Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Bases de Schauder en espacios de polinomios

Dimant, Verónica

1996

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Dimant, Verónica. (1996). Bases de Schauder en espacios de polinomios. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2872_Dimant.pdf

Cita tipo Chicago:
Dimant, Verónica. "Bases de Schauder en espacios de polinomios". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1996.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2872_Dimant.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Bases de Schauder en Espacios de Polinomios

por

Verónica Dimant

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ignacio Zalduendo

LUGAR DE TRABAJO

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Departamento de Economía y Matemática
Universidad de San Andrés

Tesis presentada para optar por el título de:

Doctor de la Universidad de Buenos Aires

1996

!19

AGRADECIMIENTOS

A mi director Nacho Zalduendo, que siempre estuvo dispuesto a escucharme y aconsejarme. Este trabajo no hubiera sido posible sin su paciencia, dedicación y permanente estímulo.

Al profesor Seán Dineen, con quien fue un honor trabajar y aprender, por su generosidad y por la pasión por la investigación que me transmitió.

A los matemáticos Ray Ryan, Raquel Gonzalo y Jesús Angel Jaramillo, que, desinteresadamente, hicieron valiosos comentarios y sugerencias a mi trabajo.

A Betina, Silvia y Daniel, con quienes el estudio y el trabajo en equipo fue algo placentero y divertido.

A Darío, que siempre me apoyó y toleró mis constantes cambios de humor.

Schauder Bases in Spaces of Polynomials

Resumen. Dados espacios de Banach $E_1, \ldots, E_m$ con bases de Schauder, se dan condiciones equivalentes a que el espacio de formas m-lineales continuas sobre ellos definido, $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, tenga base monomial, relacionándose esto con la reflexividad del espacio. En el caso en que las bases de $E_1, \ldots, E_m$ sean incondicionales y achicantes, se prueba que la existencia de base monomial en $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ equivale a su separabilidad. A partir de los índices inferiores y superiores de los espacios se dan condiciones que permiten generar numerosos ejemplos.
En el espacio de polinomios m-homogéneos continuos sobre el espacio de Banach E, $\mathcal{P}({}^m E)$, se estudia la existencia de base monomial (cuando E tiene base de Schauder) o de descomposición monomial (cuando E tiene descomposición de Schauder de dimensión finita). Se relacionan estos hechos con la reflexividad y separabilidad de $\mathcal{P}({}^m E)$ y se construyen variados ejemplos.
Por último, se estudia la incondicionalidad de las bases monomiales en $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ y $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$, los espacios de formas m-lineales secuencialmente débil continuas y de polinomios m-homogéneos secuencialmente débil continuos.
Palabras clave: bases de Schauder, espacios de polinomios homogéneos, espacios de formas multilineales, reflexividad, separabilidad.

Abstract. Let $E_1, \ldots, E_m$ be Banach spaces with Schauder bases and $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ the space of continuous m-linear forms over them. Conditions equivalent to the existence of monomial basis in $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ are given and its relationship with the reflexivity of $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ is shown. When the bases of $E_1, \ldots, E_m$ are unconditional and shrinking, it is proved that the existence of monomial basis in $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ is equivalent to its separability. By means of lower and upper indexes of spaces, many examples are constructed.
For the space of continuous m-homogeneous polynomials over the Banach space E, $\mathcal{P}({}^m E)$, the existence of monomial basis (when E has Schauder basis) or monomial decomposition (when E has finite dimensional Schauder decomposition) is studied. These facts are related with the reflexivity and separability of $\mathcal{P}({}^m E)$ and some examples are given.
Finally, the unconditionality of monomial bases of $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ and $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$, the spaces of weak sequentially continuous m-linear forms and weak sequentially continuous m-homogeneous polynomials, is studied.
Keywords: Schauder bases, spaces of homogeneous polynomials, spaces of multilinear forms, reflexivity, separability.

Contenidos

Introducción 2

1 Preliminares 5
- 1.1 Formas Multilineales y Polinomios 5
- 1.2 Bases de Schauder 8

2 Bases de Schauder en Espacios de Formas Multilineales 13
- 2.1 Definiciones y Notación 13
- 2.2 Resultados preliminares 15
- 2.3 Bases en Espacios de Formas Multilineales 17
- 2.4 Aplicación a Espacios con índices inferior y superior 24
- 2.5 Ejemplos y Aplicaciones 31

3 Bases y Descomposiciones de Schauder en Espacios de Polinomios Homogéneos 35
- 3.1 Bases monomiales en Espàcios de Polinomios 35
- 3.2 Descomposiciones de Schauder 38
- 3.3 Polinomios sobre espacios con FDD 40

4 Incondicionalidad de las Bases Monomiales 47
- 4.1 Introducción 47
- 4.2 Algunos Ejemplos 52

Bibliografía 56

Introducción

El estudio de polinomios definidos sobre espacios de Banach surgió como una herramienta necesaria para el estudio de funciones holomorfas definidas sobre esos espacios. Es por eso que, en un principio, su interés se centró en obtener resultados que tuvieran consecuencias en la teoría de funciones holomorfas. Siendo los espacios de polinomios m-homogéneos sobre un espacio de Banach, a su vez, espacios de Banach, hace aproximadamente 20 años, con el auge que experimenta la teoría de espacios de Banach, surge el interés por el estudio de estos espacios en lo que hace a su estructura como espacios de Banach. Para citar algunos ejemplos, Ryan [R1] probó que $\mathcal{P}(^m E)$ (el espacio de polinomios m-homogéneos continuos sobre el espacio de Banach E) es un dual y encontró condiciones equivalentes a su reflexividad; Dineen [D2] probó que ℓ_∞ está finitamente representado en $\mathcal{P}(^m E)$, para cualquier espacio de Banach E de dimensión infinita y $m \geq 2$; Alencar [Al] relacionó reflexividad con existencia de base monomial en $\mathcal{P}(^m E)$.

El objetivo central de este trabajo es estudiar la existencia de base de Schauder en $\mathcal{P}(^m E)$, así como su relación con la reflexividad y separabilidad de este espacio. También, se generan numerosos ejemplos en los que $\mathcal{P}(^m E)$ tiene base, en los que $\mathcal{P}(^m E)$ es reflexivo o en los que $\mathcal{P}(^m E)$ no es separable (más aún, contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞).

Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m E)$ está dado por $P(x) = A(x, \ldots, x)$, donde A es una forma m-lineal continua sobre E, por lo que propiedades del espacio de Banach $\mathcal{P}(^m E)$ muchas veces se obtienen como consecuencia de propiedades del espacio de Banach $\mathcal{L}(^m E)$, de formas m-lineales continuas sobre E. La existencia de base de Schauder, la reflexividad y separabilidad también se estudian en espacios de formas multilineales continuas.

El trabajo se organiza de la siguiente manera.

En el capítulo 1 se ven las definiciones y resultados básicos necesarios para poder leer el trabajo. En la primera sección, se definen los espacios de formas multilineales y de polinomios homogéneos, así como distintos subespacios de ellos que tendrán relevancia en lo que sigue (funciones m-lineales o polinomios wsc, compactos, aproximables). Asimismo, se explica la dualidad con el producto tensorial proyectivo. En la segunda sección, se define el concepto de base de Schauder, se enuncian algunas de sus propiedades y se dan ejemplos que se utilizarán más adelante.

Los aportes originales de esta tesis comienzan en el capítulo 2. Este está dedicado a espacios de formas multilineales. En la sección 1, se define la base monomial y se describen isomorfismos de $\mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ (espacio de formas m-lineales continuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ en $\mathbb{C}$) con espacios de operadores lineales o de funciones $m-1$-lineales que habrá que tener en cuenta a lo largo del capítulo. En la sección 2, se estudian relaciones

entre espacios de formas m-lineales wsc, compactas y aproximables. En la sección 3, se estudia el problema de existencia de base en $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$. En la proposición 2.3.1 se prueba que si los espacios $E_1, \ldots, E_m$ tienen bases achicantes entonces el espacio de formas m-lineales wsc, $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$, tiene base monomial. En el teorema 2.3.2 se da una larga serie de equivalencias a que $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ tenga base monomial. También, el corolario 2.3.4 indica que en el caso en que las bases de $E_1, \ldots, E_m$ además de achicantes son incondicionales, o bien $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial o bien $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ no tiene base, ni siquiera es separable, ya que contiene copia de ℓ_∞. Por otro lado, las equivalencias del teorema 2.3.2, junto con un resultado de Holub [H2], permiten enunciar el corolario 2.3.5 que dice que para espacios $E_1, \ldots, E_m$ reflexivos con base, la existencia de base monomial en $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ equivale a su reflexividad. El objetivo de la sección 4 es dar condiciones sobre los espacios $E_1, \ldots, E_m$ que aseguren la existencia de base monomial en $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$, su reflexividad o su contención de ℓ_∞, y así poder generar variedad de ejemplos. Para eso se introducen los índices inferior y superior de un espacio de Banach E, $\ell(E)$ y $u(E)$ (definidos por Gonzalo y Jaramillo [GJ]), se ven algunas de sus propiedades y se citan ejemplos. Utilizando un resultado de Zalduendo [Za], una modificación de un teorema de Gonzalo y Jaramillo [GJ] y las equivalencias citadas en el teorema 2.3.2, se demuestra el teorema 2.4.11 que da como condición para que $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ tenga base monomial (siempre suponiendo $E_1, \ldots, E_m$ con bases achicantes) la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\ell(E_1)} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_{m-1})} < \frac{1}{u(E'_m)}$$

En el teorema 2.4.15 se prueba que si $E_1, \ldots, E_m$ tienen bases achicantes e incondicionales y se verifica

$$\frac{1}{u(E_1)} + \cdots + \frac{1}{u(E_m)} > 1$$

entonces $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ contiene copia isomorfa de ℓ_∞. La sección 5 está dedicada a ejemplos, algunos generados a partir de los resultados de la sección anterior y otros en base a otros argumentos.

El capítulo 3 se refiere a espacios de polinomios homogéneos. En la primera sección, se estudia la existencia de base monomial en $\mathcal{P}({}^mE)$. De los resultados del capítulo anterior se deducen condiciones sobre los índices del espacio que aseguren la existencia de base en $\mathcal{P}({}^mE)$, su reflexividad y también la contención de ℓ_∞. En la segunda sección, se introduce el concepto de descomposición de Schauder y se comentan algunas de sus propiedades, en particular sobre descomposiciones de Schauder de dimensión finita (FDD). En la sección 3 se trabaja en espacios de polinomios definidos sobre espacios con FDD. En la proposición 3.3.1 se ve que si E tiene FDD achicante, $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$ tiene FDD, cuyos subespacios están generados por monomios. Esto da condiciones para que $\mathcal{P}({}^mE)$ tenga FDD o sea reflexivo. En el teorema 3.3.9, se prueba que para E con FDD achicante e incondicional, o bien $\mathcal{P}({}^mE)$ tiene a los subespacios generados por los monomios como FDD, o bien $\mathcal{P}({}^mE)$ contiene copia isomorfa de ℓ_∞.

El capítulo 4 está dedicado a la incondicionalidad de las bases monomiales. Si un espacio de Banach E tiene base achicante e incondicional $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, su base dual $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

es base incondicional de E'. Siendo las bases monomiales una generalización natural de la base dual a espacios de formas m-lineales o de polinomios m-homogéneos, surge la pregunta de si la incondicionalidad se mantiene también a las bases monomiales. Pese a no poder responderla en general, se comprueba una respuesta negativa en una gran variedad de ejemplos. Para poder generarlos se necesitan probar resultados relativos a formas multilineales y polinomios wsc, e introducir el producto tensorial inyectivo, lo que se hace en la sección 1. En la segunda sección, se muestran ejemplos que se deducen de los resultados de la sección anterior junto con un teorema de Kwapien y Pelczynski [KP] y otro de Gordon y Lewis [GL].

Cabe señalar que algunos de los resultados del capítulo 2 han sido publicados en [DZ], mientras que una parte de los del capítulo 3 aparecerán en [DD].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Formas Multilineales y Polinomios

En esta sección se definen los espacios de formas multilineales y de polinomios homogéneos. También se ven algunas propiedades y subespacios relevantes. Libros de referencia en este tema son [D1] y [N].

A lo largo de todo el trabajo los espacios de Banach a considerar serán de dimensión infinita sobre el cuerpo complejo. Si $E_1, \ldots, E_m, F$ son espacios de Banach notaremos $\mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ al espacio de funciones m-lineales continuas $A : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$. Este espacio con la norma dada por

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\| : x_i \in E_i,\ \|x_i\| \leq 1\ \forall i = 1, \ldots m\}$$

es un espacio de Banach. En el caso $F = \mathbf{C}$, $\mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m; \mathbf{C})$ será notado $\mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m)$; si $E_i = E$ para cada i, notaremos $\mathcal{L}(^m E; F)$ en vez de $\mathcal{L}(^m E \times \cdots \times E; F)$ y si $m = 1$ el espacio de operadores de E en F se notará $\mathcal{L}(E; F)$.

Para construir ejemplos de formas multilineales, consideremos funcionales $\varphi_1 \in E_1'$, ...,$\varphi_m \in E_m'$. Entonces $\varphi_1 \ldots \varphi_m \in \mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, donde

$$\varphi_1 \ldots \varphi_m(x_1, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_m(x_m).$$

Si consideramos sumas finitas de productos de funcionales también obtenemos formas m-lineales: sean $\varphi_{i,j} \in E_i'$, para cada $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, k$. Definamos

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1,j}(x_1) \ldots \varphi_{m,j}(x_m).$$

Resulta $A \in \mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m)$. Toda A de esta forma se denomina de **tipo finito**. Si además $\{v_j\}_{j=1}^k \subset F$, definiendo

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1,j}(x_1) \ldots \varphi_{m,j}(x_m) v_j$$

resulta $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$.

No todas las formas m-lineales $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ son de tipo finito. Diremos que $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ es **aproximable** si es límite (en la norma del espacio $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$) de formas m-lineales de tipo finito, y notaremos $\mathcal{L}_a({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ al subespacio formado por tales A.

Un ejemplo de una forma multilineal no aproximable es $A \in \mathcal{L}({}^2 \ell_2)$ dada por

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

ya que si e_k es el k-ésimo vector unitario en ℓ_2, es $A(e_k, e_k) = 1$. Pero cualquier forma bilineal de tipo finito B verifica $B(e_k, e_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Entonces A no puede aproximarse por formas bilineales de tipo finito.

Diremos que una aplicación m-lineal $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ es **compacta** si manda al producto de las bolas unitarias $B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_m}$ en un conjunto relativamente compacto de F y diremos que A es **secuencialmente débil continua (wsc)** si A manda sucesiones w-convergentes en sucesiones convergentes. Notaremos $\mathcal{K}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ y $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ respectivamente, a los conjuntos de tales A. Ambos conjuntos son subespacios cerrados de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$, y por lo tanto son espacios de Banach.

En el caso $m = 1$, se tiene la inclusión $\mathcal{K}(E; F) \subset \mathcal{L}_{wsc}(E; F)$. Esto no vale si $m > 1$. Por ejemplo, cuando $F = \mathbb{C}$, todas las aplicaciones m-lineales son compactas pero no todas son wsc. El ejemplo anterior de la forma bilineal no aproximable también verifica que no es wsc.

Es fácil ver que toda forma m-lineal aproximable es wsc. O sea, se tiene que $\mathcal{L}_a({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) \subset \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$.

Una aplicación m-lineal $A \in \mathcal{L}({}^m E; F)$ se dirá **simétrica** si

$$A(x_1, \ldots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \quad \text{para cada } (x_1, \ldots, x_m) \in E^m, \quad \text{y } \sigma \in S_m,$$

donde S_m es el conjunto de todas las permutaciones $\sigma : \{1, \ldots m\} \to \{1, \ldots m\}$. El espacio $\mathcal{L}_s({}^m E; F)$ de las aplicaciones m-lineales simétricas es un subespacio complementado de $\mathcal{L}({}^m E; F)$. La proyección está dada por el operador de simetrización

$$\begin{aligned} S : \mathcal{L}({}^m E; F) &\longrightarrow \mathcal{L}_s({}^m E; F) \\ S(A)(x_1, \ldots, x_m) &:= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}). \end{aligned}$$

Si E y F son espacios de Banach, diremos que $P : E \to F$ es un **polinomio m-homogéneo continuo** si existe una función multilineal $A \in \mathcal{L}({}^m E; F)$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$. El espacio de polinomios m-homogéneos continuos de E en F se notará $\mathcal{P}({}^m E; F)$. Este espacio resulta ser un espacio de Banach con la norma

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \ \|x\| \leq 1\}$$

y se verifica $\|P(x)\| \leq \|P\| \, \|x\|^m$.

Como en el caso multilineal, si $F = \mathbb{C}$, el espacio de polinomios m-homogéneos continuos de E en $\mathbb{C}$ se notará $\mathcal{P}(^mE)$. Si bien diferentes funciones m-lineales definen el mismo polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, existe una única función m-lineal simétrica $A \in \mathcal{L}_s(^mE;F)$ tal que $P(x) = A(x,\dots,x)$, dada por la fórmula de polarización:

$$A(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_i=\pm 1} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P(\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i x_i).$$

De manera que el polinomio permite reconstruir la función m-lineal simétrica asociada y además sus normas están relacionadas por

$$\|P\| \le \|A\| \le \frac{m^m}{m!}\|P\|.$$

Esto dice que los espacios de Banach $\mathcal{P}(^mE;F)$ y $\mathcal{L}_s(^mE;F)$ son isomorfos.

Los polinomios **de tipo finito** serán los $P \in \mathcal{P}(^mE)$ de la forma

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1,j}(x) \dots \varphi_{m,j}(x)$$

con $\varphi_{i,j} \in E'$; o, equivalentemente, los de la forma

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x)^m$$

con $\varphi_j \in E'$. Esta equivalencia es válida pues, usando la fórmula de polarización, se prueba que, si $\psi_1,\dots,\psi_m \in E'$, entonces existen $\varphi_1,\dots,\varphi_s \in E'$ tales que

$$\psi_1(x) \dots \psi_m(x) = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j(x)^m.$$

Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE)$ se dirá **aproximable** si es límite (en la norma del espacio $\mathcal{P}(^mE)$) de polinomios m-homogéneos de tipo finito. El espacio de los polinomios m-homogéneos aproximables se notará $\mathcal{P}_a(^mE)$.

Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ se dirá **secuencialmente débil continuo (wsc)** si manda sucesiones w-convergentes en sucesiones convergentes. Notaremos $\mathcal{P}_{wsc}(^mE;F)$ al espacio de tales polinomios.

El mismo ejemplo usado para formas multilineales sirve en este caso: el polinomio $P \in \mathcal{P}(^2\ell_2)$, $P(x) = \sum_j x_j^2$ no es aproximable ni wsc. Vale en general que $\mathcal{P}_a(^mE) \subset \mathcal{P}_{wsc}(^mE)$.

En el producto tensorial $E_1 \otimes \dots \otimes E_m$, cada elemento x tiene una representación de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m; \quad \text{para } x_i^j \in E_j \tag{1.1}$$

y esta representación no es única. Se define la **norma proyectiva** de x como

$$\|x\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i^1\|\dots\|x_i^m\|\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de x de la forma (1.1). Llamaremos producto tensorial proyectivo al completado del producto tensorial con la norma proyectiva y lo notaremos $E_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}E_m$, o simplemente $\hat{\otimes}_m E$, si $E_i = E$ para todo i.

Toda función m-lineal $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ se identifica con un operador lineal $\tilde{A} \in \mathcal{L}(E_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}E_m; F)$ mediante la relación

$$\tilde{A}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = A(x_1, \dots, x_m)$$

y dicha identificación es un isomorfismo isométrico entre ambos espacios. En particular, $(E_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}E_m)'$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$.

