

Tesis Doctoral

Ondas evanescentes y ondas propagantes asociadas a la reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial - medio isótropo

Vanney, Claudia Estela

2004

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the Master's and Doctoral Theses Collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Vanney, Claudia Estela. (2004). Ondas evanescentes y ondas propagantes asociadas a la reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial - medio isótropo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3742_Vanney

Cita tipo Chicago:

Vanney, Claudia Estela. "Ondas evanescentes y ondas propagantes asociadas a la reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial - medio isótropo". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2004.

http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3742_Vanney

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

*Ondas evanescentes y ondas propagantes
asociadas a la reflexión inhibida en interfaces
cristal uniaxial - medio isótropo*

por *Claudia E. Vanney*

Directora de Tesis: Dra. Liliana I. Perez
Lugar de trabajo: Laboratorio de Óptica
Departamento de Física

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

15 de agosto de 2004

1. 0. 42

Tesista:

L. Vany

Directora:

J. P. H.

Jurado:

M. J. C.
2016

J. P. H. | M. J. C.

Ondas evanescentes y ondas propagantes asociadas a la reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial-medio isótropo

Evanescence and propagating waves associated to inhibited reflection on uniaxial crystal-isotropic medium interfaces

Se analiza la estructura que presentan las ondas propagantes y evanescentes ordinaria y extraordinaria en presencia de reflexión inhibida en interfaces formadas por un cristal uniaxial y un medio isótropo. Se muestra que la normal al frente de onda asociado a la onda reflejada evanescente extraordinaria no se encuentra contenida en la interfaz, y que el promedio temporal del vector de Poynting no está contenido en el plano de incidencia y varía su dirección con el ángulo de incidencia, incluso cuando la onda evanescente es ordinaria. Asimismo se demuestra que tanto la onda reflejada propagante como la onda refractada sufren un salto de fase, y que esta última resulta elípticamente polarizada en estas condiciones.

Se propone, además, un método analítico para el estudio tanto de la propagación de haces finitos bi y tridimensionales en medios anisótropos, como de la reflexión y transmisión de haces limitados en interfaces que involucren este tipo de medios. Su aplicación a la determinación de los corrimientos laterales de los haces reflejados y refractados (efecto no geométrico de primer orden) en condiciones de reflexión inhibida, muestra que los corrimientos no se encuentran contenidos en el plano de incidencia, y permite hallar las expresiones de sus componentes longitudinales y transversales.

Palabras claves: cristal uniaxial, reflexión inhibida, polarización, haces limitados, efecto Goos-Hänchen.

We analyse the structure that propagating and ordinary and extraordinary evanescent waves present in inhibited reflection when a uniaxial crystal-isotropic medium interface is considered. We show that the normal to the wavefront associated to the extraordinary evanescent reflected wave is not on the interface, and that the time-average Poynting vector is not contained in the incidence plane and that changes its direction with the incidence angle, even though the evanescent wave is ordinary. Moreover we demonstrate that both propagating reflected and refracted waves suffer a phase shift, and that the latter is elliptically polarised under these conditions.

We also propose an analytical method for studying not only propagation of bi and three-dimensional beams in anisotropic media but also reflection and transmission in interfaces where this kind of media is present. Its application to the determination of the lateral displacements of the reflected and refracted beams (first order non-geometric effect) in inhibited reflection conditions, shows that these shifts are not included in the plane of incidence and allows to find expressions of their longitudinal and transverse components.

Keywords: uniaxial crystal, inhibited reflection, polarisation, limited beams, Goss-Hänchen effect.

Agradecimientos

No es fácil poner punto final al trabajo de una Tesis; ésta siempre abre una perspectiva nueva, un camino hacia delante. Sin embargo, cuando es el momento de cerrar una etapa – porque... ¡todo llega! - es inevitable mirar hacia atrás. Y es en esa mirada retrospectiva donde destacan, junto con tantas horas de estudio, de esfuerzo y de trabajo, la ayuda y la colaboración de tantas personas a quienes no quiero dejar de agradecer.

Quiero agradecer en primer lugar a la Universidad de Buenos Aires y, en particular, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por la formación científica que me brindó a lo largo de tantos años, primero en la Licenciatura y luego en el Doctorado. A los profesores, al personal no docente y a mis compañeros, porque cada uno jugó un papel insustituible en la formación de esta comunidad científica y académica. Agradezco al CONICET, porque sus becas hicieron posible mi dedicación a la investigación cuando estaba recién recibida, y a la Universidad Austral que apoyó y facilitó todos mis proyectos de capacitación los años en los que me desempeñé como docente en esa institución.

Agradezco de manera muy especial a toda la gente del Laboratorio de Óptica. No sólo por haber constituido un ámbito propicio y estimulante para el intercambio de ideas, sino también por haber encontrado en el Laboratorio a verdaderos amigos. Sería muy largo hablar de cada uno, pero estoy convencida de que las alegrías y las dificultades compartidas, los consejos oportunos, el aliento en momentos de desánimo... y hasta la broma amable cuando la situación lo requería, fueron tan importantes como las mejores discusiones científicas sostenidas tantas veces. A cada uno quiero decirle: muchas gracias por haberme ayudado a formarme científicamente y también a crecer como persona.

No puedo dejar de agradecer de manera particular a mi familia, porque sin el apoyo de ellos, su paciencia, y su comprensión, no hubiera podido concluir los trabajos de la Tesis. Quiero terminar, agradeciendo especialmente a María que, primero como Directora de Tesis de Licenciatura y luego como Consejera de Estudios, supo darme con generosidad su experiencia transmitiéndome las bases del trabajo de investigación. Y a Liliana que, de manera incondicional supo estar siempre disponible, dándome orientación, guía, y el consejo oportuno, brindando con generosidad su tiempo y su trabajo.

Indice

Introducción	5
1 Reflexión interna en cristales uniaxiales	11
1.1 Sistema de coordenadas	15
1.2 Ondas en el cristal cuando la onda incidente es ordinaria	17
1.2.1 Onda reflejada ordinaria	18
1.2.2 Onda reflejada extraordinaria	19
1.3 Ondas en el cristal cuando la onda incidente es extraordinaria	22
1.3.1 Onda reflejada ordinaria	23
1.3.2 Onda reflejada extraordinaria	24
1.4 Ondas en el medio isótropo	25
1.5 Condiciones de contorno	27
1.6 Angulo límite de reflexión inhibida	30
2 Estructura de las ondas evanescentes en un cristal	35
2.1 Orientación del frente de onda . .	36
2.1.1 Onda reflejada evanescente ordinaria	36
2.1.2 Onda reflejada evanescente extraordinaria	40

2.2	Polarizaciones de las ondas evanescentes	43
2.3	Promedio temporal del vector de Poynting	54
3	Estructura de las ondas propagantes en el cristal y en el medio isótropo	63
3.1	Ondas propagantes en el cristal	64
3.2	Onda propagante en el medio isótropo	66
3.2.1	Polarización de la onda propagante en el medio isótropo	66
3.2.2	Salto de fase de la onda propagante en el medio isótropo	78
4	Paquetes de ondas y flujo de energía en cristales uniaxiales	85
4.1	Paquetes bidimensionales formados por dos ondas que se propagan en planos característicos	89
4.1.1	Eje óptico contenido en el plano definido por las normales a los frentes de onda	90
4.1.2	Eje óptico con componente en el plano perpendicular al definido por las normales a los frentes de onda	93
4.2	Paquete tridimensional formado por cuatro ondas extraordinarias	96
4.3	Paquetes bidimensionales que inciden sobre una interfaz cristal uniaxial - medio isótropo .	99
4.3.1	Normales a los frentes de onda contenidas en el mismo plano de incidencia y que inciden con diferente ángulo respecto a la interfaz	. 101

4.3.2	Normales a los frentes de ondas contenidas en diferentes planos de incidencia y que inciden con el mismo ángulo respecto a la interfaz . . .	104
4.4	Paquete tridimensional que incide sobre una interfaz cristal uniaxial-medio isotrópico	107
5	Corrimiento lateral de los haces reflejado y refractado	111
5.1	Método de Artmann generalizado: corrimiento lateral del haz reflejado en interfaces isotrópicas	115
5.2	Corrimiento longitudinal y transversal del haz reflejado	119
5.2.1	Haz incidente ordinario	121
5.2.2	Paquete incidente extraordinario	124
5.3	Corrimiento longitudinal y transversal del haz refractado	128
5.3.1	Haz incidente ordinario	132
5.3.2	Paquete incidente extraordinario	135
5.4	Análisis de los corrimientos	137
	Conclusiones y prospectiva	145
	Bibliografía	148
	Apéndices	156
	Apéndice I: Dependencia funcional de los factores \mathcal{F}_o^* y \mathcal{F}_e^*	156
	Apéndice II: Intersección entre los planos π_γ y π_δ	163

Introducción

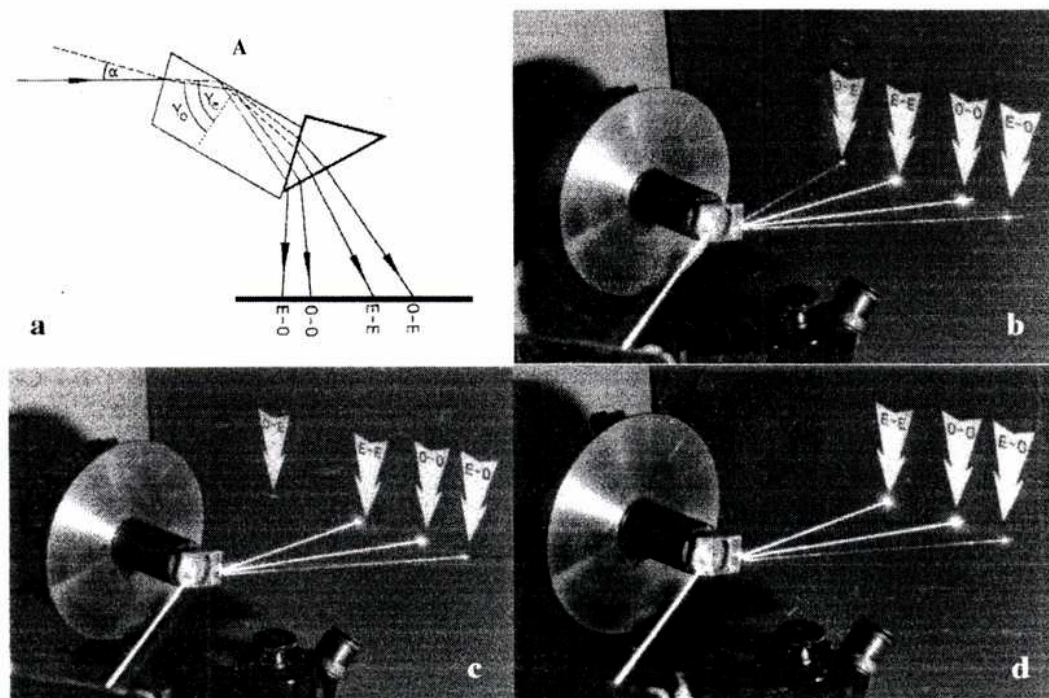
Las características de la reflexión y refracción de ondas planas y de haces limitados en interfaces que involucran por lo menos un medio anisótropo, han sido estudiadas en los últimos veinticinco años con mucho detalle, debido a la posibilidad de fabricación de este tipo de materiales y al consiguiente crecimiento de su uso en aplicaciones más allá de las clásicas (polarizadores, láminas de onda, interferómetros), como fibras ópticas y cavidades resonantes.

El estudio ha sido desarrollado fundamentalmente a través de dos métodos: el de los elipsoides de Fresnel y el analítico. El primero, basado en la construcción de Huygens, permitió determinar las características esenciales de la propagación de ondas planas en medios birrefringentes uni y biaxiales. A partir del establecimiento de las ecuaciones de Maxwell para el estudio de la propagación, reflexión y transmisión de la luz, se propusieron métodos combinados donde se utilizan los elipsoides de Fresnel en forma complementaria [1]-[5]. A partir de 1970 se desarrollaron métodos matriciales para estudiar cuantitativamente las propiedades de sistemas compuestos por al menos un medio anisótropo, que mostraron ser muy adecuados para determinar coeficientes de reflexión y transmisión en sistemas de multicapas, como en las Ref.[6]-[9].

Durante las últimas dos décadas, en el Laboratorio de Óptica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, se ha trabajado en Óptica de Medios Birrefringentes con continuidad. En 1983, M. C. Simon desarrolló un formalismo para el trazado de rayos en cristales uniaxiales [10], presentando su formulación vectorial poco tiempo después [11]. Este desarrollo permitió calcular tanto las direcciones de las ondas y rayos, como las amplitudes de los campos correspondientes a las ondas propagantes reflejadas y transmitidas para interfaces compuestas por un medio isótropo y un cristal uniaxial dieléctricos cuando la luz incide desde el medio isótropo (reflexión externa) [12] o desde el cristal (reflexión interna) [13].

Como es sabido, los modos propios de propagación de la luz en los medios birrefringentes son el ordinario y el extraordinario, de modo que en la reflexión interna es conveniente estudiar de manera separada la reflexión y la transmisión cuando la onda incidente es ordinaria y cuando es extraordinaria. A diferencia de lo que sucede en interfaces isótropas, para cada una de estas situaciones se tiene, además de la onda transmitida, dos ondas reflejadas (doble reflexión interna): la reflejada ordinaria y la reflejada extraordinaria [14]. Para ambos casos se calcularon los ángulos de reflexión total interna [15] y los coeficientes de reflexión y transmisión [16], [17] cuando todas las ondas eran propagantes.

El estudio detallado de las propiedades de la reflexión interna llevó, en el año 1989, al descubrimiento de un fenómeno al que se denominó *reflexión inhibida* [18]. La onda reflejada extraordinaria (cuando proviene de una onda incidente ordinaria en un cristal negativo), y la onda reflejada ordi-



Dr. Rodolfo M. Echarri, tesis doctoral.

a) Dispositivo experimental y trazado de rayos

Visualización de los rayos reflejados en un cristal de calcita:

b) $\gamma_O = 62,6^\circ$; $\gamma_e = 61,2^\circ$

c) $\gamma_O = 65,5^\circ$; $\gamma_e = 64,5^\circ$

d) $\gamma_O = 69,7^\circ$; $\gamma_e = 69,2^\circ$

Figura 1: *Experiencia de reflexión inhibida* [12]

naria (cuando proviene de una onda incidente extraordinaria en un cristal positivo), tienen un ángulo de reflexión mayor que el ángulo de incidencia, y siempre existe un ángulo de incidencia límite (ángulo de reflexión inhibida) para el cual un rayo reflejado es rasante. Es decir que, si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, uno de los rayos reflejados desaparece, redistribuyéndose la energía del rayo incidente entre el otro reflejado y el refractado. En la figura 1.a observamos el esquema del dispositivo experimental que hizo posible la visualización del fenómeno de reflexión inhibida en una interfaz calcita-aire. Las fotos 1.b - 1.d muestran los rayos que se reflejaron en la cara A del cristal de calcita, y atravesaron luego un prisma de vidrio. En las fotos 1.b y 1.c existen cuatro rayos reflejados, mientras que en la foto 1.d el ángulo de incidencia supera el ángulo de reflexión inhibida y el rayo asociado a la onda reflejada extraordinaria, que proviene de una onda incidente ordinaria, (rayo OE) desaparece.

En esta Tesis analizaremos las propiedades de las ondas evanescentes y propagantes asociadas a la reflexión inhibida, ya que presentan una estructura particular, determinada por la presencia de este fenómeno y por las exigencias de polarización de las ondas que se propagan en un medio birrefringente. Propondremos, además, un método analítico para el estudio de la propagación, reflexión y transmisión de haces limitados en interfaces que involucren medios anisótropos, y lo aplicaremos a la obtención y determinación de los corrimientos laterales de los haces reflejados y refractados (efectos no geométricos de primer orden) en condiciones de reflexión inhibida.

Presentaremos, en el Capítulo 1, un resumen del estudio de la reflexión

interna en cristales uniaxiales cuando no existe reflexión inhibida. Esta presentación agrupa principalmente tres trabajos [14],[16],[17] que constituyen los antecedentes más inmediatos a esta Tesis. Nos introducirá, además, en el marco teórico y en la notación que utilizaremos. El estudio de las características de las ondas y de los haces en presencia de reflexión inhibida, lo realizaremos en dos etapas: en primer término (Capítulos 2 y 3) estudiaremos la reflexión y la transmisión de ondas planas en condiciones de reflexión inhibida y posteriormente (Capítulos 5 y 6) trabajaremos con paquetes de ondas sencillos, como un modo de acotar el haz incidente y de acercarnos a una situación real.

En presencia de reflexión inhibida las ondas propagantes son sólo tres: la incidente, una de las ondas reflejadas y la transmitida. Mostraremos, en el Capítulo 2, que en condiciones de reflexión inhibida, la onda reflejada asociada al rayo que se inhibe resulta evanescente [19]. Determinaremos la estructura particular de esta onda: la orientación de su frente de onda, su polarización, y calcularemos también el promedio temporal del vector de Poynting asociado a ella. Pero las ondas propagantes también presentan características particulares en estas condiciones. Analizaremos, en el Capítulo 3, la polarización de estas ondas y mostraremos que tanto la onda reflejada propagante como la transmitida sufren un salto de fase que depende de la dirección de incidencia [20], [21]. Es decir que, la presencia de una onda evanescente en el medio anisótropo está asociada a un salto de fase de la onda reflejada que se propaga en el cristal y de la onda refractada que se propaga en el medio isótropo. Esto último trae como consecuencia la existencia de un fenómeno que no puede darse en interfaces lineales isótropas: el rayo refractado sufre

un corrimiento lateral en condiciones de reflexión inhibida.

Como el corrimiento no puede observarse si consideramos únicamente ondas planas, es necesario limitar en el espacio la energía luminosa para poder detectar el corrimiento. En el Capítulo 4 se efectuará un análisis de paquetes bi y tridimensionales, formados por ondas ordinarias y formados por ondas extraordinarias que se propagan en un medio uniaxial, que permiten establecer una relación entre el lugar geométrico de interferencia de las ondas y la dirección del flujo de energía del haz [22]. Esto nos preparará para el estudio de la reflexión y refracción de haces tridimensionales en condiciones de reflexión inhibida, que realizaremos en el capítulo siguiente. De modo que, en el Capítulo 5, determinaremos cualitativa y cuantitativamente los corrimientos laterales que sufren los haces reflejado y refractado en presencia de reflexión inhibida [23]- [26]. Para analizar estos corrimientos propondremos una generalización de uno de los métodos más usados en el estudio del efecto Goos-Hänchen [27] en interfaces isótropas: el método de Artmann [28]. La aplicación de esta generalización nos permitirá calcular los corrimientos laterales sufridos en la reflexión y en la transmisión de haces tridimensionales tanto ordinarios como extraordinarios, obteniendo en ambos casos un corrimiento lateral que no está contenido en el plano de incidencia.

Es decir que, en esta Tesis, determinaremos las características de las ondas propagantes y evanescentes asociadas a la reflexión inhibida, y estableceremos un método analítico, nuevo, y sencillo, para el estudio tanto de la propagación en medios anisótropos de haces finitos bi y tridimensionales, como de su reflexión y refracción en interfaces que involucren este tipo de medios.

Capítulo 1

Reflexión interna en cristales uniaxiales

En este capítulo resumiremos una serie de trabajos anteriores a esta tesis, que constituyen el marco formal que nos permitirá estudiar con detalle las ondas evanescentes y propagantes asociadas a la reflexión inhibida en una interfaz formada por un cristal uniaxial y un medio isótropo lineales, dieléctricos y no magnéticos.

Para iniciar el estudio de las propiedades electromagnéticas de los medios birrefringentes es fundamental comprender que, mientras que en los medios isótropos los modos propios de propagación son tales que el campo eléctrico es paralelo o perpendicular al plano de incidencia, en el cristal los modos propios son el ordinario y el extraordinario que, en general, no coinciden con los anteriores. Además, como la velocidad de fase de las ondas ordinarias es diferente a la de las ondas extraordinarias, al reflejarse o refractarse lo hacen con una dirección de propagación distinta, de modo que los modos propios correspondientes a las ondas ordinarias y extraordinarias reflejadas o refractadas no resultan ortogonales entre sí. Por esta razón es necesario tra-

bajar vectorialmente de modo de poder tener en cuenta las tres componentes de los campos simultáneamente. Las ondas propagantes en el cristal están siempre linealmente polarizadas y la dirección de vibración de los campos está determinada por las características del medio birrefringente. En efecto, tanto para ondas ordinarias como para ondas extraordinarias las direcciones del campo eléctrico \vec{E} , del desplazamiento \vec{D} y del campo magnético \vec{H} están determinadas por las propiedades ópticas del medio (los índices de refracción principales ordinario n_o y extraordinario n_e) y la dirección de propagación de la onda respecto del eje óptico del cristal. De este modo la relación entre los vectores \vec{E} , \vec{D} y \vec{H} y la normal al frente de onda \vec{N} son tales que quedan determinadas todas las componentes de dichos vectores si se conoce una componente de uno de los campos, ($\vec{D} \cdot \vec{y}$) por ejemplo. Como es sabido [10], la polarización de las ondas ordinarias es tal que el vector campo eléctrico \vec{E}_o y el vector desplazamiento \vec{D}_o son paralelos entre sí y perpendiculares al plano determinado por la normal al frente de onda \vec{N}_o y por el eje óptico \check{z}_3 . Esto significa que el campo eléctrico verifica que: $(\vec{E}_o \cdot \vec{N}_o) = 0$; $(\vec{E}_o \cdot \check{z}_3) = 0$. En cambio, si la onda que se propaga en el cristal es extraordinaria, su polarización también es lineal pero, a diferencia de lo que sucede con las ondas ordinarias, la normal al frente de onda \vec{N}_e no coincide con la dirección de propagación del rayo luminoso \vec{R}_e . En la figura 1.1 se esquematiza la estructura de esta onda. Tanto \vec{N}_e como \vec{R}_e están contenidos en el plano perpendicular a \vec{H}_e . Los campos \vec{D}_e y \vec{E}_e también están contenidos en el plano perpendicular a \vec{H}_e pero sus direcciones de vibración no coinciden: \vec{D}_e es perpendicular a \vec{N}_e , mientras que \vec{E}_e es perpendicular a \vec{R}_e .

Es bien sabido que la ley de la reflexión es el resultado de las condiciones

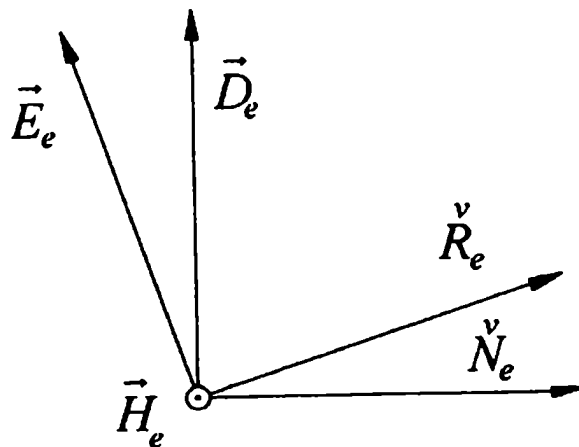


Figura 1.1: Estructura de una onda extraordinaria en un cristal

de contorno que establecen la igualdad entre las fases de la onda incidente y la reflejada sobre la superficie de discontinuidad. En medios uniaxiales, la existencia de dos posibles velocidades de propagación para una dada dirección de avance del frente de onda da lugar a dos posibles ondas incidentes (una ordinaria y otra extraordinaria) y a una doble reflexión (una ordinaria y otra extraordinaria) para cada una de las ondas incidentes. Por este motivo para el estudio de la reflexión interna es conveniente distinguir cuatro casos:

a) Onda incidente ordinaria y reflejada ordinaria (Caso O-O): Tanto la onda incidente como la onda reflejada se propagan con la misma velocidad de fase u_o (velocidad principal ordinaria) que es independientemente de la dirección de propagación de las ondas. En este caso se cumple la ley de la reflexión de manera idéntica a interfaces isótropas.

b) Onda incidente ordinaria y reflejada extraordinaria (Caso O-E): La onda incidente se propaga con una velocidad de fase u_o , mientras que la onda reflejada extraordinaria lo hace con una velocidad de fase u_o'' . Esta velocidad

depende de las velocidades principales u_o y u_e y de su dirección de propagación. El ángulo de reflexión resulta distinto al de incidencia.

c) Onda incidente extraordinaria y reflejada ordinaria (Caso E-O): La onda incidente se propaga con velocidad de fase u'' que depende de u_o , u_e y de su dirección de propagación, mientras que la reflejada lo hace con velocidad de fase u_o constante. En este caso el ángulo de reflexión tampoco coincide con el ángulo de incidencia.

d) Onda incidente extraordinaria y reflejada extraordinaria (Caso E-E): Las velocidades de fase de ambas ondas dependen de su dirección de propagación y de las velocidades principales del cristal. La velocidad de fase de la onda incidente es u'' y la de la reflejada u_e'' . Los ángulos de incidencia y de reflexión son diferentes.

Trascribiremos, en los párrafos siguientes, resultados que constituyen los antecedentes al desarrollo de esta Tesis: Escribiremos las relaciones entre las componentes de los campos para cada una de las ondas involucradas; presentaremos los resultados obtenidos de la resolución de las condiciones de contorno que permiten escribir todos los campos en función del incidente (es decir, en función de \vec{N}_o y $(\vec{D}_o \cdot \vec{y})$ cuando la onda incidente es ordinaria [16] y en función de \vec{N}_e y de $(\vec{D}_e \cdot \vec{y})$ cuando la onda incidente es extraordinaria [17]) y analizaremos las condiciones requeridas para que exista reflexión inhibida [14], [18]. Presentaremos en primer lugar el sistema de referencia que ya ha sido utilizado en estos trabajos.

1.1 Sistema de coordenadas

Se considera una interfaz formada a partir de un cristal uniaxial con índices de refracción principales ordinario n_o y extraordinario n_e (que dependen de las dos velocidades de fase principales, $n_o = c/u_o$ y $n_e = c/u_e$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío) y un medio isótropo con un índice de refracción n (figura 1.2). Se denomina \check{z}_3 al versor en la dirección del eje óptico y θ al ángulo que forma este versor con la interfaz. De esta manera $(\check{z}_3.\check{z})$ es la proyección del eje óptico sobre la interfaz, y $(\check{z}_3.\check{x})$ es la componente del eje óptico perpendicular a la superficie de separación de los medios.

El sistema de coordenadas natural para tratar los fenómenos de refracción y reflexión es aquel en el que uno de sus ejes es normal a la superficie de discontinuidad, en este caso el eje x . Los ejes y y z están contenidos en la interfaz, eligiendo el eje y de modo que sea perpendicular al plano definido por el eje x y el versor \check{z}_3 .

El plano de incidencia se define como el plano que contiene las normales a los frentes de onda incidente, reflejadas y refractada y la normal a la interfaz; llamando δ al ángulo comprendido entre el plano de incidencia y el plano xz . Como la dirección de propagación de la energía de las ondas ordinarias coincide con la normal al frente de onda, los rayos ordinarios están contenidos en el plano de incidencia. A diferencia de esto, cuando se consideran ondas extraordinarias, la dirección de la normal al frente de onda \check{N}_e y la dirección del rayo \check{R}'' no sólo no coinciden, sino que además el rayo extraordinario no está contenido en el plano de incidencia. Como el rayo transmitido está asociado a una onda que se propaga en un medio isótropo siempre se encuentra contenido en el plano de incidencia.

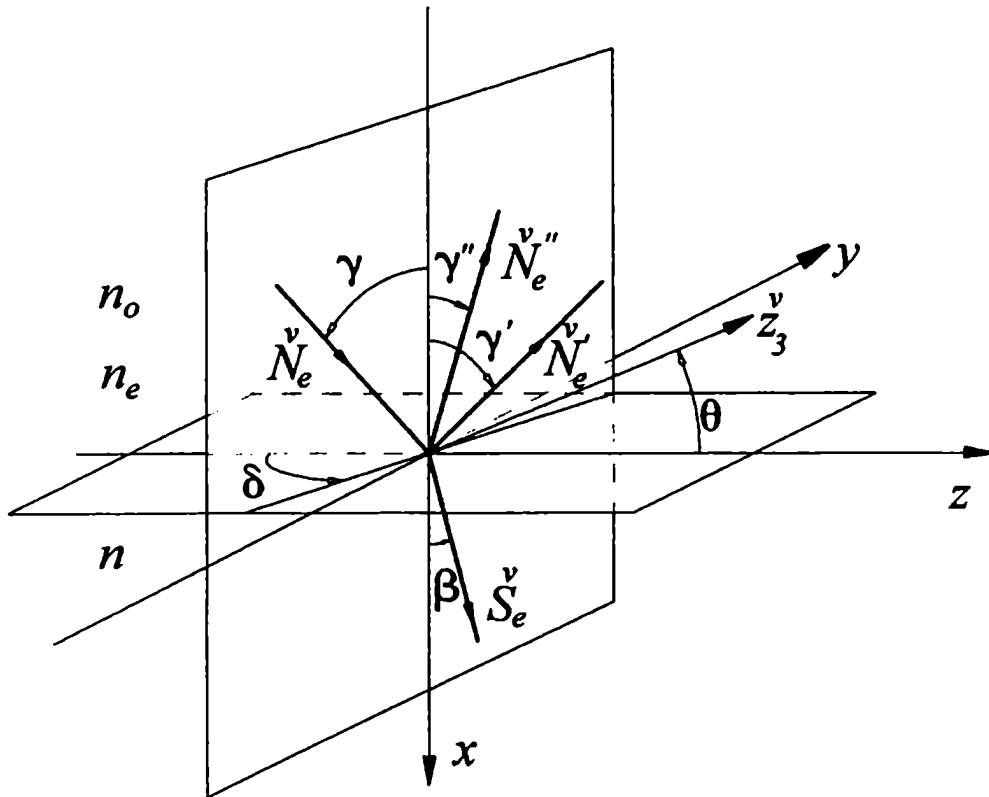


Figura 1.2: Sistema de coordenadas. El eje óptico \hat{z}_3 está contenido en el plano (x, z) y el ángulo δ es el ángulo comprendido entre el plano de incidencia y el plano (x, z) . θ es el ángulo que forma el eje óptico con la interfaz. n_o y n_e son los índices principales de refracción del medio birrefringente y n el del medio isotrópico. γ y β corresponden al ángulo de incidencia y refracción respectivamente. En la figura se considera que la onda incidente es extraordinaria.

En la figura 1.2 se representa la interfaz, el plano de incidencia y los vectores normales a los frentes de onda. El subíndice "e" indica que la onda incidente es extraordinaria (más adelante se utilizará el subíndice "o" al referirse a las ondas incidentes ordinarias). En la notación utilizada \check{N} corresponde a las normales a los frentes de onda cuando las ondas se propagan en un cristal y \check{S} a las normales a los frentes de onda cuando éstas se propagan en un medio isótropo.

1.2 Ondas en el cristal cuando la onda incidente es ordinaria

La velocidad de propagación de la onda incidente es u_o y no depende de la dirección de incidencia. Además la polarización de esta onda es tal que los vectores eléctricos \vec{E}_o y \vec{D}_o son paralelos entre sí y perpendiculares al plano definido por \check{N}_o y el eje óptico \check{z}_3 ; mientras que los vectores \vec{H}_o y \vec{B}_o están contenidos en este plano. Como dentro del cristal la polarización está bien definida pueden escribirse las amplitudes de los campos en función de una sola componente conocida, $(\vec{D}_o \cdot \check{y})$ por ejemplo, de la siguiente manera [16]:

$$\vec{E}_o = (\delta_o \check{x} + \mu_o u_o^2 \check{y} + \lambda_o \check{z})(\vec{D}_o \cdot \check{y}) \quad (1.1)$$

$$\vec{H}_o = (\alpha_o \check{x} + \beta_o \check{y} + \gamma_o \check{z})(\vec{D}_o \cdot \check{y}) \quad (1.2)$$

En estas expresiones μ_o corresponde a la permeabilidad magnética en el vacío. Los coeficientes $\delta_o, \lambda_o, \alpha_o, \beta_o$ y γ_o , en función de la dirección de incidencia y de parámetros del cristal, son:

$$\delta_o = \frac{-\mu_o u_o^2 (\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 (\check{N}_o \cdot \check{y})}{(\check{N}_o \cdot \check{x}) - (\check{N}_o \cdot \check{z}_3)(\check{x} \cdot \check{z}_3)} \quad (1.3)$$

$$\lambda_o = \frac{\mu_o u_o^2 (\check{z} \cdot \check{z}_3) (\check{x} \cdot \check{z}_3) (\check{N}_o \cdot \check{y})}{(\check{N}_o \cdot \check{x}) - (\check{N}_o \cdot \check{z}_3) (\check{x} \cdot \check{z}_3)} \quad (1.4)$$

$$\alpha_o = u_o (\check{z} \cdot \check{z}_3) \frac{(\check{x} \cdot \check{z}_3) - (\check{N}_o \cdot \check{x}) (\check{N}_o \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}_o \cdot \check{x}) - (\check{N}_o \cdot \check{z}_3) (\check{x} \cdot \check{z}_3)} \quad (1.5)$$

$$\beta_o = \frac{-u_o (\check{z} \cdot \check{z}_3) (\check{N}_o \cdot \check{y}) (\check{N}_o \cdot \check{z}_3)}{(\check{N}_o \cdot \check{x}) - (\check{N}_o \cdot \check{z}_3) (\check{x} \cdot \check{z}_3)} \quad (1.6)$$

$$\gamma_o = u_o \frac{(\check{N}_o \cdot \check{z}_3) (\check{N}_o \cdot \check{x}) (\check{x} \cdot \check{z}_3) - (\check{N}_o \cdot \check{z}_3)^2 + (\check{z} \cdot \check{z}_3)^2}{(\check{N}_o \cdot \check{x}) - (\check{N}_o \cdot \check{z}_3) (\check{x} \cdot \check{z}_3)} \quad (1.7)$$

donde:

$$(\check{N}_o \cdot \check{x}) = \cos \gamma \quad (1.8)$$

$$(\check{N}_o \cdot \check{y}) = \text{sen} \gamma \text{sen} \delta \quad (1.9)$$

$$(\check{N}_o \cdot \check{z}_3) = (\check{N}_o \cdot \check{x}) (\check{z}_3 \cdot \check{x}) + (\check{N}_o \cdot \check{z}) (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \quad (1.10)$$

$$(\check{N}_o \cdot \check{z}) = \text{sen} \gamma \cos \delta \quad (1.11)$$

1.2.1 Onda reflejada ordinaria

La onda reflejada ordinaria tiene la misma velocidad de fase u_o que la onda incidente, y su normal al frente de onda \check{N}'_o cumple con la misma ley de reflexión que los medios isótopos:

$$(\check{N}'_o \cdot \check{x}) = -\cos \gamma \quad (1.12)$$

$$(\check{N}'_o \cdot \check{y}) = \text{sen} \gamma \text{sen} \delta \quad (1.13)$$

$$(\check{N}'_o \cdot \check{z}) = \text{sen} \gamma \cos \delta \quad (1.14)$$

Los campos eléctricos y magnéticos también pueden escribirse en función de la componente y del vector desplazamiento eléctrico de la onda reflejada ordinaria ($\vec{D}'_o \cdot \vec{y}$) del siguiente modo [16]

$$\vec{E}'_o = (\delta'_o \vec{x} + \mu_0 u_o^2 \vec{y} + \lambda'_o \vec{z})(\vec{D}'_o \cdot \vec{y}) \quad (1.15)$$

$$\vec{H}'_o = (\alpha'_o \vec{x} + \beta'_o \vec{y} + \gamma'_o \vec{z})(\vec{D}'_o \cdot \vec{y}) \quad (1.16)$$

donde δ'_o , λ'_o , α'_o , β'_o y γ'_o son expresiones similares a las de la onda incidente ordinaria sustituyendo a \tilde{N}_o por \tilde{N}'_o .

