

Tesis de Posgrado

Flúidos disipativos relativistas y cosmología

Thibeault, Marc

2003

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Thibeault, Marc. (2003). Flúidos disipativos relativistas y cosmología. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3639_Thibeault.pdf

Cita tipo Chicago:

Thibeault, Marc. "Flúidos disipativos relativistas y cosmología". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3639_Thibeault.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

*Fluidos Disipativos Relativistas y
Cosmología*

por Marc Thibeault

Director de Tesis: Esteban Calzetta
Lugar de Trabajo: Departamento de Física

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la Universidad de
Buenos Aires

Noviembre de 2003

3639



Esteban Calzetta

Marc Thibeault

MARC THIBEAULT

Resumen

Investigamos teorías tipo divergencia describiendo la interacción disipativa entre un campo y un fluido. Buscamos teorías que, bajo condiciones de equilibrio, se reducen a la teoría de un campo escalar de Klein-Gordon y un fluido perfecto. Mostramos que los requerimientos de causalidad y de producción positiva de la entropía imponen restricciones no triviales a la estructura del término de interacción. Estas teorías proveen una base para el estudio fenomenológico del periodo de recalentamiento. Presentamos un modelo macroscópico del decaimiento de un campo clásico escalar en fluctuaciones estadísticas a través del proceso de amplificación paramétrica. Resolvemos el modelo de teoría de campos (en adelante "microscópico") al primer orden en una expansión de N grande, y mostramos que el modelo macroscópico da resultados satisfactorios para la evolución del campo medio, de su momento conjugado y del tensor de energía momento durante varias oscilaciones. El modelo macroscópico es substancialmente más simple que el modelo microscópico y puede ser generalizado para incluir fluctuaciones cuánticas. Aunque asumimos una situación homogénea, el modelo es totalmente covariante y puede ser aplicado a casos inhomogéneos también. Estos rasgos hacen de este modelo una herramienta útil para explorar la física del precalentamiento.

palabras clave:

Fluido relativista disipativo - Teoría Tipo Divergencia - Cosmología - Recalentamiento

Dissipative Relativistic Fluid and Cosmology

Abstract

We investigate divergence-type theories describing the dissipative interaction between a field and a fluid. We look for theories which, under equilibrium conditions, reduce to the theory of a Klein-Gordon scalar field and a perfect fluid. We show that the requirements of causality and positivity of entropy production put non-trivial constraints to the structure of the interaction terms. These theories provide a basis for the phenomenological study of the reheating period. We present a macroscopic model of the decay of a coherent classical scalar field into statistical fluctuations through the process of parametric amplification. We solve the field theory (henceforth, "microscopic") model to leading order in a Large N expansion, and show that the macroscopic model gives satisfactory results for the evolution of the field, its conjugated momentum and the energy momentum tensor of the fluctuations over many oscillations. The macroscopic model is substantially simpler than the microscopic one, and can be easily generalized to include quantum fluctuations. Although we assume here an homogeneous situation, the model is fully covariant, and can be applied in inhomogeneous cases as well. These features make this model a promising tool in exploring the physics of preheating.

keywords:

Relativistic Dissipative Fluid - Divergence Type Theory - Cosmology - Reheating

À Raymonde

Indice

1	Introducción	11
2	Fluidos relativistas	19
2.1	Termodinámica y condiciones de equilibrio	19
2.2	Fluidos perfectos	23
2.2.1	Ecuaciones de conservación y sus consecuencias	27
2.3	Formalismo covariante	28
2.4	Fluidos reales	34
2.4.1	Punto de vista de Eckart	38
2.4.2	Punto de vista de Landau y Lifshitz . . .	40
2.4.3	Propuesta de Israel y Stewart	43
2.5	Teoría ultra-local y causalidad .	48
2.6	Teoría tipo divergencia	51
3	Teorías relativistas de campos y fluidos interactuantes.	55
3.1	Teoría tipo divergencia del campo escalar de Klein-Gordon	55
3.2	Teoría tipo divergencia de campo y fluido interactuantes	59
3.3	Análisis a primer orden fuera del equilibrio en un modelo homogéneo simplificado . .	64
3.4	Un modelo simple de interacción campo-fluido.	69
3.5	Acercamiento no lineal al equilibrio en el caso homogéneo .	73
4	El modelo microscópico	81
4.1	Cuadro sinóptico	82
4.2	Ecuaciones de movimiento	83

4.2.1	Fluctuaciones clásicas térmicas, tensor de energía momento y formulación Hamiltoniana	87
4.3	El tensor de energía-momento en $t = 0$	91
5	El modelo macroscópico	95
5.1	Fluctuaciones térmicas	95
5.2	Cálculo del potencial de interacción	98
5.3	Relación entre B_0 y ϕ_0	. 101
5.4	Cálculo de F y G	. 103
5.5	Restricciones impuestas por causalidad y la segunda ley de la termodinámica	106
6	Comparación entre los modelos microscópico y macroscópico	113
6.1	Vincular las dinámicas	113
6.2	Resultados .	117
7	Conclusión	125
A	Cálculo de los valores de expectación del tensor de energía momento	127

Capítulo 1

Introducción

En física los sistemas de interés son frecuentemente muy complejos. Afortunadamente, muy a menudo, no todos los grados de libertad del sistema son de igual interés para el estudio científico. Un buen ejemplo de esto es un fluido, donde el sistema físico, a pesar de estar constituido por un gran número de partículas, puede ser descrito con mucha precisión como un campo continuo de velocidad que responde a ecuaciones en derivadas parciales relativamente simples, las ecuaciones de Navier-Stokes. El Universo temprano, particularmente la fase que sigue a la época inflacionaria, consiste también en un sistema complejo donde el análisis desde primeros principios es muy complicado. No obstante, muchas de las informaciones relevantes están contenidas en el campo medio del inflatón. Una descripción macroscópica de este sistema sería por lo tanto deseable.

En esta tesis investigamos las teorías tipo divergencia que describen la interacción disipativa entre un campo y un fluido. Buscamos teorías que, bajo condiciones de equilibrio, se reducen a la teoría de un campo escalar de Klein-Gordon y un fluido perfecto. Mostramos que los requerimientos de causalidad y de producción positiva de la entropía imponen restricciones no triviales a la estructura del término de interacción. Presentamos un modelo macroscópico del decaimiento de un campo clásico escalar en fluctuaciones estadísticas a través del proceso de amplificación paramétrica. Resolvemos el modelo de teoría de campos (en adelante "microscópico") al primer orden en una ex-

pansión de N grande, y mostramos que el modelo macroscópico da resultados satisfactorios para la evolución del campo medio, de su momento conjugado y del tensor de energía-momento durante varias oscilaciones. El modelo macroscópico es substancialmente más simple que el modelo microscópico y puede ser generalizado para incluir fluctuaciones cuánticas. Aunque asumimos una situación homogénea, el modelo es totalmente covariante y puede ser aplicado a casos inhomogéneos también. Estos rasgos hacen de este modelo una herramienta útil para explorar la física del precalentamiento.

Los fluidos reales (es decir disipativos) son descriptos por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales muy conocido por los físicos y los ingenieros: las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones tienen un rango de aplicación muy variado y son muy exitosas. Como están basadas en la mecánica Newtoniana es natural tratar de obtener una generalización de acuerdo con la relatividad especial. Como discutiremos en el primer capítulo, Eckart ([1]) y Landau y Lifshitz ([2]) propusieron teorías relativistas sencillas y atractivas que eran extensiones naturales de la no-relativista. Hiscock y Lindblom ([3]) estudiaron todas las teorías de primer orden que tienen como caso particular a las de Eckart y Landau y Lifshitz. Es decir, estudiaron un conjunto de teorías donde la corriente de entropía S^a no contiene términos más altos que primer orden en desviaciones del equilibrio. Probaron que estas propuestas no son aceptables porque no conducen a ecuaciones de evolución causal y no admiten estados de equilibrio físicamente aceptables. Cabe señalar que Eckart, siguiendo los trabajos de Onsager ([4]) que marcan el nacimiento de la termodinámica fuera del equilibrio ([5],[6]), asume que los estados de no-equilibrio son descriptos usando solamente las variables termodinámicas de equilibrio local. Desde el punto de visto más general de la termodinámica fuera del equilibrio, hay otro camino que conceptualmente empieza con los trabajos de Coleman, Truesdell y Noll ([15],[16],[17]) con el desarrollo de la termodinámica racional que fue seguida por las teorías de termodinámica irreversible extendida. En la termodinámica racional se consideran la temperatura y la entropía como conceptos primitivos y aparecen efectos de histéresis: el comportamiento de un sistema depende de su historia. Varias hipótesis fundamentales permiten llegar a ecuaciones con-

stitutivas. El enfoque es radicalmente distinto que en la visión tradicional y si bien su éxito fue limitado, permitió una visión crítica de los fenómenos fuera del equilibrio. En el caso de las teorías de termodinámica extendidas, se aumentan las variables termodinámicas usando los flujos disipativos como variables fundamentales. La entropía sigue teniendo un papel fundamental y se trata de llegar a leyes constitutivas que permitan describir mejor algunos fenómenos que son difíciles de explicar en el contexto de las teorías de termodinámica fuera del equilibrio más convencionales.

Un ejemplo de las ideas de la termodinámica extendida en el contexto de los fluidos relativistas son las teorías de segundo orden de Israel y Stewart ([7],[8]). Son una extensión natural de la teoría de primer orden donde se incluyen términos de segundo orden para la corriente de entropía fuera del equilibrio. Como veremos, en este caso uno obtiene ecuaciones diferenciales como ecuaciones constitutivas de manera que los flujos no son determinados únicamente por los valores de las variables termodinámicas de equilibrio. Así, ya en 1979 Belinski y col. ([13]), estudiando la disipación de anisotropía en espacios anisotrópicos de tipo Bianchi 1, probaron que la teoría de fluidos basada en el formalismo de Israel y Stewart conducía a resultados cualitativamente distintos que la teoría de Eckart. Estos resultados fueron ampliados usando teorías más generales por Pavón ([14]) y otros. Sin embargo, las ecuaciones son muy complicadas y es difícil asegurar de manera rigurosa que la teoría está realmente exenta de los problemas que quiso prevenir, es decir propagación acausal y inestabilidad. Otros autores ([9],[10]) obtuvieron clases de teorías relativistas de fluidos cada vez más grandes con características aceptables, entre otros la teoría de divergencia nula. Estas últimas son particularmente atractivas desde el punto de vista matemático en el sentido que se pueden formular como teorías hiperbólicas simétricas que son bien conocidas en física-matemática y que permiten verificar rigurosamente que no sufren los problemas de las teorías de Eckart y Landau y Lifshitz. Geroch y Lindblom ([11],[12]) después argumentaron que las teorías hiperbólicas de fluidos son capaces de reproducir los resultados fenomenológicos de las teorías parabólicas de Eckart y Landau, dando lugar a nuevos comportamientos en regímenes extremos.

Finalmente el mismo Geroch tuvo dudas sobre la existencia misma de una teoría hiperbólica de fluidos relativista. Argumentó de manera convincente que cualquier teoría de fluidos de tipo hiperbólico que trate de emular las ecuaciones de Navier-Stokes perderá su sentido físico antes de poder llegar a un régimen en los cuales sería útil ([18]). En nuestros casos escapamos a este problema pues el "fluido" que simulamos proviene de una ecuación relativista de entrada y además como campo clásico, no tiene una escala mínima debajo de la cual toma un aspecto molecular.

Las teorías de termodinámica extendida y las teorías causales de fluidos tienen otras aplicaciones posibles ([20]) además de las cosmológicas que citamos anteriormente (ver también por ejemplo [19]): pico precursor en estallido (burst) astrofísicos de rayos X ([21]), relajación térmica en colapsos gravitatorios ([22]). Sin embargo, si consideramos el campo más especializado de las teorías de fluido relativistas, una de los campos más promisorios de aplicación es el universo temprano donde la relación dinámica entre los grados de libertad gravitacional y de materia, el carácter fuera de equilibrio, la temperatura elevada y la preponderancia de algunos grados de libertad por encima de los demás indican que un tratamiento de este índole puede ser muy fructífero.

Las hipótesis de homogeneidad y isotropía para el universo parecen estar de acuerdo con la estructura del universo a muy grandes escalas ($> \sim 100$ Mpc). Esto permite restringir la métrica a la forma de Friedmann-Robertson-Walker. No obstante, es muy difícil hacer encajar la generación de estructuras (que generaron después los grupos (clusters) de galaxias) dentro de este marco. Otros problemas conceptuales del modelo incitaron a Alan Guth ([23]) a proponer una solución vía una fase inflacionaria en la cual el factor de escala del universo tendría un crecimiento exponencial. El mecanismo era una transición de primer orden de la materia que se suponía era dominante en esta época. Durante la fase de superenfriamiento la densidad de energía tenía un término constante extra¹ que dominaba en la ecuación de Friedmann y que era responsable por la inflación.

Sin embargo la propuesta de Guth sufría de varios problemas, el más

¹debido a la densidad de energía del falso vacío de la fase metaestable

grave siendo la dificultad para terminar naturalmente el periodo inflacionario. Pocos meses después, Linde ([24]) por un lado y Albrecht y Steinhardt ([25]) por otro presentaron una nueva versión de inflación que no sufría de los problemas de la versión de Guth y que era más simple de implementar. Aunque Linde trabaja con un potencial efectivo proveniente de una ruptura de (super)simetría, cualquier otro potencial efectivo que tiene la característica adecuada, funciona. En este escenario, el valor medio de un campo escalar lentamente se desplaza desde el vacío falso hacia un verdadero vacío sobre un potencial muy chato cerca de su posición inicial. Durante este periodo, $\langle \phi \rangle \approx cte$ y tenemos inflación. Subsecuentemente el campo cae en un pozo centrado en el verdadero vacío y el campo oscila allí. Acoplamiento con las otras partículas implica que hay una formación de partículas que se van a termalizar luego provocando un recalentamiento del universo que caerá en una fase de expansión dominado por la radiación.

Inflación representa una modificación muy atractiva del modelo estándar en cosmología. Permite resolver de una sola vez varios problemas conceptuales (problemas de condición iniciales, problema de la lisura (flatness), problema de los monopolos, problema del horizonte). No obstante el rasgo más interesante, de la teoría inflacionaria es la posibilidad de explicar la creación del contenido de materia (y de la entropía) del universo y la subsecuente generación de estructuras.

Durante las épocas de pre y recalentamiento ([26]), los grados de libertad efectivos del inflatón decaen en fluctuaciones cuánticas y estadísticas de los campos de materia y gravitacional. Ahora se cree que el principal mecanismo por lo cual se produce tal decaimiento es vía amplificación paramétrica de las oscilaciones del inflatón.

Una descripción detallada de este fenómeno requiere un conocimiento de la teoría cuántica de campos bajo amplificación paramétrica ([28]), en un fondo curvo y incluyendo los efectos de retroacción de la geometría ([29]). Aunque hubo progresos substanciales en los últimos años ([30], [31], [32], [33], [34], [35]) hay muchas cuestiones que quedan inconclusas, tal como la relevancia de los efectos no lineales ([36]) y la generación de perturbaciones más grandes que la longitud de Hubble ([37]).

Progresos adicionales son impedidos por varias razones, de las cuales la más importante es tal vez el no conocer la teoría microscópica correcta de inflación. Para esta razón, es necesario considerar un número elevado de escenarios distintos que es de esperar darán resultados divergentes para un fenómeno tan complejo como lo es el recalentamiento.

Sin embargo, esta variabilidad está limitada por dos factores. Primero, para los propósitos de la cosmología no necesitamos realmente una descripción detallada del proceso microscópico. Típicamente, lo que se necesita saber es la evolución media del inflatón a larga escala, la temperatura final del campo de radiación que domina el calor específico del universo después de inflación y un conocimiento de las escalas temporales involucradas. Es plausible que modelos diferentes puedan estar de acuerdo con observables de granulado grueso (coarse-grained observables), pero estar en desacuerdo en escalas más chicas.

Segundo, aunque diversos, los modelos a considerar no son arbitrarios. Deben ser consistentes con principios fundamentales tal como la causalidad y la segunda ley de la termodinámica. Sabemos de las teorías relativistas de campos que estos principios generales bastan para poner restricciones no triviales sobre el comportamiento macroscópico ([38],[3]).

Estas observaciones sugieren que puede ser posible investigar los rasgos que son independientes del modelo o al menos robustos frente a variaciones en el modelo, de pre y recalentamiento reemplazando el modelo microscópico completo por un más simple macroscópico que tiene las mismas restricciones. El modelo macroscópico debe ser consistente con causalidad y la segunda ley, totalmente covariante, respetando las mismas leyes de conservación que el modelo microscópico y reproducir su comportamiento de equilibrio. Al mismo tiempo, el modelo macroscópico debe ser un modelo hidrodinámico consistente por sí solo ([39]). Como veremos luego, estos requerimientos esencialmente definen el modelo macroscópico. Los grados de libertad que quedan son los parámetros de la teoría que deben ser encontrados usando experimentos numéricos.

Una confirmación indirecta de la posibilidad de este punto de vista es el éxito de un modelo simple de fluidos en reproducir algunos rasgos del

recalentamiento ([40]). Debe enfatizarse la necesidad de pedir una formulación covariante pues asumir un fondo de Friedmann-Robertson-Walker o perturbaciones de orden bajo, es inadecuado para analizar la evolución de las fluctuaciones más grandes que la longitud de Hubble.

En esta tesis doctoral se describe cómo se pueden utilizar las teorías tipo divergencia para describir un campo de Klein-Gordon y sus fluctuaciones. Después de desarrollar el formalismo general en el capítulo 3, se mostrará una aplicación específica en los capítulos siguientes. El capítulo 4 desarrolla la teoría microscópica de interés. Una atención especial se dará en cómo relacionar los elementos de la teoría microscópica y los de la teoría macroscópica en el capítulo 5 para terminar con una presentación de los resultados en el capítulo 6. Un corto apéndice termina el trabajo.

Capítulo 2

Fluidos relativistas

Este capítulo además de fijar notación y formalismo, se puede ver como una sucinta introducción a los fluidos relativistas, escrito para motivar el formalismo que elegimos para trabajar en los capítulos posteriores. Aunque breve, aspira a ser autocontenido. Comienza formulando la termodinámica en un lenguaje covariante y algunas identidades básicas son probadas. Los fluidos perfectos son definidos y un formalismo covariante que permite una separación espacio-temporal es presentado. Los fluidos disipativos siguen y los formalismos de Eckart y de Landau y Lifshitz son desarrollados con algún detalle. Una breve generalización a teoría de primer orden es expuesta y se discute brevemente la propuesta de Israel y Stewart. Una breve discusión sigue, que prepara el terreno por la formulación de la teoría tipo divergencia.

2.1 Termodinámica y condiciones de equilibrio

Empezaremos con un breve resumen de hidrodinámica relativista. Las referencias básicas son ([2],[57],[58],[70]). Las relaciones básicas de la termodinámica están codificadas en la ecuación de Euler, que define la entropía:

$$S = \frac{1}{T} (U + pV - \mu N) \quad (2.1)$$

y la primera ley

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (2.2)$$

que representa la conservación de la energía. Tomando el diferencial de (2.1) y substrayendo (2.2) obtenemos la relación de Gibbs-Duhem

$$V dp = S dT + N d\mu \quad (2.3)$$

o dividiendo por V ambos miembros

$$dp = s dT + n d\mu \quad (2.4)$$

que nos permite deducir

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{1}{T} (\rho + p - \mu n) = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\mu} \quad n \equiv \frac{N}{V} = \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_T$$

Es conveniente introducir la afinidad

$$\alpha \equiv \mu/T \quad (2.5)$$

Si se adoptan como variables independientes T y α , usando:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\alpha} = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\mu} + \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_T \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{\alpha} \quad (2.6)$$

se obtiene

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\alpha} = \frac{1}{T} (\rho + p - \alpha T n) + n \alpha = \frac{\rho + p}{T} \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_T = T n$$

Es útil derivar una fórmula más antes de seguir. Multiplicando ambos lados de (2.1) por T/V para obtener

$$Ts = \rho + p - \mu n$$

donde introducimos $\rho = U/V$, la densidad de energía. Tomando el diferencial

de ambos lados y usando (2.4) obtenemos

$$Tds = d\rho - \mu dn \quad (2.8)$$

Vamos a introducir ahora la noción de entropía por partícula

$$\sigma = S/N = s/n \quad (2.9)$$

Entonces, de (2.1), obtenemos

$$\mu = \frac{\rho + p}{n} - T\sigma \quad (2.10)$$

Usar (2.9) y (2.10) en (2.8) conduce, después de reagrupar a

$$Td\sigma = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.11)$$

Para obtener un formalismo covariante, adoptamos la regla siguiente:

1. Cantidades intensivas (T, p, μ) serán de carácter escalar y representarán el valor de la cantidad en un evento dado medido por un observador al reposo respecto del fluido.
2. Cantidades extensivas (S, V, N) estarán asociadas a corriente vectorial S^a, μ^a y N^a de la siguiente manera: Sea X^a la corriente de interés y dado un elemento $d\Sigma_a = n_a d\Sigma$ de una hipersuperficie espacial entonces $-X^a d\Sigma_a$ representa la cantidad X dentro del volumen $d\Sigma$ medido por un observador con velocidad n^a . Si además la cantidad X es conservada entonces $X^a_{;a} = 0$.
3. Energía y cantidad de momento son combinados dentro de una sola cantidad extensiva: el tensor de energía-momento T^{ab} . La corriente de energía es

$$U^a = -T^{ab}u_b. \quad (2.12)$$

Si dividimos ambos miembros de ec.(2.1) por V/T y multiplicamos por u^a obtenemos

$$TS^a = U^a + pu^a - \mu N^a \quad (2.13)$$

es decir, usando ec.(2.12) :

$$TS^a = -T^{ab}u_b + pu^a - \mu N^a \quad (2.14)$$

que se puede reescribir también:

$$S^a = \chi^a - \beta_b T^{ab} - \alpha N^a \quad (2.15)$$

donde usamos la ec. (2.5), y introducimos el potencial termodinámico

$$\chi^a = p\beta^a \quad (2.16)$$

y la inversa de la temperatura

$$\beta^a = u^a/T. \quad (2.17)$$

Después de obtener la versión covariante de Euler (ec. (2.15)) podemos también obtener la forma covariante de la primera ley. Tomando el diferencial de ambos lados de la ec. (2.14) obtenemos

$$TdS^a + S^a dT = -d(T^{ab}u_b) + pdu^a + u^a dp - \mu dN^a - N^a d\mu \quad (2.18)$$

Dividiendo la ec. (2.3) por V y multiplicando por u^a obtenemos la forma covariante de Gibbs-Duhem

$$S^a dT = u^a dp - N^a d\mu \quad (2.19)$$

Remplazando la ec. (2.19) en la anterior obtenemos

$$TdS^a = -d(T^{ab}u_b) + pdu^a - \mu dN^a \quad (2.20)$$

Podemos también tomar el diferencial de ambos lados de la ec. (2.15) y

usando la primera ley (2.20) obtenemos

$$d\chi^a = T^{ab}d\beta_b + N^a d\alpha$$

por lo tanto

$$\frac{\partial\chi^a}{\partial\beta_b} = T^{ab} \quad \frac{\partial\chi^a}{\partial\alpha} = N^a \quad (2.21)$$

Una consecuencia importante de las ecs. (2.21) está relacionado con la creación de entropía. Tomando la divergencia de la ec. (2.15) obtenemos

$$S^a_{;a} = \chi^a_{;a} - \beta_{b;a}T^{ab} - \beta_b T^{ab}_{;a} - \alpha_{,a}N^a - \alpha N^a_{;a}$$

Ahora

$$\chi^a_{;a} = \frac{\partial\chi^a}{\partial\beta_b}\beta_{b;a} + \frac{\partial\chi^a}{\partial\alpha}\alpha_{,a}$$

Usando las ecs. (2.21) y el resultado anterior obtenemos

$$S^a_{;a} = -\beta_b T^{ab}_{;a} - \alpha N^a_{;a} \quad (2.22)$$

que nos dice que la producción de entropía desaparece al equilibrio si las leyes de conservación¹ son válidas.

2.2 Fluidos perfectos

Un concepto muy útil y importante es el de fluido perfecto. En Minkowski, un fluido es perfecto cuando un observador al reposo con él lo ve como isotrópico. Más específicamente, las componentes mixtas se anulan y las puramente espaciales son isótropas. En este sistema de referencia tenemos pues

$$T^{00} = \rho \quad (2.23)$$

$$T^{\mu\nu} = p\delta^{\mu\nu} \quad (2.24)$$

¹ $T^{ab}_{;a} = 0$; $N^a_{;a} = 0$

$$T^{\nu 0} = T^{0\nu} = 0 \quad (2.25)$$

para encontrar la forma covariante podemos hacer la transformación genérica o podemos utilizar un poco de ingenio. Por ejemplo, podemos hacer una transformación de Lorentz según el eje x (considerando solamente el sector (ct, x) por el momento

$$\begin{aligned} T' &= \Lambda T \Lambda' \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que da

$$T' = \begin{pmatrix} \gamma^2 (\rho + pv^2) & -\gamma^2 (\rho + p) v \\ -\gamma^2 (\rho + p) v & \gamma^2 (\rho v^2 + p) \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \gamma^2 (\rho v^2 + p) &= \frac{\rho v^2}{1-v^2} + \frac{p}{1-v^2} + \frac{(p-p)v^2}{1-v^2} \\ &= \frac{(\rho+p)v^2}{1-v^2} + p \end{aligned}$$

Volviendo a las cuatro dimensiones obtenemos

$$T' = \begin{pmatrix} \gamma^2 (\rho + pv^2) & \gamma^2 (\rho + p) v & 0 & 0 \\ \gamma^2 (\rho + p) v & \frac{(\rho+p)v^2}{1-v^2} + p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Ahora, reemplazando $v = v_x$ obtenemos

$$T' = \begin{pmatrix} \gamma^2 (\rho + pv^2) & -\gamma^2 (\rho + p) v_x & 0 & 0 \\ -\gamma^2 (\rho + p) v_x & \frac{(\rho+p)v_x v_x}{1-v^2} + p\delta_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

de manera que una rotación espacial debería conducirnos a

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= p\delta^{\mu\nu} + (p + \rho)\frac{v^\mu v^\nu}{1 - v^2} \\ T^{\mu 0} &= (p + \rho)\frac{v^\mu}{1 - v^2} \\ T^{00} &= \frac{(\rho + pv^2)}{1 - v^2} \end{aligned}$$

que no es difícil reescribir ahora de manera covariante (pues $u = \Lambda(1, 0) = \gamma(1, \beta)$)

$$T^{ab} = p\eta^{ab} + (p + \rho)u^a u^b \quad (2.26)$$

con u^a la cuadrivelocidad del fluido. En presencia de gravedad escribiríamos

$$T^{ab} = pg^{ab} + (p + \rho)u^a u^b \quad (2.27)$$

Nótese que p y ρ están definidos, por definición, como los valores en el sistema al reposo. Por lo tanto, siguiendo nuestra regla, son escalares. Finalmente notaremos la forma equivalente

$$T^{ab} = pg^{ab} + pu^a u^a + \rho u^a u^a \quad (2.28)$$

$$= \rho u^a u^b + ph^{ab} \quad (2.29)$$

donde introducimos el proyector en la hipersuperficie espacial

$$h^a_{;b} = g^a_b + u^a u_b \quad (2.30)$$

que cumple

$$h^{ab}u_b = 0 \quad (2.31)$$

Además de energía y momento, un fluido habitualmente transporta al menos una cantidad conservada tal que la carga, el número de átomos o más generalmente el número de bariones menos el número de antibariones. No obstante, es importante notar que en fluido ultra-relativista no hay obligatoriamente una cantidad macroscópica correspondiente al número de partículas que sea conservada. Para simplificar, considerar una sola cantidad conservada

que sera referida como el número de partículas n . En un sistema comoviente, tendremos

$$\begin{aligned} N^0 &= n \\ N^\mu &= 0 \end{aligned}$$

y una transformación de Lorentz no llevara a la forma covariante

$$N^a = nu^a \quad (2.32)$$

Fijen se que si consideramos cualquier fluido en equilibrio, también sera isotrópico visto desde un observador al reposo con respecto al fluido (no podemos pedir además homogeneidad pues la presencia de la métrica implica que la densidad y la presión pueden cambiar con la posición) de manera que también su tensor de energía-momento puede tomar la forma (2.27). La diferencia con un fluido perfecto consiste en que, en el caso del fluido perfecto, su tensor de energía-momento siempre se puede escribir en la forma (2.27), incluso fuera del equilibrio. Además en el equilibrio, todas las corrientes vectoriales serán colineales con la velocidad del fluido.

Una consecuencia de la ec. (2.27) es que podemos obtener una manera más compacta de escribir la primera ley. La ec. (2.20) dice

$$TdS^a = -d(T^{ab}u_b) + pdu^a - \mu dN^a \quad (2.33)$$

$$= -u_b dT^{ab} - T^{ab} du_b + pdu^a - \mu dN^a \quad (2.34)$$

$$= -u_b dT^{ab} - pg^{ab} du_b + (p + \rho)u^a u^b du_b + pdu^a - \mu dN^a \quad (2.35)$$

$$= -u_b dT^{ab} - \mu dN^a \quad (2.36)$$

es decir

$$dS^a = -\beta_b dT^{ab} - \alpha dN^a \quad (2.37)$$

Consideramos ahora desviaciones de primer orden del equilibrio. Tenemos

$$(dS^a)_{;a} = (-\beta_b dT^{ab} - \alpha dN^a)_{;a}$$

$$\begin{aligned}
&= -\beta_{b;a}dT^{ab} - \beta_b(dT^{ab})_{;a} - \alpha_{,a}dN^a - \alpha(dN^a)_{;a} \\
&= -\beta_{b;a}dT^{ab} - \beta_b d(T^{ab}_{;a}) - \alpha_{,a}dN^a - \alpha d(N^a_{;a}) \\
&= -\beta_{b;a}dT^{ab} - \alpha_{,a}dN^a
\end{aligned}$$

Por otro lado, la producción de entropía debe ser estacionaria al equilibrio. Es decir, la variación a primer orden deben ser nula para cualquier desviaciones dT^{ab} y dN^a . Por lo tanto, $(dS^a)_{;a} = 0$ implica que

$$\beta_{(a;b)} = 0 \quad (2.38)$$

$$\alpha_{,a} = 0 \quad (2.39)$$

donde los paréntesis denotan simetrización. Solamente se requiere que la parte simétrica del tensor $\beta_{a;b}$ sea nula pues está contraído con un tensor simétrico T^{ab} . Entonces, en el equilibrio, la afinidad α debe ser constante y el vector de temperatura inversa β_a debe ser Killing. Existe pues un sistema de coordenadas en el cual las componentes del vector β^a son independientes de al menos una de estas coordenadas. Entonces vemos que en relatividad general, no cualquier métrica puede soportar un estado de equilibrio.