El operador de simetrización puede también pensarse definido en el producto tensorial de E. Así, si $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \in \otimes_m E$,

$$S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)}.$$

Se prueba que cada elemento $S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \in \otimes_m E$ es combinación lineal finita de elementos de la forma $x\otimes\cdots\otimes x$, con $x \in E$. Además, claramente, $x\otimes\cdots\otimes x = S(x\otimes\cdots\otimes x)$. Entonces, el subespacio cerrado de $\hat{\otimes}_m E$ generado por $\{S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) : x_i \in E_i\}$, que coincide con el subespacio cerrado de $\hat{\otimes}_m E$ generado por $\{x\otimes\cdots\otimes x : x \in E\}$, se denomina producto tensorial proyectivo simétrico y se nota $\hat{\otimes}_{m,s} E$.

Los espacios $\mathcal{P}({}^m E; F)$ y $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_{m,s} E; F)$ son isométricamente isomorfos. Cada $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ se identifica con $\tilde{P} \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_{m,s} E; F)$, donde

$$\tilde{P}(x \otimes \cdots \otimes x) = P(x).$$

En particular, $(\hat{\otimes}_{m,s} E)'$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{P}({}^m E)$.

1.2 Bases de Schauder

Esta sección es una introducción al concepto de base de Schauder. Para más información sobre el tema consultar [LT] o [Di].

En lo que sigue E será un espacio de Banach complejo. Notaremos $\overline{[C]}$ al subespacio cerrado de E generado por el conjunto C contenido en E.

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ se denomina una **base de Schauder** si para cada $x \in E$ existen únicos escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tales que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión básica** si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder de $\overline{[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]}$.

Todo espacio de Banach con base de Schauder es separable. La recíproca no es cierta. Más aún, un subespacio de un espacio con base puede no tener base.

Todo espacio de Banach E con base de Schauder tiene la **propiedad de aproximación**. Esto es, todo operador compacto de cada espacio de Banach a valores en E es límite uniforme de operadores de rango finito. También vale que si E' tiene la propiedad de aproximación, todo operador compacto de E, a valores en un espacio de Banach, es límite uniforme de operadores de rango finito.

El siguiente lema da una caracterización muy útil del concepto de sucesión básica.

Lema 1.2.1 *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $x_n \neq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Son equivalentes:*

1. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es sucesión básica.*

2. $\exists K > 0$ *tal que para cada sucesión* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *y números naturales* $n < m$ *se tiene*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

El ínfimo de las constantes K que verifican *2* se denomina la **constante básica** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si la constante básica es 1, la base se dice monótona.

Este lema permite obtener diversas desigualdades, que utilizaremos con frecuencia. Por ejemplo, si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica, entonces de *2* se deduce que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K\|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

así como,

$$\left\|\sum_{i=n}^{\infty} a_i x_i\right\| = \left\|x - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right\| \leq (1+K)\|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right\| \leq 2K\|x\| \quad \forall n \leq m \in \mathbb{N}.$$

Respecto a la existencia de sucesiones básicas, podemos destacar el siguiente resultado (Principio de selección de Bessaga-Pelczynski):

> *De toda sucesión w-nula, de norma acotada inferiormente de* E, *puede extraerse una subsucesión básica.*

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de E, se definen funcionales $x_n' \in E'$ por $x_n'(x_m) = \delta_{nm}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Las formas lineales $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denominan **funcionales coordenadas**, ya que son las que dan las coordenadas de un elemento $x \in E$ en la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, esto es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x) x_n.$$

La sucesión $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica pero no siempre es base de E'.

Una base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E se dice **achicante** si para cada $x' \in E'$, $\|x'\|_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donde

$$\|x'\|_n = \sup\{|x'(x)| : \|x\| \leq 1,\ x \in \overline{[\{x_i : i \geq n\}]}\}.$$

Vale la siguiente equivalencia para una base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E:

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es achicante si y sólo si $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de E'.

Una base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E se dice **acotadamente completa** si para cada sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ tal que $\{\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada resulta que $\sum_{i\geq 1} a_i x_i$ converge.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base achicante de E resulta $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ base acotadamente completa de E'. Además vale:

Teorema 1.2.2 *(James) Si E tiene base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces E es reflexivo si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es achicante y acotadamente completa.*

Una base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice **incondicional** si cada vez que $\sum_{n\geq 1} a_n x_n$ converge, converge incondicionalmente.

Proposición 1.2.3 *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de E, son equivalentes:*

1. *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional.*
2. *$\exists K \geq 1$ tal que $\forall A \subset B \subset \mathbb{N}$, A, B finitos, $\forall (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$,*

$$\left\|\sum_{i\in A} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i\in B} a_i x_i\right\|.$$

El ínfimo de los valores de K que verifican *2* se denomina **constante básica incondicional** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si este ínfimo es 1, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice incondicionalmente monótona.

Otro resultado que usaremos para bases incondicionales es el siguiente:

Proposición 1.2.4 *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional de E con constante K. Entonces para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ tal que $\sum_{n\geq 1} a_n x_n$ converge y para toda sucesión acotada $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ resulta*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n\right\| \leq 2K \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|.$$

Ejemplos 1.2.5 En cualquier espacio de sucesiones, notaremos e_n a la sucesión cuyas coordenadas son todas nulas, excepto la n-ésima que es 1.

1. Espacio c_0. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional achicante.
2. Espacio ℓ_1. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional acotadamente completa.
3. Espacio ℓ_p $(1 < p < \infty)$. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional, achicante y acotadamente completa.

4. Espacio $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$. La sucesión de funciones $\{\chi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $\chi_1(t) \equiv 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y $1 \le l \le k$,

$$\chi_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [(2l-2)2^{-k-1}, (2l-1)2^{-k-1}] \\ -1 & \text{si } t \in ((2l-1)2^{-k-1}, 2l2^{-k-1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una base incondicional, achicante y acotadamente completa de $L_p[0,1]$. Se denomina base de Haar.

5. Espacio de Tsirelson. El ejemplo que construyó Tsirelson (T') respondía por la negativa a la pregunta formulada en el libro de Banach: ¿todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene un subespacio isomorfo a c_0 o ℓ_p, para algún $1 \le p < \infty$?

   El espacio original de Tsirelson, T', y su dual, T son espacios de sucesiones, reflexivos y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional achicante y acotadamente completa, pero no contienen copia de ningún ℓ_p.

6. Espacios de Orlicz reflexivos. Un espacio de Orlicz reflexivo ℓ_M es un espacio de sucesiones, asociado a una función continua, convexa, creciente M. La sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional, achicante y acotadamente completa de ℓ_M.

7. Espacio de James. El espacio de James J es un espacio de sucesiones con la propiedad de ser isométrico a su bidual J'', sin ser reflexivo. La sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base achicante de J.

Una caracterización muy útil de espacios reflexivos con base incondicional es:

Teorema 1.2.6 *(James) Si E tiene base incondicional $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces E es reflexivo si y sólo si E no contiene un subespacio isomorfo a c_0 ni un subespacio isomorfo a ℓ_1.*

El espacio de James J no es reflexivo y, por ser J'' separable, J no contiene copia de c_0 ni de ℓ_1. Luego J no puede tener base incondicional.

Definición 1.2.7 *Sean E y F espacios de Banach con bases de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge}\,.$$

Esto es equivalente a la existencia de un isomorfismo $T : E \to F$ que verifique $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una propiedad muy importante de los espacios que no contienen copias de ℓ_1 se deduce del siguiente teorema de Rosenthal ([LT, Th.2.e.5]). Recordemos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach E es **w-Cauchy** si $\{x'(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para todo $x' \in E'$.

Teorema 1.2.8 *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en un espacio de Banach E, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que satisface una y sólo una de las dos posibilidades siguientes:*

- *$\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1.*
- *$\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es w-Cauchy.*

Por lo tanto, un espacio de Banach E, que no contenga un subespacio isomorfo a ℓ_1, verifica que de toda sucesión acotada puede extraerse una subsucesión w-Cauchy.

Capítulo 2

Bases de Schauder en Espacios de Formas Multilineales

2.1 Definiciones y Notación

Se quiere estudiar la existencia de base en $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, siendo cada E_i un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$. Generalizando la definición de $\|x'\|_n$ para $x' \in E'$, definimos, para cada $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$, $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq m$:

$$\|A\|_n^k = \sup\{\|A(x^1, \ldots, x^m)\| : \ x^i \in E_i, \ \|x^i\| = 1, \ \forall 1 \leq i \leq m \text{ y } x^k \in \overline{[e_n^k, e_{n+1}^k, \ldots]}\}$$

y $\|A\|_n = \sup\{\|A\|_n^k : k = 1, \ldots, m\}$.

Siendo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base achicante de E, resulta $\{e_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de $E' = \mathcal{L}({}^1 E)$. Siguiendo esta idea, el candidato a base de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ serán los productos de funcionales básicas. Entonces, para cada $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$, definimos $B_{i_1 \ldots i_m} \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ por

$$B_{i_1 \ldots i_m} = (e_{i_1}^1)' \ldots (e_{i_m}^m)'.$$

Para ordenar este conjunto de formas m-lineales, consideraremos un orden en $\mathbb{N}^m$, denominado "square ordering", definido inductivamente por R. Ryan en su tesis doctoral ([R1]) de la siguiente manera. Para $m = 2$:

$$\begin{array}{ccccc} (1,1) & & (1,2) & & (1,3) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ (2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) \quad \ldots \\ & & & & \downarrow \\ (3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Una vez ordenado $\mathbb{N}^{m-1}$ por $s_1, s_2, s_3, \ldots$, se ordena $\mathbb{N}^m$ por

$$\begin{array}{ccccc} (s_1,1) & & (s_1,2) & & (s_1,3) & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ (s_2,1) & \leftarrow & (s_2,2) & & (s_2,3) & \ldots \\ & & & & \downarrow & \\ (s_3,1) & \leftarrow & (s_3,2) & \leftarrow & (s_3,3) & \ldots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$

La notación $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ indicará la sucesión ordenada de este modo; así como $\sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ notará una serie con este orden. En cambio, $\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}$ notará series iteradas.

Si $1 \le k < m$, la aplicación

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F) &\longrightarrow \mathcal{L}({}^k E_1 \times \cdots \times E_k; \mathcal{L}({}^{m-k} E_{k+1} \times \cdots \times E_m; F)) \\ \left[\Theta(A)(x^1,\ldots,x^k)\right](x^{k+1},\ldots,x^m) &:= A(x^1,\ldots,x^m) \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico entre ambos espacios. Lo usaremos, en particular, en los casos $k = 1$ y $k = m-1$, con $F = \mathbf{C}$. O sea,

$$\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) \cong \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}({}^{m-1} E_2 \times \cdots \times E_m)) \cong \mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times E_{m-1}; E_m').$$

Notaremos $E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m$ al producto de los $m-1$ espacios $E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_m$. De manera análoga se entenderá la notación $A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)$ para una aplicación $m-1$-lineal A.

Claramente, los isomorfismos recién mencionados se mantienen cambiando de orden los espacios. Por lo tanto, para cada $1 \le j \le m$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) &\cong \mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)) \\ &\cong \mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m; E_j'). \end{aligned}$$

Es importante notar también que $\mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)$ es isométrico a un subespacio de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, ya que si $\varphi \in E_j'$, $\|\varphi\| = 1$ y $A \in \mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)$, entonces $A\varphi \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, donde $A\varphi(x^1, \ldots, x^m) = A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)\varphi(x_j)$ y $\|A\varphi\| = \|A\|$. Generalizando esto, $\mathcal{L}({}^k E_1 \times \cdots \times E_k) \hookrightarrow \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, isométricamente, si $k \le m$.

A lo largo del trabajo se utilizará repetidamente el siguiente procedimiento. Para sucesiones $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_i$, $i = 1, \ldots, m$, se quieren extraer subsucesiones con determinada propiedad. El procedimiento será, primero, extraer la subsucesión de $\{x_n^1\}_n$, $\{x_{f_1(n)}^1\}_n$. Considerar $\{x_{f_1(n)}^2\}_n$ y de ahí extraer la subsucesión $\{x_{f_2(n)}^2\}_n$. Considerar $\{x_{f_2(n)}^3\}_n$ y extraer $\{x_{f_3(n)}^3\}_n$, y así sucesivamente. Finalmente, $\{x_{f_m(n)}^1\}_n, \ldots, \{x_{f_m(n)}^m\}_n$ son subsucesiones con las condiciones pedidas, con los mismos subíndices.

2.2 Resultados preliminares

Será de gran utilidad el siguiente resultado, que es una simple modificación del Lemma 2.4 de [AHV]:

Lema 2.2.1 *Sean $E_1, \ldots, E_m, F$ espacios de Banach, sea $A \in \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ y sean $\{x_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \{x_k^m\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas en $E_1, \ldots, E_m$, respectivamente. Supongamos que al menos una de las sucesiones es w-convergente a 0 y las otras son w-Cauchy. Entonces la sucesión $\{A(x_k^1, \ldots, x_k^m)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en F.*

También usaremos un corolario de este lema ([AHV, Corollary 2.5]):

Corolario 2.2.2 *Sean $E_1, \ldots, E_m, F$ espacios de Banach, sea $A \in \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ y sean $\{x_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \{x_k^m\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas w-Cauchy en $E_1, \ldots, E_m$, respectivamente. Entonces $\{A(x_k^1, \ldots, x_k^m)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en F.*

Como consecuencia de estos resultados, tenemos:

Proposición 2.2.3 *Si $E_1, \ldots, E_m, F$ son espacios de Banach tales que ningún E_i contiene copia de ℓ_1, entonces $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F) \subset \mathcal{K}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$. Para ver que A es compacta, basta ver que si $(x_k^1, \ldots, x_k^m) \in B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_m}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{A(x_k^1, \ldots, x_k^m)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene subsucesión convergente. Como cada $E_i \not\supset \ell_1$, podemos extraer subsucesiones (con los mismos subíndices) $\{x_{k_j}^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ w-Cauchy. Por el corolario anterior, $\{A(x_{k_j}^1, \ldots, x_{k_j}^m)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente en F. ∎

Habíamos visto que toda forma m-lineal $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ aproximable es wsc. Bajo ciertas condiciones sobre los espacios $E_1, \ldots, E_m$ veremos que vale la recíproca.

Proposición 2.2.4 *Si los espacios de Banach $E_1, \ldots, E_m$ verifican que ninguno de ellos contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 y además para cada $j = 1, \ldots, m$, E_j' tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) = \mathcal{L}_a({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$.*

Demostración: Lo probaremos por inducción en m. Es trivial si $m = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para $m-1$ espacios. Sea $A \in \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ y sea $T : E_1 \to \mathcal{L}({}^{m-1} E_2 \times \cdots \times E_m)$ el operador lineal asociado, $T(x^1)(x^2, \ldots, x^m) = A(x^1, \ldots, x^m)$. Veamos que para cada $x^1 \in E_1$, $T(x^1) \in \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1} E_2 \times \cdots \times E_m)$. Si $x_n^i \xrightarrow{w} x^i$ en E_i, para cada $i = 2, \ldots, m$,

$$|T(x^1)(x_k^2, \ldots, x_k^m) - T(x^1)(x^2, \ldots, x^m)| = |A(x^1, x_k^2, \ldots, x_k^m) - A(x^1, x^2, \ldots, x^m)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Entonces $T : E_1 \to \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1} E_2 \times \cdots \times E_m)$. Además T es wsc. En efecto, como T es lineal, basta ver que es wsc en 0. Supongamos que no, entonces existen $\varepsilon > 0$ y

una sucesión w-nula $\{x_k^1\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E_1$ tales que $\|T(x_k^1)\| > \epsilon \ \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $(x_k^2, \ldots, x_k^m) \in B_{E_2} \times \cdots \times B_{E_m}$ tal que

$$|T(x_k^1)(x_k^2, \ldots, x_k^m)| > \epsilon.$$

O sea $|A(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^m)| > \epsilon$. Como cada E_i no contiene a ℓ_1 $(i = 2, \ldots, m)$, podemos extraer subsucesiones (con los mismos subíndices) $\{x_{k_j}^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ w-Cauchy, para todo $i = 2, \ldots, m$. Entonces tenemos que $x_{k_j}^1 \xrightarrow{w} 0$ en E_1, $\{x_{k_j}^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ es w-Cauchy en E_i, para cada $i = 2, \ldots, m$, A es wsc y $|A(x_{k_j}^1, x_{k_j}^2, \ldots, x_{k_j}^m)| > \epsilon$. Esto contradice el lema anterior. Luego debe ser T wsc.

Por lo tanto, tenemos $T \in \mathcal{L}_{wsc}(E_1, \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m))$. Ahora, como $E_1 \not\supset \ell_1$, resulta T un operador compacto y por tener E_1' la propiedad de aproximación, debe ser T límite de operadores de rango finito.

Dado $\epsilon > 0$, existe $T^f \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m))$ de rango finito, tal que $\|T - T^f\| < \epsilon/2$. Podemos notar

$$T^f = \sum_{j=1}^{l} a_j' B_j$$

con $a_j' \in E_1'$, $\|a_j'\| = 1$, $B_j \in \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m) \ \ \forall j = 1, \ldots, l$.

Por hipótesis inductiva, $\mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m) = \mathcal{L}_a({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m)$, de donde existen $B_j^f \in \mathcal{L}({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m)$ de tipo finito tales que $\|B_j - B_j^f\| < \epsilon/2l$, para todo $j = 1, \ldots, l$.

Entonces $\sum_{j=1}^{l} a_j' B_j^f \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}({}^{m-1}E_2 \times \cdots \times E_m))$ tiene asociada una forma m-lineal, que seguiremos notando $\sum_{j=1}^{l} a_j' B_j^f \in \mathcal{L}({}^{m}E_1 \times \cdots \times E_m)$, que es de tipo finito. Además,

$$\begin{aligned} \left\| A - \sum_{j=1}^{l} a_j' B_j^f \right\| &= \left\| T - \sum_{j=1}^{l} a_j' B_j^f \right\| \leq \left\| T - T^f \right\| + \left\| T^f - \sum_{j=1}^{l} a_j' B_j^f \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{l} \|B_j - B_j^f\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Luego A es aproximable. ■

Si un espacio tiene base achicante, su dual tiene base. Por lo tanto, su dual tiene la propiedad de aproximación y es separable. Entonces el espacio no puede contener un subespacio isomorfo a ℓ_1. De la proposición anterior resulta, entonces, el siguiente corolario:

Corolario 2.2.5 *Si $E_1, \ldots, E_m$ son espacios de Banach con bases achicantes, entonces $\mathcal{L}_{wsc}({}^{m}E_1 \times \cdots \times E_m) = \mathcal{L}_a({}^{m}E_1 \times \cdots \times E_m)$.*

Con un desarrollo similar al usado en la demostración de que T es wsc en la proposición 2.2.4, se prueba la siguiente observación, que será útil más adelante.

Observación 2.2.6 Si $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$, notemos $\phi_A : E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m \to E_j'$ a la forma $m-1$-lineal asociada a A; o sea, $\phi_A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)(x^j) = A(x^1, \ldots, x^m)$. Veamos que si $E_j \not\supset \ell_1$, entonces A es wsc si y sólo si ϕ_A es wsc.

Para simplificar la notación, consideraremos $j = 1$. Supongamos que A es wsc y ϕ_A no. Esto dice que existen sucesiones $x_n^2 \xrightarrow{w} x^2$ en E_2, ..., $x_n^m \xrightarrow{w} x^m$ en E_m, tales que $\|\phi_A(x_n^2, \ldots, x_n^m) - \phi_A(x^2, \ldots, x^m)\| > \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_1$ tal que $|\phi_A(x_n^2, \ldots, x_n^m)(x_n^1) - \phi_A(x^2, \ldots, x^m)(x_n^1)| > \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por ser $\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada y $E_1 \not\supset \ell_1$, se puede extraer una subsucesión $\{x_{n_k}^1\}_{k\in\mathbb{N}}$ w-Cauchy y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \epsilon &< |A(x_{n_k}^1, \ldots, x_{n_k}^m) - A(x_{n_k}^1, x^2, \ldots, x^m)| \\ &\leq |A(x_{n_k}^1, x_{n_k}^2 - x^2, \ldots, x_{n_k}^m)| + |A(x_{n_k}^1, x^2, x_{n_k}^3 - x^3, \ldots, x_{n_k}^m)| \\ &\quad + \cdots + |A(x_{n_k}^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x_{n_k}^m - x^m)| \end{aligned}$$

y esto es absurdo ya que cada sumando tiende a 0, por ser A wsc y en virtud del lema 2.2.1.