1.2.2 Onda reflejada extraordinaria

A diferencia de lo que sucede con la onda reflejada ordinaria, la velocidad de fase de la onda reflejada extraordinaria u_o'' depende de su dirección de propagación. Para obtener una expresión de la misma en función de la dirección de propagación de la onda incidente, fue necesario resolver la siguiente ecuación bicuadrática [14]:

$$\mathcal{A}_o \left(\frac{u_o''}{u_o} \right)^4 - \mathcal{B}_o \left(\frac{u_o''}{u_o} \right)^2 + \mathcal{C}_o = 0 \quad (1.17)$$

donde los coeficientes \mathcal{A}_o , \mathcal{B}_o y \mathcal{C}_o dependen de las velocidades de fase principal ordinaria u_o y principal extraordinaria u_e ($u_e = c/n_e$) de la orientación del eje óptico \vec{z}_3 y de la dirección de incidencia (indicada mediante los ángulos γ y δ) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_o &= [1 + b_o \text{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta + b_o \text{sen}^2 \gamma \text{sen}^2 \delta (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)^2]^2 - \\ &- 4b_o \text{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} B_o &= 2\left[1 + b_o \text{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta + b_o \text{sen}^2 \gamma \text{sen}^2 \delta (\tilde{x} \cdot \tilde{z}_3)^2\right] \left[b_o (\tilde{x} \cdot \tilde{z}_3)^2 + \frac{u_e^2}{u_o^2}\right] - \\ &- \frac{u_e^2}{u_o^2} 4b_o \text{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta (\tilde{z} \cdot \tilde{z}_3)^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$C_o = \left[b_o (\tilde{x} \cdot \tilde{z}_3)^2 + \frac{u_e^2}{u_o^2}\right]^2 \quad (1.20)$$

habiendo definido b_o como la siguiente relación entre las velocidades de fase:

$$b_o = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u_o^2} \quad (1.21)$$

La condición de igualdad entre las fases de la onda incidente y la reflejada extraordinaria en la interfaz

$$\frac{\check{N}_o \cdot \check{y}}{u_o} = \frac{\check{N}_o'' \cdot \check{y}}{u_o''} \quad \frac{\check{N}_o \cdot \check{z}}{u_o} = \frac{\check{N}_o'' \cdot \check{z}}{u_o''} \quad (1.22)$$

y la condición de normalización del versor normal al frente de onda reflejado extraordinario

$$(\check{N}_o'' \cdot \check{x})^2 + (\check{N}_o'' \cdot \check{y})^2 + (\check{N}_o'' \cdot \check{z})^2 = 1, \quad (1.23)$$

permiten escribir las componentes de la normal al frente de onda reflejada extraordinaria \check{N}_o'' de la siguiente manera

$$(\check{N}_o'' \cdot \check{x}) = -\sqrt{1 - \frac{u_o''^2}{u_o^2} [1 - (\check{N}_o \cdot \check{x})^2]} \quad (1.24)$$

$$(\check{N}_o'' \cdot \check{y}) = \frac{u_o''}{u_o} (\check{N}_o \cdot \check{y}) \quad (1.25)$$

$$(\check{N}_o'' \cdot \check{z}) = \frac{u_o''}{u_o} (\check{N}_o \cdot \check{z}) \quad (1.26)$$

y obtener entonces el ángulo de reflexión extraordinario γ'' a partir de

$$\text{sen} \gamma'' = \frac{u_o''}{u_o} \text{sen} \gamma \quad (1.27)$$

Así pueden hallarse las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos de esta onda en función de la componente y del vector desplazamiento eléctrico de la onda reflejada extraordinaria, de las características de la interfaz y de la dirección de la onda incidente ($\vec{D}_o'' \cdot \vec{y}$) del siguiente modo [16]

$$\vec{E}_o'' = (\delta''_o \vec{x} + \mu_0 u_o''^2 \vec{y} + \lambda''_o \vec{z})(\vec{D}_o'' \cdot \vec{y}) \quad (1.28)$$

$$\vec{H}_o'' = (\alpha''_o \vec{x} + \beta''_o \vec{y} + \gamma''_o \vec{z})(\vec{D}_o'' \cdot \vec{y}) \quad (1.29)$$

donde los coeficientes que relacionan las componentes de los campos reflejados extraordinarios son

$$\delta_o'' = \mu_0 \frac{u_o''^2 (\vec{N}_o'' \cdot \vec{x})(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3) - u_o''^2 (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)}{(\vec{N}_o'' \cdot \vec{y})(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)} \quad (1.30)$$

$$\lambda_o'' = -\mu_0 \frac{u_o''^2 (\vec{N}_o'' \cdot \vec{x})(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)(\vec{x} \cdot \vec{z}_3) - u_o''^2 (\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)^2 + u_o''^2 (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)^2}{(\vec{N}_o'' \cdot \vec{y})(\vec{z} \cdot \vec{z}_3)(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)} \quad (1.31)$$

$$\alpha_o'' = -u_o'' \frac{(\vec{z} \cdot \vec{z}_3)}{(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)} \quad (1.32)$$

$$\beta_o'' = u_o'' \frac{(\vec{N}_o'' \cdot \vec{x}) - (\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)(\vec{x} \cdot \vec{z}_3)}{(\vec{N}_o'' \cdot \vec{y})(\vec{z} \cdot \vec{z}_3)(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)} \quad (1.33)$$

$$\gamma_o'' = u_o'' \frac{(\vec{x} \cdot \vec{z}_3)}{(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)} \quad (1.34)$$

u_o'' está dado por la ecuación (1.17), $(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3)$ por

$$(\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}_3) = (\vec{N}_o'' \cdot \vec{x}) \cdot (\vec{z}_3 \cdot \vec{x}) + (\vec{N}_o'' \cdot \vec{z}) \cdot (\vec{z}_3 \cdot \vec{z}) \quad (1.35)$$

y las componentes de \vec{N}_o'' por las ecuaciones (1.24) a (1.26).

1.3 Ondas en el cristal cuando la onda incidente es extraordinaria

Se sabe que, a diferencia de lo que sucede con la velocidad de fase de la onda ordinaria, la de la onda extraordinaria depende de su dirección de propagación del siguiente modo [10]

$$u'' = \sqrt{(u_o^2 - u_e^2)(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)^2 + u_e^2} \quad (1.36)$$

De manera análoga al caso de incidencia ordinaria, también se pueden escribir las componentes de los campos de la onda extraordinaria en función de una componente de uno de ellos, en este caso $(\vec{D}_e \cdot \check{y})$, definiendo nuevos coeficientes [17]

$$\vec{E}_e = (\delta_e \check{x} + \mu_o u_o^2 \check{y} + \lambda_e \check{z})(\vec{D}_e \cdot \check{y}) \quad (1.37)$$

$$\vec{H}_e = (\alpha_e \check{x} + \beta_e \check{y} + \gamma_e \check{z})(\vec{D}_e \cdot \check{y}) \quad (1.38)$$

donde:

$$\delta_e = \mu_o \frac{u_o^2 (\check{N}_e \cdot \check{x})(\check{N}_e \cdot \check{z}_3) - u''^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}_e \cdot \check{y})(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)} \quad (1.39)$$

$$\lambda_e = -\mu_o \frac{u_o^2 (\check{N}_e \cdot \check{x})(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x}) - u_o^2 (\check{N}_e \cdot \check{z}_3)^2 + u''^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2}{(\check{N}_e \cdot \check{y})(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z})} \quad (1.40)$$

$$\alpha_e = -\frac{u'' (\check{z}_3 \cdot \check{z})}{(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)} \quad (1.41)$$

$$\beta_e = u'' \frac{(\check{N}_e \cdot \check{x}) - (\check{N}_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}_e \cdot \check{y})(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z})} \quad (1.42)$$

$$\gamma_e = \frac{u'' (\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)} \quad (1.43)$$

Es importante tener en cuenta que para las ondas extraordinarias la dirección de propagación de la energía \check{R}_e (dirección del rayo) y la dirección de la normal al frente de ondas \check{N}_e no coinciden, siendo la relación entre ambas [11]

$$\check{R}_e = \frac{u_e^2 \check{N}_e + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}_e \cdot \check{z}_3) \check{z}_3}{\sqrt{(u_o^4 - u_e^4)(\check{N}_e \cdot \check{z}_3)^2 + u_e^4}} \quad (1.44)$$

La condición de incidencia rasante implica que el rayo (no la normal al frente de ondas) se propaga a lo largo de la interfaz. Como el ángulo de incidencia se define como el ángulo comprendido entre la normal al frente de ondas y la normal a la interfaz, llamaremos ángulo de incidencia final γ_F al ángulo de incidencia que corresponde a la condición física de rayo incidente rasante. El ángulo de incidencia de la onda extraordinaria, entonces, debe ser menor a γ_F , pero γ_F puede ser mayor o menor que $\pi/2$.

1.3.1 Onda reflejada ordinaria

Con el fin de ofrecer una presentación completa, y porque utilizaremos estas expresiones en cálculos posteriores, escribimos también las relaciones entre las componentes de los campos de la onda reflejada ordinaria que, como sabemos, se propaga con velocidad de fase u_o [17].

$$\vec{E}'_e = (\delta'_e \check{x} + \mu_o u_o^2 \check{y} + \lambda'_e \check{z})(\vec{D}'_e \cdot \check{y}) \quad (1.45)$$

$$\vec{H}'_e = (\alpha'_e \check{x} + \beta'_e \check{y} + \gamma'_e \check{z})(\vec{D}'_e \cdot \check{y}) \quad (1.46)$$

habiendo definido,

$$\delta'_e = \frac{-\mu_o u_o^2 (\check{N}'_e \cdot \check{y})(\check{z}_3 \cdot \check{z})^2}{(\check{N}'_e \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})} \quad (1.47)$$

$$\lambda'_e = \frac{\mu_o u_o^2 (\check{N}'_e \cdot \check{y})(\check{z}_3 \cdot \check{z})(\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}'_e \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})} \quad (1.48)$$

$$\alpha'_e = \frac{u_o(\check{z}_3 \cdot \check{z})[(\check{z}_3 \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{x})(\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)]}{(\check{N}'_e \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})} \quad (1.49)$$

$$\beta'_e = \frac{-u_o(\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{N}'_e \cdot \check{y})(\check{z}_3 \cdot \check{z})}{(\check{N}'_e \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})} \quad (1.50)$$

$$\gamma'_e = \frac{u_o[(\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{N}'_e \cdot \check{x})(\check{z}_3 \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)^2 + (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2]}{(\check{N}'_e \cdot \check{x}) - (\check{N}'_e \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})} \quad (1.51)$$

1.3.2 Onda reflejada extraordinaria

La onda reflejada extraordinaria tiene una velocidad de fase u_e'' que depende de la dirección de propagación de la misma [10]

$$u_e'' = \sqrt{(u_o^2 - u_e^2)(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)^2 + u_e^2} \quad (1.52)$$

Para obtener una expresión de u_e'' en función de la dirección de la onda incidente \check{N}_e , fue necesario resolver la siguiente ecuación bicuadrática [14]

$$A_e \left(\frac{u_e''}{u''} \right)^4 + B_e \left(\frac{u_e''}{u''} \right)^2 + C_e = 0 \quad (1.53)$$

donde:

$$A_e = \{ 1 + b'' \text{sen}^2 \gamma [(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2] \}^2 + 4b''^2 \text{sen}^4 \gamma \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (1.54)$$

$$B_e = -2 \{ 1 + b'' \text{sen}^2 \gamma [(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2] \} [b'' (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \frac{u_e^2}{u''^2}] - 4b''^2 \text{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (1.55)$$

$$C_e = [b'' (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \frac{u_e^2}{u''^2}]^2 \quad (1.56)$$

habiendo definido:

$$b'' = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u''^2} \quad (1.57)$$

Una vez conocida la velocidad de fase de la onda reflejada extraordinaria fue posible encontrar las relaciones entre las componentes de los campos de manera similar a lo realizado en los casos anteriores [17]

$$\vec{E}''_e = (\delta''_e \vec{x} + \mu_o u_o^2 \vec{y} + \lambda''_e \vec{z})(\vec{D}''_e \cdot \vec{y}) \quad (1.58)$$

$$\vec{H}''_e = (\alpha''_e \vec{x} + \beta''_e \vec{y} + \gamma''_e \vec{z})(\vec{D}''_e \cdot \vec{y}) \quad (1.59)$$

donde:

$$\delta_e'' = \mu_o (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \left[\frac{u_o^2 (\check{N}_e'' \cdot \check{x})(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3) - u_e''^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}_e'' \cdot \check{y})(\check{z}_3 \cdot \check{z})(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)} \right] \quad (1.60)$$

$$\lambda_e'' = -\mu_o \left[\frac{u_o^2 (\check{N}_e'' \cdot \check{x})(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x}) - u_o^2 (\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)^2 + u_e''^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2}{(\check{N}_e'' \cdot \check{y})(\check{z}_3 \cdot \check{z})(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)} \right] \quad (1.61)$$

$$\alpha_e'' = \frac{-u_e'' (\check{z}_3 \cdot \check{z})}{(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)} \quad (1.62)$$

$$\beta_e'' = u_e'' \left[\frac{(\check{N}_e'' \cdot \check{x}) - (\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}_e'' \cdot \check{y})(\check{z}_3 \cdot \check{z})(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)} \right] \quad (1.63)$$

$$\gamma_e'' = \frac{u_e'' (\check{z}_3 \cdot \check{x})}{(\check{N}_e'' \cdot \check{z}_3)} \quad (1.64)$$

1.4 Ondas en el medio isótropo

Como la onda refractada corresponde a una onda que se propaga en un medio isótropo lineal su polarización puede ser elíptica y, en consecuencia,

es necesario escribir los campos en función de dos componentes de alguno de ellos; se eligieron las componentes y y z del campo eléctrico. Hemos visto que la onda transmitida puede provenir de la refracción de una onda incidente ordinaria o de una onda incidente extraordinaria. Cuando la onda incidente es ordinaria la relación entre las componentes del campo eléctrico de la onda transmitida se puede escribir de la siguiente manera [16]

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{x}) = -\frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})}{(\check{S}_o \cdot \vec{x})}(\vec{E}_o^T \cdot \check{y}) - \frac{(\check{S}_o \cdot \check{z})}{(\check{S}_o \cdot \vec{x})}(\vec{E}_o^T \cdot \check{z}) \quad (1.65)$$

mientras que la relación entre las componentes del campo magnético con las del campo eléctrico son

$$(\vec{H}_o^T \cdot \vec{x}) = \frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})}{\mu_0 u}(\vec{E}_o^T \cdot \check{z}) - \frac{(\check{S}_o \cdot \check{z})}{\mu_0 u}(\vec{E}_o^T \cdot \check{y}) \quad (1.66)$$

$$(\vec{H}_o^T \cdot \check{y}) = -\frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})(\check{S}_o \cdot \check{z})}{\mu_0 u(\check{S}_o \cdot \vec{x})}(\vec{E}_o^T \cdot \check{y}) - \frac{(\check{S}_o \cdot \check{z})^2 + (\check{S}_o \cdot \vec{x})^2}{\mu_0 u(\check{S}_o \cdot \vec{x})}(\vec{E}_o^T \cdot \check{z}) \quad (1.67)$$

$$(\vec{H}_o^T \cdot \check{z}) = \frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})^2 + (\check{S}_o \cdot \vec{x})^2}{\mu_0 u(\check{S}_o \cdot \vec{x})}(\vec{E}_o^T \cdot \check{y}) + \frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})(\check{S}_o \cdot \check{z})}{\mu_0 u(\check{S}_o \cdot \vec{x})}(\vec{E}_o^T \cdot \check{z}) \quad (1.68)$$

Cuando la onda incidente es extraordinaria resultan para la onda transmitida las siguientes relaciones [17]

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{x}) = -\frac{(\check{S}_e \cdot \check{y})}{(\check{S}_e \cdot \vec{x})}(\vec{E}_e^T \cdot \check{y}) + \frac{(\check{S}_e \cdot \check{z})}{(\check{S}_e \cdot \vec{x})}(\vec{E}_e^T \cdot \check{z}) \quad (1.69)$$

$$(\vec{H}_e^T \cdot \vec{x}) = \frac{(\check{S}_e \cdot \check{y})}{\mu_0 u}(\vec{E}_e^T \cdot \check{y}) - \frac{(\check{S}_e \cdot \check{z})}{\mu_0 u}(\vec{E}_e^T \cdot \check{z}) \quad (1.70)$$

$$(\vec{H}_e^T \cdot \check{y}) = -\frac{(\check{S}_e \cdot \check{z})(\check{S}_e \cdot \check{y})}{\mu_0 u(\check{S}_e \cdot \vec{x})}(\vec{E}_e^T \cdot \check{y}) - \frac{(\check{S}_e \cdot \vec{x})^2 + (\check{S}_e \cdot \check{z})^2}{\mu_0 u(\check{S}_e \cdot \vec{x})}(\vec{E}_e^T \cdot \check{z}) \quad (1.71)$$

$$(\vec{H}_e^T \cdot \vec{z}) = \frac{(\check{S}_e \cdot \vec{x})^2 + (\check{S}_e \cdot \vec{y})^2}{\mu_0 u (\check{S}_e \cdot \vec{x})} (\vec{E}_e^T \cdot \vec{y}) + \frac{(\check{S}_e \cdot \vec{z})(\check{S}_e \cdot \vec{y})}{\mu_0 u (\check{S}_e \cdot \vec{x})} (\vec{E}_e^T \cdot \vec{z}) \quad (1.72)$$

1.5 Condiciones de contorno

Como es bien sabido, las condiciones de contorno que deben cumplir los campos en la interfaz son la continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E} y \vec{H} y la continuidad de las componentes normales de \vec{B} y \vec{D} . Estas a su vez dan lugar a la condición de igualdad de las fases de las que resultan las leyes de la reflexión y transmisión. Hasta el momento hemos presentado, las amplitudes de los campos reflejados ordinarios en función de $(\vec{D}' \cdot \vec{y})$, las de los campos reflejados extraordinarios en función de $(\vec{D}'' \cdot \vec{y})$ y la de los transmitidos en función de $(\vec{E}^T \cdot \vec{y})$ y $(\vec{E}^T \cdot \vec{z})$ tanto para ondas incidentes ordinarias como extraordinarias. Para encontrar las amplitudes de todos los campos en función de la componente conocida del incidente, basta con resolver las ecuaciones que establecen la continuidad de las amplitudes tangenciales de los campos eléctrico y magnético. El sistema de cuatro ecuaciones que resulta es:

$$(\vec{E}^T \cdot \vec{y}) = (\vec{E} \cdot \vec{y}) + (\vec{E}' \cdot \vec{y}) + (\vec{E}'' \cdot \vec{y}) \quad (1.73)$$

$$(\vec{E}^T \cdot \vec{z}) = (\vec{E} \cdot \vec{z}) + (\vec{E}' \cdot \vec{z}) + (\vec{E}'' \cdot \vec{z}) \quad (1.74)$$

$$(\vec{H}^T \cdot \vec{y}) = (\vec{H} \cdot \vec{y}) + (\vec{H}' \cdot \vec{y}) + (\vec{H}'' \cdot \vec{y}) \quad (1.75)$$

$$(\vec{H}^T \cdot \vec{z}) = (\vec{H} \cdot \vec{z}) + (\vec{H}' \cdot \vec{z}) + (\vec{H}'' \cdot \vec{z}) \quad (1.76)$$

del cual, si previamente se reemplazan los campos por los resultados obtenidos en los párrafos anteriores, pueden despejarse las cuatro incógnitas

- $(\vec{D}' \cdot \vec{y})$, $(\vec{D}'' \cdot \vec{y})$, $(\vec{E}'^T \cdot \vec{y})$ y $(\vec{E}''^T \cdot \vec{z})$ - en función de la componente del campo conocida de la onda incidente. Si esta última es ordinaria obtenemos [16]

$$(\vec{D}' \cdot \vec{y}) = \frac{[A_o'' B_o - A_o B_o'']}{[A_o' B_o'' - A_o'' B_o']} (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (1.77)$$

$$(\vec{D}'' \cdot \vec{y}) = \frac{[A_o B_o' - A_o' B_o]}{[A_o' B_o'' - A_o'' B_o']} (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (1.78)$$

donde:

$$A_o = e_o \lambda_o + g_o \mu_o u_o^2 + \beta_o \quad (1.79)$$

$$A_o' = e_o \lambda_o' + g_o \mu_o u_o^2 + \beta_o' \quad (1.80)$$

$$A_o'' = e_o \lambda_o'' + g_o \mu_o u_o^2 + \beta_o'' \quad (1.81)$$

$$B_o = g_o \lambda_o + h_o \mu_o u_o^2 - \gamma_o \quad (1.82)$$

$$B_o' = g_o \lambda_o' + h_o \mu_o u_o^2 - \gamma_o' \quad (1.83)$$

$$B_o'' = g_o \lambda_o'' + h_o \mu_o u_o^2 - \gamma_o'' \quad (1.84)$$

y e_o , g_o y h_o son funciones de la dirección de incidencia

$$e_o = \frac{(\check{S}_o \cdot \check{z})^2 + (\check{S}_o \cdot \check{x})^2}{\mu_o u (\check{S}_o \cdot \check{x})} \quad (1.85)$$

$$g_o = \frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})(\check{S}_o \cdot \check{z})}{\mu_o u (\check{S}_o \cdot \check{x})} \quad (1.86)$$

$$h_o = \frac{(\check{S}_o \cdot \check{y})^2 + (\check{S}_o \cdot \check{x})^2}{\mu_o u (\check{S}_o \cdot \check{x})} \quad (1.87)$$

Resulta así,

$$\begin{aligned} (\vec{E}'^T \cdot \vec{y}) &= \frac{\mu_o u_o^2}{\Delta_o} [B_o (A_o'' - A_o') + B_o' (A_o - A_o'')] + \\ &+ B_o'' (A_o' - A_o)] (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\begin{aligned} (\vec{E}''^T \cdot \vec{z}) &= \frac{1}{\Delta_o} [B_o (\lambda_o' A_o'' - \lambda_o'' A_o') + B_o' (\lambda_o'' A_o - \lambda_o A_o'')] + \\ &+ B_o'' (\lambda_o A_o' - \lambda_o' A_o)] (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \end{aligned} \quad (1.89)$$

habiendo definido:

$$\Delta_o = A'_o B_o'' - A_o'' B'_o \quad (1.90)$$

Por otra parte, si la onda incidente es extraordinaria se obtiene que [17]

$$(\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) = \frac{[A_e'' B_e - A_e B_e'']}{[A'_e B_e'' - A_e'' B'_e]} (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (1.91)$$

$$(\vec{D}_e'' \cdot \vec{y}) = \frac{[A_e B'_e - A'_e B_e]}{[A'_e B_e'' - A_e'' B'_e]} (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (1.92)$$

donde:

$$A_e = e_e \lambda_e + g_e \mu_0 u_o^2 + \beta_e \quad (1.93)$$

$$A'_e = e_e \lambda'_e + g_e \mu_0 u_o^2 + \beta'_e \quad (1.94)$$

$$A_e'' = e_e \lambda_e'' + g_e \mu_0 u_o^2 + \beta_e'' \quad (1.95)$$

$$B_e = g_e \lambda_e + h_e \mu_0 u_o^2 - \gamma_e \quad (1.96)$$

$$B'_e = g_e \lambda'_e + h_e \mu_0 u_o^2 - \gamma'_e \quad (1.97)$$

$$B_e'' = g_e \lambda_e'' + h_e \mu_0 u_o^2 - \gamma_e'' \quad (1.98)$$

siendo,

$$e_e = \frac{(\check{S}_e \cdot \check{z})^2 + (\check{S}_e \cdot \check{x})^2}{\mu_0 u (\check{S}_e \cdot \check{x})} \quad (1.99)$$

$$g_e = \frac{(\check{S}_e \cdot \check{y})(\check{S}_e \cdot \check{z})}{\mu_0 u (\check{S}_e \cdot \check{x})} \quad (1.100)$$

$$h_e = \frac{(\check{S}_e \cdot \check{y})^2 + (\check{S}_e \cdot \check{x})^2}{\mu_0 u (\check{S}_e \cdot \check{x})} \quad (1.101)$$

Las componentes del campo transmitido resultan así

$$\begin{aligned} (\vec{E}_e^T \cdot \vec{y}) &= \frac{\mu_0 u_o^2}{\Delta_e} [B_e(A_e'' - A_e') + B_e'(A_e - A_e'')] + \\ &+ B_e''(A_e' - A_e)(\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} (\vec{E}_e^T \cdot \vec{z}) &= \frac{1}{\Delta_e} [B_e(\lambda_e' A_e'' - \lambda_e'' A_e') + B_e'(\lambda_e'' A_e - \lambda_e' A_e'')] + \\ &+ B_e''(\lambda_e A_e' - \lambda_e' A_e)(\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \end{aligned} \quad (1.103)$$

habiendo definido:

$$\Delta_e = A_e' B_e'' - A_e'' B_e' \quad (1.104)$$

A partir de estas expresiones fue posible calcular las amplitudes de todos los campos de las ondas involucradas en la reflexión interna de cristales uniaxiales cuando todas las ondas en el cristal y en el medio isótropo eran propagantes [14], [16], [17].

1.6 Angulo límite de reflexión inhibida

Como se sabe, dependiendo de la birrefringencia del cristal, el ángulo de reflexión de la onda reflejada extraordinaria (cuando proviene de una incidente ordinaria) y el de la onda ordinaria (cuando proviene de una onda incidente extraordinaria), pueden ser mayores que el ángulo de incidencia [14]. Esto significa que, en ciertas condiciones, es posible que exista un ángulo de incidencia límite γ_L (ángulo de reflexión inhibida) a partir del cual uno de los rayos reflejados desaparece [18].

En cristales uniaxiales con birrefringencia negativa ($u_o < u_e$ ó $n_o > n_e$), si la onda incidente es ordinaria, la velocidad de fase u_o'' de la onda reflejada

extraordinaria es mayor que la de la onda incidente u_o . Resulta entonces un ángulo de reflexión extraordinario mayor que el ángulo de incidencia. Por otro lado, cuando la onda reflejada es extraordinaria, la dirección correspondiente al rayo reflejado \check{R}_o'' no coincide con dirección de la normal al frente de onda [11]

$$\check{R}_o'' = \frac{u_e^2 \check{N}_o'' + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}_o'' \cdot \check{z}_3) \check{z}_3}{\sqrt{(u_o^4 - u_e^4)(\check{N}_o'' \cdot \check{z}_3)^2 + u_e^4}} \quad (1.105)$$

y puede existir entonces un ángulo de incidencia límite a partir del cual el rayo reflejado extraordinario sea rasante. A este ángulo límite lo conocemos con el nombre de ángulo de reflexión inhibida ya que, para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite, el rayo reflejado extraordinario desaparece. A partir de la ecuación (1.105) podemos calcular γ_{RR} (ángulo que forma la normal al frente de onda de la onda reflejada extraordinaria \check{N}_o'' con las normal a la interfaz cuando el rayo reflejado extraordinario es rasante) pidiendo que $(\check{R}_o'' \cdot \check{x}) = 0$, obteniendo

$$\cot \gamma_{RR} = \frac{-b_e \cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z}) (\check{z}_3 \cdot \check{x})}{1 + b_e (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2} \quad (1.106)$$

$$b_e = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u_e^2} \quad (1.107)$$

Como en la interfaz se cumple la condición de igualdad de las fases, el ángulo de incidencia límite γ_L (ángulo de reflexión inhibida) se puede calcular fácilmente

$$\text{sen}^2 \gamma_L = \frac{(u_o/u_e)^2}{1 + \frac{b_e \cos^2 \delta (\check{z}_1 \cdot \check{z})^2}{1 + b_e (\check{z}_1 \cdot \check{x})^2}} \quad (1.108)$$

Si la onda incidente, en cambio, es extraordinaria sólo puede existir reflexión inhibida para la onda reflejada ordinaria cuando el cristal es positivo, es decir cuando $n_e > n_o$. Como la normal al frente de ondas coincide con la dirección del rayo para la onda reflejada ordinaria, la condición de rayo reflejado ordinario rasante es simplemente pedir que el ángulo de reflexión sea 90° . Teniendo en cuenta (1.36) la condición de rayo reflejado rasante lleva a la siguiente ecuación para γ_L [18]:

$$A \operatorname{sen}^4 \gamma_L - B \operatorname{sen}^2 \gamma_L + C = 0 \quad (1.109)$$

donde

$$A = \{ b_o [\cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 - (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2] - 1 \}^2 + 4 b_o^2 \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (1.110)$$

$$B = -2 \{ b_o [\cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 - (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2] - 1 \} \left[b_o (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \frac{u_e^2}{u_o^2} \right] - 4 b_o^2 \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (1.111)$$

$$C = \left[b_o (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \frac{u_e^2}{u_o^2} \right]^2 \quad (1.112)$$

$$b_o = \frac{u_o^2 - u_e^2}{u_o^2} \quad (1.113)$$

La expresión para el ángulo de reflexión inhibida es entonces

$$\operatorname{sen}^2 \gamma_L = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (1.114)$$

A partir de estos resultados podemos afirmar que las características de los campos asociados a la reflexión interna en cristales uniaxiales fueron conocidas con anterioridad a esta Tesis, pero únicamente en condiciones en que *todas las ondas involucradas eran propagantes*. El fenómeno de reflexión inhibida constituyó, de esta manera, un límite en el rango de validez de los resultados obtenidos ya que en presencia de reflexión inhibida una de las ondas reflejadas deja de serlo.

En los capítulos siguientes extenderemos el estudio de los campos al plano complejo para poder estudiar las características de las ondas reflejadas y transmitida en condiciones de reflexión inhibida teniendo en cuenta que, para que este fenómeno tenga lugar, deben concurrir las siguientes circunstancias:

- i) la onda incidente debe provenir desde el cristal y no desde el medio isótropo (la reflexión inhibida sólo existe en la reflexión interna);
- ii) la onda incidente debe ser extraordinaria si el cristal es positivo, y debe ser ordinaria si el cristal es negativo;
- iii) la normal al frente de onda de la onda incidente no debe estar contenida en uno de los planos principales del cristal (ni en el plano de incidencia que contiene al eje óptico, ni en el plano perpendicular a este último);
- iv) el ángulo de incidencia debe superar al ángulo límite de reflexión inhibida.

Capítulo 2

Estructura de las ondas evanescentes en un cristal

La desaparición de uno de los rayos reflejados, en condiciones de reflexión inhibida, induce a pensar en la presencia de una onda evanescente en el cristal correspondiente al rayo reflejado que desaparece. La estructura de las ondas evanescentes ha sido ampliamente estudiada cuando están asociadas a la reflexión total en interfaces isótropas [1],[3],[29]. Como sabemos, la energía de estas ondas se propaga únicamente en la dirección paralela a la superficie de separación de los medios, de modo que el promedio temporal del vector de Poynting resulta nulo en la dirección perpendicular a la interfaz. Mostraremos en este capítulo que también existen ondas evanescentes asociadas a la reflexión inhibida cuyas propiedades difieren de las ondas evanescentes conocidas en interfaces isótropas. En condiciones de reflexión inhibida, para una onda incidente extraordinaria la onda reflejada ordinaria resultará evanescente, mientras que para una onda incidente ordinaria la reflejada evanescente será la extraordinaria. La estructura de estas dos ondas evanescentes también difiere entre sí. En consecuencia, analizaremos para

estas dos situaciones sus principales características, es decir: la orientación del frente de onda, la polarización y la dirección de propagación de la energía.

2.1 Orientación del frente de onda

2.1.1 Onda reflejada evanescente ordinaria

Suele decirse que la onda ordinaria tiene las mismas propiedades que una onda en un medio isótropo. Sin embargo, el hecho de que su polarización esté determinada por la dirección de la normal al frente de onda y por la dirección del eje óptico del cristal, lleva a que su comportamiento sea diferente al de las ondas planas en medios isótropos. Veremos en qué aspectos se asemejan y en cuáles difieren. Para esto, consideramos en primer lugar una interfaz formada por un cristal positivo ($n_o < n_e$) -como por ejemplo la vaterita, el cuarzo, el hielo, etc.- y por un medio isótropo con un índice de refracción n mayor al índice de refracción principal extraordinario del cristal n_e , de manera que no existe reflexión total para ningún ángulo de incidencia. Estamos así en condiciones de estudiar exclusivamente la reflexión inhibida. Proponemos también en este caso ondas planas como soluciones para las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{E}_e = \vec{E}'_e e^{i\varphi'_e} \quad (2.1)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_e = \vec{H}'_e e^{i\varphi'_e} \quad (2.2)$$

$$\varphi'_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{c}{u_o} (i\vec{N}'_e \cdot \vec{r}) - \omega t \quad (2.3)$$

donde, como ya sabemos, \check{N}'_e representa a la normal al frente de onda ordinaria reflejada cuando la onda incidente es extraordinaria, u_o es la velocidad de fase de la onda reflejada ordinaria y λ_o es la longitud de onda en el vacío.

Sabemos que, para ondas armónicas, la representación matemática de los frentes de onda está dada por las superficies de fase constante. Para la onda reflejada ordinaria, la componente perpendicular a la interfaz de la normal al frente de onda puede obtenerse, en función de la dirección de incidencia \check{N}_e , a partir de la condición de igualdad de las fases de las ondas incidente y reflejada sobre la superficie de separación de los medios - figura 2.1 b -

$$\frac{(\check{N}_e \cdot \check{y})}{u''} = \frac{(\check{N}'_e \cdot \check{y})}{u_o} ; \frac{(\check{N}_e \cdot \check{z})}{u''} = \frac{(\check{N}'_e \cdot \check{z})}{u_o} \quad (2.4)$$

y de la condición de normalización

$$(\check{N}'_e \cdot \check{x})^2 + (\check{N}'_e \cdot \check{y})^2 + (\check{N}'_e \cdot \check{z})^2 = 1, \quad (2.5)$$

del siguiente modo:

$$(\check{N}'_e \cdot \check{x}) = -\sqrt{1 - \frac{u_o^2}{u''^2} \text{sen}^2 \gamma} \quad (2.6)$$

La componente perpendicular a la interfaz del vector número de onda ordinario reflejado es entonces

$$(\vec{k}'_e \cdot \check{x}) = \frac{\omega}{u_o} (\check{N}'_e \cdot \check{x}) \quad (2.7)$$

donde hemos llamado ω a la frecuencia angular como es habitual.