2.2.1 Ecuaciones de conservación y sus consecuencias

El fluido perfecto debe obedecer las leyes de conservación

$$T^{ab}_{;a} = 0 \quad (2.40)$$

$$N^a_{;a} = 0 \quad (2.41)$$

Empezamos contrayendo (2.40) con u_b y usando $u_b u^b_{;a} = 0$ obtenemos

$$u_b [pg^{ab} + (p + \rho)u^a u^b]_{;a} = u^a p_{,a} - [(p + \rho) u^a]_{;a} \quad (2.42)$$

$$= -\rho_{,a}u^a - (\rho + p) u^a_{;a} \quad (2.43)$$

Por otro lado, desarrollando (2.41) tenemos

$$n_{,a}u^a + nu^a_{;a} = 0 \quad (2.44)$$

Obteniendo $u^a_{;a}$ de (2.44) y reemplazando en (2.43) teniendo en cuenta (2.40) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho_{,a}u^a + (\rho + p) \frac{1}{n} n_{,a}u^a \\ &= -\rho_{,a}u^a - n(\rho + p) \left(\frac{1}{n}\right)_{,a} u^a \\ &= -nu^a \left[\left(\frac{\rho}{n}\right)_{,a} + p \left(\frac{1}{n}\right)_{,a} \right] \\ &= -nu^a T\sigma_{,a} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\sigma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \sigma = 0 \quad (2.45)$$

es decir, la entropía por partícula es constante a lo largo de una trayectoria del elemento de fluido para un fluido perfecto. Fijense que probamos que

$$u_b [pg^{ab} + (p + \rho)u^a u^b]_{;a} = -Tnu^a \sigma_{,a} \quad (2.46)$$

$$= -T(nu^a \sigma)_{;a} + T\sigma(nu^a)_{;a} \quad (2.47)$$

$$= -T(u^a s)_{;a} \quad (2.48)$$

donde usamos (2.41), (2.32) independientemente de (2.40).

2.3 Formalismo covariante

Un fluido es modelado usando un campo continuo de cuadrivelocidad u^a es decir vector temporal unitario $u^a u_a = -1$ representando un conjunto de observadores comovientes. En la teoría no relativista, el equivalente físico sería el campo de velocidad espacial que representa la velocidad de los elementos infinitesimales del fluido respecto del laboratorio. Para un fluido ideal, es-

ta analogía es correcta y uno puede definir de manera unívoca u^a como la cuadrivelocidad que representa la corriente de partícula

$$n^a = nu^a$$

con n el número de partículas por unidad de volumen. Lamentablemente esto no será posible en el caso de fluido real (disipativo). Más precisamente, no existirá un único campo de velocidad u^a . Hay dos elecciones que probaron ser útiles, la de Eckart y la de Landau-Lifshitz que presentaremos oportunamente.

Podemos utilizar el campo vectorial u^a para definir una descomposición $3 + 1$ del espacio-tiempo definiendo el proyector (2.30). Bajándole un índice usando la métrica, obtenemos la métrica de la hipersuperficie espacial Σ

$$h_{ab} = g_{ac}h_b^c = g_{ab} + u_a u_b \quad (2.49)$$

Las identidades siguientes siguen inmediatamente

$$h_{ab}u^b = 0 \quad (2.50)$$

$$h_a^c h_{cb} = h_{ab} \quad (2.51)$$

$$h_a^a = 3 \quad (2.52)$$

$$h_{ab}q^b = q_a \quad \text{si} \quad q_a u^a = 0 \quad (2.53)$$

Una consecuencia inmediata es que si uno define $q^a = h_b^a V^b$ para cualquier V^b entonces $q^b u_b = h_b^a V^b u_a = 0$. La derivada covariante en la hipersuperficie espacial D es simplemente la proyección de la derivada covariante espacio-temporal ∇ , por ejemplo

$$D_a T_{ef} = h_e^b h_f^c h_a^d \nabla_d T_{bc} \quad (2.54)$$

como se prueba fácilmente pues es obviamente una derivada y es compatible con la métrica h_{ab}

$$D_a h_{bc} = h_a^d h_b^e h_c^f \nabla_d h_{ef}$$

$$\begin{aligned}
&= h_a^d h_b^e h_c^f \nabla_d u_e u_f \\
&= h_a^d \left[(h_c^f u_f) h_b^e \nabla_d u_e + (h_b^e u_e) h_c^f \nabla_d u_f \right] = 0
\end{aligned}$$

Como hay una única derivada (simétrica) compatible con la métrica entonces D es la derivada covariante en la hipersuperficie.

Cualquier vector espacio-temporal V^a puede ser descompuesto en su parte longitudinal (temporal) y transversal (espacial) con respecto de u^a :

$$V^a = Au^a + B^a$$

donde $A = -u_a V^a$ y $B^a = h_b^a V^b$ que implica que $B^a u_a = 0$. Esta descomposición se extiende naturalmente a rangos más grandes. Por ejemplo, para un tensor de rango 2

$$V^{ab} = Au^a u^b + B^a u^b + C^b u^a + F^{ab}$$

con $A = V^{ab} u_a u_b$, $B^a = -h_b^a V^{bc} u_c$, $C^a = -h_b^a V^{cb} u_c$ y $F^{ab} = h_c^a h_d^b V^{cd}$. Como consecuencia $B^a u_a = C^a u_a = F^{ab} u_a = F^{ab} u_b = 0$. Coloquialmente, hicimos una descomposición en parte temporal y espacial para cada índice. Es conveniente proseguir en la descomposición de F^{ab} en su parte simétrica y antisimétrica

$$F^{ab} = F^{(ab)} + F^{[ab]}$$

donde

$$\begin{aligned}
F^{(ab)} &= \frac{1}{2} (F^{ab} + F^{ba}) \\
F^{[ab]} &= \frac{1}{2} (F^{ab} - F^{ba})
\end{aligned}$$

Se puede ir más allá aún y escribir la parte simétrica como la suma de una parte sin traza y de la traza. La traza F se obtiene de la manera usual

$$F \equiv F^a_a = h_{ab} F^{(ab)} = h_{ab} F^{ab} \quad (2.55)$$

$$= h_{ab} h_c^a h_d^b V^{cd} \quad (2.56)$$

$$= h_{ab}V^{ab} = V \quad (2.57)$$

(nótese que la traza de F y V son iguales) y por lo tanto

$$F^{(ab)} = \frac{1}{3}Fh^{ab} + F^{<ab>}$$

con $F^{<ab>}$ la resta entre la parte simétrica de F^{ab} y la traza

$$\begin{aligned} F^{<ab>} &= \frac{1}{2} \left(h_c^a h_d^b V^{cd} + h_c^b h_d^a V^{cd} \right) - \frac{1}{3} F h^{ab} \\ &= h_c^a h_d^b V^{(cd)} - \frac{1}{3} h_{cd} V^{cd} h^{ab} \\ &= h_c^a h_d^b \left(V^{(cd)} - \frac{1}{3} h_{ef} V^{ef} h^{cd} \right) \end{aligned}$$

Esta última línea motiva la siguiente definición: La parte espacial, simétrica y sin traza de un tensor cualquiera de orden dos V^{ab} es

$$V^{<ab>} \equiv h_c^a h_d^b \left(V^{(cd)} - \frac{1}{3} h_{ef} V^{ef} h^{cd} \right) \quad (2.58)$$

La parte antisimétrica también se puede escribir como

$$F^{[ab]} = \frac{1}{2} \left(h_c^a h_d^b V^{cd} - h_c^b h_d^a V^{cd} \right) \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{2} h_c^a h_d^b \left(V^{cd} - V^{dc} \right) \quad (2.60)$$

$$= h_c^a h_d^b V^{[cd]} \quad (2.61)$$

Todo junto obtenemos

$$V^{ab} = Au^a u^b + B^a u^b + C^b u^a + \frac{1}{3} h_{cd} V^{cd} h^{ab} + V^{<ab>} + h_c^a h_d^b V^{[cd]} \quad (2.62)$$

Podemos aplicar esta fórmula al caso particular $V_{ab} = u_{a;b}$ para definir unas cantidades de interés en cinemática de fluidos. En este caso $C_a = A = 0$ y $B_a = -u_{a;b} u^b = -\dot{u}_a$ pues $u^a u_{a;b} = 0$ como consecuencia de $u^a u_a = -1$ y donde el punto significa la derivada (total) temporal respecto del tiempo

propio. Por lo tanto

$$u_{a;b} = -\dot{u}_a u_b + \frac{1}{3} g^{cd} u_{c;d} h_{ab} + u_{\langle a;b \rangle} + u_{[a;b]}$$

o también

$$u_{a;b} = -\dot{u}_a u_b + H h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (2.63)$$

donde introducimos las cantidades siguientes

$$H \equiv \frac{1}{3} u^a{}_{;a} = \frac{1}{3} D^a u_a \quad (2.64)$$

$$\sigma_{ab} \equiv u_{\langle a;b \rangle} = D_{\langle b} u_{a \rangle} \quad (2.65)$$

$$\omega_{ab} = h_a^c h_b^d u_{[c;d]} = D_{[b} u_{a]} \quad (2.66)$$

La segunda igualdad en la ec. (2.64) viene de

$$\begin{aligned} D^a u_a &= h_b^a h_c^a \nabla^b u_c \\ &= h_b^a (g_a^c + u^c u_a) \nabla^b u_c \\ &= (g_b^a + u^a u_b) g_a^c \nabla^b u_c \\ &= g_b^a \nabla^b u_a + u^a u_b \nabla^b u_a \\ &= \nabla^a u_a \end{aligned}$$

con cálculos similares para las otras dos. Para interpretar físicamente estas cantidades, vamos al sistema comoviente donde $u^a = (1, \vec{0})$. Hay que tener en cuenta que en este sistema de referencia, la velocidad \vec{v} es nula pero no así sus derivadas. Tenemos pues

$$H = \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \omega_{\nu\sigma} = -(\vec{\nabla} \times \vec{v})^\mu$$

y H es pues la generalización del factor de expansión y ω_{ab} la vorticidad (vorticity). σ_{ab} representa la generalización de la cizalladura (shear). Si uno se imagina una pequeña esfera de fluido definido en el sistema comoviente entonces un momento después sufrirá los cambios siguientes:

- por causa de H , su volumen cambia pero guarda su forma esférica
- por causa de ω , su volumen y forma no cambian pero gira alrededor de la dirección $(\vec{\nabla} \times \vec{v})^\mu$
- por causa de σ , su volumen no cambia pero su forma cambia de una manera definida por los autovectores (los ejes principales) de σ_{ab} .

Como ejemplo, veamos cómo podemos escribir las ecuaciones de conservación para un fluido perfecto. Tenemos

$$T^a_b{}_{;b} = p_{,b}g^{ab} + (\rho + p)_{,b}u^a u^b \quad (2.67)$$

$$+ (\rho + p)u^a_{;b}u^b + (\rho + p)u^a u^b_{;b} \quad (2.68)$$

$$= p_{,b}g^{ab} + (\dot{\rho} + \dot{p})u^a + (\rho + p)\dot{u}^a + 3H(\rho + p)u^a \quad (2.69)$$

Donde usamos (2.64) para obtener la última igualdad. Si contrajimos con u^a obtenemos

$$0 = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) \quad (2.70)$$

pues $\dot{u}^a u_a = u^a_{;b}u^b u_a = 0$ y si multiplicamos (2.69) por un vector cualquiera q^a tal que $u_a q^a = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= p_{,b}q^b + (\rho + p)\dot{u}_b q^b \\ &= [p_{,b} + (\rho + p)\dot{u}_b]q^b \end{aligned}$$

implicando que

$$p_{,b} + (\rho + p)\dot{u}_b = 0 \quad (2.71)$$

2.4 Fluidos reales

Estamos interesados en describir ahora fluidos que no son ideales pero vamos a suponer que no se apartan mucho de los fluidos ideales, es decir, sus propiedades están "cerca" de las de un fluido ideal. Lo que caracteriza un fluido real es que el movimiento relativo de los elementos infinitesimales genera calor vía fricción, lo que a su vez genera una creación de entropía. Por lo tanto hay una transferencia de calor entre los elementos infinitesimales del fluido. Esta transferencia de energía que esta relacionada con el movimiento de las partículas no corresponde al movimiento de la energía. En otra palabras, no es claro qué cantidad física del fluido sigue u^a , el transporte de energía o el transporte de partículas. Dos convenciones son utilizadas: la de Eckart y la de Landau-Lifshitz. Primero empezamos por lo que tienen en común. Ya hemos dicho que vamos a suponer que los fluidos son solamente ligeramente imperfectos. Esto quiere decir que pequeños gradientes espacio-temporales van a modificar el tensor de energía-momento ec.(2.27) y la corriente de partícula ec.(2.32)

$$T^{ab} = \bar{p}g^{ab} + (\bar{p} + \bar{\rho}) \bar{u}^a \bar{u}^b + \delta T^{ab} \quad (2.72)$$

$$N^a = \bar{n}\bar{u}^a + \delta N^a \quad (2.73)$$

Donde las cantidades con barra son las del equilibrio local. Una consecuencia inmediata de estas modificaciones es que las definiciones de densidad de energía ρ , densidad de partículas n , presión p y velocidad u^a se vuelven ambiguas. Siguiendo la práctica general se define ρ y n como la densidad de energía y la densidad de partículas en el sistema comoviente

$$T^{00} = \rho \quad (2.74)$$

$$N^0 = n \quad (2.75)$$

$$u^a = (1, \vec{0}) \quad (2.76)$$

La presión p se define como la misma función de ρ y n que en el caso sin disipación y por lo tanto, sin gradientes. En el caso de Landau-Lifshitz

se elige u^a como la velocidad de transporte de la energía de manera que $T^{0\mu} = 0$ en el sistema comoviente. Dicho de otra manera, el momento del elemento de fluido es cero. Según Eckart, u^a es la velocidad del transporte de partículas, de manera que $n^\mu = 0$ en el sistema comoviente. Vamos a analizar brevemente cada propuesta por separado. A este nivel las dos propuestas son equivalentes y pueden verse como convenciones. Pero más tarde, cuando impongamos relaciones constitutivas, por ejemplo relacionando los gradientes con los tensores de esfuerzos viscosos, estas propuestas nos llevarán a modelos físicamente distintos. Ahora, si reemplazamos (2.74),(2.75) y (2.76) en (2.72) y (2.73) obtenemos

$$\delta T^{00} = 0 \quad (2.77)$$

$$\delta N^0 = 0 \quad (2.78)$$

Veremos ahora qué términos adicionales aparecen en las ecuaciones de conservación debido a la disipación. Usando el desarrollo (2.62) y el hecho que T^{ab} debe ser simétrico, podemos escribir

$$T^{ab} = pg^{ab} + (\rho + p)u^a u^b + q^a u^b + q^b u^a + \frac{1}{3}\tau h^{ab} + \pi^{ab} \quad (2.79)$$

donde definimos $\tau \equiv h_{cd}\delta T^{cd}$ y $\pi^{ab} \equiv \delta T^{<ab>}$. Nótese que τ y π^{ab} se construyeron usando solamente la parte disipativa. Tomando la divergencia de (2.79) tenemos

$$\begin{aligned} T^{ab}_{;b} &= [pg^{ab} + (\rho + p)u^a u^b]_{;b} + \dot{q}^a + 3Hq^a + q^b_{;b}u^a + q^b u^a_{;b} \\ &\quad + \frac{1}{3}\tau_{,b}g^{ab} + \frac{1}{3}\dot{\tau}u^a + \frac{1}{3}\tau\dot{u}^a + \tau H u^a + \pi^{ab}_{;b} \\ &= p_{,b}g^{ab} + (\dot{\rho} + \dot{p})u^a + (\rho + p)\dot{u}^a + 3H(\rho + p)u^a \\ &\quad + \dot{q}^a + 3Hq^a + q^b_{;b}u^a + q^b u^a_{;b} + \frac{1}{3}\tau_{,b}g^{ab} \\ &\quad + \frac{1}{3}\dot{\tau}u^a + \frac{1}{3}\tau\dot{u}^a + \tau H u^a + \pi^{ab}_{;b} \end{aligned}$$

usando (2.49) y (2.69). Similarmente al caso ideal, contraeremos esta

identidad con u_a . Ahora $\pi^{ab}u_b = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\pi^{ab}{}_{;b}u_a &= -\pi^{ab}u_{a;b} \\ &= -\pi^{ab}[-\dot{u}_a u_b + Hh_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}] \\ &= -\pi^{ab}\sigma_{ab}\end{aligned}$$

usando $\pi^{ab}u_b = 0$ pues vive en la superficie hiperspacial, $\pi^{ab}h_{ab} = 0$ pues es sin traza y $\pi^{ab}\omega_{ab} = 0$ pues π^{ab} es simétrico. De la misma manera, $q^a u_a = 0$ implica que

También podemos evaluar la 4-divergencia de q^a

$$\begin{aligned}q^a{}_{;a} &= g_a^b q^a{}_{;b} \\ &= (h_a^b - u_a u^b) q^a{}_{;b} \\ &= h_a^b q^a{}_{;b} - u_a \dot{q}^a \\ &= h_a^b (g_c^a q^c)_{;b} - u_a \dot{q}^a \\ &= h_a^b g_c^a q^c{}_{;b} - u_a \dot{q}^a \\ &= h_a^b h_c^a q^c{}_{;b} - h_a^b u^a u_c q^c{}_{;b} - u_a \dot{q}^a \\ &= D_a q^a - -u_a \dot{q}^a\end{aligned}$$

usando (2.54) y (2.50). Obtenemos entonces

$$0 = \dot{\rho} + 3H(\rho + p) + 2q^a \dot{u}_a + D_a q^a + \tau H + \pi^{ab}\sigma_{ab} \quad (2.80)$$

Por otro lado, si la contraemos con un vector v_a tal que $v_a u^a = 0$ entonces

$$\begin{aligned}0 &= [p_{,b}g^{ab} + (\rho + p)\dot{u}^a] v_a + \dot{q}^a v_a + 3Hq^a v_a + q^b u^a{}_{;b} v_a \\ &\quad + \frac{1}{3}\tau_{,b}g^{ab} v_a + \frac{1}{3}\tau\dot{u}^a v_a + \pi^{ab}{}_{;b} v_a\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 q^b u^a{}_{;b} v_a &= g^{ac} q^b u_{c;b} v_a \\
 &= v^c q^b [-\dot{u}_c u_b + H h_{bc} + \sigma_{bc} + \omega_{cb}] \\
 &= [H q^a + q_b \sigma^{ba} + q_b \omega^{ab}] v_a
 \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
 \dot{q}^a v_a &= g^{ab} \dot{q}_b v_a \\
 &= h^{ab} \dot{q}_b v_a + u^a u^b \dot{q}_b v_a \\
 &= h^{ab} \dot{q}_b v_a
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \pi^{ab}{}_{;b} v_a &= g_{bc} \pi^{ab;c} v_a \\
 &= h_{bc} \pi^{ab;c} v_a - u_b u_c \pi^{ab;c} v_a \\
 &= D_b \pi^{ab} v_a - u_b \dot{\pi}^{ab} v_a \\
 &= D_b \pi^{ab} v_a + \dot{u}_b \pi^{ab} v_a
 \end{aligned}$$

usando de nuevo que $u_b \pi^{ab} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\left(p + \frac{1}{3} \tau \right)_{,b} g^{ab} + \left(\rho + p + \frac{1}{3} \tau \right) \dot{u}^a \right] v_a + h^{ab} \dot{q}_b v_a + 4H q^a v_a \\
 &\quad + [q_b \sigma^{ba} + q_b \omega^{ab}] v_a + D_b \pi^{ab} v_a + \dot{u}_b \pi^{ab} v_a
 \end{aligned}$$

es decir

$$0 = \left(p + \frac{1}{3} \tau \right)_{,b} g^{ab} + \left(\rho + p + \frac{1}{3} \tau \right) \dot{u}^a + h^{ab} \dot{q}_b \quad (2.81)$$

$$+ [4H h^{ab} + \sigma^{ab} + \omega^{ab}] q_b + D_b \pi^{ab} + \dot{u}_b \pi^{ab} \quad (2.82)$$

(2.80) y (2.82) son las ecuaciones de conservación de energía-momento en presencia de disipación.

2.4.1 Punto de vista de Eckart

De acuerdo con Eckart, suponemos, en el sistema comoviente

$$N^\mu = 0 \quad (2.83)$$

Por lo tanto, (2.83) junto con (2.78) implica que, en el sistema comoviente

$$\delta N^0 = \delta N^\mu = 0 \quad (2.84)$$

por lo tanto, en un sistema cualquiera

$$\delta N^a = 0 \quad (2.85)$$

y (2.77) implica que en un sistema cualquiera²

$$u^a u^b \delta T_{ab} = 0 \quad (2.86)$$

Entonces, todos los efectos de la disipación aparecen en δT^{ab} y nuestro objetivo es encontrar el tensor más general que cumpla con (2.86) y que sea compatible con nuestra hipótesis (que dice que las desviaciones son de primer orden en los gradientes espacio-temporales) y con la segunda ley de la termodinámica. Aplicando el desarrollo (2.62) al tensor (2.72) obtenemos

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + (\rho + p) h^{ab} + q^a u^b + q^b u^a + \frac{1}{3} \tau h^{ab} + \pi^{ab} \quad (2.87)$$

donde $\pi^{ab} = \pi^{<ab>}$ y tenemos $B^a = C^a \equiv q^a$ y $\delta T^{[ab]} = 0$ ambos consecuencia de la simetría de T^{ab} , también definimos $\tau \equiv h_{ab} \delta T^{ab}$ tal como habíamos hecho anteriormente. Tenemos las ecuaciones de conservación

$$T^{ab}{}_{;a} = 0 \quad (2.88)$$

$$n^a{}_{;a} = 0 \quad (2.89)$$

²(2.86) es invariante de difeomorfismo y válida en el sistema comoviente por la ec. (2.83), por lo tanto es válido en cualquier sistema accesible via una transformación homogénea.

Usando (2.83), (2.72) y (2.48) obtenemos la identidad siguiente

$$(su^a)_{;a} = \frac{1}{T} u_b \delta T^{ab}{}_{;a}$$

que podemos reescribir

$$\left(su^a - \frac{1}{T} u_b \delta T^{ab} \right)_{;a} = -\beta_{(b;a)} \delta T^{ab}$$

Nótese que usamos la ecuación de Gibbs (2.11) para obtener este resultado. Esto es plausible pues suponemos que la presión está definida por la misma función de ρ y n que cuando todos los gradientes del fluido están ausentes.

El segundo término se puede simplificar considerablemente pues $u_b q^b = u_b h^{ab} = u_b \pi^{ab} = 0$ (ver ec (2.58) para la última) y obtenemos

$$u_b \delta T^{ab} = -q^a$$

Por lo tanto, en el sistema comoviente, la expresión del lado izquierdo se reduce a s y podemos pues interpretarla como la corriente de entropía:

$$S^a = su^a + \frac{1}{T} q^a \quad (2.90)$$

Obtenemos pues la siguiente expresión para la creación de entropía

$$S^a{}_{;a} = -\beta_{b;a} \left(q^a u^b + q^b u^a + \frac{1}{3} \tau h^{ab} + \pi^{ab} \right) \quad (2.91)$$

Se puede simplificar esta expresión escribiendo

$$\beta_{b;a} = -\frac{1}{T^2} T_{,a} u_b + \frac{1}{T} u_{b;a} \quad (2.92)$$

$$= -\frac{1}{T} \left(\frac{1}{T} T_{,a} + \dot{u}_a \right) u_b + \frac{1}{T} (H h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}) \quad (2.93)$$

donde usamos (2.63). Reemplazando (2.93) en (2.91) obtenemos

$$S^a{}_{;a} = -\frac{1}{T^2} (T_{,a} + T \dot{u}_a) q^a - \frac{1}{T} H \tau - \frac{1}{T} \sigma_{ab} \pi^{ab} \quad (2.94)$$

pues $u_a q^a = 0$ por (2.86) y $u_b h^{ab} = 0$ por construcción del proyector, $\omega_{ab} \delta T^{ab} = 0$ por antisimetría de la vorticidad, $h_{ab} \pi^{ab} = h_{ab} \sigma^{ab} = 0$ pues π^{ab} y σ^{ab} son sin traza por construcción y $\sigma_{ab} u^a = 0$ por construcción de σ^{ab} , ver (2.58). Para ir más allá e identificar π^{ab} , τ y q^a debemos utilizar la segunda ley. Pedir $S^a_{;a} \geq 0$ implica que el lado derecho debe ser definido positivo³. Una manera obvia de asegurarlo es pedir que

$$q_a = -\kappa (T_{;a} + T \dot{u}_a) \quad (2.95)$$

$$\tau = -3\zeta H = -\zeta u^a_{;a} \quad (2.96)$$

$$\pi_{ab} = -2\eta \sigma_{ab} = -\eta h_a^c h_b^d \left(u_{c;d} + u_{d;c} - \frac{2}{3} h_{cd} u^e_{;e} \right) \quad (2.97)$$

$$= -\eta \left(D_a u_b + D_b u_a - \frac{2}{3} h_{ab} D^c u_c \right) \quad (2.98)$$

con $\kappa, \zeta, \eta \geq 0$. κ es la conductividad térmica, ζ es la viscosidad principal (bulk viscosity) y η es la viscosidad de cizalladura (shear viscosity).

2.4.2 Punto de vista de Landau y Lifshitz

Según Landau y Lifshitz, en el sistema comoviente, no tenemos transporte de momento lo que implica

$$\delta T^{00} = \delta T^{0\mu} = 0 \quad (2.99)$$

pero hay posible transporte de partículas.

$$N^a = n u^a + q^a \quad (2.100)$$

Por lo tanto, en un sistema cualquiera

$$\delta T^{ab} u_b = 0 \quad (2.101)$$

³La entropía total asociada con una superficie espacial Σ es $S(\Sigma) = \int_{\Sigma} S^a d\Sigma_a$. La segunda ley implica que la entropía *total* no decrece, es decir si Σ' es al futuro de Σ entonces $S(\Sigma') - S(\Sigma) = \int_{V_4} S^a_{;a} d^4x \geq 0$ donde usamos el teorema de Gauss y V_4 representa el volumen entre las dos hipersuperficies. Esta desigualdad se verifica para toda Σ' situada al futuro de Σ si $S^a_{;a} \geq 0$.

y el tensor de energía-momento tomará la forma

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + (\rho + p) h^{ab} + \frac{1}{3} \tau h^{ab} + \pi^{ab} \quad (2.102)$$

pero, para estar de acuerdo con (2.75), debemos pedir

$$q_a u^a = 0 \quad (2.103)$$

El primer paso es encontrar la corriente de entropía. Para eso usaremos las ecuaciones de conservación (2.77), (2.78) y la forma genérica del tensor de energía-momento (2.87). Siguiendo lo que hicimos en el caso de Eckart, tenemos

$$u_b [p g^{ab} + (p + \rho) u^a u^b]_{;a} = -u_b \delta T^{ab}_{;a}$$

Usando (2.43) y (2.101) obtenemos

$$-\rho_{;a} u^a - (\rho + p) u^a_{;a} = -u_b \delta T^{ab}_{;a} \quad (2.104)$$

Pero ahora, por (2.41) y (2.100), tenemos

$$u^a_{;a} = -\frac{1}{n} n_{;a} u^a - \frac{1}{n} q^a_{;a}$$

Reemplazando en (2.104)

$$\begin{aligned} -\rho_{;a} u^a + (\rho + p) \frac{1}{n} n_{;a} u^a + (\rho + p) \frac{1}{n} q^a_{;a} &= -n \left[\left(\frac{\rho}{n} \right)_{;a} + p \left(\frac{1}{n} \right)_{;a} \right] u^a + \frac{\rho + p}{n} q^a_{;a} \\ &= -n T \sigma_{;a} u^a + T (\alpha + \sigma) q^a_{;a} \\ &= -u_b \delta T^{ab}_{;a} \end{aligned}$$

donde usamos (2.10) y (2.11). Ahora $n \sigma_{;a} u^a = (n \sigma u^a)_{;a} - (n u^a)_{;a} \sigma = (n \sigma u^a)_{;a} + q^a_{;a} \sigma$ usando de nuevo (2.41) y (2.100). Obtenemos pues

$$-T (n \sigma u^a)_{;a} + T \alpha q^a_{;a} = -u_b \delta T^{ab}_{;a}$$

es decir

$$(su^a - \alpha q^a)_{;a} = -\alpha_{,a} q^a + \frac{u_b}{T} \delta T^{ab}{}_{;a}$$

Usando (2.101) obtenemos

$$(su^a - \alpha q^a)_{;a} = -\alpha_{,a} q^a - \beta_{b;a} \delta T^{ab}$$

Como en el caso de Eckart, en el sistema comoviente, la corriente del lado izquierdo se reduce a s de manera que podemos interpretar

$$S^a = su^a - \alpha q^a \quad (2.105)$$

como la corriente de densidad de entropía. Entonces

$$S^a{}_{;a} = -\alpha_{,a} q^a - \beta_{b;a} \delta T^{ab}$$

De nuevo la segunda ley será la guía para definir las relaciones constitutivas. Usando (2.93),

$$\begin{aligned} \beta_{b;a} \delta T^{ab} &= -\frac{1}{T} \left(\frac{1}{T} T_{,a} + \dot{u}_a \right) u_b \delta T^{ab} + \frac{1}{T} (H h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}) \delta T^{ab} \\ &= \frac{1}{T} (H h_{ab} + \sigma_{ab}) \delta T^{ab} \end{aligned}$$

usando (2.101) y el hecho que la vorticidad es antisimétrica. Por lo tanto, usando (2.72) los mismos argumentos que en el caso de Eckart, obtenemos

$$\begin{aligned} \beta_{b;a} \delta T^{ab} &= \frac{1}{T} (H h_{ab} + \sigma_{ab}) \left(q^a u^b + q^b u^a + \frac{1}{3} \tau h^{ab} + \pi^{ab} \right) \\ &= \frac{1}{T} H \tau + \frac{1}{T} \sigma_{ab} \pi^{ab} \end{aligned}$$

que nos conduce a

$$S^a{}_{;a} = -\alpha_{,a} q^a - \frac{1}{T} H \tau - \frac{1}{T} \sigma_{ab} \pi^{ab}$$