Recíprocamente, si ϕ_A es wsc, sean $x_n^1 \xrightarrow{w} x^1$ en E_1, ..., $x_n^m \xrightarrow{w} x^m$ en E_m. Entonces,

$$\begin{aligned} &|A(x_n^1, \ldots, x_n^m) - A(x^1, \ldots, x^m)| = |\phi_A(x_n^2, \ldots, x_n^m)(x_n^1) - \phi_A(x^2, \ldots, x^m)(x^1)| \\ &\leq |\phi_A(x_n^2, \ldots, x_n^m)(x_n^1) - \phi_A(x^2, \ldots, x^m)(x_n^1)| \\ &\quad + |\phi_A(x^2, \ldots, x^m)(x_n^1) - \phi_A(x^2, \ldots, x^m)(x^1)| \\ &\leq \|\phi_A(x_n^2, \ldots, x_n^m) - \phi_A(x^2, \ldots, x^m)\| \, \|x_n^1\| + |\phi_A(x^2, \ldots, x^m)(x_n^1 - x^1)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

2.3 Bases en Espacios de Formas Multilineales

Si los espacios de Banach $E_1, \ldots, E_m$ tienen bases de Schauder $\{e_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \{e_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente, R. Ryan ([R1]) probó que $\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_m}^m\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ (ordenado con el "square ordering") es una base de Schauder del producto tensorial proyectivo $E_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} E_m$. Recordemos que $(E_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} E_m)' = \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ y resulta que nuestro candidato a base de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$, es la sucesión de funcionales coordenadas asociadas a la base de $E_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} E_m$. O sea, $B_{i_1 \ldots i_m} = \left(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_m}^m\right)' \quad \forall (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$.

Por lo tanto, $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es sucesión básica en $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$. La siguiente proposición nos dice cuál es el subespacio que genera, en el caso en que las bases de $E_1, \ldots, E_m$ sean achicantes. Esta hipótesis tiene sentido ya que, como veremos en el teorema 2.3.2, si $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es base de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, entonces las bases de $E_1, \ldots, E_m$ son achicantes.

Proposición 2.3.1 *Sean $E_1, \ldots, E_m$ espacios de Banach con bases achicantes $\{e_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \{e_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Entonces la sucesión $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es base de Schauder de $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$.*

Demostración: Como $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es sucesión básica, es base del subespacio cerrado que genera, que llamaremos S. Por el corolario anterior, $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) = \mathcal{L}_a({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, entonces queremos ver que $S = \mathcal{L}_a({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$.

Para cada $(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m$, $B_{i_1\dots i_m}=(e^1_{i_1})'\dots(e^m_{i_m})'$ es un producto de funcionales lineales, luego, cada combinación lineal finita de ellas es una forma m-lineal de tipo finito y, por lo tanto, toda $A\in S$ es aproximable.

Recíprocamente, toda forma m-lineal aproximable se aproxima por formas m-lineales de tipo finito, que a su vez son sumas de productos de funcionales. Luego, basta ver que un producto de funcionales pertenece al subespacio S. Sean $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in E_1'\times\cdots\times E_m'$. Como cada E_j tiene base achicante $\{e^j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, resulta $\{(e^j_n)'\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de E_j'. Entonces, $\varphi_j=\sum_{n=1}^{\infty}a^j_n\,(e^j_n)'$, de donde

$$\begin{aligned}\varphi_1\dots\varphi_m &= \left[\sum_{i_1=1}^{\infty}a^1_{i_1}\,(e^1_{i_1})'\right]\dots\left[\sum_{i_m=1}^{\infty}a^m_{i_m}\,(e^m_{i_m})'\right]\\ &= \sum_{i_1=1}^{\infty}\dots\sum_{i_m=1}^{\infty}a^1_{i_1}\dots a^m_{i_m}\,(e^1_{i_1})'\dots(e^m_{i_m})'\\ &= \sum_{i_1=1}^{\infty}\dots\sum_{i_m=1}^{\infty}a^1_{i_1}\dots a^m_{i_m}\,B_{i_1\dots i_m}\end{aligned}$$

luego $\varphi_1\dots\varphi_m\in S$ y $S=\mathcal{L}_a({}^mE_1\times\cdots\times E_m)=\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$. ∎

Entonces, si las bases $\{e^i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son achicantes, sabemos que $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es sucesión básica en $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$ y que el subespacio cerrado que genera es $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$. Esto nos dice que $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es base de $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$ si y sólo si $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)=\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$. El siguiente teorema nos da más equivalencias.

Teorema 2.3.2 *Sean $E_1,\dots,E_m$ espacios de Banach con bases $\{e^1_n\}_{n\in\mathbb{N}},\dots,\{e^m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Son equivalentes:*

(i) $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ *es base de* $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$.

(ii) Para cada $A\in\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$, $\|A\|_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

(iii) Para cada $A\in\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$,

$$A=\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}A(e^1_{i_1},\dots,e^m_{i_m})B_{i_1\dots i_m}$$

(uniformemente en el producto de las bolas unitarias).

(iv) Para cada i, la base $\{e^i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)=\mathcal{L}_a({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$.

(v) Para cada i, la base $\{e^i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)=\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$.

(vi) Para cada i, la base $\{e^i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y existe $j\in\{1,\dots,m\}$ tal que

$$\mathcal{L}({}^{m-1}E_1\times\cdots\times\widehat{E_j}\times\cdots\times E_m;E_j')=\mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_1\times\cdots\times\widehat{E_j}\times\cdots\times E_m;E_j').$$

(vii) Para cada i, la base $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y para todo $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$\mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m; E_j') = \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m; E_j').$$

(viii) Para cada i, la base $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y para todo $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$\mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m; E_j') = \mathcal{K}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m; E_j').$$

(ix) Para cada i, la base $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y existe $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m) &= \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m) \quad y \\ \mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)) &= \mathcal{K}(E_j; \mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)). \end{aligned}$$

(x) Para cada i, la base $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i es achicante y para todo $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$\mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)) = \mathcal{K}(E_j; \mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)).$$

Demostración: Probaremos primero la equivalencia entre los tres primeros items.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sean $A \in \mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$, $x^i \in B_{E_i}$, $\forall i = 1,\dots,m$, y supongamos que para cierto $k \in \{1,\dots,m\}$ fijo, $x^k \in \overline{[e_n^k, e_{n+1}^k, \dots]}$. Sea $D_k = \{(i_1,\dots,i_m) \in \mathbb{N}^m : i_k \geq n\}$. Por la definición del square ordering en $\mathbb{N}^m$, resulta $D_k \subset D = \{(i_1,\dots,i_m) \in \mathbb{N}^m : (i_1,\dots,i_m) \geq (1,\dots,1,n)\}$. Además si $(i_1,\dots,i_m) \notin D_k$, $B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} A(x^1,\dots,x^m) &= \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m} A(e_{i_1}^1,\dots,e_{i_m}^m) B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in D_k} A(e_{i_1}^1,\dots,e_{i_m}^m) B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in D}{}' A(e_{i_1}^1,\dots,e_{i_m}^m) B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_m)\geq(1,\dots,1,n)} A(e_{i_1}^1,\dots,e_{i_m}^m) B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|A(x^1,\dots,x^m)| \leq \left\| \sum_{(i_1,\dots,i_m)\geq(1,\dots,1,n)} A(e_{i_1}^1,\dots,e_{i_m}^m) B_{i_1\dots i_m} \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

de donde $\|A\|_n^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y por ser k arbitrario, $\|A\|_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $(x^1,\dots,x^m) \in B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_m}$, y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que (iii) vale puntualmente:

$$\begin{aligned} A(x^1,\dots,x^m) &= A\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} (e_{i_1}^1)'(x^1)\, e_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_m=1}^{\infty} (e_{i_m}^m)'(x^m)\, e_{i_m}^m \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} A(e_{i_1}^1,\dots,e_{i_m}^m) B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m) \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|A(x^1,\dots,x^m)-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_m=1}^{N_m}A(e^1_{i_1},\dots,e^m_{i_m})B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m)\right| \\
&\le\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}A(e^1_{i_1},\dots,e^m_{i_m})B_{i_1\dots i_m}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{N_m}A(e^1_{i_1},\dots,e^m_{i_m})B_{i_1\dots i_m}\right)(x^1,\dots,x^m)\right| \\
&\quad+\left|\sum_{i_1=N_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}A(e^1_{i_1},\dots,e^m_{i_m})B_{i_1\dots i_m}(x^1,\dots,x^m)\right| \\
&=\left|\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},e^2_{i_2},\dots,e^m_{i_m}\right)B_{i_2\dots i_m}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{N_m}A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},e^2_{i_2},\dots,e^m_{i_m}\right)B_{i_2\dots i_m}\right)(x^2,\dots,x^m)\right| \qquad (2.1)\\
&\quad+\left|A\left(\sum_{i_1=N_1+1}^{\infty}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},x^2,\dots,x^m\right)\right|.
\end{aligned}$$

Si K_i es la constante básica para $\{e^i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $i=1,\dots m$, resulta

$$\begin{aligned}
\left|A\left(\sum_{i_1=N_1+1}^{\infty}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},x^2,\dots,x^m\right)\right| &\le \|A\|_{N_1}\left\|\sum_{i_1=N_1+1}^{\infty}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1}\right\|\|x^2\|\dots\|x^m\| \\
&\le \|A\|_{N_1}\left\|x^1-\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1}\right\|\le\|A\|_{N_1}(1+K_1).
\end{aligned}$$

Con (2.1) podemos utilizar nuevamente el procedimiento anterior, obteniendo

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},e^2_{i_2},\dots,e^m_{i_m}\right)B_{i_2\dots i_m}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\sum_{i_2=1}^{N_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{N_m}A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},e^2_{i_2},\dots,e^m_{i_m}\right)B_{i_2\dots i_m}\right)(x^2,\dots,x^m)\right| \\
&\le\left|\left(\sum_{i_3=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_m=1}^{\infty}A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},\sum_{i_2=1}^{N_2}(e^2_{i_2})'(x^2)\,e^2_{i_2},e^3_{i_3},\dots,e^m_{i_m}\right)B_{i_3\dots i_m}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\sum_{i_3=1}^{N_3}\cdots\sum_{i_m=1}^{N_m}A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}(e^1_{i_1})'(x^1)\,e^1_{i_1},\sum_{i_2=1}^{N_2}(e^2_{i_2})'(x^2)\,e^2_{i_2},e^3_{i_3},\dots,e^m_{i_m}\right)B_{i_3\dots i_m}\right)(x^3,\dots,x^m)\right|
\end{aligned}$$

$$+ \left| A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1} (e_{i_1}^1)'(x^1)\, e_{i_1}^1, \sum_{i_2=N_2+1}^{\infty} (e_{i_2}^2)'(x^2)\, e_{i_2}^2, x^3, \ldots, x^m \right) \right|$$

y el segundo sumando verifica

$$\left| A\left(\sum_{i_1=1}^{N_1} (e_{i_1}^1)'(x^1)\, e_{i_1}^1, \sum_{i_2=N_2+1}^{\infty} (e_{i_2}^2)'(x^2)\, e_{i_2}^2, x^3, \ldots, x^m \right) \right| \leq \|A\|_{N_2} K_1 (1 + K_2).$$

Iterando este razonamiento, obtenemos

$$\left| A(x^1, \ldots, x^m) - \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{N_m} A(e_{i_1}^1, \ldots, e_{i_m}^m) B_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^m) \right|$$
$$\leq \|A\|_{N_1}(1 + K_1) + \|A\|_{N_2} K_1 (1 + K_2) + \cdots + \|A\|_{N_m} K_1 \ldots K_{m-1}(1 + K_m).$$

Luego,

$$\left\| A - \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{N_m} A(e_{i_1}^1, \ldots, e_{i_m}^m) B_{i_1 \ldots i_m} \right\| \underset{N_1, \ldots, N_m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(independientemente del orden de sumación).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sabíamos que $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m}$ es sucesión básica y (iii) nos dice que generan $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$. Luego $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m}$ es base.

Tenemos, entonces, que (i), (ii) y (iii) son equivalentes, y es claro que implican que las bases $\{e_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ son achicantes, para todo $i = 1, \ldots, m$. (Por ejemplo, es fácil ver que si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in E_1' \times \cdots \times E_m'$, por (ii), $\|\varphi_1 \ldots \varphi_m\|_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\|\varphi_i\|_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$).

Por lo tanto, por la proposición 2.3.1 y el corolario 2.2.5, resulta que (i) es equivalente a (iv) y (v). Además, (v) equivale a (vi) y (vii), por la observación 2.2.6.

Luego, tenemos que los items del (i) al (vii) son equivalentes. Y la proposición 2.2.3 dice que $(vii) \Rightarrow (viii)$.

$(viii) \Rightarrow (ii)$ Sea $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ y sea $\phi_A \in \mathcal{L}_{wsc}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m; E_j')$ asociada a A. Entonces

$$\begin{aligned} \|A\|_n^j &= \sup\{|\phi_A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)(x_j)| : \|x^i\| \leq 1,\ \forall i, x^j \in \overline{[e_n^j, e_{n+1}^j, \ldots]}\} \\ &= \sup\{\|\phi_A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)\|_n : \|x^i\| \leq 1,\ \forall i\}. \end{aligned}$$

Como ϕ_A es compacto (por hipótesis), existen $(x_k^1, \ldots, \widehat{x_k^j}, \ldots, x_k^m) \in B_{E_1} \times \cdots \times \widehat{B_{E_j}} \times \cdots \times B_{E_m}$, $\forall k = 1, \ldots, K$ tales que

$$\phi_A\left(B_{E_1} \times \cdots \times \widehat{B_{E_j}} \times \cdots \times B_{E_m}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{K} B\left(\phi_A(x_k^1, \ldots, \widehat{x_k^j}, \ldots, x_k^m), \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Por ser achicante la base de E_j', para cada $k = 1, \ldots, K$,

$$\|\phi_A(x_k^1, \ldots, \widehat{x_k^j}, \ldots, x_k^m)\|_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

y entonces podemos elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, $\|\phi_A(x_k^1, \ldots, \widehat{x_k^j}, \ldots, x_k^m)\|_n < \varepsilon/2$, $\forall k = 1, \ldots, K$.

Luego, si $n \geq n_0$, para todo $(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m) \in B_{E_1} \times \cdots \times \widehat{B_{E_j}} \times \cdots \times B_{E_m}$

$$\|\phi_A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)\|_n \leq \|\phi_A(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m) - \phi_A(x_k^1, \ldots, \widehat{x_k^j}, \ldots, x_k^m)\|_n + \|\phi_A(x_k^1, \ldots, \widehat{x_k^j}, \ldots, x_k^m)\|_n < \varepsilon$$

y, por lo tanto, vale (ii).

$(v) \Rightarrow (ix)$ Claramente, (v) implica que $\mathcal{L}(^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m) = \mathcal{L}_{wsc}(^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)$. Además, si $T \in \mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}(^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m))$ y $A \in \mathcal{L}(^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ es la forma m-lineal asociada, por ser A wsc, resulta, haciendo la misma cuenta que en la demostración de la proposición 2.2.4, que T es compacto.

$(ix) \Rightarrow (v)$ Sea $A \in \mathcal{L}(^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ y $T_A \in \mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}(^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m))$ asociado. Sean $x_n^1 \xrightarrow{w} x^1$ en E_1, ... , $x_n^m \xrightarrow{w} x^m$ en E_m, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que todas las sucesiones y sus límites tienen norma a lo sumo 1. Entonces

$$\begin{aligned}
&|A(x_n^1, \ldots, x_n^m) - A(x^1, \ldots, x^m)| \\
&= |T_A(x_n^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m) - T_A(x^j)(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)| \\
&\leq |T_A(x_n^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m) - T_A(x^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m)| \\
&\quad + |T_A(x^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m) - T_A(x^j)(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)| \\
&= |T_A(x_n^j - x^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m)| \\
&\quad + |T_A(x^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m) - T_A(x^j)(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)| \\
&\leq \|T_A(x_n^j - x^j)\| + |T_A(x^j)(x_n^1, \ldots, \widehat{x_n^j}, \ldots, x_n^m) - T_A(x^j)(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m)| \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Por ser T_A un operador lineal compacto, es wsc, y, por lo tanto, el primer término de (2.2) tiende a cero, y el segundo también, ya que $T_A(x^j)$ es wsc. Luego A es wsc y vale (v).

$(v) \Rightarrow (x)$ El razonamiento es el mismo que en $(v) \Rightarrow (ix)$.

$(x) \Rightarrow (v)$ Sea $A \in \mathcal{L}(^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ y sean $x_n^1 \xrightarrow{w} x^1$ en E_1, ... , $x_n^m \xrightarrow{w} x^m$ en E_m. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todas las sucesiones y sus límites tienen norma a lo sumo 1. Notemos cada uno de los operadores asociados a A, $T_A^j \in \mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}(^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m))$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&|A(x_n^1, \ldots, x_n^m) - A(x^1, \ldots, x^m)| \leq |A(x_n^1 - x^1, x_n^2, \ldots, x_n^m)| + |A(x^1, x_n^2 - x^2, x_n^3, \ldots, x_n^m)| \\
&\quad + \cdots + |A(x^1, \ldots, x^{m-1}, x_n^m - x^m)| \leq \|T_A^1(x_n^1 - x^1)\| + \cdots + \|T_A^m(x_n^m - x^m)\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto A es wsc. ■

La base $\{B_{i_1 \ldots i_m}\}_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m}$ se denominará **base monomial**, por estar formada por productos de funcionales lineales. Diestel y Morrison ([DiM]) probaron:

Teorema 2.3.3 *Si uno de los espacios de Banach E o F tiene descomposición de Schauder de dimensión finita incondicional y existe un operador lineal acotado no compacto de E en F, entonces $\mathcal{L}(E,F)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞.*

E tiene **descomposición de Schauder de dimensión finita incondicional** si existen subespacios de dimensión finita $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E, tales que para cada $x \in E$, existe una única sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in E_n$, tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y esta convergencia es incondicional. Más adelante profundizaremos sobre descomposiciones de Schauder, en este punto lo importante es notar que una base de Schauder incondicional es una descomposición de Schauder de dimensión finita incondicional.

Como consecuencia del teorema 2.3.2 y del resultado de Diestel y Morrison, se obtiene el siguiente:

Corolario 2.3.4 *Si los espacios de Banach $E_1,\ldots,E_m$ tienen todos bases de Schauder incondicionales achicantes, entonces se verifica una y sólo una de las dos posibilidades siguientes:*

(a) $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial.

(b) $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ contiene copia de ℓ_∞.

Demostración: Si no vale (a), por (x) del teorema 2.3.2, para algún $j \in \{1,\ldots,m\}$, existe un operador $T \in \mathcal{L}(E_j;\mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m))$ no compacto. Por el teorema anterior, $\mathcal{L}(E_j;\mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m))$, que es isomorfo a $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, contiene copia de ℓ_∞. ■

Recordemos que un espacio que contiene a ℓ_∞ no puede ser separable, en particular, no puede tener base. Por lo tanto, el corolario dice que para espacios con bases achicantes incondicionales, o bien $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial, o bien no tiene ninguna base, ni siquiera es separable.

La existencia de bases monomiales está relacionada con la reflexividad del espacio de formas m-lineales. Holub([H2]) probó que si E y F son espacios de Banach reflexivos con bases, entonces $\mathcal{L}(E;F)$ es reflexivo si sólo si $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$. De este resultado, junto con la condición (ix) del teorema 2.3.2, nuevamente por inducción, se obtiene el siguiente corolario, que generaliza a espacios de formas multilineales un resultado ya probado por R. Alencar ([Al]) para espacios de polinomios homogéneos.