Aunque la velocidad de fase de la onda incidente depende de la dirección de incidencia, su dependencia funcional es conocida -ecuación (1.36)-. Cuando el ángulo de incidencia γ es mayor que el ángulo límite de reflexión inhibida esta componente resulta imaginaria,

$$(\check{N}'_e \cdot \check{x}) = -i \frac{1}{u''} \sqrt{u_o^2 \text{sen}^2 \gamma - u''^2} \quad (2.8)$$

Para simplificar la notación llamaremos p_2 a la parte imaginaria de la componente perpendicular a la interfaz de la normal al frente de onda reflejada ordinaria; es decir que, en condiciones de reflexión inhibida,

$$(\vec{N}'_e \cdot \vec{x}) = -i p_2 \quad (2.9)$$

A partir de las ecuaciones (2.3) y (2.4), y expresando u'' en función del índice de refracción que corresponde a la onda incidente ($u'' = c/n''$) podemos escribir la fase de la onda que sufre reflexión inhibida del siguiente modo:

$$\varphi_{e'} = -i \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x + \frac{2\pi}{\lambda_0} n'' [(\vec{N}'_e \cdot \vec{y})y + (\vec{N}'_e \cdot \vec{z})z] - \omega t \quad (2.10)$$

donde el primer término corresponde a la amortiguación que sufre la onda evanescente en la dirección perpendicular a la interfaz. Si definimos

$$\varphi_{e1}' = \varphi_{e'} + i \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} p_2 x \quad (2.11)$$

como el ángulo de fase que caracteriza la propagación de la onda evanescente, el campo eléctrico de la onda reflejada evanescente ordinaria resulta

$$\vec{\mathcal{E}}'_e = \vec{E}'_e e^{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x} e^{i\varphi_{e1}'} \quad (2.12)$$

En la ecuación (2.12) podemos ver cómo la amplitud de la onda reflejada evanescente decrece exponencialmente en la dirección perpendicular a la interfaz en el interior del cristal ($x < 0$). La onda reflejada ordinaria en condiciones de reflexión inhibida resulta así una onda inhomogénea, es decir una onda para la cual las superficies de fase constante no coinciden con las superficies de amplitud constante [3], [29]. Si comparamos estos resultados con los correspondientes a interfaces isótropas en condiciones de reflexión total, vemos que la componente perpendicular a la interfaz de la normal al frente de

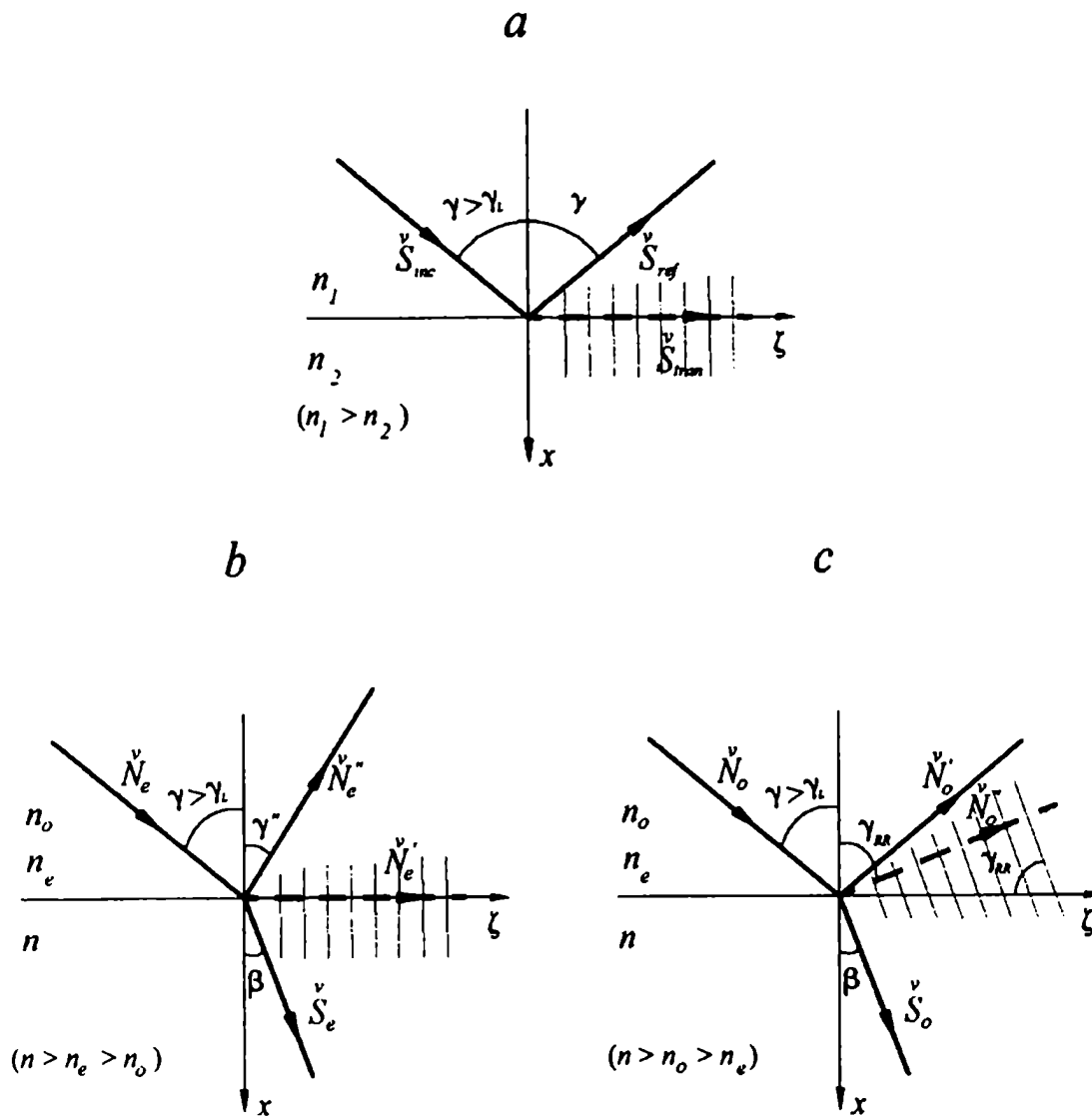


Figura 2.1: a) Reflexión total en interfaces isotropas; b) Reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial - medio isotropo (incidencia extraordinaria); c) Reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial - medio isotropo (incidencia ordinaria)

onda correspondiente a la onda evanescente transmitida ($\check{S}_{tran.\check{x}}$), también es imaginaria [1]

$$(\check{S}_{tran.\check{x}}) = i \frac{1}{u_2} \sqrt{u_2^2 \text{sen}^2 \gamma - u_1^2} \quad (2.13)$$

donde u_1 y u_2 son las velocidades de fase de las ondas en el primer y en el segundo medio respectivamente. Asimismo la amplitud de la onda refractada decrece exponencialmente al alejarnos de la interfaz, y la normal al frente de onda también está contenida en la superficie de separación de los medios. Esta similitud que existe entre la onda evanescente refractada asociada a la reflexión total en interfaces isótropas y la onda evanescente reflejada ordinaria asociada a la reflexión inhibida, se debe a que en ambos casos la velocidad de fase de la onda evanescente no depende de la dirección de propagación (figura 2.1.a y 2.1.b).

2.1.2 Onda reflejada evanescente extraordinaria

La interfaz que consideramos ahora está formada por un cristal uniaxial negativo ($n_e < n_o$) y un medio isótropo de índice de refracción n mayor que el índice ordinario principal del cristal n_o , de modo tal que puede existir reflexión inhibida pero no reflexión total. La onda reflejada ordinaria tiene una velocidad de fase u_o igual a la de la onda incidente, verificándose en ella la ley de la reflexión; pero la onda reflejada extraordinaria, en cambio, tiene una velocidad de propagación u_o'' que depende de su dirección de propagación tal como fue indicado en la sección 1.2.2. En consecuencia es de esperar que la estructura de la onda evanescente correspondiente (figura 2.1.c) sea diferente a la del caso anterior. Los campos asociados a la onda evanescente reflejada

extraordinaria son

$$\vec{\mathcal{E}}_o'' = \vec{E}_o'' e^{i\varphi_o''} \quad (2.14)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_o'' = \vec{H}_o'' e^{i\varphi_o''} \quad (2.15)$$

$$\varphi_o'' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{c}{u_o''} (\check{N}_o'' \cdot \vec{r}) - \omega t \quad (2.16)$$

A partir de la condición de igualdad de las fases y de la condición de normalización del versor normal al frente de onda podemos calcular la componente perpendicular a la interfaz de la normal al frente de onda reflejado extraordinario

$$(\check{N}_o'' \cdot \vec{x}) = -\sqrt{1 - \frac{u_o''^2}{u_o^2} \text{sen}^2 \gamma} \quad (2.17)$$

y la componente x del vector número de onda \vec{k}_o'' ,

$$(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x}) = \frac{\omega}{u_o''} (\check{N}_o'' \cdot \vec{x}) \quad (2.18)$$

es decir:

$$(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x}) = \frac{\omega}{u_o} \sqrt{\frac{u_o^2}{u_o''^2} - \text{sen}^2 \gamma}, \quad (2.19)$$

Hemos visto que, para obtener una expresión para la velocidad de fase de la onda reflejada extraordinaria u_o'' en función de la dirección de incidencia y de parámetros del cristal es preciso resolver la ecuación bicuadrática indicada en la ecuación (1.17). Cuando el ángulo de incidencia γ es mayor al ángulo de reflexión inhibida γ_L , u_o'' y $(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})$ resultan complejos. En efecto, en estas condiciones, de (1.17) y (2.19) obtenemos

$$(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x}) = \frac{\omega}{u_o} \sqrt{\frac{2A_o + B_o \text{sen}^2 \gamma \mp i \text{sen}^2 \gamma \sqrt{4A_o C_o - B_o^2}}{B_o \pm i \sqrt{4A_o C_o - B_o^2}}} \quad (2.20)$$

Si reemplazamos \mathcal{A}_o , \mathcal{B}_o y \mathcal{C}_o por sus expresiones en función de la dirección de incidencia y de parámetros del cristal -ecuaciones (1.18) a (1.21)- podemos escribir la parte real y la imaginaria del vector número de onda de la siguiente manera:

$$(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_R = \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \left[\frac{(u_e^2 - u_o^2)(\check{z} \cdot \check{z}_3)(\check{x} \cdot \check{z}_3) \operatorname{sen} \gamma \cos \delta}{u_e^2(\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 + u_o^2(\check{x} \cdot \check{z}_3)^2} \right] \quad (2.21)$$

$$(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_I = \frac{-2\pi n_o}{\lambda_0} \sqrt{\frac{u_e^2 \operatorname{sen}^2 \gamma - u_o^2}{u_e^2(\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 + u_o^2(\check{x} \cdot \check{z}_3)^2} + \frac{u_e^2(u_o^2 - u_e^2)(\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta}{[u_e^2(\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 + u_o^2(\check{x} \cdot \check{z}_3)^2]^2}} \quad (2.22)$$

Con el fin de simplificar la notación, definimos f_1 y f_2 de modo que

$$(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x}) = \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} (f_1 + i f_2) \quad (2.23)$$

La fase de la onda reflejada evanescente puede escribirse entonces

$$\varphi_o'' = -i \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} f_2 x + \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} [f_1 x + (\check{N}_o \cdot \check{y}) y + (\check{N}_o \cdot \check{z}) z] - \omega t \quad (2.24)$$

donde el primer término representa la amortiguación que sufre la onda a medida que se aleja de la interfaz. Definiendo

$$\varphi_{o1}'' = \varphi_o'' + i \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} f_2 x \quad (2.25)$$

como el ángulo de fase que caracteriza la propagación de esta onda, el campo eléctrico de la onda reflejada evanescente resulta

$$\vec{\mathcal{E}}_o'' = \vec{E}_o'' e^{\frac{2\pi n_o f_2 x}{\lambda_0}} e^{i \varphi_{o1}''} \quad (2.26)$$

Analizando la ecuación (2.21) vemos que la parte real de la componente perpendicular a la interfaz de \vec{k}_o'' puede ser positiva o negativa dependiendo de la orientación del plano de incidencia y de la dirección del eje óptico del cristal. Que la parte real de $(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})$ no sea nula significa que la normal al frente de onda no está contenida en la superficie de separación de los medios. Es importante recordar, como ya dijimos, que en las ondas extraordinarias la dirección de la normal al frente de onda no coincide con la dirección de propagación de la energía. Bajo estas circunstancias, el frente de ondas está inclinado un ángulo γ_{RR} respecto de la interfaz (ver figura 2.1.c), de modo que

$$\cotg \gamma_{RR} = \frac{(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_R}{(\omega/u_o) \text{sen} \gamma} \quad (2.27)$$

Si reemplazamos la ecuación (2.21) en la (2.27) obtenemos

$$\cotg \gamma_{RR} = \frac{(u_e^2 - u_o^2)(\check{z}_3 \cdot \check{z})(\check{z}_3 \cdot \check{x}) \cos \delta}{u_e^2(\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 + u_o^2(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2} \quad (2.28)$$

Podemos ver que γ_{RR} es independiente del ángulo de incidencia γ ; es decir que la inclinación de la parte real de la normal al frente de onda de la onda evanescente no varía con el ángulo de incidencia en condiciones de reflexión inhibida.

2.2 Polarizaciones de las ondas evanescentes

Comenzaremos considerando una onda evanescente ordinaria que, como ya sabemos, proviene de una onda incidente extraordinaria, y estudiaremos la dirección de vibración de los campos \vec{E}'_e y \vec{H}'_e asociados. Como para ángulos de incidencia mayores al ángulo límite de reflexión inhibida ($\check{N}'_e \cdot \vec{x}$) es imaginaria, los coeficientes que relacionan las componentes de los campos reflejados

ordinarios que provienen de una onda incidente extraordinaria -ecuaciones (1.45) y (1.46)- son complejos, y podemos escribir

$$(\vec{E}'_e \cdot \vec{x}) = (\check{z} \cdot \check{z}_3) (\delta_R^{e'} + i\delta_I^{e'}) (\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) \quad (2.29)$$

$$(\vec{E}'_e \cdot \vec{y}) = \mu_0 u_o^2 (\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) \quad (2.30)$$

$$(\vec{E}'_e \cdot \vec{z}) = -(\check{x} \cdot \check{z}_3) (\delta_R^{e'} + i\delta_I^{e'}) (\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) \quad (2.31)$$

$$(\vec{H}'_e \cdot \vec{x}) = (\alpha_R^{e'} + i\alpha_I^{e'}) (\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) \quad (2.32)$$

$$(\vec{H}'_e \cdot \vec{y}) = (\beta_R^{e'} + i\beta_I^{e'}) (\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) \quad (2.33)$$

$$(\vec{H}'_e \cdot \vec{z}) = (\gamma_R^{e'} + i\gamma_I^{e'}) (\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) \quad (2.34)$$

Pero también el coeficiente que relaciona la componente y del vector desplazamiento eléctrico de la onda incidente ($\vec{D}'_e \cdot \vec{y}$) y de la reflejada ordinaria ($\vec{D}'_e \cdot \vec{y}$) - ecuación (1.91) - es complejo

$$(\vec{D}'_e \cdot \vec{y}) = (\Gamma_R^e + i\Gamma_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.35)$$

de modo que reemplazando la ecuación (2.35) en las ecuaciones (2.29) a (2.34) podemos obtener las amplitudes de los campos reflejados en función de la componente conocida del incidente:

$$(\vec{E}'_e \cdot \vec{x}) = (\check{z} \cdot \check{z}_3) (\delta_R^e + i\delta_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.36)$$

$$(\vec{E}'_e \cdot \vec{y}) = \mu_0 u_o^2 (\Gamma_R^e + i\Gamma_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.37)$$

$$(\vec{E}'_e \cdot \vec{z}) = -(\check{x} \cdot \check{z}_3) (\delta_R^e + i\delta_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.38)$$

$$(\vec{H}'_e \cdot \vec{x}) = (\alpha_R^e + i\alpha_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.39)$$

$$(\vec{H}'_e \cdot \vec{y}) = (\beta_R^e + i\beta_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.40)$$

$$(\vec{H}'_e \cdot \vec{z}) = (\gamma_R^e + i\gamma_I^e) (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \quad (2.41)$$

Calculamos ahora la parte real de los campos, que es la que tiene sentido físico

$$\vec{\mathcal{E}}_e' = \text{Re}(\vec{E}_e' e^{i\varphi_e'}) \quad (2.42)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_e' = \text{Re}(\vec{H}_e' e^{i\varphi_e'}) \quad (2.43)$$

es decir

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_e' = e^{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x} (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \{ & [\text{Re}(E'_{ex}) \cos \varphi'_{e1} - \text{Im}(E'_{ex}) \text{sen} \varphi'_{e1}] \tilde{x} + \\ & + [\text{Re}(E'_{ey}) \cos \varphi'_{e1} - \text{Im}(E'_{ey}) \text{sen} \varphi'_{e1}] \tilde{y} + \\ & + [\text{Re}(E'_{ez}) \cos \varphi'_{e1} - \text{Im}(E'_{ez}) \text{sen} \varphi'_{e1}] \tilde{z} \} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_e' = e^{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x} (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \{ & [\text{Re}(H'_{ex}) \cos \varphi'_{e1} - \text{Im}(H'_{ex}) \text{sen} \varphi'_{e1}] \tilde{x} + \\ & + [\text{Re}(H'_{ey}) \cos \varphi'_{e1} - \text{Im}(H'_{ey}) \text{sen} \varphi'_{e1}] \tilde{y} + \\ & + [\text{Re}(H'_{ez}) \cos \varphi'_{e1} - \text{Im}(H'_{ez}) \text{sen} \varphi'_{e1}] \tilde{z} \} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.36) a (2.41) en (2.44) y (2.45) resultan

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_e' = e^{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x} (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \{ & [(\tilde{z} \cdot \tilde{z}_3)(\delta_R^e \cos \varphi'_{e1} - \delta_I^e \text{sen} \varphi'_{e1})] \tilde{x} + \\ & + [\mu_o u_o^2 (\Gamma_R^e \cos \varphi'_{e1} - \Gamma_I^e \text{sen} \varphi'_{e1})] \tilde{y} - \\ & - [(\tilde{x} \cdot \tilde{z}_3)(\delta_R^e \cos \varphi'_{e1} - \delta_I^e \text{sen} \varphi'_{e1})] \tilde{z} \} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_e' = e^{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x} (\vec{D}_e \cdot \vec{y}) \{ & [(\alpha_R^e \cos \varphi'_{e1} - \alpha_I^e \text{sen} \varphi'_{e1})] \tilde{x} + \\ & + [(\beta_R^e \cos \varphi'_{e1} - \beta_I^e \text{sen} \varphi'_{e1})] \tilde{y} + \\ & + [(\gamma_R^e \cos \varphi'_{e1} - \gamma_I^e \text{sen} \varphi'_{e1})] \tilde{z} \} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Las ecuaciones (2.46) y (2.47) corresponden a ecuaciones paramétricas de elipses, lo que pone de manifiesto que la polarización de la onda reflejada

evanescente es elíptica. Puede claramente notarse, además, que la amplitud de esta onda inhomogénea decrece cuando se aleja de la interfaz. Recordemos que el campo eléctrico, correspondiente a una onda ordinaria propagante, está linealmente polarizado en la dirección perpendicular al eje óptico. A partir de la ecuación (2.46) es fácil ver que, para una onda ordinaria evanescente, el campo eléctrico también está contenido en un plano ortogonal al eje óptico.

Si trabajamos algebraicamente con la ecuación (2.46) de modo de eliminar la fase φ'_{e1} , podremos analizar las características geométricas de la elipse de polarización. Consideramos como parámetros descriptivos: la excentricidad

$$e' = \frac{E'_a{}^2 - E'_b{}^2}{E'_a{}^2 + E'_b{}^2} \quad (2.48)$$

(donde E'_a y E'_b son las componentes del campo eléctrico en la dirección de los ejes mayor y menor respectivamente), y el ángulo σ' que indica la orientación del eje mayor de la elipse de polarización. Definimos el ángulo σ' como el ángulo comprendido entre la componente del campo eléctrico en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización y el eje y . Debido al modo en que definimos la excentricidad -ecuación (2.48)-, $e' = 1$ corresponde a una polarización lineal; mientras que, cuando el valor de la excentricidad se encuentra entre 0 y 1 la polarización es elíptica. En la figura 2.2 se grafican las variaciones de e' y de σ' con el ángulo de incidencia para un dado plano de incidencia y orientación del eje óptico cualesquiera ($\theta = 5^\circ$ y $\delta = 25^\circ$). Podemos observar cómo, a partir del ángulo de reflexión inhibida γ_L (donde $e' = 1$), la polarización deja de ser lineal y la excentricidad de la elipse de polarización de la onda evanescente disminuye a medida que el ángulo de incidencia aumenta. Vemos en el gráfico que, si bien la polarización de la onda reflejada evanescente es elíptica, el valor de la excentricidad se aleja poco del

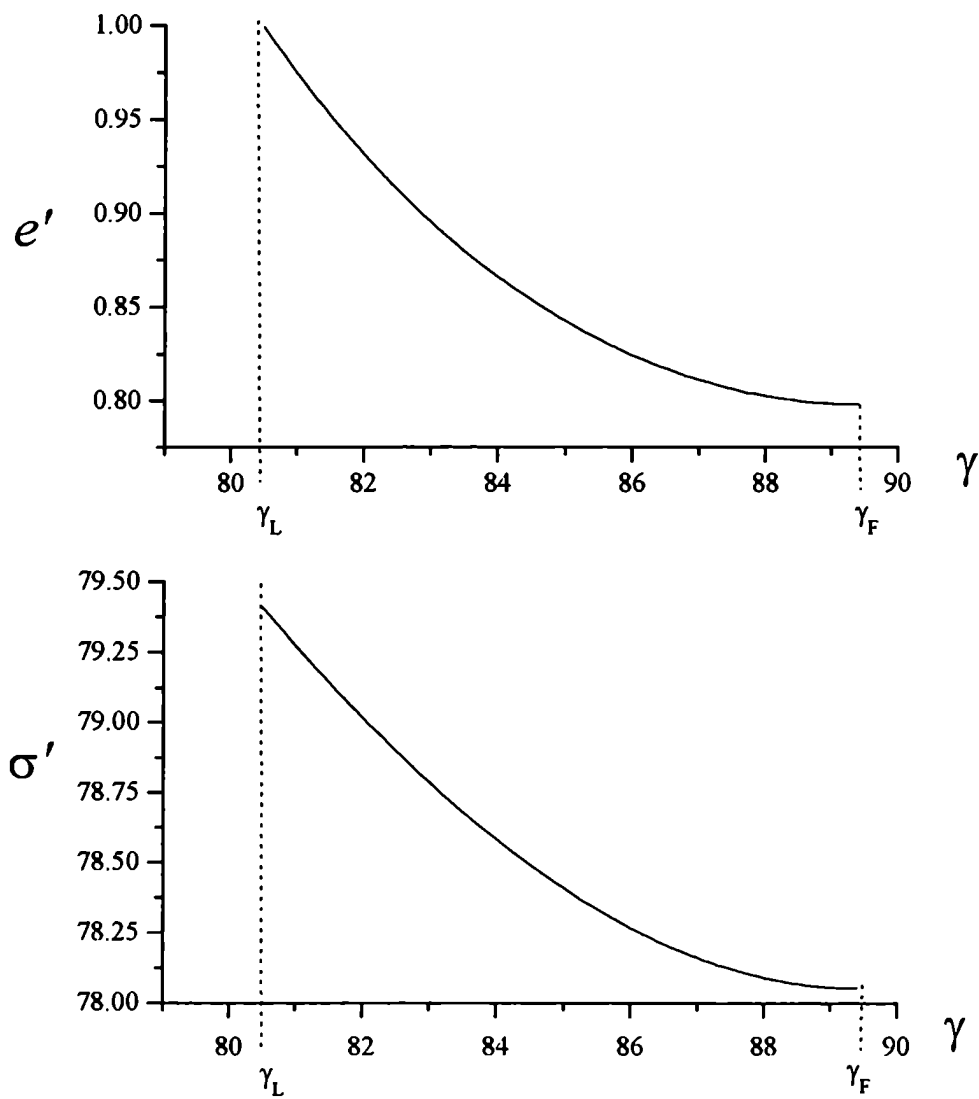


Figura 2.2: *Parámetros descriptivos de la elipse de polarización de \vec{E}_e' en función del ángulo de incidencia. $n = 1,70$; $n_o = 1,55$; $n_e = 1,65$; $\theta = 5^\circ$; $\delta = 25^\circ$; $\gamma_L = 80,48^\circ$; $\gamma_F = 89,40^\circ$*

correspondiente a polarización lineal. Vemos también que el eje mayor de la elipse de polarización de la onda evanescente (elipse que está contenida en un plano que es perpendicular al eje óptico) sufre una suave rotación a medida que varía el ángulo de incidencia. El rango de variación para $e'(\gamma)$ y para $\sigma'(\gamma)$ está determinado por los valores que toman estos parámetros en el ángulo de reflexión inhibida γ_L y en el ángulo de incidencia final γ_F , que corresponde al mayor ángulo de incidencia posible para una onda extraordinaria tal como fue definido en la sección 1.3. En la tabla 2.1 se encuentran algunos valores de estos parámetros, calculados para un cristal de vaterita ($n_o = 1.55$ y $n_e = 1.65$) y un medio isótropo de índice $n = 1,70$, para diferentes valores de θ y δ . Podemos observar que los rangos de variación de $e'(\gamma)$ y de $\sigma'(\gamma)$ son más amplios si el eje óptico se encuentra más cerca de la interfaz y a medida que el plano de incidencia forma un ángulo mayor con el plano perpendicular a la interfaz que contienen al eje óptico.

θ	δ	Rango de $e'(\gamma)$	Rango de $\sigma'(\gamma)$
5°	25°	1 - 0,798	79,41° - 78,05°
55°	25°	1 - 0,982	29,64° - 28,69°
85°	25°	1 - 0,997	25,08° - 25,06°
5°	5°	1 - 0,999	25,08° - 25,06°
5°	45°	1 - 0,792	85,01° - 84,36°
5°	55°	1 - 0,791	86,51° - 86,04°
5°	85°	1 - 0,791	89,56° - 89,50°

Tabla 2.1: Rango de variación de e' y de σ'

Pero la polarización elíptica no es la única característica particular de estas ondas. Mostraremos también que la onda reflejada ordinaria evanescente, en condiciones de reflexión inhibida, no es una onda transversal. En efecto, como vimos en párrafos anteriores, su normal al frente de onda \check{N}'_e (que por definición pertenece al plano de incidencia) está contenida en la interfaz, ya que únicamente sus componentes en y y en z son reales -ecuación (2.5)-. Por otra parte el campo eléctrico asociado \vec{E}'_e -ecuación (2.46)- describe en el tiempo una elipse que se encuentra contenida en un plano que es perpendicular al eje óptico. Estas condiciones determinan que \vec{E}'_e y \check{N}'_e no sean ortogonales entre sí, a pesar de ser una onda ordinaria. Veremos además que \vec{E}'_e y \vec{H}'_e tampoco son perpendiculares. Sabemos que la polarización del campo magnético no es independiente de la del campo eléctrico. Ambos campos están relacionados mediante la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}'_e e^{i\varphi'_e}) = \mu_0 \frac{\partial(\vec{H}'_e e^{i\varphi'_e})}{\partial t} \quad (2.49)$$

y

$$\varphi'_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o [(\check{N}'_e \cdot \check{x})x + (\check{N}'_e \cdot \check{y})y + (\check{N}'_e \cdot \check{z})z] - \omega t \quad (2.50)$$

Haciendo las derivadas correspondientes obtenemos

$$\mu_0 \omega \vec{H}'_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o \check{N}'_e \times \vec{E}'_e \quad (2.51)$$

de modo que

$$\mu_0 \omega \text{Re}(\vec{H}'_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o [\text{Re}(\check{N}'_e) \times \text{Re}(\vec{E}'_e) - \text{Im}(\check{N}'_e) \times \text{Im}(\vec{E}'_e)] \quad (2.52)$$

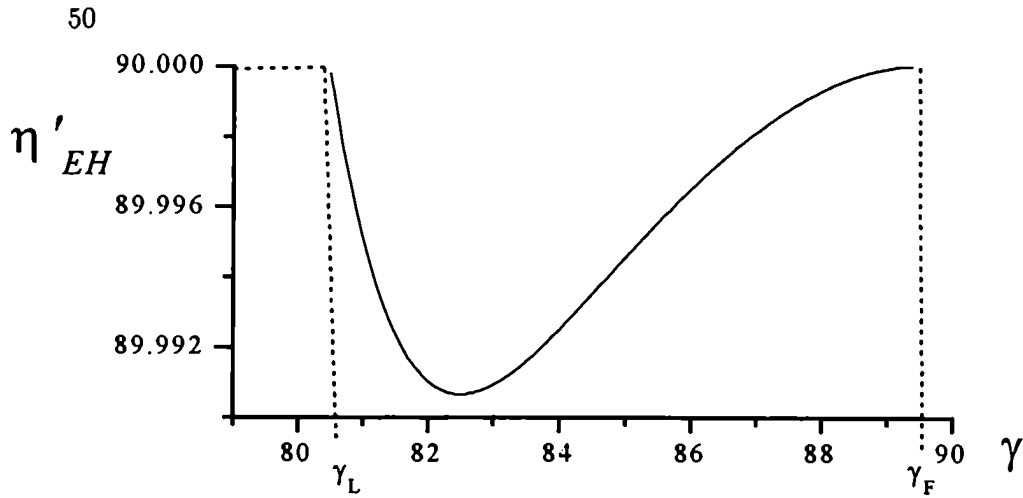


Figura 2.3: Variación del ángulo comprendido entre $\vec{\mathcal{E}}'_e$ y $\vec{\mathcal{H}}'_e$ en función del ángulo de incidencia. La interfaz considerada es la de la figura 2.2.

Calculando el producto escalar entre las partes reales de los campos a partir de las ecuaciones (2.52) y (2.9) obtenemos

$$\mu_0 \omega \operatorname{Re}(\vec{H}'_e) \cdot \operatorname{Re}(\vec{E}'_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o [\operatorname{Im}(\vec{E}'_e) \times p_2 \hat{x}] \cdot \operatorname{Re}(\vec{E}'_e) \quad (2.53)$$

Y llamando η'_{HE} al ángulo comprendido entre $\vec{\mathcal{E}}'_e$ y $\vec{\mathcal{H}}'_e$ tal que

$$\cos \eta'_{HE} = \operatorname{Re}(\vec{H}'_e) \cdot \operatorname{Re}(\vec{E}'_e) \quad (2.54)$$

resulta

$$\cos \eta'_{HE} = \frac{p_2}{\mu_0 u_o} [\operatorname{Re}(\vec{E}'_e \cdot \hat{y}) \cdot \operatorname{Im}(\vec{E}'_e \cdot \hat{z}) - \operatorname{Re}(\vec{E}'_e \cdot \hat{z}) \cdot \operatorname{Im}(\vec{E}'_e \cdot \hat{y})] \quad (2.55)$$

En la figura 2.3 se observa que, para ángulos de incidencia mayores al de reflexión inhibida, $\vec{\mathcal{E}}'_e$ y $\vec{\mathcal{H}}'_e$ no son perpendiculares entre sí. Sin embargo, aunque hemos considerado un cristal con alta birrefringencia, el apartamiento de la condición de ortogonalidad es sólo de milésimas de grado .

Si bien es de esperar que la estructura de la onda evanescente reflejada extraordinaria sea cualitativamente diferente a la de la evanescente ordinaria, para estudiar su polarización seguiremos un procedimiento algebraico similar. Los coeficientes que relacionan las componentes de los campos correspondientes a la onda reflejada extraordinaria resultan complejos cuando el ángulo de incidencia supera al ángulo de reflexión inhibida. A partir de las ecuaciones (1.28) a (1.34) y (1.78) a (1.84) las componentes de los campos reflejados extraordinarios evanescentes provenientes de una onda incidente ordinaria resultan

$$(\vec{E}_o^{\prime\prime} \cdot \vec{x}) = (\delta_R^o + i\delta_I^o) (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (2.56)$$

$$(\vec{E}_o^{\prime\prime} \cdot \vec{y}) = \mu_o u_o^2 (\Gamma_R^o + i\Gamma_I^o) (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (2.57)$$

$$(\vec{E}_o^{\prime\prime} \cdot \vec{z}) = (\lambda_R^o + i\lambda_I^o) (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (2.58)$$

$$(\vec{H}_o^{\prime\prime} \cdot \vec{x}) = (\check{z} \cdot \check{z}_3) (\alpha_R^o + i\alpha_I^o) (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (2.59)$$

$$(\vec{H}_o^{\prime\prime} \cdot \vec{y}) = (\beta_R^o + i\beta_I^o) (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (2.60)$$

$$(\vec{H}_o^{\prime\prime} \cdot \vec{z}) = -(\check{x} \cdot \check{z}_3) (\alpha_R^o + i\alpha_I^o) (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \quad (2.61)$$

Haciendo los reemplazos correspondientes en las ecuaciones (2.14) y (2.15) a partir de estas expresiones, y considerando sus partes reales podemos obtener las expresiones de los campos de la onda evanescente reflejada extraordinaria

$$\begin{aligned} \vec{E}_o^{\prime\prime} = e^{\frac{2x}{\lambda_0} n_o f_2 x} (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \{ & [(\delta_R^o \cos \varphi_{o1}'' - \delta_I^o \operatorname{sen} \varphi_{o1}'')] \check{x} + \\ & + [\mu_o u_o^2 (\Gamma_R^o \cos \varphi_{o1}'' - \Gamma_I^o \operatorname{sen} \varphi_{o1}'')] \check{y} + \\ & + [(\lambda_R^o \cos \varphi_{o1}'' - \lambda_I^o \operatorname{sen} \varphi_{o1}'')] \check{z} \} \quad (2.62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}}_o'' = e^{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_o f_2 x} (\vec{D}_o \cdot \vec{y}) \{ & [(\check{z} \cdot \check{z}_3)(\alpha_R^o \cos \varphi_{o1}'' - \alpha_I^o \operatorname{sen} \varphi_{o1}'')] \check{x} + \\
& + [(\beta_R^o \cos \varphi_{o1}'' - \beta_I^o \operatorname{sen} \varphi_{o1}'')] \check{y} - \\
& - [(\check{x} \cdot \check{z}_3)(\alpha_R^o \cos \varphi_{o1}'' - \alpha_I^o \operatorname{sen} \varphi_{o1}'')] \check{z} \}
\end{aligned}
\tag{2.63}$$

Vemos que estos campos también están elípticamente polarizados y que, al igual que lo que sucede cuando la onda reflejada extraordinaria es propagante, el campo magnético de la onda evanescente extraordinaria tampoco tiene componente en la dirección del eje óptico. En la Figura 2.4 se grafica, para el campo magnético, la variación con el ángulo de incidencia de la excentricidad e'' y la del ángulo σ'' , ángulo comprendido entre el eje mayor de la elipse de polarización y el eje y cuando el medio birrefringente es un cristal de calcita ($n_o = 1,66$; $n_e = 1,49$), $\theta = 5^\circ$ y $\delta = 25^\circ$. Los gráficos son cualitativamente similares a los correspondientes a una onda reflejada evanescente ordinaria.