Obtenemos, tal como en el caso de Eckart, para los caso relacionados con

la viscosidad principal ζ y de la viscosidad de cizalladura η

$$\begin{aligned}\tau &= -\zeta u^a_{;a} \\ \pi^{ab} &= -\eta h_a^c h_b^d \left(u_{c;d} + u_{d;c} - \frac{2}{3} h_{cd} u^e_{;e} \right)\end{aligned}$$

El caso de la conductividad térmica es un poco distinto. Uno no puede simplemente escribir $q_a = -\kappa \alpha_{,a}$ porque este vector no es necesariamente espacial, como lo requiere (2.103). No obstante, es un problema simple de solucionar, basta con definir

$$q^a = -\kappa h^{ab} \alpha_{,a}$$

en efecto, si escribimos $\alpha_{,a}$ como la suma de una parte longitudinal y transversal $\alpha_{,a} = \alpha_{,a}^{(L)} + \alpha_{,a}^{(T)}$ entonces $\alpha_{,a} q^a = -\kappa \alpha_{,a}^{(L)} \alpha^{a(L)}$ es positivo y q^a es transversal, como debe ser. Entonces

$$q^a = -\kappa \left(g^{ab} \alpha_{,a} + u^a u^a \alpha_{,a} \right)$$

Por último, si uno quiere que κ corresponda al caso no relativista, uno debe redefinir

$$\kappa \rightarrow \left(\frac{T}{(p + \rho)} \right)^2 \kappa$$

2.4.3 Propuesta de Israel y Stewart

Hubo varios intentos para tratar de mejorar las teorías de Eckart y Landau y Lifshitz. Estudiaremos brevemente uno: el que lleva los nombres de Israel y Stewart. Para entender la propuesta de Israel y Stewart, veamos que ambas propuestas anteriores se pueden entender como una propuesta para la entropía de la forma

$$S^a = s u^a + \frac{R^a}{T} \quad (2.106)$$

con

$$R^a = \frac{1}{T} q^a - \frac{\mu}{T} \nu^a \quad (2.107)$$

y, modificando un poco la notación,

$$q^a = -\kappa \dot{g}^{ab} (T_{,b} + T \dot{u}_b) \quad (2.108)$$

$$\nu^a = -\sigma \frac{T^2}{(p + \rho)^2} h^{ab} \left(\frac{\mu}{T} \right)_{,b} \quad (2.109)$$

El caso de Eckart corresponde al caso $\sigma = 0$ y el caso de Landau y Lifshitz corresponde a $\kappa = 0$. En el caso genérico se recobra la teoría usual no relativista tomando el límite no relativista y escribiendo

$$\kappa_{NR} = \kappa + \sigma$$

Como lo mencionamos anteriormente, la estabilidad de estas teorías (2.106-2.109) fue estudiada por Hiscock y Lindblom ([3]) con un veredicto desfavorable. Frente a esta situación, Israel y Stewart proponen agregar términos de segundo orden a la entropía. Para discutir su teoría en forma concreta, utilizaremos la propuesta de Eckart para la velocidad. Siguiendo la idea de Israel y Stewart, generalizamos la entropía escribiendo los términos disipativos más generales de segundo orden

$$S^a = su^a + \frac{q^a}{T} - \left(\beta_0 \tau^2 + \beta_1 q_a q^a + \beta_2 \pi_{ab} \pi^{ab} \right) \frac{u^a}{2T} \quad (2.110)$$

$$+ \frac{\alpha_0 \tau q^a}{T} + \frac{\alpha_1 \pi^{ab} q_b}{T} \quad (2.111)$$

Como el objetivo es solamente ilustrativo consideraré solamente el caso $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Es muy fácil calcular la creación de entropía pues ya sabemos por (2.94) que

$$\left(su^a + \frac{1}{T} q^a \right)_{;a} = -\frac{1}{T^2} (T_{,a} + T \dot{u}_a) q^a - \frac{1}{T} H \tau - \frac{1}{T} \sigma_{ab} \pi^{ab}$$

Entonces obtenemos

$$S^a_{;a} = -\frac{\tau}{T} \left[H + \beta_0 \dot{\tau} + \frac{T\tau}{2} \left(\frac{\beta_0 u^a}{T} \right)_{;a} \right] \quad (2.112)$$

$$-\frac{q^a}{T^2} \left[(T_{,a} + T\dot{u}_a) + T\beta_1\dot{q}_a + \frac{T^2 q_a}{2} \left(\frac{\beta_1 u^b}{T} \right)_{;b} \right] \quad (2.113)$$

$$-\frac{\pi^{bc}}{T} \left[\sigma_{ab} + \beta_2 \dot{\pi}_{bc} + \frac{T\pi_{bc}}{2} \left(\frac{\beta_2 u^a}{T} \right)_{;a} \right] \quad (2.114)$$

Para satisfacer la segunda ley $S^a_{;a} \geq 0$ basta con pedir

$$\tau = -3\zeta \left[H + \beta_0 \dot{\tau} + \frac{T\tau}{2} \left(\frac{\beta_0 u^a}{T} \right)_{;a} \right] \quad (2.115)$$

$$q_a = -\kappa \left[(T_{,a} + T\dot{u}_a) + T\beta_1 h_a^b \dot{q}_b + \frac{T^2 q_a}{2} \left(\frac{\beta_1 u^b}{T} \right)_{;b} \right] + \kappa\gamma_1 T\omega_{ab}q^b \quad (2.116)$$

$$\pi^{ab} = -2\eta \left[\sigma^{ab} + \beta_2 h_c^a h_d^b \dot{\pi}^{cd} + \frac{T\pi^{ab}}{2} \left(\frac{\beta_2 u^c}{T} \right)_{;c} \right] + 2\eta\gamma_2 \pi_c^{<a} \omega^{b>c} \quad (2.117)$$

donde tuvimos la precaución de reemplazar $\dot{q}_a \rightarrow h_a^b \dot{q}_b$ y $\pi^{ab} \rightarrow h_c^a h_d^b \dot{\pi}^{cd}$ para asegurarnos que q_a y π^{ab} viven en la hipersuperficie espacial. Además agregamos términos de acoplamiento con la vorticidad pues

$$\begin{aligned} q^a \kappa\gamma_1 T\omega_{ab}q^b &= 0 \\ \pi_{ab} 2\eta\gamma_2 \pi_c^{<a} \omega^{b>c} &= 2\eta\gamma_2 \pi_{ab} \left(\pi_c^{(a} \omega^{b)c} - \frac{1}{3} \pi_c^{(d} \omega^{e)c} h_{de} h^{ab} \right) \\ &= \eta\gamma_2 \left(\pi_{ab} \pi_c^a \omega^{bc} + \pi_{ba} \pi_c^a \omega^{bc} \right) \\ &= 2\eta\gamma_2 h_{cd} \pi_{ab} \pi^{da} \omega^{bc} \end{aligned}$$

donde usamos la antisimetricidad de la vorticidad para obtener el primer resultado. Podemos reescribir (2.115)-(2.117) como

$$3\tau_0 \dot{\tau} + \tau = -3\zeta H - \frac{3\zeta T\tau}{2} \left(\frac{\tau_0 u^a}{\zeta T} \right)_{;a} \quad (2.118)$$

$$\tau_1 h_a^b \dot{q}_b + q_a = -\kappa (T_{,a} + T \dot{u}_a) - \kappa \frac{T^2 q_a}{2} \left(\frac{\tau_1 u^b}{\kappa T^2} \right)_{;b} + \kappa \gamma_1 T \omega_{ab} q^b \quad (2.119)$$

$$\tau_2 h_c^a h_d^b \dot{\pi}^{cd} + \pi^{ab} = -2\eta \sigma^{ab} - 2\eta T \pi^{ab} \left(\frac{\tau_2 u^c}{2\eta T} \right)_{;c} + 2\eta \gamma_2 \pi_c^{<a} \omega^{b>c} \quad (2.120)$$

donde los tiempos de relajación

$$\tau_0 = \zeta \beta_0 \quad (2.121)$$

$$\tau_1 = \kappa T \beta_1 \quad (2.122)$$

$$\tau_2 = 2\eta \beta_2 \quad (2.123)$$

fueron introducidos. A diferencia de las dos propuestas anteriores, la de Israel y Stewart conduce a ecuaciones diferenciales como relaciones constitutivas con la esperanzas de solucionar los problemas de causalidad de Eckart y Landau y Lifshitz. Para entender cómo funciona, consideramos la ecuación que regula el flujo de calor

$$\tau_1 h_a^b \dot{q}_b + q_a = -\kappa (T_{,a} + T \dot{u}_a)$$

En el sistema comoviente obtenemos la ecuación siguiente

$$\tau_1 \frac{d\vec{q}}{dt} + \vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T \quad (2.124)$$

Fíjense que si $\vec{\nabla} T = 0$ en $t = 0$, la ec. (2.124) conduce a una solución $\vec{q}(t) = \vec{q}_0 \exp(-t/\tau_1)$ en lugar de obtener $\vec{q}(t) = 0$ en el caso de Eckart y tenemos la posibilidad de incorporar efectos transitorios en el flujo de calor con un tiempo característico dado por τ_1 . Para verlo, es conveniente ir al límite no relativista y con temperatura suficientemente alta como para que la densidad de energía pueda ser aproximada por

$$\rho = n \left(m + \frac{3}{2} T \right) \quad (2.125)$$

es decir, la densidad de energía es la densidad de partículas por la energía de una partícula. Esta energía es la energía al reposo sumado a la energía térmica que evaluamos usando equipartición. La presión está dada por la ley de gas ideal

$$p = nT$$

Consideramos para simplificar un fluido con aceleración nula, que no expande y sin vorticidad. En este caso la ec. (2.80) se reduce, con la ayuda de (2.125), a

$$\dot{\rho} = \frac{3}{2}n\dot{T} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad (2.126)$$

Si asumimos además que κ y τ son constantes, la divergencia de (2.124) junto con (2.126) implica

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad (2.127)$$

donde $\chi \equiv \frac{2\kappa}{3n}$. En el caso $\tau_1 = 0$ entonces recobramos la ley de propagación de calor de Fourier que es una ecuación parabólica que trae como consecuencia una velocidad de propagación infinita. En el caso de la ec.(2.127), una solución tipo onda plana $T \propto \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ conduce a una ley de dispersión

$$k^2 = \frac{\tau_1 \omega^2}{\chi} + i \frac{\omega}{\chi}$$

y la velocidad de fase es

$$v = \frac{\omega}{\Re(k)} = \left(\frac{2\chi\omega}{\tau_1\omega + \sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}} \right)^{1/2}$$

El límite de frecuencia alta $\tau_1\omega \gg 1$ conduce a la velocidad de los pulsos térmicos, conocidos como segundo sonido, y obtenemos $v \approx \sqrt{\frac{\chi}{\tau_1}}$ que es finito.

2.5 Teoría ultra-local y causalidad

Las teorías de fluidos disipativos relativistas que discutimos son complicadas para analizar porque las ecuaciones diferenciales a las que conducen son complicadas y no conducen de manera obvia a una ecuación de propagación simple de tipo hiperbólica. Los sistemas de ecuaciones diferenciales que son amenos para el análisis matemáticos en este contexto son las ecuaciones hiperbólica de primer orden. Consideremos un sistema de la forma

$$A^i v_{,i} + Bv = 0 \quad (2.128)$$

donde i es un índice espacio-temporal, los A^i y B son $k \times k$ matrices y v es un k -vector. Ahora este sistema (de primer orden) es hiperbólico si todos sus autovalores son reales; cada uno de ellos siendo la velocidad de propagación de alguna pequeña perturbación en el espacio. Estas a su vez se propagan a lo largo de hipersuperficies llamadas características cuya existencia es asegurada por la existencia de k auto valores reales ([71],[72]). Si las matrices A^i y B son simétricas bastará que alguna combinación $A^i v_i$ esté definida (definida negativa si adoptamos nuestra elección de signatura de la métrica) para asegurar que todos los autovalores sean reales (pero algunas podrían estar degeneradas). Un caso habitual sucede cuando esta combinación se reduce a A^0 , siendo el vector v el vector temporal $(1, \vec{0})$. En una teoría relativista se espera que el carácter hiperbólico sea conservado bajo una transformación de Lorentz (propia); en este caso se dice que el sistema es causal. Las matrices A^i y B dependen de variables que describen el sistema pero no de sus derivadas si no el sistema deja de ser de primer orden. Para fijar las ideas, consideremos una teoría descrita por las variables macroscópicas X^A y que este descrita vía las corrientes T_A^a . Estas corrientes dependen de los X^A pero no de sus derivadas. Las ecuaciones de movimiento toman la forma de ley de conservación

$$T_{A;a}^a = I_A$$

En los casos que nos interesan se puede asumir que los términos de pro-

ducción I_A son lineales en las variables que describen el estado del sistema

$$I_A = -V_{AB}X^B$$

con V_{AB} una matriz positiva. Entonces las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\frac{\partial T^a}{\partial X^B} X^B_{;a} = -V_{AB}X^B$$

que es la estructura de la ecuación (2.128). Si volvemos al caso específico de un fluido, el candidato obvio para la corriente T_A es el tensor de energía-momento T^{ab} junto con el 4-vector de inversa de la temperatura β^a en el papel de X^a . Usando $\beta^a = u^a/T$, tenemos

$$\beta_{a;b} = \frac{1}{T} \left\{ -\frac{T_{,b}}{T} u_a + u_{a;b} \right\}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} h^{ac} T \beta_{c;b} &= h^{ac} u_{c;b} \\ &= g^{ac} u_{c;b} \\ &= u^a_{;b} \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} h_a^c h_b^d \left(u_{c;d} + u_{d;c} - \frac{2}{3} h_{cd} u^e_{;e} \right) &= T h_a^c h_b^d \left(h_c^e \beta_{e;d} + h_d^e \beta_{e;c} - \frac{2}{3} h_{cd} h^{ef} \beta_{f;e} \right) \\ &= T \left(h_a^c h_b^d \beta_{c;d} + h_a^c h_b^d \beta_{d;c} - \frac{2}{3} h_{ab} h^{cd} \beta_{c;d} \right) \\ &= T \left(h_a^c h_b^d + h_a^d h_b^c - \frac{2}{3} h_{ab} h^{cd} \right) \beta_{c;d} \\ &\equiv T P_{ab}{}^{cd} \beta_{c;d} \end{aligned}$$

donde introducimos el proyector transversal P^{abcd} . Si miramos por ejemplo la propuesta de Eckart, vemos que (2.95, 2.96, 2.97) se pueden reescribir

$$q_a = -\kappa T \left(\frac{T_{,a}}{T} + T h_a^b \dot{\beta}_b \right)$$

$$\begin{aligned}\tau &= -\zeta T h^{ab} \beta_{a;b} \\ \pi_{ab} &= -\eta T P_{ab}{}^{cd} \beta_{c;d}\end{aligned}$$

Lo que implica que la corriente de energía-momento (2.87) depende de las derivadas de β^a contrariamente a la restricción que demandamos anteriormente para obtener un sistema de primer orden. Para obtener un sistema de primer orden, se aplica el método usual: se define un nuevo tensor $\zeta_{ab} = \beta_{a;b}$. En este caso obtenemos

$$\begin{aligned}\tau &= -T \zeta h^{ab} \zeta_{ab} \\ \pi_{ab} &= -\eta T P_{ab}{}^{cd} \zeta_{cd}\end{aligned}$$

Ahora $\dot{\beta}_b = u^c \beta_{b;c} = T \beta^c \beta_{b;c} = T \beta^c \zeta_{bc}$ y $T = (-\beta^a \beta_a)^{-1/2}$ de manera que

$$T_{,a} = \frac{1}{2} T^3 (\beta^b \beta_b)_{,a} = T^3 \beta^b \zeta_{ba}$$

por lo tanto

$$q_a = -\kappa T^3 (\beta^b \zeta_{ba} + h_a{}^b \beta^c \zeta_{bc})$$

De esta manera, vemos que logramos escribir T^{ab} como una corriente que depende solamente de los campos β^a y ζ^{ab} . Falta solamente ahora introducir otra corriente A^{abc} tal que $A^{abc}{}_{;c} = \beta^{a;b}$. Entonces tendríamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}T^{ab}{}_{;a} &= 0 \\ A^{abc}{}_{;c} &= \zeta^{ab}\end{aligned}$$

No obstante nuestro formalismo no está completo pues habría que tener en cuenta la ecuación de conservación de la corriente de partículas. De hecho, sería más conveniente definir $\zeta_{ab} = \beta_{(a;b)}$ y escribir τ y π_{ab} con él, pero en lugar de seguir este camino, consideraremos ahora el formalismo que realmente nos interesa: la teoría tipo divergencia de Geroch y Lindblom.

2.6 Teoría tipo divergencia

Geroch y Lindblom decidieron tomar la estructura hiperbólica como punto de partida. Como vimos, el formalismo covariante se escribe naturalmente como un conjunto de ecuaciones de conservación. Siguiendo Geroch y Lindblom ([11]), las teorías tipo divergencia son descritas habitualmente en términos de algunas cantidades tensoriales que obedecen leyes de conservación

$$\begin{aligned} T^{ab}{}_{;b} &= 0 \\ N^a{}_{;a} &= 0 \\ A^{abc}{}_{;a} &= I^{bc} \end{aligned}$$

Es de hecho una simple y pequeña generalización de la teoría de fluido relativista propuestas inicialmente por Liu, Muller y Ruggeri ([9]). En el contexto habitual de fluido, T^{ab} es el tensor de energía-momento y N^a es la corriente de partículas o más generalmente una corriente conservada. Entonces sus ecuaciones correspondientes expresan simplemente la conservación de la energía, del momento lineal y de la masa (o en el último caso de otra cantidad física fundamental conservada, por ejemplo la carga). La tercera ecuación describirá la parte disipativa, tal como lo anticipan las consideraciones anteriores. El tensor de energía-momento es simétrico y $A^{abc} = A^{acb}$, $A^{ab}{}_b = 0$ y $I^a{}_a = 0$. La corriente de entropía es ampliada para leerse

$$S^a = \chi^a - \xi_b T^{ab} - \xi N^a - \xi_{bc} A^{abc}$$

Los ξ, ξ^a, ξ^{ab} son los grados de libertad dinámicos. Las relaciones siguiente valen [11]

$$N^a = \frac{\partial \chi^a}{\partial \xi} \quad (2.129)$$

$$T^{ab} = \frac{\partial \chi^a}{\partial \xi_b} \quad (2.130)$$

$$A^{abc} = \frac{\partial \chi^a}{\partial \xi_{bc}} \quad (2.131)$$

La simetría del tensor de energía-momento implica que

$$\chi^a = \frac{\partial \chi}{\partial \xi_a}$$

Por lo tanto todos los tensores fundamentales de la teoría pueden ser obtenidos a partir de un funcional generador χ . La producción de entropía está dada por

$$S^a_{;a} = -I^{bc}\xi_{bc}$$

La producción positiva de entropía está asegurada si demandamos que $I^{bc} = M^{(bc)(de)}\xi_{de}$, donde M está definido negativo.

Los fluidos ideales son un ejemplo importante aunque un poco trivial. Para obtener la hidrodinámica ideal dentro del armazón de las TTD, consideré un funcional generador $\chi_p = \chi_p(\xi, \mu)$ donde $\mu \equiv \sqrt{-\xi_a \xi^a}$. La derivación en cadena conduce a

$$\chi^a_p = -\frac{\xi^a}{\mu} \frac{\partial \chi_p}{\partial \mu}$$

$$T^a_p = -\frac{g^{ab}}{\mu} \frac{\partial \chi_p}{\partial \mu} + \frac{\xi^a \xi^b}{\mu^2} \left[-\frac{1}{\mu} \frac{\partial \chi_p}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 \chi_p}{\partial \mu^2} \right]$$

Una identificación simple con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto $T^{ab} = g^{ab}p + u^a u^b [p + \rho]$ implica las identificaciones siguientes

$$p = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \chi_p}{\partial \mu} \quad (2.132)$$

$$\rho = \frac{\partial^2 \chi_p}{\partial \mu^2}$$

Nótese que las corrientes conservadas pueden ser escritas de manera bastante general como

$$N^a = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\xi^a}{\mu} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right) = \xi^a \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (2.133)$$

Otro ejemplo menos trivial y importante a la vez históricamente y con-

ceptualmente es la teoría de Eckart que puede ser deducida usando [11]

$$\chi_E = \chi_p + \frac{1}{2} \zeta_{ab} u^a u^b$$

Haciendo una transformación de Legendre hacia las nuevas variables ξ, ξ^a, ξ^{ab} se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\frac{\partial^2 \chi^a}{\partial \xi_A \partial \xi_B} \xi_{B;a} = I^A$$

donde ξ_A figura para la colección entera de variables (ξ, ξ_a, ξ_{ab}) y similarmente $I^A \equiv (0, 0, I^{ab})$ representa las fuentes disipativas; el índices A pues cubren 14 dimensiones en el caso básico de una sola corriente N^a además del tensor de energía-momento. Este sistema de ecuaciones diferenciales es simétrico pues

$$\frac{\partial^2 \chi^a}{\partial \xi_A \partial \xi_B} = \frac{\partial^2 \chi^a}{\partial \xi_B \partial \xi_A}$$

En nuestro contexto, se decidirá que el sistema es hiperbólico si

$$\frac{\partial^2 \chi^a}{\partial \xi_A \partial \xi_B} v_a$$

está definido negativo para algún vector temporal v_a y la teoría es causal si esto es verdadero para cualquier vector temporal v_a .

Capítulo 3

Teorías relativistas de campos y fluidos interactuantes.

Como una de las motivaciones principales del trabajo es la aplicación al universo temprano, es importante poder describir un campo escalar dentro del marco de la teoría tipo divergencia. Para poder cumplir bien con nuestros objetivos, la descripción deber ser bastante general, es decir poder tratar un campo masivo o no con un potencial genérico. Una vez lograda dicha descripción, se deberá intentar describir el sistema del campo clásico y de su fluctuaciones, ya sean térmicas ó cuánticas, como un solo fluido. Finalmente se explorarán algunas consecuencias tales como el apartamiento del equilibrio o restricciones a la teoría provenientes del principio de causalidad.

3.1 Teoría tipo divergencia del campo escalar de Klein-Gordon

Nuestro primero objetivo será incorporar un campo escalar en el marco de las teorías tipo divergencia. Como una de nuestras primeras preocupaciones es aplicar nuestro formalismo al universo temprano, debemos tener la libertad de poder utilizar un potencial no trivial (y incluso no renormalizable [63],[64],[65]). La teoría de Klein-Gordon puede ser vista como una ley de conservación para una corriente $\phi_{,a}$ más precisamente $\nabla^a \phi_{,a} = V'(\phi)$. El

tensor de energía-momento está definido también en términos de $\phi_{,a}$ pues $T_{ab} = \phi_{,a}\phi_{,b} - g_{ab} \left(\frac{1}{2}\phi_{,c}\phi^{,c} + V(\phi) \right)$. Postulamos entonces que nuestra teoría está definida por dos corrientes, el tensor de energía-momento T_{ab} y una corriente vectorial j^a con ecuaciones dinámicas

$$T^a{}_{;b} = 0 \quad (3.1)$$

$$j^a{}_{;a} = R[x] \quad (3.2)$$

y la relación constitutiva

$$T^{ab} = j^a j^b - g^{ab} \left(\frac{1}{2} j_c j^c + T[R] \right) \quad (3.3)$$

El campo escalar ϕ es introducido escribiendo la relación funcional entre R y T paramétricamente como $R = V'(\phi)$, $T = V(\phi)$. Consideramos ahora la ley de conservación

$$T^a{}_{;b} = g^{ab} (j_{b,c} - j_{c,b}) j^c + V' (j^a - \phi^{,a}) = 0 \quad (3.4)$$

Por lo tanto si

$$j_{b,c} - j_{c,b} = 0 \quad (3.5)$$

entonces $j^a = \phi^{,a}$ y recaemos sobre la teoría usual de Klein-Gordon. Hay que notar que (3.5) es un vínculo. Definiendo $M_{ab} \equiv j_{a,b} - j_{b,a}$, obtenemos la identidad siguiente

$$j^c M_{ab;c} = V' M_{ba} + \frac{V''}{V'} (j_b M_{ac} - j_a M_{bc}) + j^c{}_{;a} M_{bc} - j^c{}_{;b} M_{ac} \quad (3.6)$$

Por lo tanto, si (3.5) es verdad inicialmente, será verdad todo el tiempo. Entonces, el conjunto de ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.4) representa una teoría más general que Klein-Gordon reduciendo a esta última si el vínculo (3.5) se impone inicialmente.

El paso siguiente es moldear esta teoría dentro del marco de las TTD. Como tenemos dos corrientes, introduciremos dos multiplicadores de Lagrange $\xi, \beta_{(c)}^a$ como grados de libertad dinámico. Definimos $\beta_{(c)} \equiv \sqrt{-\beta_{(c)}^a \beta_{(c)a}}$. La

elección de la letra β no es casual pues $\beta_{(c)}$ será la inversa de la temperatura (más precisamente $\beta_{(c)} = 1/k_B T$). Siguiendo el formalismo de TTD, introducimos la corriente de entropía S^a

$$S^a = \chi^a - \beta_{(c)b} T^{ab} - \xi j^a$$

y el potencial generador χ^a , este último dado por consiguiente por

$$\chi^a = \frac{\partial \chi}{\partial \beta_{(c)a}}$$

De estas definiciones se deduce que

$$\chi^a = \beta_{(c)}^a p$$

con p la presión dada por

$$p = -\frac{1}{\beta_{(c)}} \frac{\partial \chi_c}{\partial \beta_{(c)}} \quad (3.7)$$

y

$$j^a = \beta_{(c)}^a \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (3.8)$$

$$T^{ab} = p g^{ab} - \beta_{(c)}^a \beta_{(c)}^b \frac{1}{\beta_{(c)}} \frac{\partial p}{\partial \beta_{(c)}} \quad (3.9)$$

$$= p g^{ab} - j^a j^b \frac{1}{\beta_{(c)}} \frac{\partial p / \partial \beta_{(c)}}{(\partial p / \partial \xi)^2} \quad (3.10)$$

Comparando con la ecuación (3.3), obtenemos

$$\frac{1}{\beta_{(c)}} \frac{\partial p / \partial \beta_{(c)}}{(\partial p / \partial \xi)^2} = -1 \quad (3.11)$$

$$p = -\frac{1}{2} j_c j^c - T \quad (3.12)$$

Ec. (3.11) se puede reescribir

$$-\frac{1}{\beta_{(c)}} \frac{\partial p}{\partial \beta_{(c)}} \Big|_{\xi} = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_{\beta_{(c)}} \right)^2$$

una ecuación diferencial en las variables $\xi, \beta_{(c)}$ con solución

$$p = \frac{\xi^2}{2\beta_{(c)}^2} + \Omega \quad (3.13)$$

donde Ω es independiente de ξ y $\beta_{(c)}$ pero puede depender de las coordenadas espacio-temporales. De hecho, usando ec. (3.8), vemos que

$$j^a = \beta_{(c)}^a \frac{\xi}{\beta_{(c)}^2} \quad (3.14)$$

y reemplazando en (3.12) y usando (3.13), obtenemos

$$\Omega = -V(\phi) \quad (3.15)$$

Si contrajimos ambos lados de (3.4) con j_a obtenemos

$$j^b (j_{b,c} - j_{c,b}) j^c + V' j_a (j^a - \phi'^a) = 0$$

es decir que $j^2 - j^a \phi_{,a} = 0$ incluso cuando el vínculo (3.5) no está impuesto. Por (3.14), tenemos $j^2 = -\left(\xi/\beta_{(c)}\right)^2$, de manera que

$$-\xi = \beta_{(c)}^a \phi_{,a} \quad (3.16)$$

Finalmente, calcularemos el potencial escalar generador usando (3.7) y (3.13) para obtener

$$\chi_{(c)} = -\frac{1}{2} \xi^2 \ln \beta_{(c)} + \frac{1}{4} V(\phi) \beta_{(c)}^2 \quad (3.17)$$

Es instructivo calcular S^a .

$$\begin{aligned}
S^a &= \chi^a - \beta_{(c)b} T^{ab} - \xi j^a \\
&= \beta_{(c)}^a p + \beta_{(c)b} g^{ab} V - \frac{1}{2} \beta_{(c)b} \frac{g^{ab} \xi^2}{\beta_{(c)}^2} - \beta_{(c)b} \frac{\beta_{(c)}^a \beta_{(c)}^b}{\beta_{(c)}^4} \xi^2 - \xi \beta_{(c)}^a \frac{\xi}{\beta_{(c)}^2} \\
&= \beta_{(c)}^a \frac{\xi^2}{2\beta_{(c)}^2} - \beta_{(c)}^a V + \beta_{(c)b} g^{ab} V - \frac{1}{2} \beta_{(c)}^a \frac{\xi^2}{\beta_{(c)}^2} + \frac{\beta_{(c)}^a}{\beta_{(c)}^2} \xi^2 - \xi \beta_{(c)}^a \frac{\xi}{\beta_{(c)}^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Podemos verificar que la creación de entropía es nula

$$\begin{aligned}
S^a_{;a} &= \chi^a_{;a} - \beta_{(c)b;a} T^{ab} - \beta_{(c)b} T^{ab}_{;a} - \xi_{,a} j^a - \xi j^a_{;a} \\
&= \frac{\partial \chi^a}{\partial \xi} \xi_{,a} + \frac{\partial \chi^a}{\partial \xi_{(c)b}} \xi_{(c)b;a} + \frac{\partial \chi^a}{\partial \phi} \phi_{,a} \\
&\quad - \beta_{(c)b;a} T^{ab} - \xi_{,a} j^a - \xi V' \\
&= \left(\frac{\partial \chi^a}{\partial \xi} - j^a \right) \xi_{,a} + \left(\frac{\partial \chi^a}{\partial \xi_{(c)b}} - T^{ab} \right) \beta_{(c)b;a} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\beta_{(c)}^a V \right) \phi_{,a} - \xi V' \\
&= 0
\end{aligned}$$

usando (3.16).