Corolario 2.3.5 *Si $E_1,\ldots,E_m$ son espacios de Banach reflexivos con bases de Schauder, entonces $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ es reflexivo si y sólo si tiene base monomial.*

Observación 2.3.6 Dados $E_1,\ldots,E_m$ tales que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial, uno puede preguntarse si tendrá también una base no monomial, o sea una base que no esté formada por productos de funcionales coordenadas asociadas a bases de los espacios $E_1,\ldots,E_m$. Otro resultado de Holub ([H2]) dice que si E y F son espacios de Banach reflexivos con bases de Schauder y su producto tensorial proyectivo no es reflexivo, entonces

tiene alguna base que no es el producto tensorial de bases de E y F. Podemos obtener un resultado similar. Si alguno de los espacios $E_1, \ldots, E_m$ no es reflexivo, tampoco lo será $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, ya que contiene copia de E_i'. Zippin ([Zi]) probó que si todas las bases de un espacio son acotadamente completas, entonces el espacio es reflexivo. Por lo tanto, si alguno de los espacios $E_1, \ldots, E_m$ no es reflexivo (siempre suponiendo que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial), $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ debe tener una base no acotadamente completa. Como las bases monomiales son las funcionales coordenadas de bases del producto tensorial proyectivo, son acotadamente completas. Luego obtenemos:

Proposición 2.3.7 *Si $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial y alguno de los espacios $E_1, \ldots, E_m$ no es reflexivo, entonces $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene también una base no monomial.*

2.4 Aplicación a Espacios con índices inferior y superior

El teorema 2.3.2 da equivalencias al hecho de que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tenga base. Pero estas equivalencias se refieren al mismo espacio $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, o a espacios formados a partir de éste (por ejemplo, $\mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)))$. Queremos condiciones suficientes, aunque no sean necesarias, para que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tenga base, pero que se refieran a propiedades de los espacios $E_1, \ldots, E_m$ y no a las formas m-lineales o $m-1$-lineales sobre ellos definidas. Para eso usaremos los índices superior e inferior de un espacio de Banach, definidos por R. Gonzalo y J. A. Jaramillo ([GJ]).

Definición 2.4.1 *Sean E un espacio de Banach y $1 \leq p, q \leq \infty$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tiene* **cota superior** *p si existe $C > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p}$$

y decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene **cota inferior** *q si existe $C > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \geq C \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \right)^{1/q}$$

(donde, si p ó q es ∞, el miembro derecho se entiende $C \sup_{1\leq i\leq n} |a_i|$).

Definición 2.4.2 *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ se dice* **seminormalizada** *si existen constantes $k, K > 0$ tales que*

$$k \leq \|x_n\| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Recordemos que un espacio de Banach E se dice **Schur** si toda sucesión w-convergente es $\|\cdot\|$-convergente. Si E no es Schur, entonces existen sucesiones w-nulas seminormalizadas, y por Bessaga-Pelczynski, existen sucesiones básicas w-nulas seminormalizadas.

Definición 2.4.3 *Para $1 \leq p \leq \infty$ $(1 < q \leq \infty)$, diremos que E tiene la* **propiedad S_p** *(***propiedad T_q***) si toda sucesión básica seminormalizada w-nula tiene una subsucesión con cota superior p (cota inferior q). Si $q = 1$, E tiene la* **propiedad T_1** *si E es Schur.*

Observación 2.4.4 1. Todo E tiene S_1 y T_∞. En efecto, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión básica seminormalizada w-nula, $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, \|x_i\| \leq K \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

por lo que E tiene S_1. Por otro lado, si C es la constante básica para $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces

$$k|a_j| \leq |a_j| \, \|x_j\| = \left\|\sum_{i=1}^{j} a_i x_i - \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i\right\| \leq 2C \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

para todo $j = 1, \ldots, n$, de donde

$$\frac{k}{2C} \sup_{1\leq j\leq n} |a_j| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

por lo que E tiene T_∞.

2. Si E tiene S_p o T_q, todo subespacio cerrado de E también.

3. Si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ y E tiene S_{p_2}, entonces E tiene S_{p_1}.

4. Si $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ y E tiene T_{q_1}, entonces E tiene T_{q_2}.

Ahora sí estamos en condiciones de definir los índices inferior y superior de un espacio de Banach.

Definición 2.4.5 *Si E es un espacio de Banach, se define el* **índice inferior** *de E por*

$$\ell(E) = \sup\{p \in [1, +\infty] : E \text{ tiene } S_p\}$$

y el **índice superior** *de E por*

$$u(E) = \inf\{q \in [1, +\infty] : E \text{ tiene } T_q\}.$$

Si el espacio E es Schur, entonces tiene las propiedades S_p y T_q para todo $1 \leq p, q \leq \infty$. Por lo que $\ell(E) = \infty$ y $u(E) = 1$.

Si E no es Schur, es fácil ver que

$$\ell(E) \leq u(E).$$

Estos índices están calculados para muchos espacios de Banach clásicos. Sólo citaremos los resultados, las demostraciones pueden verse en [GJ] o [Go1].

Ejemplos 2.4.6 1. Si $1 < p < \infty$, ℓ_p tiene las propiedades S_p y T_p, por lo que $\ell(\ell_p) = u(\ell_p) = p$.

2. c_0 tiene la propiedad S_∞, por lo tanto $\ell(c_0) = u(c_0) = \infty$.

3. ℓ_1 es Schur, entonces $\ell(\ell_1) = \infty$, $u(\ell_1) = 1$.

4. El espacio original de Tsirelson T' y su dual T tienen los siguientes índices: $\ell(T) = u(T) = 1$; $\ell(T') = u(T') = \infty$.

5. Si $1 \leq p < \infty$, $\ell(L_p[0,1]) = \min\{2,p\}$ y $u(L_p[0,1]) = \max\{2,p\}$.

6. El espacio de James, J, tiene S_2 y T_2, por lo que $\ell(J) = u(J) = 2$. También, J' tiene S_2 y T_2, luego $\ell(J') = u(J') = 2$.

7. Si ℓ_M es un espacio de Orlicz reflexivo, $\ell(\ell_M) = \alpha_M$ y $u(\ell_M) = \beta_M$, donde α_M y β_M son los índices de Boyd inferior y superior de ℓ_M (para su definición, ver [LT]).

Definición 2.4.7 *Sea $1 \leq p < \infty$. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ se dice* **w-p-sumable** *si para todo $x' \in E'$, $\{x'(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Análogamente, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ se dice* **w-∞-sumable** *si para todo $x' \in E'$, $\{x'(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.*

La siguiente proposición, debida a Grothendieck [Gr], relaciona las sucesiones con cota superior con las sucesiones w-p-sumables.

Proposición 2.4.8 *Sean E un espacio de Banach y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Si $1 \leq p \leq \infty$, notaremos p' al conjugado de p, o sea $1/p + 1/p' = 1$. Son equivalentes:*

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene cota superior p.*

(ii) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es w-p'-sumable.*

(iii) Existe un operador lineal continuo T de ℓ_p (c_0, si $p = \infty$) en E tal que $T(e_n) = x_n$, donde e_n es el n-ésimo vector unitario de ℓ_p (c_0).

La condición *(iii)* muestra la relación de sucesiones con cota superior p con la base canónica de ℓ_p. El siguiente resultado de I. Zalduendo ([Za]) nos servirá para aprovechar esta relación.

Teorema 2.4.9 *Sean $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$, tales que $1/p_1 + \cdots + 1/p_m < 1$. Entonces, para toda $\phi \in \mathcal{L}({}^m\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m})$, vale que $\{\phi(e_k^1, \ldots, e_k^m)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_s$, donde*

$$s = \left[1 - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}\right)\right]^{-1} \quad y \quad \|\{\phi(e_k^1, \ldots, e_k^m)\}_k\|_{\ell_s} \leq \|\phi\|$$

(si $p = \infty$, se considerará c_0 en lugar de ℓ_p).

Es sabido que el espacio de polinomios m-homogéneos sobre ℓ_p, $\mathcal{P}({}^m\ell_p)$, tiene base monomial si $m < p$; mientras que cuando $m \geq p$, $\mathcal{P}({}^m\ell_p)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞. En lo que sigue generalizaremos estos hechos utilizando los índices inferior y superior. Antes, necesitaremos un lema, cuya demostración está modelada en la prueba del teorema 2.4 de [GJ].

Lema 2.4.10 *Sean $E_1, \ldots, E_m, F$ espacios de Banach tales que*

$$\frac{1}{\ell(E_1)} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_m)} < \frac{1}{u(F)}$$

entonces toda $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$ es wsc.

Demostración: Sea $A \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m; F)$. Elijamos $p_1, \ldots, p_m, q$ tales que cada E_i tenga la propiedad S_{p_i}, F tenga la propiedad T_q y

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < \frac{1}{q}.$$

Tomemos sucesiones $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_i$ w-convergentes a 0. Si alguna es $\|\cdot\|$-convergente a 0, claramente $A(x_n^1, \ldots, x_n^m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego podemos suponer que todas las sucesiones son seminormalizadas y, entonces, tienen subsucesiones básicas. Por lo tanto, cada $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene subsucesión $\{x_{n_k}^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ con cota superior p_i (podemos obtener los mismos subíndices en todas las subsucesiones). Luego, para cada $i = 1, \ldots, m$, la aplicación de ℓ_{p_i} en E_i que manda e_k^i en $x_{n_k}^i$, es continua. Sea, entonces, $\Phi \in \mathcal{L}({}^m\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}; F)$ dado por

$$\Phi(e_{i_1}^1, \ldots, e_{i_m}^m) = A(x_{n_{i_1}}^1, \ldots, x_{n_{i_m}}^m).$$

Veremos que $y_k = A(x_{n_k}^1, \ldots, x_{n_k}^m)$ es una sucesión con cota superior $(1/p_1 + \cdots + 1/p_m)^{-1}$. Para esto, basta ver que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es w-s-sumable, donde

$$s = \left[1 - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}\right)\right]^{-1}$$

Sea $\gamma \in F'$, como $\gamma \circ \Phi \in \mathcal{L}({}^m\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m})$ y

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < \frac{1}{q} \leq 1,$$

entonces, por el teorema de Zalduendo, $\{\gamma(y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_s$, y por ser γ arbitraria, resulta $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ w-s-sumable. Luego $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene cota superior $(1/p_1 + \cdots + 1/p_m)^{-1}$ y, por ser $q < (1/p_1 + \cdots + 1/p_m)^{-1}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no puede tener subsucesión con cota inferior q. Pero, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es w-nula, entonces si tuviera subsucesión con norma acotada inferiormente, por tener F la propiedad T_q, podríamos extraer una subsucesión con cota inferior q. Luego, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ debe tender a 0 en norma. Como esto puede hacerse con cualquier subsucesión de $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$, obtenemos que A es wsc en 0.

Supongamos ahora que $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende-w a $x^i \in E_i$. Veremos, por inducción en m, que $A(x_n^1,\dots,x_n^m)$ converge en norma a $A(x^1,\dots,x^m)$. Para $m=1$, esto es consecuencia de ser A wsc en 0 y lineal. Observemos que nuestra hipótesis $(1/p_1+\cdots+1/p_m<q)$ y la primera parte de la demostración implican que las formas k-lineales obtenidas fijando $m-k$ variables en A son wsc en 0. Ahora,

$$\begin{aligned} A(x_n^1,\dots,x_n^m)-A(x^1,\dots,x^m) = \; & A\ (x_n^1-x^1,\dots,x_n^m-x^m) \\ & + \sum_1 \Big(A(x^1,\dots,x^m)-A(\dots,x^i,\dots,x_n^j,\dots)\Big) \\ & + \sum_2 \Big(A(\dots,x^i,\dots,x_n^j,\dots)-A(x^1,\dots,x^m)\Big) \end{aligned}$$

donde, si m es impar, tenemos 2^{m-2} términos en $\sum_1$ y 2^{m-2} en $\sum_2$, mientras que si m es par, son $2^{m-2}-1$ términos en $\sum_1$ y $2^{m-2}+1$ términos en $\sum_2$. De cualquier modo

$$\begin{aligned} \|A(x_n^1,\dots,x_n^m)-A(x^1,\dots,x^m)\| \le \; & \|\ A(x_n^1-x^1,\dots,x_n^m-x^m)\| \\ & + \sum \|A(\dots,x^i,\dots,x_n^j,\dots)-A(x^1,\dots,x^m)\| \end{aligned}$$

que tiende a 0 por nuestra hipótesis inductiva y la continuidad secuencialmente débil de A en 0. ■

Como consecuencia de este lema y de la equivalencia entre (i) y (vi) del teorema 2.3.2 resulta:

Teorema 2.4.11 *Sean $E_1,\dots,E_m$ espacios de Banach con bases achicantes, tales que para algún $j\in\{1,\dots,m\}$,*

$$\frac{1}{\ell(E_1)}+\cdots+\frac{\widehat{1}}{\ell(E_j)}+\cdots+\frac{1}{\ell(E_m)}<\frac{1}{u(E_j')}, \tag{2.3}$$

entonces los monomios $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ forman una base de Schauder de $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$.

La condición (2.3) es suficiente, pero no necesaria para que $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ sea base de $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$ (ver ejemplo 2.5.6).

El teorema 2.4.11, junto con el corolario 2.3.5 implican:

Corolario 2.4.12 *Sean $E_1,\dots,E_m$ espacios de Banach reflexivos con bases de Schauder, tales que para algún $j\in\{1,\dots,m\}$,*

$$\frac{1}{\ell(E_1)}+\cdots+\frac{\widehat{1}}{\ell(E_j)}+\cdots+\frac{1}{\ell(E_m)}<\frac{1}{u(E_j')},$$

entonces $\mathcal{L}({}^mE_1\times\cdots\times E_m)$ es reflexivo.

Estos dos resultados se obtienen, como dijimos, relacionando el lema anterior con la equivalencia entre (i) y (vi) del teorema 2.3.2. Si en vez de éstas, utilizamos la equivalencia entre (i) y (v) del teorema, junto con el lema, la condición que obtenemos para asegurar que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial es:

$$\frac{1}{\ell(E_1)} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_m)} < \frac{1}{u(\mathbf{C})} = 1. \tag{2.4}$$

Pero la condición (2.3) es más general que la (2.4). Veamos que (2.4) implica (2.3). Para eso, usaremos el siguiente resultado de R. Gonzalo y J. A. Jaramillo [GJ, Th. 1.2]

Proposición 2.4.13 *Si E es un espacio de Banach que no contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 y $1 \leq p \leq \infty$ tal que E tiene la propiedad S_p, entonces E' tiene la propiedad $T_{p'}$.*

Entonces, si $E \not\supset \ell_1$, como para todo $1 \leq p < \ell(E)$, E tiene S_p, resulta que para todo $(1 - 1/\ell(E))^{-1} < q \leq \infty$, E' tiene T_q. Luego

$$u(E') \leq \left(1 - \frac{1}{\ell(E)}\right)^{-1}$$

de donde

$$\frac{1}{\ell(E)} \geq 1 - \frac{1}{u(E')}.$$

Por lo tanto, si vale (2.4), y los espacios $E_1, \ldots, E_m$ tienen bases achicantes (en particular, no contienen a ℓ_1), se tiene

$$1 > \frac{1}{\ell(E_1)} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_j)} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_m)} \geq \frac{1}{\ell(E_1)} + \cdots + 1 - \frac{1}{u(E_j')} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_m)},$$

por consiguiente, vale (2.3).

Los índices inferior y superior también sirven para dar condiciones sobre espacios con bases achicantes e incondicionales, que aseguren que el espacio de formas multilineales sobre ellos definido contenga copia de ℓ_∞. Antes, enunciamos el siguiente resultado de Bessaga-Pelczynski ([LT, Prop. 2.e.8]):

Proposición 2.4.14 *Sea E un espacio de Banach tal que E' contiene un subespacio isomorfo a c_0. Entonces, E contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ_1. En consecuencia, E' contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞.*

Esta proposición es muy útil, ya que dice que para probar que un espacio, que es el dual de otro, contiene copia de ℓ_∞, basta ver que contiene copia de c_0, y esto suele ser más sencillo ya que las sucesiones finitas son densas en c_0. El siguiente teorema da una condición suficiente, aunque no necesaria, para que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ contenga a ℓ_∞ (ver ejemplos 2.5.4 y 2.5.5). Agradezco a Raquel Gonzalo una sugerencia para mejorar este enunciado.

Teorema 2.4.15 *Sean $E_1, \ldots, E_m$ espacios de Banach con bases achicantes, incondicionales, tales que*

$$\frac{1}{u(E_1)} + \cdots + \frac{1}{u(E_m)} > 1,$$

entonces $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞.

Demostración: Como $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ es el dual del producto tensorial proyectivo de los espacios $E_1, \ldots, E_m$, por la proposición anterior, basta ver que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ contiene a c_0. Sean $q_1, \ldots, q_m$ tales que cada E_i tiene la propiedad T_{q_i} y $1/q_1 + \cdots + 1/q_m > 1$.

Sea $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ base achicante e incondicional de E_i. Podemos suponer que $\|e_n^i\| = 1$, ya que, al normalizarla, la base sigue siendo achicante e incondicional. Veamos que $e_n^i \xrightarrow{w} 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Por ser $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ achicante, $\{(e_n^i)'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de E_i'. Entonces todo elemento de E_i' tiene la forma $\sum_{k=1}^\infty a_k(e_k^i)'$, y $\sum_{k=1}^\infty a_k(e_k^i)'(e_n^i) = a_n$. Se tiene

$$|a_n| \le \|a_n(e_n^i)'\| \le K \left\| \sum_{k=n}^m a_k(e_k^i)' \right\| \quad \forall n \le m$$

donde la primera desigualdad vale pues $\|(e_n^i)'\| \ge |(e_n^i)'(e_n^i)| = 1$, y la segunda es por la proposición 1.2.3, con K la constante básica incondicional para la base $\{(e_n^i)'\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E_i' (siendo $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ incondicional resulta $\{(e_n^i)'\}_{n\in\mathbb{N}}$ incondicional). Por valer la desigualdad anterior para todo $m \ge n$, se obtiene

$$|a_n| \le K \left\| \sum_{k=n}^\infty a_k(e_k^i)' \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

lo que implica $e_n^i \xrightarrow{w} 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Por lo tanto, cada $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión básica, seminormalizada w-nula, luego debe tener subsucesión $\{e_{n_j}^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ con cota inferior q_j (todas las subsucesiones con los mismos subíndices).