En la figura 2.5 se muestra la variación del ángulo η''_{HE} (ángulo comprendido entre $\vec{\mathcal{H}}_o''$ y $\vec{\mathcal{E}}_o''$) con el ángulo de incidencia. Podemos observar cómo, a partir del ángulo de reflexión inhibida, $\vec{\mathcal{H}}_o''$ y $\vec{\mathcal{E}}_o''$ dejan de ser perpendiculares aunque en este caso sólo se apartan unas décimas de grado de la condición de ortogonalidad. Como además el vector campo magnético siempre está contenido en un plano que es perpendicular al eje óptico, \vec{N}_o'' y \vec{H}_o'' tampoco son perpendiculares entre sí y, en consecuencia, la onda evanescente extraordinaria no es una onda transversal.

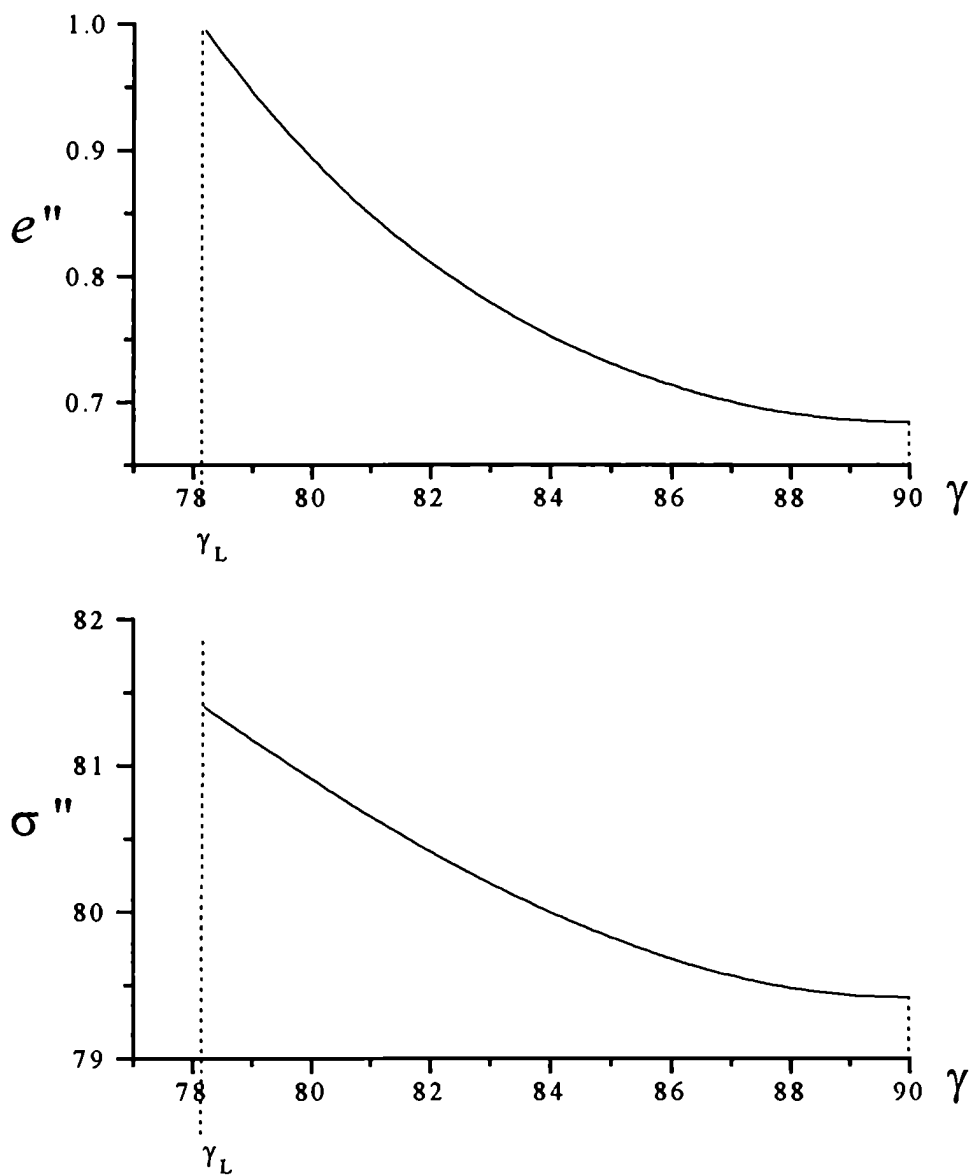


Figura 2.4: *Parámetros descriptivos de la elipse de polarización de \vec{H}_o'' en función del ángulo de incidencia. $n = 1,70$; $n_o = 1,66$; $n_e = 1,49$; $\theta = 5^\circ$; $\delta = 25^\circ$; $\gamma_L = 78,11^\circ$.*

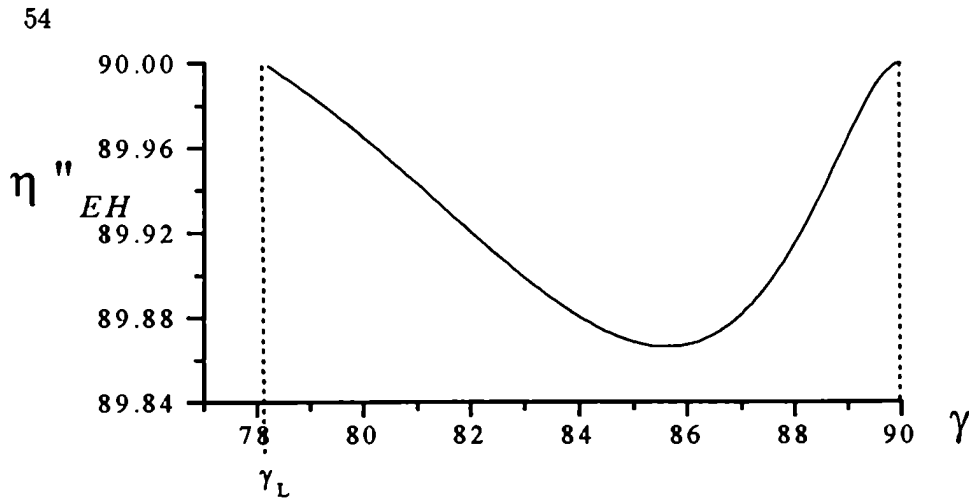


Figura 2.5: Variación del ángulo comprendido entre \vec{E}_o'' y \vec{H}_o'' en función del ángulo de incidencia. La interfaz considerada es la de la figura 2.4.

2.3 Promedio temporal del vector de Poynting

Las características peculiares de polarización de las ondas ordinarias o extraordinarias evanescentes deben reflejarse en los vectores de Poynting asociados a ellas. En el caso en que la onda evanescente sea la reflejada ordinaria, el vector de Poynting instantáneo está dado por el producto vectorial de la parte real del campo eléctrico y del campo magnético tal como fueron definidos en las ecuaciones (2.42) y (2.43)

$$\vec{S}'_e(\vec{r}, t) = \vec{E}'_e(\vec{r}, t) \times \vec{H}'_e(\vec{r}, t) \quad (2.64)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.46) y (2.47) en (2.64), haciendo el producto vectorial, y agrupando algebraicamente de modo adecuado, obtenemos las componentes del vector de Poynting

$$S'_{ex} = L' \{ 0 + [V'_x \cos 2\varphi'_{e1} + T'_x \operatorname{sen} 2\varphi'_{e1}] \} \quad (2.65)$$

$$S'_{ey} = L' \{ \langle S'_y \rangle + [V'_y \cos 2\varphi'_{e1} + T'_y \operatorname{sen} 2\varphi'_{e1}] \} \quad (2.66)$$

$$S'_{ez} = L' \{ \langle S'_z \rangle + [V'_z \cos 2\varphi'_{e1} + T'_z \operatorname{sen} 2\varphi'_{e1}] \} \quad (2.67)$$

donde

$$L' = c \frac{4\pi}{\lambda_0} n_o p_2 x / 2 \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \langle S'_y \rangle = & - \operatorname{Re}(E'_x) \operatorname{Re}(H'_z) + \operatorname{Re}(H'_x) \operatorname{Re}(E'_z) - \\ & - \operatorname{Im}(E'_x) \operatorname{Im}(H'_z) + \operatorname{Im}(H'_x) \operatorname{Im}(E'_z) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \langle S'_z \rangle = & - \operatorname{Re}(E'_y) \operatorname{Re}(H'_x) + \operatorname{Re}(H'_y) \operatorname{Re}(E'_x) - \\ & - \operatorname{Im}(E'_y) \operatorname{Im}(H'_x) + \operatorname{Im}(H'_y) \operatorname{Im}(E'_x) \end{aligned} \quad (2.70)$$

En las ecuaciones (2.65) a (2.67) podemos ver que las componentes del vector de Poynting están compuestas por dos términos: el primero es independiente de la fase de la onda reflejada y, en consecuencia, independiente del tiempo; el segundo (entre corchetes) depende del tiempo a través de φ'_{e1} . Es fácil notar que el promedio temporal de esta última parte se anula para un número entero de ciclos, resultando el primer término el promedio temporal del vector de Poynting. Se observa también en la ecuación (2.65) que la componente perpendicular a la interfaz del promedio temporal del vector de Poynting es nula para la onda evanescente, es decir que no hay flujo de energía en esta dirección. Los factores V'_x , V'_y , V'_z , T'_x , T'_y y T'_z , dependen de la dirección de incidencia y de parámetros del cristal y determinan las características geométricas de la elipse que describe en el tiempo el vector de Poynting. A partir de la ecuación (2.68) podemos ver cómo el tamaño de la elipse decrece

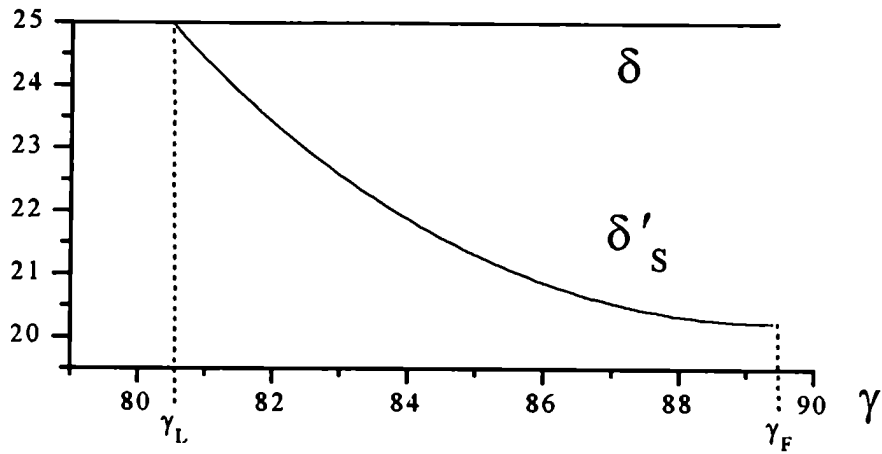


Figura 2.6: Variación de δ'_S con el ángulo de incidencia para una onda reflejada ordinaria evanescente. La interfaz considerada es la de la figura 2.2.

exponencialmente a medida que nos alejamos de la interfaz; es decir que, con una penetración en el cristal de unas pocas longitudes de onda resulta casi nulo.

A diferencia de lo que sucede con las ondas evanescentes en medios isótropos, el flujo neto de energía no está contenido en el plano de incidencia. En efecto, el ángulo comprendido entre el promedio temporal del vector de Poynting y el eje z estará dado por

$$\operatorname{tg} \delta'_S = \frac{\langle S'_y \rangle}{\langle S'_z \rangle} \quad (2.71)$$

En la figura 2.6 vemos que δ'_S no coincide con δ (ángulo comprendido entre el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico, y el plano de incidencia) y que varía con el ángulo de incidencia a pesar de tratarse de una onda ordinaria.

Para proseguir el estudio del comportamiento del promedio temporal del vector de Poynting reflejado ordinario escribimos sus componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia:

$$\langle S'_z \rangle = \langle S'_z \rangle \cos\delta + \langle S'_y \rangle \operatorname{sen}\delta \quad (2.72)$$

$$\langle S'_y \rangle = - \langle S'_z \rangle \operatorname{sen}\delta + \langle S'_y \rangle \cos\delta \quad (2.73)$$

En la figura 2.7 se grafica la variación de estas componentes en función del ángulo de incidencia. Podemos ver - figuras 2.6 y 2.7 - cómo para ángulos de incidencia menores al ángulo de reflexión inhibida el promedio temporal del vector de Poynting está contenido en el plano de incidencia ($\langle S'_y \rangle = 0$ y $\delta'_s = \delta = 25^\circ$). En cambio, para ángulos de incidencia mayores a él, el promedio temporal del vector de Poynting se aleja cada vez más de este plano. Como vemos en la figura, el promedio temporal del vector de Poynting correspondiente a la onda evanescente ordinaria es nulo para incidencia rasante como era de esperar.

Si consideramos ahora que la onda reflejada evanescente es la extraordinaria, la parte real del campo eléctrico y del campo magnético estarán dadas por las ecuaciones (2.62) y (2.63). También en este caso, para ángulos de incidencia mayores al de reflexión inhibida, el promedio temporal de la componente perpendicular a la interfaz del vector de Poynting es nulo, ya que no existe flujo de energía en esa dirección. Pero, a diferencia de lo que ocurre con las ondas evanescentes ordinarias, en este caso el promedio temporal del vector de Poynting tiene una componente perpendicular al plano de incidencia también para ángulos de incidencia menores al de reflexión inhibida debido a que el rayo reflejado extraordinario no está contenido en el plano de incidencia.

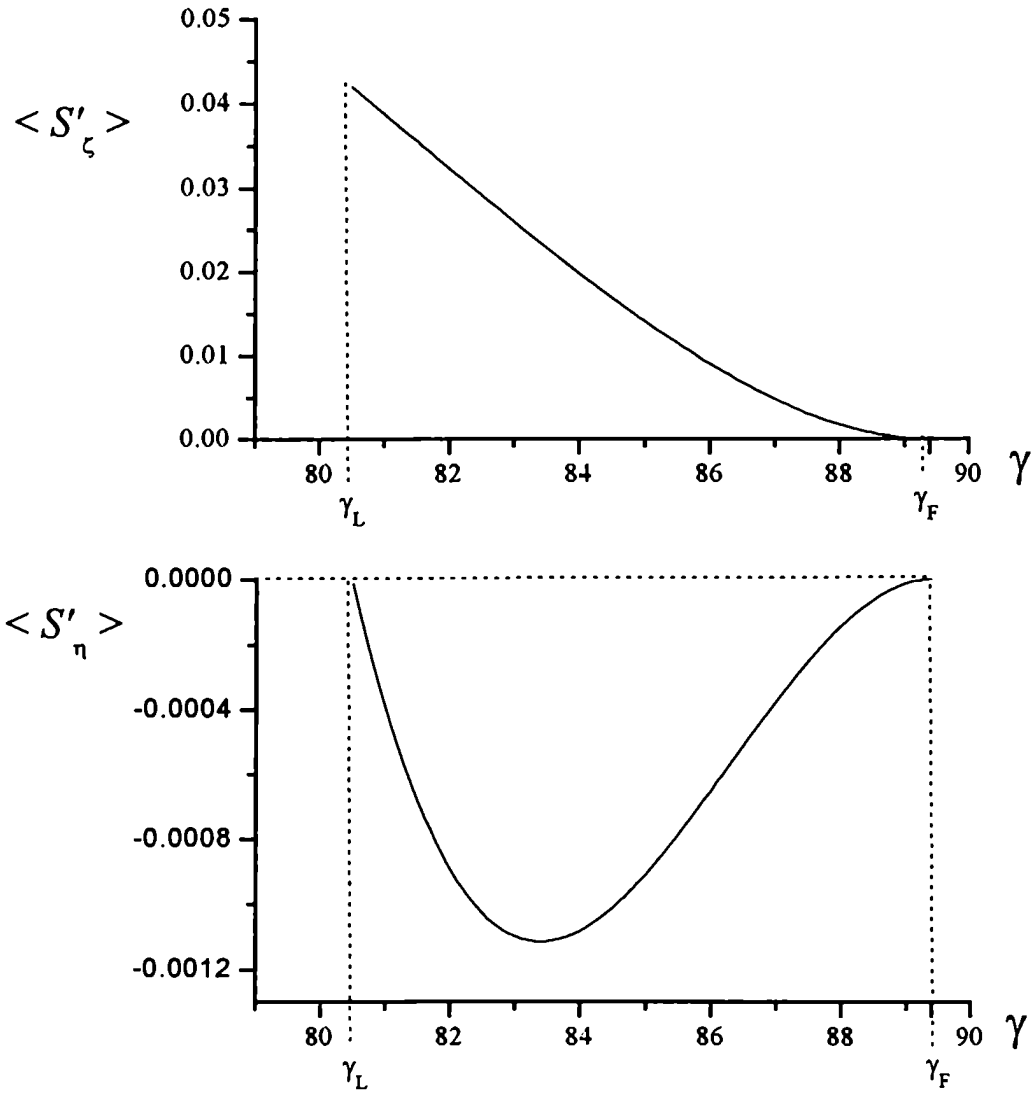


Figura 2.7: Variación de las componentes del vector de Poynting con el ángulo de incidencia para una onda reflejada ordinaria evanescente. La interfaz considerada es la de la figura 2.2.

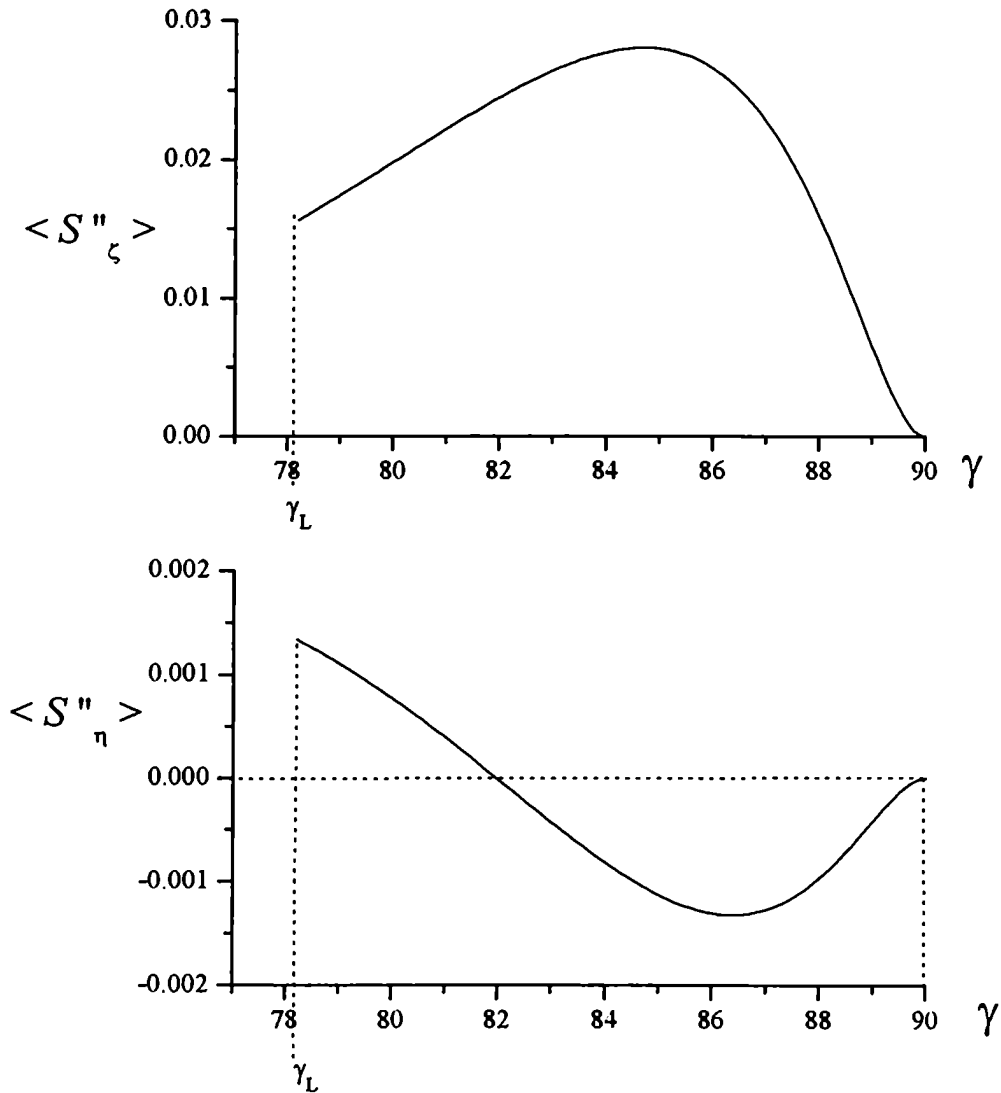


Figura 2.8: Variación de las componentes paralela y perpendicular a la interfaz del vector de Poynting con el ángulo de incidencia para una onda reflejada extraordinaria evanescente. La interfaz considerada es la de la figura 2.4.

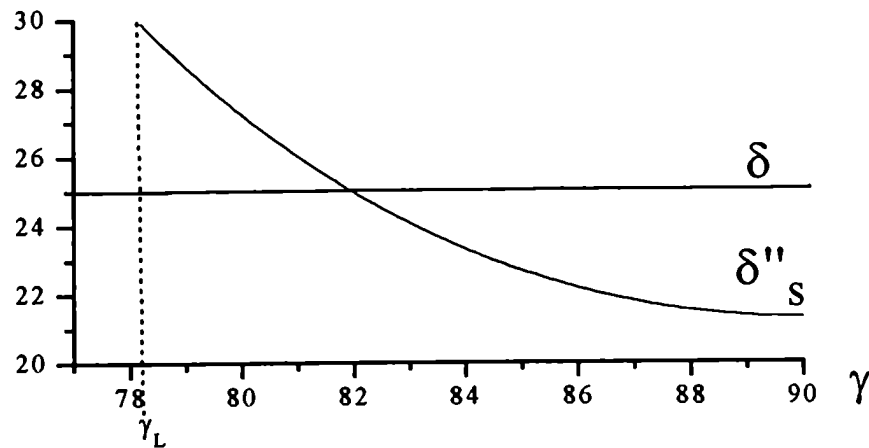


Figura 2.9: Variación de δ''_s con el ángulo de incidencia para una onda reflejada extraordinaria evanescente. La interfaz considerada es la de la figura 2.4.

En la figura 2.8 se grafica la variación de las componentes perpendicular y paralela al plano de incidencia del vector de Poynting con γ y en la figura 2.9 la variación del ángulo δ''_s con el ángulo de incidencia. Ambos gráficos se realizaron para un cristal de calcita, $\theta = 5^\circ$ y $\delta = 25^\circ$.

Sabíamos que reflexión inhibida significa que uno de los rayos reflejados desaparece: el reflejado ordinario si el incidente es extraordinario y el reflejado extraordinario si el incidente es ordinario. A lo largo de este capítulo hemos demostrado que la onda asociada al rayo que está inhibido es una onda evanescente, y hemos determinado las características de las mismas. Las ondas reflejadas evanescentes son ondas inhomogéneas, de modo que resulta compleja la componente perpendicular a la interfaz de los vectores número de onda asociados a ellas. La parte real de estos vectores indica la

orientación de las superficies de fase constante, mientras que la parte imaginaria determina las superficies de amplitud constante. Es decir, como la atenuación que sufre la onda depende de la profundidad de penetración en el material, en un determinado instante a diferentes puntos del frente de onda les corresponden amplitudes distintas. Hemos visto que cuando la onda reflejada evanescente es ordinaria la normal al frente de onda está contenida en la interfaz, mientras que si la onda evanescente es extraordinaria la normal al frente de onda forma con la superficie de separación de los medios un ángulo γ_{RR} que es el mismo para todos los ángulos de incidencia mayores al de reflexión inhibida. Además, las ondas reflejadas, que siempre están linealmente polarizadas cuando son propagantes (es decir si $\gamma < \gamma_L$), pasan a tener polarización elíptica cuando son evanescentes (cuando $\gamma > \gamma_L$). Mostramos también que las ondas evanescentes asociadas a la reflexión inhibida no son ondas transversales y que, para ondas reflejadas evanescentes ordinarias, la elipse que describe en el tiempo el vector campo eléctrico reflejado ordinario $\vec{\mathcal{E}}_e$ está contenido en un plano que es perpendicular al eje óptico, mientras que, para ondas evanescentes extraordinarias, es el vector campo magnético reflejado extraordinario $\vec{\mathcal{H}}_o$ el que está contenido en dicho plano. Esto se corresponde con las relaciones de perpendicularidad, de los campos asociados a estas ondas respecto del eje óptico, cuando son propagantes.

Como era de esperar, tanto para ondas reflejadas evanescentes ordinarias como extraordinarias la componente perpendicular a la interfaz del promedio temporal del vector de Poynting es nula. Pero, en condiciones de reflexión inhibida, su promedio temporal no está contenido en el plano de incidencia (ni siquiera en el caso en que la onda evanescente sea la ordinaria) y su orien-

tación respecto a este plano va variando con el ángulo de incidencia. Pueden observarse propiedades análogas en las ondas transmitidas evanescentes en condiciones de reflexión total externa en interfaces medio isotrópico-cristal uniaxial [30], [31], [32]. Sin embargo, como ondas reflejadas evanescentes sólo existen en condiciones de reflexión inhibida, sus propiedades no se corresponden con las de las otras ondas reflejadas presentes en ningún tipo de interfaz isotrópica ni de interfaces formadas por un medio isotrópico y un cristal uniaxial, ni dieléctricas, ni absorbentes.

Capítulo 3

Estructura de las ondas propagantes en el cristal y en el medio isótropo

En el Capítulo 2 hemos analizado la estructura de la onda reflejada evanescente, es decir la estructura de la onda reflejada correspondiente al rayo que resulta inhibido. Estudiaremos ahora la estructura de las ondas propagantes y veremos que también ellas presentan características particulares en condiciones de reflexión inhibida. Como ya hemos dicho en el capítulo anterior, son tres las ondas propagantes en condiciones de reflexión inhibida: la incidente, la reflejada no inhibida y la transmitida (ver figura 2.1). Para su estudio distinguiremos entre las ondas que se propagan en el cristal (incidente y reflejada no inhibida) y la que se propaga en el medio isótropo (refractada). Analizaremos la dirección de vibración de los campos y mostraremos además que, tanto las ondas reflejadas propagantes como la transmitida, sufren un salto de fase en condiciones de reflexión inhibida.

3.1 Ondas propagantes en el cristal

Sabemos que, en la reflexión interna en cristales uniaxiales, para cada onda incidente, las ondas reflejadas son dos: la ordinaria y la extraordinaria; pero sólo una de ellas es propagante en condiciones de reflexión inhibida. En efecto, la onda reflejada ordinaria, cuando la onda incidente es ordinaria (caso O-O), y la onda reflejada extraordinaria, cuando la onda incidente es extraordinaria (caso E-E), nunca son evanescentes. A pesar de ser ondas propagantes, en condiciones de reflexión inhibida las amplitudes de los campos eléctricos reflejados \vec{E}'_o - ecuación (1.15) - y \vec{E}''_e - ecuación (1.58) - resultan complejas. Esto quiere decir que la onda reflejada propagante, ya sea la ordinaria o la extraordinaria, sufre un salto de fase en presencia de reflexión inhibida. Este desfasaje resulta ser el mismo para cualquiera de las componentes del campo, como corresponde a la polarización siempre lineal de las ondas que se propagan en un cristal. Podemos así escribir la amplitud compleja de la onda reflejada O-O de la siguiente manera

$$\vec{E}'_o = (|E'_{ox}| \hat{x} + |E'_{oy}| \hat{y} + |E'_{oz}| \hat{z}) e^{i\Phi'_o} \quad (3.1)$$

donde

$$\Phi'_o = \text{arctg} \frac{\text{Im}(E'_{oz})}{\text{Re}(E'_{oz})} \quad (3.2)$$

y la de la onda reflejada E-E

$$\vec{E}''_e = (|E_{ex}''| \hat{x} + |E_{ey}''| \hat{y} + |E_{ez}''| \hat{z}) e^{i\Phi_e''} \quad (3.3)$$

donde

$$\Phi_e'' = \text{arctg} \frac{\text{Im}(E_{ez}'')}{\text{Re}(E_{ez}'')} \quad (3.4)$$

eligiendo para los cálculos la componente z de los campos. En la figura 3.1 se

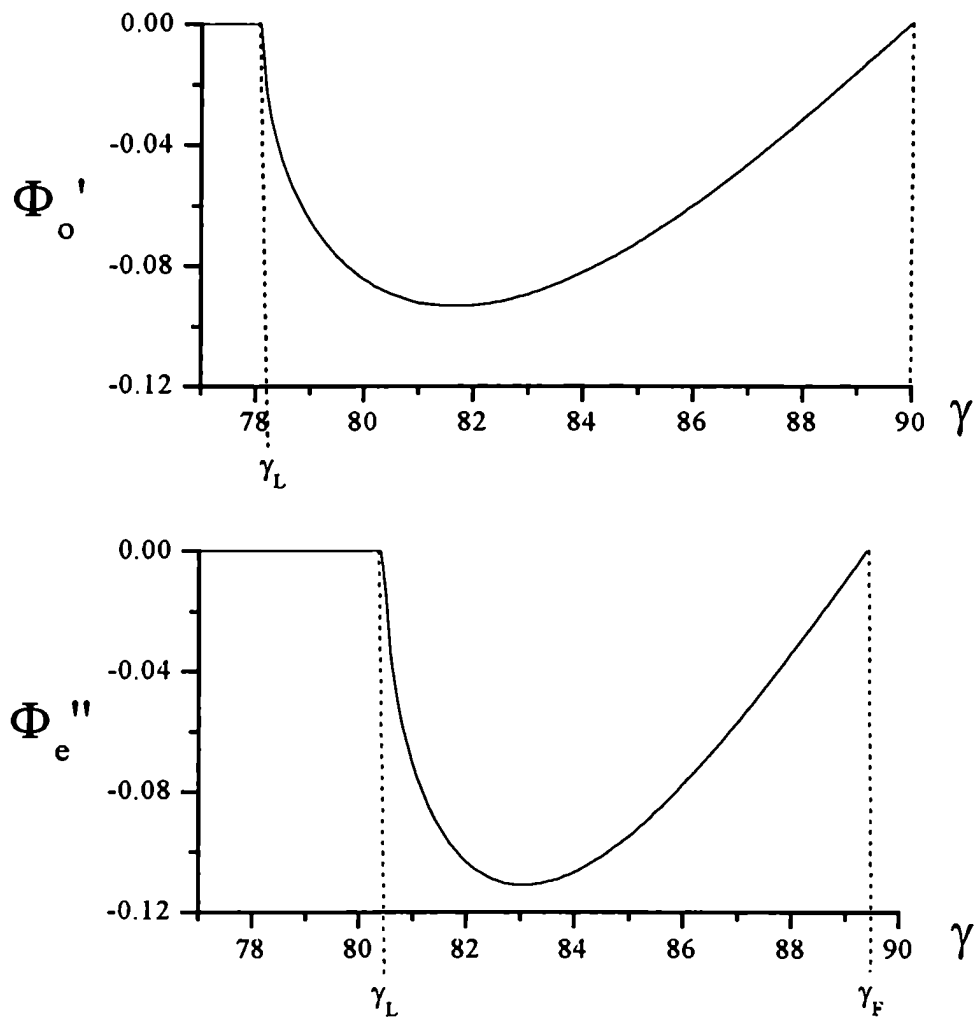


Figura 3.1: Diferencia de fase -en radianes- entre la onda reflejada propagante y la onda incidente en función del ángulo de incidencia. La interfaz considerada es la de la figura 2.4 para el caso O-O y la de la figura 2.2 para el caso E-E; γ_L corresponde al ángulo límite de reflexión inhibida y γ_F al ángulo de incidencia para el cual el rayo incidente es rasante.

grafica la diferencia de fase entre la onda reflejada propagante -que subsiste en condiciones de reflexión inhibida- y la onda incidente, en función del ángulo de incidencia, para $\theta = 5^\circ$ y $\delta = 25^\circ$. Se considera un cristal de calcita para el cálculo de Φ'_o y uno de vaterita para el de Φ_e ". Vemos que el salto de fase es nulo para ángulos de incidencia menores al de reflexión inhibida, que puede alcanzar valores del orden de centésimas de radianes (es decir de unos pocos grados), y que vuelve a ser cero para incidencia rasante. Además, hemos obtenido numéricamente que los desfases dependen fuertemente de θ y crecen a medida que el eje óptico se aproxima a la interfaz.

3.2 Onda propagante en el medio isótropo

Como la onda refractada se propaga en el medio isótropo, su polarización no es necesariamente lineal. Es más, mostraremos que la polarización cambia de lineal (cuando no hay reflexión inhibida) a elíptica en condiciones de reflexión inhibida, y que también sufre un salto de fase en estas condiciones. Para el estudio distinguiremos nuevamente entre ondas refractadas que provienen de ondas incidentes ordinarias y ondas refractadas que provienen de ondas incidentes extraordinarias.