Por lo tanto, la noción de temperatura no estará bien definida en esta teoría. Si consideramos (3.16), y lo calculamos en el estado al reposo donde $\beta_{(c)}^a = (\beta_{(c)}, \vec{0})$, obtenemos $\dot{\phi} = -\xi/\beta_{(c)}$. En esta teoría, solamente la razón entre ξ y $\beta_{(c)}$ tendrá sentido.

3.2 Teoría tipo divergencia de campo y fluido interactuantes

Nuestro próximo objetivo es describir la interacción entre el campo de Klein-Gordon y otra forma de materia en el contexto de TTD. Introduciremos un fluido perfecto, descrito por una temperatura inversa $\beta_{(f)}$ y un tensor de energía-momento T_f^{ab} que asumiremos puede calcularse usando un funcional generado $\chi_{(f)}^a = \partial \chi_{(f)} / \partial \beta_{(f)a}$. Este fluido representará las fluctuaciones tér-

micas o cuánticas. En este capítulo, su forma específica no importa demasiado. Cuando necesitemos una forma explícita supondremos que se trata de un gas de fotones, ver ec. (3.93). La teoría con interacciones será descrita por las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}
 j^a{}_{;a} &= R + \Delta \\
 T_c^{ab}{}_{;b} &= I^a \\
 T_f^{ab}{}_{;b} &= -I^a \\
 \beta_{(c)}^a \phi_{,a} &= -\xi
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Donde j^a y T_c^{ab} son la corriente y el tensor de energía-momento para el campo del inflatón y agregamos la definición (3.16) que, a diferencia de la situación en la teoría no interactuante, es ahora independiente de las otras ecuaciones. Buscaremos un generador funcional de la forma

$$\chi^a = \chi_c^a + \chi_f^a + \Xi^a \tag{3.19}$$

El sistema total está generado no solamente por la suma de cada potencial termodinámico sino también vía un tercer potencial que incluye la interacción entre el fluido y el campo. Cada tensor de energía-momento estará dado por:

$$\begin{aligned}
 T_c^{ab} &= \frac{\partial \chi_c^a}{\partial \beta_{(c)b}} + \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_{(c)b}} \\
 T_f^{ab} &= \frac{\partial \chi_f^a}{\partial \beta_{(f)b}} + \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_{(f)b}}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Introduciendo las variables siguientes :

$$\begin{aligned}
 \beta^a &= \frac{1}{2} (\beta_{(c)}^a + \beta_{(f)}^a) \\
 B^a &= \beta_{(c)}^a - \beta_{(f)}^a
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_{(c)b}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_b} + \frac{\partial \Xi^a}{\partial B_b} \\ \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_{(f)b}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_b} - \frac{\partial \Xi^a}{\partial B_b}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Entonces

$$T_c^{ab} + T_f^{ab} = \frac{\partial \chi_c^a}{\partial \beta_{(c)b}} + \frac{\partial \chi_f^a}{\partial \beta_{(f)b}} + \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_b} \quad (3.23)$$

Nótase que el verdadero sistema físico es el que está descrito por el tensor de energía-momento total dado por la ecuación (3.23). Cualquier separación en dos fluidos estará marcada por la arbitrariedad, un hecho que quedará claro más adelante. Pediremos que el tensor de energía-momento total sea simétrico, por lo tanto

$$\Xi^a = \frac{\partial \Xi}{\partial \beta_a} \quad (3.24)$$

Ξ dependerá en general de escalares como le demanda la invariancia de Lorentz ; es decir $\Xi = \Xi(\xi, u, v, w, \phi)$ donde

$$\begin{aligned}u &= -\beta_a \beta^a \\ v &= -B_a B^a \\ w &= -\beta_a B^a\end{aligned}\quad (3.25)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta_a} &= -2\beta^a \frac{\partial}{\partial u} - B^a \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial B_a} &= -2B^a \frac{\partial}{\partial v} - \beta^a \frac{\partial}{\partial w}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Si consideren las ecuaciones de movimiento (3.18), observe que incluso si el término de fuente I^b es nulo , el tensor de energía-momento para el campo y el fluido no recae automáticamente sobre su antigua forma. Como lo hemos dicho, como el único tensor de energía-momento "verdadero" es el total, es conveniente e instructivo reescribir las ecuaciones de movimiento de

una forma ligeramente distinta. Definiendo

$$\begin{aligned} T_+^{ab} &= T_c^{ab} + T_f^{ab} \\ T_-^{ab} &= T_c^{ab} - T_f^{ab} \end{aligned} \quad (3.27)$$

y recordando que

$$T_+^{ab} = \frac{\partial \chi^a}{\partial \beta_b} \quad (3.28)$$

pues $\partial \chi_q^a / \partial \beta_{(c)b} = 0 = \partial \chi_c^a / \partial \beta_{(q)b}$. Además

$$T_-^{ab} = 2 \frac{\partial \chi^a}{\partial B_b} \quad (3.29)$$

Las identidades siguientes siguen directamente

$$\Xi^a = -2\beta^a \frac{\partial \Xi}{\partial u} - B^a \frac{\partial \Xi}{\partial w} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_b} = -2g^{ab} \frac{\partial \Xi}{\partial u} + 4\beta^a \beta^b \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u^2} + B^a B^b \frac{\partial^2 \Xi}{\partial w^2} + 2(\beta^a B^b + B^a \beta^b) \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u \partial w} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \Xi^a}{\partial B_b} = -g^{ab} \frac{\partial \Xi}{\partial w} + 2\beta^a \beta^b \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u \partial w} + 2B^a B^b \frac{\partial^2 \Xi}{\partial v \partial w} + 4\beta^a B^b \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u \partial v} + B^a \beta^b \frac{\partial^2 \Xi}{\partial w^2} \quad (3.32)$$

Es interesante calcular el tensor de energía-momento total, ponerlo explícitamente en la forma (2.79) y obtener cada término en función del potencial escalar. Elegiremos una foliación espacial determinada por β^a . Definiremos

$$\tilde{q}^a \equiv B^a + \beta^a \frac{(B^b \beta_b)}{\beta^2}$$

y obtenemos

$$T^{ab} = (p + \Pi) h^{ab} + \rho_T \frac{\beta^a \beta^b}{\beta^2} + q^a \frac{\beta^b}{\beta} + \frac{\beta^a}{\beta} q^b + \pi^{ab}$$

con

$$p = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial (\chi_{(c)} + \chi_{(f)})}{\partial \beta}$$

$$\rho_T = \frac{\partial^2 (\chi_{(c)} + \chi_{(f)})}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial \Xi}{\partial u} + 4\beta^2 \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u^2} + \frac{B^a \beta_a}{\beta} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial w^2} - 4 (B^a \beta_a) \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u \partial w}$$

$$q^a = \left(2\beta \frac{\partial^2 \Xi}{\partial u \partial w} - \frac{B^b \beta_b}{\beta} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial w^2} \right) \bar{q}^a \quad (3.33)$$

$$\pi^{ab} = \frac{\partial^2 \Xi}{\partial w^2} \left(\bar{q}^a \bar{q}^b - \frac{1}{3} B^c B_c h^{ab} \right) \quad (3.34)$$

$$\Pi = 2 \frac{\partial \Xi}{\partial u} + \frac{1}{3} B^a B_a \frac{\partial^2 \Xi}{\partial w^2} \quad (3.35)$$

Veamos que los términos disipativos (3.33), (3.34) y (3.35) son generados por el potencial de interacción Ξ . Calculemos la tasa de producción de la entropía. Usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_b} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{(c)b}} + \frac{\partial}{\partial \beta_{(q)b}} \\ \frac{\partial}{\partial B_b} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_{(c)b}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_{(q)b}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

encontramos

$$\nabla_a S^a = \frac{\partial \Xi^a}{\partial \phi} \nabla_a \phi - B_b I^b - \xi \Delta \quad (3.37)$$

donde usamos $\beta_{(c)}^a \phi_{,a} + \xi = 0$. Por simplicidad pediremos que Ξ sea independiente de ϕ , de manera que la producción de entropía se reduce a

$$\nabla_a S^a = -B_b I^b - \xi \Delta \quad (3.38)$$

La segunda ley de la termodinámica impone que $\nabla_a S^a > 0$. Esto significa que I^b y Δ deben desaparecer cuando B^b y ξ van a cero. En este límite, Δ , que es un escalar, debe tomar la forma $\Delta = A\xi + Bw$ (v siendo de orden más alto); la invariancia de Lorentz demanda que $I^b = -(C\xi + Dw)\beta^b - EB^b$.

Por lo tanto $\nabla_a S^a = -A\xi^2 - (B + C)w\xi - Dw^2 - Ev$, y debemos tener $A, D \leq 0$, $E \leq 0$ y $AD \geq (B + C)^2/4$. De manera equivalente, se puede utilizar la parametrización $A = M^{\xi\xi}$, $B\beta^a = 2(1 - \kappa)M^{\xi a}$, $C\beta^b = 2\kappa M^{\xi b}$ y $D\beta^a\beta^b + Eg^{ab} = M^{ab}$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv M^{\xi\xi}\xi + 2B_a(1 - \kappa)M^{\xi a} \\ I^b &\equiv 2\kappa\xi M^{\xi b} + B_a M^{ab}\end{aligned}\tag{3.39}$$

3.3 Análisis a primer orden fuera del equilibrio en un modelo homogéneo simplificado

Volvemos ahora a las ecuaciones de movimiento para estudiar pequeñas desviaciones del equilibrio. El requerimiento que el equilibrio sea isotrópico en algún sistema al reposo implica que, al equilibrio, los dos vectores $\beta_{(c)}^a$ y $\beta_{(f)}^a$ deben ser paralelos. Por consiguiente, podemos escribir $\beta_{(c)}^a = \beta_c u^a$ y $\beta_{(f)}^a = \beta_f u^a$, con un vector común unitario u^a . Restringiremosnos al caso homogéneo. Se observa que $T_{c;b}^{\mu b} = T_{f;b}^{\mu b} = 0$ idénticamente para $\mu \neq 0$, de manera que hay solamente cuatro ecuaciones no triviales incluyendo la ec. (3.16).

Al equilibrio, debemos tener $\xi = \Delta = I^a = R = 0$. Definiendo $\phi = 0$ al equilibrio, concluyamos $(\xi_{eq}, \beta_{eq}, B_{eq}, \phi_{eq}) = (0, \beta_0, 0, 0)$. Podemos analizar ahora las desviaciones de primer orden fuera del equilibrio, es decir

$$\begin{aligned}\xi &= \delta\xi \\ \phi &= \delta\phi \\ \beta &= \beta_{eq} + \delta\beta \\ B &= \delta B\end{aligned}\tag{3.40}$$

Expandiendo

$$\Xi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\beta, \xi) B^{n+2}\tag{3.41}$$

Ξ es reducido a esta forma demandando que al equilibrio, donde $\beta_c = \beta_f$, retornemos a los T^{ab} y j^a iniciales. Δ y I^b están dados por la ec. (3.39), donde todos los elementos de la matriz son evaluados a sus valores de equilibrio $\xi_{eq} = B_{eq}^a = 0$, $\beta_{eq}^a = \beta_0^{eq}$ y $\phi_0 = 0$. Además, definiremos $m^2 = V''(0)$, de manera que a primer orden

$$R = m^2 \delta\phi \quad (3.42)$$

En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} j^a{}_{;a} &= \frac{1}{\beta_0} (\delta\xi)_{,t} = M_0^{\xi\xi} \delta\xi + 2(1-\kappa)M_0^{\xi 0} \delta B + m^2 \delta\phi \\ T_{c;b}^{0b} &= -\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} (\delta B)_{,t} = 2\kappa M_0^{\xi 0} \delta\xi + M_0^{00} \delta B \\ T_{f;b}^{0b} &= \rho'_f (\delta\beta)_{,t} + \left(\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} - \frac{1}{2} \rho'_f \right) (\delta B)_{,t} = -2\kappa M_0^{\xi 0} \delta\xi - M_0^{00} \delta B \\ \beta_0 (\delta\phi)_{,t} &= -\delta\xi \end{aligned} \quad (3.43)$$

Podemos volver a las coordenadas antiguas $\delta\beta_c$ y $\delta\beta_f$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_0} (\delta\xi)_{,t} &= M_0^{\xi\xi} \delta\xi + 2(1-\kappa)M_0^{\xi 0} \delta\beta_c + 2(1-\kappa)M_0^{\xi 0} \delta\beta_f + m^2 \delta\phi \\ -\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} (\delta\beta_c)_{,t} + \frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} (\delta\beta_f)_{,t} &= 2\kappa M_0^{\xi 0} \delta\xi + M_0^{00} \delta\beta_c - M_0^{00} \delta\beta_f \\ \left(\frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} \right) (\delta\beta_c)_{,t} + \left(\rho'_f - \frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} \right) (\delta\beta_f)_{,t} &= -2\kappa M_0^{\xi 0} \delta\xi - M_0^{00} \delta\beta_c + M_0^{00} \delta\beta_f \\ \beta_0 (\delta\phi)_{,t} &= -\delta\xi \end{aligned} \quad (3.44)$$

La ventaja de hacerlo es que podemos sumar los términos medios para obtener

$$\rho'_f (\delta\beta_f)_{,t} = 0 \quad (3.45)$$

Es decir

$$\delta\beta_f = \text{constante} \quad (3.46)$$

Lo que deja

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_0} (\delta\xi)_{,t} &= M_0^{\xi\xi} \delta\xi + 2(1-\kappa)M_0^{\xi 0} \delta\beta_c + m^2 \delta\phi \\
-\frac{\partial^3 \Xi}{\partial\beta\partial B^2} (\delta\beta_c)_{,t} &= 2\kappa M_0^{\xi 0} \delta\xi + M_0^{00} \delta\beta_c \\
\beta_0 (\delta\phi)_{,t} &= -\delta\xi
\end{aligned} \tag{3.47}$$

o, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} (\beta_0)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^3 \Xi}{\partial\beta\partial B^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\beta_c \\ \delta\phi \end{pmatrix}_{,t} = \begin{pmatrix} M_0^{\xi\xi} & 2(1-\kappa)M_0^{\xi 0} & m^2 \\ 2\kappa M_0^{\xi 0} & M_0^{00} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\xi \\ \delta\beta_c \\ \delta\phi \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Considerando soluciones de la forma $\exp(-\gamma t)$, obtendremos una solución si

$$\begin{vmatrix} (-\gamma\beta_0^{-1} - M_0^{\xi\xi}) & -2(1-\kappa)M_0^{\xi 0} & -m^2 \\ -2\kappa M_0^{\xi 0} & (\gamma\frac{\partial^3 \Xi}{\partial\beta\partial B^2} - M_0^{00}) & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma\beta_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.49}$$

Para obtener una notación menos complicada, escribiremos

$$\begin{aligned}
M_0^{\xi\xi} &= \varepsilon_1 = A \\
\frac{\partial^3 \Xi}{\partial\beta\partial B^2} &= X \\
M_0^{\xi 0} &= \varepsilon_2 = (B + C) \frac{\beta^0}{2} \\
M_0^{00} &= \varepsilon_3 = D\beta_0^2 + E
\end{aligned} \tag{3.50}$$

La notación ha sido elegida para enfatizar cuáles cantidades son pequeñas y cuáles no. Explícitamente los ε_i son muy pequeños pero X no lo es. Por lo tanto

$$\begin{vmatrix} (-\gamma\beta_0^{-1} - \varepsilon_1) & -2(1-\kappa)\varepsilon_2 & -m^2 \\ -2\kappa\varepsilon_2 & (\gamma X - \varepsilon_3) & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma\beta_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.51}$$

Usando la segunda columna para desarrollar el determinante se tiene

$$4\kappa(1-\kappa)\gamma\beta_0\varepsilon_2^2 + X\beta_0\gamma^2\varepsilon_1 - \beta_0\gamma\varepsilon_1\varepsilon_3 + X\gamma(\gamma^2 + m^2) - \varepsilon_3(\gamma^2 + m^2) = 0 \quad (3.52)$$

Las soluciones a orden cero son $\gamma = \pm im$ y $\gamma = 0$. Al primer orden, la ecuación se reduce a

$$X\beta_0\gamma^2\varepsilon_1 + X\gamma(\gamma^2 + m^2) - \varepsilon_3(\gamma^2 + m^2) = 0 \quad (3.53)$$

Escribiendo primero $\gamma = \pm im + \delta$ obtenemos

$$\delta = -\frac{\beta_0\varepsilon_1}{2} \quad (3.54)$$

y en el caso $\gamma = \delta$ tenemos

$$\delta = \frac{\varepsilon_3}{X} \quad (3.55)$$

es decir

$$\begin{aligned} \gamma &= \pm im - \frac{\beta_0\varepsilon_1}{2} \\ \gamma &= \frac{\varepsilon_3}{X} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nótese que $\varepsilon_1 < 0$ y $\varepsilon_3 < 0$. Como $\beta_0 > 0$, entonces las dos primeras columnas correspondiente a modos oscilatorios ganan una componente de decaimiento. La otra solución estará amortiguada si

$$X \equiv \frac{\partial^3 \Xi}{\partial \beta \partial B^2} < 0 \quad (3.57)$$

En este caso el sistema será causal si la matriz $M^{0AB}v$ es definido negativo (donde $v = v^0 > 0$ y $v_0 = -v^0$, pues es la componente temporal de un

cuadrivector orientado hacia el futuro) y donde

$$M^{0AB}v = \begin{pmatrix} -v\beta_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & v\frac{\partial^3\Xi}{\partial\beta\partial B^2} & 0 \\ 0 & 0 & -v\beta_0 \end{pmatrix}$$

Obviamente la matriz es definida negativa si

$$\begin{aligned} \beta_0 &> 0 \\ \frac{\partial^3\Xi}{\partial\beta\partial B^2} &< 0 \end{aligned}$$

Verificamos que las condiciones de causalidad implican la estabilidad de las soluciones al equilibrio. Eso está en acuerdo con los hallazgos de Hiscock y Lindblom en el contexto del formalismo de Israel y Stewart[67].

Yendo un orden más encontramos

$$\gamma = \pm i \left\{ m - \frac{\beta_0}{2m} \left[\frac{1}{4}\beta_0\varepsilon_1^2 - \frac{4\kappa(1-\kappa)}{X}\varepsilon_2^2 \right] \right\} - \frac{\beta_0\varepsilon_1}{2} \quad (3.58)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_3}{X} \quad (3.59)$$

es decir, la corrección a la tercer solución es al menos de tercer orden y el término de segundo orden modifica la frecuencia de las oscilaciones en el caso de las otras dos soluciones.

Si volvemos a mirar a la ecuación de movimiento linealizada para $\delta\phi$, se obtiene

$$-(\delta\phi)_{,tt} = -M_0^{\xi\xi}\beta_0(\delta\phi)_{,t} + 2(1-\kappa)M_0^{\xi 0}\delta\beta_c + m^2\delta\phi \quad (3.60)$$

en el caso más simple $M_0^{\xi 0} = 0$, eso es la ecuación del telegrafista con un término de amortiguamiento $\Gamma\dot{\phi}$, donde $\Gamma = |M_0^{\xi\xi}|\beta_0$. Es importante realizar, no obstante, que esa identificación válida solamente al orden lineal fuera del equilibrio. En general, Γ no será constante sino una función de las variables dinámicas β_f y β_c , y por lo tanto dependerá de la historia del sistema. También observamos que cuando $M_0^{\xi 0} = 0$, se tiene $\beta_{c,t} = 0$ al

primer orden.

3.4 Un modelo simple de interacción campo-fluido.

En esta sección, investigaremos la más simple TTD con interacción entre fluido y campo. Para hacer las cosas simples restringiremos la forma funcional de Ξ de la manera siguiente

$$\Xi = F(u)v + G(u)w^2 \quad (3.61)$$

y investigaremos que restricciones podemos esperar que imponga la causalidad sobre F y G . Haciendo Ξ independiente de ξ , podemos estar seguros que la corriente j^a preserva su forma en la teoría con interacción (ver Ecs.(2.129) y (3.19)). Supondremos que Ξ es independiente del campo escalar ϕ , y que es cuadrático en la variable relacionada con la diferencia de temperatura B^a , de tal manera que las correcciones al tensor de energía-momento desaparecen en un estado de equilibrio. Observe que:

$$\Xi^a = -2\beta^a (F'v + G'w^2) - 2B^a Gw$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_b} &= 4\beta^a \beta^b (F''v + G''w^2) - 2g^{ab} (F'v + G'w^2) \\ &\quad + 4(\beta^a B^b + B^a \beta^b) G'w + 2B^a B^b G \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Xi^a}{\partial B_b} = 4\beta^a \beta^b G'w - 2g^{ab} Gw + 4\beta^a B^b F' + 2B^a \beta^b G \quad (3.62)$$

Al equilibrio

$$\frac{\partial^2 \Xi^a}{\partial \beta_c \partial \beta_b} = \frac{\partial^2 \Xi^a}{\partial B_c \partial \beta_b} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \Xi^a}{\partial B_c \partial B_b} = -4\beta_{(eq)}^a \beta_{(eq)}^b \beta_{(eq)}^c G' + 2 \left(g^{ab} \beta_{(eq)}^c + g^{ac} \beta_{(eq)}^b \right) G + 4\beta_{(eq)}^a g^{bc} F' \quad (3.64)$$

Causalidad demanda que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta_{(eq)}^a v_a}{\beta_{(c)}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \chi_{(c)}^a}{\partial \beta_c \partial \beta_b} v_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial (\chi_{(f)}^a + \Xi^a)}{\partial B_c \partial B_b} v_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{(eq)}^a v_a \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

debe ser definido negativo para cualquier vector temporal orientado hacia el futuro v^a . Como $\chi_{(f)}^a$ representa un fluido perfecto, obtenemos las condiciones de causalidad bajo las condiciones usuales [11]. Solamente queda pedir que $\frac{\partial \Xi^a}{\partial B_c \partial B_b} v_a$ sea definido negativo para si mismo. Específicamente queremos saber si

$$\frac{\partial \Xi^a}{\partial B_c \partial B_b} v_a = 4\beta_{(eq)}^a v_a \left(-\beta_{(eq)}^b \beta_{(eq)}^c G' + g^{bc} F' \right) + 2 \left(v^b \beta_{(eq)}^c + v^c \beta_{(eq)}^b \right) G \quad (3.66)$$

está definido negativo, o equivalentemente si $L_b L_c \frac{\partial (\Xi^a)}{\partial B_c \partial B_b} v_a < 0$ para cualquier L_a . Para demostrar esto descomponemos L_b en su partes longitudinal y transversa relativa a $\beta_{(eq)b}$:

$$L_b = l \left(\frac{\beta_{(eq)b}}{u} \right) + R_b \quad R^b \beta_{(eq)b} = 0 \quad (3.67)$$

Es simple derivar el siguiente resultado

$$4\beta_{(eq)}^a v_a \left(-G' - \frac{(F' + G)}{u} \right) l^2 + 4\beta_{(eq)}^a v_a R_b R^b F' - 4R_b v^b G l \quad (3.68)$$

Ya podemos extraer alguna información. Tomando $l = 0$ obtenemos

$$\beta_{(eq)}^a v_a R_b R^b F' < 0 \quad (3.69)$$

que implica que $F' > 0$ pues $\beta_{(eq)}^a v_a < 0$ y $R_b R^b > 0$. También, tomando $R_b = 0$ obtenemos

$$\beta_{(eq)}^a v_a \left(-G' - \frac{(F' + G)}{u} \right) l^2 < 0 \quad (3.70)$$

este tiempo implica que $\left(-G' - \frac{(F'+G)}{u} \right) > 0$. Para obtener más información escribiremos

$$v^b = \lambda \beta_{(eq)}^b + \omega^b \quad \beta_{(eq) b} \omega^b = 0 \quad (3.71)$$

y descompondremos el vector espacial R_b en su parte longitudinal y transversal $a\omega^b$:

$$R^b = \eta \omega^b + t^b \quad t_b \beta_{(eq)}^b = 0 = \omega_b t^b \quad (3.72)$$

Entonces $R_b v^b = \eta \omega_b \omega^b$ y, reemplazando (3.66), obtenemos, después de dividir por $\beta_{(eq)}^a v_a < 0$:

$$\left(-G' - \frac{(F' + G)}{u} \right) l^2 - \frac{\omega_b \omega^b}{\xi^a v_a} G \eta l + \left(\eta^2 \omega_b \omega^b + t_b t^b \right) F' \quad (3.73)$$

que debería estar ahora definida positiva para que (3.66) esté definida negativa. Como $t_b t^b F' > 0$ es suficiente demandar que

$$\left(-G' - \frac{(F' + G)}{u} \right) l^2 - \frac{\omega_b \omega^b}{\beta_{(eq)}^a v_a} G \eta l + \eta^2 \omega_b \omega^b F' > 0 \quad (3.74)$$

Es una forma cuadrática en l y η y estamos pidiendo pues que la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} \left(-G' - \frac{(F'+G)}{u} \right) & -\frac{\omega_b \omega^b}{2\beta_{(eq)}^a v_a} G \\ -\frac{\omega_b \omega^b}{2\beta_{(eq)}^a v_a} G & \omega_b \omega^b F' \end{array} \right) \quad (3.75)$$

sea definida positiva. Una consecuencia es que su elemento diagonal deben ser positivo, un resultado que ya habíamos deducido. Ahora, como la matriz es real y simétrica sabemos que sus auto valores son reales. Como sus ele-

mentos diagonal son positivos es suficiente comprobar que su determinante es positivo. El determinante está dado por

$$\omega_b \omega^b \left[\left(-G' - \frac{(F' + G)}{u} \right) F' - \frac{\omega_b \omega^b}{4 (\beta_{(eq)}^a v_a)^2} G^2 \right] > 0 \quad (3.76)$$

Esta condición puede ser simplificada considerando que $v_a v^a = \lambda^2 \beta_{(eq) a} \beta_{(eq)}^a + \omega_a \omega^a < 0$ es decir, usando $\beta_{(eq) a} \beta_{(eq)}^a = -u$

$$\omega_a \omega^a < \lambda^2 u \quad (3.77)$$

También $\beta_{(eq)}^a v_a = -\lambda u$. Entonces

$$\frac{\omega_a \omega^a}{(\beta_{(eq)}^a v_a)^2} = \frac{\omega_a \omega^a}{\lambda^2 \mu^4} < \frac{1}{u} \quad (3.78)$$

Entonces si

$$\left(-G' - \frac{(F' + G)}{u} \right) F' > \frac{G^2}{4} \frac{1}{u} \quad (3.79)$$

la condición (3.76) se cumple. Eso es si, la matriz (3.75) es positiva definida si,

$$F' > 0 \quad (3.80)$$

$$\left(G' + \frac{(F' + G)}{u} \right) < 0 \quad (3.81)$$

$$\left(G' + \frac{(F' + G)}{u} \right) F' < -\frac{G^2}{4u} \quad (3.82)$$

Para entender el significado de estas condiciones, consideramos el caso donde F y G siguen una ley de potencia. Análisis dimensional en unidades naturales ($c = \hbar = k_B = 1$) indica que

$$[\Xi] = T^2 \quad (3.83)$$

Entonces, escribiendo $F = F_0 u^{\alpha+1}$ y $G = G_0 u^\alpha$ implica que $\alpha = -3$, es

decir

$$\Xi = F_0 u^{-2} v + G_0 u^{-3} w^2 \quad (3.84)$$

Las tres condiciones (3.80),(3.81) y (3.82) se leen

$$F_0 < 0$$

$$G_0 + F_0 > 0 \Rightarrow G_0 > -F_0 > 0$$

$$4F_0(G_0 + F_0) < -\frac{1}{4}G_0^2 \quad (3.85)$$

Substituyendo $F_0/G_0 \equiv -x$, tenemos las desigualdad siguientes para x :

$$4x^2 - 4x + \frac{1}{4} < 0 \quad (3.86)$$

que implican que $1/2 - \sqrt{3}/4 < x < 1/2 + \sqrt{3}/4$. Observe que ambos límites $x = 0$ y $x = 1$ son excluidos.

Obtenemos entonces que la forma final para Ξ

$$\Xi = \frac{\Omega_0}{u} \left[x \left(\frac{v}{u} \right) - \left(\frac{w}{u} \right)^2 \right] \quad (3.87)$$

($\Omega_0 = -G_0 < 0$) que puede ser reescrita en una forma covariante como (escribiendo $\mu \equiv \sqrt{-\beta_a \beta^a}$)

$$\Xi = \frac{\Omega_0}{\mu^4} B^a B^b \left[-x g_{ab} - \frac{\beta_a \beta_b}{\mu^2} \right] \quad (3.88)$$

3.5 Acercamiento no lineal al equilibrio en el caso homogéneo

Nuestro próximo paso será estudiar la evolución no lineal del modelo simple que describimos antes. Por simplicidad, trabajaremos en un espacio-tiempo plano y asumiremos homogeneidad, lo que implica en particular que β^a y B^a

son colineales, $\beta^a = \beta u^a$ y $B^a = B u^a$. Elegiremos un sistema de referencia al reposo con el fluido donde $u^a = \delta_0^a$.