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $T_j \in \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ dado por

$$T_j(x^1, \ldots, x^m) = x_{n_j}^1 \ldots x_{n_j}^m \quad \text{si} \quad x^i = \sum_{n=1}^\infty x_n^i e_n^i \ \ \forall i = 1, \ldots, m$$

o sea $T_j = (e_{n_j}^1)' \ldots (e_{n_j}^m)'$. Para cada sucesión finita de escalares $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^l a_j T_j \right\| &= \sup_{\|x^i\|\le 1} \left| \sum_{j=1}^l a_j x_{n_j}^1 \ldots x_{n_j}^m \right| \\
&\le \sup_{1\le j\le l} |a_j| \sup_{\|x^i\|\le 1} \sum_{j=1}^l |x_{n_j}^1 \ldots x_{n_j}^m| \\
&\le \sup_{1\le j\le l} |a_j| \sup_{\|x^i\|\le 1} \left(\sum_{j=1}^l |x_{n_j}^1|^{q_1} \right)^{1/q_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^l |x_{n_j}^m|^{q_m} \right)^{1/q_m}
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{1\leq j\leq l} |a_j| K_1 \dots K_m \sup_{\|x^i\|\leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{l} x_{n_j}^1 e_{n_j}^1 \right\| \dots \left\| \sum_{j=1}^{l} x_{n_j}^m e_{n_j}^m \right\|$$
$$\leq C \sup_{1\leq j\leq l} |a_j|$$

donde las constantes $K_1, \dots K_m$ son las que aparecen en la definición de tener $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ cota inferior q_i; y la constante C es el producto de las constantes $K_1, \dots K_m$ por las constantes básicas incondicionales de las bases $\{e_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por otro lado, para cada k, $1 \leq k \leq l$, $\|e_{n_k}^i\| = 1$ y $\left(\sum_{j=1}^{l} a_j T_j\right)(e_{n_k}^1, \dots, e_{n_k}^m) = a_k$, entonces

$$|a_k| \leq \left\| \sum_{j=1}^{l} a_j T_j \right\| \quad \forall 1 \leq k \leq l.$$

De este modo,

$$\sup_{1\leq j\leq l} |a_j| \leq \left\| \sum_{j=1}^{l} a_j T_j \right\| \leq C \sup_{1\leq j\leq l} |a_j|$$

para toda sucesión finita $(a_j)_{j=1}^l \subset \mathbf{C}$. Por la densidad de las sucesiones finitas en c_0, resulta

$$\|a\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j T_j \right\| \leq C\|a\|_\infty \quad \forall a \in c_0$$

lo que implica que el subespacio cerrado de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \dots \times E_m)$ generado por $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sea isomorfo a c_0. Por lo tanto, $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \dots \times E_m)$ contiene copia de c_0, y siendo un dual, también contiene copia de ℓ_∞. ■

2.5 Ejemplos y Aplicaciones

En esta sección aplicaremos nuestros resultados en ejemplos de espacios de Banach concretos.

Ejemplo 2.5.1 Espacios ℓ_p, con $1 < p < \infty$. Recordemos que ℓ_p es reflexivo, tiene base incondicional y $\ell(\ell_p) = u(\ell_p) = p$. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) $1/p_1 + \dots + 1/p_m < 1$.

(b) $\mathcal{L}({}^m \ell_{p_1} \times \dots \times \ell_{p_m})$ es reflexivo.

(c) $\mathcal{L}({}^m \ell_{p_1} \times \dots \times \ell_{p_m})$ tiene base monomial.

(d) Todo operador de ℓ_{p_1} en $\mathcal{L}({}^{m-1} \ell_{p_2} \times \dots \times \ell_{p_m})$ es compacto.

En efecto, $(a) \Rightarrow (b)$ vale por el corolario 2.4.12; $(b) \Rightarrow (c)$ por el corolario 2.3.5; $(c) \Rightarrow (d)$ por el teorema 2.3.2; y $(d) \Rightarrow (a)$ vale pues si $1/p_1 + \dots + 1/p_m \geq 1$, el operador T dado por

$$T(x^1)(x^2, \dots, x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^1 \dots x_n^m$$

no es compacto.

Como consecuencia del corolario 2.3.4, $1/p_1 + \cdots + 1/p_m \geq 1$ si y sólo si $\mathcal{L}({}^m\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m})$ contiene copia de ℓ_∞.

Ejemplo 2.5.2 Espacios de Orlicz reflexivos. Si ℓ_M es un espacio de Orlicz reflexivo, tiene base incondicional y $\ell(\ell_M) = \alpha_M$; $u(\ell_M) = \beta_M$, los índices de Boyd inferior y superior. Además $(\ell_M)' = \ell_{M'}$, donde M' es la función complementaria de M, y vale $1/\alpha_M + 1/\beta_{M'} = 1$ (para detalles, ver [LT]). Resulta, entonces:

(i) Si $1/\alpha_{M_1} + \cdots + 1/\alpha_{M_m} < 1$, entonces $\mathcal{L}({}^m\ell_{M_1} \times \cdots \times \ell_{M_m})$ tiene base monomial y es reflexivo.

(ii) Si $1/\beta_{M_1} + \cdots + 1/\beta_{M_m} > 1$, entonces $\mathcal{L}({}^m\ell_{M_1} \times \cdots \times \ell_{M_m})$ contiene a ℓ_∞.

Ejemplo 2.5.3 c_0 y el espacio de Tsirelson. Recordemos que c_0, T y T' tienen bases achicantes, además T es reflexivo, con base incondicional. Sus índices son: $\ell(c_0) = u(c_0) = \infty$; $\ell(T) = u(T) = 1$; $\ell(T') = u(T') = \infty$ y $u(\ell_1) = 1$. Entonces

(i) $\mathcal{L}({}^m c_0)$ tiene base monomial para todo $m \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{L}({}^m T')$ tiene base monomial y es reflexivo para todo $m \in \mathbb{N}$.

(iii) $\mathcal{L}({}^m T)$ contiene copia de ℓ_∞ para todo $m \geq 2$.

Ejemplo 2.5.4 Espacios $L_p[0,1]$, con $1 < p < \infty$. $L_p[0,1]$ es reflexivo, tiene base incondicional y $\ell(L_p[0,1]) = \min\{2,p\}$; $u(L_p[0,1]) = \max\{2,p\}$. Dependiendo de m y los valores de $p_1, \ldots, p_m$, el espacio $\mathcal{L}({}^m L_{p_1}[0,1] \times \cdots \times L_{p_m}[0,1])$ puede o no verificar las hipótesis del teorema 2.4.15, pero nunca verifica las hipótesis del teorema 2.4.11. Sin embargo, puede verse que para todo $m \geq 2$, $\mathcal{L}({}^m L_{p_1}[0,1] \times \cdots \times L_{p_m}[0,1])$ contiene a ℓ_∞. El motivo es que ℓ_2 es isomorfo a un subespacio complementado de $L_p[0,1]$ y esto permite definir la siguiente inclusión de $\mathcal{L}({}^m\ell_2 \times \cdots \times \ell_2)$ en $\mathcal{L}({}^m L_{p_1}[0,1] \times \cdots \times L_{p_m}[0,1])$. Si $A \in \mathcal{L}({}^m\ell_2 \times \cdots \times \ell_2)$ sea $\tilde{A} \in \mathcal{L}({}^m L_{p_1}[0,1] \times \cdots \times L_{p_m}[0,1])$ dada por $\tilde{A}(x^1, \ldots, x^m) = A(\Pi_1(x^1), \ldots, \Pi_m(x^m))$, donde $\Pi_i : L_{p_i}[0,1] \to \ell_2$ es la proyección. En consecuencia,

$$\ell_\infty \hookrightarrow \mathcal{L}({}^m\ell_2 \times \cdots \times \ell_2) \hookrightarrow \mathcal{L}({}^m L_{p_1}[0,1] \times \cdots \times L_{p_m}[0,1])$$

para todo $m \geq 2$.

Ejemplo 2.5.5 Espacio de James. El espacio de James J tiene base achicante, pero como $\ell(J) = u(J') = 2$, no verifica las hipótesis del teorema 2.4.11. Al no tener base incondicional, tampoco verifica las hipótesis del teorema 2.4.15. Sin embargo, podemos razonar como en el caso $L_p[0,1]$. En [FG], se prueba que J contiene copia de ℓ_2. Además el corolario I.2.26 de [Go1] dice que si E' tiene la propiedad $S_{p'}$ y no contiene a ℓ_1; y $E \supset \ell_p$, entonces E contiene copia complementada de ℓ_p. Como $J \supset \ell_2$, J' tiene S_2 y $J' \not\supset \ell_1$ (pues J'' es separable), resulta que J contiene copia complementada de ℓ_2. Como en el ejemplo anterior,

$$\ell_\infty \hookrightarrow \mathcal{L}({}^m\ell_2) \hookrightarrow \mathcal{L}({}^m J)$$

para todo $m \geq 2$.

Ejemplo 2.5.6 En los dos ejemplos anteriores se vieron espacios que, pese a no verificar las hipótesis del teorema 2.4.15, el espacio de formas m-lineales sobre ellos definido contiene copia de ℓ_∞. Ahora veremos un ejemplo de un espacio de formas m-lineales con base monomial que no satisface las hipótesis del teorema 2.4.11. Para eso, necesitamos una definición y unos resultados de R. Ryan.

Un espacio de Banach E tiene la **propiedad de Dunford-Pettis (DP)** si para toda sucesión w-nula $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y para toda sucesión w-nula $\{x_n'\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ se tiene $x_n'(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por ser ℓ_1 Schur, es claro que c_0 tiene DP.

R. Ryan probó los siguientes resultados ([R2, Th.3.2 y Cor. 3.5]).

Teorema 2.5.7 *Sean E y F espacios de Banach con bases achicantes $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Si E tiene DP entonces la base $\{e_n \otimes f_m\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ del producto tensorial proyectivo $E\widehat{\otimes}F$ es achicante.*

Teorema 2.5.8 *Sean E y F espacios de Banach con bases achicantes $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Si E y F tienen DP entonces $E\widehat{\otimes}F$ tiene DP.*

Inductivamente se pueden extender estos resultados a m espacios y, usando que el espacio de formas m-lineales es el dual del producto tensorial proyectivo de los espacios (por lo que el hecho de que su base sea achicante hace que el espacio de formas m-lineales tenga base monomial), resulta:

Corolario 2.5.9 *Sean $E_1, \ldots, E_m$ espacios de Banach con bases achicantes. Si para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$, los espacios $E_1, \ldots, \widehat{E_j}, \ldots, E_m$ tienen DP, entonces $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ tiene base monomial.*

Entonces, resulta que $\mathcal{L}({}^m c_0 \times \cdots \times c_0 \times E)$ tiene base monomial si E tiene base achicante. En particular, para T el dual del espacio original de Tsirelson T', $\mathcal{L}({}^m c_0 \times \cdots \times c_0 \times T)$ tiene base monomial. Sin embargo, este espacio no satisface las hipótesis del teorema 2.4.11, ya que

$$\frac{1}{\ell(c_0)} + \cdots + \frac{1}{\ell(c_0)} \not< \frac{1}{u(T')}$$

$$\frac{1}{\ell(T)} + \frac{1}{\ell(c_0)} + \cdots + \frac{1}{\ell(c_0)} \not< \frac{1}{u(c_0')}.$$

Pitt ([Pi]) probó que todo operador de ℓ_p en ℓ_q es compacto si $q < p$. Pelczynski ([Pe]) lo generalizó, probando que todo polinomio m-homogéneo de ℓ_p a valores en ℓ_q es compacto si $mq \leq p$. Aplicando lo hecho a productos tensoriales proyectivos y relacionándolo con lo índices de Gonzalo y Jaramillo, obtenemos una generalización de estos resultados.

Si $E_1, \ldots, E_m$ son espacios de Banach reflexivos con bases, vimos (corolario 2.3.5) que $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ es reflexivo si y sólo si tiene base monomial. En este caso, sabemos, por teorema 2.3.2, que todo operador lineal de E_j en $\mathcal{L}({}^{m-1} E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)$ es compacto. Trasponiendo los operadores, obtenemos que todo operador lineal de $E_1\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\widehat{E_j}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}E_m$ en E_j' es compacto. Por lo tanto, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.5.10 *Sean $E_1, \dots, E_m$ espacios de Banach reflexivos con bases tales que para algún $j \in \{1, \dots, m\}$,*

$$\frac{1}{\ell(E_1)} + \cdots + \frac{\widehat{1}}{\ell(E_j)} + \cdots + \frac{1}{\ell(E_m)} < \frac{1}{u(E_j')},$$

entonces todo operador lineal de $E_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \widehat{E_j} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} E_m$ en E_j' es compacto.

En el caso de los espacios ℓ_p, también vale la vuelta. Obtenemos el siguiente resultado, que ya fue probado por T. Gamelin ([Ga]) y por R. Alencar y K. Floret ([AF]).

Teorema 2.5.11 *Todo $T \in \mathcal{L}(\ell_{p_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \ell_{p_m}; \ell_r)$ es compacto si y sólo si $1/p_1 + \cdots + 1/p_m < 1/r$.*

Capítulo 3

Bases y Descomposiciones de Schauder en Espacios de Polinomios Homogéneos

3.1 Bases monomiales en Espacios de Polinomios

Queremos aplicar los resultados del capítulo anterior a espacios de polinomios homogéneos. Si E es un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos definir, para $(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m$,

$$P_{i_1\ldots i_m}(x)=e'_{i_1}(x)\ldots e'_{i_m}(x)$$

o sea $P_{i_1\ldots i_m}(x)=B_{i_1\ldots i_m}(x,\ldots,x)$ y $P_{i_1\ldots i_m}$ es un polinomio m-homogéneo continuo sobre E. Notemos que si σ es una permutación de $\{1,\ldots,m\}$, $P_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(m)}}=P_{i_1\ldots i_m}$; lo cual no pasaba en general con formas m-lineales. Sea

$$D=\{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m : i_1\geq i_2\geq\ldots\geq i_m\}$$

con el orden inducido por el "square ordering" y notaremos $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ a la sucesión ordenada de ese modo.

Queremos estudiar bajo qué condiciones $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ es base de $\mathcal{P}(^mE)$. R. Ryan [R1] probó que $\{S(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_m})\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ es base de Schauder del producto tensorial proyectivo simétrico $\widehat{\otimes}_{m,s}E$ (donde S es el operador de simetrización, ver capítulo 1). Además, sabemos que $(\widehat{\otimes}_{m,s}E)'=\mathcal{P}(^mE)$ y $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ es la sucesión de funcionales coordenadas asociadas a $\{S(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_m})\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$, por lo que es sucesión básica.

Antes de seguir, necesitamos hacer algunos comentarios sobre polinomios w-continuos. Decimos que un polinomio m-homogéneo P pertenece a $\mathcal{P}_w(^mE)$ si P es w-continuo en subconjuntos acotados de E. En general, se tiene la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathcal{P}_a(^mE)\subset\mathcal{P}_w(^mE)\subset\mathcal{P}_{wsc}(^mE)\subset\mathcal{P}(^mE)$$

Sin embargo, bajo ciertas condiciones, estas inclusiones pueden ser igualdades. Estas condiciones son análogas a las pedidas en los casos de espacios de formas m-lineales. En [AHV, Prop. 2.12 y Cor. 2.11] se prueban los dos resultados siguientes:

Proposición 3.1.1 *Si el espacio de Banach E no contiene copia de ℓ_1 entonces $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE)$.*

Proposición 3.1.2 *Si E' tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{P}_w({}^mE) = \mathcal{P}_a({}^mE)$.*

Por lo tanto, como trabajaremos en espacios con base achicante, los tres espacios serán coincidentes: $\mathcal{P}_a({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE) = \mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$. Volviendo al problema que queríamos resolver, veamos qué subespacio genera la sucesión básica $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ en $\mathcal{P}({}^mE)$.

Proposición 3.1.3 *Sea E un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ achicante. Entonces $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ es base de $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$.*

Demostración: Por ser $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ sucesión básica, es base del subespacio cerrado que genera, que llamaremos F. Queremos ver que $F = \mathcal{P}_{wsc}({}^mE) = \mathcal{P}_a({}^mE)$. Como en la proposición 2.3.1, es claro que todo $P \in F$ es aproximable. Recíprocamente, para ver que todo polinomio aproximable pertenece a F, basta ver que $\varphi^m \in F$ para todo $\varphi \in E'$.

Sea $\varphi \in E'$. Como $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de E', φ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e'_i \quad \text{donde } a_i \in \mathbb{C}\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Entonces, si K es la constante básica de $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}\left\|\varphi^m - \left(\sum_{i=1}^{N} a_i e'_i\right)^m\right\| &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{N} a_i e'_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i e'_i\right)^m - \left(\sum_{i=1}^{N} a_i e'_i\right)^m\right\| \\ &\le \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e'_i\right\|^j \left\|\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i e'_i\right\|^{m-j} \\ &\le \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\|\varphi\|^j K^j \left\|\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i e'_i\right\|^{m-j} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Como $\left(\sum_{i=1}^{N} a_i e'_i\right)^m \in F\ \forall N \in \mathbb{N}$, resulta $\varphi^m \in F$. ∎

Corolario 3.1.4 *Si E es un espacio de Banach con base achicante $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ es base de $\mathcal{P}({}^mE)$ si y sólo si $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$.*

Como en el caso multilineal, llamaremos a $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ base monomial. Sabemos que $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ y $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ son sucesiones básicas de $\mathcal{L}({}^mE)$ y $\mathcal{P}({}^mE)$, respectivamente. Además, si $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ genera $\mathcal{L}({}^mE)$, la sucesión $\{P_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in D}$ genera $\mathcal{P}({}^mE)$. En efecto, si $\{B_{i_1\dots i_m}\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ genera $\mathcal{L}({}^mE)$, sea

$P \in \mathcal{P}({}^m E)$ y $A \in \mathcal{L}_s({}^m E)$ la forma m-lineal simétrica asociada. Dado $\epsilon > 0$ sea $F \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito tal que

$$\left\| A - \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in F} A(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) B_{i_1\ldots i_m} \right\| < \epsilon$$

entonces

$$\left\| P - \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in F} A(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) P_{i_1\ldots i_m} \right\| < \epsilon$$

y como $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in F} = \{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in \tilde{F}}$ para cierto $\tilde{F} \subset D$, resulta

$$\left\| P - \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in \tilde{F}} a_{i_1\ldots i_m} P_{i_1\ldots i_m} \right\| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ genera $\mathcal{P}({}^m E)$. Esto demuestra la siguiente proposición:

Proposición 3.1.5 *Si E es un espacio de Banach con base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\{B_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathbb{N}^m}$ es base de $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$, entonces $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ es base de $\mathcal{P}({}^m E)$.*

Esta proposición permite enunciar los análogos del teorema 2.4.11 y del corolario 2.4.12 para espacios de polinomios homogéneos.

Teorema 3.1.6 *Si E es un espacio de Banach con base achicante tal que*

$$(m-1)u(E') < \ell(E)$$

entonces $\{P_{i_1\ldots i_m}\}_{(i_1,\ldots,i_m)\in D}$ es base de $\mathcal{P}({}^m E)$.

Corolario 3.1.7 *Si E es un espacio reflexivo con base tal que*

$$(m-1)u(E') < \ell(E)$$

entonces $\mathcal{P}({}^m E)$ es reflexivo.

También el teorema 2.4.15 es válido para espacios de polinomios.

Teorema 3.1.8 *Si E es un espacio de Banach con base incondicional achicante, tal que*

$$u(E) < m$$

entonces $\mathcal{P}({}^m E)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞.

Demostración: Si en la demostración del teorema 2.4.15, consideramos $E_1 = \ldots = E_m = E$ y $q_1 = \ldots = q_m = q$, obtenemos $T_j = e'_{n_j} \ldots e'_{n_j} \in \mathcal{L}_s({}^m E)$. Entonces $c_0 \hookrightarrow \mathcal{L}_s({}^m E) \cong \mathcal{P}({}^m E)$ y, como $\mathcal{P}({}^m E)$ es un dual, $\ell_\infty \hookrightarrow \mathcal{P}({}^m E)$. ■

Ejemplos 3.1.9 Aplicando los teoremas anteriores y lo expuesto en la sección 2.5, obtenemos:

1. Si $p > m$, $\mathcal{P}(^m\ell_p)$ tiene base monomial y es reflexivo. Si $p \leq m$, $\mathcal{P}(^m\ell_p)$ contiene a ℓ_∞. Notemos que el caso $m = p$ no se deduce de lo anterior. Sin embargo, la demostración del teorema 3.1.8 puede hacerse también en este caso, poniendo $T_j = (e_j')^m$, siendo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base canónica de ℓ_p.

2. Si ℓ_M es un espacio de Orlicz reflexivo, $\alpha_M > m$ implica que $\mathcal{P}(^m\ell_M)$ tiene base monomial y es reflexivo; y $\beta_M < m$ implica que $\mathcal{P}(^m\ell_M)$ contiene copia de ℓ_∞.

3. Para todo $m \geq 1$, $\mathcal{P}(^mc_0)$ y $\mathcal{P}(^mT')$ tienen bases monomiales. Además $\mathcal{P}(^mT')$ es reflexivo. $\mathcal{P}(^mT)$ contiene a ℓ_∞, para todo $m \geq 2$.