3.2.1 Polarización de la onda propagante en el medio isótropo

Como es sabido, la amplitud del campo eléctrico de la onda refractada se puede obtener resolviendo las condiciones de contorno en la interfaz. Cuando la onda incidente es ordinaria las ecuaciones (1.88) y (1.89) muestran las expresiones que resultan para las componentes y y z del vector campo eléctrico

transmitido \vec{E}_o^T . Como los modos propios de propagación en el medio isótropo son el paralelo al plano de incidencia p y el perpendicular al mismo s trabajaremos en este sistema, de modo que las componentes del campo eléctrico resultan

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s}) = \cos\delta (\vec{E}_o^T \cdot \vec{y}) - \text{sen}\delta (\vec{E}_o^T \cdot \vec{z}) \quad (3.5)$$

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p}) = \frac{1}{\cos\beta} [\text{sen}\delta (\vec{E}_o^T \cdot \vec{y}) + \cos\delta (\vec{E}_o^T \cdot \vec{z})] \quad (3.6)$$

donde β es el ángulo que forma la normal al frente de onda refractada con la normal a la interfaz. Reemplazamos en estas expresiones las ecuaciones (1.88) y (1.89), que dependen de parámetros definidos en el Capítulo 1. Escribiendo explícitamente sus componentes en función de la dirección de incidencia (dada por γ y δ), de la velocidad de fase del medio isótropo u , de las velocidades de fase principales u_o y u_e , de la dirección del eje óptico \vec{z}_3 y de la componente perpendicular a la interfaz del vector número de onda reflejado extraordinario proveniente de una onda incidente ordinaria ($\vec{k}_o'' \cdot \vec{x}$), y teniendo en cuenta - como vimos en el Capítulo 2 - que esta última resulta compleja en condiciones de reflexión inhibida, obtenemos

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s}) = \mathcal{F}_o^* (A_R + i A_I) \quad (3.7)$$

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p}) = \mathcal{F}_o^* (B_R + i B_I) \quad (3.8)$$

donde:

$$A_R = -\frac{u_o}{u} G_2 \cos^2 \gamma - G_1 \cos \beta + \frac{u_o}{\omega} (\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_R \left(\frac{u_o}{u} G_1 + G_2 \cos \beta \right) \quad (3.9)$$

$$A_I = \frac{u_o}{\omega} (\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_I \left(\frac{u_o}{u} G_1 + G_2 \cos \beta \right) \quad (3.10)$$

$$B_R = -\frac{u_o}{u} Q_2 \cos \beta - Q_1 \cos^2 \gamma + \frac{u_o}{\omega} (\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_R \left(\frac{u_o}{u} Q_1 \cos \beta + Q_2 \right) \quad (3.11)$$

$$B_I = \frac{u_o}{\omega} (\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_I \left(\frac{u_o}{u} Q_1 \cos \beta + Q_2 \right) \quad (3.12)$$

habiendo definido:

$$G_1 = -(\check{x} \cdot \check{z}_3) \text{sen} \gamma [\text{sen}^2 \gamma + (\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 (-\cos^2 \delta + \text{sen}^2 \delta \cos^2 \gamma)] \quad (3.13)$$

$$G_2 = (\check{z} \cdot \check{z}_3) \cos \delta [-\text{sen}^2 \gamma + (\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 (1 + \text{sen}^2 \delta \text{sen}^2 \gamma)] \quad (3.14)$$

$$Q_1 = 2 \text{sen} \gamma \text{sen} \delta \cos \delta (\check{x} \cdot \check{z}_3) (\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 \quad (3.15)$$

$$Q_2 = (\check{z} \cdot \check{z}_3) \text{sen} \delta [\text{sen}^2 \gamma + (\check{z} \cdot \check{z}_3)^2 (\cos^2 \gamma - \text{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta)] \quad (3.16)$$

Las partes real e imaginaria de la componente perpendicular a la interfaz del vector número de onda - $(\vec{k}_o'' \cdot \check{x})_R$ y $(\vec{k}_o'' \cdot \check{x})_I$ respectivamente - están dadas por las ecuaciones (2.21) y (2.22), y \mathcal{F}_o^* es un factor de amplitud complejo que analizaremos más adelante, ya que las ecuaciones (3.7) y (3.8) ponen en evidencia que no influye en los parámetros que caracterizan la polarización de las ondas. A pesar de la extensión de estas fórmulas, son relativamente fáciles de leer por su dependencia con parámetros conocidos. Cuando no hay reflexión inhibida, es decir cuando $\gamma < \gamma_L$, la polarización de la onda transmitida es lineal. En efecto, $(\vec{k}_o'' \cdot \check{x})_I$ es nula, $A_I = B_I = 0$, y tanto $(\vec{E}_o^T \cdot \check{s})$ como $(\vec{E}_o^T \cdot \check{p})$ son reales. El ángulo α^T comprendido entre \vec{E}_o^T y el versor normal al plano de incidencia \check{s} está dado por:

$$\cot g \alpha^T = \frac{(\vec{E}_o^T \cdot \check{s})}{(\vec{E}_o^T \cdot \check{p})} \quad (3.17)$$

Con el fin de comparar la polarización de la onda transmitida con la de la onda incidente ordinaria, llamamos α al ángulo comprendido entre el campo eléctrico de la onda incidente ordinaria \vec{E}_o y \check{s} (ver figura 3.2),

$$\cot g \alpha = \frac{(\vec{E}_o \cdot \check{s})}{(\vec{E}_o \cdot \check{p})} \quad (3.18)$$

donde \check{p} es el versor, perpendicular a la normal al frente de onda incidente \check{N}_o , contenido en el plano de incidencia. Realizamos la rotación indicada en la

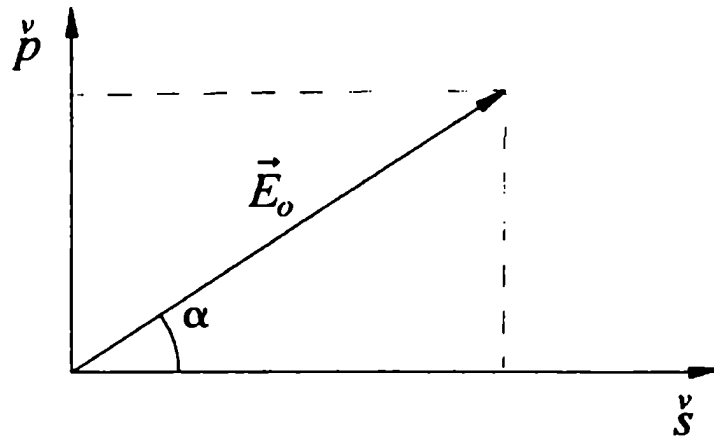


Figura 3.2: *Angulo comprendido entre \vec{E}_0 y \hat{s} .*

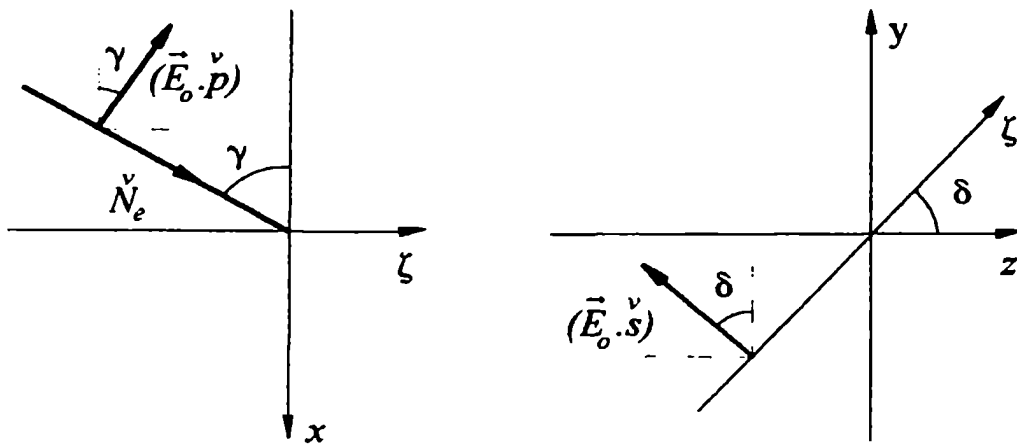


Figura 3.3: *Rotación necesaria para pasar del sistema de la superficie al sistema definido por los versores \hat{s} y \hat{p} .*

figura 3.3 para pasar del sistema de la superficie al sistema determinado por los versores paralelo y perpendicular al plano de incidencia. Como conocemos las componentes del campo en el sistema de la superficie - ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.4) - obtenemos la siguiente expresión para α

$$\cotg \alpha = \frac{(\vec{z}_3 \cdot \vec{z}) \cos \gamma \cos \delta - (\vec{z}_3 \cdot \vec{x}) \operatorname{sen} \gamma}{(\vec{z}_3 \cdot \vec{z}) \operatorname{sen} \delta} \quad (3.19)$$

Puede observarse en esta expresión que la orientación de \vec{E}_o depende de la dirección de incidencia y también de la orientación del eje óptico.

Es fácil ver, a partir de las ecuaciones (3.17) y (3.19), que para incidencia normal se obtiene

$$\cotg \alpha^T = \cotg \alpha \quad (3.20)$$

es decir, que la dirección de polarización de la onda refractada es la misma que la de la onda incidente. Para otros ángulos de incidencia, pero que no superen el ángulo límite de reflexión inhibida, α^T se va apartando de α a medida que aumenta el ángulo de incidencia tal como puede verse en la figura 3.4, en la que se grafica con línea llena la variación de α^T con el ángulo de incidencia y con línea punteada la correspondiente a α . Para $\gamma = 30^\circ$, por ejemplo, $\alpha = 21,80^\circ$ y $\alpha^T = 21,84^\circ$ cuando el medio birrefringente es un cristal de calcita. Sin embargo la magnitud de la diferencia es tal que para ángulos menores que 30° se confirma que es válido asumir que la polarización de la onda refractada es igual a la de la incidente, como es usual hacerlo en el diseño de polarizadores y de retardadores. En condiciones de reflexión inhibida, en cambio, las componentes del campo $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s})$ y $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p})$ son complejas y la polarización de la onda refractada es elíptica debido a que el desfase que sufre cada una de las componentes del campo es diferente.

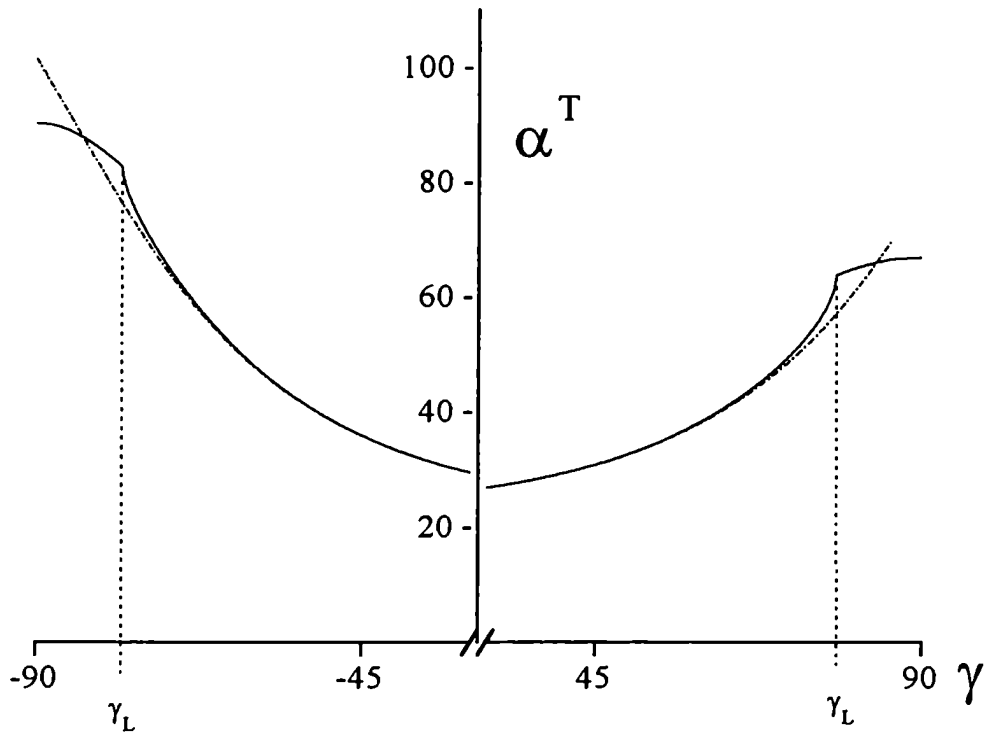


Figura 3.4: Ángulo formado por el eje mayor de la elipse de polarización de la onda transmitida y el versor normal al plano de incidencia en función del ángulo de incidencia. La línea de puntos muestra el ángulo comprendido entre el campo eléctrico incidente y el versor normal al plano de incidencia para la onda incidente. La interfaz considerada es la de la figura 2.4.

El sistema de referencia natural para describir las características de polarización de una onda elípticamente polarizada no es el sp , sino precisamente el que corresponde a los ejes principales de la elipse de polarización. Las componentes del campo eléctrico transmitido en las direcciones correspondientes al eje mayor a y menor b de la elipse de polarización pueden ser calculados en función de las partes reales e imaginarias de $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s})$ y de $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p})$. Utilizaremos como notación reducida E_R^s y E_I^s para indicar la parte real e imaginaria de $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s})$ y E_R^p y E_I^p para las correspondientes a $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p})$. Mediante consideraciones geométricas y cálculos algebraicos podemos obtener las siguientes expresiones para los ejes principales a y b de la elipse de polarización,

$$a^2 = \frac{[E_R^{p2} + E_I^{p2}] + [E_R^{s2} + E_I^{s2}] + \Delta}{2} \quad (3.21)$$

$$b^2 = \frac{[E_R^{p2} + E_I^{p2}] + [E_R^{s2} + E_I^{s2}] - \Delta}{2} \quad (3.22)$$

donde

$$\Delta = \sqrt{[E_R^{p2} + E_I^{p2}] - [E_R^{s2} + E_I^{s2}] + 4[E_R^p E_R^s + E_I^p E_I^s]} \quad (3.23)$$

y encontrar una expresión para la orientación de la elipse de polarización en el espacio, definida por el ángulo α^T (ángulo comprendido entre la componente del campo en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización y el versor perpendicular al plano de incidencia \vec{s})

$$\operatorname{tg} 2\alpha^T = \frac{2[E_R^p E_R^s + E_I^p E_I^s]}{[E_R^{p2} + E_I^{p2}] - [E_R^{s2} + E_I^{s2}]} \quad (3.24)$$

Con el objeto de determinar el estado de polarización de la onda transmitida en forma cuantitativa, definimos la excentricidad de la elipse de polarización como es usual

$$e^T = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (3.25)$$

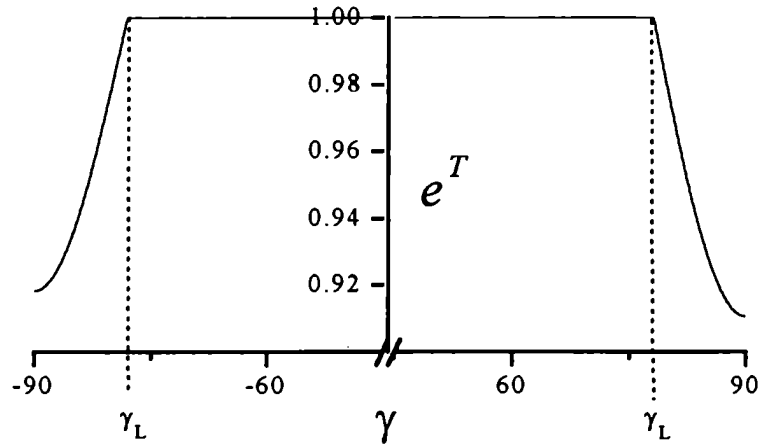


Figura 3.5: *Excentricidad de la elipse de polarización de la onda refractada en función del ángulo de incidencia para un cristal de calcita. La interfaz considerada es la de la figura 2.4.*

la que puede expresarse en función de las partes reales e imaginarias de las componentes s y p del campo eléctrico transmitido de la siguiente manera

$$e^T = \frac{(E_R^{p2} + E_I^{p2})^2 - (E_R^{s2} + E_I^{s2})^2}{E_R^{s2} + E_I^{s2} + E_R^{p2} + E_I^{p2}} \sqrt{\text{tg}^2 2\alpha^T + 1} \quad (3.26)$$

La variación de la excentricidad con el ángulo de incidencia se muestra en la figura 3.5. Puede observarse que, cuando el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de reflexión inhibida el valor de la excentricidad es 1, indicando que la polarización de la onda refractada es lineal y que, para ángulos de incidencia mayores al límite, la excentricidad de la elipse de polarización disminuye a medida que aumenta el ángulo de incidencia. Se ve en el gráfico una asimetría respecto del ángulo de incidencia debido a que la dirección del eje óptico introduce una dirección privilegiada dentro del cristal. Aunque la polarización de la onda transmitida es elíptica, la excentricidad que corresponde a la elipse de polarización es, en todos los casos, cercana a 1.

Analizaremos ahora la polarización de la onda transmitida cuando la onda incidente es extraordinaria. El procedimiento que seguiremos es el mismo que utilizamos para una onda incidente ordinaria, pero las expresiones algebraicas obtenidas en este caso, son un poco más extensas debido a que la polarización de las ondas está directamente relacionada con la dirección del rayo, y cuando la onda incidente es extraordinaria la dirección de la normal al frente de onda (determinada por los ángulos γ y δ) no coincide con la dirección de propagación de la energía. Además, las cuatro ondas involucradas -la onda incidente, las dos reflejadas y la transmitida- tienen, cada una, una velocidad de fase diferente. El campo eléctrico de la onda transmitida resultará, por lo tanto, función de u'' (velocidad de fase de la onda incidente), de u_o (velocidad de fase de la reflejada ordinaria), de u_e'' (velocidad de fase correspondiente a la onda reflejada extraordinaria) y de u (velocidad de propagación en el medio isótropo). Escribimos las componentes del campo eléctrico transmitido en las direcciones perpendicular y paralela al plano de incidencia a partir de las componentes conocidas en el sistema de la superficie -ecuaciones (1.102) y (1.103)- del siguiente modo

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{s}) = \cos\delta (\vec{E}_e^T \cdot \vec{y}) - \text{sen}\delta (\vec{E}_e^T \cdot \vec{z}) \quad (3.27)$$

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{p}) = \frac{1}{\cos\beta} [\text{sen}\delta (\vec{E}_e^T \cdot \vec{y}) + \cos\delta (\vec{E}_e^T \cdot \vec{z})] \quad (3.28)$$

de manera que, a partir de (1.102) y (1.103) y teniendo en cuenta que $(\vec{k}'_e \cdot \vec{x})$ es imaginario en condiciones de reflexión inhibida, obtenemos

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{s}) = \mathcal{F}_e^* (J_R + iJ_I) \quad (3.29)$$

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{p}) = \mathcal{F}_e^* (N_R + iN_I) \quad (3.30)$$

donde:

$$J_R = -u_o u'' w_x^2 J_1 + u_o^2 u''^2 u \cos \beta J_2 + u u''^4 \cos \beta J_3 \quad (3.31)$$

$$J_I = w_x (u_o u''^2 u \cos \beta J_1 + u_o^3 u'' J_2 + u_o u''^3 J_3) \quad (3.32)$$

$$N_R = u_o^2 [u_o^2 u'' \cos \beta \operatorname{sen} \gamma (\check{z}_3 \cdot \check{x}) - w_x^2 u \cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})] N_1 + \\ + u_o^2 u''^3 \cos \beta N_2 + u''^2 u w_x^2 N_3 \quad (3.33)$$

$$N_I = w_x \{ u_o^3 [u'' \cos \beta \cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z}) + u \operatorname{sen} \gamma (\check{z}_3 \cdot \check{x})] N_1 + \\ + u''^2 u u_o N_2 - u_o u''^3 \cos \beta N_3 \} \quad (3.34)$$

habiendo definido:

$$J_1 = 2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta \cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{x}) (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (3.35)$$

$$J_2 = \operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen} \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z}) [(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - \cos^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2] \quad (3.36)$$

$$J_3 = \operatorname{sen} \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^3 \quad (3.37)$$

$$N_1 = \operatorname{sen}^2 \gamma [\operatorname{sen}^2 \delta (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + \cos^2 \delta] \quad (3.38)$$

$$N_2 = \operatorname{sen} \gamma (\operatorname{sen}^2 \delta - \cos^2 \delta) (\check{z}_3 \cdot \check{x}) (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \quad (3.39)$$

$$N_3 = \cos \delta (\check{z}_3 \cdot \check{z})^3 \quad (3.40)$$

$$w_x = \sqrt{u_o^2 \operatorname{sen}^2 \gamma - u''^2} \quad (3.41)$$

De la misma manera que el factor \mathcal{F}_o^* en el caso de onda incidente ordinaria, el factor complejo \mathcal{F}_e^* tampoco influye en el estado de polarización de la onda transmitida. Aplicando a las ecuaciones (3.24) y (3.26) las expresiones de las componentes de los campos transmitidos dados por las ecuaciones (3.29) a (3.41) podemos obtener la orientación de la elipse de polarización de la onda transmitida y su excentricidad. En la figura 3.6 se grafica la variación de la excentricidad de la elipse de polarización de la onda transmitida con el

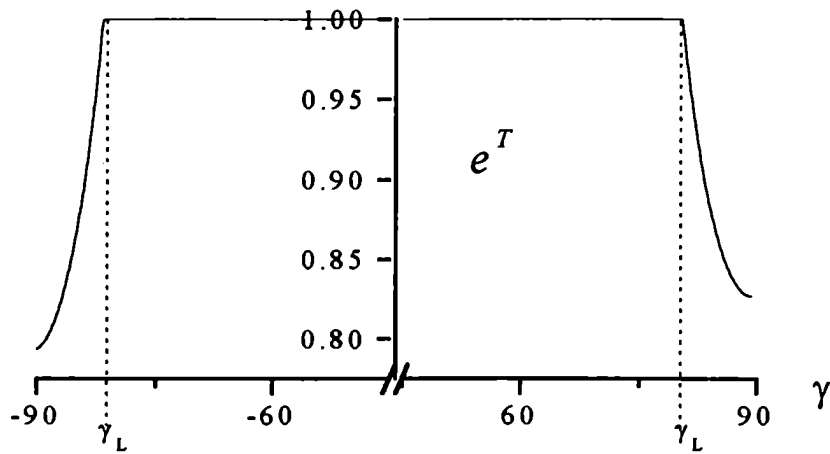


Figura 3.6: *Excentricidad de la elipse de polarización de la onda transmitida para una onda incidente extraordinaria. La interfaz considerada es la de la figura 2.2*

ángulo de incidencia. Vemos que para ángulos de incidencia menores que el de reflexión inhibida su polarización es lineal.

En los gráficos de la figura 3.7 se muestra la variación de los parámetros que caracterizan la elipse de polarización de la onda transmitida con el ángulo que forma el plano de incidencia con el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico δ , y con el ángulo comprendido entre el eje óptico y la interfaz θ en condiciones de reflexión inhibida de la onda reflejada ordinaria. Podemos ver que la polarización es lineal (su excentricidad es uno) cuando el eje óptico está contenido o es perpendicular al plano de incidencia (figura 3.7.a). Esto se corresponde con el hecho de que en estas condiciones no hay reflexión inhibida. Notamos que el eje mayor de la elipse de polarización se aleja del plano de incidencia a medida que el plano de incidencia se aleja

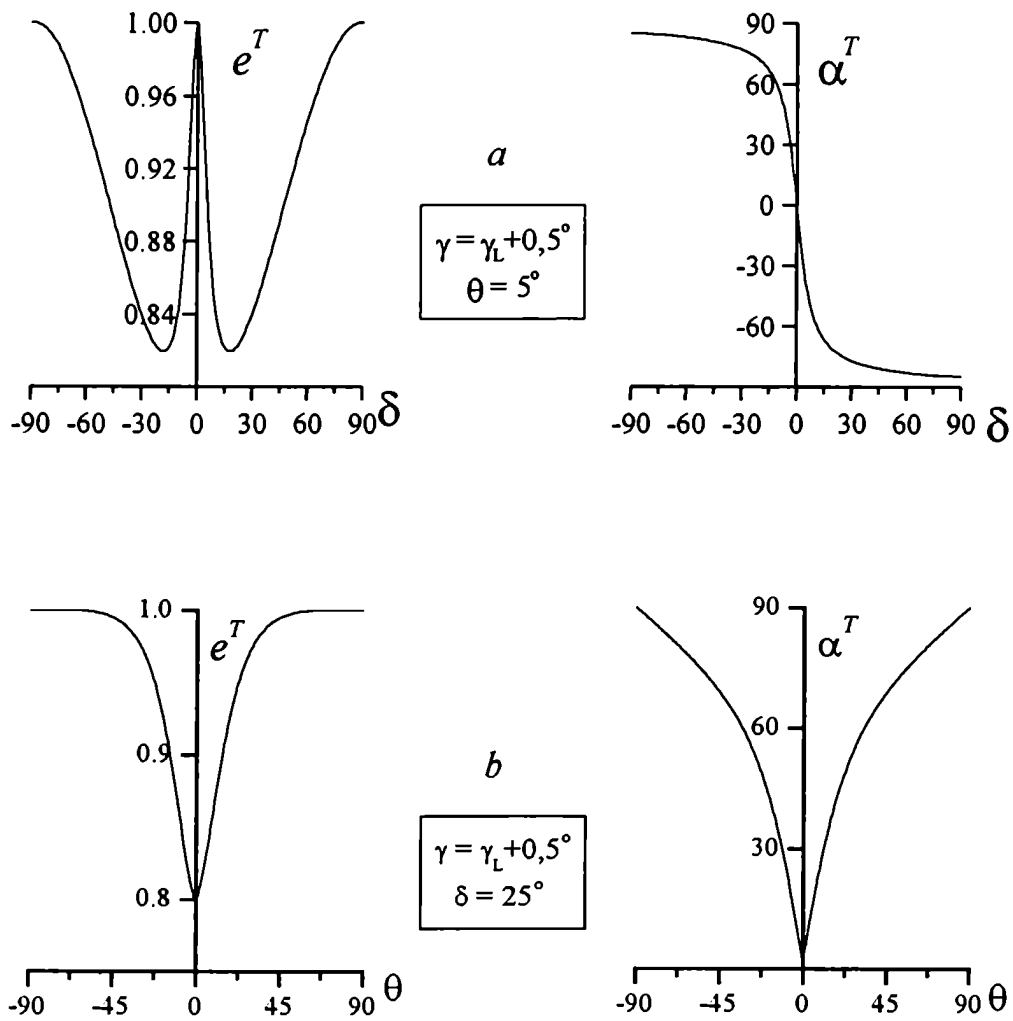


Figura 3.7: Parámetros que caracterizan la polarización de la onda transmitida para una onda incidente extraordinaria. El cristal es vaterita.

del plano que contiene al eje óptico (plano que corresponde a $\delta = 0$). En los gráficos 3.7.b observamos que, cuando el eje óptico está más cerca de la interfaz, la polarización se hace más elíptica y su eje mayor está más alejado del plano de incidencia.

3.2.2 Salto de fase de la onda propagante en el medio isótropo

Como hemos visto en la sección anterior, la amplitud de la onda refractada resulta compleja en condiciones de reflexión inhibida. Además, a diferencia de lo que sucede con la onda reflejada que se propaga en el cristal, la onda refractada está elípticamente polarizada y el salto de fase para cada componente del campo transmitido es diferente. Mediante una rotación de las componentes del campo eléctrico en α^T (figura 3.8), podemos pasar del sistema de referencia sp al ab , sistema determinado por los ejes principales de la elipse de polarización. Como hemos adelantado en párrafos anteriores, este sistema resulta conveniente debido a que las fases de las componentes de campo difieren en $\pi/2$ [3].

Para realizar con más facilidad la rotación escribiremos en notación módulo argumental las componentes del campo $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p})$ y $(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s})$ -conocidas por las ecuaciones (3.7) y (3.8)-. Si reemplazamos en ellas la expresión correspondiente al factor complejo \mathcal{F}_o^* (Apéndice I) y separamos explícitamente las partes reales y las imaginarias podemos escribir las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia del campo eléctrico transmitido de la siguiente manera:

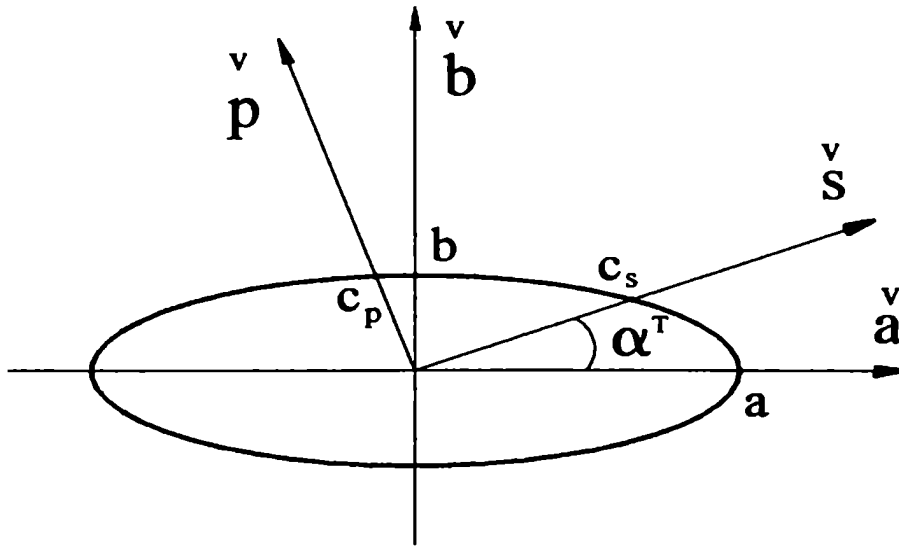


Figura 3.8: *Elipse de polarización de la onda transmitida. Se indica la rotación necesaria para pasar del sistema (s, p) al sistema (a, b)*

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s}) = f_r \frac{A_R + i A_I}{M_R + i M_I} \quad (3.42)$$

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p}) = f_r \frac{B_R + i B_I}{M_R + i M_I} \quad (3.43)$$

donde f_r es un factor real (Apéndice I). A partir de estas últimas ecuaciones podemos obtener las componentes del campo eléctrico en el sistema \vec{p} y \vec{s} en notación módulo argumental

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{p}) = C_{p_o} e^{i\eta_{p_o}} \quad (3.44)$$

$$(\vec{E}_o^T \cdot \vec{s}) = C_{s_o} e^{i\eta_{s_o}} \quad (3.45)$$

encontrando la expresión que corresponde a los módulos y a las fases de dichas componentes del siguiente modo:

$$C_{so} = f_r \sqrt{\frac{A_R^2 + A_I^2}{M_R^2 + M_I^2}} \quad (3.46)$$

$$C_{po} = f_r \sqrt{\frac{B_R^2 + B_I^2}{M_R^2 + M_I^2}} \quad (3.47)$$

$$\eta_{so} = \arctg \frac{A_I}{A_R} - \arctg \frac{M_I}{M_R} \quad (3.48)$$

$$\eta_{po} = \arctg \frac{B_I}{B_R} - \arctg \frac{M_I}{M_R} \quad (3.49)$$

Cuando la onda incidente es extraordinaria

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{p}) = C_{pe} e^{i\eta_{pe}} \quad (3.50)$$

$$(\vec{E}_e^T \cdot \vec{s}) = C_{se} e^{i\eta_{se}} \quad (3.51)$$

y las expresiones para C_{se} , C_{pe} , η_{se} y η_{pe} resultan

$$C_{se} = f_r^* \sqrt{\frac{J_R^2 + J_I^2}{M_{er}^2 + M_{ei}^2}} \quad (3.52)$$

$$C_{pe} = f_r^* \sqrt{\frac{N_R^2 + N_I^2}{M_{er}^2 + M_{ei}^2}} \quad (3.53)$$

$$\eta_{se} = \arctg \frac{J_I}{J_R} - \arctg \frac{M_{ei}}{M_{er}} \quad (3.54)$$

$$\eta_{pe} = \arctg \frac{N_I}{N_R} - \arctg \frac{M_{ei}}{M_{er}} \quad (3.55)$$

La dependencia funcional de M_{er} y de M_{ei} en términos de la dirección de incidencia y de parámetros característicos del cristal se encuentran también explicitadas en el Apéndice I.

Estamos ahora en condiciones de realizar la rotación en α^T , indicada en la figura 3.8, tanto para onda incidente ordinaria como extraordinaria. La diferencia de fase ϕ_a entre la componente en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización del campo eléctrico refractado y el campo incidente resulta

$$tg\phi_a = \frac{-C_p^2 \cos 2\eta_p - C_s^2 \cos 2\eta_s + \sqrt{C_p^4 + C_s^4 + 2C_p^2 C_s^2 \cos^2(\eta_p - \eta_s)}}{C_p^2 \sin 2\eta_p + C_s^2 \sin 2\eta_s} \quad (3.56)$$

donde C_s , C_p , η_s y η_p corresponden a las ecuaciones (3.46)-(3.49) cuando la onda incidente es ordinaria (y la evanescente reflejada extraordinaria), y a las ecuaciones (3.52)-(3.55) cuando la onda incidente es extraordinaria (y la evanescente reflejada ordinaria).

La diferencia de fase entre la onda incidente y la refractada varía con el ángulo y el plano de incidencia en condiciones de reflexión inhibida. En las figuras 3.9 y 3.10 graficamos la fase de la onda refractada correspondiente a la componente del campo eléctrico en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización en función de γ y δ para dos condiciones distintas de reflexión inhibida. En la figura 3.9 la onda incidentes es ordinaria y el medio birrefringente un cristal de calcita, mientras que en la figura 3.10 la onda incidente es extraordinaria y el cristal es vaterita. Tanto en el caso ordinario como en el extraordinario la diferencia de fase es de pocos grados y la onda refractada puede estar atrasada o adelantada respecto de la incidente. En ambos casos existe un ángulo de incidencia para el cual la diferencia de fase tiene un mínimo. Vemos que cuando el plano de incidencia contiene al eje óptico o es perpendicular a él, el salto de fase de la onda refractada es nulo ya que no existe reflexión inhibida en estas condiciones.