Las ecuaciones de movimiento son

$$j_{;a}^a = V'(\phi) + \Delta \quad (3.89)$$

$$T_{+;a}^{ab} = 0 \quad (3.90)$$

$$T_{-;a}^{ab} = 2I^b \quad (3.91)$$

$$\beta_{(c)}^a \phi_{,a} = -\xi \quad (3.92)$$

Los dos tensores de energía-momento de los dos fluidos perfectos son, sin interacciones ,

$$T_{c0}^{ab} = \frac{\xi^2}{\mu^4} \beta_c^a \beta_c^b + g^{ab} \left(\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\mu_c^2} - V(\phi) \right)$$

$$T_{f0}^{ab} = g^{ab} p_f + u^a u^b (\rho_f + p_f)$$

La energía de interacción entre los dos está dada por ($\beta = \frac{1}{2}(\beta_c + \beta_f)$ y $B = \beta_c - \beta_f$)

$$T_{\Xi+}^{ab} = \frac{\partial \Xi^a}{\partial \beta_b}$$

$$T_{\Xi-}^{ab} = 2 \frac{\partial \Xi^a}{\partial B_b}$$

Usamos como modelo para nuestro término de interacción

$$\Xi = \frac{B^2}{\beta^4} (F_0 + G_0) \equiv \frac{B^2}{\beta^4} \Gamma$$

Bajo las hipótesis simplificadora enunciada anteriormente, tenemos

$$T_{c0}^{00} = \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\beta_c^2} + V(\phi)$$

y

$$\frac{\partial \Xi^0}{\partial \beta_0} = 20 \frac{B^2}{\beta^6} \Gamma$$

$$\frac{\partial \Xi^0}{\partial B_0} = -8 \frac{B}{\beta^5} \Gamma$$

Es conveniente introducir una nueva variable s definida como

$$B = \beta_c - \beta_f = s\beta_f$$

implicando

$$\beta = \frac{\beta_c + \beta_f}{2} = \left(\frac{s}{2} + 1\right) \beta_f$$

y expresar las ecuaciones en términos del momento conjugado

$$\pi = \phi_{,t} = -\frac{\xi}{\beta_c}$$

El tensor de energía-momento se lee entonces, usando (3.93),

$$T_+^{00} = \frac{\pi^2}{2} + V(\phi) + \left[\sigma + 20\Gamma \frac{s^2}{(1+s/2)^6} \right] \frac{1}{\beta_f^4}$$

$$T_-^{00} = \frac{\pi^2}{2} + V(\phi) - \left[\sigma + 16\Gamma \frac{s}{(1+s/2)^5} \right] \frac{1}{\beta_f^4}$$

Tenemos pues cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-\pi_{,t} = V'(\phi) + \Delta$$

$$(T_+^{00})_{,t} = 0$$

$$(T_{-}^{00})_{,t} = 2I^0$$

$$\phi_{,t} = \pi$$

donde

$$\Delta = M^{\xi\xi}\xi - 2B(1 - \kappa)M^{\xi 0}$$

y

$$I^0 = -BM^{00} + 2\kappa\xi M^{\xi 0}$$

Las dimensiones de los términos M^{AB} son

$$\begin{aligned} [M^{\xi\xi}] &= T^2 \\ [M^{00}] &= T^6 \\ [M^{\xi 0}] &= T^4 \\ [\xi] &= T \end{aligned}$$

Dimensionalmente, esto indica las siguientes formas para los M^{AB}

$$\begin{aligned} M^{\xi\xi} &= -\frac{K_0}{\tau^2} \\ M^{00} &= -\frac{L_0}{\tau^6} \\ M^{\xi 0} &= \frac{M_0}{\tau^4} \end{aligned}$$

donde τ es alguna función de las variables dinámicas con dimensión T^{-1} y $K_0, L_0 > 0$. Además, la creación de entropía impone la relación siguiente

$$K_0 L_0 \geq M_0^2$$

Nótese que elegimos también tomar el fluido f como radiación de manera

que

$$\rho_f = \sigma T_f^4 \quad (3.93)$$

con la constante de Stefan - Boltzmann $\sigma > 0$. La ecuación (3.89) deviene

$$-\pi_{,t} = V'(\phi) + \frac{K_0}{\tau^2} (s+1) \beta_q \pi - 2(1-\kappa) s \beta_q \frac{M_0}{\tau^4}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \pi^2 + V(\phi) \right]_{,t} &= \pi [\pi_{,t} + V'(\phi)] \\ &= \pi \left[-\frac{K_0}{\tau^2} (s+1) \beta_q \pi + 2B(1-\kappa) \frac{M_0}{\tau^4} \right] \end{aligned}$$

$$I^0 = L_0 \frac{s}{\tau^6} \beta_q - \kappa (s+1) \frac{\beta_q}{\tau^4} \pi M_0$$

y definiendo

$$K = K_0 (s+1) \frac{\beta_q}{\tau^2} \pi - 2(1-\kappa) s \beta_q \frac{M_0}{\tau^4}$$

$$c_1 = \sigma + 16\Gamma \frac{s}{(1+s/2)^5}$$

$$c_2 = \sigma + 20\Gamma \frac{s^2}{(1+s/2)^6}$$

entonces

$$\pi_{,t} = -V'(\phi) - K$$

$$-K\pi - c_2 \frac{4}{\beta_q^5} \beta_{q,t} + \frac{40\Gamma}{\beta_q^4} \frac{s(1-s)}{(1+s/2)^7} s_{,t} = 0$$

y

$$-K\pi + c_1 \frac{4}{\beta_q^5} \beta_{q,t} - \frac{16\Gamma}{\beta_q^4} \frac{(1-2s)}{(1+s/2)^6} s_{,t} = 2I^0$$

El sistema final de ecuaciones es

$$s_{,t} = \frac{\beta_q^4 (1 + s/2)^6}{8\Gamma c_3} \left\{ 2I^0 c_2 + K\pi (c_1 + c_2) \right\}$$

$$\beta_{q,t} = \frac{\beta_q^5}{4c_3} \left\{ 10 \frac{s(1-s)}{1+s/2} I^0 + K\pi h(s) \right\}$$

$$\pi_{,t} = -V'(\phi) - K$$

$$\phi_{,t} = \pi$$

donde

$$c_3 = 5 \frac{s(1-s)}{(1+s/2)} c_1 - 2(1-2s) c_2$$

$$h(s) = 2(1-2s) + \frac{5(1-s)s}{1+s/2}$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$$

Finalmente

$$T_+^{00} = \frac{1}{2} \pi^2 + V(\phi) + \frac{c_2}{\beta_f^4}$$

está a la vez definida positiva y conservada.

Las ecuaciones describen de manera genérica el acercamiento al equilibrio. Eso se ve más claramente en el límite donde s se mantiene pequeño. En este límite, tenemos $c_1 \sim c_2 \sim \sigma$, $c_3 \sim -2\sigma < 0$, $h(s) \sim 2$ y $K \sim K_0 \beta_f \pi / \tau^2$. En particular, la ecuación para el campo ϕ describe oscilaciones amortiguadas, pero la "constante" de decaimiento es verdaderamente una variable dinámica, abriendo por lo tanto un mecanismo para incluir efectos de memoria en la

dinámica y otros comportamientos interesantes; nótese por ejemplo que K puede cambiar de signo si el término de acoplamiento $M_0 \neq 0$.

De manera más general, explorando el espacio de parámetros encontramos una gran variedad de comportamientos. En particular, el acercamiento puede ser sobre o subamortiguado; el segundo parece relevante en la descripción de los episodios de pre calentamiento.

Capítulo 4

El modelo microscópico

Para obtener un resultado convincente, tenemos que ir más allá del modelo anterior. Elegimos un problema muy conocido, a saber el decaimiento de un campo escalar con simetría $O(N)$ estudiado al primer orden en la aproximación de N grande ([41],[42],[43],[44],[45],[46],[47][48]). En cierto sentido, esta aproximación es más difícil de estudiar dentro de nuestro formalismo que aproximaciones de orden más grande. Como veremos, a este orden el sistema es Hamiltoniano y por lo tanto no está asociado con producción de entropía. Si lo integramos suficiente tiempo, muestra restauración, es decir la envolvente de la amplitud del campo escalar crece. El modelo macroscópico, siendo una versión muy gruesa del modelo microscópico, tiene una producción de entropía no trivial. En el capítulo 6, veremos que es posible pedir que sea nula pero esto nos impide predecir de manera adecuada la evolución de la amplitud para tiempo corto. Si queremos seguir la evolución de manera correcta hay que introducir disipación y nuestro modelo no puede entonces estar de acuerdo con el modelo microscópico para tiempos del orden del tiempo de recurrencia. Aproximaciones de mayor orden en un desarrollo $1/N$ termalizan ([49]) y es posible introducir una entropía ya al nivel microscópico ([50]), haciéndole comportarse de manera más cercana al modelo macroscópico.

Además de restringirnos al primer orden, hicimos simplificaciones adicionales. Asumimos condiciones iniciales homogéneas en Minkowski despreciando los aspectos geométricos asociados con recalentamiento, y consider-

aremos solamente un campo clásico. Esta última aproximación es suficiente para el estudio de recalentamiento como fue mostrado recientemente ([51]). Asumiremos que inicialmente las fluctuaciones están en equilibrio térmico aunque no en equilibrio con el campo escalar. El hecho de trabajar con el caso clásico nos permite hacer caso omiso de las singularidades presentes al tiempo inicial ([52]). Este modelo microscópico fue usado en un artículo nuestro ([53]) pero el término de interacción era demasiado simple para que el modelo pudiera ser convincente.

4.1 Cuadro sinóptico

Obtener un buen modelo macroscópico depende de varios factores. La idea central que nos guía aquí es que mucha información está escondida en la teoría en $t = 0$. Tanto esta hipótesis como las varias suposiciones y aproximaciones que se efectuarán luego serán últimamente confirmadas por el éxito que tendrá nuestro modelo en reproducir fielmente las variables macroscópicas de interés. Este capítulo y el siguiente muestran en detalle cómo se obtuvo esta relación. Es conveniente tener un resumen para entender mejor el procedimiento.

- funcional generador: Toda la teoría macroscópica puede deducirse de tres generadores $\chi_{(e)}$, $\chi_{(f)}$ y Ξ . Uno ya fue obtenido anteriormente $\chi_{(e)}$ (ver ec (3.17)). Seguiremos nuestra suposición anterior y supondremos que el potencial de interacción tiene la estructura dada en la ec.(3.61). Nuestro objetivo es calcular la forma específica de $\chi_{(f)}$ y las funciones adimensionales $f = \beta^4 F$ y $g = \beta^6 G$ que permiten construir Ξ . Se utiliza el tensor de energía-momento de la teoría microscópica evaluado en $t = 0$, del valor total se restará la contribución del campo medio y de las fluctuaciones para obtener la contribución proveniente de la interacción. Ver ecs. (5.21),(5.22) y (5.23),(5.24). Los coeficientes c_i y d_i se obtienen por ajuste de cuadrados mínimos. El valor de T_{min} corresponde al valor mínimo debajo del cual la aproximación clásica ya no es confiable, ver fig.(5.4). Ver sección 5.2, sección 5.4 y sección

5.5

- Relación entre los formalismos. En la teoría microscópica, hay una sola temperatura aparente pero en el modelo macroscópico hay dos. Pidiendo igualdad de la densidad de energía total en $t = 0$ y proponiendo que $\phi_0 = \phi_0(B_0, \beta_0, \Lambda, \alpha)$ podemos hallar el potencial de interacción. Ver la ec.(5.25). Ver sección 5.3.
- creación de entropía. Los terminos de creacción de entropía son $\Delta = \Delta(A, C)$ y $I^0 = I^0(C)$. Estos términos se parametrizan a su vez por las funciones A y C . Análisis dimensional guía la forma de estas últimas $A = A_0\phi^2$ y $C = C_0T^4\phi$. Quedan finalmente dos parámetros A_0 y C_0 . Se utiliza la ecuación de movimiento para p para determinar C_0 . Más precisamente se pide que el lado derecho de la ecuación que determina \dot{p} sea igual en ambos formalismos en $t = 0$. Ver sección 6.1. Se evalúa A_0 haciendo un ajuste entre la evolución de $\phi(t)$ en ambos formalismos. Ver sección 6.2.

Podemos resumir estas consideraciones en el cuadro siguiente.

cantidades macroscópicas	parámetros libres	referencias
f, g	c_i, d_i	figs. (5.1) y (5.2)
f, g	T_{min}	fig.(5.4)
f, g	α	figs. (5.9), (5.9) y (5.9)
f, g	a	figs. (5.5),(5.6) y (5.7)
Δ, I^0	C_0	ec.(6.12)
Δ, I^0	A_0	fig. (6.6)

4.2 Ecuaciones de movimiento

El punto de partida para nuestro modelo microscópico es una acción con una simetría $O(N)$ ([28],[41])

$$S = N \int \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{2} \varphi^i \varphi^i + \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right\} d^4x \quad (4.1)$$

que representa un campo autointeractuante bajo el potencial

$$V(\phi^i \phi^i) = \frac{1}{2} m^2 \phi^i \phi^i + \frac{1}{8} \lambda (\phi^i \phi^i)^2 \quad (4.2)$$

El término $m^4/2\lambda$ es por comodidad solamente, ya que no produce ningún cambio en las ecuaciones de movimiento. Es habitual definir un campo auxiliar sumando un vínculo

$$\frac{[\chi - \lambda(\phi^i \phi^i + m^2/\lambda)]^2}{2\lambda} \quad (4.3)$$

que nos lleva a una nueva acción

$$S_2 = N \int \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \frac{\chi^2}{2\lambda} - \frac{1}{2} \chi \phi^i \phi^i - \frac{m^2}{\lambda} \chi \right\} d^4x \quad (4.4)$$

Representando el valor de expectación de los campos con respecto al estado inicial de la teoría por

$$\langle \varphi \rangle = \phi, \quad \langle \chi \rangle = K \quad (4.5)$$

podemos escribir los campos como la suma del campo medio y de sus fluctuaciones

$$\varphi^i = \phi^i + \psi^i \quad (4.6)$$

$$\chi = K + \kappa \quad (4.7)$$

Guardando solamente el término dominante en la aproximación de N grande, podemos escribir la acción efectiva

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi^i, K] &= S_2[\phi^i, K] + i \frac{N\hbar}{2} Tr \ln \left(\frac{i}{2\hbar} (\partial_\mu \partial^\mu - K) \right) \\ &= S_2[\phi^i, K] + i \frac{N\hbar}{2} Tr \ln \left(-\frac{1}{2} \right) G_F^{-1}(x-z) \end{aligned} \quad (4.8)$$

La variación de la acción efectiva da las ecuaciones para los campos clásicos

cos ϕ^i

$$-\partial_\mu \partial^\mu \phi^i + K \phi^i = 0 \quad (4.9)$$

y para el campo K ,

$$K = m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^i \phi^i + \frac{\lambda}{2} G_F(x, x) \quad (4.10)$$

Es conveniente en este punto girar en el espacio interno de manera que $\phi^i = 0$ para $i \in [i, N - 1]$, y $\phi^N \equiv \phi = \sqrt{\phi^i \phi^i}$. Aunque es verdad que las fluctuaciones longitudinales y transversales son diferentes, al primer orden en $1/N$ el propagador de Feynmann para las fluctuaciones está dado por

$$G_F(x, x') \delta^{ij} = \langle T (\psi^i(x) \psi^j(x')) \rangle \quad (4.11)$$

que es solución de la ecuación siguiente:

$$(-\partial_\mu \partial^\mu + K) G_F(x, x') = -i\hbar \delta(x - x') \quad (4.12)$$

Si suponemos un estado inicial homogéneo, es conveniente introducir la expansión de Fourier

$$\psi^i(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k(0)}} [U_k(t) a_{\vec{k}}^i + U_k^*(t) a_{-\vec{k}}^i] \quad (4.13)$$

La normalización para los modos es

$$W [U_k^*(t), U_k(t)] = -i\hbar \quad (4.14)$$

$W [f, g] = f\dot{g} - \dot{f}g$ siendo el Wronskiano. En el caso homogéneo,

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + K \phi = 0 \quad (4.15)$$

con la ecuación correspondiente para los modos $U_k(t)$:

$$\frac{d^2 U_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2(t) U_k(t) = 0 \quad \omega_k^2(t) = |\vec{k}|^2 + K(t) \quad (4.16)$$

Substituyendo (4.13) en (4.11) da

$$G_F(x, x') = G_V(x, x') + G_T(x, x') \quad (4.17)$$

donde reconocemos una parte (de vacío) o independiente de la temperatura

$$G_V(x, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2\omega_k(0)} \exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] \{U_k(t)U_k^*(t')\Theta(t - t') + U_k(t')U_k^*(t)\Theta(t' - t)\} \quad (4.18)$$

y una parte dependiente de la temperatura

$$G_T(x, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2\omega_k(0)} \left\{ \exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \vec{x}')] [U_k(t)U_k(t')g_k + U_k^*(t)U_k^*(t')g_k^*] \right\} \quad (4.20)$$

$$\exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] [U_k(t)U_k^*(t') + U_k^*(t)U_k(t')] n_k \} \quad (4.21)$$

$$\exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] [U_k(t)U_k^*(t') + U_k^*(t)U_k(t')] n_k \} \quad (4.22)$$

donde n_k y g_k representan la mezcla estadística inicial:

$$\langle a_{\vec{k}}^i a_{\vec{k}'}^j \rangle = (2\pi)^3 g_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta^{ij} \quad (4.23)$$

$$\langle a_{\vec{k}}^{i\dagger} a_{\vec{k}'}^j \rangle = (2\pi)^3 n_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta^{ij} \quad (4.24)$$

y en el límite de coincidencia,

$$G_V(x, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2\omega_k(0)} |U_k(t)|^2 \quad (4.25)$$

y

$$G_T(x, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2\omega_k(0)} \left\{ 2 \exp (2i\vec{k} \cdot \vec{x}) \operatorname{Re} [U_k(t)U_k(t)g_k] + 2 |U_k(t)|^2 n_k \right\} \quad (4.26)$$

Supondremos un baño térmico de partículas inicialmente:

$$n_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k(0)}{k_B T_f}\right) - 1} \quad (4.27)$$

$$g_k = 0 \quad (4.28)$$

con

$$T = T_f \quad (4.29)$$

la temperatura inicial del baño. El subíndice f está escrito de manera explícita para prevenir confusión más tarde y indica la temperatura del baño inicial de las fluctuaciones.

4.2.1 Fluctuaciones clásicas térmicas, tensor de energía momento y formulación Hamiltoniana

Una estrategia muy exitosa para abordar el recalentamiento en el régimen fuertemente no lineal consiste en describir el campo del inflatón como puramente clásico. [54]; la razón detrás de este procedimiento es que la transición a comportamiento semi clásico es muy rápida durante inflación [55] y por lo tanto, si uno tiene éxito encontrando una descripción semi clásica de las fluctuaciones producidas por el decaimiento del inflatón, el decaimiento en sí puede ser descrito vía ecuaciones clásicas de movimiento [56]. En este capítulo nos concentraremos en el caso particular de fluctuaciones térmicas clásicas. Es un caso más fácil de implementar que el caso cuántico pero a su vez permite confrontar las consecuencias básicas. Podemos tomar el límite $\hbar \rightarrow 0$ en las ec.(4.25) y (4.26) para obtener

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} G_V(x, x) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{2\omega_k(0)} |U_k(t)|^2 = 0 \quad (4.30)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} G_T(x, x) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(0)} \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k(0)}{k_B T_f}\right) - 1} 2 |U_k(t)|^2 \quad (4.31)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_B T_f}{2\omega_k^2(0)} |U_k(t)|^2 \quad (4.32)$$

Por lo tanto, en este limite clásico, encontramos

$$K = m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^2 + \lambda k_B T_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} |U_k(t)|^2 \quad (4.33)$$

El tensor de energía-momento puede ser calculado usando (4.8) mediante

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (4.34)$$

especializando después a Minkowski o directamente tomando los valores de expectativas del tensor de energía-momento. De una manera u otra, podemos encontrar (escribiendo solamente las componentes no triviales)

$$\begin{aligned} \langle T^{00} \rangle &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + k_B T_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(0)} [\dot{U}_k(t)\dot{U}_k^*(t) + |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2] \quad (4.35) \\ &+ \frac{1}{2\lambda} (K - m^2) (K + m^2) + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.36) \end{aligned}$$

y (no hay suma sobre i)

$$\begin{aligned} \langle T^{ii} \rangle &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + k_B T_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k(0)} \left[\dot{U}_k(t)\dot{U}_k^*(t) - \frac{1}{3}|\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right] \quad (4.37) \\ &- \frac{1}{2\lambda} (K - m^2) (K + m^2) - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.38) \end{aligned}$$

Estas expresiones representan la densidad de energía y la presión total de nuestro sistema. Para integrar numéricamente nuestras ecuaciones necesitamos un numero finito de variables. Como los integrandos son manifiestamente isotrópicos, haremos primero la integración sobre las variables angulares. En problemas con simetrías esféricas como el que afrontamos, este procedimiento lleva a una mejor aproximación de las integrales comparando con un reemplazo directo de las integrales en $3 - D$ por sumas triples en cartesianas. La integral sobreviviente a la integración angular es pues escrita como una suma

discreta:

$$\langle T^{00} \rangle = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + k_B T_f \sum_{k=1}^{N_k} \Delta k \alpha_{(\Delta k, k)} \left[\dot{U}_{\Delta k, k}(t) \dot{U}_{\Delta k, k}^*(t) \right] \quad (4.39)$$

$$+ |\vec{k} \Delta k|^2 |U_{\Delta k, k}(t)|^2 \quad (4.40)$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} (K - m^2) (K + m^2) + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.41)$$

$$\langle T^{ii} \rangle = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + k_B T_f \sum_{k=1}^{N_k} \Delta k \alpha_{(\Delta k, k)} \left[\dot{U}_{\Delta k, k}(t) \dot{U}_{\Delta k, k}^*(t) \right] \quad (4.42)$$

$$- \frac{1}{3} |\vec{k} \Delta k|^2 |U_{\Delta k, k}(t)|^2 \quad (4.43)$$

$$- \frac{1}{2\lambda} (K - m^2) (K + m^2) - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.44)$$

donde definimos

$$\alpha_k \equiv \frac{|\vec{k}|^2}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} \quad (4.45)$$

y fijamos un corte (cutoff)

$$k_{max} \equiv \Lambda = N_k \Delta k. \quad (4.46)$$

N_k es el número total de modos y Δk es el espaciamiento. Sin mayor dificultad podemos reescribir el sistema entero como un sistema Hamiltoniano (H tiene unidad de densidad de energía). Escribiendo los modos complejos $U_k(t)$ como la suma de su parte real y imaginaria

$$U_k(t) = U_r(t) + iU_i(t) \quad (4.47)$$

y usando la notación $p \equiv \dot{\phi}$ el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} K \phi^2 + \sum_{k=1}^{N_k} \left\{ \frac{1}{4k_B T_f \alpha_{(\Delta k, k)} \Delta k} [\Pi_r^2 + \Pi_i^2] \right. \quad (4.48)$$

$$\left. + k_B T_f \alpha_{(\Delta k, k)} \Delta k (|\vec{k}|^2 + K) [U_r^2 + U_i^2] \right\} - \frac{1}{2\lambda} (K - m^2)^2 \quad (4.49)$$

Las ecuaciones de movimiento para las fluctuaciones son

$$-\dot{\Pi}_r = \frac{\partial H}{\partial U_r} = 2k_B T_f \alpha_{(\Delta_k \cdot k)} \Delta_k (|\Delta_k \cdot \vec{k}|^2 + K) U_r \quad (4.50)$$

$$\dot{U}_r = \frac{\partial H}{\partial \Pi_r} = \frac{1}{2k_B T_f \alpha_{(\Delta_k \cdot k)} \Delta_k} \Pi_r \quad (4.51)$$

$$-\dot{\Pi}_i = \frac{\partial H}{\partial U_i} = 2k_B T_f \alpha_{(\Delta_k \cdot k)} \Delta_k (|\Delta_k \cdot \vec{k}|^2 + K) U_i \quad (4.52)$$

$$\dot{U}_i = \frac{\partial H}{\partial \Pi_i} = \frac{1}{2k_B T_f \alpha_{(\Delta_k \cdot k)} \Delta_k} \Pi_i \quad (4.53)$$

que dan también las definiciones de Π_r y Π_i . Las ecuaciones para el campo escalar son

$$\dot{\phi} = p \quad (4.54)$$

y

$$\dot{p} = -K\phi \quad (4.55)$$

Inicialmente, tenemos $U_r(0) = \cos(\delta)$, $\dot{U}_r(0) = \omega_k(0) \sin(\delta)$ y $U_i(0) = \sin(\delta)$, $\dot{U}_i(0) = -\omega_k(0) \cos(\delta)$ donde δ es una fase aleatoria. K es un multiplicador de Lagrange y su ecuación de Hamilton correspondiente nos da la ecuación discretizada de defecto (gap equation) (4.33). A $t = 0$ se lee

$$K(0) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2(0) + \lambda k_B T_f \sum_{k=1}^{N_k} \Delta_k \alpha_{\Delta_k \cdot k} \quad (4.56)$$

$$= m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2(0) + \frac{\lambda k_B T_f \Delta_k}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{N_k} \frac{|\Delta_k \vec{k}|^2}{(|\Delta_k \vec{k}|^2 + K(0))} \quad (4.57)$$

una ecuación que deberemos resolver numéricamente para extraer $K(0)$ como una función de las condiciones iniciales y de los parámetros. Es conveniente recalcar que los efectos combinados de la discretización y de la imposición de un k de corte permite tener en cuenta las divergencias ultravioletas y las singularidades temporales iniciales. No habrá necesidad de renormal-

ización posterior. Las ecuaciones que rigen las fluctuaciones son bien conocidas en el contexto inflacionario. Por ejemplo, para la parte real tenemos, usando (4.52) y (4.53)

$$\ddot{U}_k + (\Delta_k^2 k^2 + K) U_k = 0$$

Bajo la sustitución $K(t) = -q(t) \sin^2(z)$ obtenemos la ecuación de Mathieu

$$\ddot{U}_k + (A_k - q(t) \cos^2 z) U_k = 0$$

con $A_k \equiv \Delta_k^2 k^2$. Según los valores que toman A_k y $q(t)$ los modos X_k pueden crecer exponencialmente y obtenemos resonancias paramétricas ([28]).

4.3 El tensor de energía-momento en $t = 0$

Como veremos más tarde, con el objeto de completar el modelo macroscópico necesitamos conocer la forma exacta del potencial de interacción. Para ello, sería práctico tener una expresión analítica para la densidad de energía total y la presión en el modelo microscópico. El esquema es el siguiente: si uno considera un fluido disipativo como la mezcla de dos fluidos más simples, la mayor parte de la información intrínseca de cada uno se perderá después de mezclarlo. Podemos solamente contar con cantidades que pueden ser calculadas usando la densidad de energía total o la presión. No obstante, al tiempo inicial, existen informaciones específicas sobre cada fluido que podemos suponer conocidas desde las condiciones iniciales. Por un lado, sabemos como describir un campo clásico autointeractuante como un fluido. Por otro lado, sabemos cómo describir teóricamente fluctuaciones (cuántica o térmica) como un fluido también. Podemos intuir la contribución del potencial de interacción, al menos al tiempo inicial. Supondremos que la dependencia funcional con la temperatura es la misma en tiempos posteriores. La comparación entre la dinámica de ambos modelos será la validación de nuestra hipótesis. Bajo estas premisas, las tres cantidades de interés son:

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + k_B T_f \int \frac{k^2 dk}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 + k^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (4.58)$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} (K(t) - m^2) (K(t) + m^2) + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.59)$$

$$P(t) = \frac{p^2}{2} + k_B T_f \int \frac{dk}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)| - \frac{k^2}{3} |U_k(t)|^2 \right\} \quad (4.60)$$

$$- \frac{1}{2\lambda} (K(t) - m^2) (K(t) + m^2) - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.61)$$

$$K(t) = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi^2 + \lambda k_B T_f \int dk \frac{k^2}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} |U_k(t)|^2 \quad (4.62)$$

Donde $H = \langle T^{00} \rangle$ representa la densidad de energía total del sistema microscópico y $P = \langle T^{ii} \rangle$ es la presión total. La temperatura actual de las fluctuaciones a tiempo posterior podría ser obtenida usando la gap ecuación y alguna propuesta adecuada sobre los modos. Usando las condiciones iniciales $|\dot{U}_k(0)| \equiv \sqrt{\dot{U}_r^2(0) + \dot{U}_i^2(0)} = \omega_k(0)$ y $|U_k(0)| \equiv \sqrt{U_r^2(0) + U_i^2(0)} = 1$ tenemos

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + k_B T_f \int \frac{k^2 dk}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} \left\{ \omega_k^2(0) + k^2 \right\} \quad (4.63)$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} (K(0) - m^2) (K(0) + m^2) + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.64)$$

$$P_0 = \frac{p^2}{2} + k_B T_f \int \frac{k^2 dk}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} \left\{ \omega_k^2(0) - \frac{k^2}{3} \right\} \quad (4.65)$$

$$- \frac{1}{2\lambda} (K(0) - m^2) (K(0) + m^2) - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.66)$$

$$K(0, \phi_0) = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2 + \lambda k_B T_f \int dk \frac{k^2}{4\pi^2 \omega_k^2(0)} \quad (4.67)$$

donde escribimos explícitamente la dependencia funcional de $K(t = 0)$ con ϕ_0 , usamos la notación $H(t = 0) \equiv H_0$ y similarmente con la presión. Calcularemos primero $K(0, \phi_0)$. Podemos reescribir Ec.(4.67) como

$$K(0) = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2 + \lambda k_B T_f \int dk \frac{k^2 + K(0) - K(0)}{4\pi^2 (k^2 + K(0))} \quad (4.68)$$

$$= m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_0^2 + \lambda k_B T_f \int dk \frac{1}{4\pi^2} - \lambda k_B T_f \int \frac{dk K(0)}{4\pi^2 (k^2 + K(0))} \quad (4.69)$$

es decir

$$\left\{ 1 + \lambda k_B T_f \int \frac{dk}{4\pi^2 (k^2 + K(0))} \right\} K(0) = m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_0^2 + \frac{\lambda k_B T_f}{4\pi^2} \int dk \quad (4.70)$$

La última integral diverge, siendo el culpable parte del modelo mismo: es la divergencia ultravioleta que tiene su raíz en teorema de equipartición. En nuestro modelo, la divergencia es controlada asumiendo un corte Λ . De manera alternativa, es posible renormalizar la teoría usando renormalización de la masa ([73]) pero el método del corte es natural al procedimiento numérico y nos quedaremos con el. Integrando encontramos

$$\left\{ 1 + \frac{\lambda k_B T_f}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{K(0, \phi_0)}} \arctan \frac{\Lambda}{\sqrt{K(0, \phi_0)}} \right\} K(0, \phi_0) = m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_0^2 + \frac{\lambda k_B T_f}{4\pi^2} \Lambda \quad (4.71)$$

Obtendremos $K(0, \phi_0)$ numéricamente. Nótese que, en el límite $T \rightarrow 0$ tenemos $K(0, \phi_0) = m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_0^2$. Podemos ahora ocuparnos de la densidad total de energía. Tenemos

$$H_0(T_f) = \frac{p^2}{2} + \frac{k_B T_f}{6\pi^2} \Lambda^3 + \frac{k_B T_f}{4\pi^2} \left(-\Lambda K(0, \phi_0) + (K(0, \phi_0))^{3/2} \arctan \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{K(0, \phi_0)}} \right) \right) + \frac{K(0, \phi_0)^2}{2\lambda} \quad (4.72)$$

indicando explícitamente la dependencia en la temperatura. Un cálculo similar da la presión inicial total:

$$P_0(T_f) = \frac{p^2}{2} + \frac{k_B T_f}{18\pi^2} \Lambda^3 - \frac{k_B T_f}{12\pi^2} \left(-\Lambda K(0, \phi_0) + (K(0, \phi_0))^{3/2} \arctan \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{K(0, \phi_0)}} \right) \right) - \frac{K(0, \phi_0)^2}{2\lambda} \quad (4.73)$$

Es posible simplificar estas dos expresiones usando ec. (4.71):

$$H_0(T_f) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{k_B T_f \Lambda^3}{6\pi^2} + \frac{1}{2}K(0, \phi_0)\phi_0^2 + \frac{m^2 K(0, \phi_0)}{\lambda} - \frac{K^2(0, \phi_0)}{2\lambda} \quad (4.74)$$

$$P_0(T_f) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{k_B T_f}{18\pi^2}\Lambda^3 - \frac{1}{6}K(0, \phi_0)\phi_0^2 - \frac{m^2 K(0, \phi_0)}{3\lambda} - \frac{K^2(0, \phi_0)}{6\lambda} \quad (4.75)$$

La densidad de energía de la fluctuaciones ρ_f , es obtenida considerando los resultados anteriores con $p_0 = \phi_0 = 0$ es decir

$$\rho_f = \frac{k_B T_f}{6\pi^2}\Lambda^3 + \frac{m^2 K(0, 0)}{\lambda} - \frac{K^2(0, 0)}{2\lambda} - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.76)$$

$$= \frac{k_B T_f}{6\pi^2}\Lambda^3 - \frac{1}{2\lambda} \left(K(0, 0) - m^2 \right)^2 \quad (4.77)$$

y

$$p_f = \frac{k_B T_f}{18\pi^2}\Lambda^3 - \frac{m^2 K(0, 0)}{3\lambda} - \frac{K^2(0, 0)}{6\lambda} + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.78)$$

$$= \frac{k_B T_f}{18\pi^2}\Lambda^3 - \frac{1}{6\lambda} \left(K(0, 0) - m^2 \right) \left(K(0, 0) + 3m^2 \right) \quad (4.79)$$

Nótese que a ρ_f y p_f se les puede agregar una constante aditiva. Usaremos esta indeterminación en sus definiciones para obtener un límite natural para ρ_f y p_f cuando $T_f \rightarrow 0$. También nótese que $K(0, 0)$ indica la solución de la ec. (4.71) con $\phi_0 = 0$. En el caso $T_f \rightarrow 0$, encontramos

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2\lambda} \left(m^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi_0^2 \right)^2 \quad (4.80)$$

$$= \frac{p_0^2}{2} + V(\phi_0) + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (4.81)$$

usando (4.2) y

$$\rho_f = 0 = p_f \quad (T_f = 0) \quad (4.82)$$

Capítulo 5

El modelo macroscópico

Como lo hemos mencionado antes, el formalismo macroscópico asegura covarianza y causalidad. Para determinar un modelo concreto, es necesario especificar el potencial termodinámico de interacción y la forma de la producción de entropía. El primero se encuentra pidiendo que el tensor de energía-momento calculado en el modelo macroscópico reproduzca el valor de expectación del tensor de energía-momento microscópico en $t = 0$. La producción de entropía está restringida por la condición de que el modelo macroscópico reproduzca las ecuaciones de movimiento para el campo medio y su momento conjugado a $t = 0$ y que un campo nulo sea un punto fijo estable de las ecuaciones macroscópicas.