4. Para todo $m \geq 2$, $\mathcal{P}(^mL_p[0,1])$ contiene a ℓ_∞, ya que al contener $L_p[0,1]$ copia complementada de ℓ_2, resulta $\mathcal{P}(^m\ell_2) \hookrightarrow \mathcal{P}(^mL_p[0,1])$ (componiendo con la proyección).

5. Para todo $m \geq 2$, $\mathcal{P}(^mJ)$ contiene a ℓ_∞ (mismo razonamiento que en 4).

Queremos ahora obtener un resultado análogo al del corolario 2.3.4 para espacios de polinomios homogéneos. Estudiaremos esto en un contexto un poco más general.

3.2 Descomposiciones de Schauder

Esta sección se refiere a la definición y propiedades básicas de las descomposiciones de Schauder. Más información sobre este tema puede encontrarse en [LT].

Si E es un espacio de Banach, una sucesión de subespacios cerrados $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama una **descomposición de Schauder** de E si todo $x \in E$ tiene única representación de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{donde } x_n \in E_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que una base de Schauder es una descomposición de Schauder en subespacios de dimensión 1. Recíprocamente, toda descomposición de Schauder en subespacios unidimensionales es una base de Schauder.

Cada descomposición $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ determina una familia de proyecciones $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E dadas por

$$\Pi_n(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \in E$, $x_i \in E_i$. Estas proyecciones son operadores lineales continuos de E en E y verifican que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Pi_n\| < \infty$. Al número $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Pi_n\|$ se lo denomina **constante de la descomposición**. Si la constante es 1, se dice que la descomposición es **monótona**.

La siguiente proposición da condiciones a una familia de proyecciones que aseguren la existencia de descomposición de Schauder en el espacio. Pese a ser un resultado clásico, veremos su demostración, pues será de utilidad para entender la relación entre descomposiciones de Schauder y familias de proyecciones asociadas.

Proposición 3.2.1 *Sean E un espacio de Banach y $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de proyecciones lineales continuas en E tales que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $\Pi_n\Pi_m = \Pi_{\min\{n,m\}}$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Pi_n\| < \infty$ y la unión de las imágenes de las proyecciones es un subespacio denso en E. Entonces existe una única descomposición de Schauder en E que tiene a $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como familia de proyecciones asociada.*

Demostración: Sea $E_1 = \Pi_1(E)$ y para cada $n > 1$, sea $E_n = (\Pi_n - \Pi_{n-1})(E)$. Dado $x \in E$, queremos ver que $x = \sum_{n=1}^{\infty}(\Pi_n - \Pi_{n-1})(x)$ (donde $\Pi_0(x)$ se considera idénticamente nula) y que esta escritura es única. Por ser $\cup_n \Pi_n(E)$ denso en E, tenemos que, dado $\epsilon > 0$, existe $y \in \Pi_{N_0}(E)$, para algún $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|x - y\| < \epsilon/2K$ (donde $K = \sup_n \|\Pi_n\|$). Entonces, para todo $N \geq N_0$, por ser $\Pi_N(y) = y$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{N}(\Pi_n - \Pi_{n-1})(x) - x\right\| &= \|\Pi_N(x) - x\| \\ &\leq \|\Pi_N(x) - \Pi_N(y)\| + \|\Pi_N(y) - y\| + \|y - x\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Además, como $\Pi_k - \Pi_{k-1}$ es la identidad sobre E_k y es idénticamente nula sobre E_j con $j \neq k$, resulta que si $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, con $y_n \in E_n$, entonces $(\Pi_k - \Pi_{k-1})(x) = y_k$. Luego, la escritura es única y, por construcción, se ve que no puede haber otra descomposición de Schauder que tenga a $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como familia de proyecciones asociada. ■

En analogía a las definiciones de bases achicantes, acotadamente completas e incondicionales, se tienen las siguientes definiciones.

Definición 3.2.2 *Una descomposición de Schauder $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice* **achicante** *si para todo $x' \in E'$, $\|\Pi_n' x' - x'\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (donde Π_n' es la traspuesta de la proyección Π_n).*

La descomposición de Schauder se dice **acotadamente completa** *si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E con $x_n \in E_n$ que verifique $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^{n} x_i\| < \infty$, resulta que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge.*

Si la descomposición de Schauder es achicante, la sucesión $\{\Pi_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ determina una descomposición acotadamente completa de E'.

Definición 3.2.3 *Una descomposición de Schauder $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice* **incondicional** *si para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E$, con $x_n \in E_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente.*

En el caso de descomposiciones de Schauder incondicionales, para cada elección de signos $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$, el operador M_ϵ dado por $M_\epsilon(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ es lineal y acotado. La constante $\sup_\epsilon \|M_\epsilon\|$ se denomina la **constante incondicional** de la descomposición.

Una descomposición de Schauder $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\dim(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se llama una **descomposición de Schauder de dimensión finita (FDD)**.

Un espacio de Banach con FDD tiene la propiedad de aproximación y es separable. Si E tiene FDD $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con constante K, cada E_n tiene base con constante básica K_n y

$\sup_{n\in\mathbb{N}} K_n < \infty$, entonces E tiene base de Schauder con constante $K.\sup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, pero un espacio con FDD no necesariamente tiene base de Schauder, ya que puede ocurrir que $\sup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \infty$.

Algunas propiedades de espacios con base se mantienen en espacios con FDD.

Si E tiene FDD $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces E es reflexivo si y sólo si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es achicante y acotadamente completa.

Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es FDD incondicional de E con constante K, entonces para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E$, donde $x_n \in E_n$ y para toda sucesión acotada de escalares $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{C}$ vale la siguiente desigualdad

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\right\| \leq 2K \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|. \tag{3.1}$$

3.3 Polinomios sobre espacios con FDD

Si E es un espacio con FDD, estudiaremos la existencia de FDD en $\mathcal{P}({}^m E)$. El sentido de pensar en FDD en vez de en bases en el caso de espacios de polinomios homogéneos es el siguiente. Los polinomios sirven para definir funciones holomorfas sobre espacios de Banach, por lo que su estudio muchas veces lleva a obtener resultados de esta teoría. Los espacios de funciones holomorfas son espacios localmente convexos y, con ciertas topologías naturales, tienen a los espacios de polinomios homogéneos como descomposición de Schauder. Entonces la existencia de FDD en $\mathcal{P}({}^m E)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, puede llevar a obtener FDD en el espacio de funciones holomorfas sobre E y otras consecuencias de este hecho.

Sea E un espacio de Banach con FDD achicante $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y familia de proyecciones asociada $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $N = (N_1, \ldots, N_k, 0, \ldots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ es una sucesión finita de números naturales, notaremos $|N| = N_1 + \cdots + N_k$ y $N! = N_1! \ldots N_k!$. La longitud de N será $\ell(N) = \sup\{i : N_i \neq 0\}$.

En las condiciones anteriores, $P \in \mathcal{P}({}^m E)$ se dirá un **monomio** si existe $N = (N_1, \ldots, N_k, 0, \ldots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ tal que para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in E$, con $x_i \in E_i$, vale

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i) = \lambda_1^{N_1} \ldots \lambda_k^{N_k} P(\sum_{i=1}^{\infty} x_i)$$

para toda sucesión de escalares $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{C}$ que verifique $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in E$. En este caso N se denominará el **grado** del monomio.

Si P es un monomio de grado N con $\ell(N) = k$, tomando $\lambda_i = 1$ para $i \leq k$ y $\lambda_i = 0$ para $i > k$, resulta

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} x_i) = P(\sum_{i=1}^{k} x_i)$$

para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in E$, o sea $P = P \circ \Pi_k$. Entonces P es un polinomio de tipo finito.

Además, tomando $\lambda_i = \lambda \ \forall i$ resulta

$$\lambda^m P(x) = \lambda^{N_1} \ldots \lambda^{N_k} P(x)$$

para todo $x \in E$. Luego, debe ser $|N| = m$.

Notaremos $\mathcal{P}_k({}^m E)$ al subespacio cerrado de $\mathcal{P}({}^m E)$ generado por

$$\{P \in \mathcal{P}({}^m E) : P \text{ es un monomio de grado } N \text{ con } \ell(N) = k\}.$$

Siendo cada E_j de dimensión finita, resulta $\mathcal{P}_k({}^m E)$ un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{P}({}^m E)$.

Notemos que si E tiene FDD achicante, entonces E no contiene copia de ℓ_1 (pues su dual tiene FDD y, por lo tanto, es separable) y E' tiene la propiedad de aproximación. Luego, los resultados de [AHV] comentados en la sección 3.1 siguen valiendo. O sea, $\mathcal{P}_a({}^m E) = \mathcal{P}_w({}^m E) = \mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$.

Proposición 3.3.1 *Sea E un espacio de Banach con FDD achicante, entonces $\{\mathcal{P}_k({}^m E)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$.*

Demostración: Sea $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}({}^m E)$, $P_k \in \mathcal{P}_k({}^m E)$, y sean $\{\Pi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ las proyecciones asociadas a la FDD de E. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} P_i\right\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\left|\sum_{i=1}^{n} P_i(x)\right| = \sup_{\|x\|\le 1}\left|\sum_{i=1}^{n} P_i(\Pi_n(x))\right| \\
&= \sup_{\|x\|\le 1}\left|\sum_{i=1}^{n+l} P_i(\Pi_n(x))\right| \le \sup_{\|x\|\le 1}\left\|\sum_{i=1}^{n+l} P_i\right\| \|\Pi_n(x)\| \\
&\le K\left\|\sum_{i=1}^{n+l} P_i\right\|
\end{aligned}$$

si K es la constante de la descomposición de E. Por la proposición 3.2.1, resulta $\{\mathcal{P}_k({}^m E)\}_{k\in\mathbb{N}}$ FDD del subespacio cerrado de $\mathcal{P}({}^m E)$ que genera, que llamaremos F.

Falta ver que $F = \mathcal{P}_{wsc}({}^m E) = \mathcal{P}_a({}^m E)$. Como cada monomio es un polinomio de tipo finito, resulta $F \subset \mathcal{P}_a({}^m E)$. Recíprocamente, veamos que $\varphi^m \in F$ para todo $\varphi \in E'$.

Sea $\varphi \in E'$ y $\psi_k = \varphi - \varphi \circ \Pi_k$. Por ser achicante la FDD, $\varphi \circ \Pi_k = \Pi_k'(\varphi) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$, luego $\psi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Además $(\varphi \circ \Pi_k)^m \in F$ ya que

$$(\varphi \circ \Pi_k)^m = \left(\sum_{j=1}^{k}[\varphi \circ (\Pi_j - \Pi_{j-1})]\right)^m$$

y desarrollando la potencia, cada uno de los sumandos que queda es un monomio.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\varphi^m - (\varphi \circ \Pi_k)^m\| &= \|[\psi_k + (\varphi \circ \Pi_k)]^m - (\varphi \circ \Pi_k)^m\| \\
&\le \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\|\varphi \circ \Pi_k\|^j \|\psi_k\|^{m-j} \\
&\le \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\|\varphi\|^j K^j \|\psi_k\|^{m-j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

de donde $(\varphi \circ \Pi_k)^m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi^m$ y $\varphi^m \in F$. ■

Corolario 3.3.2 *Sea E un espacio de Banach con FDD achicante. Entonces $\{\mathcal{P}_k({}^mE)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}({}^mE)$ si y sólo si $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$.*

Observación 3.3.3 Si E tiene FDD achicante con familia de proyecciones $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sabemos que E' tiene FDD asociada a las proyecciones $\{\Pi'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, la proposición 3.3.1 dice que $\{\mathcal{P}_k({}^1E)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}_{wsc}({}^1E) = \mathcal{P}({}^1E) = E'$. Veamos que ambas descomposiciones coinciden.

Si $P \in \mathcal{P}_k({}^1E)$ es un monomio de grado N, $\ell(N) = k$, como debe ser $|N| = 1$, resulta $N_i = 0\ \forall i \neq k$ y $N_k = 1$. Entonces

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i) = \lambda_k P(\sum_{i=1}^{\infty} x_i)$$

siempre que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \in E$, $x_i \in E_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in E$, $\lambda_i \in \mathbb{C}\ \forall i$.

Ya observamos que $P \circ \Pi_k = P$. Además, tomando $\lambda_i = 1$ para $i < k$ y $\lambda_i = 0$ para $i \geq k$, resulta

$$P(\sum_{i=1}^{k-1} x_i) = 0$$

entonces $P \circ \Pi_{k-1} = 0$. Luego, $P \circ (\Pi_k - \Pi_{k-1}) = P$.

Recíprocamente, si $P \circ (\Pi_k - \Pi_{k-1}) = P$, $P \in \mathcal{P}({}^1E) = E'$, entonces

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i) = P(\lambda_k x_k) = \lambda_k P(x_k) = \lambda_k P(\sum_{i=1}^{\infty} x_i)$$

siempre que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \in E$, $x_i \in E_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in E$. Entonces P es un monomio de grado N, $\ell(N) = k$.

Por lo tanto, tenemos que $P \in \mathcal{P}_k({}^1E)$ si y sólo si $P \circ (\Pi_k - \Pi_{k-1}) = P$, o lo que es lo mismo, $(\Pi'_k - \Pi'_{k-1})(P) = P$. O sea, $P \in \mathcal{P}_k({}^1E)$ si y sólo si $P \in (\Pi'_k - \Pi'_{k-1})(E')$. Y estos son los subespacios de la descomposición de E' (ver demostración de la proposición 3.2.1).

La existencia de FDD en $\mathcal{P}({}^mE)$ tiene relación con su reflexividad. R. Ryan [R1] probó las dos primeras equivalencias del siguiente teorema. La tercera se deduce de la proposición 3.1.1.

Teorema 3.3.4 *Sea E un espacio de Banach reflexivo con la propiedad de aproximación. Son equivalentes:*

(a) $\mathcal{P}({}^mE)$ es reflexivo.

(b) $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE)$.

(c) $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$.

Se tiene, entonces, el siguiente corolario, que generaliza un resultado de R. Alencar [Al], que afirmaba lo mismo, para el caso de bases en vez de FDD.

Corolario 3.3.5 *Si E es un espacio de Banach reflexivo con FDD, entonces $\mathcal{P}(^mE)$ es reflexivo si y sólo si $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}(^mE)$.*

Nuestro objetivo era obtener un resultado similar al corolario 2.3.4 (que decía que para espacios $E_1,\ldots,E_m$ con bases incondicionales achicantes, la no existencia de base monomial en $\mathcal{L}(^mE_1\times\cdots\times E_m)$ implicaba la contención de ℓ_∞) para espacios de polinomios homogéneos. Antes, necesitamos comentar algunos hechos que serán de utilidad. El teorema 2.4.9, en el caso $p_1=\ldots=p_m=\infty$ y tomando $P\in\mathcal{P}(^mc_0)$ (en vez de una forma m-lineal), dice que la sucesión $\{P(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_1$ y su norma es menor o igual que la norma de la forma m-lineal simétrica asociada a P. Aron y Globevnik [AG] mejoraron esta cota, probando que

$$\|\{P(e_n)\}_n\|_{\ell_1}\leq\|P\|. \tag{3.2}$$

R. Aron y M. Schottenloher [AS] demostraron la siguiente proposición:

Proposición 3.3.6 *Si E es un espacio de Banach y $m\leq n\in\mathbb{N}$, entonces $\mathcal{P}(^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^nE)$.*

El siguiente teorema de S. Dineen y M. Lindström [DL, Th.2], nos servirá para demostrar el resultado buscado.

Teorema 3.3.7 *Si E es un espacio de Banach tal que existe una sucesión de polinomios $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}(^mE)$ que verifica $P_i\underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow}0$ y $\sum_{i=1}^{\infty}|P_i(x)|<\infty$, para todo $x\in E$. Entonces $\mathcal{P}(^mE)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞.*

Observación 3.3.8 Si $P\in\mathcal{P}(^mE)$, $x,y\in E$ y $\check{P}$ es la forma m-lineal simétrica asociada a P, tenemos la siguiente descomposición binomial:

$$P(x+y)=\check{P}(x+y,\ldots,x+y)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\check{P}(x)^{m-j}(y)^j \tag{3.3}$$

donde $\check{P}(x)^{m-j}(y)^j$ significa

$$\check{P}(\overbrace{x,\ldots,x}^{m-j},\overbrace{y,\ldots,y}^{j}).$$

Supongamos que para todo $l\leq m$, todo $P\in\mathcal{P}(^lE)$ es wsc en 0. Veamos que $\mathcal{P}_{wsc}(^mE)=\mathcal{P}(^mE)$. Sea $P\in\mathcal{P}(^mE)$ y sea $x_n\xrightarrow{w}x$ en E. Entonces

$$\begin{aligned}P(x_n) &= P((x_n-x)+x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\check{P}(x)^j(x_n-x)^{m-j}\\ &= \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\check{P}(x)^j(x_n-x)^{m-j}+P(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}P(x)\end{aligned}$$

ya que, para cada $j=0,\ldots,m-1$, $\check{P}(x)^j$ es un polinomio $m-j$-homogéneo, entonces es wsc en 0, y $x_n-x\xrightarrow{w}0$.

Ahora sí podemos enunciar nuestro resultado.

Teorema 3.3.9 *Si $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una FDD achicante e incondicional de E y $m \in \mathbb{N}$, entonces se verifica una y sólo una de las dos posibilidades siguientes:*

(a) $\{\mathcal{P}_k({}^mE)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}({}^mE)$.

(b) $\mathcal{P}({}^mE)$ contiene copia de ℓ_∞.

Demostración: Si $m = 1$, por ser $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ FDD achicante, se tiene que $\{\mathcal{P}_k({}^1E)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}({}^1E)$. Sea, entonces, $m \geq 2$, tal que $\{\mathcal{P}_k({}^mE)\}_{k\in\mathbb{N}}$ no es FDD de $\mathcal{P}({}^mE)$ pero $\{\mathcal{P}_k({}^lE)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es FDD de $\mathcal{P}({}^lE)$ para todo $l < m$. Si probamos que $\mathcal{P}({}^mE)$ contiene copia de ℓ_∞, queda demostrado el teorema. Pues, si $m' > m$, $\mathcal{P}({}^{m'}E)$ contiene copia de $\mathcal{P}({}^mE)$ y, por lo tanto, de ℓ_∞.

Por corolario 3.3.2, $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE) \neq \mathcal{P}({}^mE)$, pero $\mathcal{P}_{wsc}({}^lE) = \mathcal{P}({}^lE)$, para todo $l < m$. Entonces, por la observación 3.3.8, existe un polinomio $P \in \mathcal{P}({}^mE)$ que no es wsc en 0. Luego, dado $\epsilon > 0$, tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$ y $|P(x_n)| > \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w-nula, es acotada. Sea $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$. Llamemos $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a las proyecciones asociadas a la descomposición de E y K a la constante de dicha descomposición.

El siguiente procedimiento será usado recursivamente. Fijemos $l \in \mathbb{N}$ y $0 < \epsilon' < \epsilon$. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \Pi_l(x_n)$ y $z_n = x_n - \Pi_l(x_n)$. Entonces $\|y_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ya que la proyección Π_l tiene rango finito y $x_n \xrightarrow{w} 0$. Además, $z_n \xrightarrow{w} 0$ y $\|z_n\| \leq (1+K)C\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_s\}$ base de $\mathrm{Im}(\Pi_l) = \sum_{i=1}^{l} E_i$. Llamemos $F_i = [e_i]$, para cada $i = 1, \ldots, s$ y F_{s+1} al subespacio cerrado que generan todos los E_i con $i > l$. Entonces, $\{F_i\}_{i=1}^{s+1}$ es una descomposición de Schauder (no FDD) de E. Por ser una descomposición en finitos subespacios, es incondicional y achicante. Veamos como actúa P en esta descomposición:

$$P\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i e_i + z\right) = P(z) + \sum_{\substack{N\in\mathbb{N}^s \\ 0<|N|<m}} a_N \lambda^N Q_N(z) + P\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i e_i\right)$$

donde $\lambda^N = \lambda_1^{N_1} \ldots \lambda_s^{N_s}$ y Q_N son polinomios $m - |N|$-homogéneos definidos sobre F_{s+1} (se pueden extender a E, componiendo con la proyección). Como $y_n = \sum_{i=1}^{s}\lambda_{i,n}e_i$ y $z_n \in F_{s+1}$, resulta

$$P(x_n) = P(z_n) + \sum_{\substack{N\in\mathbb{N}^s \\ 0<|N|<m}} a_N \lambda_n^N Q_N(z_n) + P(y_n).$$

Como, para todo N, $Q_N(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\lambda_{i,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$ y $P(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pero $|P(x_n)| > \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que existe n_1 tal que para todo $n \geq n_1$, $|P(z_n)| > \epsilon'$.

