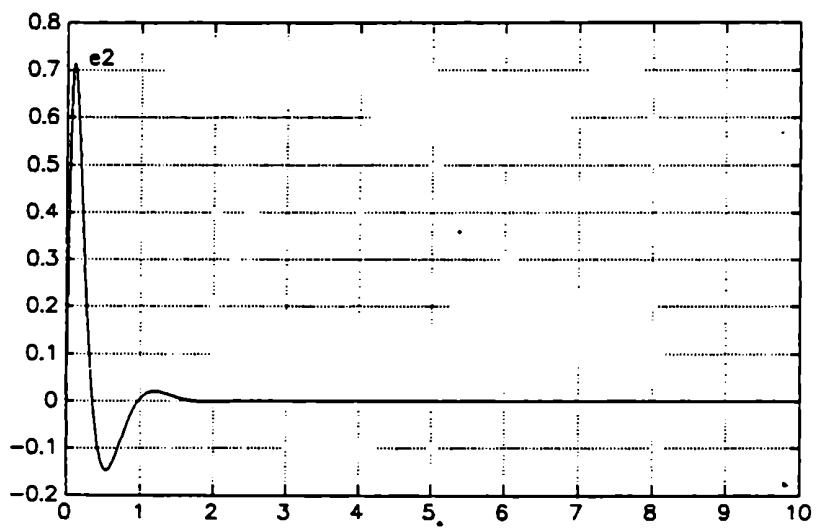
La simulación para el observador discreto, se realizó sobre un sistema descrito por su evolución en el espacio de estados, con control de conmutación, y a lazo abierto. El comportamiento fué acorde a los resultados del Capítulo 5 en lo que respecta a la velocidad de convergencia, y muy superior a ellos respecto de las cotas del control.

De lo expuesto anteriormente, se vé la relativa sencillez del diseño de los observadores, tanto continuo como discreto, y el correcto funcionamiento de los mismos en las tareas de control propuestas.



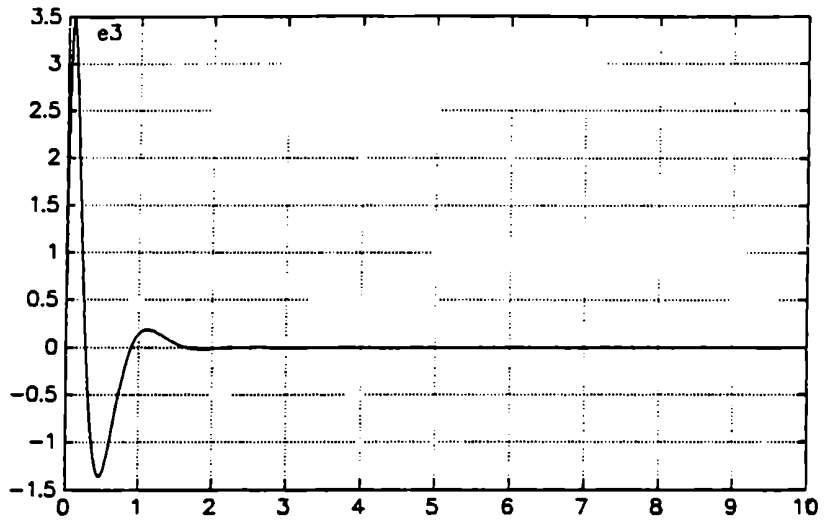
Figuro 6.2

t

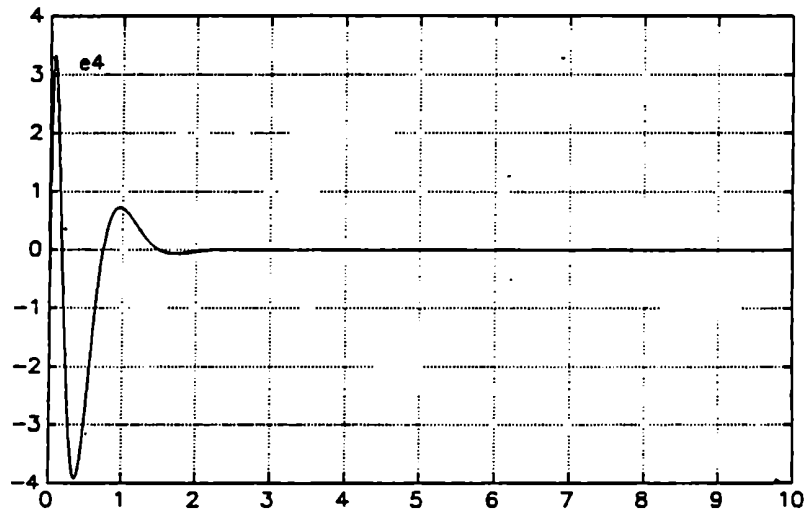


Figuro 6.3

t



Figuro 6.4



Figuro 6.5

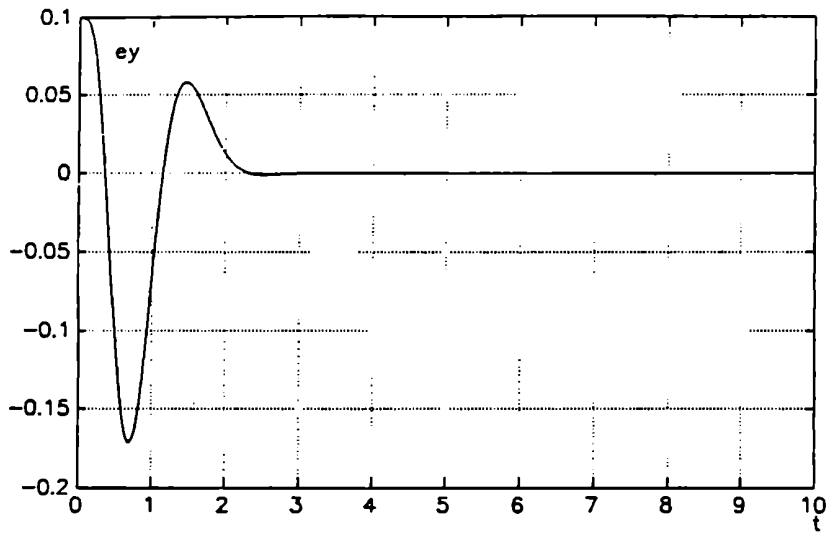


Figura 6.6

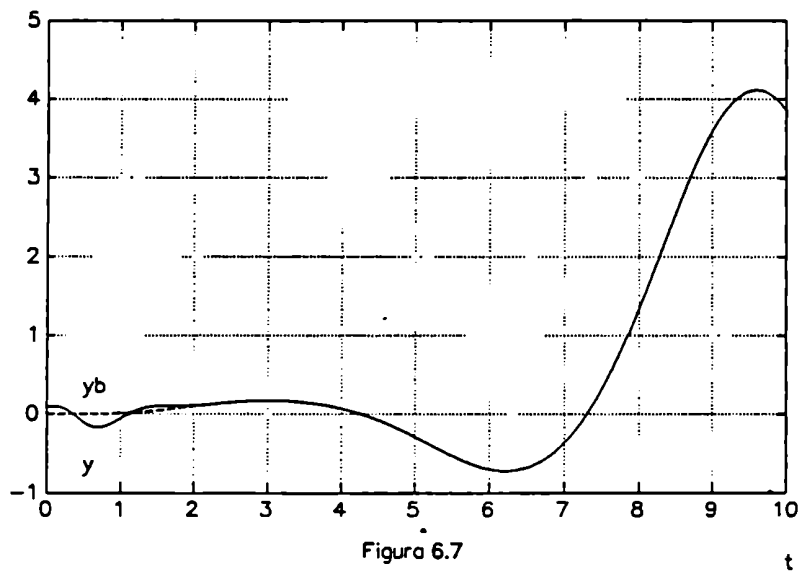


Figura 6.7

r

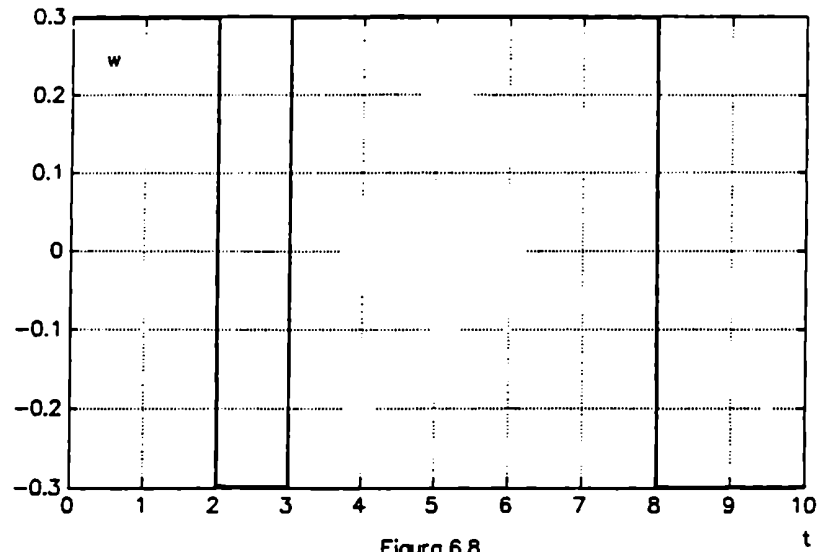


Figura 6.8

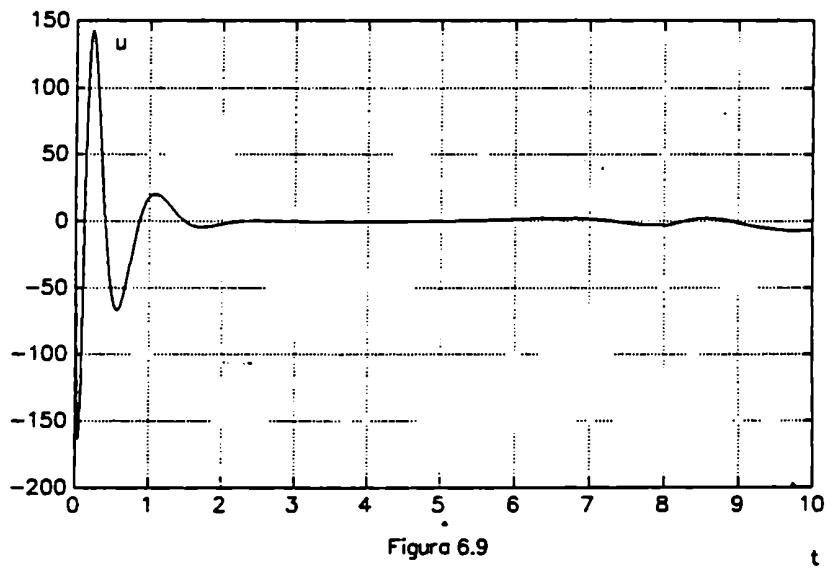
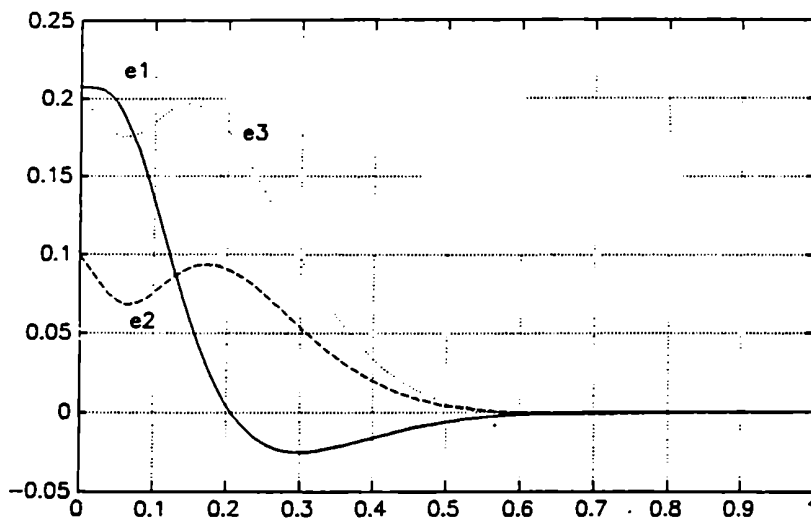
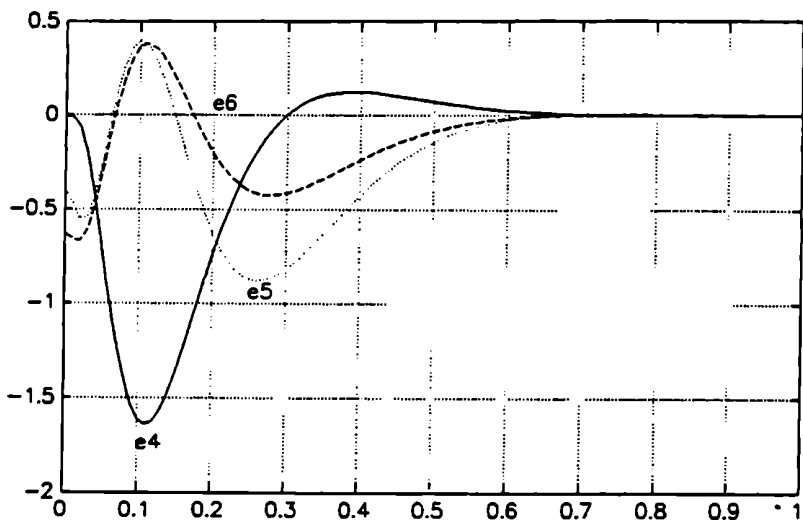