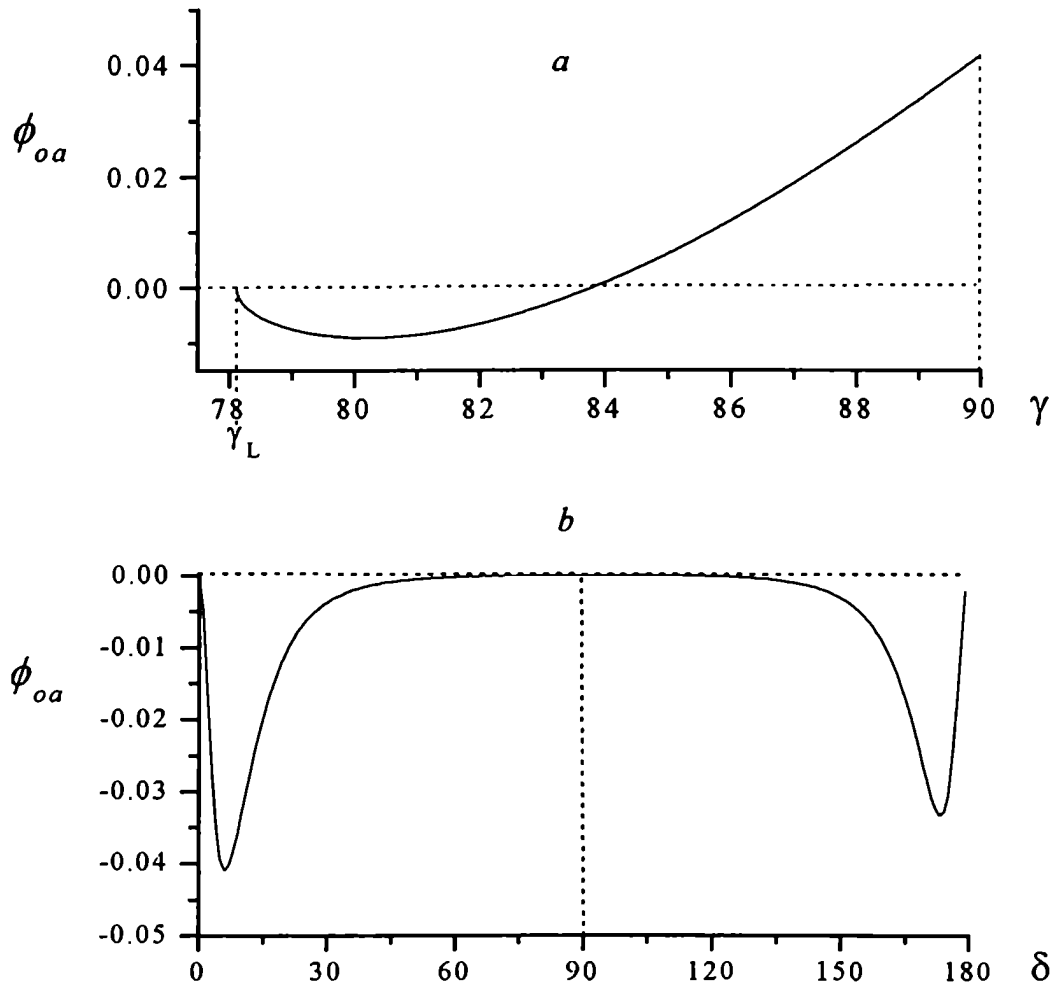


Figura 3.9: Variación de la fase -en radianes- de la componente del campo eléctrico transmitido en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización en función de: (a) el ángulo de incidencia ($\delta = 25^\circ$); (b) el ángulo comprendido entre el plano de incidencia y el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico ($\gamma = \gamma_L + 0,5^\circ$). En ambos gráficos la onda incidente es ordinaria; $\theta = 5^\circ$; $n = 1,70$; $n_o = 1,66$; $n_e = 1,49$

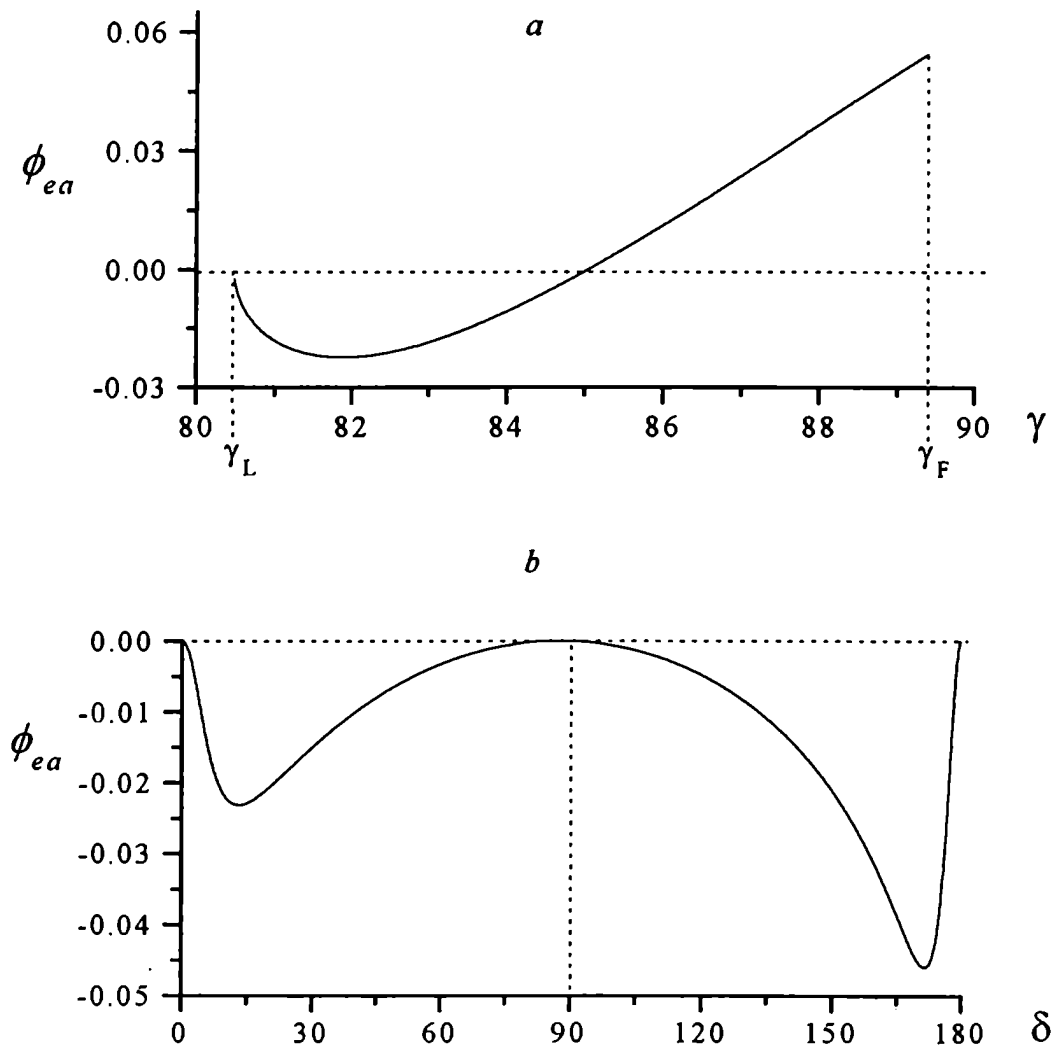


Figura 3.10: Variación de la fase -en radianes- de la componente del campo eléctrico transmitido en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización en función de: (a) el ángulo de incidencia ($\delta = 25^\circ$); (b) el ángulo comprendido entre el plano de incidencia y el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico ($\gamma = \gamma_L + 0,5^\circ$). En ambos gráficos la onda incidente es extraordinaria; $\theta = 5^\circ$; $n = 1,70$; $n_o = 1,55$; $n_e = 1,65$

Como hemos visto, la onda reflejada propagante está linealmente polarizada en el mismo modo propio que la incidente, pero, a diferencia de lo que sucede en interfaces isotropas, el salto de fase que sufre depende no sólo del ángulo de incidencia sino también del plano de incidencia. También hemos mostrado que, en interfaces cristal-isótropo y en condiciones de reflexión inhibida, la onda refractada está elípticamente polarizada. Esto nunca sucede en interfaces isotropas dieléctricas si la onda incidente tiene polarización lineal. Sin embargo podemos hacer una analogía entre el comportamiento de las ondas propagantes asociadas a la reflexión inhibida en interfaces formadas por un cristal uniaxial y un medio isótropo y el de las asociadas a la reflexión total en interfaces isotropas (figura 2.1). Podemos comparar la onda refractada en reflexión inhibida con la onda reflejada en reflexión total: ambas ondas se propagan por el medio isótropo complementario al medio en el que existe una onda evanescente. En condiciones de reflexión total en interfaces isotropas, podemos descomponer el campo eléctrico de las ondas incidente y reflejada en sus modos propios p (paralelo al plano de incidencia) y s (perpendicular al plano de incidencia). Como cada componente sufrirá en la reflexión un salto de fase diferente, la polarización de la onda reflejada será elíptica únicamente si la onda incidente no está linealmente polarizada en uno de sus modos propios. En cambio, en condiciones de reflexión inhibida los modos propios en el cristal (ordinario y extraordinario) no coinciden con los modos propios de propagación en el medio isótropo (p y s) y, como para cada modo propio de polarización en el medio isótropo el salto de fase en la refracción es diferente, la onda refractada tendrá *necesariamente* polarización elíptica en presencia de reflexión inhibida.

Capítulo 4

Paquetes de ondas y flujo de energía en cristales uniaxiales

Hasta el momento, en el estudio de las vibraciones electromagnéticas asociadas a la reflexión y transmisión de la luz, hemos considerado ondas planas, con sus característicos frentes de onda infinitos. Sin embargo, cuando hablamos de un haz luminoso hacemos referencia a un haz de luz limitado en el espacio, al que podemos representar por medio de un paquete de ondas. En este capítulo propondremos una manera sencilla de construir paquetes de ondas que se propagan en un medio anisótropo, y que hará posible describir otras características de la reflexión y transmisión de la luz en interfaces en las que se encuentra presente un cristal birrefringente, las que no se manifiestan si consideramos ondas planas. No hablaremos de reflexión inhibida en un primer momento, debido a que ni siquiera consideraremos la existencia de una interfaz en nuestros primeros análisis; dejaremos el estudio de la reflexión y refracción de estos paquetes de ondas, en condiciones de reflexión inhibida, para el próximo capítulo.

Generalmente, la propagación de la luz en medios materiales y los fenómenos asociados a la presencia de interfaces son estudiados considerando ondas planas monocromáticas. Sin embargo, una onda plana monocromática es una imagen ideal: tienen realidad física los haces de luz cuasi-monocromática limitados en el espacio, a los que usualmente se los representa mediante una superposición de ondas planas. Si se considera que todas las ondas tienen la misma frecuencia, un haz limitado en el espacio se construye mediante una superposición de ondas planas que tengan la misma velocidad de propagación. En cambio, un haz cuasi-monocromático se obtiene mediante la superposición de ondas planas de diferente frecuencia y, en consecuencia, de distinta velocidad de propagación si el medio considerado es dispersivo. Cuando los medios son isótropos, se suele reservar en la literatura el término de "haz" para el primer caso, y el de "paquete de ondas" para el segundo. Como en los medios anisótropos las ondas extraordinarias se propagan con la misma frecuencia pero con distinta velocidad de fase, en los próximos capítulos llamaremos preferentemente "paquete de ondas" a la superposición de las ondas extraordinarias.

La formación de haces en medios isótropos es bien conocida [3], [33]. Si se considera que las ondas que constituyen el haz están polarizadas perpendicularmente al plano que contiene a las normales a los frentes de onda, la validez del uso del tratamiento escalar es inmediato. En cambio, si la polarización es paralela, el problema debe ser tratado en forma vectorial. Sin embargo, si el haz no es extremadamente angosto (de forma tal que sea válida la aproximación de Fresnel o paraxial) la intensidad del campo obtenida por el método vectorial no es significativamente distinta a la del tratamiento es-

calar [34]. Bajo estas condiciones, un haz tridimensional puede ser calculado como el producto de dos haces bidimensionales ortogonales. Por otra parte, para cada onda plana que constituye el haz, la dirección de propagación de la energía luminosa coincide con la dirección de la normal al frente de onda correspondiente. En consecuencia, si consideramos un haz tridimensional simétrico formado por ondas planas que se propagan en un medio isótropo, la dirección media de propagación de las ondas coincide con la dirección de propagación de la energía, es decir, con la dirección del rayo.

Cuando la luz se propaga por un medio birrefringente, la estructura particular de las ondas planas, hace que no sea posible trasladar directamente los resultados obtenidos para haces que se propagan en medios isótropos, a paquetes de ondas que se propagan en medios birrefringentes, ni siquiera en medios uniaxiales. Sin pérdida de generalidad podemos asumir independencia entre las ondas ordinarias y extraordinarias, ya que, como es bien sabido, esto puede realizarse siempre que la dirección de propagación no coincida con la del eje óptico. Si se considera un haz ordinario, es decir un haz formado por ondas ordinarias, la velocidad de fase de las ondas que lo componen es siempre la misma u_o , y las normales a los frentes de ondas coinciden con las direcciones de los rayos asociados. Además, bajo condiciones de paraxialidad, es posible escribir el haz tridimensional ordinario no sólo en forma escalar sino también como el producto de dos haces bidimensionales ortogonales [35]. En estos haces tridimensionales, al existir simetría de rotación alrededor de la normal media del paquete, cualquier par de ondas simétrico brindará la misma información respecto a la dirección de propagación de la energía. Así, la formación de un haz de ondas ordinarias puede realizarse de

la misma manera en la que se construye un haz que se propaga en un medio isótropo.

Si, en cambio, se considera un paquete formado por ondas extraordinarias, la velocidad de propagación de cada onda u'' dependerá de su dirección de avance \check{N}'' con respecto a la orientación del eje óptico \check{z}_3 [10]

$$u''^2 = u_e^2 + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)^2 \quad (4.1)$$

mientras que la dirección de propagación de la energía se puede obtener a partir de [11]

$$\check{R}'' = \frac{1}{f_n} [u_e^2 \check{N}'' + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3) \check{z}_3] \quad (4.2)$$

donde f_n es un factor de normalización. Cuando se estudió la propagación en medios uniaxiales de haces limitados extraordinarios en forma vectorial [36], se concluyó que también el tratamiento escalar [37] era adecuado para haces no excesivamente angostos. Sin embargo las características de las ondas extraordinarias (velocidad de fase dependiente de la dirección de propagación, falta de coincidencia entre la normal al frente de ondas y la dirección de propagación de la energía, y polarización lineal de las ondas propagantes) no sólo exigen un tratamiento diferente para la formación de paquetes sino que también determinan diferencias sustanciales entre los haces ordinarios y extraordinarios.

El paquete de ondas bidimensional más sencillo consiste en la superposición de dos ondas planas de la misma frecuencia. Cuando se superponen escalarmente dos ondas ordinarias, como la velocidad de fase de ambas ondas es la misma, la posición del primer máximo de interferencia coincide con la normal media del paquete de ondas tal como sucede en los medios isótropos.

Cuando, en cambio, se superponen escalarmenete dos ondas extraordinarias, aunque éstas se propaguen con la misma frecuencia lo hacen con distinta velocidad de fase. Esto marcará diferencias cualitativas entre haces ordinarios y extraordinarios bidimensionales.

Dacla la similitud que existe entre los haces ordinarios y los haces que se propagan en medios isótropos, en este capítulo analizaremos con más detalle los paquetes formados con ondas extraordinarias. En primer término consideraremos paquetes bidimensionales compuestos por dos ondas extraordinarias que se propagan por cada uno de los planos característicos del cristal; propondremos luego una manera de construir un paquete de ondas tridimensional. Finalmente, considerando que existe una interfaz que separa un cristal uniaxial de un medio isótropo, aplicaremos los resultados obtenidos a un paquete de ondas extraordinarias que incide sobre esta interfaz. De esta manera reuniremos todos los elementos necesarios para poder estudiar características de la reflexión y refracción de paquetes de ondas tridimensionales en condiciones de reflexión inhibida en el capítulo siguiente.

4.1 Paquetes bidimensionales formados por dos ondas que se propagan en planos característicos

Como la velocidad de una onda extraordinaria depende de su dirección de propagación con respecto al eje óptico, es de esperar que cada par de ondas extraordinarias simétricas, con la misma normal media pero contenidas en planos de incidencia diferentes formen haces con distinta dirección del flujo de energía. En primer lugar determinaremos la relación que existe entre la

dirección de propagación de la energía de un paquete de ondas bidimensional, la normal media, y la posición donde se produce el primer máximo de interferencia entre las ondas que lo componen. Consideraremos para ello dos paquetes bidimensionales que se propagan por cada uno de los dos planos característicos de los medios uniaxiales: en el primer paquete las normales a los frentes de ondas que lo sintetizan están contenidas en el mismo plano que el eje óptico, mientras que el otro paquete está contenido en un plano perpendicular al anterior. Es decir, calcularemos la interferencia producida entre dos ondas extraordinarias i y ii cuando sus normales a los frentes de onda \check{N}_i'' y \check{N}_{ii}'' y el eje óptico se encuentran contenidos en el mismo plano, y luego la interferencia entre las ondas iii y iv cuyas normales \check{N}_{iii}'' y \check{N}_{iv}'' se encuentran en un plano perpendicular al anterior.

4.1.1 Eje óptico contenido en el plano definido por las normales a los frentes de onda

Para calcular la posición de la primera interferencia constructiva entre las ondas i y ii usaremos una aproximación a primer orden, lo que determinará los límites de validez de nuestro método. Considerando el sistema de coordenadas definido en la figura 4.1 podemos desarrollar $(\check{N}_i'' \cdot \vec{r})$ a primer orden alrededor de $\alpha = 0$ en función de las coordenadas del vector posición x_1 y x_2

$$(\check{N}_i'' \cdot \vec{r}) = (\check{N}_i'' \cdot \check{x}_1) x_1 + (\check{N}_i'' \cdot \check{x}_2) x_2 \simeq x_1 - x_2 \Delta\alpha \quad (4.3)$$

y análogamente

$$(\check{N}_{ii}'' \cdot \vec{r}) \simeq x_1 + x_2 \Delta\alpha \quad (4.4)$$

Por otra parte, las velocidades de propagación de cada una de las ondas pueden también escribirse a primer orden a partir de la ecuación (4.1)

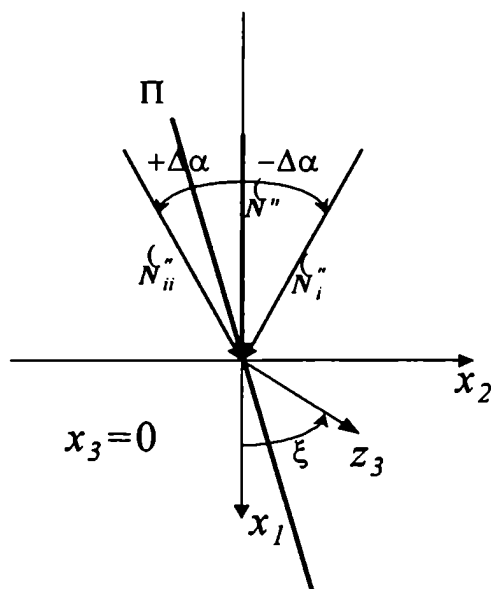


Figura 4.1: Plano que contiene al eje óptico: Paquete formado por las ondas extraordinarias i y ii

$$u''_i^2 = u''^2 + 2 \Delta\alpha (u_e^2 - u_o^2) \text{sen}\xi \text{cos}\xi \quad (4.5)$$

$$u''_{ii}^2 = u''^2 - 2 \Delta\alpha (u_e^2 - u_o^2) \text{sen}\xi \text{cos}\xi \quad (4.6)$$

donde ξ es el ángulo comprendido entre la normal media de propagación y el eje óptico, y u'' la velocidad de fase de una onda que se propaga por la dirección media. La aproximación a primer orden del $\text{sen}\Delta\alpha$ y del $\text{cos}\Delta\alpha$, implícita en las ecuaciones (4.3) a (4.6), indican que el haz que describiremos no puede ser un haz excesivamente angosto. Las ondas i y ii están linealmente polarizadas en distintas direcciones, las cuales están determinadas por la dirección de avance y la dirección del eje óptico, pero, como hemos visto en la introducción de este capítulo, es válido efectuar un tratamiento escalar para haces con estas características. Bajo estas condiciones, el primer máximo de

interferencia [3] corresponde a

$$u''_{ii}(\check{N}_i'' \cdot \vec{r}) = u''_i(\check{N}_{ii}'' \cdot \vec{r}) \quad (4.7)$$

y reemplazando las ecuaciones (4.3) y (4.4) en esta última expresión resulta

$$x_1 = \frac{u''_i + u''_{ii}}{u''_{ii} - u''_i} x_2 \Delta\alpha \quad (4.8)$$

A partir de las ecuaciones (4.5)-(4.8) se obtiene la posición del primer máximo de interferencia -correspondiente a la superposición de las dos ondas que forman el paquete- en función de las características del medio, es decir, de las velocidades de fase principales y del ángulo comprendido entre la dirección media de propagación y el eje óptico

$$x_1 = \frac{u_o^2 \cos^2 \xi + u_e^2 \operatorname{sen}^2 \xi}{(u_e^2 - u_o^2) \operatorname{sen} \xi \cos \xi} x_2 \quad (4.9)$$

para todo valor de x_3 . En consecuencia, el primer máximo de interferencia entre las ondas i y ii está en un plano Π perpendicular al plano $x_1 x_2$, que no contiene a la dirección de onda media del paquete bidimensional considerado. La inclinación del plano respecto de la dirección media de incidencia depende de la birrefringencia ($u_e^2 - u_o^2$) del cristal y de la orientación del eje óptico. Si por otro lado calculamos el rayo \check{R}'' asociado a la normal media \check{N}'' entre \check{N}_i'' y \check{N}_{ii}'' [11], obtenemos que no coincide con \check{N}'' y que

$$\check{R}'' = \frac{u_o^2 \cos^2 \xi + u_e^2 \operatorname{sen}^2 \xi}{f_n} \check{x}_1 + \frac{(u_o^2 - u_e^2) \cos \xi \operatorname{sen} \xi}{f_n} \check{x}_2 \quad (4.10)$$

es decir que

$$(\check{R}'' \cdot \check{x}_2) x_1 = (\check{R}'' \cdot \check{x}_1) x_2 \quad (4.11)$$

para todo valor de x_3 . A partir de (4.9) y de (4.11) es fácil ver que el primer máximo de interferencia entre las dos ondas que componen este paquete bidimensional coincide con la dirección del rayo asociado a la normal media del paquete de ondas.

4.1.2 Eje óptico con componente en el plano perpendicular al definido por las normales a los frentes de onda

Consideramos ahora dos ondas cuyas normales se encuentran en un plano perpendicular al anterior. En la figura 4.2 se esquematizan las normales a los frentes de onda correspondientes a las ondas *iii* y *iv*, de modo que podemos calcular a primer orden

$$(\check{N}_{iii} \cdot \vec{r}) = x_1 - x_3 \Delta\alpha \quad (4.12)$$

$$(\check{N}_{iv} \cdot \vec{r}) = x_1 + x_3 \Delta\alpha \quad (4.13)$$

Como el eje óptico tiene una componente $z_{3\perp}$ perpendicular al plano $x_2 = 0$ y otra componente $z_{3\parallel}$ paralela que coincide con la dirección de la normal media del paquete, la proyección de las normales a los frentes de onda en la dirección del eje óptico para ambas ondas es la misma. En consecuencia, las velocidades de fase de las ondas *iii* y *iv* coinciden -ecuación (4.1)- y la posición del primer máximo de interferencia entre ellas estará en

$$x_3 = 0 \quad (4.14)$$

Es decir, que el plano donde se produce la primera interferencia máxima entre estas ondas coincide con el plano que corresponde a la normal media de este paquete bidimensional. Además, como puede deducirse de la ecuación (4.2),

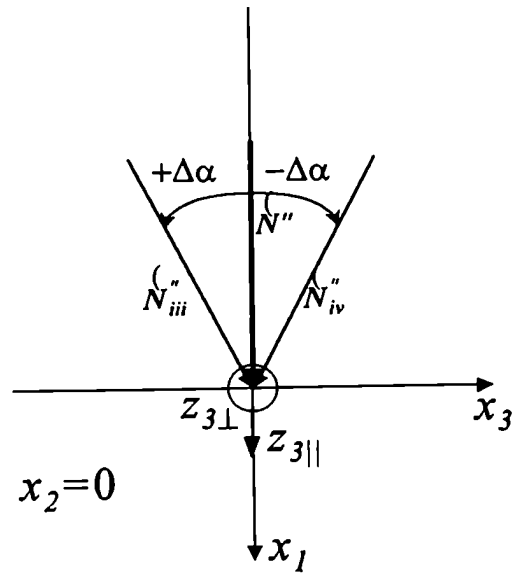


Figura 4.2: Plano que no contiene al eje óptico: Paquete formado por las ondas extraordinarias iii y iv

en este caso la dirección de la normal media no coincide con la dirección del rayo asociado, aunque ambos estén contenidos en el plano x_1x_2 , es decir aunque

$$\tilde{\mathbf{R}}'' \cdot \tilde{\mathbf{x}}_3 = 0 \quad (4.15)$$

Sin embargo, como estamos considerando haces bidimensionales, el corrimiento del rayo con respecto a la dirección de onda media no puede ser visualizado.

En la figura 4.3.a se grafica la interferencia entre dos ondas que se propagan con la misma velocidad de fase. Como hemos visto, cuando dos ondas ordinarias se superponen escalarmente, el hecho de que la velocidad de fase sea la misma para ambas ondas lleva a que la posición del primer máximo

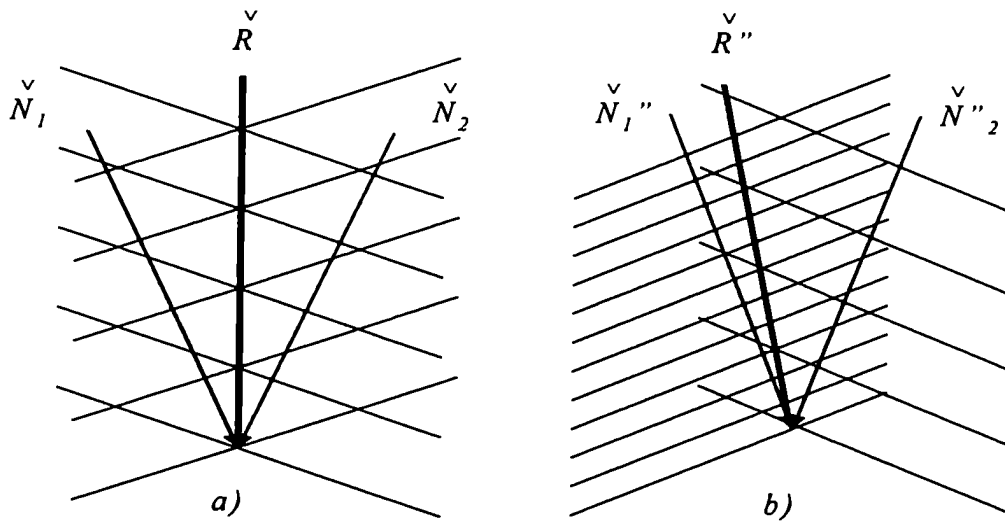


Figura 4.3: a) Interferencia entre dos ondas que se propagan con la misma velocidad de fase; b) Interferencia entre dos ondas que se propagan con distinta velocidad de fase, pero con igual frecuencia y polarización

de interferencia coincide con la normal media del haz. Esto sucede también en los medios isótropos y cuando se considera la superposición de dos ondas extraordinarias si el eje óptico del cristal es perpendicular al plano definido por las normales de las ondas. Por el contrario, cuando se superponen dos ondas extraordinarias de la misma frecuencia, cuyas normales están contenidas en el mismo plano que el eje óptico del cristal, se obtienen resultados diferentes a los correspondientes a dos ondas ordinarias: la existencia de dos velocidades de fase de diferente valor impide la coincidencia entre la posición del primer máximo y la normal media del haz, tal como se esquematiza en la figura 4.3.b.

4.2 Paquete tridimensional formado por cuatro ondas extraordinarias

El paquete tridimensional más sencillo consiste en la superposición de dos pares de ondas cuyas normales estén contenidas en planos ortogonales entre sí (figura 4.4). Si bien para trabajar con paquetes formados por cuatro ondas extraordinarias parecería necesario sumar los campos correspondientes, mostraremos que existe un método más sencillo para encontrar la dirección de propagación de la energía de un haz tridimensional: descomponerlo en los dos haces bidimensionales característicos. En la sección anterior obtuvimos las posiciones de los primeros máximos de interferencia para haces bidimensionales formados por ondas cuyas normales se encuentran contenidas en planos característicos del cristal. La ecuación (4.9) nos da la ecuación del plano correspondiente al primer máximo de interferencia del paquete bidimensional formado por las ondas i y ii . La ecuación (4.14), en cambio, muestra el plano correspondiente al primer máximo de interferencia del paquete bidimensional formado por las ondas iii y iv . La intersección de los planos de interferencia en cada corte es entonces una recta contenida en el plano x_1x_2 dada por las ecuaciones (4.9) y (4.14). Si, por otra parte, calculamos a partir de la ecuación (4.2) la dirección del rayo asociado a la normal de onda media del haz tridimensional, vemos que está dado por el par de ecuaciones (4.10) y (4.15). En consecuencia, si consideramos un paquete de ondas tridimensional formado por cuatro ondas extraordinarias contenidas en los dos planos característicos, la dirección del rayo asociado a la normal media de este paquete de ondas, coincide con la intersección de los planos que corresponden a las posiciones de interferencia de los dos paquetes bidimensionales

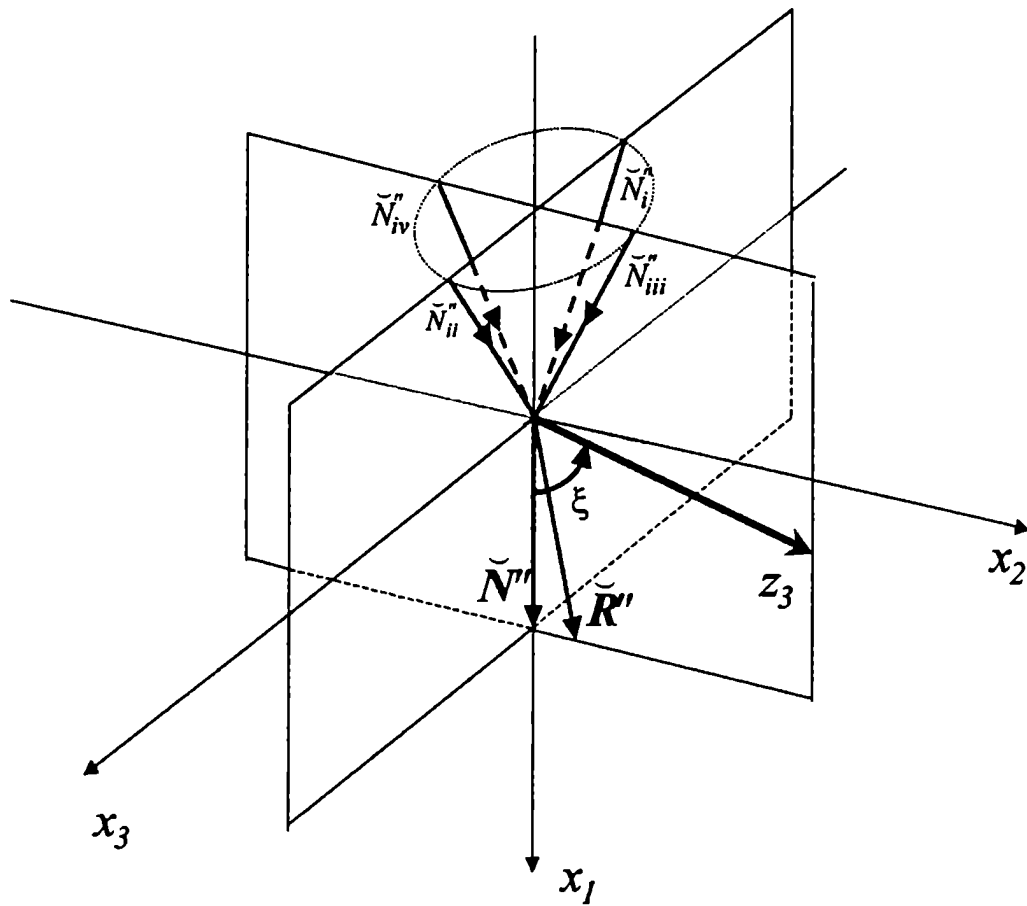


Figura 4.4: Paquete tridimensional formado por las ondas extraordinarias i , ii , iii y iv .

característicos. La dirección del rayo asociado al paquete tridimensional no depende de la apertura $\Delta\alpha$ sino de la dirección media de propagación. Esto implica que el resultado, dentro de la aproximación paraxial, habría sido el mismo si se hubieran considerado infinitos pares de onda con la misma normal media. Es decir que, mediante el análisis del patrón de interferencia de los dos paquetes de onda bidimensionales característicos obtendremos el mismo resultado que por medio de una superposición infinita de ondas planas [36], [38]: la dirección de propagación de la energía del haz corresponde a la dirección del rayo asociado a la normal media del paquete tridimensional. Por otra parte, como la dirección del rayo asociado a la normal media es independiente de los paquetes que se hayan elegido (siempre que sean simétricos y con la misma apertura), para determinar el patrón de interferencia asociado a un paquete tridimensional no es necesario que sean los característicos. En efecto, si se calculan las posiciones de los primeros máximos de interferencia para dos paquetes bidimensionales cualesquiera, aunque simétricos y con la misma apertura, la intersección de los planos correspondientes coincide con la recta

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_o^2 \cos^2 \xi + u_e^2 \sin^2 \xi}{(u_e^2 - u_o^2) \sin \xi \cos \xi} x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

es decir, con la misma recta obtenida a partir de los paquetes bidimensionales característicos.

Hemos encontrado así una manera simple de construir paquetes de ondas tridimensionales compuestos por ondas extraordinarias que se propagan por un cristal uniaxial. La aplicaremos, en las secciones siguientes, al caso de que exista una interfaz.

4.3 Paquetes bidimensionales que inciden sobre una interfaz cristal uniaxial - medio isótropo

Analizaremos ahora la interferencia producida por dos ondas extraordinarias, que forman un paquete bidimensional, y que inciden desde un cristal, considerando que el eje óptico tiene una dirección arbitraria respecto del plano definido por las normales a los frentes de onda.

Como hasta el momento hemos considerado un haz de luz que se propagaba por un cristal sin límites, hemos utilizado un sistema de referencia determinado por la dirección de la normal al frente de onda y la orientación del eje óptico. Si introducimos en nuestro problema una interfaz podemos definir un plano de incidencia y usar como sistema de coordenadas el sistema de la superficie, es decir el definido en la figura 1.2. Para una dada dirección del eje óptico tendremos, entonces, dos situaciones bien diferenciadas y, en consecuencia, dos paquetes bidimensionales para estudiar:

- a) que las normales a los frentes de onda \check{N}_1 y \check{N}_2 , del primer paquete bidimensional que analizaremos, estén contenidas en el mismo plano de incidencia pero que el ángulo que formen con la normal a la interfaz sea diferente -figura 4.5.a-;
- b) que las normales a los frentes de onda \check{N}_3 y \check{N}_4 , del segundo paquete bidimensional, estén contenidas en distintos planos de incidencia pero que el ángulo que formen con la normal a la interfaz sea el mismo -figura 4.5.b-.