Veamos, ahora, cómo es nuestro proceso recursivo. De la sucesión original, tomamos el primer elemento x_1 que se escribe:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) \quad \text{con } x_1(i) \in E_i.$$

Entonces, como $|P(x_1)| > \epsilon$ y $P(\sum_{i=1}^{l} x_1(i)) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} P(x_1)$, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| P\left(\sum_{i=1}^{l_1} x_1(i) \right) \right| > \epsilon.$$

Llamemos $w_1 = \sum_{i=1}^{l_1} x_1(i)$ y se verifica $\|w_1\| \leq KC$. Para $l = l_1$ y $\epsilon' = \epsilon(1 - 1/4)$ efectuamos el procedimiento anterior, obteniendo una sucesión $\{z_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un número $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|P(z_n^1)| > \epsilon\left(1 - \frac{1}{4}\right) \ \forall n \geq n_1; \quad z_n^1 = \sum_{1=l_1+1}^{\infty} z_n^1(i) \ \text{ con } z_n^1(i) \in E_i \ \text{ y } \ \|z_n^1\| \leq (1+K)C \ \forall n.$$

Tomamos el elemento $z_{n_1}^1$ para el cual existe $l_2 > l_1$ tal que

$$\left| P\left(\sum_{i=l_1+1}^{l_2} z_{n_1}^1(i) \right) \right| > \epsilon\left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

Si notamos $w_2 = \sum_{i=l_1+1}^{l_2} z_{n_1}^1(i)$, $\|w_2\| \leq K(1+K)C$. Volvamos a efectuar el procedimiento anterior a la sucesión original $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $l = l_2$ y $\epsilon' = \epsilon(1 - 1/4 - 1/8)$, obteniendo una nueva sucesión $\{z_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un número $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|P(z_n^2)| > \epsilon\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \ \forall n \geq n_2; \quad z_n^2 = \sum_{1=l_2+1}^{\infty} z_n^2(i) \ \text{ con } z_n^2(i) \in E_i \ \text{ y } \ \|z_n^2\| \leq (1+K)C \ \forall n.$$

Para $z_{n_2}^2$ existe $l_3 > l_2$ tal que

$$\left| P\left(\sum_{i=l_2+1}^{l_3} z_{n_2}^2(i) \right) \right| > \epsilon\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right).$$

Llamamos $w_3 = \sum_{i=l_2+1}^{l_3} z_{n_2}^2(i)$, entonces $\|w_3\| \leq K(1+K)C$.

Repitiendo este procedimiento, obtenemos la sucesión $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que verifica, para todo $j \in \mathbb{N}$,

- $|P(w_j)| > \epsilon(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^j}) > \frac{\epsilon}{2}$.
- $w_j \in \sum_{i=l_{j-1}+1}^{l_j} E_i$, o sea $w_j = \sum_{i=l_{j-1}+1}^{l_j} u_i$, con $u_i \in E_i$.
- $\|w_j\| \leq K(1+K)C = M$.

Sea $P_j = P \circ (\Pi_{l_j} - \Pi_{l_{j-1}}) \in \mathcal{P}({}^m E)$. Se verifica:

$$\|P_j\| \leq \|P\| \, \|\Pi_{l_j} - \Pi_{l_{j-1}}\|^m \leq 2^m K^m \|P\|$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, $|P_j(w_j)| = |P(w_j)| > \epsilon/2$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{\epsilon}{2} < |P_j(w_j)| \leq \|P_j\| \, \|w_j\|^m \leq M^m \|P_j\|$$

por lo que $P_j \underset{j\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Para poder usar el teorema 3.3.7, faltaría ver que $\sum_{j=1}^{\infty} |P_j(x)| < \infty, \quad \forall x \in E$. Sea $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ con $x_i \in E_i \ \forall i$, y notemos

$$x^j = \sum_{i=l_{j-1}+1}^{l_j} x_i = (\Pi_{l_j} - \Pi_{l_{j-1}})(x).$$

Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, definimos $Q : c_0 \to \mathbb{C}$ por

$$Q\left(\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}\right) = P\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j\right).$$

Por ser Q la composición del polinomio $P \in \mathcal{P}(^m E)$ con una aplicación lineal de c_0 en E, resulta $Q \in \mathcal{P}(^m c_0)$. Por (3.2), $\{Q(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Q(e_n)| = \sum_{n=1}^{k} |Q(e_n)| \leq \|Q\|.$$

Como $Q(e_j) = P(x^j)$, resulta

$$\sum_{j=1}^{k} |P(x^j)| \leq \|Q\| = \sup_{\lambda\in B_{c_0}} |Q(\lambda)| = \sup_{\lambda\in B_{c_0}} \left| P\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j\right)\right|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} |P_j(x)| &= \sum_{j=1}^{k} |P(x^j)| \leq \sup_{\lambda\in B_{c_0}} \left| P\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j\right)\right| \\
&\leq \|P\| \sup_{\lambda\in B_{c_0}} \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \right\|^m \\
&= \|P\| \sup_{\lambda\in B_{c_0}} \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\sum_{i=l_{j-1}+1}^{l_j} x_i \right) \right\|^m \\
&\leq \|P\| 2^m K^m \|x\|^m
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale por (3.1). Como k era arbitrario, se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} |P_j(x)| < \infty$, para todo $x \in E$ y $P_j \underset{j\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Entonces por teorema 3.3.7, $\mathcal{P}(^m E)$ contiene copia de ℓ_∞. ■

Capítulo 4

Incondicionalidad de las Bases Monomiales

4.1 Introducción

Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base achicante e incondicional de E, $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base incondicional de E'. O sea, siendo incondicional (y achicante) la base de E, resulta incondicional la base monomial de $\mathcal{L}({}^1E) = \mathcal{P}({}^1E)$. ¿Sucederá lo mismo con las bases monomiales en $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ y $\mathcal{P}({}^mE)$, si $m \geq 2$? Aclaremos (y generalicemos) un poco esta pregunta.

La proposición 2.3.1 nos decía que, siendo $E_1, \ldots, E_m$ espacios de Banach con bases achicantes, la base monomial era base de $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$. Y la proposición 3.1.3 afirmaba lo mismo para el espacio de polinomios $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$, si E tenía base achicante. En ambos casos, aparecía como fundamental en la demostración el orden (square ordering) en que se consideraban las bases monomiales. Esto nos lleva a preguntarnos, ¿puede ser incondicional una base monomial de $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$ si los espacios $E_1, \ldots, E_m$ son de dimensión infinita?, ¿puede se incondicional una base monomial de $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE)$ si la dimensión de E es infinita? Pese a no tener una respuesta general, utilizando resultados de Kwapien y Pelczynski [KP] y Gordon y Lewis [GL], construiremos varios ejemplos para los cuales las respuestas a las preguntas anteriores son negativas.

Por lo tanto, lo que en el caso $m = 1$ era siempre cierto, en el caso $m \geq 2$ parece ser siempre falso. Por lo menos, no tenemos ningún ejemplo en que las bases monomiales sean incondicionales, si $m \geq 2$ y los espacios son de dimensión infinita.

Necesitamos ver, antes, algunos resultados previos.

Lema 4.1.1 *Si $E_1, \ldots, E_m$ son espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$, sea, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $T_A^j : E_j \to \mathcal{L}({}^{m-1}E_1 \times \cdots \times \widehat{E_j} \times \cdots \times E_m)$ el j-ésimo operador lineal asociado a A, o sea*

$$T_A^j(x^j)(x^1, \ldots, \widehat{x^j}, \ldots, x^m) = A(x^1, \ldots, x^m).$$

Entonces A es de tipo finito si y sólo si para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, T_A^j tiene rango finito.

Demostración: Si A es de tipo finito, existen $\{(\varphi_{1,i},\dots,\varphi_{m,i})\}_{i=1}^{k} \subset E_1' \times \cdots \times E_m'$ tales que

$$A = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{1,i} \cdots \varphi_{m,i}.$$

Si $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$T_A^j(x^j) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{j,i}(x^j)\varphi_{1,i} \cdots \widehat{\varphi_{j,i}} \cdots \varphi_{m,i}$$

por lo que su imagen está contenida en el subespacio generado por $\{\varphi_{1,i} \cdots \widehat{\varphi_{j,i}} \cdots \varphi_{m,i}\}_{i=1}^{k}$, que es de dimensión finita.

Recíprocamente, si para cada $j \in \{1,\dots,m\}$, T_A^j tiene rango finito, entonces $E_j/\ker T_A^j$ es un subespacio de dimensión finita. Sea $\Pi_j : E_j \to E_j/\ker T_A^j$ la proyección al cociente y definamos $\tilde{A} : E_1/\ker T_A^1 \times \cdots \times E_m/\ker T_A^m \to \mathbf{C}$ por

$$\tilde{A}(\Pi_1(x^1),\dots,\Pi_m(x^m)) = A(x^1,\dots,x^m).$$

$\tilde{A}$ está bien definida, ya que si, para cada $j \in \{1,\dots,m\}$, $\Pi_j(x^j) = \Pi_j(y^j)$, entonces $T_A^j(x^j) = T_A^j(y^j)$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(x^1,\dots,x^m) &= T_A^1(x^1)(x^2,\dots,x^m) = T_A^1(y^1)(x^2,\dots,x^m) \\ &= T_A^2(x^2)(y^1,x^3,\dots,x^m) = T_A^2(y^2)(y^1,x^3,\dots,x^m) \\ &= \dots = T_A^m(y^m)(y^1,\dots,y^{m-1}) = A(y^1,\dots,y^m). \end{aligned}$$

Además, es claro que $\tilde{A}$ es m-lineal y, por estar definida en espacios de dimensión finita, es de tipo finito. Entonces, existen $\{(\psi_{1,i},\dots,\psi_{m,i})\}_{i=1}^{k} \subset (E_1/\ker T_A^1)' \times \cdots \times (E_m/\ker T_A^m)'$ tales que

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{k} \psi_{1,i} \cdots \psi_{m,i}$$

y luego

$$A = \sum_{i=1}^{k} (\psi_{1,i} \circ \Pi_1) \cdots (\psi_{m,i} \circ \Pi_m)$$

por lo que A es de tipo finito. ■

Observación 4.1.2 Si $A \in \mathcal{L}(^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ y $\dim(E_i) < \infty$, para $i = 1,\dots,m-1$, resulta A de tipo finito, aunque $\dim(E_m) = \infty$. En efecto, si $\{(e_k^i)'\}_{k=1}^{N_i}$ es base de E_i' $(i = 1,\dots,m-1)$, entonces, para cada $x^m \in E_m$, $T_A^m(x^m) \in \mathcal{L}(^{m-1}E_1 \times \cdots \times E_{m-1})$. Por lo tanto,

$$T_A^m(x^m) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{N_m} a_{k_1\dots k_m}(x^m)\,(e_{k_1}^1)' \dots (e_{k_{m-1}}^{m-1})'$$

y por ser T_A^m lineal, debe serlo $a_{k_1\dots k_m}$, para todo $k_i = 1,\dots,N_i$. O sea, $a_{k_1\dots k_m} \in E_m'$.

Entonces, el enunciado del lema anterior podría cambiarse a: "A es de tipo finito si y sólo si T_A^j tiene rango finito para todo $j = 1,\dots,m-1$." Usaremos este hecho en particular para formas bilineales. Entonces, será $B \in \mathcal{L}(^2E \times F)$ de tipo finito si y sólo si $T_B^1 \in \mathcal{L}(E;F')$ tiene rango finito.

En el capítulo 1 definimos el producto tensorial proyectivo de $E_1, \ldots, E_m$, o sea la completación del producto tensorial $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ con la norma proyectiva. Definiremos ahora la norma inyectiva del producto tensorial. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$,

$$\|x\|_\epsilon = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i^1) \ldots \varphi_m(x_i^m) \right| : \varphi_j \in E_j', \ \|\varphi_j\| \leq 1, \ \forall j = 1, \ldots, m \right\}.$$

El producto tensorial inyectivo de $E_1, \ldots, E_m$ será la completación de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ con la norma inyectiva y se notará $E_1 \check{\otimes} \cdots \check{\otimes} E_m$.

En [Sc, pág. 50] se prueba que si E y F son espacios de Banach, $E' \check{\otimes} F'$ es isométricamente isomorfo al espacio de operadores lineales continuos de E en F' que pueden aproximarse (en la norma de $\mathcal{L}(E; F')$) por operadores de rango finito. La observación 4.1.2 y el hecho de ser una isometría la identificación entre $\mathcal{L}({}^2E \times F)$ y $\mathcal{L}(E; F')$ implican que $E' \check{\otimes} F'$ sea isométricamente isomorfo a $\mathcal{L}_a({}^2E \times F)$. Como consecuencia de la proposición 2.2.4 resulta:

Corolario 4.1.3 *Si E y F son espacios de Banach que no contienen copia de ℓ_1 y sus duales tienen la propiedad de aproximación (en particular, si E y F tienen bases achicantes) entonces $E' \check{\otimes} F'$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{L}_{wsc}({}^2E \times F)$.*

Este corolario servirá para formular los resultados que Kwapien y Pelczynski [KP] y Gordon y Lewis [GL] probaron para productos tensoriales inyectivos, en términos de formas bilineales wsc. Además, queremos generalizarlos a espacios de formas m-lineales wsc y de polinomios m-homogéneos wsc, lo que será posible en virtud de las dos proposiciones siguientes.

Proposición 4.1.4 *Sean $E_1, \ldots, E_m$ espacios de Banach y $n \leq m$. Entonces*

(a) $\mathcal{L}_{wsc}({}^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$.

(b) $\mathcal{P}_{wsc}({}^nE_1)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE_1)$.

Demostración: Haremos en detalle la demostración de *(a)* ya que la de *(b)* se deduce de la proposición 3.3.6, completándola con algunas cuentas similares a las que haremos al demostrar *(a)*.

Probaremos, primero, que $\mathcal{L}({}^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}({}^mE_1 \times \cdots \times E_m)$. Basta ver el caso $m = n + 1$. Sean $\gamma \in E_{n+1}'$, $e \in E_{n+1}$ tales que $\gamma(e) = 1 = \|\gamma\| = \|e\|$. Sea $\Theta : \mathcal{L}({}^nE_1 \times \cdots \times E_n) \to \mathcal{L}({}^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ dada por

$$\Theta(A)(x^1, \ldots, x^{n+1}) = A(x^1, \ldots, x^n)\gamma(x^{n+1}).$$

Entonces Θ es lineal y

$$\|\Theta(A)\| = \sup_{\|x^i\| \leq 1} |A(x^1, \ldots, x^n)| \, |\gamma(x^{n+1})| = \|A\| \, \|\gamma\| = \|A\|$$

por lo que Θ es una isometría. Definamos $\Pi : \mathcal{L}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1}) \to \mathcal{L}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ por

$$\Pi(D)(x^1, \ldots, x^{n+1}) = D(x^1, \ldots, x^n, \gamma(x^{n+1})e).$$

Entonces Π es una proyección lineal, ya que

$$\begin{aligned} \Pi(\Pi(D))(x^1, \ldots, x^{n+1}) &= \Pi(D)(x^1, \ldots, x^n, \gamma(x^{n+1})e) = D(x^1, \ldots, x^n, \gamma(\gamma(x^{n+1})e)e) \\ &= D(x^1, \ldots, x^n, \gamma(x^{n+1})e) = \Pi(D)(x^1, \ldots, x^{n+1}) \end{aligned}$$

y además

$$\|\Pi(D)\| = \sup_{\|x^i\| \le 1} |D(x^1, \ldots, x^n, \gamma(x^{n+1})e)| \le \sup_{\|x^i\| \le 1} \|D\| \|x^1\| \ldots \|x^{n+1}\| = \|D\|$$

por lo que Π es continua.

Para ver que $\mathcal{L}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ veremos que $\mathrm{Im}(\Theta) = \mathrm{Im}(\Pi)$.

Sea $A\gamma \in \mathrm{Im}(\Theta)$, con $A \in \mathcal{L}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \Pi(A\gamma)(x^1, \ldots, x^{n+1}) &= A(x^1, \ldots, x^n)\gamma(\gamma(x^{n+1})e) \\ &= A(x^1, \ldots, x^n)\gamma(x^{n+1}) = A\gamma(x^1, \ldots, x^{n+1}) \end{aligned}$$

de donde $A\gamma \in \mathrm{Im}(\Pi)$ y luego $\mathrm{Im}(\Theta) \subset \mathrm{Im}(\Pi)$.

Sea $\Pi(D) \in \mathrm{Im}(\Pi)$, con $D \in \mathcal{L}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$, entonces $\Pi(D)(x^1, \ldots, x^{n+1}) = D(x^1, \ldots, x^n, e)\gamma(x^{n+1})$. Si definimos $D_e(x^1, \ldots, x^n) = D(x^1, \ldots, x^n, e)$, resulta $D_e \in \mathcal{L}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ y $\Pi(D) = \Theta(D_e)$. Por lo tanto, $\Pi(D) \in \mathrm{Im}(\Theta)$ y $\mathrm{Im}(\Pi) \subset \mathrm{Im}(\Theta)$.

Ahora, para ver que $\mathcal{L}_{wsc}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$, basta ver que $\Theta(\mathcal{L}_{wsc}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)) \subset \mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$, que $\Pi(\mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})) \subset \mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ y que si $\Theta(A) \in \mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ entonces $A \in \mathcal{L}_{wsc}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$.

Sea $A \in \mathcal{L}_{wsc}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ y $x_k^i \xrightarrow{w} x^i$ en E_i, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, entonces

$$\Theta(A)(x_k^1, \ldots, x_k^{n+1}) = A(x_k^1, \ldots, x_k^n)\gamma(x_k^{n+1}) \longrightarrow A(x^1, \ldots, x^n)\gamma(x^{n+1}) = \Theta(A)(x^1, \ldots, x^{n+1}).$$

Sea $D \in \mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ y $x_k^i \xrightarrow{w} x^i$ en E_i, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, entonces

$$\begin{aligned} \Pi(D)(x_k^1, \ldots, x_k^{n+1}) = D(x_k^1, \ldots, x_k^n, e)\gamma(x_k^{n+1}) &\longrightarrow D(x^1, \ldots, x^n, e)\gamma(x^{n+1}) \\ &= \Pi(D)(x^1, \ldots, x^{n+1}). \end{aligned}$$

Si $\Theta(A) \in \mathcal{L}_{wsc}(^{n+1}E_1 \times \cdots \times E_{n+1})$ y $x_k^i \xrightarrow{w} x^i$ en E_i, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$A(x_k^1, \ldots, x_k^n) = \Theta(A)(x_k^1, \ldots, x_k^n, e) \longrightarrow \Theta(A)(x^1, \ldots, x^n, e) = A(x^1, \ldots, x^n)$$

por lo que $A \in \mathcal{L}_{wsc}(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$. ■

Bonet y Peris [BP] probaron que $E\widehat{\otimes}E$ es isomorfo a un subespacio complementado de $E^2\widehat{\otimes}_s E^2$. Esto fue generalizado al producto tensorial m-ésimo de E por Alencar y Floret [AF] y su resultado dual, $\mathcal{L}(^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE^m)$, fue dado por Defant y Maestre [DeM]. Haremos una demostración de este hecho para espacios de formas m-lineales wsc y de polinomios wsc.