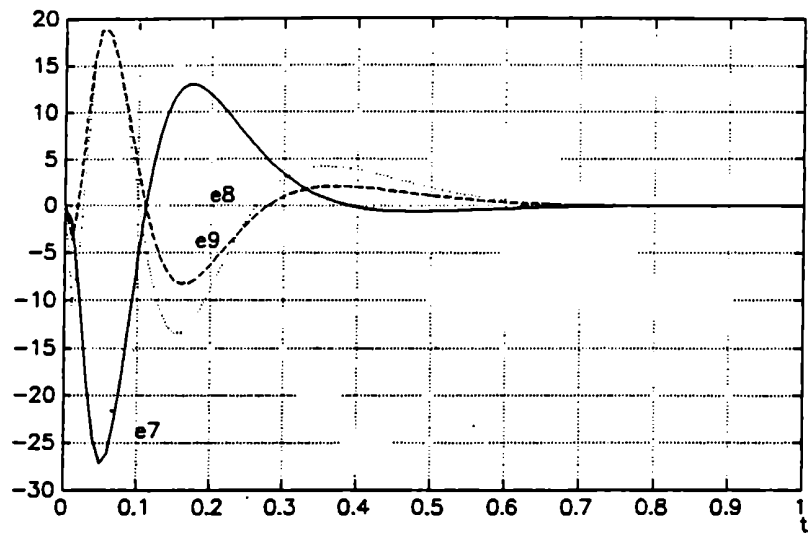
Figura 6.9



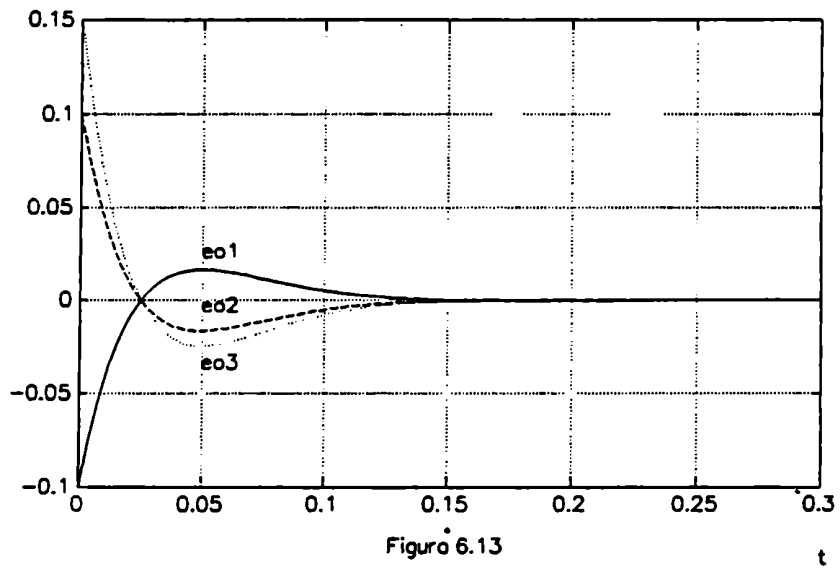
Figuro 6.10



Figuro 6.11



Figuro 6.12



Figuro 6.13



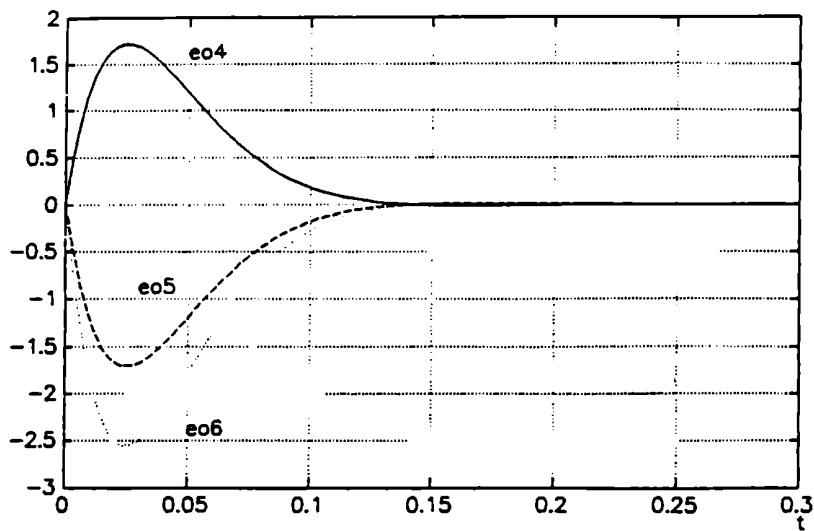


Figura 6.14

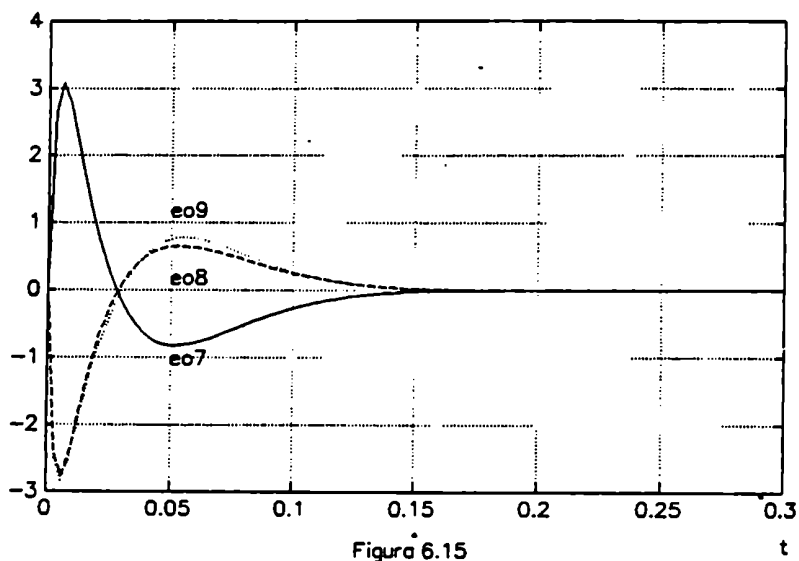


Figura 6.15

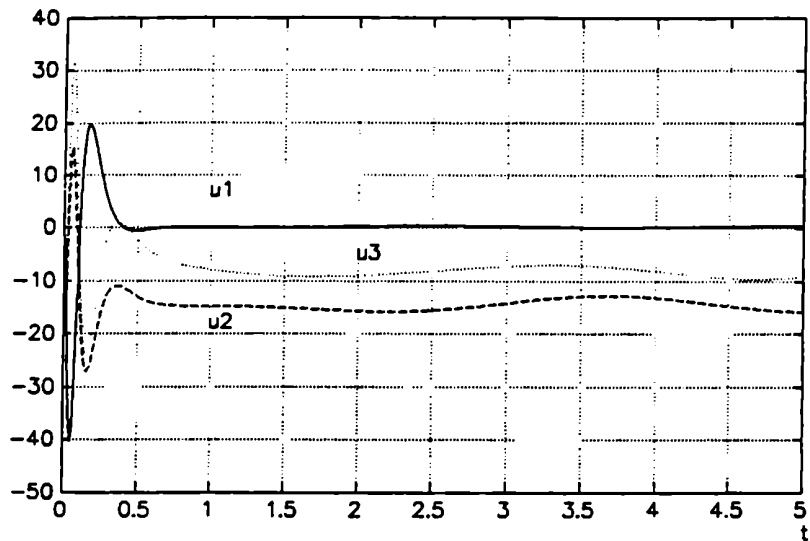


Figura 6.16

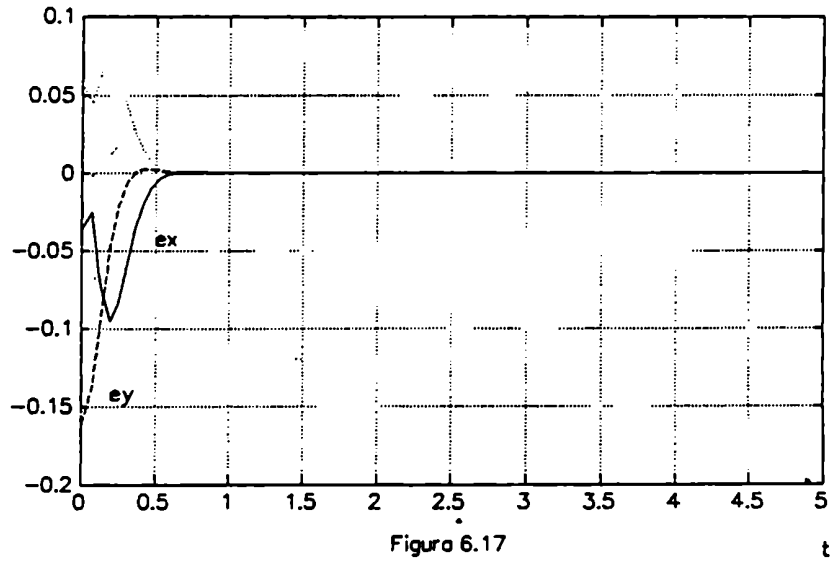


Figura 6.17

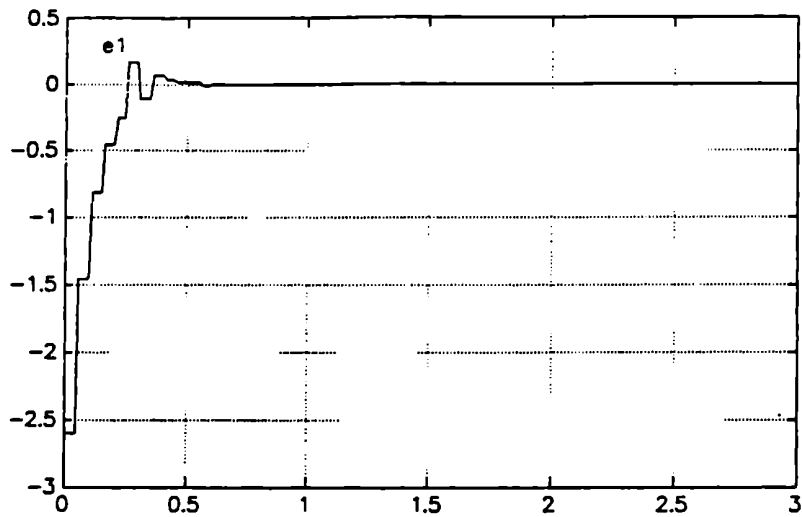


Figura 6.18

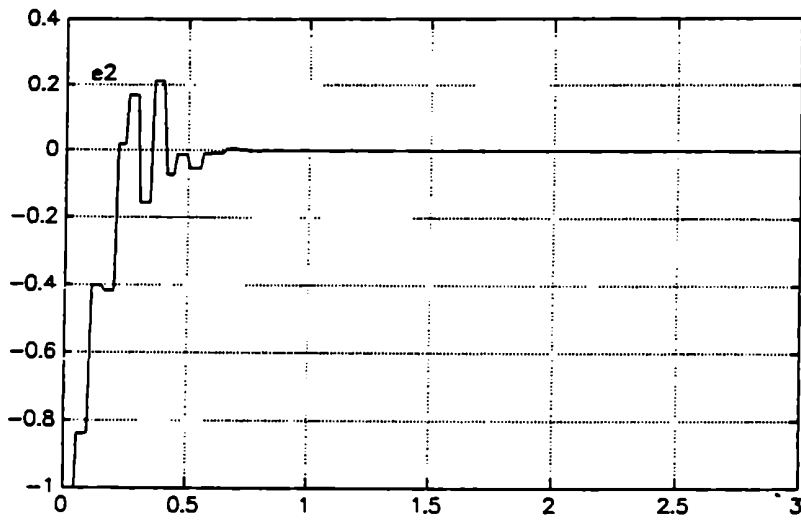
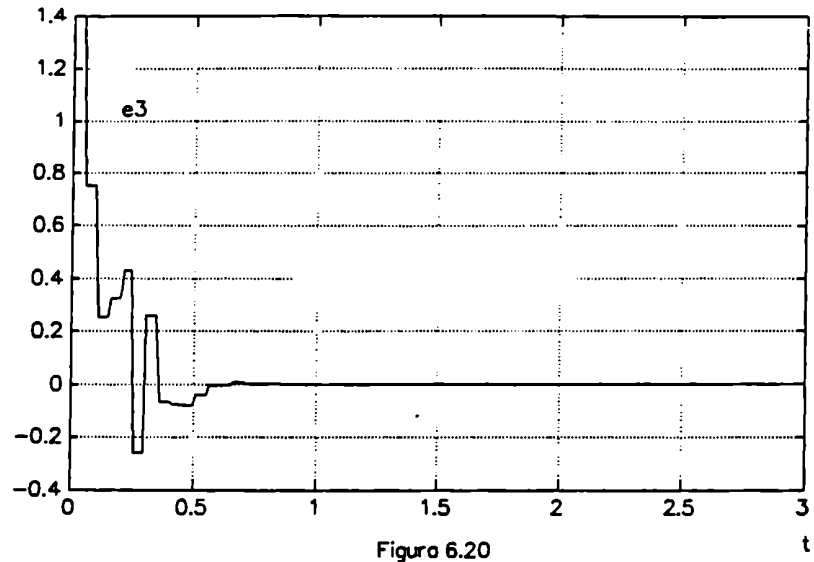
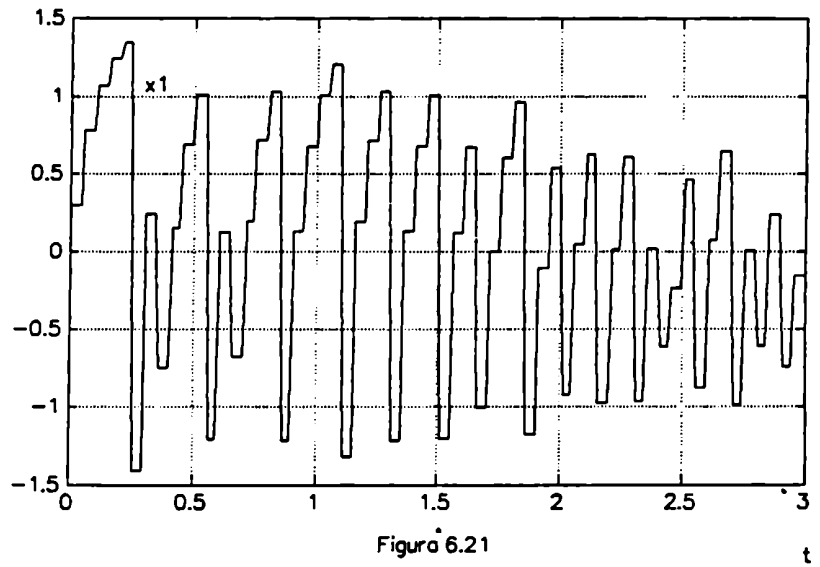


Figura 6.19

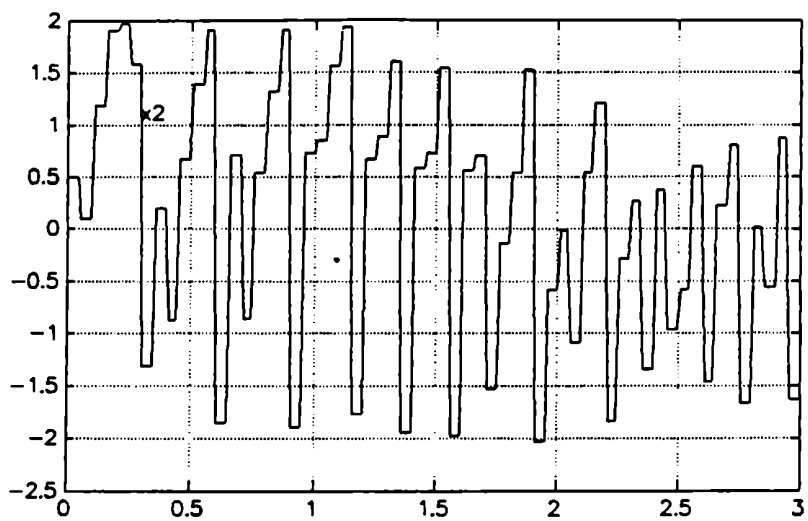
r



Figuro 6.20

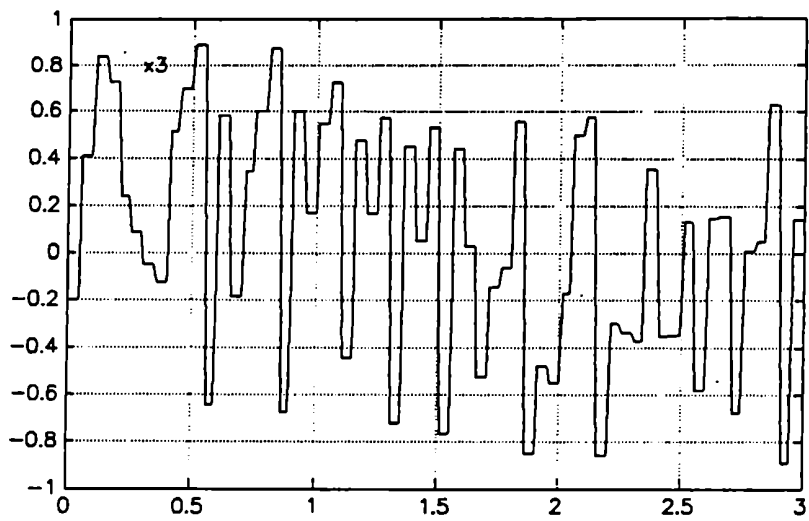


Figuro 6.21



Figuro-6.22

t



Figuro 6.23

t

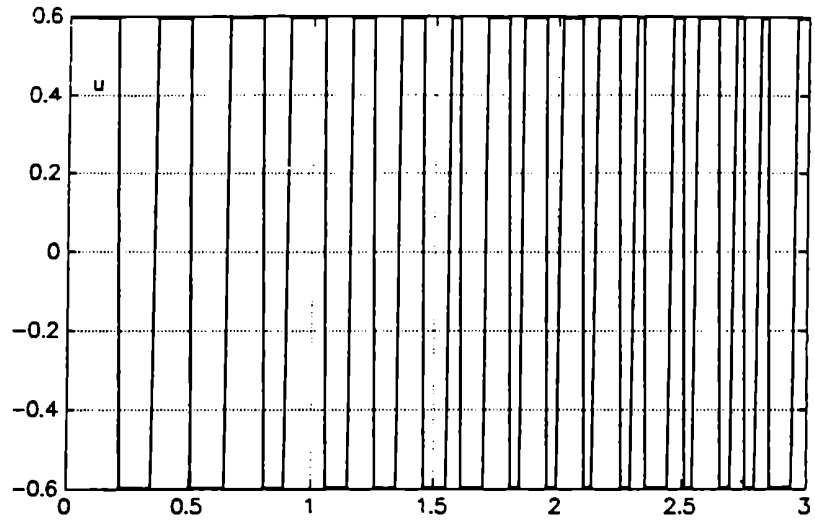


Figura 6.24

t



# Referencias

- [1] Bestle, D., Zeitz, M.: *Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems*, Int. J. Control, Vol. 38, pp. 419-431, 1983.
- [2] Walcott, B.L., Corless, M.J., Zak, S.H.: *Comparative study of nonlinear state observation techniques*, Int. J. Control, Vol. 45, pp. 2109-2139, 1987.
- [3] Zeitz, M.: *The extended Luenberger observer for nonlinear systems*, Systems & Control Letters, Vol. 9, pp. 149-156, 1987.
- [4] Keller, H., Fritz, H.: *Design of nonlinear observers by a two-step transformation*, en Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, editado por M. Fliess y M. Hazewinkel, Reidel, 1986.
- [5] Reboulet, C., Champetier, C.: *A new method for linearizing nonlinear systems: the Pseudolinearization*, Int. J. Control, Vol. 40, pp. 631-634, 1984.
- [6] Bastin, G., Gevers, M.R.: *Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 33, pp. 650-657, 1988.
- [7] Baumann, W.T., Rugh, W.J.: *Feedback control of nonlinear systems by expanded linearization*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 31, pp. 40-45, 1986.
- [8] Tsiniias, J.: *Observer design for nonlinear systems*, Sistem & Control Letters, Vol. 13, pp. 135-142, 1989.
- [9] Tsiniias, J.: *Further results on the observer design problem*, Systems & Control Letters, Vol. 14, pp. 411-418, 1990.
- [10] Tsiniias, J.: *A theorem on global stabilization of nonlinear systems by linear feedback*, Systems & Control Letters, Vol. 17, pp. 357-362, 1991.