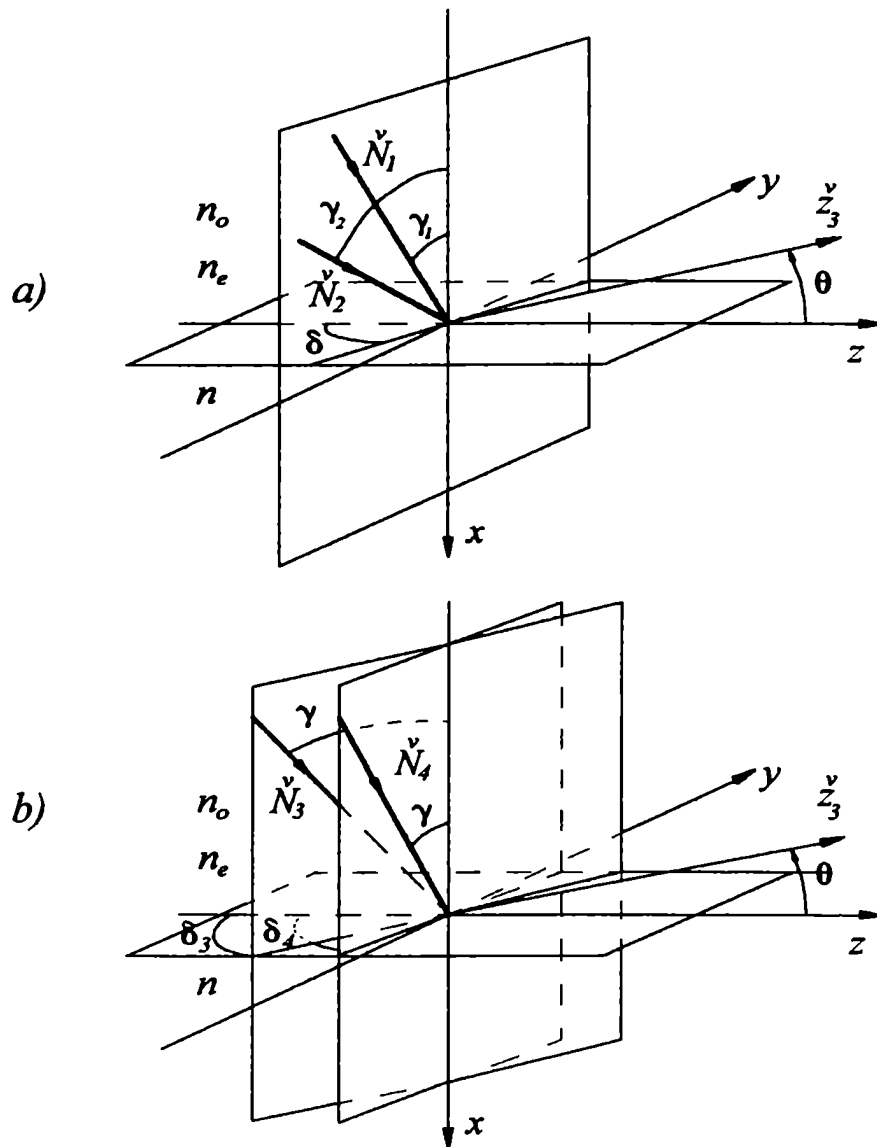


Figura 4.5: Paquetes bidimensionales que inciden sobre una interfaz cristal-isótropo

4.3.1 Normales a los frentes de onda contenidas en el mismo plano de incidencia y que inciden con diferente ángulo respecto a la interfaz

Calcularemos en primer término la interferencia producida por dos ondas extraordinarias que se propagan con velocidades de fase u''_1 y u''_2 , considerando que sus ángulos de incidencia son muy próximos y las normales a los frentes de onda respectivos están contenidas en un mismo plano de incidencia es decir que $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ (figura 4.5.a). Como hemos visto, el primer máximo de interferencia constructiva para estas ondas tendrá lugar donde

$$u''_2 (\check{N}_1'' \cdot \vec{r}) = u''_1 (\check{N}_2'' \cdot \vec{r}) \quad (4.17)$$

Si llamamos γ al ángulo de incidencia de la normal media podemos escribir los ángulos de incidencia correspondientes a las ondas 1 y 2 del siguiente modo:

$$\gamma_1 \simeq \gamma - \frac{\Delta\gamma}{2} \quad (4.18)$$

$$\gamma_2 \simeq \gamma + \frac{\Delta\gamma}{2} \quad (4.19)$$

Desarrollando a primer orden alrededor de γ las normales a los frentes de ondas respectivos, en función de las coordenadas del vector posición, resultan

$$(\check{N}_1'' \cdot \vec{r}) \simeq (\check{N}'' \cdot \vec{r}) - \frac{\Delta\gamma}{2} (-x \operatorname{sen}\gamma + y \operatorname{cos}\gamma \operatorname{sen}\delta + z \operatorname{cos}\gamma \operatorname{cos}\delta) \quad (4.20)$$

$$(\check{N}_2'' \cdot \vec{r}) \simeq (\check{N}'' \cdot \vec{r}) + \frac{\Delta\gamma}{2} (-x \operatorname{sen}\gamma + y \operatorname{cos}\gamma \operatorname{sen}\delta + z \operatorname{cos}\gamma \operatorname{cos}\delta) \quad (4.21)$$

y escribiendo también a primer orden sus velocidades de propagación a partir de las ecuaciones (4.1), (4.20) y (4.21) se obtiene

$$u''_1 \simeq \sqrt{u''^2 - 2 \frac{\Delta\gamma}{2} G} \quad (4.22)$$

$$u''_2 \simeq \sqrt{u''^2 + 2 \frac{\Delta\gamma}{2} G} \quad (4.23)$$

donde hemos definido

$$G = (u_o^2 - u_e^2) \{ \cos\gamma \operatorname{sen}\gamma [-(\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \cos^2\delta] + \\ + (\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma)(\check{z}_3 \cdot \check{x})(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \cos\delta \} \quad (4.24)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (4.20) a (4.24) en la (4.17) obtenemos la posición que corresponde al primer máximo de interferencia entre estas ondas

$$x [u_e^2 \operatorname{sen}\gamma + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \cos\delta] - \\ - (y \operatorname{sen}\delta + z \cos\delta) [u_e^2 \cos\gamma + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})] = 0 \quad (4.25)$$

Pero, como \check{N}_1'' y \check{N}_2'' están contenidos en un mismo plano de incidencia, resulta conveniente trabajar en este plano para poder interpretar geoméricamente los resultados con más facilidad.

Si rotamos los ejes y y z un ángulo δ alrededor del eje x , podemos definir los versores $\check{\zeta}$ y $\check{\eta}$, contenidos en la interfaz, que indican las direcciones paralela y perpendicular al plano de incidencia respectivamente (figura 4.6):

$$\zeta = y \operatorname{sen}\delta + z \cos\delta \quad (4.26)$$

$$\eta = y \cos\delta - z \operatorname{sen}\delta \quad (4.27)$$

A partir de las ecuaciones (4.2), (4.26) y (4.27) podemos calcular las componentes del versor \check{R}'' en el sistema (x, η, ζ) ,

$$(\check{R}'' \cdot \check{x}) = \frac{1}{f_n} [u_e^2 \cos\gamma + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{x})] \quad (4.28)$$

$$(\check{R}'' \cdot \check{\eta}) = -\frac{1}{f_n} (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \operatorname{sen}\delta \quad (4.29)$$

$$(\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) = \frac{1}{f_n} [u_e^2 \operatorname{sen}\gamma + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \cos\delta] \quad (4.30)$$

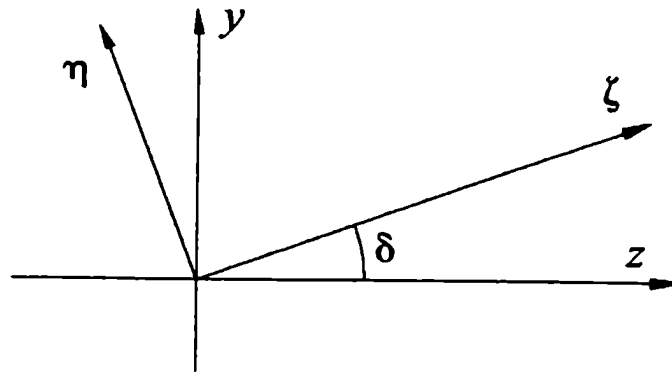


Figura 4.6: Rotación que define los versores, contenidos en la interfaz, paralelo y perpendicular al plano de incidencia. El plano y - z corresponde a la interfaz.

y reemplazando estas últimas expresiones en la ecuación (4.25) obtenemos la posición del primer máximo de interferencia en función de las componentes del rayo asociado a la normal media

$$x (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) - \zeta (\check{R}'' \cdot \check{x}) = 0 \quad (4.31)$$

La ecuación (4.31) corresponde a la ecuación de un plano perpendicular al plano de incidencia en el espacio tridimensional. Si consideramos el corte correspondiente a $\eta = 0$, la posición donde se encuentra el primer máximo de interferencia entre las ondas 1 y 2 coincide con la proyección sobre el plano de incidencia del rayo asociado a la normal media del haz.

4.3.2 Normales a los frentes de ondas contenidas en diferentes planos de incidencia y que inciden con el mismo ángulo respecto a la interfaz

Estudiamos ahora la interferencia producida por dos ondas planas extraordinarias 3 y 4 que inciden sobre la interfaz con el mismo ángulo de incidencia γ pero contenidas cada una de ellas en un plano de incidencia diferente ($\delta_3 \neq \delta_4$), figura 4.4.b. Llamamos δ al ángulo que determina la posición del plano de incidencia correspondiente a la normal media entre estas ondas, y consideramos pequeños apartamientos respecto de ésta para las ondas 3 y 4

$$\delta_3 \simeq \delta - \frac{\Delta\delta}{2} \quad (4.32)$$

$$\delta_4 \simeq \delta + \frac{\Delta\delta}{2} \quad (4.33)$$

de modo que las normales a los frentes de onda pueden escribirse a primer orden de la siguiente manera

$$(\check{N}_3'' \cdot \vec{r}) \simeq (\check{N}'' \cdot \vec{r}) - \frac{\Delta\delta}{2} \text{sen}\gamma (y \cos\delta - z \text{sen}\delta) \quad (4.34)$$

$$(\check{N}_4'' \cdot \vec{r}) \simeq (\check{N}'' \cdot \vec{r}) + \frac{\Delta\delta}{2} \text{sen}\gamma (y \cos\delta - z \text{sen}\delta) \quad (4.35)$$

y sus velocidades de fase respectivas:

$$u''_3 \simeq \sqrt{u''^2 + 2 \frac{\Delta\delta}{2} W} \quad (4.36)$$

$$u''_4 \simeq \sqrt{u''^2 - 2 \frac{\Delta\delta}{2} W} \quad (4.37)$$

donde

$$W = (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \text{sen}\gamma \text{sen}\delta \quad (4.38)$$

Sabemos que la posición donde se produce la primera interferencia constructiva entre las ondas 3 y 4 se encuentra donde

$$u''_4 (\check{N}_3'' \cdot \vec{r}) = u''_3 (\check{N}_4'' \cdot \vec{r}) \quad (4.39)$$

de modo que reemplazando las ecuaciones (4.34) a (4.38) en esta última expresión resulta

$$[(u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta] (\check{N}'' \cdot \vec{r}) = -u''^2 \operatorname{sen} \gamma (y \operatorname{cos} \delta - z \operatorname{sen} \delta) \quad (4.40)$$

Con el fin de interpretar geoméricamente con más facilidad este resultado conviene trabajar en un sistema donde una de las coordenadas sea perpendicular al plano determinado por \check{N}_3'' y \check{N}_4'' . Con este objetivo escribiremos en primer lugar la ecuación (4.40) en el sistema definido por el plano que contiene a la normal media y a la normal a la interfaz (x, ζ, η) - figura 4.6 -

$$\begin{aligned} & (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \operatorname{cos} \gamma \operatorname{sen} \delta \quad x + \\ & + (u_o^2 - u_e^2)(\check{N}'' \cdot \check{z}_3)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta \quad \zeta + \\ & \qquad \qquad \qquad + u''^2 \quad \eta = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

que en función de las componentes del rayo en este sistema - ecuaciones (4.28) a (4.30) - resulta

$$(\check{R}'' \cdot \check{\eta}) [x \operatorname{cos} \gamma + \zeta \operatorname{sen} \gamma] - \eta [(\check{R}'' \cdot \check{x}) \operatorname{cos} \gamma + (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) \operatorname{sen} \gamma] = 0 \quad (4.42)$$

Pero, como la normal media del paquete se encuentra contenida en el plano definido por \check{N}_3'' y \check{N}_4'' , realizamos una nueva rotación, esta vez en γ y

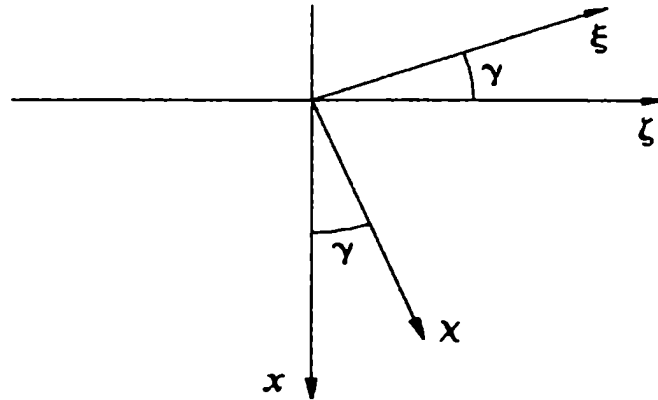


Figura 4.7: Rotación que define el versor χ

alrededor del eje η (figura 4.7) definiendo el eje χ , eje que tiene la dirección de \check{N}'' ,

$$\chi = x \cos\gamma + \zeta \operatorname{sen}\gamma \quad (4.43)$$

de modo que el plano que contiene a las normales a los frentes de onda \check{N}_3'' y \check{N}_4'' es el determinado por las coordenadas η y χ . Escribiendo la ecuación (4.42) en función de estas nuevas coordenadas se obtiene

$$\chi (\check{R} \cdot \check{\eta}) - \eta (\check{R} \cdot \check{\chi}) = 0 \quad (4.44)$$

es decir, que la proyección del rayo (asociado a la normal media del haz) sobre el plano que contiene a las normales \check{N}_3'' y \check{N}_4'' coincide con la posición donde se produce la primera interferencia constructiva entre las ondas 3 y 4.

4.4 Paquete tridimensional que incide sobre una interfaz cristal uniaxial-medio isótropo

En los párrafos precedentes analizamos dos paquetes bidimensionales que inciden sobre una interfaz. Consideraremos ahora un paquete tridimensional compuesto por las cuatro ondas planas extraordinarias \check{N}_1'' , \check{N}_2'' , \check{N}_3'' y \check{N}_4'' definidas en las secciones anteriores; de modo que los ángulos que determinan la dirección de cada una de ellas en función de la dirección de la normal media del paquete (figura 4.8), están dados por:

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{\Delta\gamma}{2} \quad \delta_1 = \delta \quad (4.45)$$

$$\gamma_2 = \gamma + \frac{\Delta\gamma}{2} \quad ; \quad \delta_2 = \delta \quad (4.46)$$

$$\gamma_3 = \gamma \quad \delta_3 = \delta - \frac{\Delta\delta}{2} \quad (4.47)$$

$$\gamma_4 = \gamma \quad \delta_4 = \delta + \frac{\Delta\delta}{2} \quad (4.48)$$

Y, como hicimos en 4.2, armaremos el paquete tridimensional a partir de los dos paquetes bidimensionales ya estudiados. Hemos encontrado que la posición de la primera interferencia constructiva -ecuación (4.31)- entre las ondas 1 y 2 está dada por

$$x (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) - \zeta (\check{R}'' \cdot \check{x}) = 0 \quad (4.49)$$

mientras que la posición del primer máximo de interferencia correspondiente a las ondas 3 y 4 -ecuación (4.42)- es

$$x (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) \cos\gamma + \zeta (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) \sen\gamma - \eta [(\check{R}'' \cdot \check{x}) \cos\gamma + (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) \sen\gamma] = 0 \quad (4.50)$$

Llamaremos π_γ al plano definido por esta ecuación (4.49) y π_δ al correspondiente a la ecuación (4.50). A partir de estos resultados, obtenemos que

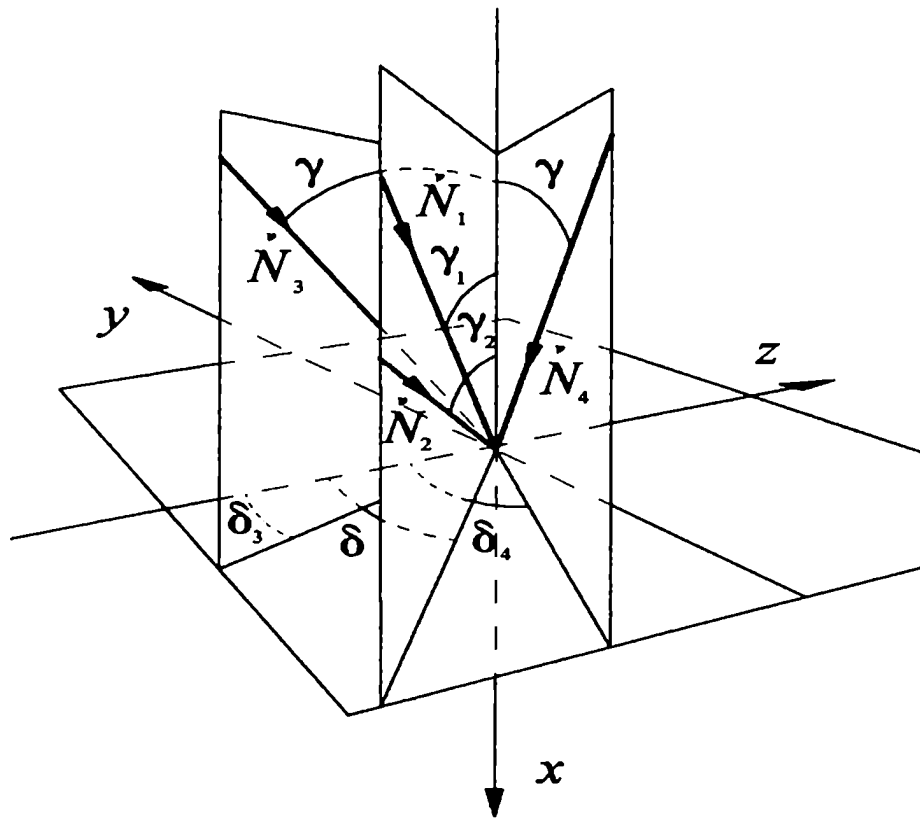


Figura 4.8: *Paquete incidente tridimensional*

la intersección de los planos π_γ y π_δ coincide con la dirección del rayo asociado a la normal media del haz tridimensional (Apéndice II). Es decir que, la dirección de propagación de la energía del haz tridimensional puede ser calculada mediante el análisis del patrón de interferencia de dos paquetes bidimensionales sencillos; y esto, también en el caso en que los planos que contienen a las normales de las ondas que forman los paquetes bidimensionales que se superponen no sean los planos característicos del cristal.

A partir del estudio del patrón de interferencia producido por dos ondas, cuyas normales son simétricas con respecto a la normal media, hemos encontrado una relación entre la posición del primer máximo de interferencia de las ondas que componen un haz y la dirección del rayo asociado a su normal media. En el caso de un haz ordinario, como existe simetría de rotación alrededor de la dirección de la normal media del paquete, cualquier par simétrico de ondas brindará la misma información respecto a la dirección de propagación de la energía, ya que esta última simplemente coincide con la dirección de la normal media del paquete. Para paquetes bidimensionales formados por ondas extraordinarias, la posición del primer máximo de interferencia entre las ondas corresponde a la proyección del rayo en el plano determinado por las normales de las ondas que constituyen el paquete. Por otra parte, como la posición del primer máximo de interferencia entre dos ondas simétricas no depende de la proximidad de sus normales a la normal media (aunque deben mantenerse dentro del rango de validez de la aproximación paraxial), es suficiente considerar paquetes compuestos sólo con dos ondas sin perder generalidad en la información que el patrón de interferen-

cia aporta sobre la dirección del rayo, siendo esto válido para todo paquete bidimensional simétrico formado por cualquier número de ondas. Hemos encontrado además una manera sencilla de construir paquetes tridimensionales. En efecto, hemos mostrado que podemos hacerlo a partir de dos paquetes bidimensionales, formados por dos ondas, siempre que compartan la misma normal media pero sin necesidad de que tengan los ejes de simetría perpendiculares entre sí. Es decir que podemos conocer la dirección del flujo de energía correspondiente a un paquete tridimensional a partir del análisis del patrón de interferencia de dos paquetes bidimensionales cualesquiera.

Determinamos además una manera sencilla de configurar un paquete tridimensional, compuesto por ondas extraordinarias, que incide sobre una interfaz en la cual el primer medio es un cristal uniaxial. Como la dirección de propagación de las ondas que componen este paquete está dada en función no sólo de la dirección del eje óptico sin también de la normal a la interfaz, este paquete resultará más adecuado para el estudio de la reflexión y refracción de haces limitados en presencia de medios uniaxiales. Estamos así en condiciones de analizar la reflexión y transmisión de paquetes de ondas ordinarias y extraordinarias en presencia de reflexión inhibida.

Capítulo 5

Corrimiento lateral de los haces reflejado y refractado

En el capítulo anterior hemos encontrado una manera sencilla de configurar paquetes bidimensionales de ondas que se propagan en un medio uniaxial; estableciendo la relación que existe entre el lugar geométrico de los primeros máximos de interferencia, la dirección del flujo de energía y la de la normal media. Mostramos que, bajo condiciones de paraxialidad, la formación de haces con ondas ordinarias puede realizarse de la misma manera en la que se construyen los haces con ondas que se propagan por medios isótropos. Si, en cambio, se considera un paquete formado por ondas extraordinarias, la velocidad de propagación de cada onda u'' dependerá de su dirección de avance \check{N}'' , como ya sabemos. Hemos visto también que -a primer orden y dentro de los límites de la aproximación paraxial-, puede obtenerse la dirección del flujo de energía de un paquete tridimensional a partir del estudio del patrón de interferencia de dos paquetes bidimensionales cualesquiera.

La posibilidad de acotar en el espacio los haces de luz, como paquetes de ondas, nos permitirá mostrar que tanto el haz reflejado como el refractado

sufren un efecto no geométrico de primer orden en condiciones de reflexión inhibida. Este efecto presenta una cierta analogía con el desplazamiento Goos-Hänchen del rayo reflejado en presencia de reflexión total en interfaces isótropas.

En 1943 Goos y Hänchen [27] mostraron experimentalmente que cuando un haz de luz linealmente polarizado incide, bajo condiciones de reflexión total, sobre una superficie que separa dos medios ópticamente transparentes, homogéneos e isótropos, el haz de luz reflejado está desplazado - en el plano de incidencia - paralelamente al rayo que correspondería a la reflexión geométrica sobre la interfaz. A pesar de que este desplazamiento es del orden de unas pocas longitudes de onda, una repetición sucesiva de la reflexión total en la interfaz hizo visible este efecto y posible su medición experimental. Concluyeron, como ya había sido sospechado por Newton en el siglo XVI [39], que incluso en condiciones de reflexión total el haz incidente penetra en el medio ópticamente menos denso para volver a emerger después en el medio más denso; en otras palabras, que el haz se refleja sobre una superficie virtual, paralela y cercana a la interfaz, ubicada dentro del medio de menor índice de refracción.

En la literatura, el efecto Goos-Hänchen, se encuentra expresado de diferentes maneras equivalentes como (ver figura 5.1):

- i) un desplazamiento D del rayo reflejado;
- ii) un corrimiento lateral L_z del centro de reflexión ($L_z = \frac{D}{\cos\gamma}$);
- iii) una profundidad de penetración L_x del rayo o un corrimiento L_x de la superficie de reflexión ($L_x = \frac{D}{2\sin\gamma}$).

A pesar de que el cálculo de este desplazamiento puede ser formulado de

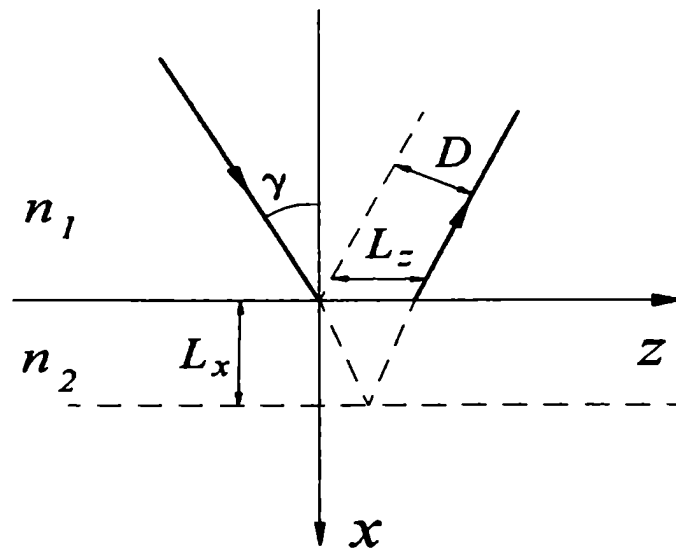


Figura 5.1: *Desplazamiento Goos-Hänchen para el rayo reflejado en una interfaz isotropa; $n_1 < n_2$.*

manera rigurosa, su tratamiento analítico es tan complejo -debido a que es importante considerar en el cálculo el tamaño finito del haz incidente- que no ha sido posible, hasta el momento, encontrar una expresión general, simple y exacta ni siquiera para interfaces isotropas.

Son fundamentalmente dos los tratamientos clásicos para el estudio del desplazamiento Goos-Hänchen en medios isotropos: los métodos de superposición de ondas planas ([28],[34],[40]-[50]) y los métodos basados en consideraciones energéticas ([51]-[56]). Si bien estos últimos explican cualitativamente cuál es el proceso físico involucrado, los métodos de superposición de ondas planas demostraron ser más adecuados, ya que permitieron determinar las características de los haces reflejados sobre interfaces isotropas con y sin pérdidas.

Históricamente, el primero en explicar las observaciones del desplazamiento Goos-Hänchen utilizando teorías de óptica física fue K. Artmann [28], quien consideró haces limitados formados por dos ondas planas e interfaces dieléctricas isótropas. Los estudios realizados posteriormente, considerando a los haces bidimensionales como superposición de infinitas ondas planas, confirmaron los resultados obtenidos por Artmann. Por este motivo, y debido a su sencillez conceptual y analítica, el método de Artmann continúa siendo utilizado para el estudio del corrimiento de haces bidimensionales reflejados, también en interfaces formadas por materiales que presentan nuevas propiedades físicas [57], [58].

Cuando no existe ninguna dirección privilegiada, ya sea por las características de los haces involucrados o de la interfaz considerada, el corrimiento pudo ser obtenido a partir del estudio de haces limitados en una dirección. En cambio, si se consideran superficies que involucren algún medio anisótropo, la asimetría que introduce siempre el eje óptico exige la consideración de haces tridimensionales para la determinación del corrimiento lateral. La reflexión y refracción de haces bi y tridimensionales, sintetizados por una superposición de infinitas ondas planas, han podido resolverse analíticamente dentro de la aproximación paraxial en interfaces isótropo-cristal uniaxial, únicamente en condiciones de alta simetría: dirección media de incidencia contenida en alguno de los planos principales del cristal, o dirección media de incidencia paralela al eje óptico y normal a la interfaz [59]-[61]. Pero el fenómeno de reflexión inhibida en interfaces cristal uniaxial-medio isótropo nunca puede tener lugar en condiciones de simetría, lo que lleva a que la superposición de infinitas ondas sólo podría resolverse en forma numérica. Por este mo-

tivo, para el estudio analítico de los corrimientos laterales en condiciones de reflexión inhibida, generalizaremos a haces tridimensionales el método de Artmann, método que involucra un número finito de ondas. Consideraremos en primer término una interfaz isótropa y luego una interfaz formada por un cristal uniaxial y un medio isótropo.

5.1 Método de Artmann generalizado: corrimiento lateral del haz reflejado en interfaces isótropas

La teoría propuesta por Artmann en 1948 consiste en pensar al haz incidente como una superposición de dos ondas planas de la misma amplitud y linealmente polarizadas en alguno de sus modos propios (*p* o *s*), que inciden en condiciones de reflexión total sobre una interfaz isótropa dieléctrica con ángulos de incidencia γ_1 y γ_2 muy próximos.

Considerando que las normales a los frentes de onda están contenidas en el plano xz y que la interfaz se encuentra en el plano definido por las coordenadas y y z , la coordenada y resulta ser la coordenada de simetría del haz bidimensional (figura 5.2). Se elige como origen de coordenadas el lugar donde las ondas incidentes interfieren constructivamente. La interferencia producida entre las dos ondas reflejadas da lugar en la interfaz a un sistema de franjas y la posición donde se produce el primer máximo de interferencia entre ellas corresponde al sitio donde emerge el haz. La posición de la primera franja de interferencia sobre la interfaz, teniendo en cuenta que en medios isótropos el ángulo de reflexión es igual al de incidencia y llamando ϕ_1 y ϕ_2

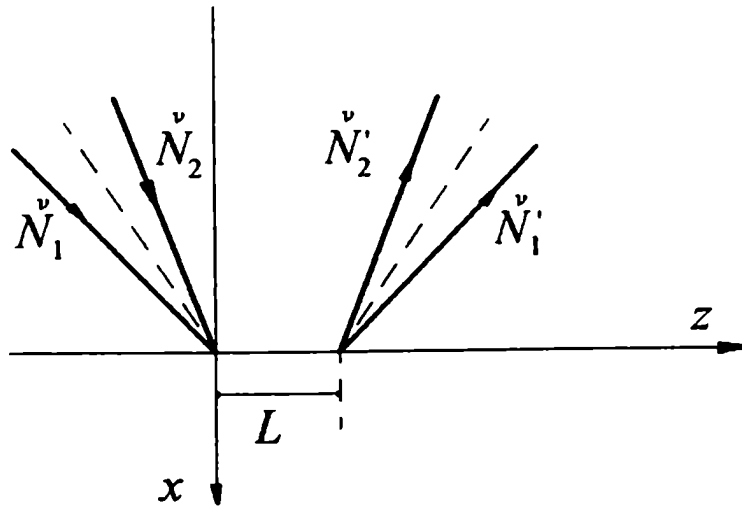


Figura 5.2: Método de Artmann. Desplazamiento longitudinal del rayo reflejado en una interfaz isotrópica. El plano yz corresponde a la interfaz.

al salto de fase que sufre cada una de las ondas en la reflexión, es

$$\frac{2\pi n}{\lambda_0} z (\text{sen}\gamma_2 - \text{sen}\gamma_1) = -(\phi_2 - \phi_1) = -\Delta\phi \quad (5.1)$$

donde n es el índice de refracción del primer medio y λ_0 la longitud de onda en el vacío. Considerando que la variación en γ es pequeña, resulta:

$$z = \frac{-\lambda_0}{2\pi n \cos\gamma} \frac{\Delta\phi}{\Delta\gamma} \quad (5.2)$$

de modo que Artmann concluyó que un haz bidimensional que se refleja totalmente sufre un corrimiento lateral L -dado por (5.2)- en el plano de incidencia a lo largo de la interfaz, y proporcional a la variación, con el ángulo de incidencia, de la diferencia de fase $\Delta\phi$ entre las dos ondas que constituyen el haz reflejado.

En los párrafos siguientes generalizaremos el método de Artmann para un haz limitado en dos direcciones. Lo aplicaremos en primer término al caso estudiado por él, es decir un haz con simetría de revolución, que incide en condiciones de reflexión total sobre una interfaz isótropa. Hemos visto que la dirección del flujo de energía correspondiente a un haz tridimensional incidente puede obtenerse a partir del estudio del patrón de interferencia de dos haces bidimensionales, siempre que compartan la misma normal media. Consideraremos entonces un primer paquete formado por las ondas 1 y 2, cuyas normales están contenidas en el mismo plano de incidencia; y un segundo paquete bidimensional formado por las ondas 3 y 4, que inciden sobre la interfaz con el mismo ángulo de incidencia pero de modo que sus normales determinan planos de incidencia diferentes (figura 4.8). En interfaces isótropas, sin pérdida de generalidad, podemos considerar que la normal media que comparten ambos paquetes bidimensionales está incluida en el plano xz (correspondiendo al caso en que δ es nulo en la figura 4.8). Al reflejarse, el primer paquete bidimensional -compuesto por las ondas 1 y 2- da lugar a un sistema de franjas sobre la interfaz. Este paquete bidimensional fue el estudiado por Artmann, y la posición del primer máximo de interferencia - ecuación (5.2) - corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje y (figura 5.3). Para analizar la reflexión del segundo paquete bidimensional (compuesto por las ondas 3 y 4), supondremos que los apartamientos de \check{N}_3 y de \check{N}_4 respecto de \check{N} son pequeños, de manera que a primer orden puede considerarse

$$\check{N}_3 = \check{N} - \check{y} \frac{\Delta\delta}{2} \text{sen}\gamma \quad (5.3)$$

$$\check{N}_4 = \check{N} + \check{y} \frac{\Delta\delta}{2} \text{sen}\gamma \quad (5.4)$$

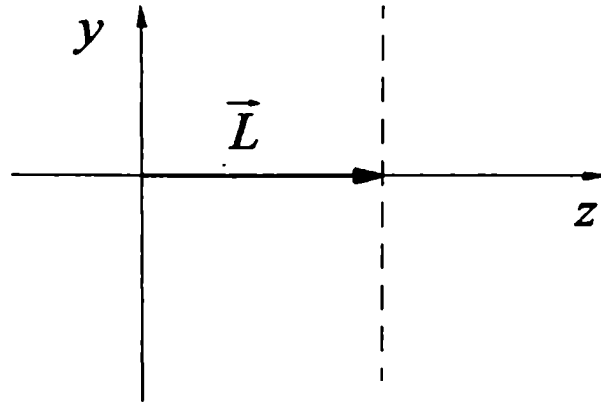


Figura 5.3: Método de Artmann en interfaces isótropas. El plano yz corresponde a la interfaz.

La posición del primer máximo de interferencia sobre la interfaz de este segundo paquete reflejado es

$$y = 0 \quad (5.5)$$

ecuación de una recta que coincide con el eje z .

La dirección del flujo de energía del haz tridimensional reflejado -que proviene del incidente formado por las ondas 1, 2, 3 y 4- coincidirá con la intersección geométrica de los planos correspondientes a los primeros máximos de interferencia de los paquetes bidimensionales reflejados 1-2 y 3-4, dadas en las ecuaciones (5.2) y (5.5). Esto implica que el haz tridimensional al reflejarse sobre una interfaz isótropa sufre un corrimiento longitudinal pero permanece contenido en el plano de incidencia (figura 5.3). El resultado obtenido por medio de esta generalización tridimensional es el mismo que obtuvo Artmann, debido a que la coordenada que él no considera, al estudiar únicamente haces bidimensionales, es una coordenada de simetría en inter-

faces isotropas. Es interesante notar que la ecuación (5.5), correspondiente a las ondas 3 y 4, es la que explícitamente afirma que el vector corrimiento lateral \vec{L} está contenido en el plano de incidencia.

Es decir, como el salto de fase que sufren las ondas que componen el paquete cuando se reflejan en condiciones de reflexión total no es el mismo, el haz reflejado presenta un corrimiento que puede ser calculado a partir del método de Artmann. Pero hemos visto que, en la reflexión interna de un cristal uniaxial, existe también otro fenómeno en presencia del cual el desfase del haz reflejado presenta un comportamiento análogo: cuando una de las ondas reflejadas resulta inhibida. Este hecho nos induce a pensar en la existencia de un corrimiento lateral del haz reflejado también en presencia de este fenómeno. Sin embargo, como en la reflexión interna tanto el haz incidente como el reflejado se propagan por el cristal (y la dirección perpendicular al plano de incidencia no es una coordenada de simetría en este tipo de medios) es necesario utilizar la generalización del método de Artmann para haces tridimensionales, si queremos calcular su corrimiento lateral.