5.1 Fluctuaciones térmicas

Ya dijimos que podíamos ver las fluctuaciones térmicas como un fluido. Pero en este caso debemos simular adecuadamente el modelo microscópico, es decir el potencial termodinámico de las fluctuaciones χ_f debe reproducir ρ_f y p_f dado por las ecs. (4.77) y (4.79) respectivamente. La única complicación es la implementación del corte Λ . En el caso de fluctuaciones, no hay potencial químico y nos quedamos solamente con $\beta_{(f)}^a$ como grado de libertad termodinámico. Sin embargo, el corte elige un sistema de referencia particular. Sea Υ^a el 4-vector asociado a este sistema de referencia. Podemos pensar

en Υ^a como (proporcional a) la 4-velocidad del observador en cuyo sistema al reposo se impone el corte. Nuestro potencial generador tomará la forma $\chi_f = \chi_f(\xi, v)$ donde $\xi = \sqrt{-\beta_a \beta^a}$ y $v = -\beta_a \Upsilon^a$ (obviaremos el subíndice (f) para claridad en esta sección). Entonces

$$\chi^a = -\frac{\beta^a}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \Upsilon^a \frac{\partial \chi}{\partial v} \quad (5.1)$$

y

$$\frac{\partial \chi^a}{\partial \beta_b} = g^{ab} \left(-\frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) + \frac{\beta^a \beta^b}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) \quad (5.2)$$

$$+ \frac{1}{\xi} (\beta^a \Upsilon^b + \Upsilon^a \beta^b) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial v} + \Upsilon^a \Upsilon^b \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} \quad (5.3)$$

Para nuestro objetivo, es suficiente elegir el ansatz siguiente para χ

$$\chi(\xi, v) = \chi_1(\xi) + \chi_2(v) \quad (5.4)$$

Entonces

$$T^{ab} = g^{ab} \left(-\frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\beta^a \beta^b}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \right) + \Upsilon^a \Upsilon^b \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial v^2} \quad (5.5)$$

Por lo tanto

$$p_f = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \quad (5.6)$$

pero

$$\rho_f = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \xi^2} + (\Upsilon^0)^2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial v^2} \quad (5.7)$$

Para resolver explícitamente, identificamos ξ con β . Entonces

$$\chi_1 = - \int \beta p_f d\beta \quad (5.8)$$

y

$$\rho_f + \frac{\partial(\beta p_f)}{\partial \beta} = (\Upsilon^0)^2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial v^2} \quad (5.9)$$

Como ejemplo, si usamos solamente el término principal tenemos

$$p_f = \frac{\Lambda^3}{18\pi^2\beta} \rightarrow \chi_1 = -\frac{\Lambda^3}{18\pi^2}\beta \quad (5.10)$$

y, usando $v = -\beta_a \Upsilon^a = \beta \Upsilon^0$,

$$\frac{\Lambda^3}{6\pi^2\beta} = \left(\frac{v}{\beta}\right)^2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial v^2} \quad (5.11)$$

obtenemos

$$\chi_2 = \frac{\Lambda^3}{6\pi^2} (v \ln v - v) \quad (5.12)$$

De manera equivalente, uno puede escribir $v = \beta$ para ejecutar el cálculo, reemplazando $\beta \rightarrow v$ en la expresión para χ_2 después. En el caso general tenemos

$$p_f + \rho_f = -\beta \frac{\partial p_f}{\partial \beta} + (\Upsilon^0)^2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial v^2}$$

Reemplazando (4.77) y (4.79) obtenemos

$$\frac{\Lambda^3}{6\pi^2\beta} - \frac{2K}{3\lambda} (K - m^2) - \frac{\beta}{3\lambda} (K + m^2) \frac{\partial K}{\partial \beta} = (\Upsilon^0)^2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial v^2}$$

Derivando (4.71), en el caso $\phi_0 = 0$, con respecto a β obtenemos

$$K + \left\{ \beta + \frac{\lambda}{8\pi^2\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{K}}\right) - \frac{\lambda}{8\pi^2} \frac{\Lambda}{(K + \Lambda^2)} \right\} \frac{\partial K}{\partial \beta} = m^2$$

Podemos utilizar (4.71) de nuevo para eliminar el arctan

$$\frac{\lambda}{8\pi^2\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{K}}\right) = \frac{m^2\beta}{2K} - \frac{\beta}{2} + \frac{\lambda\Lambda}{8\pi^2K}$$

y obtenemos, con $v = \beta \Upsilon^0$

$$\frac{\Lambda^3}{6\pi^2\beta} - \frac{K(K - m^2)\Lambda^3}{3[4\pi^2\beta(K + m^2)(K + \Lambda^2) + \lambda\Lambda^3]} = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \beta^2}$$

5.2 Cálculo del potencial de interacción

En lugar de trabajar con F y G , definiremos las funciones a -dimensionales f y g como sigue

$$F = \beta^{-4} f \quad (5.13)$$

$$G = \beta^{-6} g \quad (5.14)$$

es decir

$$\frac{\partial \Xi^0}{\partial \beta_0} = \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{f + g}{\beta^4} \right) B^2 \quad (5.15)$$

También

$$\frac{\partial \Xi^i}{\partial \beta_i} = \left(\frac{2}{\beta^6} (2f + 3g) - \frac{1}{\beta^5} \left(\frac{df}{d\beta} + \frac{dg}{d\beta} \right) \right) B^2 \quad (5.16)$$

Nuestro objetivo es encontrar f y g . Esto se puede lograr comparando con el modelo microscópico. Más específicamente volveremos sobre las cantidades físicas fundamentales que describen el sistema microscópico a $t = 0$. Inicialmente, recordamos que la densidad de energía total y la presión están dados por :

$$T_+^{00} = \frac{p_0^2}{2} + V(\phi_0) + \rho_f + \frac{\partial \Xi^0}{\partial \beta_0} \quad (5.17)$$

$$T_+^{ii} = \frac{p_0^2}{2} - V(\phi_0) + p_f + \frac{\partial \Xi^i}{\partial \beta_i} \quad (5.18)$$

La conexión se logra demandando

$$T_0^{00} = H_0 \quad (5.19)$$

$$T_0^{ii} = P_0 \quad (5.20)$$

con H_0 y P_0 definido en (4.74) y (4.75) respectivamente. La razón detrás de esta identificación es simple. Si queremos describir el mismo sistema físico con dos enfoques distintos, entonces debemos esperar que las cantidades físicas absolutas sean iguales en los dos.

El modelo macroscópico es un modelo de dos fluidos. Cada uno se

caracteriza por una temperatura, o lo que es lo mismo, una temperatura inversa $\beta = (k_B T)^{-1}$. Es conveniente trabajar con $\beta = (\beta_c + \beta_f)/2$ y $B = \beta_c - \beta_f$. Definiendo

$$D_H \equiv H_0 - \frac{p_0^2}{2} - V(\phi_0) - \rho_f(0) \quad (5.21)$$

$$D_P \equiv P_0 - \frac{p_0^2}{2} + V(\phi_0) - p_f(0) \quad (5.22)$$

donde $\rho_f(0)$ y $p_f(0)$ están definidas en ec. (4.77) y (4.79). Cuando $\phi_0 \rightarrow 0$, las soluciones numéricas indican que los D 's van a cero como ϕ_0^2 . Las funciones D_H y D_P pueden ser aproximadas con mucha exactitud por un polinomio de bajo orden aunque usaremos aproximaciones más complejas para reducir el error intrínseco al procedimiento de ajuste vía cuadrado medio.

$$D_H = \sum_{i=0}^{i_{max}} c_i T_f^i \phi_0^2 \quad (5.23)$$

y

$$D_P = \sum_{i=0}^{i_{max}} d_i T_f^i \phi_0^2 \quad (5.24)$$

Ambas aproximaciones fueron calculadas usando el mismo valor de i_{max} . Los coeficientes c_i y d_i se obtienen numéricamente usando el método de cuadrados mínimos. Nótese que, para ϕ_0 fijo, tenemos $t^{00}, t^{ii} \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$. Como ejemplo mostramos D_H a ϕ_0 fijo como una función de T (ver figura (5.1)). La aproximación es mostrada superpuesta y de hecho es prácticamente indistinguible de la expresión numérica exacta. También mostramos los D_H y D_P exactos para T fijo como función de ϕ_0 comparado con el ansatz cuadrático en las figuras (5.2) y (5.3). La línea sólida muestra D_H y D_P tal que son definidos en ecs. (5.21) y (5.22). Las líneas punteadas son las aproximaciones polinomiales (5.23) y (5.24), respectivamente.

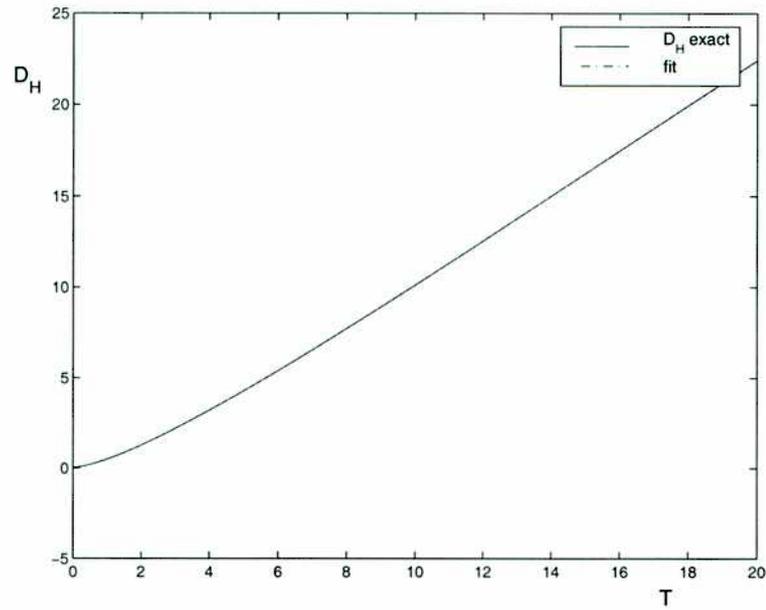


Fig. 5.1: D_H (ec. (5.23)) visto como una función de T para $\phi_0 = m$ fijo. La línea sólida es D_H en ec. (5.21). La línea punteada representa el ajuste cuadrático dado por la ec. (5.23) con $i_{max} = 6$.

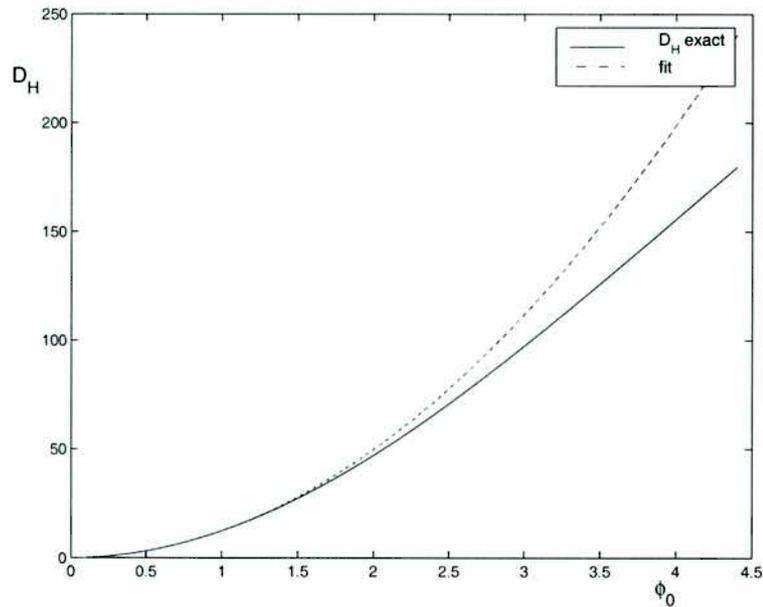


Fig. 5.2: D_H exacto (ec. (5.23)) como función de ϕ a $T = T_f = 14$. La línea sólida es D_H en la ec. (5.21). La línea punteada representa el ansatz cuadrático dado por la ec. (5.23).

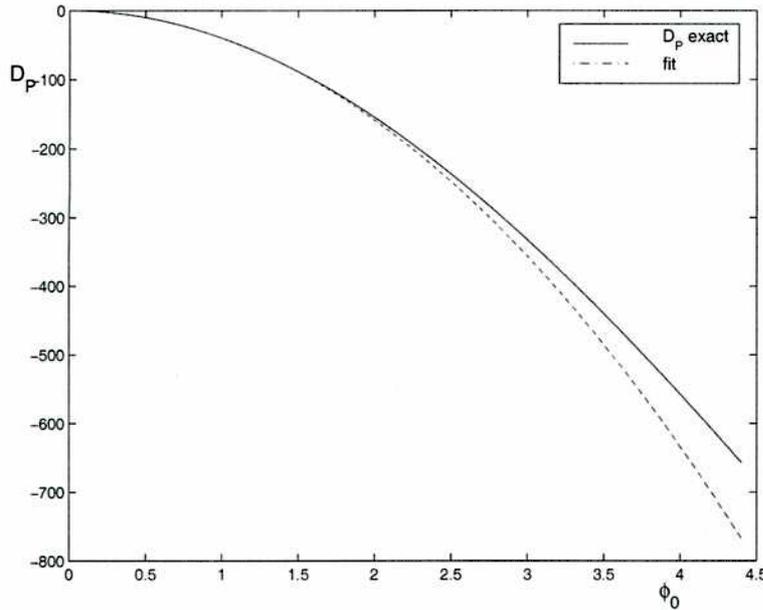


Fig. 5.3: D_P exacto (ec. (5.24)) como función de ϕ para $T = T_f = 14$. La línea sólida es D_H en ec. (5.22). La línea punteada representa el ansatz cuadrático dado por la ec.(5.24).

5.3 Relación entre B_0 y ϕ_0

En el modelo microscópico, en $t = 0$, hay solamente una temperatura presente de manera explícita T_f , la temperatura inicial del baño térmico de las partículas asociadas a los campos de las fluctuaciones. No obstante, la descripción de ambos fluidos necesita dos. Al equilibrio, sabemos que hay una sola temperatura (uniforme) presente. Eso es, al equilibrio, la diferencia entre la temperatura de las fluctuaciones y la asociada al campo de Klein-Gordon debería ser cero. En este límite, la interacción entre los dos debería ir (cuadráticamente) a cero. Si consideramos a su vez el formalismo microscópico, vemos que, cuando los valores iniciales del campo escalar van a cero, la interacción va a cero cuadráticamente. Ahora bien, el valor inicial de la diferencia de temperatura es fijado por la condición que el tensor de energía-momento del modelo macroscópico debe ser igual a su par correspondiente en el modelo microscópico. Como este último depende de ϕ_0 , esto sugiere que ϕ_0 y la diferencia de temperatura inicial están relacionadas

linealmente

$$\phi_0 = \left(\frac{\Lambda}{T_0}\right)^{\alpha/2} k_B (T_{c0} - T_{f0}) \quad (5.25)$$

Esta ecuación define la temperatura del campo T_{c0} a $t = 0$. Siguiendo nuestra filosofía de simplicidad, elegimos modelar el término de proporcionalidad usando una ley de potencia con α como parámetro. α será elegido para asegurar la causalidad (local). El corte, en el espacio de la inversa de longitud de onda, tiene unidad de temperatura en unidad natural. Además, tiene sentido que el potencial de interacción sea proporcional al corte pues las fluctuaciones lo son en el modelo microscópico (recuerde ec. (4.71) y el párrafo que le precede). En la práctica, esto significa que consideraremos la relación siguiente:

$$\phi_0^2 = \left(\frac{\Lambda}{T}\right)^\alpha (k_B T_c - k_B T_f)^2 \quad (5.26)$$

$$= \left(\frac{\Lambda}{T}\right)^\alpha \frac{B^2}{\beta^4} \quad (5.27)$$

En la última línea evaluamos β_c, β_f a orden cero, esto es, tomamos $\beta_c, \beta_f \simeq \beta$ pues estamos buscando solamente un término de segundo orden. Obtenemos pues las ecuaciones siguientes:

$$D_{II} = \Lambda^\alpha \sum_{i=0}^{imax} c_i T^{(i+4-\alpha)} B^2 \quad (5.28)$$

$$D_P = \Lambda^\alpha \sum_{i=0}^{imax} d_i T^{(i+4-\alpha)} B^2 \quad (5.29)$$

con los c_i y d_i constantes (pero aún dependiendo de los parámetros de la teoría, es decir m y λ). Observe que la adopción de esta definición significa que logramos modelar bastante bien nuestro término de interacción en un cierto rango de temperatura alrededor de T_f pero no podemos tomar el límite

$T_f \rightarrow 0$. Es conveniente introducir las siguientes definiciones

$$t^{00}(T) \equiv \Lambda^\alpha \sum_{i=0}^{imax} c_i T^{(i+4-\alpha)} \quad (5.30)$$

$$t^{ii}(T) \equiv \Lambda^\alpha \sum_{i=0}^{imax} d_i T^{(i+4-\alpha)} \quad (5.31)$$

Estamos ahora en condiciones de calcular el potencial de interacción que usaremos después en el modelo macroscópico. Sin embargo, debemos pagar un precio en la transición desde micro a macro. Como mencionamos anteriormente, dependiendo del valor de α , el límite $T \rightarrow 0$ puede ser mal definido. Por otro lado, si retornamos al modelo microscópico, el límite $\hbar \rightarrow 0$ implica que uno no puede esperar que el modelo microscópico sea válido a temperatura baja. Por cierto, no se espera obtener resultados válidos cuando $k_B T_f \ll \omega_k(0) = \sqrt{k^2 + K(0, \phi_0)}$ (ver ec. (4.27)). Esto indica que podemos obtener una temperatura mínima comparando la energía térmica $k_B T_f$ con la masa efectiva a $\phi_0 = 0$. Para encontrar T_{min} consideremos $\sqrt{K(0, 0)}$ contra T (ver figura). Para valores de T menor que $\sqrt{K(0, 0)}$ se puede esperar que nuestro ansatz ande mal. Definiremos pues T_{min} como la (única) solución de la ecuación

$$\sqrt{K(0, 0, T_{min})} - T_{min} = 0 \quad (5.32)$$

con $K(0, 0)$ solución de la ec.(4.71) con $\phi_0 = 0$ (ver fig.(5.4)). Por ejemplo, con $m = 1.1$ y $\lambda = 15$ obtenemos $T_{min} \simeq 10.198$

5.4 Cálculo de F y G

El potencial de interacción (3.61) es definido por dos funciones de la temperatura inversa media $\beta = (\beta_{(c)} + \beta_{(f)})/2$, F y G , o equivalentemente las adimensionales f y g definidas en (5.13) y (5.14). Ahora que hemos extraído lo que debería ser la parte interactiva del modelo microscópico al tiempo $t = 0$, y hicimos la correspondencia con las variables (es decir de T_f y ϕ_0 hacia T y B) del modelo macroscópico, estamos finalmente listos para cal-

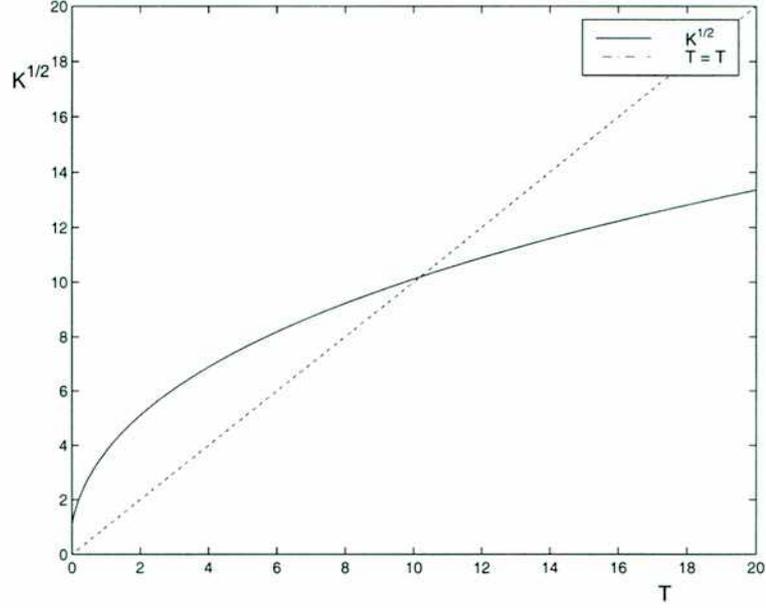


Fig. 5.4: $\sqrt{K(0,0)}$ como función de T . La intersección con la diagonal determina T_{min} . El valor de T_{min} depende únicamente de los parámetros m y λ . Con $m = 1.1$ y $\lambda = 15$ obtenemos $T_{min} \simeq 10.198$.

cular explícitamente el potencial de interacción. Usando (5.15) y (5.16) en conjunto con (5.30) y (5.31) obtenemos:

$$\frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{f+g}{\beta^4} \right) = \tilde{t}^{00} \quad (5.33)$$

$$\frac{2}{\beta^6} (2f+3g) - \frac{1}{\beta^5} \left(\frac{df}{d\beta} + \frac{dg}{d\beta} \right) = \tilde{t}^{ii} \quad (5.34)$$

con $\tilde{t}^{00} = t^{00}(\beta^{-1})$ y $\tilde{t}^{ii} = t^{ii}(\beta^{-1})$ dado por (5.30) y (5.31). Para aliviar la notación dejaremos de utilizar el tilde desde ahora. No es complicado invertir estas ecuaciones para obtener expresiones para f y g . Como lo explicamos anteriormente, debemos fijar nuestro límite de integración en el rango donde creemos que nuestro ansatz para t^{00} y t^{ii} es aceptable. Definiendo $\beta_{max} = T_{min}^{-1}$ obtenemos:

$$f+g = \beta^4 \int_{\beta}^{\beta_{max}} dx \int_x^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + a\beta^5 + b\beta^4 \quad (5.35)$$

donde a y b son constantes de integración. b de hecho resultará ser irrelevante. Tenemos

$$t^{ii} = \frac{2}{\beta^6} (2f + 3g) \quad (5.36)$$

$$-\frac{1}{\beta^5} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta^4 \int_{\beta}^{\beta_{max}} dx \int_x^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + a\beta^5 + \beta^4 b \right\} \quad (5.37)$$

$$= \frac{4}{\beta^6} \left\{ \beta^4 \int_{\beta}^{\beta_{max}} dx \int_x^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) - g \right\} + \frac{6}{\beta^6} g - \frac{a}{\beta} \quad (5.38)$$

$$-\frac{4}{\beta^2} \int_{\beta}^{\beta_{max}} dx \int_x^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) \quad (5.39)$$

$$= \frac{2}{\beta^6} g + \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) - \frac{a}{\beta} \quad (5.40)$$

que nos lleva a

$$g = \frac{1}{2} \beta^6 t^{ii} - \frac{1}{2} \beta^5 \int_{\beta}^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + \frac{1}{2} \beta^5 a \quad (5.41)$$

Reemplazando en la expresión para $f + g$ encontramos inmediatamente

$$f = \beta^4 \int_{\beta}^{\beta_{max}} dx \int_x^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) - \frac{1}{2} \beta^6 t^{ii} + \frac{1}{2} \beta^5 \int_{\beta}^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + \frac{1}{2} a \beta^5 + b \beta^4 \quad (5.42)$$

Eso es, usando (5.13) y (5.14)

$$F = \int_{\beta}^{\beta_{max}} dx \int_x^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) - \frac{1}{2} \beta^2 t^{ii} + \frac{1}{2} \beta \int_{\beta}^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + \frac{1}{2} a \beta + b \quad (5.43)$$

y

$$G = \frac{1}{2} t^{ii} - \frac{1}{2\beta} \int_{\beta}^{\beta_{max}} dy t^{00}(y) + \frac{a}{2\beta} \quad (5.44)$$

Las condiciones de causalidad involucran derivadas de F y G con respecto a $u = \beta^2 = T^{-2}$. Tenemos la relación siguiente:

$$\frac{dF}{du} = -\frac{1}{2} T^3 \frac{dF}{dT} \quad (5.45)$$

Revertiendo a la vieja notación (eso es $t^{00} = t^{00}(T)$) y similarmente con

t^{ii}) obtenemos

$$\frac{dF}{du} = -\frac{1}{4}T \int_{T_{\min}}^T dz \frac{1}{z^2} t^{00}(z) - \frac{1}{2}t^{ii}(T) - \frac{1}{4}t^{00}(T) + \frac{T}{4} \frac{\partial}{\partial T} t^{ii}(T) + \frac{1}{4}Ta \quad (5.46)$$

$$G = \frac{1}{2}t^{ii}(T) - \frac{T}{2} \int_{T_{\min}}^T dz \frac{1}{z^2} t^{00}(z) + \frac{1}{2}Ta \quad (5.47)$$

$$\frac{dG}{du} = -\frac{1}{4}T^3 \frac{\partial}{\partial T} t^{ii}(T) + \frac{1}{4}T^3 \int_{T_{\min}}^T \frac{1}{z^2} t^{00}(z) dy + \frac{1}{4}T^2 t^{00}(T) - \frac{1}{4}aT^3 \quad (5.48)$$

con el límite inferior de integración $T_{\min} > 0$ para asegurar convergencia.

5.5 Restricciones impuestas por causalidad y la segunda ley de la termodinámica

Podemos analizar ahora las restricciones impuestas a nuestro modelo como consecuencia de consideraciones de causalidad. Empecemos recordando las condiciones locales de causalidad ([53])

$$\frac{dF}{du} > 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{dG}{du} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{dF}{du} + G \right) < 0 \quad (5.50)$$

$$\left(\frac{dG}{du} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{dF}{du} + G \right) \right) \frac{dF}{du} + \frac{G^2}{4\beta^2} < 0 \quad (5.51)$$

$\frac{dF}{du}$ fue escrita antes (5.46). Nótese que las dos últimas implican la primera.

Ahora

$$\frac{dG}{du} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{dF}{du} + G \right) = -\frac{T^3}{2} \int_{T_{\min}}^T dz \frac{1}{z^2} t^{00}(z) + \frac{1}{2}T^3 a \quad (5.52)$$

Es un simple ejercicio de álgebra escribir la última, pero la expresión

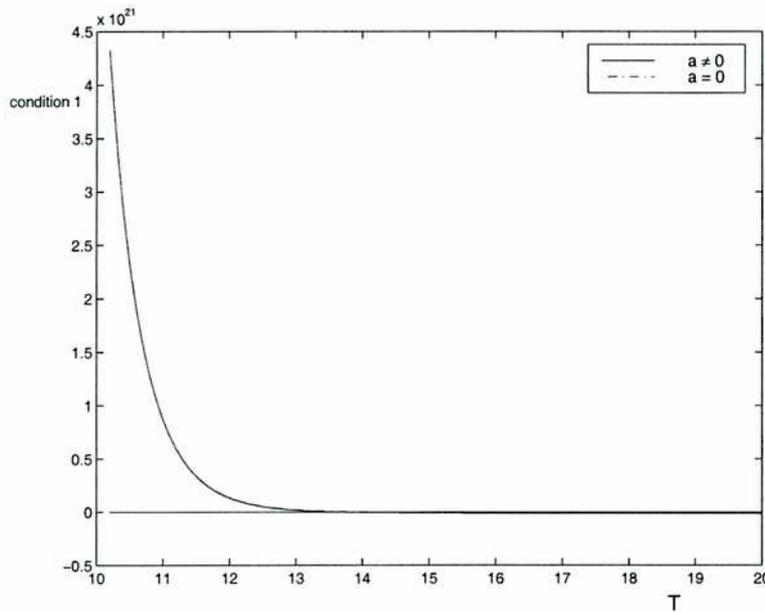


Fig. 5.5: La primera condición de causalidad, ec. (5.49), como función de la temperatura graficada con dos elecciones posibles para a . El rango permitido de temperatura corresponde a tener la función positiva. El valor de $\alpha = 25.9$, con $T_{min} = 10.198$ y la constante de integración (ver ec. (5.35)) fue elegida cero. Otros parámetros son $m = 1.1, \lambda = 15$, la inversa de longitud de onda de corte $\Lambda = 40$ y las condiciones iniciales $\phi_0 = 0$ y $p_0 = 0$ (ver ecs. (5.30) y (5.31)).

es complicada y no dice mucho. Nótese que la segunda se verifica siempre que $t^{00} > 0$, una desigualdad que se cumple en general con nuestro modelo microscópico. b no aparece y por lo tanto no es relevante. Las condiciones se verifican para un rango bastante amplio de valores de α .