- [11] Gauthier, J.P., Hammouri, H., Othman, S.: *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, pp. 875-880, 1992.
- [12] Kazaros, D.: *Sur l'observabilité et les observateurs de systèmes non-linéaires*, Tesis Doctoral, Grenoble, 1987.
- [13] Celle, F., Gauthier, J.P., Kazaros, D., Sallet, G.: *Synthesis of nonlinear observers: A harmonic analysis approach*, Math. Syst. Theory, Vol. 22, pp. 291-322, 1989.
- [14] Sussmann, H.J.: *Single input observability of continuous time systems*, Math. Syst. Theory, Vol. 12, pp. 371-393, 1979.
- [15] Canudas de Wit, C., Fixot, N., Astrom, K.J.: *Trajectory tracking in robot manipulators via nonlinear state estimate feedback*, IEEE Trans. Robotics and Autom., Vol. 8, No.1, pp. 138-144, Feb. 1992.
- [16] Canudas de Wit, C., Fixot, N.: *Adaptive control of robot manipulators via velocity estimated feedback*, IEEE Trans. on Automatic Control, to appear.
- [17] Slotine, J-J.E., Hedrick, J.K., Misawa, E.A.: *On sliding observers for nonlinear systems*, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 109, pp. 245-252, 1987.
- [18] Canudas de Wit, C., Slotine, J-J.E.: *Sliding Observers for robot manipulators*, IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design, pp. 142-147, Capri, Italy, 1989.
- [19] Canudas de Wit, C., Astrom, K.J. and Fixot, N.: *Computed torque control via a nonlinear observer*, Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 4, pp. 443-452, 1990.
- [20] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Yun, X., Li, Z.: *Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 7, No. 1, pp.114-122, 1991.
- [21] Misawa, E.A., Hedrik, J.K.: *Nonlinear observers, A state-of-the-art survey*, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 111, pp. 344-352, 1989.

- [22] Ciccarella, G., Dalla Mora, M., Germani, A.: *A Luenberger-like observer for nonlinear systems*, Rep. No.34-90, Dept. Electrical Eng., University of L'Aquila, Italy, 1990.
- [23] Ciccarella, G., Dalla Mora, M., Germani, A.: *A Luenberger-like observer for nonlinear systems*, Int. J. Control, Vol. 57, pp. 537-556, 1993.
- [24] Lefschetz, S.: *Differential Equations: Geometric Theory*, 2nd. Edition, Interscience Pub.
- [25] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*, 2nd. Edition, Springer, 1989.
- [26] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Yun, X.: *Third order dynamic equations and nonlinear feedback for PUMA 560 robot arm*, Washington Univ., Robotics Lab. Rep. SSM-RL-85-04, 1985.
- [27] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Yun, X. and Ding, X.: *Dynamic equations for six-link Puma 560 Robot arm*, Rep. SSM-RL-86-05, Washington Univ., 1986.
- [28] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Li, Z. and Ganguly, S.: *Dynamic equations for Puma 560 robot arm*, Rep. SSM-RL-85-13, Washington Univ., 1989.
- [29] van der Schaft, A.J.: *Observability and controllability for smooth nonlinear systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 20, No. 3, pp. 338-354, May 1982.
- [30] Willems, J.C.: *System theoretic models for the analysis of physical systems*, Special Issue on Systems Theory and Physics, Recherche di Automatica, Vol. 10, pp. 71-106, 1979.
- [31] Nijmeijer, H., van der Schaft, A.J.: *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag, 1990.
- [32] Luenberger, D.G.: *An introduction to observers*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 16, No. 6, pp. 596-602, Dec. 1971.
- [33] Isidori, A., Krener, A., Gori-Giorgi, C., Mónico, S.: *Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 26, No. 2, pp. 331-345, April 1981.
- [34] Willems, J.C.: *Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design; Part II: almost conditionally invariant subspaces*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 27, No. 10, pp. 1071-1085, Oct. 1988.

- [35] van der Scaft, A.J.: *On nonlinear observers*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 30, No. 12, pp. 1254-1256, Dec. 1985.
- [36] Hermann, R.: *On the differential geometry of foliations*, Ann. of Math. Vol. 72, pp. 445-457, 1960.
- [37] Chua, L.O, Green, D.N.: *A qualitative analysis of behaviour of dynamic nonlinear networks: steady-state solutions of non-autonomous networks*, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 23, pp. 530-550, 1976.
- [38] Krener, A.J., Respondek, W.: *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 23, No. 2, pp. 197-216, 1985.
- [39] Phelps, A.R.: *On constructing nonlinear observers*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 29, No. 3, pp. 516-534, 1991.
- [40] Kai, X., Gao, W.: *On exponential observers for nonlinear systems*, Systems & Control Letters, Vol. 11, No. 3, pp. 319-325, 1988.
- [41] Krenner, A.J., Isidori, A.: *Linearization by output injection and nonlinear observers*, Systems & Control Letters, Vol. 3, No. 1, pp. 47-52, 1983.
- [42] Banks, S.P.: *A note on nonlinear observers*, Int. J. Control, Vol. 34, pp. 185-190, 1981.
- [43] Kou, S.R., Elliot, D.L., Tarn, T.J.: *Exponential observers for nonlinear dynamic systems*, Inf. Cont., Vol. 29, pp. 204-216, 1975.
- [44] Thau, F.E.: *Observing the state of nonlinear dynamic systems*, Int. J. Control, Vol 18, pp. 471-479, 1973.
- [45] Hermann, R., Krener, A.J.: *Nonlinear controllability and observability*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 22, pp. 728-740, 1977.
- [46] Kailath, T.: *Linear systems*, Prentice Hall, 1980.
- [47] Gauthier, J.P., Bornard, G.: *Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 26, pp. 922-926, 1981.
- [48] Marino, R.: *Adaptive observers for single output nonlinear systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 35, pp. 1054-1058, 1990.

- [49] D'Attellis, C.E., García, R.: *A nonlinear observer for nonlinear feedback robot arm control*, en Anales del RPIC'91, pp. 357-373, 1991.
- [50] D'Attellis, C.E., García, R.: *A robust nonlinear observer for trajectory tracking in robot manipulators*, por aparecer en IEEE Trans. on Robotics and Automation.
- [51] García, R., Segura, E.: *Síntesis de controles bang-bang utilizando Simulated Annealing*, en Anales del RPIC'89, pp. SCO 38-45, 1989.
- [52] D'Attellis, C.E., García, R.: *Output controllability of nonlinear systems with uniformly bounded controls*, Control Theory and Advanced Technology, Vol. 9, No. 2, June 1993.
- [53] D'Attellis, C.E., García, R.: *Observadores no lineales robustos y aplicaciones Robóticas*, en Anales del XIII Simposio Nacional de Control Automático, AADECA'92, pp. 119-130, 1992.
- [54] Hinrichsen, D., Pritchard, A.: *Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation*, Systems & Control Letters, Vol. 8, pp. 106-113, 1986.
- [55] Hinrichsen, D., Pritchard, A.: *Stability radii of linear systems*, Systems & Control Letters, Vol. 7, pp. 1-10, 1986.
- [56] Wonham, W.M.: *Linear multivariable control: a geometric approach*, Springer Verlag, 1979.
- [57] Vidyasagar, M.: *On the stabilization of nonlinear systems using state detection*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 25, pp. 504-509, 1980.
- [58] Di Benedetto, M.D., Isidori, A.: *The matching of nonlinear models via dynamic state-feedback*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 24, pp. 1063-1075, 1986.
- [59] Di Benedetto, M.D.: *A condition for the solvability of the nonlinear model matching problem*, en New trends in nonlinear control theory, editado por J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori y D. Leborgne, Springer Verlag, 1989.
- [60] Courant, R., Hilbert, D.: *Methods of mathematical physics*, Vol. II, Interscience Publ., 1953.

- [61] Grizzle, J.W.: *Local input-output decoupling of discrete time nonlinear systems*, Int. J. Control, Vol. 23, pp. 1517-1530, 1986.
- [62] Grizzle, J.W.: *Controlled invariance for discrete time nonlinear systems with application to the disturbance decoupling problem*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 30, pp. 868-874, 1985.
- [63] Nijmeijer, H.: *Observability of autonomous discrete time nonlinear systems: a geometric approach*, Int. J. Control, Vol. 36, pp. 867-874, 1982.
- [64] Mónaco, S., Normand-Cyrot, D., Isola, T.: *Nonlinear decoupling in discrete time*, preprints IFAC-Symposium of nonlinear control systems design, pp. 48-55, Italy, 1989.
- [65] La Salle, J.P.: *The stability and control of discrete processes*, Springer Verlag, 1986.
- [66] Mori, T.: *On the relationship between the spectral radius and the stability radius for discrete systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 35, pp. 835, 1990.
- [67] Kalman, R., Bertram, J.: *Control system analysis and design via the second method of Lyapunov, Part II: discrete time systems*, Trans. of the ASME, Journal of Basic Engineering, pp. 394-400, 1960.

## Apéndice A



C-T-A-T
Paper No. C91069R
Revised -/; For the Authors' File

*Contributed Paper*

## OUTPUT CONTROLLABILITY OF NONLINEAR SYSTEMS WITH UNIFORMLY BOUNDED CONTROLS\*

C. E. D'ATTELLIS<sup>1</sup> AND R. A. GARCÍA<sup>2</sup>

**Abstract.** The problem we deal with in this paper is the output controllability of a smooth single input-single output nonlinear system using uniformly bounded controls, i.e., the control  $\omega$  is bounded  $|\omega(t)| \leq M$  for a given  $M > 0$  independent of the point to be reached in the output attainability set of the nonlinear system. The approach to the problem consists of a modification of the system by using dynamic feedback so that the input-output behavior of the closed loop matches that of a bilinear system completely controllable with uniformly bounded control. We include an example that shows the success of the approach.

**Key Words—**

### 1. Introduction

The problem of output controllability of linear systems has been studied since the first years of modern control theory (Brockett and Mesarovic, 1964; Wonham, 1979; Athans and Falb, 1966; Morse, 1971). This paper deals with the output controllability of single input-single output nonlinear systems of the following type:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1)$$

$$y = h(x), \quad (2)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty$ .

During the last decade, a geometric theory for this class of systems has been developed (Isidori, 1989; van der Schaft, 1990), which has led to interesting applications in various fields of control engineering, like robotics, chemical reactors, etc.

Problems such as exact linearization, model matching, trajectory tracking and perturbation decoupling were solved by using nonlinear coordinate transformations and nonlinear feedbacks of the forms

1. (static)  $u = a(x) + b(x)\omega$ ,
2. (dynamic)  $u = a(z, x) + b(z, x)\omega$ ,

where  $z$  is the state of other dynamical system, different from (1)–(2).

---

\* Received by the editors July 25, 1991 and in revised form July 30, 1992.

<sup>1</sup> Comisión Nacional de Energía Atómica, Centro de Cálculo Científico, Centro Atómico Constituyentes, Av. Libertador 8250, 1429 Buenos Aires, Argentina.

<sup>2</sup> Departamento de Matemática, F.C.E. y N., Universidad de Buenos Aires, 1428 Buenos Aires, Argentina.





In this framework, the control  $\omega$  is designed in order to satisfy the desired performance. In the case with which this paper deals, i.e., the output controllability, we consider an important practical restriction: the control  $\omega$  must be bounded due to physical reasons. Then, the problem is the following. Given a point  $\bar{y}$  in the output attainability set, look for a *uniformly bounded* control  $\omega$ , such that the corresponding output  $y(t)$  reaches  $\bar{y}$  in finite time. We emphasize that uniformly bounded control means  $|\omega(t)| \leq M, \forall t \geq t_0$ , for a *given*  $M > 0$  independent of  $\bar{y}$ .

With this aim, a dynamic nonlinear feedback will be used in the system (1) in such a way the closed loop input-output behavior matches that of a completely controllable system with uniformly bounded controls. This is a classical "model matching problem" and has been solved usually to match *linear* systems (di Benedetto, 1989; di Benedetto and Isidori, 1986). The class of linear systems is not good enough in the case of complete controllability with uniformly bounded controls. In fact, as it is well known (Mohler, 1973), a linear system  $\dot{x} = Ax + bv$  is not completely controllable with  $v$  bounded, if the eigenvalues of  $A$  have negative real parts. Furthermore, in any linear system, every output value that can be reached in finite time can be reached with a bounded control, but the bound *depends* on the output value to be reached.

In order to apply certain results of controllability using uniformly bounded controls (Mohler, 1973), we will solve the *bilinear* model matching problem and demonstrate that given a nonlinear system (1)–(2), it is always possible to construct a bilinear system completely controllable with uniformly bounded controls that solve the bilinear model matching problem.

The paper is organized as follows. In Sec. 2, we show an example in which a linear model that solves both the model matching problem and the stabilization problem is not good for reaching a given value of the output. This example is continued in the last part of the paper, where we show a bilinear modification of the linear model that allows us to reach every output value with the same constrained control. The bilinear modification is made, using the results that we show in Secs. 3 and 4. In Sec. 3, we solve the bilinear model matching problem, and in Sec. 4, we establish the conditions under which it is possible to choose a completely controllable bilinear system with uniformly bounded control for solving the model matching problem.

## 2. Example. Part 1

We begin with some definitions. The system (1)–(2) has *strong relative degree*  $r$ , if Sastry and Bodson (1989)

- for  $k = 0, 1, \dots, r-2$  and for all  $x$

$$L_g L_f^k h(x) = 0$$

- for all  $x$

$$|L_g L_f^{r-1} h(x)| \geq \varepsilon > 0,$$

where  $L_f h(x) : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  stands for the Lie derivative of  $h(x)$  with respect to  $f(x)$ ; i.e.,



$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x).$$

We consider the following nonlinear system in  $\mathcal{R}^2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + (3x_2^2 + 1)u \\ y &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$P_1 = (0, 0)$  is an unstable equilibrium point, and  $P_2 = (0, 2)$  is an asymptotically stable equilibrium point. The strong relative degree is  $r = 1$ , since

$$L_g h(x) = 3x_2^2 + 1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^2.$$

The linear system

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\omega \\ y &= cz \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

with

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 1]$$

solves the linear model matching problem (Isidori, 1989) for both  $a_1$  and  $a_2$ , using the dynamic feedback

$$u(z, x) = \frac{cAz - L_f h(x) + \omega}{L_g h(x)}. \quad (5)$$

Then, if  $x_2(0) = z_2(0)$ , we obtain  $x_2(t) = z_2(t) \forall t \geq 0$ ; i.e., the same input-output behavior  $\omega - y$ . Taking  $a_1 = -2$  and  $a_2 = -4$ , the resulting linear system,

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 - 4z_2 + \omega \\ y &= z_2 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

is a compensator for (3); i.e., the pair formed by the compensator (6) and the feedback (5) solves the dynamic stabilization problem (Bacciotti, 1992). In fact, the closed loop (3)-(6)-(5) is

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 4x_2 + \omega \\ \dot{z}_1 &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

and

$$V(x_1, x_2, z_1) = x_1^2 + \frac{1}{16}x_2^2 + \frac{1}{8}z_1^2$$



is a Liapunov function for the free system corresponding to (7). Thus, the control  $\omega \equiv 0$  locally stabilizes the closed loop system (7) in  $(0, 0, 0)$ , and so an important control problem is solved.

However, the linear model (6) it is not good enough for solving the output controllability problem.

In order to analyze this assertion, let us consider that we want to drive the nonlinear system (3) from a given initial state in a neighborhood of  $(0, 0)$  toward the stable equilibrium point  $P_2 = (0, 2)$ , using a constrained control.

We observe that, in the free system corresponding to (3), the point  $(0, 2)$  is an attractor for the points of the form  $(x_1, 2)$ , since  $\dot{x}_1 = -x_1$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  and  $x_2 = 2$ . In consequence, we could think of using the linear model matching control scheme previously described, because we are facing an output controllability problem: to reach  $\bar{y} = 2$  and then on set  $u(t) = 0$  in (3).

As we have seen, the input-output behavior  $\omega - y$  of the closed loop (3)–(6)–(5) is the same as the input-output behavior of the linear system (6). Then, if we are able to design, on the linear system (6), a control function  $\omega$ , such that the output reaches the value  $\bar{y} = 2$  in finite time, the objective will be fulfilled.