Proposición 4.1.5 *Si E es un espacio de Banach, $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE^m)$.*

Demostración: Veamos, primero, que $\mathcal{L}({}^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}({}^mE^m)$. Definamos $J : \mathcal{L}({}^mE) \to \mathcal{P}({}^mE^m)$ por

$$J(A)(x^1,\dots,x^m) = A(x^1,\dots,x^m) \quad \forall (x^1,\dots,x^m) \in E^m,\ A \in \mathcal{L}({}^mE).$$

$J(A)$ es el polinomio asociado a la siguiente forma m-lineal simétrica en E^m:

$$B\left((x_1^1,\dots,x_1^m),(x_2^1,\dots,x_2^m),\dots,(x_m^1,\dots,x_m^m)\right) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x^1_{\sigma(1)},\dots,x^m_{\sigma(m)})$$

donde S_m son las permutaciones de $\{1,\dots,m\}$. Además J es continua, pues, considerando en E^m la norma

$$\|(x^1,\dots,x^m)\| = \max\{\|x^i\| : i = 1,\dots,m\}$$

resulta

$$\begin{aligned}\|J(A)\| &= \sup\{|J(A)(x^1,\dots,x^m)| : \|(x^1,\dots,x^m)\| \le 1\}\\ &= \sup\{|A(x^1,\dots,x^m)| : \|x^i\| \le 1\} = \|A\|.\end{aligned}$$

Definamos $\Pi : \mathcal{P}({}^mE^m) \to \mathcal{L}({}^mE)$ por

$$\Pi(P)(x^1,\dots,x^m) = \check{P}\left((x^1,0,\dots,0),(0,x^2,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,x^m)\right)$$

si $(x^1,\dots,x^m) \in E^m$, $P \in \mathcal{P}({}^mE^m)$ y $\check{P}$ es la forma m-lineal simétrica asociada a P. Entonces $\Pi(P) \in \mathcal{L}({}^mE)$ y Π es continua:

$$\begin{aligned}\|\Pi(P)\| &= \sup\{|\Pi(P)(x^1,\dots,x^m)| : \|x^i\| \le 1\}\\ &= \sup\left\{\left|\check{P}\left((x^1,0,\dots,0),(0,x^2,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,x^m)\right)\right| : \|x^i\| \le 1\right\}\\ &\le \|\check{P}\| \le \frac{m^m}{m!}\|P\|.\end{aligned}$$

Además,

$$\Pi(J(A))(x^1,\dots,x^m) = (J(A)\check{)}\left((x^1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,x^m)\right) = \frac{1}{m!}A(x^1,\dots,x^m).$$

Luego, tenemos,

$$\mathcal{L}({}^mE) \xrightarrow{m!J} \mathcal{P}({}^mE^m) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{L}({}^mE)$$

con Π y $m!J$ lineales continuas y $\Pi \circ m!J = \mathrm{Id}$. Entonces $\mathcal{L}({}^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}({}^mE^m)$.

Para ver que $\mathcal{L}_{wsc}({}^mE)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{wsc}({}^mE^m)$, basta ver que $J(\mathcal{L}_{wsc}({}^mE)) \subset \mathcal{P}_{wsc}({}^mE^m)$ y que $\Pi(\mathcal{P}_{wsc}({}^mE^m)) \subset \mathcal{L}_{wsc}({}^mE)$.

Sea $A \in \mathcal{L}_{wsc}({}^m E)$ y sean $(x_n^1, \dots, x_n^m) \xrightarrow{w} (x^1, \dots, x^m)$ en E^m. Entonces, para cada $i = 1, \dots, m$, $x_n^i \xrightarrow{w} x^i$ en E y

$$J(A)(x_n^1, \dots, x_n^m) = A(x_n^1, \dots, x_n^m) \longrightarrow A(x^1, \dots, x^m) = J(A)(x^1, \dots, x^m).$$

Luego $J(A)$ es wsc.

Sea $P \in \mathcal{P}_{wsc}({}^m E^m)$ y sean, para cada $i = 1, \dots, m$, $x_n^i \xrightarrow{w} x^i$ en E, entonces $(x_n^1, 0, \dots, 0) \xrightarrow{w} (x^1, 0, \dots, 0)$ en E^m, ... , $(0, \dots, 0, x_n^m) \xrightarrow{w} (0, \dots, 0, x^m)$ en E^m y $\check{P} \in \mathcal{L}_{wsc}({}^m E^m)$. Por lo tanto, $\Pi(P)(x_n^1, \dots, x_n^m) = \check{P}((x_n^1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, x_n^m))$ converge a $\check{P}((x^1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, x^m)) = \Pi(P)(x^1, \dots, x^m)$, de donde $\Pi(P)$ es wsc. ■

Definición 4.1.6 *Un espacio de Banach E se dice* **estable** *si E es isomorfo a E^2.*

Los espacios de sucesiones ℓ_p ($p \geq 1$) y c_0 son estables. Para espacios estables la proposición anterior dice:

Corolario 4.1.7 *Si E es un espacio de Banach estable, entonces $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$.*

Observación 4.1.8 Como vimos en el ejemplo 2.5.4, si E_i es un subespacio complementado de G_i, para cada $i = 1, \dots, m$ y $\Pi_i : G_i \to E_i$ son las correspondientes proyecciones, se tiene una inclusión $J : \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) \hookrightarrow \mathcal{L}({}^m G_1 \times \cdots \times G_m)$ dada por

$$J(A)(y_1, \dots, y_m) = A(\Pi_1(y_1), \dots, \Pi_m(y_m)).$$

Entonces,

$$\|A\| \leq \|J(A)\| \leq \|A\| \, \|\Pi_1\| \dots \|\Pi_m\|.$$

Por otro lado, se define $\rho : \mathcal{L}({}^m G_1 \times \cdots \times G_m) \to \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ la restricción. Entonces, ρ es lineal y continua, $\|\rho(A)\| \leq \|A\|$ y vale $\rho(J(A)) = A$.

Luego, tenemos,

$$\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m) \xrightarrow{J} \mathcal{L}({}^m G_1 \times \cdots \times G_m) \xrightarrow{\rho} \mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$$

con ρ y J lineales continuas y $\rho \circ J = \mathrm{Id}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}({}^m G_1 \times \cdots \times G_m)$.

Además, es claro que si A es wsc, $J(A)$ también, y lo mismo ocurre con ρ. Por lo tanto, $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{L}_{wsc}({}^m G_1 \times \cdots \times G_m)$.

Análogamente, si $E \subset G$ es un subespacio complementado, $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{wsc}({}^m G)$.

4.2 Algunos Ejemplos

Veremos, ahora, ejemplos de espacios de Banach con bases achicantes e incondicionales tales que, no sólo las bases monomiales no son incondicionales, sino que ninguna base del espacio de formas m-lineales wsc o de polinomios m-homogéneos wsc puede ser incondicional. En todo el capítulo, cuando $p = \infty$, ℓ_p se entenderá c_0 y m será un número natural mayor o igual que 2.

Kwapien y Pelczynski [KP] probaron:

Proposición 4.2.1 *Si* $1 \leq p, q < \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, *entonces* $\ell_p \check{\otimes} \ell_q$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

De esta proposición, junto con el corolario 4.1.3 resulta:

Corolario 4.2.2 *Si* $1 < p, q \leq \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, *entonces* $\mathcal{L}_{wsc}({}^2\ell_p \times \ell_q)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

Este corolario y la proposición 4.1.4, parte *(a)*, implican:

Corolario 4.2.3 *Si* $1 < p_1, \ldots, p_m \leq \infty$ *y* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$, *entonces* $\mathcal{L}_{wsc}({}^m\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m})$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

Del corolario 4.2.2, el corolario 4.1.7 y la proposición 4.1.4, parte *(b)*, se obtiene:

Corolario 4.2.4 *Si* $p \geq 2$, $\mathcal{P}_{wsc}({}^m\ell_p)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

Si $1 < p < \infty$, $L_p[0,1]$ contiene copia complementada de ℓ_2. La observación 4.1.8 y los corolarios anteriores implican:

Corolario 4.2.5 *(a) Si* $1 < p_1, \ldots, p_m < \infty$, $\mathcal{L}_{wsc}({}^m L_{p_1}[0,1] \times \cdots \times L_{p_m}[0,1])$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

(b) Si $1 < p < \infty$, $\mathcal{P}_{wsc}({}^m L_p[0,1])$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

En todos los casos, estamos considerando espacios de Banach con bases achicantes e incondicionales. Por el teorema 1.2.2, si E tiene base achicante e incondicional, entonces, o bien E contiene un subespacio isomorfo a c_0, o bien E es reflexivo.

En el caso E reflexivo, no tenemos una respuesta general a la pregunta sobre si las bases monomiales pueden ser incondicionales, aunque a lo largo de este capítulo se ven sucesivos ejemplos en que la respuesta es negativa.

Pero en el caso en que E contiene a c_0 sí tenemos un resultado general. En efecto, si E es separable y $E \supset c_0$, entonces E contiene copia complementada de c_0 ([LT, Th.2.f.5]). Además $\mathcal{L}_{wsc}({}^2c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ si E_1 y E_2 contienen copia complementada de c_0 y $\mathcal{P}_{wsc}({}^2c_0) \hookrightarrow \mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$ si c_0 está complementado en E (observación 4.1.8 y proposición 4.1.4). Luego, tenemos:

Corolario 4.2.6 *(a) Si* $E_1, \ldots, E_m$ *son espacios de Banach con bases achicantes e incondicionales y* E_1 *y* E_2 *no son reflexivos, entonces* $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

(b) Si E *tiene base achicante e incondicional y no es reflexivo, entonces* $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio con base incondicional.*

Demostración: *(a)* Por la proposición 4.1.4 y la observación 4.1.8,

$$\mathcal{L}_{wsc}({}^2c_0 \times c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}_{wsc}({}^m c_0 \times c_0 \times E_3 \times \cdots \times E_m) \hookrightarrow \mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$$

y del corolario 4.2.2 se deduce el resultado.

La demostración de *(b)* es análoga. ■

Veremos, ahora, un par de resultados de Gordon y Lewis [GL] y sus consecuencias. Antes, una definición.

Definición 4.2.7 *Un espacio de Banach se dice* **suficientemente euclídeo** *si existe una constante $C_E > 0$ y sucesiones de operadores $S_n \in \mathcal{L}(\ell_2^n; E)$ y $T_n \in \mathcal{L}(E; \ell_2^n)$ tales que $T_n S_n = \mathrm{Id}_{\ell_2^n}$ y $\|S_n\|\|T_n\| \leq C_E$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

En la definición anterior, ℓ_2^n simboliza al espacio n-dimensional con la norma $\|\cdot\|_2$. Observemos, que si E es suficientemente euclídeo, trasponiendo los operadores, resulta que E' también es suficientemente euclídeo. El teorema 3.4 de [GL] dice:

Teorema 4.2.8 *Si E y F son espacios de Banach suficientemente euclídeos, entonces $E\check{\otimes}F$, $E\hat{\otimes}F$, sus duales, biduales, etc., no pueden ser isomorfos a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

Como consecuencia de este teorema, Alencar, Aron y Fricke [AAF] obtuvieron, para el espacio original de Tsirelson, T', el siguiente resultado:

Proposición 4.2.9 *$\mathcal{L}({}^m T')$ no tiene base incondicional.*

El argumento que usaron en la demostración es que T' es suficientemente euclídeo. Podemos obtener algo más de este hecho. En efecto, siendo T' suficientemente euclídeo, $T'\check{\otimes}T' \cong \mathcal{L}_{wsc}({}^2T)$ no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional. Lo mismo ocurre con $(T'\hat{\otimes}T')' \cong \mathcal{L}({}^2T') = \mathcal{L}_{wsc}({}^2T')$. Más aún, por ser T' suficientemente euclídeo, resulta T suficientemente euclídeo, entonces $T\check{\otimes}T' \cong \mathcal{L}_{wsc}({}^2T' \times T)$ no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.

Por lo tanto, de la proposición 4.1.4 se obtiene:

Corolario 4.2.10 *Si $E_3, \ldots, E_m$ son espacios de Banach con bases achicantes incondicionales, entonces*

(a) $\mathcal{L}_{wsc}({}^m T \times T \times E_3 \times \cdots \times E_m)$ no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.

(b) $\mathcal{L}_{wsc}({}^m T' \times T' \times E_3 \times \cdots \times E_m)$ no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.

(c) $\mathcal{L}_{wsc}({}^m T' \times T \times E_3 \times \cdots \times E_m)$ no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.

Gordon y Lewis también probaron ([GL, Cor. 3.6]):

Proposición 4.2.11 *Si* $1 < p, q \leq \infty$, *ni* $\ell_p \hat{\otimes} \ell_q$, *ni* $\ell_{p'} \check{\otimes} \ell_{q'}$, *sus duales, biduales, etc., pueden ser isomorfos a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

Como consecuencia de esta proposición, junto con la proposición 4.1.4 y el corolario 4.1.7 resulta:

Corolario 4.2.12 *Si* $E_3, \ldots, E_m$ *son espacios de Banach con bases achicantes incondicionales y* $1 < p, q \leq \infty$, *entonces:*

(a) $\mathcal{L}_{wsc}({}^m\ell_p \times \ell_q \times E_3 \times \cdots \times E_m)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

(b) $\mathcal{P}_{wsc}({}^m\ell_p)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

La observación 4.1.8 nos permite obtener más ejemplos. Estos y los anteriores se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 4.2.13 *Sean* $E, E_1, \ldots, E_m$ *espacios de Banach con bases achicantes incondicionales.*

(a) Si $1 < p, q \leq \infty$, E_1 *contiene copia complementada de* ℓ_p *y* E_2 *contiene copia complementada de* ℓ_q, *entonces* $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

(b) Si $1 < p \leq \infty$ *y* E *contiene copia complementada de* ℓ_p, *entonces* $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

(c) Si E_1 *contiene copia complementada de* T *o de* T' *y* E_2 *contiene copia complementada de* T *o de* T', *entonces* $\mathcal{L}_{wsc}({}^m E_1 \times \cdots \times E_m)$ *no puede ser isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base incondicional.*

V. Dimant

I. Zalduendo

Bibliografía

[Al] R. Alencar, *On reflexivity and basis for* $\mathcal{P}(^m E)$, Proc. Roy. Ir. Acad. **85A, No. 2** (1985), 131-138.

[AAD] R. Alencar, R. Aron and S. Dineen, *A reflexive space of holomorphic functions in infinitely many variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **90 (3)** (1984), 407-411.

[AAF] R. Alencar, R. Aron and G. Fricke, *Tensor products of Tsirelson's space*, Illinois J. Math. **31, No. 1** (1987), 17-23.

[AF] R. Alencar and K. Floret, *Weak-strong continuity of multilinear mappings and the Pelczynski-Pitt theorem*, en "39 Seminario Brasileiro de Análise, 1993," pp. 247-265.

[ACG] R. Aron, B. Cole and T. W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic functions*, preprint.

[AD] R. Aron and S. Dineen, *Q-reflexive Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math (a aparecer).

[AG] R. Aron and J. Globevnik, *Analytic functions on* c_0, Revista Matemática de la Univ. Complutense de Madrid **2** (1989), 27-33.

[AHV] R. Aron, C. Hervés and M. Valdivia, *Weakly continuous mappings on Banach spaces*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 189-204.

[AS] R. Aron and M. Schottenloher, *Compact Holomorphic Mappings on Banach Spaces and the Approximation Property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7-30.

[BP] J. Bonet and A. Peris, *On the injective tensor product of quasinormable spaces*, Results in Math. **20** (1991), 431-443.

[DeM] A. Defant and M. Maestre, *Property (BB) and holomorphic functions on Fréchet-Montel spaces*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **115** (1993), 303-313.

[Di] J. Diestel, *"Sequences and series in Banach spaces"*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag **92**, 1984.

[DD] V. Dimant and S. Dineen, *Banach subspaces of spaces of holomorphic functions and related topics*, Math. Scand. (a aparecer).

[DZ] V. Dimant and I. Zalduendo, *Bases in Spaces of Multilinear Forms over Banach Spaces*, J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), 548-566.

[D1] S. Dineen, *"Complex analysis in locally convex spaces"*, North Holland Math. Studies **57**, 1981.

[D2] S. Dineen, *A Dvoretzky theorem for polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **123 (9)** (1995), 2817-2821.

[DL] S. Dineen and M. Lindström, *Spaces of homogeneous polynomials containing* c_0 *or* ℓ_∞, Proc. First Trier Workshop on Fréchet Spaces (1994), (a aparecer).

[DiM] J. Diestel and T. J. Morrison, *The Radon-Nikodym property for the space of operators, I*, Math. Nachr. **92** (1979), 7-12.

[F] J. Farmer, *Polynomial reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. **87** (1994), 257-273.

[FG] H. Fetter and B. Gamboa, *The James forest*, libro en preparación.

[FJ] J. Farmer and W. Johnson, *Polynomial Schur and polynomial Dunford-Pettis properties*, Contemporary Math. **144** (1993), 95-105.

[GGL] B. R. Gelbaum and J. Gil de Lamadrid, *Bases of tensor products of Banach spaces*, Pacific J. Math. **11** (1961), 1281-1286.

[Ga] T. W. Gamelin, *Analytic functions on Banach spaces*, in "Complex Function Theory" (Gauthier and Sabidussi, eds.), Kluwer Academic Publishers, a aparecer.

[GG] M. González and J. Gutiérrez, *Unconditionally converging polynomials on Banach spaces*, preprint.

[GJ] R. Gonzalo and J. A. Jaramillo, *Compact polynomials between Banach spaces*, Proc. Roy. Ir. Acad. **95A, No. 2** (1995), 213-226.

[Go1] R. Gonzalo, *Smoothness and Polynomials on Banach Spaces*, Doctoral Dissertation, Universidad Complutense de Madrid,1994.

[Go2] R. Gonzalo, *Multilinear forms, subsymmetric polynomials and spreading models on Banach spaces*, preprint.

[GL] Y. Gordon and D. R. Lewis, *Absolutely summing operators and local unconditional structures*, Acta Math. **33** (1974), 27-48.

[Gr] A. Grothendieck, *Sur certain classes de suites dans les espaces de Banach et le theorème de Dvoretzky Rogers*, Bol. Soc. Math. Sao Paulo **8** (1956), 81-110.

[H1] J. R. Holub, *Tensor product bases and tensor diagonals*, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 563-579.

[H2] J. R. Holub, *Hilbertian operators and reflexive tensor products*, Pacific J. Math. **36** (1) (1971), 185-194.

[H3] J. R. Holub, *Reflexivity of $\mathcal{L}(X,Y)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **39** (1973), 175-177.

[KP] S. Kwapien and A. Pelczynski, *The main triangle projection in matrix spaces and its applications*, Studia Math. **34** (1970), 43-68.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *"Classical Banach spaces I"*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.

[N] L. Nachbin, *"Topology on Spaces of Holomorphic Mappings"*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1969.

[Pe] A. Pelczynski, *A property of multilinear operations*, Studia Math. **16** (1957-58), 173-182.

[Pi] H. R. Pitt, *A note on bilinear forms*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 174-180.

[R1] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite-dimensional holomorphy*, Ph. D. Thesis, Trinity College, Dublin, 1980.

[R2] R. Ryan, *The Dunford-Pettis properties and projective tensor products*, Bull. Polish. Acad. Sci. **35, No. 11-12** (1987), 785-792.

[Sc] R. Schatten, *A Theory of Cross Spaces*, Ann. Math. Studies No. 26, Princeton Univ. Press, Princeton, 1950.

[Za] I. Zalduendo, *An estimate for multilinear forms on ℓ^p spaces*, Proc. Roy. Ir. Acad. **93A, No. 1** (1993), 137-142.

[Zi] M. Zippin, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. **6** (1968), 74-79.