No obstante, veremos más tarde que el mejor ajuste para nuestro modelo se encuentra con la elección para α que prácticamente satura las condiciones, es decir, que hacen que las condiciones se hagan nulas para $T = T_f$. Queda por determinar la elección de a . Consideremos los gráficos siguientes, hecho suponiendo dos valores distintos para a :

Nótese que en la fig. (5.8), la condición deja de valer para un valor inferior de T . Si uno quiere llegar hasta $T = T_f$, se debe modificar el valor de α pero este cambio a su vez produce un peor ajuste cuando se compara los modelos macroscópicos y microscópicos. Por ende, se eligió $a = 0$.

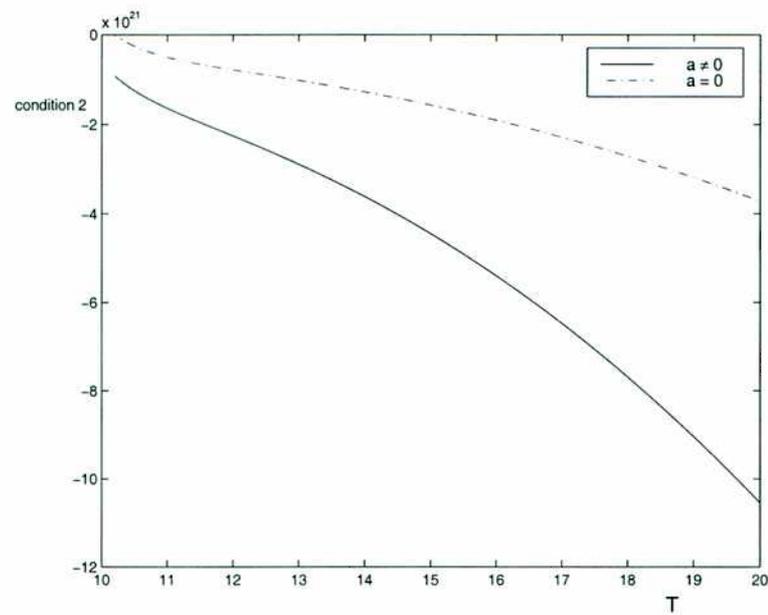


Fig. 5.6: La segunda condición de causalidad, ec. (5.50), como función de la temperatura graficada con dos elecciones posibles para a . Ver la fig. (5.9) para detalles.

Para claridad se muestra los gráficos con el valor elegido de a , o sea $a = 0$. La primera condición (5.49) se muestra en la figura (5.9), la segunda condición (5.50) en la figura (5.10) y la tercera (5.51) en la figura (5.11). Todas son graficadas como función de la temperatura T , con el valor $\alpha = 25.9$. (también $m = 1.1$, $\phi_0 = 2 * m$, $p_0 = 0$, $\Lambda = 40$, $\lambda = 15$ y $T_{min} \approx 10.198$. como fue mostrado en la figura (5.4)).

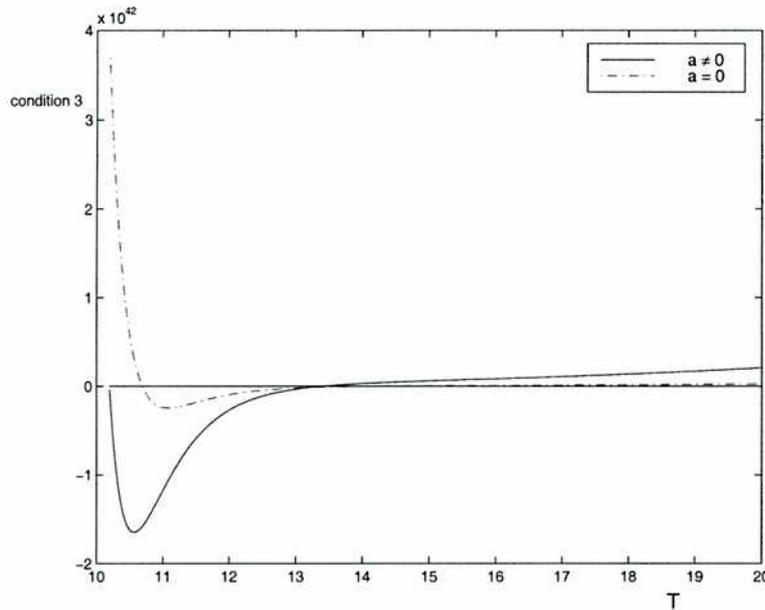


Fig. 5.7: La tercera condición de causalidad, ec. (5.51) graficada con dos elecciones posibles para a . El valor no nulo de a es atractivo pues hace que las condiciones de causalidad sea válida para todo el rango (T_{min}, T_f) . Ver fig. (5.8) para un acercamiento. Ver la figura (5.9) para detalles.

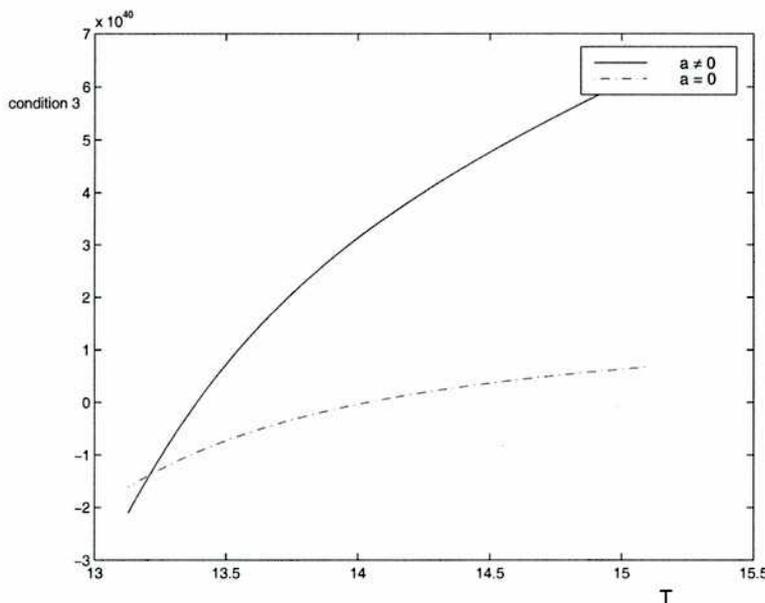


Fig. 5.8: Se hizo un acercamiento de la fig. (5.7). Se ve que en el caso $a \neq 0$ la tercera condición (5.51) deja de cumplirse para una temperatura inferior.

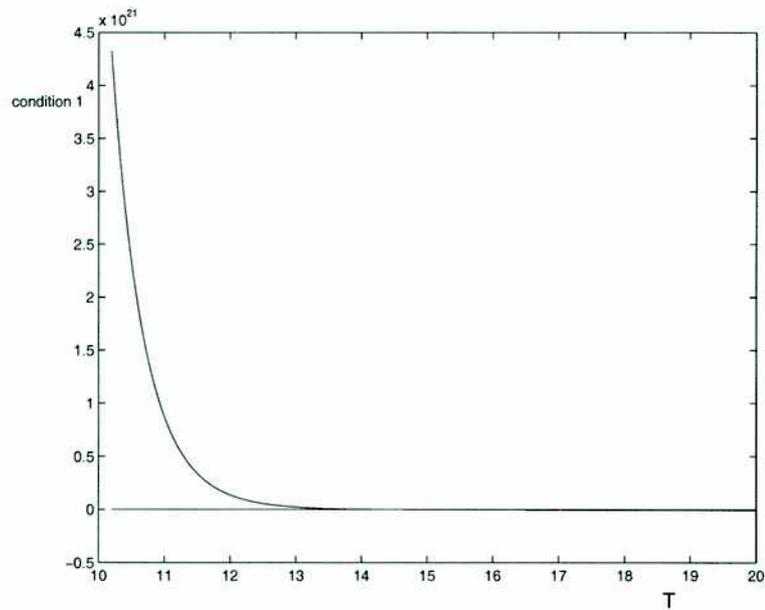


Fig. 5.9: La primera condición de causalidad, ec. (5.49), como función de la temperatura. El rango permitido de temperatura corresponde a tener la función positiva. El valor de $\alpha = 25.9$, con $T_{min} = 10.198$ y la constante de integración (ver ec. (5.35)) fue elegido a cero. Otros parámetros son $m = 1.1, \lambda = 15$, la inversa de longitud de onda de corte $\Lambda = 40$ y las condiciones iniciales $\phi_0 = 0$ y $p_0 = 0$ (ver ecs. (5.30) y (5.31)).

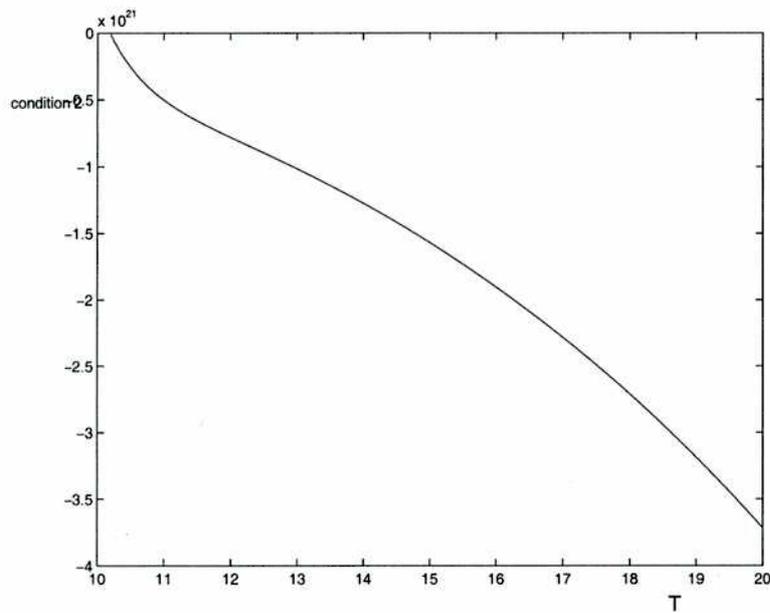


Fig. 5.10: La segunda condición de causalidad, ec. (5.50), como función de la temperatura. Ver la fig. (5.9) para detalles.

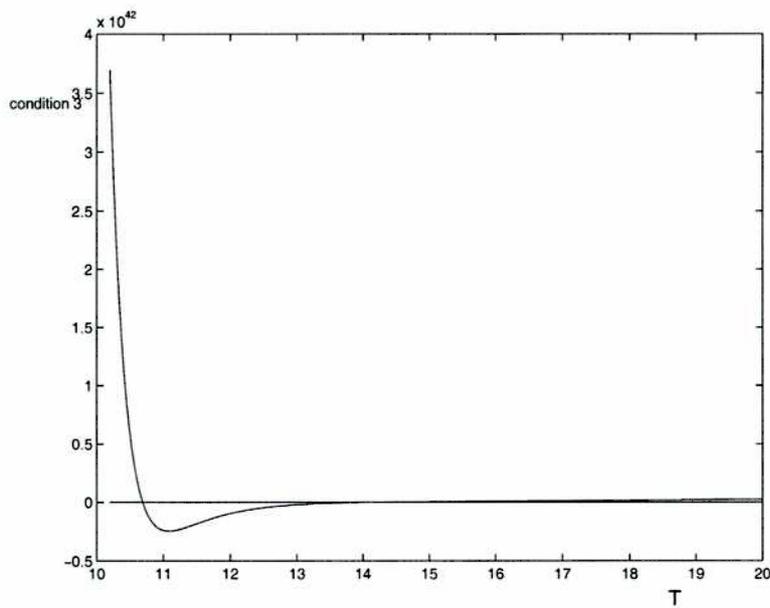


Fig. 5.11: La tercera condición de causalidad, ec. (5.51). Ver la figura (5.9) para detalles.

Capítulo 6

Comparación entre los modelos microscópico y macroscópico

Como demostraremos en este capítulo, el modelo macroscópico tiene éxito al reproducir la evolución del campo medio y la densidad de energía de las fluctuaciones, siempre que la escala temporal sea más corta que la del tiempo de recurrencia (habitualmente un tiempo muy largo) pero con tiempos suficientemente largos para que las correlaciones iniciales entre las fluctuaciones desaparezcan. Estos resultados son prometedores e indican que este punto de vista puede ser útil para explorar escenarios de recalentamiento no lineal de una manera covariante.

6.1 Víncular las dinámicas

Para comparar los dos modelos, debemos elegir los parámetros de manera consistente para asegurar que estemos comparando efectivamente el mismo sistema físico. Algunos parámetros son trivialmente elegidos pues suponemos que la masa de la partículas m y la constante de acoplamiento λ son exactamente las mismas en ambos modelos. También partimos de la hipótesis que la temperatura $k_B T_f$ en el modelo microscópico es igual a $\beta_{f_0}^{-1} = (\beta_0 - B_0/2)^{-1}$. Las cantidades que deberían ser iguales, al menos inicialmente, son la densidad de energía total, la presión total y $K(0, \phi_0)$. Finalmente, como iden-

tificamos el valor medio del campo escalar con el campo ϕ , las condiciones iniciales correspondientes se igualarán. Como fuimos hasta el orden en $1/N$ en el desarrollo para el sistema microscópico, se conservan la densidad de energía total y la entropía.

Siendo un sistema Hamiltoniano, el sistema macroscópico también conservará la energía (o como el sistema es homogéneo, la densidad de energía pues difieran por una constante). Sin embargo, aunque posible, no es muy deseable pedir también conservación de la entropía en el sistema macroscópico. Físicamente, siendo el sistema macro una versión de granulado grueso del sistema micro, uno espera una creación de entropía. Esta creación es importante pues permitirá describir aspectos importantes del comportamiento del campo escalar que no sería posible lograr de otra manera (la disipación). Para describir la creación de entropía, utilizaremos la definición de la corriente de entropía como

$$S^a = \chi^a - \beta_{(c)b} T^{ab} - \beta_{(f)b} T^{ab} - \xi j^a \quad (6.1)$$

Como dijimos anteriormente (3.38), la producción de entropía es

$$\nabla_a S^a = -B_a I^a - \xi \Delta \quad (6.2)$$

Definiendo

$$I^a = D\xi\beta^a + EB^a + F\beta_b B^b \beta^a \quad (6.3)$$

$$\Delta = A\xi + C\beta_a B^a \quad (6.4)$$

Podemos reescribir (6.2) de la manera siguiente

$$\nabla_a S^a = -(A\xi + C\beta_a B^a)\xi - (D\xi\beta^a + EB^a + F\beta_b B^b \beta^a) B_a \quad (6.5)$$

Si uno demanda $\nabla_a S^a = 0$ entonces $A = E = F = (C + D) = 0$. Relajando estas restricciones para permitir una creación no nula de entropía introduce más términos en las ecuaciones de movimiento. Más específicamente, usare-

mos el ansatz siguiente para Δ y I^a :

$$\Delta = -A\xi - C\beta B \quad (6.6)$$

$$I^0 = -C\xi\beta \quad (6.7)$$

Eso es,

$$\Delta = -C\beta B - Ap \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}B \right) \quad (6.8)$$

$$I^0 = C \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}B \right) \frac{1}{T} p \quad (6.9)$$

donde p es el momento conjugado a ϕ , C tiene unidad de T^5 y A de T^2 . Elegimos modelar estos factores de la manera siguiente

$$C = C_0 T^4 \phi \quad (6.10)$$

$$A = A_0 \phi^2 \quad (6.11)$$

Recuerde que ϕ tiene unidad de temperatura en unidades naturales, que son las que adoptamos en general en esta tesis. La dependencia en ϕ es para obligar el punto fijo $\phi_c = 0$. A_0 es el término de producción de entropía. Esta producción de entropía estará asociada con el decaimiento del campo escalar pues, como consecuencia de la conservación de la energía, este decaimiento implica un crecimiento de la densidad de energía de las fluctuaciones. Sin esta creación, y dentro de nuestro modelo, la amplitud del campo escalar queda constante. El valor de C_0 es elegido demandando que el valor inicial del lado izquierdo de la ecuación para \dot{p} sea el mismo en ambas teorías. Obtenemos entonces :

$$C_0 = \left[K(0, \phi_0) - m^2 - \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + A_0 \phi_0 \left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{2} B_0 \right) p_0 \right] \frac{1}{T_0^3 B_0} \quad (6.12)$$

Podemos ahora concentrarnos en las ecuaciones (3.18) y escribirlas en términos de nuestras variables. Para integrarla numéricamente, es conveniente reescribirlas en la forma siguiente:

$$\dot{\phi} = p \quad (6.13)$$

$$\dot{p} = -V'(\phi) - \Delta \quad (6.14)$$

$$\dot{T} = -\Delta p f_1(T, B) - 2I^0 f_2(T, B) \quad (6.15)$$

$$\dot{B} = \Delta p f_3(T, B) + 2I^0 f_4(T) \quad (6.16)$$

donde Δ y I^0 son definidos en ecs. (6.8) y (6.9). Las funciones $f_i(\beta)$ son bastante complicadas y son obtenidas reemplazando el potencial de interacción en las ecuaciones de movimiento. Reordenando con el fin de obtener ecuaciones en una forma útil para la integración numérica, obtenemos

$$f_1 = \frac{g_4 - g_2}{g_1 g_4 - g_2 g_3} \quad (6.17)$$

$$f_2 = \frac{g_2}{g_1 g_4 - g_2 g_3} \quad (6.18)$$

$$f_3 = \frac{g_1 - g_3}{g_1 g_4 - g_2 g_3} \quad (6.19)$$

$$f_4 = \frac{g_1}{g_1 g_4 - g_2 g_3} \quad (6.20)$$

donde

$$g_1 = \frac{1}{T^2} T_f^2 \rho'_q + \tau'_1(T) B^2 \quad (6.21)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} T_f^2 \rho'_q + 2\tau_1(T) B \quad (6.22)$$

$$g_3 = -\frac{1}{T^2} T_f^2 \rho'_q + \sigma'_1(T) B \quad (6.23)$$

$$g_4 = -\frac{1}{2} T_f^2 \rho'_q + \sigma_1(T) \quad (6.24)$$

con ρ'_q indicando que la derivada se toma con respecto a T_f

$$\tau_1(T) = \Lambda^\alpha \sum_{i=0}^{imax} c_i T^{i+4-\alpha} \quad (6.25)$$

$$\sigma_1(T) = 4 \int_{T_{min}}^T \frac{1}{z^2} \tau_1(z) dz \quad (6.26)$$

y los c_i salen de la aproximación por cuadrado mínimos. como se explico en la sección 5.2. La constante de integración a que aparece en ec.(5.35) fue puesta en cero, como discutimos en la sección 5.5.

6.2 Resultados

Estamos interesados en describir el campo escalar y también la densidad de energía de las fluctuaciones. De los varios parámetros que aparecen en nuestra modelo macroscópicos, casi todos son fijados por las condiciones iniciales o por los parámetros de la teoría microscópica. T_{min} está determinado por la ec. (5.32) y depende solamente de m y λ . C_0 está fijado por la ec. (6.12). Finalmente, la constante de integración a fue puesta en cero. Hay dos parámetros que pueden ser ajustados: A_0 (ver ec.(6.11)) y α . En ambos casos, estos parámetros no son fijados por las condiciones iniciales pero fueron elegidos para ajustar algún comportamiento del campo escalar, más precisamente, para emular el decaimiento del campo escalar en el caso de A_0 y ajustar la fase en el caso de α . Además, como vimos anteriormente, el valor de α es el que casi satura las condiciones de causalidad. Sin embargo, una vez fijados, no se los puede cambiar cuando otro conjunto de condiciones iniciales es elegida. En los ejemplos mostrados a continuación, $A_0 = 0.9$ y $\alpha = 25.9$.

Los siguientes valores fueron elegidos para la simulaciones numéricas : $m = 1.1$, $\lambda = 15$ (ver ec. (4.2)), $T_f = 14$ (ver ec.(4.29)), El alto valor de λ es para asegurar que los efectos no lineales sean importantes. El corte $\Lambda = 40$ (ver (4.46)) con un espaciamento $\Delta_k = .05$ (ver (4.41)) porque da una muy buena aproximación de las integrales por sumas de Riemann. Esta elección conduce a trabajar con 400 modos complejos en el modelo microscópico. Este sistema fue integrado usando Fortran 77 usando el método de Bulirsch-Stoer tal como fue implementado en el Numerical Recipes [74]. Un simple

algoritmo de Runge-Kutta con paso adaptivo fue usado para resolver las ecuaciones para el modelo microscópico.

Nuestro objetivo es demostrar que el modelo macroscópico captura los aspectos esenciales del modelo microscópico. Para hacerlo, mostraremos gráficos que muestran cantidades macroscópicas relevantes en los dos modelos bajo las mismas condiciones iniciales. Los valores iniciales para el campo escalar son $\phi_0 = f * m$ y $p_0 = 0$. Se eligió escalear el campo escalar con la masa pues es el parámetro básico de la teoría que tiene la misma unidad que ϕ y que por ende, fija la escala para el campo escalar. Para la primera serie, se elige $f = 1$. Con esta elección, el campo escalar por sí solo no es muy diferente de un campo escalar de Klein-Gordon con $m_{eff}^2 = K(0,0)$. Tenemos también el parámetro $\alpha = 25.9$ (ver ec.(5.25)), con el valor que casi satura las condiciones de causalidad (ver (5.49),(5.50) y (5.51)) , y también $T_{min} = 10.198$, ec. (5.32). En la figura (6.1), mostramos la densidad de energía. Hay que recalcar que en ambos casos, la densidad de energía se conserva con una precisión del orden de la precisión numérica del integrador. La pequeña diferencia entre los dos valores es causada en el error inherente de la aproximación de ρ_f por el método de cuadrados mínimos (casi toda la densidad de energía inicial se encuentra en la densidad de energía de las fluctuaciones).

En la figura (6.2), el campo escalar es graficado en función del tiempo en ambos modelos por separado. Para estas condiciones iniciales, son muy parecidos. Para facilitar la comparación, ambos gráficos son mostrados superpuestos en la figura (6.3). En la figura (6.4), la densidad de energía de las fluctuaciones para ambos modelos se muestra. Recordamos que

$$\rho_f^{macro}(t) = \sum_{i=0}^{i_{max}} e_i T_f^i(t) \quad (6.27)$$

donde los e_i son obtenidos por cuadrados mínimos en la ec. (4.77) y

$$T_f = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{2}B \right)^{-1} \quad (6.28)$$

también

$$\rho_f^{micro}(t) = T_+^{00} - \frac{1}{2}p^2(t) - V(\phi(t)) \quad (6.29)$$

A $t = 0$, los dos deberían ser iguales pues la energía de interacción es nula inicialmente. Nótese que ρ_f es una función de T_f . Para que la lectura sea más fácil, la salida en ambos casos fue procesada con un filtro pasa bajo para eliminar las frecuencias altas y así mostrar la tendencia genérica. En el modelo microscópico, definimos la densidad de energía substrayendo de la densidad total la densidad de energía del campo escalar.

En la siguiente serie de figuras (fig.(6.5) hasta (6.8)), tenemos $f = 2$ para mostrar un decaimiento mas pronunciado del campo. En la figure (6.6) se ve que el modelo macroscópico captura efectivamente el decaimiento del campo para tiempo largo. Ninguno de los parámetros del modelo hidrodinámico fue cambiado, los mismos valores de α, T_{min} y A_0 que fueron usados en el caso $f = 1$ fueron retenidos, es decir $\alpha = 25.9$, $a = 0$, $T_{min} = 10.198$ y $A_0 = 0.9$ para mostrar el poder predicativo del modelo. Teniendo en cuenta las hipótesis bastante groseras sobre los cuales fue basado nuestro modelo, el resultado es bastante satisfactorio.

En la figura (6.7), comparamos la derivada temporal del campo escalar con su par correspondiente del modelo microscópico. Finalmente, mostramos en la figura (6.8), la densidad de energía de las fluctuaciones en ambos modelos en el caso $f = 2$.

Concluimos que el modelo macroscópico es capaz de describir la evolución del campo escalar y de la densidad de energía de las fluctuaciones con la precisión requerida para las aplicaciones cosmológicas.

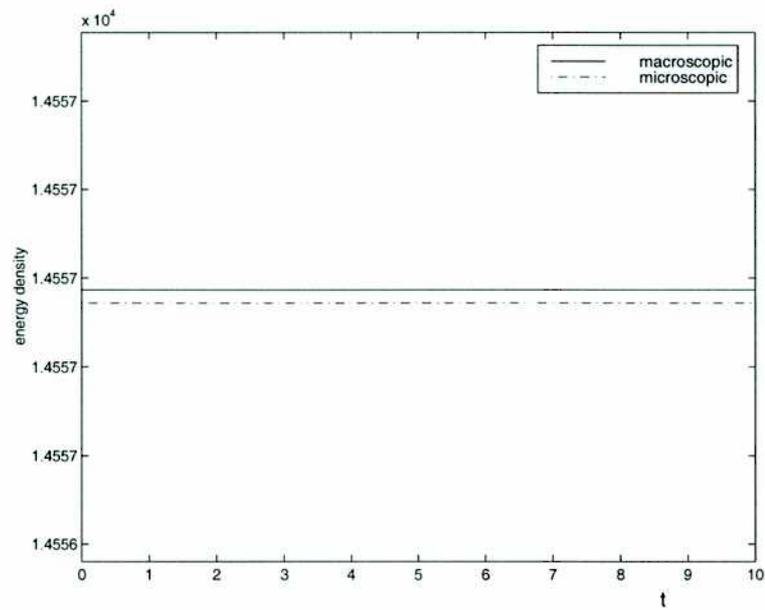


Fig. 6.1: Densidad de energía como función del tiempo en el caso $\phi_0 = m$. La línea llena corresponde al modelo macroscópico y la línea punteada al modelo microscópico. La pequeña diferencia proviene del error generado por la estimación de cuadrados mínimos cuando calculamos la densidad de energía de las fluctuaciones, ρ_f , y la energía de interacción, $t^{00} B^2$

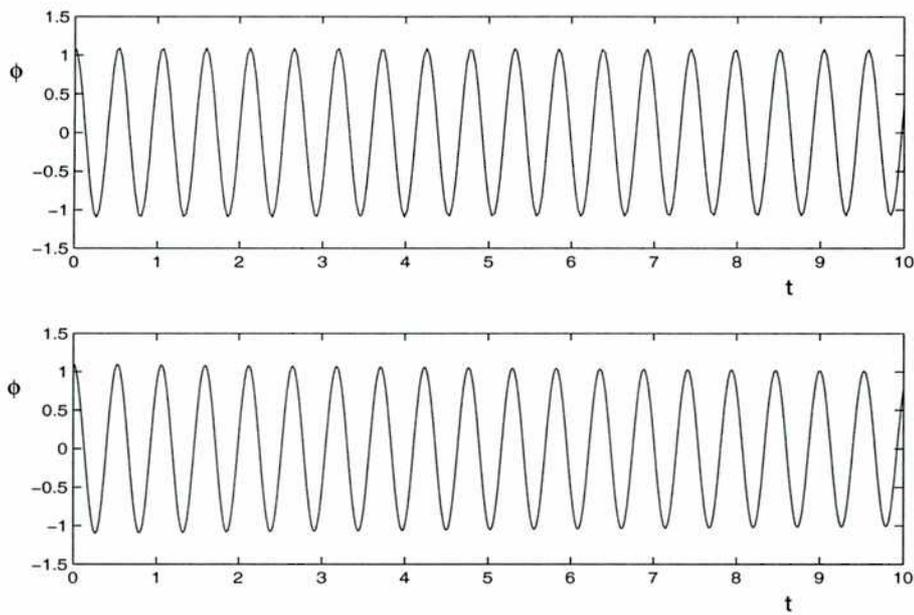


Fig. 6.2: El campo escalar mostrado como función del tiempo en ambos modelos. El gráfico superior corresponde al modelo microscópico y el inferior al modelo macroscópico. Los valores iniciales son $\phi_0 = m$ y $p = 0$, el parámetro $A_0 = 0.9$, el parámetro $a = 0$ y $\alpha = 25.9$.

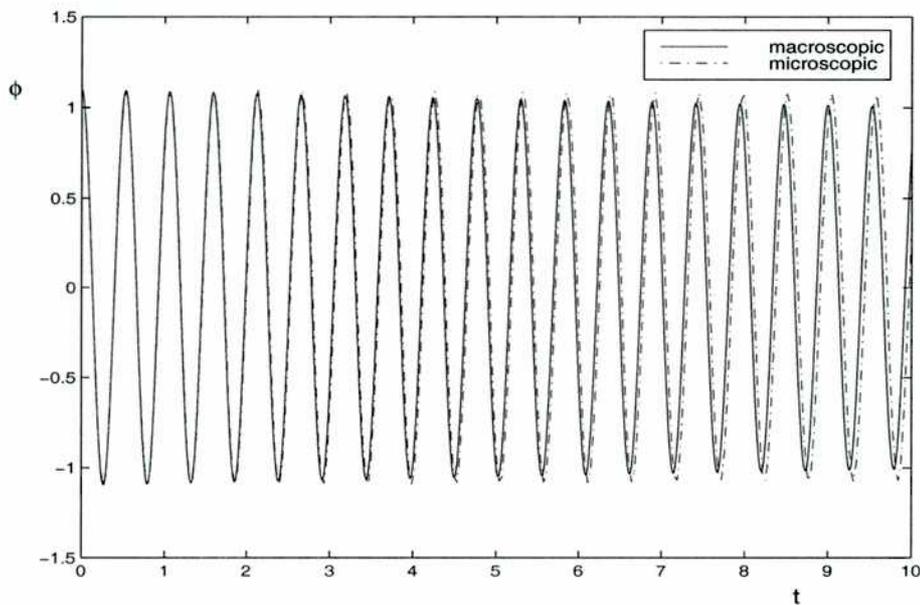


Fig. 6.3: Los campos escalares de la fig.(6.2) superpuestos. La línea llena representa el caso macroscópico y la línea punteada la teoría microscópica.