Let us suppose a constrained control  $|\omega(t)| \leq 1.5, \forall t \geq 0$ .

For linear systems of type (4), it is easy to verify that, when  $0 < a_2^2 + 4a_1$ ,

$$|z_2(t)| \leq \frac{\|\omega\|_\infty}{\sqrt{\frac{a_2^2}{4} + a_1}}, \quad \forall t \geq 0,$$

where  $z_2(t)$  is the solution of (4), corresponding to the control  $\omega(t)$  and  $(0, 0)$  as an initial condition. Then, in our case,  $|z_2(t)| < 1.5/\sqrt{2} < 2$ , that is, the linear system cannot reach the desired target  $\bar{y} = 2$ . Obviously, with a different linear system, the desired output value could be reached, using the same constrained control; but in general, for each output value, we have to choose a different linear model. This drawback will be solved, using bilinear models, as we will see in the following sections. We will come back to this example in Sec. 5.

### 3. Bilinear Model Matching

In the following, we will consider that the initial condition  $x_0 = x(0)$  is an equilibrium point of the system; i.e.,  $f(x_0) = 0$ ; furthermore, without loss of generality, we will suppose that  $h(x_0) = 0$ .

**Proposition 3.1** Given

1. the system (1)–(2) with  $x_0 = x(0)$  and strong relative degree  $r < \infty$ ,
2. the bilinear system

$$\dot{z} = Az + Nz\omega + b\omega, \quad (8)$$

$$y_b = cz \quad (9)$$

with  $z \in \mathcal{Q}^m$ ,  $A, N \in \mathcal{Q}^{m \times m}$ ,  $b \in \mathcal{Q}^{m \times 1}$ ,  $c \in \mathcal{Q}^{1 \times m}$ ,  $z(0)$ , and

- (a) strong relative degree  $r_b = r$
- (b)  $m \geq r_b$ ,

then there exists a dynamic feedback,



$$u = \alpha(z, x) + \beta(z, x)\omega, \quad (10)$$

with  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty$ , such that for all  $t \geq 0$  the input-output behaviour  $\omega - y$  of the closed loop system (1)–(2)–(8)–(9)–(10) is the same as the input output behaviour  $\omega - y_b$  of the bilinear system (8)–(9).

*Proof.* We consider the expanded system,

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Az \\ f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} Nz+b \\ 0 \end{bmatrix} \omega, \quad (11)$$

$$e = h(x) - cz. \quad (12)$$

We look for the functions  $\alpha(z, x)$  and  $\beta(z, x)$ , so that by using the feedback (10), the output  $e$  becomes independent of  $\omega$ . Defining

$$\xi = \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix}, \quad F(\xi) = \begin{bmatrix} Az \\ f(x) \end{bmatrix}, \quad G(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix},$$

$$H(\xi) = h(x) - cz, \quad P(\xi) = \begin{bmatrix} Nz+b \\ 0 \end{bmatrix},$$

the system (11)–(12) can be written as

$$\dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)u + P(\xi)\omega, \quad (13)$$

$$e = H(\xi), \quad (14)$$

and we may consider  $u$  as the control and  $\omega$  as a known perturbation. Then, the problem can be stated as a *disturbance decoupling problem* (Isidori, 1989). Let us calculate the relative degree  $r_E$  of the system (13)–(14) without perturbations; i.e.,  $\omega = 0$ . As

$$L_f^k H(\xi) = -cA^k z + L_f^k h(x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L_g L_f^k H(\xi) &= \begin{bmatrix} -cA^k & \frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix} \\ &= L_g L_f^k h(x), \quad \forall k \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

then  $r_E = r$ . Replacing (10) in (13), we obtain

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F(\xi) + G(\xi)[\alpha(\xi) + \beta(\xi)\omega] + P(\xi)\omega \\ &= [F(\xi) + G(\xi)\alpha(\xi)] + [G(\xi)\beta(\xi) + P(\xi)]\omega. \end{aligned}$$

Following Isidori (1989, p.199–201), the decoupling problem can be solved, if and only if

$$[G(\xi)\beta(\xi) + P(\xi)] \in \Omega^\perp(\xi)$$





and

$$\alpha(\xi) = -\frac{L'_f H(\xi)}{L_c L'_f{}^{-1} H(\xi)}, \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \Omega^i &= \ker \begin{bmatrix} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \\ \vdots \\ \frac{\partial L'_f{}^{-1} H(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \\ &= \ker \begin{bmatrix} -c & \frac{\partial h(x)}{\partial x} \\ \vdots & \vdots \\ -cA^{r-1} & \frac{\partial L'_f{}^{-1} h(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \ker \mathcal{M}(\xi). \end{aligned}$$

This implies that the following must hold:

$$\mathcal{M}(\xi)[G(\xi)\beta(\xi) + P(\xi)] = 0.$$

Consequently,  $\beta(\xi) = \beta(z, x)$  must verify

$$\begin{aligned} -cNz - cb + \beta(z, x)L_g h(x) &= 0, \\ -cANz - cAb + \beta(z, x)L_g L_f h(x) &= 0, \\ &\dots = 0, \\ -cA^{r-1}Nz - cA^{r-1}b + \beta(z, x)L_g L'_f{}^{-1} h(x) &= 0. \end{aligned}$$

Since the relative degrees of the bilinear system and the nonlinear system are equal by hypothesis, the former equations are trivially identically zero, except the last one, from which we obtain the function  $\beta$

$$\beta(z, x) = \frac{cA^{r-1}Nz + cA^{r-1}b}{L_g L'_f{}^{-1} h(x)}. \quad (18)$$

Finally, from (15)–(16)–(17)–(18), the control law that solves the decoupling problem is

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\xi) + \beta(\xi)\omega \\ &= \frac{cA^r z - L'_f h(x)}{L_g L'_f{}^{-1} h(x)} + \frac{cA^{r-1}b + cA^{r-1}Nz}{L_g L'_f{}^{-1} h(x)} \omega. \end{aligned} \quad (19)$$

Using this feedback, the output  $e$  is decoupled from  $\omega$ ; i.e.,  $e(t)$  is the same whatever  $\omega$  may be; in particular, setting  $\omega = 0$  in (13) and (19) we obtain



Output controllability of nonlinear systems with uniformly bounded controls

$$\dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)\alpha(\xi), \quad (20)$$

$$e = H(\xi). \quad (21)$$

The point  $\xi_0 = [0, x_0]'$  is an equilibrium point of (20), because

$$f(x_0) = 0,$$

$$L_f^r h(x_0) = 0,$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$$

and

$$F(\xi_0) + G(\xi_0)\alpha(\xi_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x_0) \end{bmatrix} \left[ -\frac{L_f^r h(x_0)}{L_g L_f^{r-1} h(x_0)} \right] = 0.$$

Then,  $\xi(t) = \xi_0, \forall t \geq 0$  and  $H(\xi_0) = 0$ . Therefore,  $e(t) = 0, \forall t \geq 0$ ; i.e., there will be an exact output tracking on  $[0, \infty]$ .

#### 4. Bilinear Systems and Bounded Controls

As we have said, the reason for treating bilinear model matching is that for some of such systems, it is possible to obtain complete controllability with uniformly bounded controls. With this aim, we will use *phase-variable bilinear systems* (Rink and Mohler, 1968); i.e., those that verify

$$\dot{z} = Az + Nz\omega + b\omega, \quad (22)$$

$$y = cz, \quad (23)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_m \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_m \end{bmatrix},$$

$$b = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_m]', \quad c = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_m].$$

For these systems, the following result holds:

**Proposition 4.1.** (Mohler, 1973; Rink and Mohler, 1968) Consider the phase-variable bilinear system (22)–(23) and a compact set  $K$ , such that  $0 \in K \subset \mathcal{R}$ . Let for each  $\omega \in K$ ,

$$Z(\omega) = \left\{ z \in \frac{\mathcal{R}^m}{D(\omega)z} + b\omega = 0 \right\}$$

with  $D(\omega) = A + N\omega$ , by the set of equilibria of (22). Then, (22) is completely



controllable with uniformly bounded controls, if there exist two points  $\omega^+$  and  $\omega^-$  in the set  $K$ , such that

1. the real parts of the eigenvalues of  $D(\omega^+)$  and  $D(\omega^-)$  are positive and negative, respectively;
2.  $Z(\omega^+)$  and  $Z(\omega^-)$  belong to the same connected component of  $Z(K)$ .

**Proposition 4.2.** A phase-variable bilinear system always exists, verifying following conditions:

1. it is completely controllable, using uniformly bounded controls;
2. it solves the bilinear model matching problem.

*Proof.* Let  $r_b$  be the relative degree of the bilinear system. In order that  $r_b = r$  ( $r$  is the relative degree of the system (1)-(2)), it suffices that

$$cb = cAb = cA^2b = \dots = cA^{r-2}b = 0, \quad (24)$$

$$cN = cAN = cA^2N = \dots = cA^{r-2}N = 0, \quad (25)$$

$$cA^{r-1}b \neq 0, \quad (26)$$

$$cA^{r-1}N \neq 0. \quad (27)$$

However, the bilinear system is a phase-variable one, so

$$cb = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = c_m b_m.$$

Since  $b_m \neq 0$ , then  $c_m = 0$  in order to verify (24). Yet,

$$\begin{aligned} cAb &= [c_1 \ c_2 \quad c_{m-1} \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \end{bmatrix} \\ &= [0 \ c_1 \ c_2 \quad c_{m-1}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = c_{m-1} b_m, \end{aligned}$$

and  $c_{m-1} = 0$ . In the same way, we obtain  $c_{m-k} = 0$  for  $1 \leq k \leq r-2$  in order to verify (24), and from (26),  $c_{m-r+1} \neq 0$ . Then, if the vector  $c$  is

$$c = [c_1 \ c_2 \quad c_{m-r+1} \ 0 \ \dots \ 0], \quad (28)$$

the conditions (24) and (26) hold. Since each column of  $N$  has the same form as  $b$ , the vector  $c$  also verifies (25) and (27); i.e.,

$$cA^k N = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \quad 0 \leq k \leq r-2,$$

$$cA^{r-1} N = [c_{m-r+1} n_1 \quad c_{m-r+1} n_m] \neq 0.$$



Summing up, if the vector  $c$  has the form (28), then  $r_b = r$ . Thus, the hypothesis (a) of Proposition 3.1 is satisfied. The bilinear model matching problem is solved, using a phase-variable bilinear system (22)–(23) with  $m \geq r$  (hypothesis (b), Proposition 3.1).

We will show now that it is possible to chose the matrices  $A$  and  $N$  in such a way that the bilinear system is completely controllable with uniformly bounded controls. If

$$z^e(\omega) = [z_1^e(\omega), \dots, z_m^e(\omega)]^t$$

is an equilibrium point of equation (22) for some  $\omega \in K$ , i.e.,

$$0 = \dot{z}^e(\omega) = D(\omega)z^e(\omega) + b\omega,$$

then, as

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 + \omega n_1 & a_2 + \omega n_2 & a_3 + \omega n_3 & \dots & a_m + \omega n_m \end{bmatrix},$$

$$b = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ b_m]^t,$$

we obtain

$$0 = \dot{z}_1^e = z_2^e,$$

$$0 = \dot{z}_2^e = z_3^e,$$

$$\dots = \dots,$$

$$0 = \dot{z}_{m-1}^e = z_m^e,$$

$$0 = \dot{z}_m^e = (a_1 + \omega n_1)z_1^e + \dots + (a_m + \omega n_m)z_m^e + \omega b_m.$$

From this, these results

$$0 = (a_1 + \omega n_1)z_1^e + \omega b_m,$$

and for those  $\omega$ , such that  $a_1 + \omega n_1 \neq 0$ , the equilibrium point will be

$$z_e(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{\omega b_m}{a_1 + \omega n_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Since we are concerned about bounded control, we will take  $K = [-M, M]$  for some  $M > 0$ . If  $a_1, n_1$  are such that





$$\left| \frac{a_1}{n_1} \right| > M, \quad (29)$$

then  $a_1 + \omega n_1 \neq 0$  for all  $\omega \in K$ , and then the function  $z^\epsilon : K \rightarrow \mathcal{E}^m$  is continuous. It follows that  $z^\epsilon(K)$  is a connected set of  $\mathcal{E}^m$ . In this way, the second hypothesis of Theorem 4.1 is verified.

It remains to find  $\omega^+$  and  $\omega^-$  in  $K$  that verify the first hypothesis of Theorem 4.1.

As we know,  $m$  must be greater than or equal to  $r$ ; then, we assume that  $m$  is even, and  $m \geq r$ . As  $D(\omega)$  is a companion matrix, its characteristic polynomial is

$$Q(\omega, \lambda) = \lambda^m - (a_m + \omega n_m) \lambda^{m-1} - \dots - (a_1 + \omega n_1). \quad (30)$$

The polynomial

$$P(\omega, \lambda) = [\lambda - \alpha(\omega)]^{\frac{m}{2}} [\lambda - \bar{\alpha}(\omega)]^{\frac{m}{2}},$$

where  $\alpha : [-M, M] \rightarrow \mathcal{E}$  is a continuous function, has only two roots,  $\alpha(\omega)$  and its conjugate  $\bar{\alpha}(\omega)$ , both of multiplicity  $m/2$ ; but we can also write

$$P(\omega, \lambda) = \lambda^m + \delta_m(\omega) \lambda^{m-1} + \delta_2(\omega) \lambda + \delta_1(\omega), \quad (31)$$

where the coefficients  $\delta_i(\omega)$  are nonconstant polynomials in the variables  $\operatorname{Re}(\alpha(\omega))$  and  $|\alpha(\omega)|$ .

Taking

$$-\omega^- = \omega^+ = p \in [-M, M],$$

we look for matrices  $A$  and  $N$ , such that

$$P(p, \lambda) = Q(p, \lambda),$$

$$P(-p, \lambda) = Q(-p, \lambda).$$

It this way, the eigenvalues of  $D(p)$  will be  $\alpha(p)$  and  $\bar{\alpha}(p)$ , and those of  $D(-p)$ ,  $\alpha(-p)$  and  $\bar{\alpha}(-p)$ . We will choose  $p$  in such a way that the first hypothesis of Proposition 4.1 will be true.

By comparing (30) and (31) we obtain for  $1 \leq i \leq m$

$$-(a_i + p n_i) = \delta_i(p),$$

$$-(a_i - p n_i) = \delta_i(-p).$$

Then, for those  $p$ , such that  $\delta_i(p) - \delta_i(-p) \neq 0$ , the coefficients of the matrices  $A$  and  $N$  must verify

$$\frac{a_i}{n_i} = p \frac{\delta_i(p) + \delta_i(-p)}{\delta_i(p) - \delta_i(-p)}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (32)$$

In order to show that there exists  $p \in [-M, M]$  such that



$$\delta_i(p) - \delta_i(-p) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

we consider  $\delta_i(p) - \delta_i(-p)$  as a polynomial in four variables,

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4),$$

where

$$\eta_1 = \operatorname{Re}(\alpha(p)), \quad \eta_2 = |\alpha(p)|, \quad \eta_3 = \operatorname{Re}(\alpha(-p)), \quad \eta_4 = |\alpha(-p)|.$$

We denote

$$\Delta_i(\eta) = \Delta_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \triangleq \delta_i(\eta_1, \eta_2) - \delta_i(\eta_3, \eta_4),$$

and define

$$V_i = \left\{ \eta \in \frac{\mathcal{R}^4}{\Delta_i(\eta)} = 0 \right\}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$V = \bigcup_{i=1}^m V_i.$$

$V$  and  $V_i$  are closed algebraic varieties in  $\mathcal{R}^4$ , and we will demonstrate that the interior of  $V$  ( $\operatorname{int}(V)$ ) is the empty set. In fact, suppose

$$\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \eta_3^0, \eta_4^0) \in \operatorname{int}(V),$$

and let  $B_0$  be an open neighborhood of  $\eta^0$  contained in  $V$ ; then,

$$\Delta(\eta) \triangleq \prod_{i=1}^m \Delta_i(\eta) = 0, \quad \forall \eta \in B_0,$$

and since  $\mathcal{R}[\eta]$  is an integral domain, there exists  $i^*$ , such that

$$\Delta_{i^*}(\eta) = 0, \quad \forall \eta \in B_0.$$

Then,

$$\delta_{i^*}(\eta_1, \eta_2) - \delta_{i^*}(\eta_3, \eta_4) = 0, \quad \forall \eta \in B_0.$$

In particular,

$$\delta_{i^*}(\eta_1, \eta_2) = \delta_{i^*}(\eta_3^0, \eta_4^0),$$

and  $\delta_{i^*}(\eta_1, \eta_2)$  is constant in an open set of  $\mathcal{R}^2$ . This contradicts the fact that  $\delta_{i^*}$  is a nonconstant polynomial. Then, the complement of  $V$  ( $V^c$ ) is an open and dense subset of  $\mathcal{R}^4$ , so it is possible to choose  $\tilde{\eta} \in (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3, \tilde{\eta}_4) \in V^c$ , such that

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1 &> 0, \quad \tilde{\eta}_3 < 0, \\ \tilde{\eta}_2 &> \tilde{\eta}_4 > 0, \end{aligned} \tag{33}$$



$$\tilde{\eta}_2 \geq \tilde{\eta}_1, \quad \tilde{\eta}_4 \geq |\tilde{\eta}_3|. \quad (34)$$

Defining

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) \triangleq & \left( \tilde{\eta}_1 + i\sqrt{\tilde{\eta}_2^2 - \tilde{\eta}_1^2} \right) \left( \frac{p_0 + \omega}{2p_0} \right) \\ & + \left( \tilde{\eta}_3 + i\sqrt{\tilde{\eta}_4^2 - \tilde{\eta}_3^2} \right) \left( \frac{p_0 - \omega}{2p_0} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

we obtain

$$\operatorname{Re}(\alpha(p_0)) = \tilde{\eta}_1, \quad (36)$$

$$\operatorname{Re}(\alpha(-p_0)) = \tilde{\eta}_3, \quad (37)$$

$$|\alpha(p_0)| = \tilde{\eta}_2, \quad (38)$$

$$|\alpha(-p_0)| = \tilde{\eta}_4. \quad (39)$$

Then,

1. the first hypothesis of Proposition 4.1 is satisfied, because the eigenvalues of  $D(p_0)$ , i.e.,  $\alpha(p_0)$  and  $\bar{\alpha}(p_0)$ , have positive real parts (36), and the eigenvalues of  $D(-p_0)$ , i.e.,  $\alpha(-p_0)$  and  $\bar{\alpha}(-p_0)$  have negative real parts (37).
2. there exist real numbers,  $a_1, \dots, a_m, n_1, \dots, n_m$ , that verify the equation (32); in fact, as  $\tilde{\eta} \in V^c$

$$\Delta_i(\tilde{\eta}) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

we can take pairs  $(a_i, n_i)$ , such that

$$\frac{a_i}{n_i} = p_0 \frac{\delta_i(p_0) + \delta_i(-p_0)}{\delta_i(p_0) - \delta_i(-p_0)}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (40)$$

Up to now, any  $p_0 \in [-M, M]$  could be chosen, but if we write (32) explicitly for  $i=1$ , in order that  $p_0$  also verifies (29),

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{n_1} &= p_0 \frac{|\alpha(p_0)|^m + |\alpha(-p_0)|^m}{|\alpha(p_0)|^m - |\alpha(-p_0)|^m} \\ &= p_0 \frac{\tilde{\eta}_2^m + \tilde{\eta}_4^m}{\tilde{\eta}_2^m - \tilde{\eta}_4^m} \triangleq p_0 \mu. \end{aligned} \quad (41)$$

Taking (33) into account,  $\mu > 1$ , and choosing  $p_0$ , such that  $|p_0| \in (M/\mu, M]$ , the condition (29) holds.

## 5. Example. Part 2

Let us modify the linear system (6) used in Sec. 2, adding a bilinear term



$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 - 4z_2 + \omega(t) + n_1 z_1 \omega(t) + n_2 z_2 \omega(t) \\ y &= z_2. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

For this example, the feedback control given in (19) is

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{3x_2^2 + 1} \{ (2x_1 - 4x_2 - x_1 x_2 + 2x_2^2) - 2z_1 - 4z_2 \\ &\quad + (n_1 z_1 + n_2 z_2) \omega(t) \}. \end{aligned} \quad (43)$$

Selecting

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= 1 \quad \bar{\eta}_2 = \sqrt{1.5}, \\ \bar{\eta}_3 &= -\frac{1}{19} \quad \bar{\eta}_4 = 1, \end{aligned}$$

and  $p_0 = 1/2$ , we obtain from (35),

$$\alpha(\omega) = \frac{9 + 20\omega}{19} + i \left[ \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{360}{361}} + \omega \left( \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{360}{361}} \right) \right].$$

Then, from (31),

$$\begin{aligned} \delta_1(\omega) &= |\alpha(\omega)|^2, \\ \delta_2(\omega) &= 2\operatorname{Re} \alpha(\omega) = \frac{2}{19} [9 + 20\omega]. \end{aligned}$$

Taking into account (40) and (41),

$$\frac{a_1}{n_1} = 2.5, \quad \frac{a_2}{n_2} = \frac{9}{20},$$

and since the coefficients of the linear part are  $a_1 = -2$  and  $a_2 = -4$ , we obtain  $n_1 = -0.8$  and  $n_2 = -8.88$ . Figures 1 and 2 show the evolution of the state variables  $x_1$  and  $x_2$  of the closed loop system (3)-(42)-(43).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - \frac{1}{2} x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 4x_2 + \omega(t) - 0.8x_1 \omega(t) - 8.88x_2 \omega(t), \\ \dot{z}_1 &= x_2, \\ y &= x_2, \end{aligned}$$

corresponding to the control function  $\omega(t) = 0.5$ . As we can see, the desired output  $\bar{y} = 2$  is reached in finite time. In that instant, and by only considering the output, the control  $u$  of the nonlinear system is turned off ( $u \equiv 0$ ), and, as we have explained in Sec. 2 (Part 1 of this example),  $x_2 \equiv 2$  and  $x_1 \rightarrow 0$ , as we de-





sired. Since the bilinear model was constructed according to Proposition 4.2, every value in the output attainability set of the nonlinear system (1)–(2) can be reached, using the constrained control  $\|\omega\|_\infty \leq 1.5$ .

### References

- Athans, M. and P. Falb (1966). *Optimal Control*, Mc-Graw Hill, N. Y.
- Bacciotti, A. (1992). Local stabilizability of nonlinear control systems. *World Scientific*.
- Brockett, R. W. and M. Mesarovic (1964). The reproducibility of multivariable systems. *Joint Autom. Control Conf.*, 481–486.
- di Benedetto, M. D. (1989). A condition for the solvability of the nonlinear model matching problem. J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori and D. Leborgue (eds.), *New Trends in Nonlinear Theory*, Lecture Notes Control Inf Sci. 122, 102–115.
- di Benedetto, M. D. and A. Isidori, (1986). The matching of nonlinear models via dynamic state feedback. *SIAM J. Control and Optimiz.*, 24, 1063–1075.
- Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag.
- Mohler, R. (1973). *Bilinear Control Processes*. Academic Press, N. Y.
- Morse, A. S. (1971). Output controllability and system synthesis. *SIAM J. Control*, 9, 143–148.
- Nijmeijer, and A. van der Schaft, (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.
- Rink, R. and R. Mohler, (1968). Completely controllable bilinear systems. *SIAM J. Control*, 6, 477–486.
- Sastry, S. and M. Bodson (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Wonham, W. M. (1979). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag.

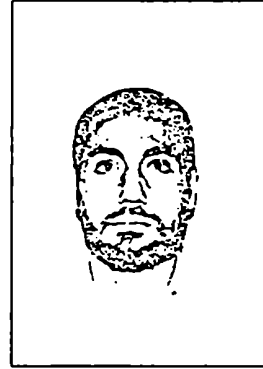


Carlos Enrique D'Attellis was born in Buenos Aires, Argentina in 1946. He received the Licenciado degree in Mathematics in 1971 and the Doctor degree in 1975 from the University of Buenos Aires. Since 1971, he has been with the Department of Mathematics of the University of Buenos Aires and with the Argentine Atomic Energy Commission (C.N.E.A.). His research interests include dynamical systems, mathematical control theory and signal analysis. He is the author of various papers in the above areas, co-editor of conference proceedings and author of the books *Introduction to Nonlinear Control Systems and its Applications*, (in Spanish, AADECA: Buenos Aires, 1992) and *Distributional Theory of*

*Linear Systems*, (in Spanish, University of Buenos Aires, 1987). He is also the author of several lecture notes dealing with mathematical education in engineering. He is currently a Professor of Systems and Control at the University of Buenos Aires, as well as the Head of the Scientific Applications Division at the C.N.E.A.



**Rafael A. García** was born in Buenos Aires in 1953. He received the Engineering degree in Electronics in 1979 and the Licenciado degree in Mathematics in 1984, both from the University of Buenos Aires. From 1979 to 1987, he worked in the *Instituto de Investigaciones Científicas y Técnicas de las Fuerzas Armadas* in the areas of electronic warfare and missile guidance control. From 1987 to 1991, he received a Research Fellowship from the *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* in the area of nonlinear control. At present, he is with the Department of Mathematics, University of Buenos Aires, where he is currently pursuing the Ph.D. degree in Mathematics. His main research interests are in nonlinear observers, neural networks and stochastic optimization.





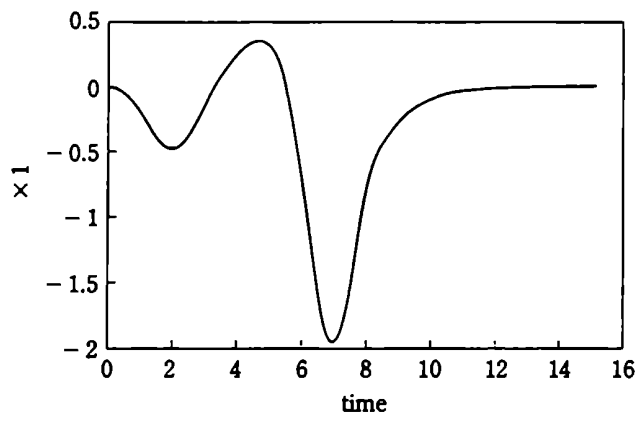


Fig. 1.

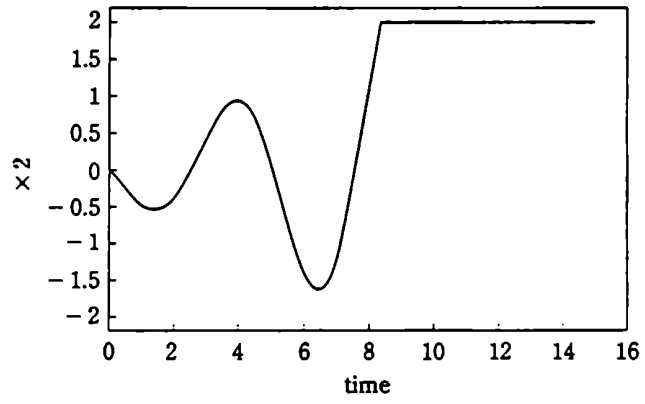


Fig. 2.



# A robust nonlinear observer for trajectory tracking in robot manipulators

*Carlos E. D'Attellis \**

Centro de Cálculo Científico (C.A.C)  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Av. Libertador 8250, 1429-Buenos Aires, Argentina  
E-Mail : cdatel@cnea.edu.ar

and

*Rafael A. García*

Departamento de Matemática, F.C.E. y N, Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria, 1428-Buenos Aires, Argentina

## **Abstract**

This paper deals with a problem treated by different authors in the last years: the use of a nonlinear observer in the control of a robot arm in order to estimate the state variables. The control theory has been used in robotics under the assumption of full state measurements, and it is interesting to investigate the possibility of controlling a robot manipulator by only using the angular position measurements. In this paper we propose a nonlinear observer with the following characteristics: 1) stability, 2) robustness respect to inaccuracies in the inertia matrix, and 3) stable closed loop for trajectory tracking (with the observer in it). The complete proof of these results is presented.

---

\*To whom correspondence should be addressed





# 1 Introduction

Different authors have recently been concerned with the problem of controlling robot manipulators using nonlinear observers in the control loop in order to estimate the state variables ([1], [2], [4], [6], [5], [19]). A robot manipulator having  $n$  revolute rigid joints is modeled by a system of second order differential equations resulting from the Lagrange equations, with the motor torques as inputs. Defining the joint displacements and velocities as states variables, the model can be written in the classical state space representation [13]. Since robot manipulators are generally equipped with encoders, it is possible to get precise measurements of joint displacements. But using nonlinear control methods the complete state vector is needed in the feedback, i.e., not only the joint displacements but also the velocities ([7],[13],[14],[15], [16]). However the velocities obtained by tachometers are in many cases contaminated by noise [1], and the velocities estimated by simple techniques such as position interpolation are not good enough, in particular for low velocities [2]. In addition, tachometers increase the weight of the moving parts of the robot, thereby decreasing the robot's efficiency [3], and their cost may be comparable to the cost of the motors themselves [4]. Thus, there are several technical reasons for using observers in the control of robot manipulators.

Additional difficulties are met when the actuator dynamics are included in the model. Tarn et. al. [7] have recently shown that combining motor equations with dynamic equations of manipulator links, a system of third order differential equations is obtained, with armature voltages as inputs. These equations provide a better model for the purpose of controller design. In this case the state variables are positions, velocities and accelerations.

The previous comments show that it is obviously useful to analyze the possibility of accurate estimations of velocities and accelerations from the angular position measurements, with the aim of using these estimations in the robot control loop.

At this point we are confronted with two problems. The first one was pointed out by Misawa and Hedrik [8] and Canudas de Wit et.al. [1]: the use of a nonlinear observer can destabilize the closed loop control system. The second one was observed by Canudas de Wit et.al. [1]: parameter uncertainties, in particular errors in the inertia matrix, introduce additional disturbance terms inducing inaccuracies in the estimated variables.

This paper presents an approach for trajectory tracking control using a nonlinear observer with the following characteristics: 1) the nonlinear observer is stable (or uniformly ultimately bounded in the sense used in [13]), and the speed of convergence can be adjusted adequately; 2) the observer is robust respect to inaccuracies in the inertia matrix; 3) the closed loop control (with the observer in it) is stable.

In the Section 2 we briefly introduce the third order model of robot manipulators, referring to Tarn et. al. for details [7]. The robust nonlinear observer is shown in Section 3, and the stability of the closed loop for trajectory tracking using the state estimations is proved in Section 4. Finally, we present some simulation results in Section 5.



## 2 Third order model of robot manipulators

As it was previously established in the Introduction, the most complete model for describing the dynamic behavior of a rigid robot manipulator is a set of third-order equations. We will use this model because it faces the nonlinear observer with the most difficult case: the observer has to estimate not only velocities but also accelerations. Since we will use Tarn's model [7] we will adopt their notation to avoid unnecessary repetitions, referring to [7] for details. The Tarn's third order model is the following:

$$D(q)\frac{d^{(3)}q}{dt} + P(q, \dot{q}, \ddot{q}) = u, \quad (1)$$

where  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^t$  ( $t$  denotes the transpose),  $q_i$  is the position of joint  $i$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)^t$  ( $u_i$  is the armature voltage of the  $i$ -th motor), and

$$D(q) = \text{diag}\left\{\frac{L_1}{N_1 K_1^T}, \dots, \frac{L_n}{N_n K_n^T}\right\} \begin{bmatrix} D_{11} + I_{a1} & D_{12} & D_{1n} \\ D_{12} & D_{22} + I_{a2} & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{nn} + I_{an} \end{bmatrix},$$

$$P(q, \dot{q}, \ddot{q}) = [P_1(q, \dot{q}, \ddot{q}), \dots, P_n(q, \dot{q}, \ddot{q})]^t,$$

with

$$P_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{R_i}{N_i K_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \right] +$$

$$+ \frac{L_i}{N_i K_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n \dot{D}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\dot{D}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \right.$$

$$\left. + 2D_{ijk} \ddot{q}_j \dot{q}_k) + \dot{D}_i \right] + K_i^e N_i \dot{q}_i \quad i : 1, \dots, n.$$

The system (1) can be written in the state space variable  $z$  as follows [7]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ -D^{-1}(x^1)P(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D^{-1}(x^1) \end{bmatrix} u, \quad (2)$$

where  $x^1 = q$ ,  $x^2 = \dot{q}$  and  $x^3 = \ddot{q}$ , or

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

( the definition of  $f(x)$  and  $g(x)$  is obvious).

As we have established in the Introduction we suppose that the output functions are

$$h_i(x) = x_i^1 \quad i = 1, \dots, n.$$



In this case, the state space transformation used in [7], is

$$\begin{aligned} z = \Phi(x) &= [h_1, L_f h_1, L_f^2 h_1, \dots, h_n, L_f h_n, L_f^2 h_n]^t \\ &= [q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n]^t. \end{aligned}$$

( $L_f h(z)$  denotes the Lie derivative of the function  $h(z)$  along the vector field  $f$ ).