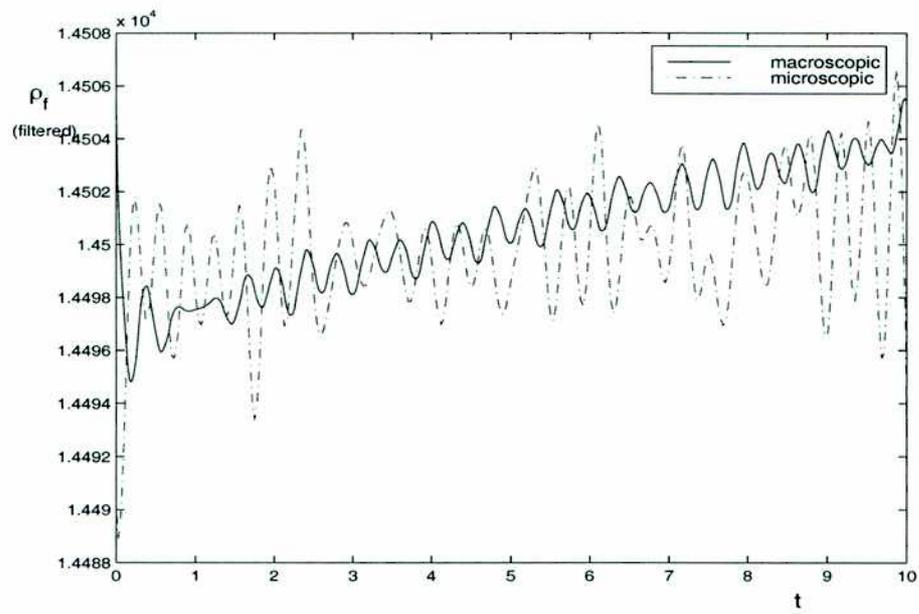


Fig. 6.4: Valor aproximado de la densidad de energía de las fluctuaciones. La línea llena representa la teoría macroscópica dada por la ec. (6.27) y la línea punteada la teoría microscópica dada por la ec. (6.29).

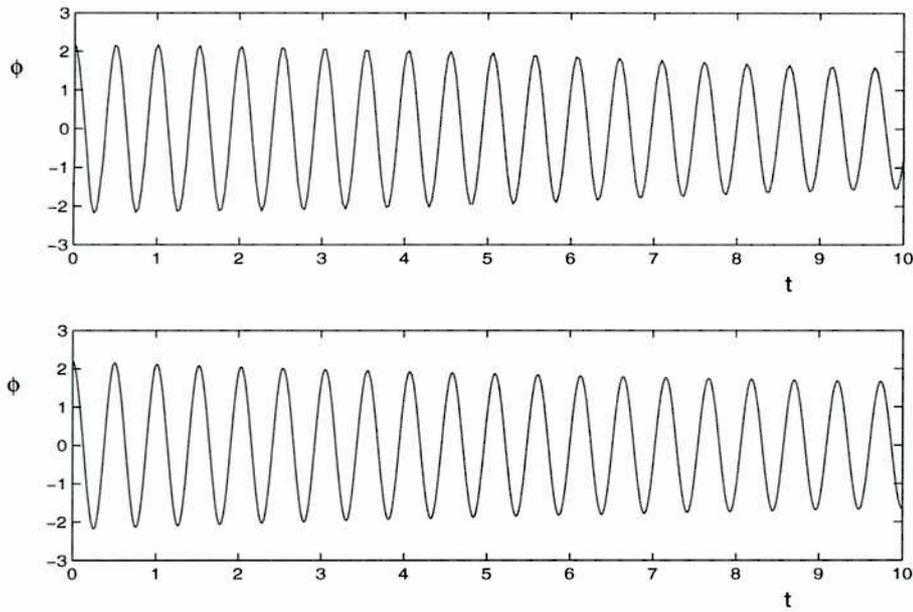


Fig. 6.5: El campo escalar como función del tiempo en el caso $\phi_0 = 2m$. El gráfico superior muestra el campo del modelo macroscópico y el inferior el del caso microscópico. Todos los parámetros tienen los mismos valores que en el caso de la fig. (6.2) es decir $A_0 = 0.9$, $a = 0$ y $\alpha = 25$

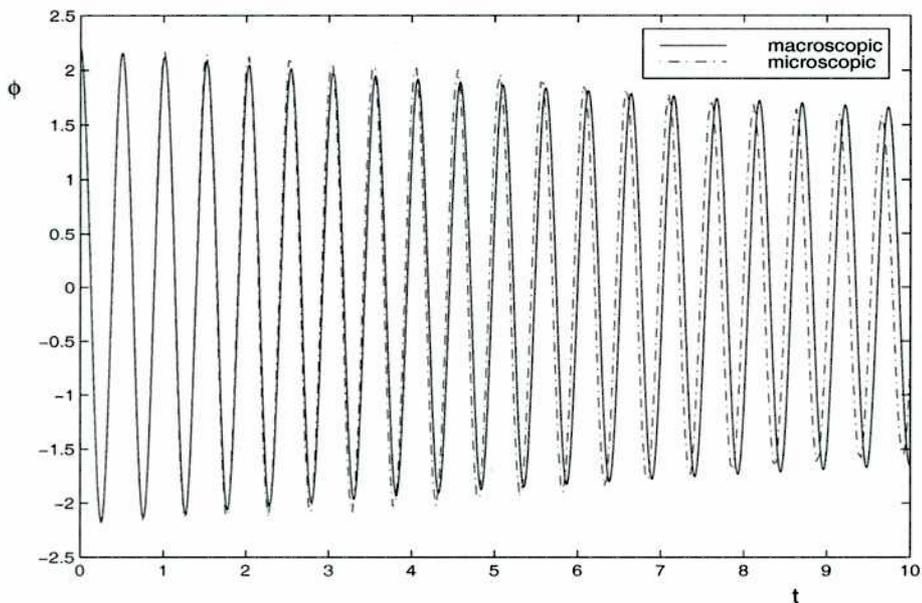


Fig. 6.6: Lo mismo que en la fig.(6.5) pero mostrados juntos. La línea llena es el caso macroscópico y la punteada es el caso microscópico.

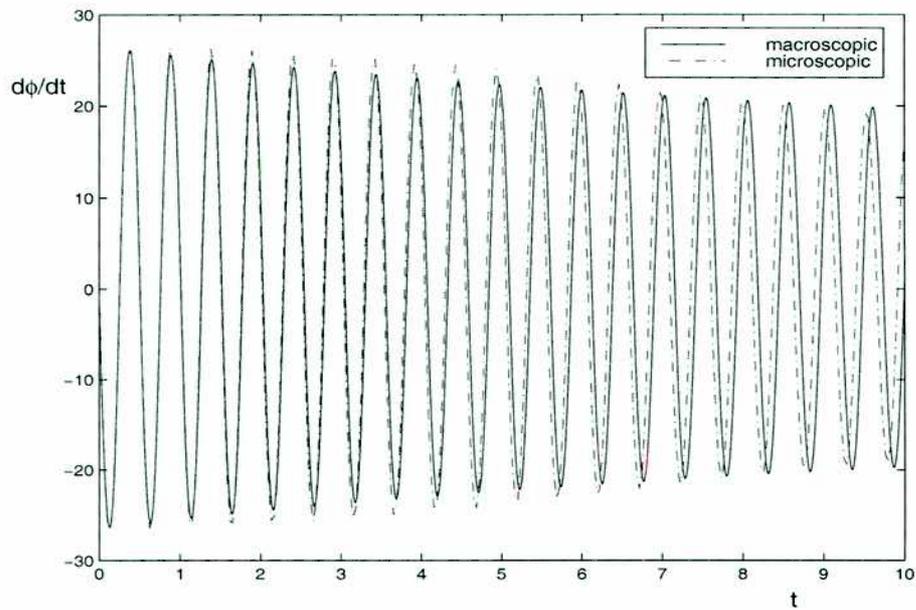


Fig. 6.7: Las mismas condiciones iniciales que en la fig.(6.5) pero la derivada temporal del campo escalar es mostrada en función del tiempo. La línea llena representa el caso macroscópico y la punteada el caso microscópico.

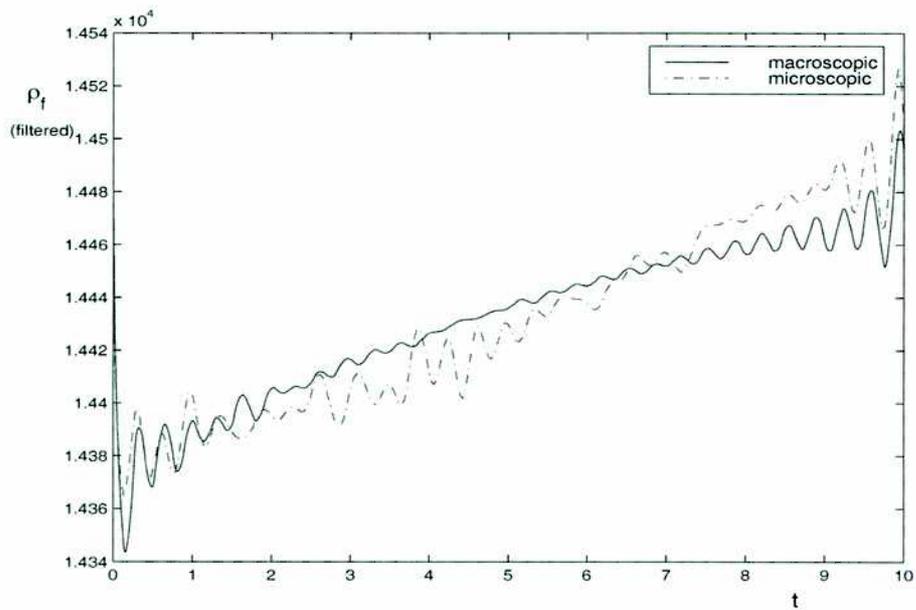


Fig. 6.8: La densidad de energía de las fluctuaciones vista después de pasar por un filtro pasa-bajo en el caso $\phi_0 = 2m$. y parámetros como en el caso de la fig. (6.5). La línea llena representa el caso macroscópico y la punteada el caso microscópico.

Capítulo 7

Conclusión

Este trabajo de investigación consta de dos partes. La primera de carácter más general, en la cual se desarrolla el formalismo y la segunda, donde se busca un ejemplo relevante para aplicarlo.

En la primera parte se muestra que el campo escalar de Klein-Gordon puede ser descrito en el marco de la teoría tipo divergencia. Además se puede también incluir sus fluctuaciones bajo el mismo formalismo. Las mismas pueden ser vistas como un fluido con una ley constitutiva simple o se puede tratar de simularlas de manera más precisa para estar en acuerdo con una descripción de un campo con autointeracción no-lineal. Nos apartamos del formalismo canónico de teoría tipo divergencia en el sentido que describimos la parte disipativa del fluido total como proveniente de un potencial de interacción entre los constituyentes fundamental del fluido disipativo.

En la segunda parte, para poder verificar algunos aspectos predictivos de la teoría consideramos un campo escalar en el marco de un desarrollo en $1/N$ quedándonos con el orden más bajo. También, consideramos solamente fluctuaciones térmicas. Esto nos permitió afrontar algunos de los problemas específicos de la implementación de nuestro modelo sin demasiadas complicaciones. Por ejemplo, con el propagador completo (término de vacío más la contribución de temperatura), el valor de expectación del tensor de energía-momento se vuelve complejo y además depende de la historia previa del campo. Por lo tanto, complicará la teoría microscópica y hará

más complejas la relación entre los dos formalismos. De todas formas, se vio que el sistema microscópico guarda suficiente riqueza pues aparecen las resonancias paramétricas. Trabajamos bajo la hipótesis de que la estructura del tensor de energía-momento inicialmente aportaba información relevante sobre su dependencia con la temperatura. Propusimos un vínculo entre la teoría microscópica y la macroscópica que nos permitió encontrar un potencial de interacción. Usamos la segunda ley de la termodinámica para proponer los términos de creación de entropía. Tratamos de utilizar lo más posible la información en $t = 0$ para determinar los parámetros que tuvimos que introducir. Finalmente, presentamos algunos resultados específicos pero representativos que muestran que el formalismo es prometedor y cumple con sus expectativas. Por la estructura del formalismo, sería directo trabajar en una métrica de Friedmann-Robertson-Walker y por lo tanto empezar a trabajar en el contexto de un modelo inflacionario. Es usual en este contexto simular el acoplamiento con los otros campos de materias vía un término fenomenológico ([19]) y se puede estudiar la creación de partículas vía amplificación paramétricas.

Finalmente, esta línea de investigación presenta un interés en sí, a parte de su posible aplicación al periodo inflacionario. Desarrollamos un formalismo de fluido, usando teoría tipo divergencia para un sistema intrínsecamente relativistas. Hay poca aplicaciones de teoría tipo divergencia a un sistema físico ([75]). El formalismo se podría extender a otra línea de investigación donde una versión fenomenológica sería útil para simular un campo fuera del equilibrio.

Quedan muchas cosas por hacer. Habría que incluir las fluctuaciones cuánticas, estudiar un modelo microscópico más interesante yendo a un orden más en el desarrollo $1/N$, trabajar en una métrica no-trivial y no-fija e incluir las ecuaciones de Einstein y estudiar un caso inhomogeneo para el campo medio. Con un modelo microscópico más complejo y su equivalente macroscópico, sería muy interesante comparar los resultados de estas simulaciones con los obtenidos usando los obtenidos usando el programa LatticeEasy ([76]). Este último, resuelve las ecuaciones exactas pero clásicas para los campos (bajo la argumentación que los efectos cuánticos son exponencial-

mente pequeños cuando recalentamiento empieza los números de ocupación siendo muy grandes) durante inflación. Sería entonces posible comparar de manera realmente precisa la robustez y exactitud del formalismo.

apéndice A

Cálculo de los valores de expectación del tensor de energía momento

Empezamos con

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_2}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma_f}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (\text{A.2})$$

usando las identidades bien conocidas

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}) \quad (\text{A.4})$$

que nos lleva a

$$T_f^{\mu\nu} = \left[\partial'^\mu \partial^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial'_\sigma \partial^\sigma \right] G_T(x, x')|_{x=x'} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} K G_T(x, x) \quad (\text{A.5})$$

con la prima denotando derivación respecto de x' y donde

$$G_T(x, x') = k_B T_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] [U_k(t)U_k^*(t') + U_k^*(t)U_k(t')] \quad (\text{A.6})$$

con el límite $\hbar \rightarrow 0$ ya hecho. Vamos a considerar primero el caso $\mu = \nu = 0$. Tenemos

$$\partial'_i \partial_i - \frac{1}{2} \eta^{00} (-\partial'_i \partial_i + \partial'_i \partial_i) G_T(x, x')|_{x=x'} = \quad (\text{A.7})$$

$$\left(\frac{1}{2} \partial'_i \partial_i + \frac{1}{2} \partial'_i \partial_i \right) G_T(x, x')|_{x=x'} = \quad (\text{A.8})$$

$$k_B T_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 + |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto

$$T_f^{00} = k_B T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 + [|\vec{k}|^2 + K] |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.10})$$

En el caso $\mu = \nu = i$ tenemos

$$\partial'_i \partial_i - \frac{1}{2} \eta^{jj} (-\partial'_i \partial_i + \partial'_j \partial_j) G_T(x, x')|_{x=x'} = \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\partial'_i \partial_i + \frac{1}{2} \partial'_i \partial_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \partial'_j \partial_j \right) G_T(x, x')|_{x=x'} = \quad (\text{A.12})$$

$$k_B T_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ (2k_i^2 - |\vec{k}|^2) |U_k(t)|^2 + |\dot{U}_k(t)|^2 \right\} = \quad (\text{A.13})$$

$$k_B T_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 - \frac{1}{3} |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.14})$$

Entonces

$$T_f^{ii} = k_B T_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 - \left(K + \frac{1}{3} |\vec{k}|^2 \right) |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.15})$$

El tensor de energía-momento clásico de un campo escalar está dado por

$$T_c^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_2}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (\text{A.16})$$

con

$$S_2 = \int \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi^i \partial^\nu \phi^i + \frac{K^2}{2\lambda} - \frac{1}{2} K \phi^i \phi^i - \frac{m^2}{\lambda} K \right\} \sqrt{-g} d^4 x \quad (\text{A.17})$$

donde factorizamos un factor N . Obtenemos

$$T_c^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \quad (\text{A.18})$$

$$+ \eta^{\mu\nu} \left\{ \frac{K^2}{2\lambda} - \frac{1}{2} \phi^2 K - \frac{m^2}{\lambda} K \right\} \quad (\text{A.19})$$

eso es

$$T_c^{00} = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \phi^2 K - \frac{K^2}{2\lambda} + \frac{m^2}{\lambda} K \quad (\text{A.20})$$

$$T_c^{ii} = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} \phi^2 K + \frac{K^2}{2\lambda} - \frac{m^2}{\lambda} K \quad (\text{A.21})$$

que conduce a

$$\langle T^{00} \rangle = \frac{1}{2} p^2 + k_B T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 \right. \quad (\text{A.22})$$

$$\left. + [|\vec{k}|^2 + K] |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$+ \frac{1}{2} \phi^2 K - \frac{1}{2\lambda} (K - m^2)^2 + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.24})$$

$$\langle T^{ii} \rangle = \frac{1}{2} p^2 + k_B T_f \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 \right. \quad (\text{A.25})$$

$$\left. - \left(K + \frac{1}{3} |\vec{k}|^2 \right) |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$- \frac{1}{2} \phi^2 K + \frac{1}{2\lambda} (K - m^2)^2 - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.27})$$

usando

$$\frac{K^2}{2\lambda} - \frac{m^2}{\lambda} K = \frac{1}{2\lambda} \left\{ K^2 - 2m^2 K + m^4 - m^4 \right\} \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \{K^2 - 2m^2K + m^4\} - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{1}{2\lambda} (K - m^2)^2 - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.30})$$

Ahora

$$\frac{1}{2}\phi^2 K + k_B T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{K |U_k(t)|^2}{2\omega_k^2(0)} = K \left\{ \frac{1}{2}\phi^2 + k_B T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|U_k(t)|^2}{2\omega_k^2(0)} \right\} \quad (\text{A.31})$$

que, usando (4.33) se reduce a:

$$\frac{1}{2}K\phi^2 + k_B T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{K |U_k(t)|^2}{2\omega_k^2(0)} = K \frac{(K - m^2)}{\lambda} \quad (\text{A.32})$$

Entonces

$$\langle T^{00} \rangle = \frac{1}{2}p^2 + k_B T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 + |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.33})$$

$$+ K \frac{(K - m^2)}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} (K - m^2)^2 + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.34})$$

$$\langle T^{ii} \rangle = \frac{1}{2}p^2 \quad (\text{A.35})$$

$$+ k_B T_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 - \frac{1}{3} |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.36})$$

$$- K \frac{(K - m^2)}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} (K - m^2)^2 - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.37})$$

llevándonos inmediatamente a la respuesta final

$$\langle T^{00} \rangle = \frac{1}{2}p^2 + k_B T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 + |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.38})$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} (K - m^2) (K + m^2) + \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.39})$$

$$\langle T^{ii} \rangle = \frac{1}{2}p^2 \quad (\text{A.40})$$

$$+ k_B T_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k^2(0)} \left\{ |\dot{U}_k(t)|^2 - \frac{1}{3} |\vec{k}|^2 |U_k(t)|^2 \right\} \quad (\text{A.41})$$

$$- \frac{1}{2\lambda} (K - m^2) (K + m^2) - \frac{m^4}{2\lambda} \quad (\text{A.42})$$

Bibliografía

- [1] C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).
- [2] L.D. Landau, y E.M.Lifshitz, *Mécanique des fluides* (Mir, 1971).
- [3] W.A. Hiscock y L. Lindblom, Phys. Rev. D **31**, 725 (1985).
- [4] L. Onsager, Phys. rev. **37**, 405, (1931) y Phys. Rev. **38**, 2265, (1931)
- [5] I. Prigogine, Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes, Interscience, New York, (1961)
- [6] S.R. de Groot, P.Mazur, Nonequilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam, (1962)
- [7] W. Israel, Ann. Phys. (N.Y.), **100**, 310, (1976)
- [8] W. Israel, J.M. Stewart, Ann. Phys., (N.Y.), **118**, 341, (1979)
- [9] I.S. Liu, I. Müller, T. Ruggeri, Ann. Phys. , (N.Y.), **169**, 191, (1986)
- [10] R. Geroch, L. Lindblom, Phys. Rev. D, **41**, 1855, (1990)
- [11] R. Geroch, J. Math. Phys. **36**, 4226, (1995)
- [12] L. Lindblom, Ann. Phys., (N.Y.), **247**, (1996)
- [13] V.A. Belinski, E.S. Nikomarov, I.M. Khalatnikov, Sov. Phys. JETP **50**(2), 213, (1979)
- [14] D. Pavón, J. Bafaluy, J.D. Jou, Clas. Quatum Grav. **8**, 347, (1991)

- [15] B.D. Coleman, Arch. Rat. Mech. Anal. **17**, 1 (1964)
- [16] C. Truesdell, *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York (1969)
- [17] W. Noll, *The foundations of Mechanics and Thermodynamics*, Springer, Berlin (1974)
- [18] R. Geroch, gr-qc/0103112
- [19] W. Zimdahl, D. Pavón, Gen.Rel.Grav. **33**, 791-804, (2001)
- [20] D. Jou, G. Leblon and J. Casas Vasquez, *Extended Thermodynamics* (2nd edn Heidelberg: Springer, 1996)
- [21] A.M. Schweizer, Astron. Astrophys. **151**, 79, (1985)
- [22] A. Di Prisco, L. Herrera, M. Esculpi, Class. Quantum Grav. **13**, 1053, (1996)
- [23] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347(1981)
- [24] A.D. Linde, Phys.Lett. **B 108**, 389(1982)
- [25] A. Albrecht y P.J.Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982)
- [26] La literatura sobre la epoca de precalentamiento es muy amplia. Algunos trabajos destacados son L. Kofinan, A. Linde and A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett **73**, 3195 (1994); Y. Shtanov, J. Traschen and R. Brandenberger, Phys. Rev. **D51**, 5438 (1995); P. Greene, L. Kovman, A. Linde and A. Starobinsky, Phys. Rev. **D56**, 6175 (1997); B. Bassett, D. Kaiser and R. Maartens, Phys. Lett. **B455**, 84 (1999); B. Bassett, C. Gordon, R. Maartens and D. Kaiser, Phys. Rev. **D61**, 061302 (2000).
- [27] S. Tsujikawa y B. Bassett, Phys. Lett. B **536**, 9 (2002)
- [28] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman y J. F. J. Salgado, Phys. Rev. **D54**, 7570 (1996); H. Fujisaki, K. Kumekawa, M. Yamaguchi y M. Yoshimura, Phys. Rev. **D53**, 6805 (1996)

- [29] S. A. Ramsey y B. L. Hu, Phys. Rev. D56, 661 (1997); S. A. Ramsey y B. L. Hu, Phys. RevD56, 678 (1997)
- [30] S. Khlebnikov y I. Tkachev, Phys. Rev. Lett **77**, 219 (1996).
- [31] S. Khlebnikov, en "Strong and Electroweak Matter '97", e-print hep-ph/9708313v2
- [32] G. Felder y I. Tkachev, e-print hep-ph/0011159
- [33] G. Felder y L. Kofman, Phys. Rev. **D63**, 103503 (2001).
- [34] G. Felder, J. Garcia-Bellido, P. Greene, L. Kofman, A. Linde y I. Tkachev, Phys. Rev. Lett **87**, 011601 (2001).
- [35] D. T. Son, e-print hep-ph/9601377.
- [36] F. Finelli y S. Khlebnikov, Phys. Rev. D65, 43505 (2002) J. Zibin, R. Brandenberger y D. Scott, Phys. Rev. D63, 43511 (2001)
- [37] N. Afshordi y R. Brandenberger, Phys. Rev. D63, 123505 (2001) T. Tanaka y B. Bassett, astro-ph/0302544; N. Bartolo, S. Matarrese y A. Riotto, astro-ph/0308088
- [38] W. Hiscock y L. Lindblom, *Ann. Phys. (NY)* **151**, 466 (1983)
- [39] R. Kraichnan, J. Math. Phys. 2, 124 (1961)
- [40] M. Graña y E. Calzetta, Phys. Rev. D65, 63522 (2002)
- [41] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz y P. Anderson, Physical Review D50, 2848 (1994)
- [42] F. Cooper, Y. Kluger, E. Mottola y J. P. Paz, Physical Review 51, 2377 (1995)
- [43] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman y J. F. J. Salgado, Phys. Rev. D59, 125009 (1999).
- [44] F. Lombardo, F. Mazzitelli y R. Rivers, hep-ph/0204190.

- [45] J. B. Hartle y G. Horowitz, Phys. Rev. D24, 257 (1981).
- [46] F. D. Mazzitelli y J. P. Paz, Phys. Rev. D39, 2234 (1989)
- [47] A. Ryzhov, L. Yaffe, Phys. Rev. D62, 125003 (2000)
- [48] G. Aarts, D. Ahrensmeier, R. Baier, J. Berges y J. Serreau, hep-ph/0201308.
- [49] J. Berges y J. Serreau, hep-ph/0302210; D. Boyanovsky, C. Destri y H. J. de Vega, hep-ph/0306124; S. Juchem, W. Cassing y C. Greiner, hep-ph/0307353
- [50] E. Calzetta y B. L. Hu, hep-ph/0305326 (to appear in Phys. Rev. D)
- [51] J. Berges y J. Serreau, hep-ph/0208070 (to appear in Phys. Rev. Lett.)
- [52] J. Baacke, D. Boyanovsky y H. J. de Vega, Phys. Rev. D63, 45023 (2001)
- [53] E. Calzetta y M. Thibeault, Int. J. Theor. Phys 41, 2179 (2002)
- [54] G. Felder y I. I. Tkachev, hep-ph/0011159
- [55] D. Polarski and A. Starobinsky, gr-qc/9504030
- [56] S. Y. Khlebnikov and I. I. Tkachev, hep-ph/9603378
- [57] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley & Sons, 1972).
- [58] W. Israel, *Covariant fluid mechanics and thermodynamics: an introduction*, in A. Anile and Y. Choquet-Bruhat (eds.) *Relativistic fluid dynamics* (Springer, New-York, 1988).
- [59] E. Calzetta, *lecture 20 y 21*, Notas del Curso de Teoría de Campo fuera del equilibrio.
- [60] A. Friedmann, Z. Phys., **10**, 377-386 (1922); Z. Phys, **21**, 326 (1924)
- [61] H. P. Robertson, Astrophys. J. **82**, 248-301 (1935); H. P. Robertson, Astrophys. J. **83**, 187-201, 257-271 (1936); A. G. Walker, Proc. London Math. Soc. **42**, 90-127 (1936)

- [62] J. Traschen y R.H. Brandenburger, Phys. Rev. D **42**, 2491(1990); Y. Shatanov, J. Traschen y R.H. Brandenburger, Phys. Rev. D, **51**, 5438(1995); L. Kofman, A. Linde y A.A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **73**, 3195 (1994)
- [63] E. Copeland, E. Kolb, A. Liddle, y J. Lidsey, Phys. Rev. D **48**, 2529 (1993).
- [64] M. Turner, Phys. Rev. D **48**, 3502 (1993); **48**, 5539 (1993).
- [65] J. Lidsey, A. Liddle, E. Kolb, E. Copeland, T. Barreiro, y M. Abney, Rev. Mod. Phys. **69**, 373 (1997).
- [66] W. Israel y J. M. Stewart, Ann. Phys. NY, **118**, 341(1979).
- [67] W. A. Hiscock and L. Lindblom, Ann. Phys., NY 151, **466** (1983).
- [68] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley, New York (1987)).
- [69] W. Israel, *Covariant fluid mechanics and thermodynamics: an introduction*, in A. Anile and Y. Choquet - Bruhat (eds.) *Relativistic fluid dynamics* (Springer, New York, 1988).
- [70] E. Calzetta, Clas. Quantum Grav. **15**, 653 (1998).
- [71] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics II*, Partial Differential Equations (Interscience, New York, 1962).
- [72] J. Stewart, *Advanced General Relativity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993).
- [73] G. Aarts y J. Smit, Phys. Lett. B393 (1997), [hep-ph/9610415].
- [74] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, 2d edition, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992).
- [75] O.A. Reula, G.B. Nagy, J. Phys. A30, 1695-1709, (1997)
- [76] G. Felder, I. Tkachev, hep-ph/0011159

Agradecimientos

Como todo proyecto de amplitud, lograr llevarlo a término implica la ayuda y el apoyo de varias personas e instituciones. Quiero agradecer:

Al IAFE y al departamento de física de la UBA por brindarme un lugar de trabajo agradable y estimulante en un momento u otro de mi doctorado.

A mi director Esteban Calzetta, que me apoyo todo el tiempo y nunca me dio la espalda aunque los resultados eran muy lentos en aparecer. Fue un privilegio trabajar con el.

A mis compañeros de oficina, Federico y Paula, para proveer un clima de trabajo placentero y fructífero.

A Rafael Ferraro, un amigo, un investigador y un docente "hors pair". Fue una fuente de consejos e ideas tanto en lo académico como lo humano.

A Pablo, Gaston y Claudio, mis amigos, con los cuales tuves las horas de café más estimulantes de mi vida. Un agradecimiento particular para Pablo y Gaston que me ayudaron tantas veces.

A Gabriel, que sacrifico varias horas de juegos conmigo para dejarme trabajar.

Y finalmente a Isabel. No hay palabras para decir cuanto le debo. Solamente puedo agradecer al destino para tenerla a mi lado.