In the new variable  $z$  the system (2) becomes

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\ \dot{z}_i^3 &= L_f^3 h_i(z) + \sum_{j=1}^n L_{g_j} L_f^2 h_i(z) u_j(t) \end{aligned} \quad (3)$$

where  $z_i^1 = q_i$  (positions),  $z_i^2 = \dot{q}_i$  (velocities),  $z_i^3 = \ddot{q}_i$  (accelerations),  $i = 1, \dots, n$ , and the matrix (see ([7]))  $L_g L_f h = D^{-1}$ .

Defining

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \text{diag}\{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{R}^{3n \times n}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ L_F H &= (L_f^3 h_1, \dots, L_f^3 h_n) \in \mathcal{R}^{n \times 1}, \\ C &= \text{diag}\{C_1, \dots, C_n\} \in \mathcal{R}^{n \times 3n}, \quad C_i = [1 \ 0 \ 0], \end{aligned}$$

equation (3) can be written

$$\dot{z} = Az + B [L_F H(z) + D^{-1}(z^1)u(t)] \quad (4)$$

$$y = Cz, \quad (5)$$

where  $z^1 = (z_1^1, \dots, z_n^1)$

**Remark 1:** The system (4)-(5) is observable.

**Remark 2:** The nonlinear feedback  $u = \alpha(z) + \beta(z)v$  with  $\beta(z) = D(z^1)$  and  $\alpha(z) = -D(z^1)L_F H(z)$ , transforms (4)-(5) into  $\dot{z} = Az + Bv, y = Cz$ , i.e. into  $n$  decoupled strings of triple integrators [12].

### 3 The robust nonlinear observer

As we already pointed out, an important drawback in the use of nonlinear observers as part of the control loop of robot manipulators is the error in the values of the elements of the



inertia matrix. Then we will suppose that we know an approximate value of  $D^{-1}(z^1)$  that we call  $\hat{D}^{-1}(z^1)$ , and that the difference between them,

$$\Delta D^{-1}(z^1) = \hat{D}^{-1}(z^1) - D^{-1}(z^1) \quad (6)$$

is bounded:

$$\|\hat{D}^{-1}(z^1) - D^{-1}(z^1)\| \leq M, \quad \wedge \quad (7)$$

**Proposition 3.1** *Given a number  $M > 0$  and a matrix  $D^{-1}(z^1)$  that verifies (7), the solution of*

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = (A - KC)\hat{z} + BL_F H(\hat{z}) + B\hat{D}^{-1}(z^1)u + Ky \quad (8)$$

with  $K \in \mathcal{R}^{n \times 3n}$ , has the following property for any initial condition  $\hat{z}(0)$  and any bounded control  $u$ : for all  $\delta > 0$  there exist a matrix  $K(\delta)$  and a positive number  $T(K)$  such that

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\| < \delta, \quad \forall t \geq T,$$

where  $z(t)$  is a solution of (4).

**Proof:** Defining

$$\varepsilon(t) = \|\hat{z}(t) - z(t)\|$$

and considering the systems (4) and (8), we obtain:

$$\dot{\varepsilon} = (A - KC)\varepsilon + B[L_F H(\hat{z}) - L_F H(z)] + B[\hat{D}^{-1}(z^1) - D^{-1}(z^1)]u(t).$$

Then,

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = e^{(A-KC)t}\varepsilon(0) &+ \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} B[L_F H(\hat{z}) - L_F H(z)] d\tau \\ &+ \int_0^t e^{(A-KC)(t-\tau)} B\Delta D^{-1}(z^1)u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

We choose the matrix (see Remark 1)

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} \end{bmatrix}$$

in such a way that the eigenvalues of  $A - KC$ ,

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3},$$





verify:

$$0 > \lambda_{11} > \lambda_{12} > \lambda_{13} > \dots > \lambda_{n1} > \lambda_{n2} > \lambda_{n3}.$$

Since  $A - KC = \text{diag}(M_1, \dots, M_n)$ , with

$$M_i = \begin{bmatrix} -k_{i1} & 1 & 0 \\ -k_{i2} & 0 & 1 \\ -k_{i3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

if  $\lambda_{ij}$  is an eigenvalue of  $M_i$ , the row vector  $(\lambda_{ij}^2, \lambda_{ij}, 1)$  is the corresponding eigenvector. Then we can diagonalize the matrix  $A - KC$  using the block diagonal matrix

$$V(\lambda) = \text{diag}[\Lambda_1, \dots, \Lambda_n],$$

where

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}), \\ \Lambda_i &= \begin{bmatrix} \lambda_{i1}^2 & \lambda_{i1} & 1 \\ \lambda_{i2}^2 & \lambda_{i2} & 1 \\ \lambda_{i3}^2 & \lambda_{i3} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

From (9),

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= V^{-1}(\lambda)e^{\Lambda t}V(\lambda)\varepsilon(0) + \\ &+ \int_0^t V^{-1}(\lambda)e^{\Lambda(t-\tau)}V(\lambda)B[L_F H(\hat{z}) - L_F H(z)] + \\ &+ \int_0^t V^{-1}(\lambda)e^{\Lambda(t-\tau)}V(\lambda)B\Delta D^{-1}(z^1)u(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

where

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}\}.$$

But

- $\|V(\lambda)B\| = \sqrt{n}$
- $L_F H(\cdot)$  is locally lipschitzian (see Appendix 1, Lemma 6.1), and  $L$  is the Lipschitz constant
- $\|\Delta D^{-1}(z^1)\| \leq M$
- $\|u(\tau)\| \leq V_M$  (since  $u_i$  are voltages, they are bounded)



Then,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(t)\| &\leq \|V^{-1}(\lambda)\|e^{\lambda_{11}t}\|V(\lambda)\|\|\varepsilon(0)\| + \\
&+ \sqrt{n}M\|V^{-1}(\lambda)\|V_M \int_0^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} d\tau + \\
&+ L\sqrt{n}\|V^{-1}(\lambda)\| \int_0^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} \|\varepsilon(\tau)\| d\tau.
\end{aligned} \tag{11}$$

Defining

$$\begin{aligned}
K_1(\lambda) &= \|V^{-1}(\lambda)\|\|V(\lambda)\| \\
\phi(t) &= e^{-\lambda_{11}t}\|\varepsilon(t)\|.
\end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\| + \sqrt{n}M\|V^{-1}(\lambda)\|V_M \int_0^t e^{-\lambda_{11}\tau} d\tau + \\
&L\sqrt{n}\|V^{-1}(\lambda)\| \int_0^t \phi(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Applying the Generalized Gronwall Criterium [10] and using

$$k(\lambda) = L\sqrt{n}\|V^{-1}(\lambda)\| \tag{12}$$

$$c(\lambda) = \sqrt{n}\|V^{-1}(\lambda)\|V_MM, \tag{13}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\| + c(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda_{11}\tau} d\tau + \\
&+ k(\lambda) \int_0^t e^{k(\lambda)(t-\tau)} \left[ K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\| + c(\lambda) \int_0^\tau e^{-\lambda_{11}s} ds \right] d\tau = \\
&= K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\| + c(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda_{11}\tau} d\tau + \\
&+ k(\lambda)K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\| \int_0^t e^{k(\lambda)(t-\tau)} d\tau + \\
&+ k(\lambda)c(\lambda)e^{k(\lambda)t} \int_0^t e^{-k(\lambda)\tau} d\tau \int_0^\tau e^{-\lambda_{11}s} ds.
\end{aligned}$$

Integrating by parts the last term, we have

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\| \left[ 1 + k(\lambda) \int_0^t e^{k(\lambda)(t-\tau)} d\tau \right] + \\
&+ c(\lambda)e^{k(\lambda)t} \int_0^t e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]\tau} d\tau = \\
&= K_1(\lambda)\|\varepsilon(0)\|e^{k(\lambda)t} + c(\lambda)e^{k(\lambda)t} \int_0^t e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]\tau} d\tau.
\end{aligned}$$



Summing up

$$e^{-\lambda_{11}t} \|\varepsilon(t)\| \leq K_1(\lambda) \|\varepsilon(0)\| e^{k(\lambda)t} + c(\lambda) e^{k(\lambda)t} \int_0^t e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]\tau} d\tau,$$

that is,

$$\|\varepsilon(t)\| \leq K_1(\lambda) \|\varepsilon(0)\| e^{[k(\lambda)+\lambda_{11}]t} + \quad (14)$$

$$c(\lambda) e^{[k(\lambda)+\lambda_{11}]t} \int_0^t e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]\tau} d\tau. \quad (15)$$

Up to this point we have used the Gronwall Criterium.

Now, given an arbitrary  $\varepsilon_1 > 0$ , for  $\lambda_{11} < 0$  small enough the following inequality is valid (it is demonstrated in the Appendix 2):

$$k(\lambda) + \lambda_{11} \leq \lambda_{11} + (n + \varepsilon_1) \sqrt{n}L. \quad (16)$$

Since the eigenvalues of the matrix  $A - KC$  can be placed arbitrarily (Remark 1), given an arbitrary number  $\alpha > 0$ , we can choose  $\lambda_{11}$  so that the inequality (16) be true and also

$$\lambda_{11} + (n + \varepsilon_1) \sqrt{n}L < -\alpha. \quad (17)$$

Then, from (15), defining  $b = MV_M/L$  and using that from (12) and (13)  $c(\lambda) = bk(\lambda)$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq K_1(\lambda) \|\varepsilon(0)\| e^{-\alpha t} + bk(\lambda) e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]t} \int_0^t e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]\tau} d\tau = \\ &= K_1(\lambda) \|\varepsilon(0)\| e^{-\alpha t} + b \frac{k(\lambda) e^{[k(\lambda)+\lambda_{11}]t}}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} \left[ e^{-[k(\lambda)+\lambda_{11}]t} - 1 \right] = \\ &= K_1(\lambda) \|\varepsilon(0)\| e^{-\alpha t} + b \frac{k(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} \left[ 1 - e^{[k(\lambda)+\lambda_{11}]t} \right] \leq \\ &\leq K_1(\lambda) \|\varepsilon(0)\| e^{-\alpha t} + b \frac{k(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|}. \end{aligned} \quad (18)$$

We start the analysis with the second term in the right hand side of (18). Since

$$|k(\lambda) + \lambda_{11}| = |k(\lambda) - |\lambda_{11}||,$$

we have

$$\frac{k(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{|\lambda_{11}|}{k(\lambda)} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{|\lambda_{11}|}{k(\lambda)} - 1 \right|}. \quad (19)$$



From (16) and (17),  $k(\lambda) + \lambda_{11} < -\alpha$ , that is

$$\lambda_{11} < -\alpha - k(\lambda) < 0,$$

$$|\lambda_{11}| \geq \alpha + k(\lambda) > k(\lambda).$$

Summing up,

$$\frac{|\lambda_{11}|}{k(\lambda)} - 1 > 0.$$

Consequently, (19) can be replaced by

$$\frac{k(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} = \frac{1}{\frac{|\lambda_{11}|}{k(\lambda)} - 1}. \quad (20)$$

But for  $|\lambda_{11}|$  large enough as we are supposing, from (16),

$$k(\lambda) \leq (n + \varepsilon_1)\sqrt{n}L,$$

and then

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(\lambda)} &\geq \frac{1}{(n + \varepsilon_1)\sqrt{n}L} \\ \frac{|\lambda_{11}|}{k(\lambda)} - 1 &\geq \frac{|\lambda_{11}|}{(n + \varepsilon_1)\sqrt{n}L} - 1 \\ \frac{1}{\frac{|\lambda_{11}|}{k(\lambda)} - 1} &\leq \frac{1}{\frac{|\lambda_{11}|}{(n + \varepsilon_1)\sqrt{n}L} - 1}. \end{aligned} \quad (21)$$

From (20) and (21) we have

$$\frac{k(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} \leq \frac{1}{\frac{|\lambda_{11}|}{(n + \varepsilon_1)\sqrt{n}L} - 1}. \quad (22)$$

Given an arbitrary  $\varepsilon_2 > 0$ , we can choose  $|\lambda_{11}|$  large enough in order that

$$\frac{1}{\frac{|\lambda_{11}|}{(n + \varepsilon_1)\sqrt{n}L} - 1} < \varepsilon_2. \quad (23)$$

Now we will analyze the first term of the right hand side of (18). Given a number  $\alpha > 0$  we fix the eigenvalues  $\lambda_{ij}$  in the following order:

$$\lambda_{n3} < \lambda_{n2} < \lambda_{n1} < \cdots < \lambda_{13} < \lambda_{12} < \lambda_{11} < -\alpha < 0,$$





with  $|\lambda_{11}|$  large enough in order to verify (23). With the eigenvalues fixed, the coefficient  $K_1(\lambda) = K_1$  (a constant). It is clear that, given  $\varepsilon_2 > 0$  there exists  $T$  such that

$$e^{-\alpha t} < \varepsilon_2, \quad \forall t > T. \quad (24)$$

The value of  $T$  depends on the matrix  $K$ , since the eigenvalues are fixed with  $K$ . Going back to (18) with (22), (23) and (24), we obtain

$$\|\varepsilon(t)\| \leq [K_1\|\varepsilon(0)\| + b]\varepsilon_2, \quad \forall t > T.$$

Since  $\varepsilon_2 > 0$  is arbitrary small the proof is completed.

**Remark 3:** If we know exactly the inertia matrix, i.e., if

$$\hat{D}^{-1}(z^1) = D^{-1}(z^1),$$

we obtain exponential convergence and the speed of convergence can be adjusted using the gain matrix  $K$ :

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\| \leq R e^{-\alpha t} \|\hat{z}(0) - z(0)\|,$$

where  $R$  is a constant.

## 4 The observer in the control loop. Stability.

In this section we deal with the use of the nonlinear observer in a trajectory tracking problem.

As we can see in the Figure 1, there are two loops in the control system: the inner loop for the exact linearization of the robot dynamic equations, and the outer loop for the trajectory tracking ([7], [11]). Both of them use the state estimate given by the nonlinear observer.

As it is well known ([11]) (see Remark 2), the feedback control for the robot exact linearization and decoupling is

$$u = -\hat{D}(z^1)L_F H(\hat{z}) + \hat{D}(z^1)v. \quad (25)$$

We observe that in our case we have to use the observer state estimation  $\hat{z}$  and the approximated value  $\hat{D}(z^1)$  of the inertia matrix, related to the true value as follows:

$$\hat{D}(z^1) = D(z^1) + \Delta D(z^1). \quad (26)$$

Using the control (25) and (26) in (4) we obtain

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B[L_F H(z) - L_F H(\hat{z})] + Bv + \\ &+ BD^{-1}(z^1) [-\Delta D(z^1)L_F H(\hat{z}) + \Delta D(z^1)v]. \end{aligned} \quad (27)$$



Now, using (25) in (8),

$$\dot{\hat{z}} = (A - KC)\hat{z} + KCz + Bv. \quad (28)$$

Let

$$z_d(t) = ( q_{d1} \quad \dot{q}_{d1} \quad \ddot{q}_{d1} \quad \dots \quad q_{dn} \quad \dot{q}_{dn} \quad \ddot{q}_{dn} )$$

be the desired trajectory, i.e., the trajectory to be tracked. We will consider the following error functions:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \hat{z}(t) - z(t) \\ \delta(t) &= z_d(t) - z(t) \\ e(t) &= z_d(t) - \hat{z}(t) = \delta(t) - \varepsilon(t) \end{aligned}$$

The control  $v$  for the trajectory tracking is ([7],[11])

$$v = \begin{bmatrix} q_{d1}^{(3)}(t) \\ \vdots \\ q_{dn}^{(3)}(t) \end{bmatrix} - G\delta(t),$$

where the gain matrix  $G$  is

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

In our case we have to use the estimation  $\hat{z}(t)$ , and then we take

$$v = \begin{bmatrix} q_{d1}^{(3)}(t) \\ \vdots \\ q_{dn}^{(3)}(t) \end{bmatrix} - Ge(t). \quad (30)$$

**Proposition 4.1** *Given the system (4)-(5), a desired trajectory with bounded third-order derivative, the control laws (25) and (30), and an arbitrary  $\delta^* > 0$ , there exists  $\beta(\delta^*) > 0$ , a gain matrix  $G(\delta^*)$  and  $T(G) > 0$  such that, if*

$$\|D^{-1}(z^1)\Delta D(z^1)\| < \beta,$$

for any initial conditions  $\varepsilon(0)$ ,  $\delta(0)$ , it follows

$$\|(\delta(t), \varepsilon(t))\| < \delta^*, \quad \forall t \geq T(G).$$



**Proof:** From (27) and (28) the error  $\varepsilon(t)$  satisfies the following differential equation:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= (A - KC)\varepsilon + B [L_F H(\hat{z}) - L_F H(z)] + \\ &+ BD^{-1}(z^1)\Delta D(z^1)[L_F H(\hat{z}) - v],\end{aligned}$$

and using the control (30) we have

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= (A - KC)\varepsilon + B [L_F H(\hat{z}) - L_F H(z)] + \\ &+ B\eta(t) + B\gamma(t),\end{aligned}$$

with

$$\eta(t) = D^{-1}(z^1)\Delta D(z^1)[L_F H(\hat{z}) - Z_d^{(3)}] \quad (31)$$

$$\gamma(t) = D^{-1}(z^1)\Delta D(z^1)Ge(t) \quad (32)$$

$$Z_d^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} z_{d1}^{(3)}(t) \\ \vdots \\ z_{dn}^{(3)}(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} q_{d1}^{(3)}(t) \\ \vdots \\ q_{dn}^{(3)}(t) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

That is, taking into account the form of the matrices  $A - KC$  and of the vectors  $L_F H, B\eta, B\gamma$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i^1 &= \varepsilon_i^2 - k_{i1}\varepsilon_i^1 \\ \dot{\varepsilon}_i^2 &= \varepsilon_i^3 - k_{i2}\varepsilon_i^1 \\ \dot{\varepsilon}_i^3 &= L_f^3 h_i(\hat{z}) - L_f^3 h_i(z) - k_{i3}\varepsilon_i^1 + \eta_i(t) + \gamma_i(t),\end{aligned} \quad (34)$$

$i = 1, \dots, n$ .

Moreover, using (30) in (27) we obtain

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B [L_F H(z) - L_F H(\hat{z})] + B[Z_d^{(3)} - Ge] \\ &+ B\eta(t) - B\gamma(t),\end{aligned}$$

that is,

$$\begin{aligned}\dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ \dot{z}_i^2 &= z_i^3 \\ \dot{z}_i^3 &= L_f^3 h_i(z) - L_f^3 h_i(\hat{z}) + z_{di}^{(3)} - \\ &- g_{i1}e_i^1 - g_{i2}e_i^2 - g_{i3}e_i^3 - \eta_i - \gamma_i.\end{aligned}$$

We introduce the following error vector:

$$\mu_i = (\delta_i^1 \quad \delta_i^2 \quad \delta_i^3 \quad \varepsilon_i^1 \quad \varepsilon_i^2 \quad \varepsilon_i^3)^t.$$



The last three elements of the vector satisfy the differential equations (34). For the first three elements we have

$$\begin{aligned}
\delta_i^1 &= \dot{z}_{di} - \dot{z}_i^1 = \dot{z}_{di} - z_i^2 = \delta_i^2 \\
\delta_i^2 &= \ddot{z}_{di} - \ddot{z}_i^2 = \ddot{z}_{di} - z_i^3 = \delta_i^3 \\
\delta_i^3 &= z_{di}^{(3)} - \dot{z}_i^3 = L_f^3 h_i(\hat{z}) - L_f^3 h_i(z) + \\
&\quad + g_{i1} \delta_i^1 + g_{i2} \delta_i^2 + g_{i3} \delta_i^3 - \\
&\quad - g_{i1} \epsilon_i^1 - g_{i2} \epsilon_i^2 - g_{i3} \epsilon_i^3 + \eta_i(t) + \gamma_i(t).
\end{aligned} \tag{35}$$

From (34) and (35),

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} & -g_{i1} & -g_{i2} & -g_{i3} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mu_i + \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( L_f^3 h_i(\hat{z}) - L_f^3 h_i(z) + \eta_i(t) + \gamma_i(t) \right),
\end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$ , or, in matrix form,

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \text{diag}\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\} \mu + \\
&\quad \text{diag}\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\} \left[ L_F^3 H(\hat{z}) - L_F^3 H(z) + \eta(t) + \gamma(t) \right],
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\mu &= (\mu_1 \ \dots \ \mu_n)^t \\
\Gamma_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} & -g_{i1} & -g_{i2} & -g_{i3} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{i3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Sigma_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$





But from (33) and the hypothesis,

$$\|\gamma(t)\| \leq \beta \|G\| \|e(t)\| \leq \beta \|G\| \|\mu(t)\|, \quad (36)$$

and from (31),

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\| &\leq \beta \left[ \|L_F H(\hat{z})\| + \|Z_d^{(3)}(t)\| \right] \\ &\leq \beta M, \end{aligned} \quad (37)$$

because  $L_F H(\hat{z})$  is locally bounded and  $Z_d^{(3)}$  is bounded by hypothesis.

The values  $k_{ij}$  are fixed according to the rules established in the previous section. Now we take the values  $g_{ij}$  in such a way that the eigenvalues of the matrix

$$\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$$

be distinct and negatives, and that the ones corresponding to the control (i.e. the ones that we can move with the  $g_{ij}$  coefficients) are closer to zero than those corresponding to the observer (i.e. the ones that we can move with the  $k_{ij}$  coefficients) (see Appendix 3). Let  $J(\lambda)$  be the matrix such that

$$J^{-1}(\lambda)\Gamma J(\lambda) = \text{diag}\{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{16}, \dots, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{n6}\}, \quad (38)$$

where the  $\lambda_{ij}$  are the eigenvalues of  $\Gamma$  and  $\lambda_{11}$  is the greatest one.

Using the inequalities (36) and (37), the diagonalization (38) and the Lemma 6.1, we obtain

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\| &\leq \|J^{-1}(\lambda)\| \|J(\lambda)\| \|\mu(0)\| e^{\lambda_{11}t} + \\ &+ \sqrt{2n} \|J^{-1}(\lambda)\| (L + \beta \|G\|) \int_0^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} \|\mu(\tau)\| d\tau + \\ &+ \sqrt{2n} \|J^{-1}(\lambda)\| \beta M \int_0^t e^{\lambda_{11}(t-\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_{11}t} \|\mu(t)\| &\leq \|J^{-1}(\lambda)\| \|J(\lambda)\| \|\mu(0)\| + \\ &+ \sqrt{2n} \|J^{-1}(\lambda)\| (L + \beta \|G\|) \int_0^t e^{-\lambda_{11}\tau} \|\mu(\tau)\| d\tau + \\ &+ \sqrt{2n} \|J^{-1}(\lambda)\| \beta M \int_0^t e^{-\lambda_{11}\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Defining

$$\phi(t) = e^{-\lambda_{11}t} \|\mu(t)\| \quad (39)$$

$$k(\lambda) = \sqrt{2n} \|J^{-1}(\lambda)\| (L + \beta \|G\|) \quad (40)$$

$$c(\lambda) = \sqrt{2n} \|J^{-1}(\lambda)\| \beta M, \quad (41)$$



we can repeat the steps of Proposition 3.1, and using again the Generalized Gronwall Criterium , we obtain

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\| &\leq M_2(\lambda)\|\mu(0)\|e^{[k(\lambda)+\lambda_{11}]t} + \\ &+ \frac{c(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} \left[1 - e^{[k(\lambda)+\lambda_{11}]t}\right], \end{aligned}$$

where  $M_2(\lambda) = \|J^{-1}(\lambda)\| \|J(\lambda)\|$ .

We will demonstrate that given two arbitrary numbers  $\alpha > 0$  and  $\eta_1 > 0$  we can place the eigenvalues in such a way that

1. (speed of convergence)

$$k(\lambda) + \lambda_{11} < -\alpha. \quad (42)$$

2. (final error)

$$\frac{c(\lambda)}{|k(\lambda) + \lambda_{11}|} < \eta_1 \quad (43)$$

If the inequalities (42) and (43) are valid,  $\|\mu(t)\|$  is as small as we wish for  $t$  large enough, and the Proposition will be proved.

First we will prove (42). Given an arbitrary  $\eta_2 > 0$ , we can place the eigenvalues of  $\Lambda$  in order that

$$\|J^{-1}(\lambda)\| < 1 + \eta_2 \quad (44)$$

(see Appendix 2). Let  $\bar{\lambda}_{11}$  be the greatest eigenvalue. From (40),

$$k(\lambda) \leq \sqrt{2n}(1 + \eta_2)[L + \beta\|G\|]. \quad (45)$$

Now we take

$$\delta > L\sqrt{2n}(1 + \eta_2) \quad (46)$$

and choose the matrix  $\Lambda$  in such a way that its eigenvalues are in the described order and the greatest one,  $\lambda_{11}^*$ , verifies

$$\lambda_{11}^* = -\max\{\alpha + \delta, |\bar{\lambda}_{11}|\}. \quad (47)$$

We denote  $G^*$  the corresponding matrix, and  $\lambda^*$  the vector of eigenvalues. Now we take  $\beta$  such that

$$\beta < \frac{1}{\|G^*\|} \left[ \frac{\delta}{\sqrt{2n}(1 + \eta_2)} - L \right].$$



(We observe that the term on the right is positive for (46)). Consequently,

$$\beta\|G^*\| + L < \frac{\delta}{\sqrt{2n}(1 + \eta_2)}. \quad (48)$$

Then, using (48) in (45),

$$k(\lambda^*) \leq \delta, \quad (49)$$

and from (47) and (49),

$$|\lambda_{11}^*| - k(\lambda^*) \geq \alpha,$$

that is,

$$k(\lambda^*) + \lambda_{11}^* = -|\lambda_{11}^*| + k(\lambda^*) = -[|\lambda_{11}^*| - k(\lambda^*)] \leq -\alpha,$$

which proves (42).

Now we will demonstrate (43). Since

$$|k(\lambda^*) + \lambda_{11}^*| \geq |\lambda_{11}^*| - k(\lambda^*) \geq \alpha,$$

then

$$\begin{aligned} \frac{c(\lambda^*)}{|k(\lambda^*) + \lambda_{11}^*|} &\leq \frac{c(\lambda^*)}{\alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{2n}\|J^{-1}(\lambda^*)\|}{\alpha} \leq \frac{\sqrt{2n}(1 + \eta_2)}{\alpha}, \end{aligned}$$

where we have used (44) in the last inequality. Finally, we choose  $\alpha$  such that

$$\frac{\sqrt{2n}(1 + \eta_2)}{\alpha} < \eta_1.$$

Then we have proved (43), and, in consequence, the Proposition.

## 5 Simulation Results

The simulation program implements the third order model of a robot arm described in Section 2, the robust nonlinear observer introduced in the Section 3 and the control strategy developed in Section 4. We use the dynamic model of the Puma 560 robot manipulator ([17], [18], modelling and simulating, as in Tarn et. al. [7], the three first joints. The aim of the simulation is to show the performance of the robust nonlinear observer in a trajectory tracking problem. The state space trajectory to be tracked is

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} q_{d1}(t) \\ q_{d2}(t) \\ q_{d3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04\pi t^2 + 0.125\pi \\ 0.5 \sin(0.4\pi t) \\ 0.4t \end{bmatrix},$$



with  $0 \leq t \leq 5$  sec. Figure 2 shows the corresponding trajectory in the task space. The control configuration is shown in Fig. 1. The entries of the matrix  $G$  were chosen in order to get a fast decay of the error keeping the control inputs between the saturation values. Once  $G$  is fixed, the matrix  $K$  is designed so that the eigenvalues satisfy the conditions imposed in the Section 4.

Figures 3, 4 and 5 show the errors between the coordinates of the end-effector position and those of the desired trajectory, in two cases:

1. the inertia matrix is exactly known (continuous line)
2. there are uncertainties of the order of 20% in the inertia matrix (dashed line).

## 6 Appendix 1

**Lemma 6.1** *The functions  $L_j^3 h_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, n$  are locally lipschitzian in the variables  $z^2$  and  $z^3$ , i.e.*

$$|L_j^3 h_i(z^1, z^2, z^3) - L_j^3 h_i(z^1, \hat{z}^2, \hat{z}^3)| \leq L_i \| (z^2 - \hat{z}^2, z^3 - \hat{z}^3) \|$$

in some region  $E$ .

**Proof:** Following Tarn et. al. [7]

$$L_j^3 h_i(z) = \sum_{j=1}^n \bar{D}_{ij}^{-1}(z^1) \bar{P}_j(z),$$

where

$$\begin{aligned} \bar{P}_i(z) &= \frac{R_i}{N_i K_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n D_{ij}(\eta) z_j^3 + I_{ai} z_i^3 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk}(\eta) z_j^2 z_k^2 + D_i(\eta) \right] + \\ &\frac{L_i}{N_i k_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n M_{ij}^l(\eta) z_j^2 z_l^2 + \sum_{j+1}^n \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n M_{ijk}^l(\eta) z_l^2 z_j^2 z_k^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2D_{ijk}(\eta) z_j^3 z_k^2 \right) + \sum_{l=1}^n M_i^l(\eta) z_l^2 \right] + K_i^e N_i z_i^2, \\ \eta &= (\cos z_2^1, \sin z_2^1, \dots, \cos z_n^1, \sin z_n^1), \end{aligned}$$

and

$$D_i(\eta), D_{ij}(\eta), D_{ijk}(\eta), M_i^l(\eta), M_{ij}^l(\eta), M_{ijk}^l(\eta)$$

are trigonometric polynomials satisfying the following relations:

$$\begin{aligned} \dot{D}_i &= M_i^1(\eta) z_2^2 + \dots + M_i^n(\eta) z_n^2 \\ \dot{D}_{ij} &= M_{ij}^1(\eta) z_2^2 + \dots + M_{ij}^n(\eta) z_n^2 \\ \dot{D}_{ijk} &= M_{ijk}^1(\eta) z_2^2 + \dots + M_{ijk}^n(\eta) z_n^2, \end{aligned}$$





we obtain

$$\begin{aligned}
& \bar{P}_i(z^1, \hat{z}^2, \hat{z}^3) - \bar{P}_i(z^1, z^2, z^3) = \\
& \frac{R_i}{N_i K_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n D_{ij}(\eta) [\hat{z}_j^3 - z_j^3] + I_{ai} [\hat{z}_i^3 - z_i^3] + \right. \\
& \left. \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk}(\eta) [\hat{z}_j^2 \hat{z}_k^2 - z_j^2 z_k^2] \right] \\
& + \frac{L_i}{N_i k_i^T} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n M_{ij}^l(\eta) [\hat{z}_j^2 \hat{z}_l^2 - z_j^2 z_l^2] + \right. \\
& \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n M_{ijk}^l(\eta) [\hat{z}_l^2 \hat{z}_j^2 \hat{z}_k^2 - z_l^2 z_j^2 z_k^2] + \right. \\
& \left. \left. + 2D_{ijk}(\eta) [\hat{z}_j^3 \hat{z}_k^2 - z_j^3 z_k^2] + \sum_{l=1}^n M_i^l(\eta) [\hat{z}_l^2 - z_l^2] \right) \right] \\
& + K_i^e N_i [\hat{z}_i^2 - z_i^2].
\end{aligned}$$

Using that

- the functions of  $\eta$  involved are trigonometric polynomials
- the vectors  $z^2$  and  $z^3$  are speeds and accelerations, (then they are bounded)

and the mean value theorem, i.e.,

$$\begin{aligned}
|\hat{z}_j^2 \hat{z}_l^2 - z_j^2 z_l^2| & \leq \xi_l |\hat{z}_j - z_j| + \xi_j |\hat{z}_l - z_l| \leq M \|\hat{z} - z\| \\
|\hat{z}_k \hat{z}_j^2 \hat{z}_l^2 - z_k^2 z_j^2 z_l^2| & \leq N \|\hat{z} - z\|
\end{aligned}$$

we obtain

$$|\bar{P}_i(z^1, \hat{z}^2, \hat{z}^3) - \bar{P}_i(z^1, z^2, z^3)| \leq L_i \|\hat{z}^2 - z^2, \hat{z}^3 - z^3\|.$$

## 7 Appendix 2

From (10)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Following [9] we take  $\lambda_1 = -p, \lambda_2 = -p^2, \lambda_3 = -p^3$  ( $p$  is a positive integer number) and the matrix  $\Lambda$  becomes

$$\Lambda = \begin{bmatrix} p^2 & -p & 1 \\ p^4 & -p^2 & 1 \\ p^6 & -p^3 & 1 \end{bmatrix},$$



and  $\det\Lambda = p^8 - 2p^7 + 2p^5 - p^4$ . Then, when  $p \rightarrow \infty$ ,

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\det\Lambda} \begin{bmatrix} -p^2 + p^3 & p - p^3 & -p + p^2 \\ -p^4 + p^6 & p^2 - p^6 & -p^2 + p^4 \\ -p^7 + p^8 & p^5 + p^7 & -p^4 + p^5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Thus,  $\|\Lambda^{-1}\| \rightarrow 1$  when  $p \rightarrow \infty$ . Since

$$V^{-1} = \text{diag}\{\Lambda_1^{-1}, \dots, \Lambda_n^{-1}\},$$

we obtain

$$\|V^{-1}\| \leq \|\Lambda_1^{-1}\| + \dots + \|\Lambda_n^{-1}\|$$

and  $\|V^{-1}\| \rightarrow n$  when  $p \rightarrow \infty$ .

But the eigenvalues of the matrix  $A - KC$  can be placed arbitrarily (Remark 1), and then, we can choose  $K$  in such a way that given an arbitrary number  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lambda_{11} + \|V^{-1}\|\sqrt{n}L \leq \lambda_{11} + (n + \varepsilon)\sqrt{n}L.$$

## 8 Appendix 3

We consider the matrix

$$\Gamma = \begin{bmatrix} R & S \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

with

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Then

$$\det[\lambda I - \Gamma] = \det[\lambda I - R]\det[\lambda I - K],$$

and since they are companion matrices, it is possible to choose the elements in order that the eigenvalues have the desired configuration.



## References

- [1] Canudas de Wit, C., Fixot, N., Astrom, K.J.: *Trajectory tracking in robot manipulators via nonlinear state estimate feedback*, IEEE Trans. Robotics and Autom., Vol. 8, No.1, pp.138-144, Feb. 1992.
- [2] Canudas de Wit, C., Fixot, N.: *Adaptive control of robot manipulators via velocity estimated feedback*, IEEE Trans. on Automatic Control, to appear.
- [3] Zhu, W., Chen, H. and Zhang Z.: *A variable structure robot control algorithm with an observer*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 8, No. 4, pp. 486-492, 1992.
- [4] Slotine, J-J.E., Hedrick, J.K., Misawa, E.A.: *On sliding observers for nonlinear systems*, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 109, pp. 245-252, 1987.
- [5] Canudas de Wit, C., Slotine, J-J.E.: *Sliding Observers for robot manipulators*, IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design, pp. 142-147, Capri, Italy, 1989.
- [6] Canudas de Wit, C., Astrom, K.J. and Fixot, N.: *Computed torque control via a nonlinear observer*, Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 4, pp. 443-452, 1990.
- [7] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Yun, X., Li, Z.: *Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 7, No. 1, pp.114-122, 1991.
- [8] Misawa, E.A., Hedrik, J.K.: *Nonlinear observers, A state-of-the-art survey*, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 111, pp. 344-352, 1989.
- [9] Ciccarella, G., Dalla Mora, M., Germani, A.: *A Luenberger-like observer for nonlinear systems*, Rep. No.34-90, Dept. Electrical Eng., University of L'Aquila, Italy, 1990.
- [10] Lefschetz, S.: *Differential Equations: Geometric Theory*, 2nd. Edition, Interscience Pub.
- [11] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*, 2nd. Edition, Springer, 1989.
- [12] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Yun, X.: *Third order dynamic equations and nonlinear feedback for PUMA 560 robot arm*, Washington Univ., Robotics Lab. Rep. SSM-RL-85-04, 1985.
- [13] Spong, M.W. and Vidyasagar M.: *Robot Dynamics and Control*, J. Wiley, 1989.
- [14] De Luca, A., Isidori, A., Nicoló, F.: *An application of nonlinear model matching to the dynamic control of robot arm with elastic joints*, Rep. No. 04/85, University of Rome La Sapienza, 1985.



- [15] De Luca, A., Isidori, A., Nicoló, F.: *Control of robot arm with elastic joints via non-linear dynamic feedback*, Proc. of 24th Conf. on Decision and Control, pp. 1671-1679, Ft. Lauderdale, 1985.
- [16] Craig, J.J.: *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, 1990.
- [17] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Yun, X. and Ding, X.: *Dynamic equations for six-link Puma 560 Robot arm*, Rep. SSM-RL-86-05, Washington Univ., 1986.
- [18] Tarn, T.J., Bejczy, A.K., Li, Z. and Ganguly, S.: *Dynamic equations for Puma 560 robot arm*, Rep. SSM-RL-85-13, Washington Univ., 1989.
- [19] Spong, M.W.: *Control of flexible joint robots: a survey*, Rep. UILU-ENG-90-2203 DC-116, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.





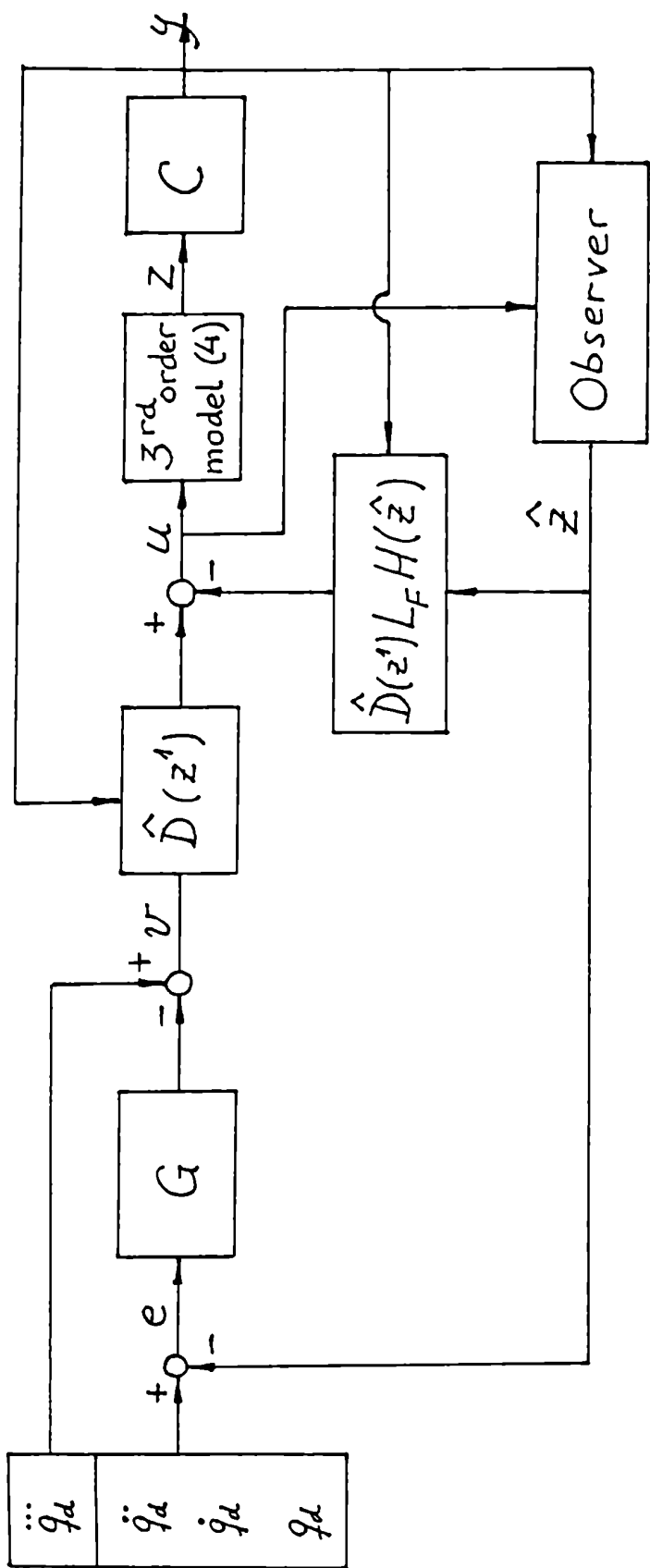




Figure 2  
Task Space Trajectory

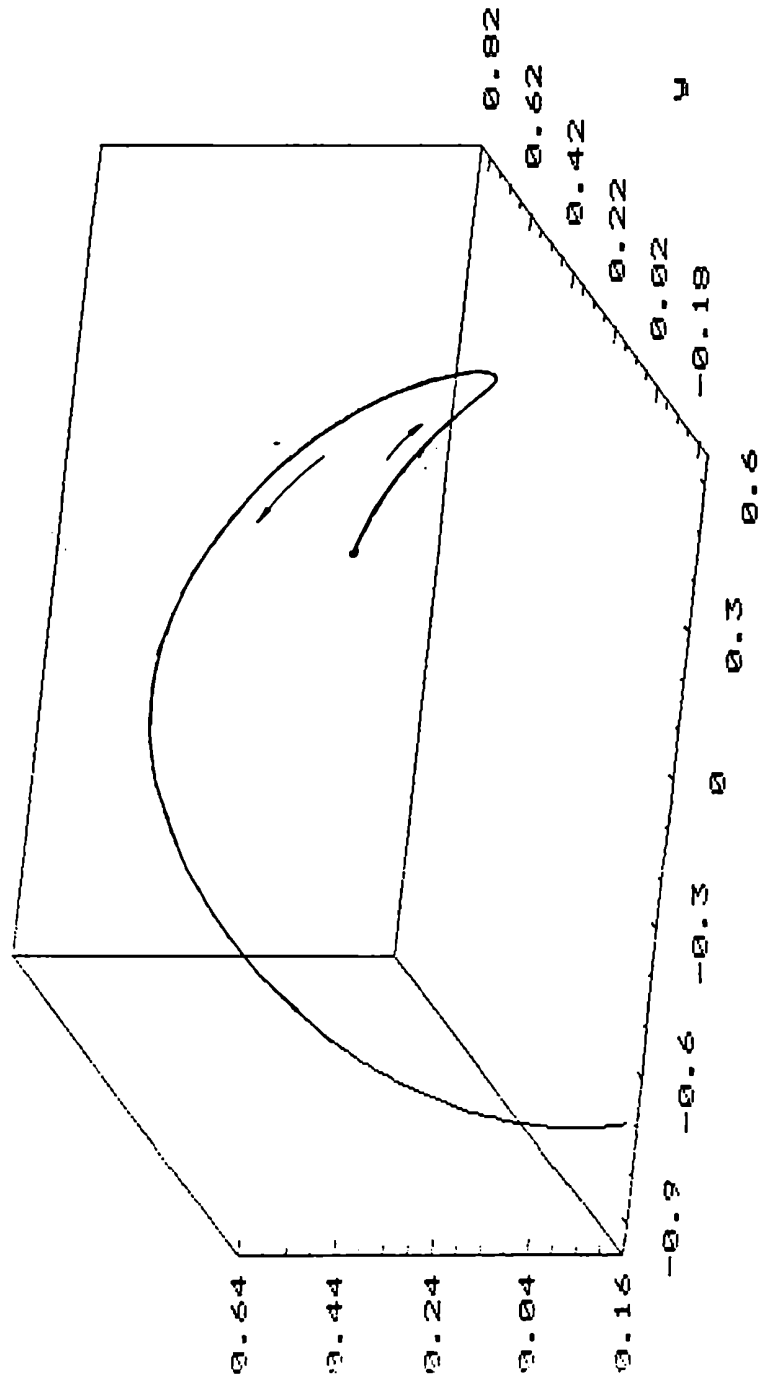




Figure 3

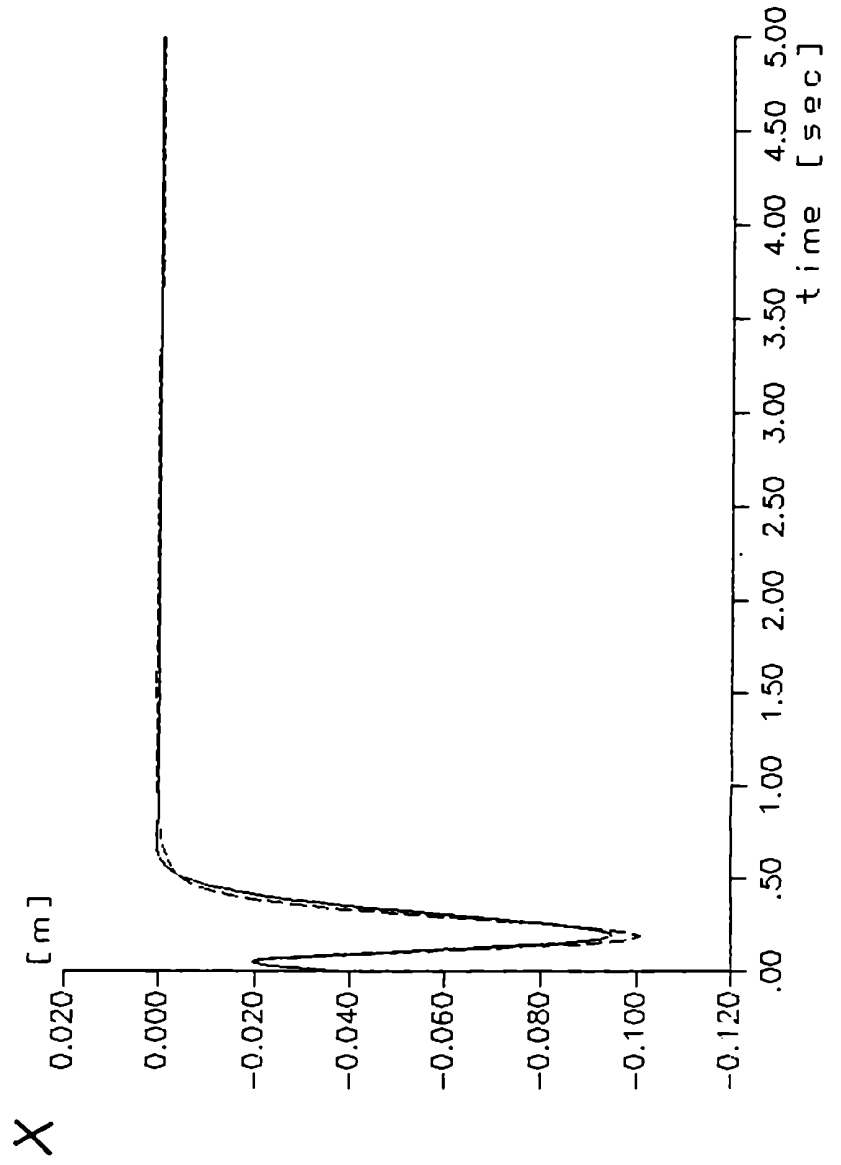




Figure 4

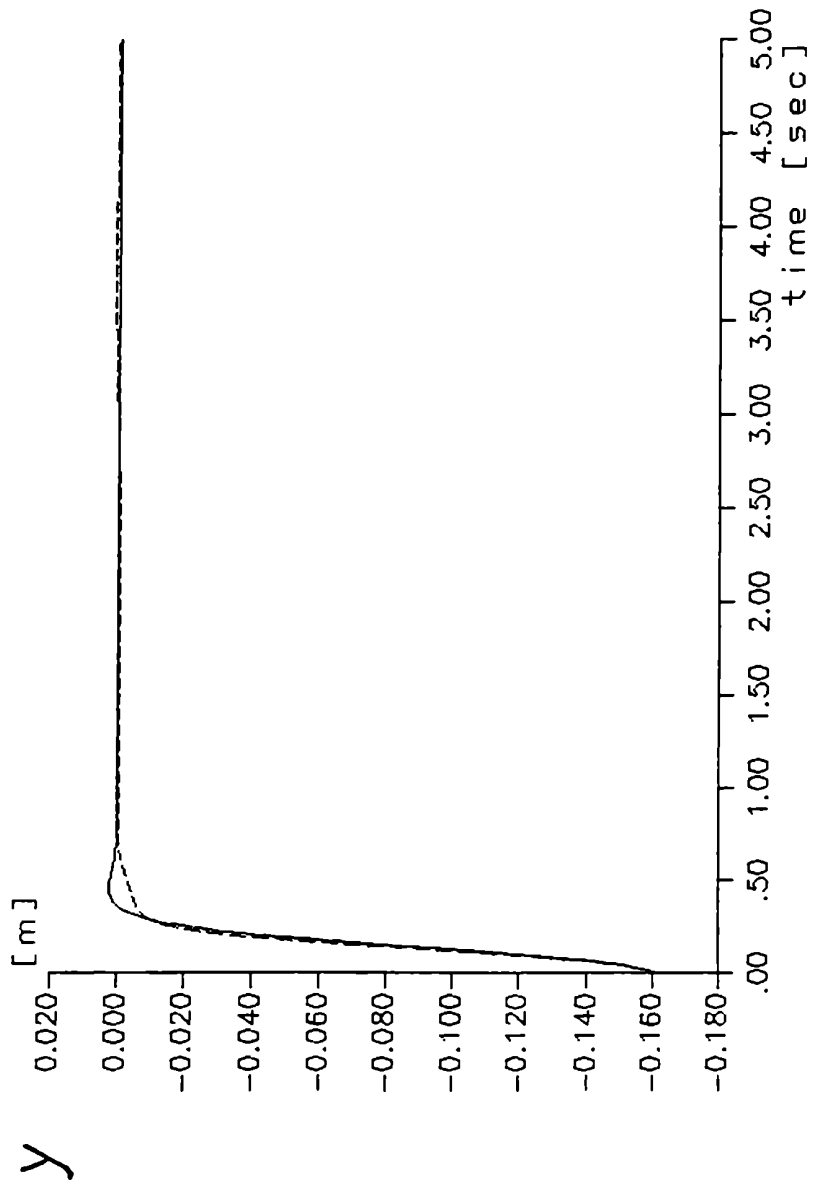






Figure 5.