5.2 Corrimiento longitudinal y transversal del haz reflejado

A diferencia de lo que sucede en interfaces isotropas, en la reflexión interna en cristales uniaxiales no podemos considerar separación en modos: excepto en casos de alta simetría existen en la reflexión ambos modos de polarización para cada modo incidente. Además, la energía luminosa no está siempre confinada en el plano de incidencia. Estos hechos introducen un grado de

complejidad adicional al problema. Y, como hemos discutido con detalle en el capítulo anterior, si queremos pensar el haz incidente como una superposición de ondas planas, debemos considerar al menos cuatro ondas que formen dos paquetes bidimensionales, tales que tengan la normal media en común. Formaremos ambos paquetes de ondas incidentes con las ondas 1 y 2 y las ondas 3 y 4 que ya conocemos (ver figura 4.8), de modo que los ángulos que describen las direcciones de las normales a los frentes de onda correspondientes son:

$$\begin{array}{lll}
 \gamma_1 = \gamma - \frac{\Delta\gamma}{2} & ; & \delta_1 = \delta & \text{para la onda 1} \\
 \gamma_2 = \gamma + \frac{\Delta\gamma}{2} & ; & \delta_2 = \delta & \text{para la onda 2} \\
 \gamma_3 = \gamma & ; & \delta_3 = \delta - \frac{\Delta\delta}{2} & \text{para la onda 3} \\
 \gamma_4 = \gamma & ; & \delta_4 = \delta + \frac{\Delta\delta}{2} & \text{para la onda 4}
 \end{array}$$

donde γ_j es el ángulo de incidencia de cada onda y δ_j el ángulo que forma el plano de incidencia de cada onda con el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico.

Supondremos que las ondas incidentes interfieren constructivamente en el origen de coordenadas. Veremos en los párrafos siguientes que la interferencia producida por las ondas reflejadas 1 y 2 explican el corrimiento lateral longitudinal del haz reflejado, mientras que la interferencia producida por las ondas reflejadas 3 y 4 permiten calcular su corrimiento lateral transversal. Como las características de los haces ordinarios y extraordinarios son diferentes no podemos suponer el mismo comportamiento en ambos casos. En consecuencia, analizaremos por separado el corrimiento lateral sufrido por el haz reflejado cuando las ondas que lo componen son ordinarias (en condiciones de reflexión inhibida del paquete reflejado extraordinario) y cuando

son extraordinarias (en condiciones de reflexión inhibida del haz reflejado ordinario).

5.2.1 Haz incidente ordinario

Como hemos visto en capítulos anteriores, cuando inciden ondas ordinarias en condiciones de reflexión inhibida, las ondas reflejadas extraordinarias resultan evanescentes y las reflejadas ordinarias sufren un salto de fase. En el capítulo 4 hemos mostrado también que la dirección de propagación de la energía de un haz tridimensional puede obtenerse a partir del análisis de los patrones de interferencia de dos paquetes de ondas bidimensionales. Si consideramos un paquete tridimensional que incide en condiciones de reflexión inhibida, formado por las ondas 1, 2, 3 y 4, veremos que al reflejarse sufre un corrimiento que, en general, no estará contenido en el plano de incidencia. Lo llamaremos "vector corrimiento":

$$\vec{L}' = L'_l \zeta + L'_t \tilde{\eta} \quad (5.6)$$

y calcularemos sus componentes longitudinal L'_l y transversal L'_t a partir del análisis de los patrones de interferencia de los dos haces bidimensionales reflejados que provienen de los incidentes 1-2 y 3-4.

La posición del primer máximo de interferencia entre las ondas reflejadas ordinarias, que provienen de las incidentes 1 y 2, se encuentra en las posiciones donde

$$(\vec{k}'_{o2} - \vec{k}'_{o1}) \cdot \vec{r} = -(\Phi'_{o2} - \Phi'_{o1}) \quad (5.7)$$

mientras que la posición correspondiente al primer máximo de interferencia entre las ondas reflejadas, que provienen de las incidentes ordinarias 3 y 4,

está dado por

$$(\vec{k}'_{o4} - \vec{k}'_{o3}) \cdot \vec{r} = -(\Phi'_{o4} - \Phi'_{o3}) \quad (5.8)$$

donde \vec{k}'_{oj} son los vectores número de onda que corresponden a cada una de las ondas reflejadas ordinarias

$$\vec{k}'_{o1} = \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \check{N}'_{o1} \quad (5.9)$$

$$\vec{k}'_{o2} = \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \check{N}'_{o2} \quad (5.10)$$

$$\vec{k}'_{o3} = \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \check{N}'_{o3} \quad (5.11)$$

$$\vec{k}'_{o4} = \frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \check{N}'_{o4} \quad (5.12)$$

y Φ'_{oj} son los saltos de fase correspondientes a cada una de las mismas. Los desfases de las ondas reflejadas que subsisten en presencia de reflexión inhibida extraordinaria están dados por la ecuación (3.2) - figura 3.1 -.

Si reemplazamos las ecuaciones (5.9) y (5.10) en (5.7) obtenemos la siguiente expresión para la posición de la primera franja de interferencia constructiva sobre la interfaz, del primer paquete bidimensional reflejado ordinario

$$\frac{2\pi n_o}{\lambda_0} [(y \operatorname{sen} \delta + z \operatorname{cos} \delta) \operatorname{sen} \gamma_2 - [(y \operatorname{sen} \delta + z \operatorname{cos} \delta) \operatorname{sen} \gamma_1] = -\Delta \Phi'_o \quad (5.13)$$

y escribiéndola en función de la coordenada del plano de incidencia ζ - ver figura 4.6 - resulta

$$\frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \zeta \Delta(\operatorname{sen} \gamma) = -\Delta \Phi'_o \quad (5.14)$$

A partir de esta última expresión y considerando que los ángulos γ_1 y γ_2 son muy próximos, podemos determinar que, a primer orden, el haz reflejado

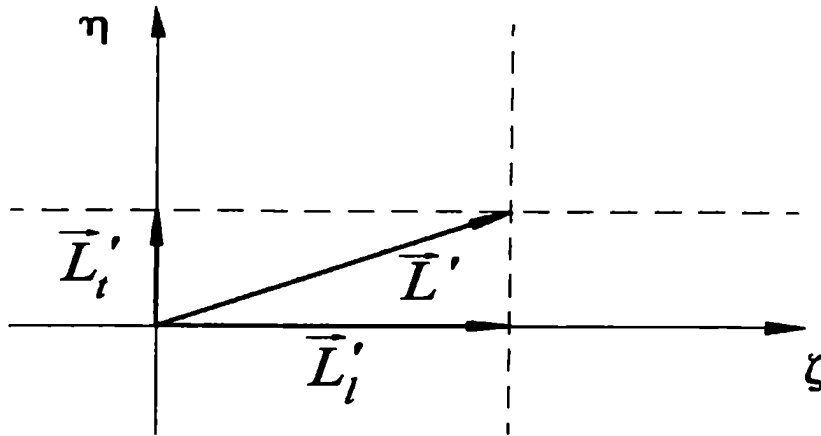


Figura 5.4: Vector corrimiento de un haz reflejado ordinario en presencia de reflexión inhibida

bidimensional formado por las ondas 1 y 2 sufre un corrimiento longitudinal

$$L'_i = - \frac{\lambda_0}{2\pi n_o \cos\gamma} \frac{\Delta\Phi'_o}{\Delta\gamma} \quad (5.15)$$

Realizando un tratamiento algebraico análogo para las ondas 3 y 4, reemplazando las ecuaciones (5.11) y (5.12) en la (5.8), la posición del primer máximo de interferencia de las ondas reflejadas sobre la interfaz, del segundo paquete bidimensional reflejado ordinario, resulta

$$\frac{2\pi n_o}{\lambda_0} \operatorname{sen}\gamma (y \operatorname{sen}\delta_4 + z \operatorname{cos}\delta_4 - y \operatorname{sen}\delta_3 - z \operatorname{cos}\delta_3) = - \Delta\Phi'_o \quad (5.16)$$

Aproximando a primer orden δ_3 y δ_4 y escribiendo esta última ecuación en función de la coordenada η - ver figura 4.6 - obtenemos el corrimiento que sufre en la reflexión este haz bidimensional. Éste resulta perpendicular al plano que contiene a la dirección de onda media y a la normal a la interfaz

$$L'_i = - \frac{\lambda_0}{2\pi n_o \operatorname{sen}\gamma} \frac{\Delta\Phi'_o}{\Delta\delta} \quad (5.17)$$

En la figura 5.4 podemos ver la primera franja de interferencia constructiva para cada uno de los paquetes bidimensionales reflejados ordinarios. En el punto donde ambas franjas intersecan emergerá el haz reflejado, de modo que el corrimiento del haz tridimensional estará dado por

$$\vec{L}' = -\frac{\lambda_0}{2\pi n_o} \left[\frac{1}{\cos\gamma} \frac{\Delta\Phi'_o}{\Delta\gamma} \zeta + \frac{1}{\sen\gamma} \frac{\Delta\Phi'_o}{\Delta\delta} \eta \right] \quad (5.18)$$

Donde el primer término presenta una semejanza con el corrimiento lateral longitudinal en interfaces isotropas en condiciones de reflexión total (efecto Goos-Hänchen). El segundo es consecuencia de la existencia del eje óptico como dirección preferencial.

5.2.2 Paquete incidente extraordinario

Para estudiar el corrimiento que sufre en la reflexión el paquete extraordinario que subsiste en presencia de reflexión inhibida ordinaria, seguiremos un procedimiento similar al que utilizamos para un haz incidente ordinario. En efecto, trabajaremos con las ondas extraordinarias 1, 2, 3 y 4 que inciden sobre la interfaz, formando de a pares dos paquetes bidimensionales que comparten la misma normal media, pero teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de cada una de las ondas que componen los paquetes incidente y reflejado no es la misma como sucedía cuando el haz incidente era ordinario.

La primera franja de interferencia constructiva para el haz bidimensional reflejado extraordinario que proviene de las ondas 1 y 2 estará donde se cumpla

$$(\vec{k}_{e2}'' - \vec{k}_{e1}'') \cdot \vec{r} = -(\Phi_{e2}'' - \Phi_{e1}'') \quad (5.19)$$

y la correspondiente al haz bidimensional reflejado extraordinario que pro-

viene de las ondas 3 y 4 cuando

$$(\bar{k}_{e4}'' - \bar{k}_{e3}'') \cdot \vec{r} = - (\Phi_{e4}'' - \Phi_{e3}'') \quad (5.20)$$

donde Φ_{ej}'' representa el salto de fase que sufre cada una de las ondas en la reflexión, como analizamos en la sección 3.1 - ecuación (3.4) - y

$$\bar{k}_{e1}'' = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{\check{N}_{e1}''}{u_{e1}''} \quad (5.21)$$

$$\bar{k}_{e2}'' = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{\check{N}_{e2}''}{u_{e2}''} \quad (5.22)$$

$$\bar{k}_{e3}'' = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{\check{N}_{e3}''}{u_{e3}''} \quad (5.23)$$

$$\bar{k}_{e4}'' = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{\check{N}_{e4}''}{u_{e4}''} \quad (5.24)$$

Como sabemos, a diferencia de lo que sucede cuando el paquete reflejado es ordinario, la velocidad de fase de cada onda reflejada extraordinaria u_{ej}'' es diferente y depende de N_{ej}'' .

Reemplazando las ecuaciones (5.21) y (5.22) en (5.19), y escribiéndolas a partir de la ley de Snell en función de las normales y velocidades de fase de las ondas incidentes, obtenemos la siguiente expresión para la posición sobre la interfaz del primer máximo de interferencia de las ondas reflejadas

$$\frac{2\pi c}{\lambda_0} \left[\frac{(\check{N}_2'' \cdot \check{y}) y + (\check{N}_2'' \cdot \check{z}) z}{u_2''} - \frac{(\check{N}_1'' \cdot \check{y}) y + (\check{N}_1'' \cdot \check{z}) z}{u_1''} \right] = - \Delta \Phi_e'' \quad (5.25)$$

Escribiendo esta última ecuación en función de la coordenada ζ resulta

$$\frac{2\pi c}{\lambda_0} \zeta \left[\frac{\text{sen} \gamma_2}{u_2''} - \frac{\text{sen} \gamma_1}{u_1''} \right] = - \Delta \Phi_e'' \quad (5.26)$$

A partir de las ecuaciones (4.22) y (4.23) las velocidades de fase de las ondas 1 y 2 pueden escribirse a primer orden de la siguiente manera

$$u''_1 \simeq \sqrt{u''^2 - \Delta\gamma G} \simeq u'' - \frac{G}{2u''} \Delta\gamma \quad (5.27)$$

$$u''_2 \simeq \sqrt{u''^2 + \Delta\gamma G} \simeq u'' + \frac{G}{2u''} \Delta\gamma \quad (5.28)$$

donde G está dada por la ecuación (4.24) y u'' por la (4.1). Reemplazando las ecuaciones (5.27) y (5.28) en la ecuación (5.26) y aproximando a primer orden el $\text{sen}\gamma_1$ y el $\text{sen}\gamma_2$ alrededor del $\text{sen}\gamma$, podemos obtener una expresión para el corrimiento longitudinal que sufre el haz bidimensional reflejado extraordinario correspondiente a las ondas 1 y 2:

$$\zeta = -\frac{\lambda_0}{2\pi n'' T} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\gamma} \quad (5.29)$$

donde:

$$T = \frac{u''^2 \cos\gamma - G \text{sen}\gamma}{u''^2} \quad (5.30)$$

Por un procedimiento similar podemos calcular el corrimiento que el paquete bidimensional extraordinario, correspondiente a las ondas 3 y 4, sufre al reflejarse en presencia de reflexión inhibida. Si reemplazamos las ecuaciones (5.23) y (5.24) en la (5.20) y realizamos aproximaciones análogas a las utilizadas para el paquete anterior -ver ecuaciones (4.36) y (4.37)-, obtenemos que la posición del primer máximo de interferencia sobre la interfaz para este segundo paquete bidimensional reflejado es

$$\eta = -\frac{W}{u''^2} \zeta - \frac{\lambda_0}{2\pi n'' \text{sen}\gamma} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\delta} \quad (5.31)$$

donde W está dado por la ecuación (4.38). Como podemos observar en esta última expresión, y a diferencia de lo que sucede para el caso ordinario, las

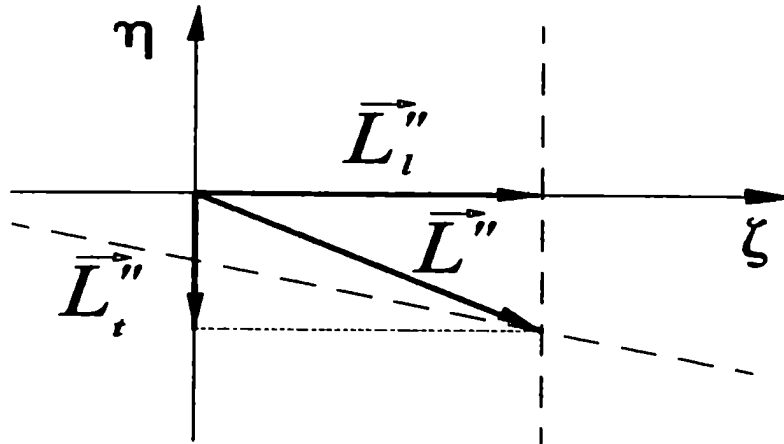


Figura 5.5: Vector corrimiento de un haz reflejado extraordinario en presencia de reflexión inhibida

franjas de interferencia no son ni perpendiculares ni paralelas al plano de incidencia para este segundo paquete bidimensional.

Sabemos que el haz tridimensional reflejado emergerá en el punto de la interfaz donde intersecan las rectas correspondientes a los primeros máximos de interferencia de ambos paquetes. Si reemplazamos la ecuación (5.29) en la (5.31), obtenemos que la intersección se produce en

$$\eta = -\frac{\lambda_0}{2\pi n''} \left[\frac{W}{u''^2 T} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\gamma} + \frac{1}{\text{sen}\gamma} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\delta} \right] \quad (5.32)$$

y ζ dado por la ecuación (5.29). Es decir, el vector corrimiento correspondiente a un paquete tridimensional (figura 5.5), resulta

$$\vec{L}'' = -\frac{\lambda_0}{2\pi n''} \left[\frac{1}{T} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\gamma} \zeta + \left(\frac{W}{u''^2 T} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\gamma} + \frac{1}{\text{sen}\gamma} \frac{\Delta\Phi_e''}{\Delta\delta} \right) \eta \right] \quad (5.33)$$

La expresión dada por la ecuación (5.33) puede simplificarse notablemente si consideramos lo que representan W , G y T . En la ecuación (4.38) W fue

definida como

$$\frac{W}{u''} = \frac{\Delta u''}{\Delta \delta}.$$

Por otra parte, en la ecuación (4.24) G fue definido a partir de

$$\frac{G}{u''} = \frac{\Delta u''}{\Delta \gamma}$$

y en consecuencia la expresión de T dada en la ecuación (5.30) es:

$$T = u'' \frac{\Delta(\text{sen}\gamma/u'')}{\Delta \gamma}.$$

Podemos escribir entonces el vector corrimiento para el paquete extraordinario reflejado en condiciones de reflexión inhibida de la siguiente manera

$$\vec{L}'' = -\frac{\lambda_o}{2\pi n''} \left[\frac{1}{T} \frac{\Delta \Phi_e''}{\Delta \gamma} \zeta + \frac{2}{\text{sen}\gamma} \frac{\Delta \Phi_e''}{\Delta \delta} \eta \right] \quad (5.34)$$

Es interesante notar que el factor T presente en la ecuación (5.34) tiende al $\cos\gamma$ cuando se considera constante la velocidad de fase de la onda reflejada (característica de las ondas ordinarias pero no de las extraordinarias).

5.3 Corrimiento longitudinal y transversal del haz refractado

Como vimos en el Capítulo 3, en presencia de reflexión inhibida no sólo la fase de la onda reflejada que subsiste sino también la fase de la onda refractada varía con la dirección de incidencia. Esperamos entonces que, bajo estas condiciones, el haz transmitido también sufra un corrimiento. El método de Artmann, aplicado a la refracción, consistirá fundamentalmente en considerar que el haz refractado emergerá en el punto de la interfaz donde se encuentre

el primer máximo de interferencia entre las ondas refractadas que forman el paquete, tomando como origen de coordenadas el punto en el cual las ondas incidentes interfieren constructivamente. Mostramos en el Capítulo 3 que, cuando el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite de reflexión inhibida, la polarización de las ondas refractadas es elíptica, situación que no está contemplado en el método de Artmann clásico, ya que en éste sólo se considera polarización p o s . Por esta razón será necesario comenzar el estudio del corrimiento del haz transmitido calculando la posición donde se produce el primer máximo de interferencia entre dos ondas refractadas -elípticamente polarizadas- que se propagan en direcciones arbitrarias, para poder luego aplicar los resultados obtenidos a los casos particulares que constituyen la refracción de los dos paquetes incidentes bidimensionales estudiados en la sección 4.3. Podremos así evaluar el corrimiento sufrido por un haz tridimensional transmitido, tanto para haces incidentes ordinarios como extraordinarios, generalizando el método de Artmann no sólo para haces tridimensionales (como en 5.1) , sino también para cualquier tipo de polarización.

Consideramos dos ondas refractadas elípticamente polarizadas (como son, por ejemplo, las ondas refractadas en presencia de reflexión inhibida) que se propagan por un medio isótropo y que provienen de la refracción de dos ondas que inciden sobre una interfaz con direcciones muy próximas entre sí pero con orientaciones relativas arbitrarias. Llamamos a estas ondas refractadas ondas 5 y 6. Debido a que están elípticamente polarizadas, podemos considerar las componentes de los campos en las direcciones del eje mayor a y menor b de la elipse de polarización. De esta manera, los campos eléctricos

correspondientes pueden ser escritos, si no tenemos en cuenta su variación temporal, de la siguiente manera

$$\vec{E}_5 = E_{a5}\check{a}_5 + E_{b5}\check{b}_5 \quad (5.35)$$

$$\vec{E}_6 = E_{a6}\check{a}_6 + E_{b6}\check{b}_6 \quad (5.36)$$

donde:

$$E_{a5} = a_5 e^{i\phi_{a5}} e^{i\vec{k}_5 \cdot \vec{r}} \quad (5.37)$$

$$E_{b5} = b_5 e^{i\phi_{b5}} e^{i\vec{k}_5 \cdot \vec{r}} \quad (5.38)$$

$$E_{a6} = a_6 e^{i\phi_{a6}} e^{i\vec{k}_6 \cdot \vec{r}} \quad (5.39)$$

$$E_{b6} = b_6 e^{i\phi_{b6}} e^{i\vec{k}_6 \cdot \vec{r}} \quad (5.40)$$

ya que a_j y b_j son las amplitudes en las direcciones del eje mayor y menor de la elipse de polarización de cada onda, y ϕ_{a_j} y ϕ_{b_j} las fases correspondientes que están relacionadas por

$$\phi_{b_j} = \phi_{a_j} - \frac{\pi}{2} \quad (5.41)$$

Como es habitual, la intensidad que resulta de la superposición de ambas ondas puede ser escrita como la suma de dos términos, $I_T = I_0 + I_{int}$, donde el primer término es el resultado de sumar las intensidades de las ondas transmitidas, mientras que el segundo es un término de interferencia, es decir

$$\begin{aligned} I_T = & [E_{a5}E_{a5}^* + E_{b5}E_{b5}^* + E_{a6}E_{a6}^* + E_{b6}E_{b6}^*] + \\ & + [(E_{a6}E_{a5}^* + E_{a5}E_{a6}^*)(\check{a}_5 \cdot \check{a}_6) + (E_{b6}E_{b5}^* + E_{b5}E_{b6}^*)(\check{b}_5 \cdot \check{b}_6) + \\ & + (E_{b6}E_{a5}^* + E_{a5}E_{b6}^*)(\check{a}_5 \cdot \check{b}_6) + (E_{b5}E_{a6}^* + E_{a6}E_{b5}^*)(\check{a}_6 \cdot \check{b}_5)] \quad (5.42) \end{aligned}$$

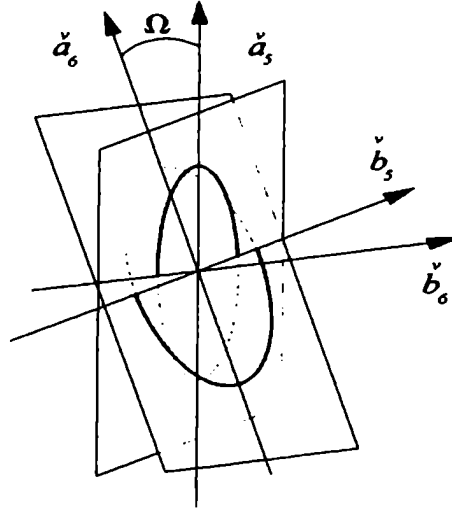


Figura 5.6: *Elipses de polarización para las ondas transmitidas 5 y 6. El ángulo Ω es el comprendido entre los ejes principales de ambas elipses*

Como el ángulo comprendido entre las dos ondas incidentes es muy pequeño podemos suponer que ambas elipses están contenidas en un mismo plano, obteniendo los siguientes resultados para los productos escalares entre los versores:

$$\check{a}_5 \cdot \check{a}_6 = \cos \Omega \simeq \check{b}_5 \cdot \check{b}_6 \quad (5.43)$$

$$\check{a}_5 \cdot \check{b}_6 \simeq \sin \Omega \simeq -\check{a}_6 \cdot \check{b}_5 \quad (5.44)$$

donde Ω es el ángulo comprendido entre los ejes mayores de las elipses 5 y 6 (ver figura 5.6). Reemplazando las ecuaciones (5.37)-(5.40), (5.43) y (5.44) en la (5.42), el término de interferencia que resulta de la superposición de las dos ondas transmitidas puede escribirse

$$\begin{aligned} I_{int} = & 2(a_5 a_6 + b_5 b_6) \cos \Omega \cos[(\vec{k}_6 - \vec{k}_5) \vec{r} + (\phi_{a6} - \phi_{a5})] - \\ & - 2(b_5 a_6 + b_6 a_5) \sin \Omega \sin[(\vec{k}_6 - \vec{k}_5) \vec{r} + (\phi_{a6} - \phi_{a5})] \quad (5.45) \end{aligned}$$

Si consideramos materiales transparentes en el rango óptico, y que el ángulo comprendido entre las normales a los frentes de onda de las dos ondas incidentes es pequeño, también Ω resulta pequeño. Es posible, entonces, hacer la aproximación: $\cos\Omega \simeq 1$ y $\sin\Omega \simeq 0$, obteniendo que sólo uno de los términos de interferencia de la ecuación (5.45) resulta relevante

$$I_{int} = 2(a_5 a_6 + b_5 b_6) \cos[(\vec{k}_6 - \vec{k}_5) \cdot \vec{r} + (\phi_{a6} - \phi_{a5})], \quad (5.46)$$

de modo que el primer máximo de interferencia entre las ondas refractadas tendrá lugar cuando

$$(\vec{k}_6 - \vec{k}_5) \cdot \vec{r} = -(\phi_{a6} - \phi_{a5}) \quad (5.47)$$

Es decir que, dentro del rango de validez de nuestras aproximaciones, el primer máximo de interferencia para dos ondas elípticamente polarizadas -como son las refractadas en condiciones de reflexión inhibida- tiene lugar en las posiciones donde la diferencia de camino óptico es directamente proporcional a la diferencia de fase de la componente del campo en la dirección del eje mayor o menor de la elipse de polarización.

5.3.1 Haz incidente ordinario

Como propusimos en el capítulo anterior construiremos un haz tridimensional ordinario a partir de dos haces bidimensionales. Analizaremos en primer lugar la interferencia producida entre las ondas refractadas que provienen de las ondas incidentes ordinarias 1 y 2, es decir, las correspondientes a dos ondas incidentes ordinarias cuyas normales están contenidas en el mismo plano de incidencia. Como hemos visto, la ecuación (5.47) describe la posición

del primer máximo de interferencia entre dos ondas refractadas cualesquiera en condiciones de reflexión inhibida. Si escribimos (5.47) para las ondas transmitidas que provienen de las ondas ordinarias 1 y 2, usando como sistema de referencia el sistema (x, ζ, η) definido en la figura 4.6, obtenemos

$$\frac{2\pi n}{\lambda_0} \zeta (\text{sen}\beta_2 - \text{sen}\beta_1) = -(\phi_{a2}^o - \phi_{a1}^o) \quad (5.48)$$

donde β_j es el ángulo de refracción de cada onda y ϕ_{aj}^o el respectivo desfase que sufre en la refracción la componente del campo en la dirección del eje mayor de la elipse de polarización. En (5.48) el supraíndice o indica que las ondas que forman el haz son ordinarias, y n es el índice de refracción del medio isótropo. Como las normales de ambas ondas están contenidas en el mismo plano de incidencia determinado por el ángulo δ (ver figura 4.5 a), la variación de ϕ_a^o corresponderá únicamente a la variación de β y podemos escribir

$$\frac{2\pi n}{\lambda_0} \zeta \Delta(\text{sen}\beta) = -\Delta\phi_a^o \quad (5.49)$$

La ecuación (5.49) es la ecuación de una recta que corresponde a la posición de la primera franja de interferencia sobre la interfaz. El corrimiento longitudinal resulta entonces

$$\zeta = -\frac{\lambda_0}{2\pi n \cos\beta} \frac{\Delta\phi_a^o}{\Delta\beta} \quad (5.50)$$

Si analizamos ahora la interferencia producida por las ondas refractadas que provienen de las ondas 3 y 4, obtenemos que la posición del primer máximo de interferencia sobre la interfaz está descrita por la siguiente ecuación:

$$\frac{2\pi n}{\lambda_0} \text{sen}\beta \Delta\delta \eta = -\Delta\phi_a^o \quad (5.51)$$

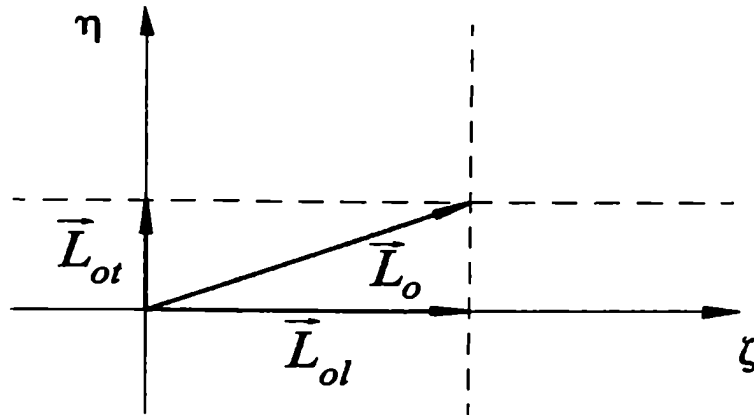


Figura 5.7: Vector corrimiento para el rayo refractado. El paquete incidente es ordinario. El plano $\zeta\eta$ corresponde a la interfaz.

y en consecuencia

$$\eta = - \frac{\lambda_0}{2\pi n \operatorname{sen}\beta} \frac{\Delta\phi_a^o}{\Delta\delta} \quad (5.52)$$

es decir que la interferencia de las ondas refractadas 3 y 4 produce sobre la interfaz un sistema de franjas paralelas al plano de incidencia. La primera de las franjas es la recta dada por la ecuación (5.52). En consecuencia, si el haz incidente es tridimensional (formado por las ondas 1, 2, 3 y 4), al refractarse aparecerá en el punto de la interfaz que corresponde a la intersección de las rectas dadas por las ecuaciones (5.50) y (5.52). El vector corrimiento \vec{L}_o resulta entonces

$$\vec{L}_o = \frac{-\lambda_0}{2\pi n} \left[\frac{1}{\cos\beta} \frac{\Delta\phi_a^o}{\Delta\beta} \check{\zeta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \frac{\Delta\phi_a^o}{\Delta\delta} \check{\eta} \right] \quad (5.53)$$

El primer término de (5.53) tiene en cuenta la asimetría del desfase respecto

del ángulo medio de incidencia y refracción. El segundo término, que tampoco tiene análogo en interfaces isótropas, se debe no sólo a la asimetría que introduce el eje óptico en el medio desde el cual incide la luz, sino también a la existencia de una onda evanescente en la reflexión.

5.3.2 Paquete incidente extraordinario

Realizamos para este nuevo tipo de paquete de ondas un análisis similar al anterior. Al calcular la posición de la primera franja de interferencia máxima correspondiente a las ondas refractadas que provienen de las ondas incidentes extraordinarias 1 y 2, obtenemos nuevamente la ecuación de una recta paralela al eje η , que corresponde al corrimiento longitudinal

$$\zeta = -\frac{\Delta\phi_a^e}{\Delta\beta} \frac{\lambda_0}{2\pi n \cos\beta} \quad (5.54)$$

Sin embargo, al analizar la interferencia producida por las ondas que provienen de las ondas incidentes extraordinarias 3 y 4 (contenidas en planos de incidencia diferentes) aparecen diferencias significativas respecto a lo que ocurre cuando el haz incidente es ordinario. Aunque las ondas 3 y 4 incidan con el mismo ángulo γ respecto a la normal a la interfaz, el ángulo de refracción β para ambas ondas será diferente, ya que la velocidad de propagación de las ondas incidentes depende no sólo del ángulo de incidencia, sino también del plano de incidencia -definido por el ángulo δ - en el que están contenidas. A partir de la ley de Snell

$$\frac{\text{sen}\gamma}{u''} = \frac{\text{sen}\beta}{u} \quad (5.55)$$

y teniendo en cuenta (1.36) encontramos la variación en β que corresponderá a una pequeña variación en δ (suponiendo γ constante) de modo que podemos

escribir

$$\Delta\beta = Q \Delta\delta \quad (5.56)$$

donde hemos definido:

$$Q = \frac{(u_o^2 - u_e^2)}{u''^2} \frac{\text{sen}\beta \text{sen}\delta}{\text{sen}\gamma \text{cos}\beta} (\check{N}_e \cdot \check{z}_3) (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \quad (5.57)$$

A partir de la ecuación (5.47), podemos calcular la posición de la primera franja de interferencia constructiva para estas ondas sobre la interfaz

$$\frac{2\pi n}{\lambda_0} [-\Delta\beta \text{cos}\beta \zeta + \Delta\delta \text{sen}\beta \eta] = -\Delta\phi_a^e \quad (5.58)$$

escribiendo $\Delta\beta$ en función de $\Delta\delta$ -a partir de la ecuación (5.56)- y despejando η se obtiene

$$\eta = \frac{\lambda_0}{2\pi n \text{sen}\beta} \frac{\Delta\phi_a^e}{\Delta\delta} + \zeta \frac{1}{\text{tg}\beta} \frac{\Delta\beta}{\Delta\delta} \quad (5.59)$$

A diferencia de lo que ocurre para un haz incidente ordinario, las franjas de interferencia constructiva de este paquete de ondas refractadas no son ni perpendiculares ni paralelas al plano de incidencia. El punto de intersección entre las rectas, que corresponden al primer máximo de interferencia sobre la interfaz de ambos paquetes, indica la posición de la interfaz donde aparecerá el rayo refractado. A partir de las ecuaciones (5.54) y (5.59) podemos calcular la expresión del vector corrimiento (figura 5.8) que resulta

$$\vec{L}_e = \frac{-\lambda_0}{2\pi n} \left[\frac{1}{\text{cos}\beta} \frac{\Delta\phi_a^e}{\Delta\beta} \check{\zeta} + \frac{2}{\text{sen}\beta} \frac{\Delta\phi_a^e}{\Delta\delta} \check{\eta} \right] \quad (5.60)$$

El primer término de la expresión del vector corrimiento para el haz refractado que proviene de un haz tridimensional extraordinario es análogo al primer término del correspondiente a un haz refractado que proviene de uno ordinario.

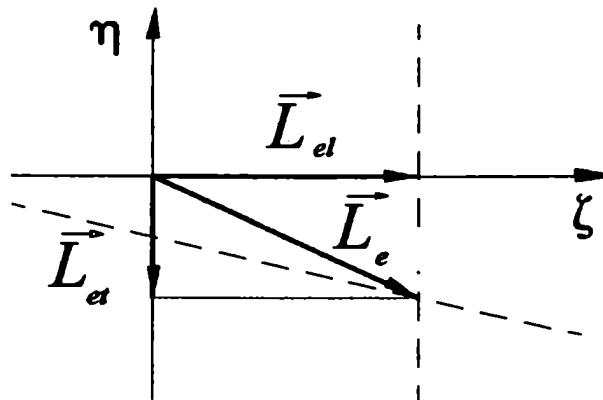


Figura 5.8: Vector corrimiento lateral del rayo refractado. El haz incidente es extraordinario. El plano $\zeta\eta$ corresponde a la interfaz.

5.4 Análisis de los corrimientos

En las secciones anteriores mostramos que, en presencia de reflexión inhibida, tanto la onda reflejada propagante como la transmitida sufren un corrimiento lateral que no está contenido en el plano de incidencia. Estos corrimientos laterales de los haces tridimensionales reflejado y refractado, son calculados a partir del análisis del patrón de interferencia de dos haces bidimensionales. El lugar geométrico correspondiente al primer máximo de interferencia de las ondas reflejadas y refractadas, que provienen del paquete incidente bidimensional formado por las ondas 1 y 2 (cuyas normales se encuentran contenidas en un mismo plano de incidencia), permite calcular los corrimientos longitudinales de los haces reflejado y refractado. Por otra parte, el análisis de la interferencia producida entre las ondas refractadas que provienen de un paquete bidimensional formado por las ondas 3 y 4 (cuyas normales están

contenidas en distintos planos de incidencia pero que inciden con el mismo ángulo respecto a la normal a la interfaz), da cuenta de sus corrimientos transversales (figura 4.8).

Cuando el haz incidente es ordinario, las expresiones de los corrimientos laterales sufridos por los haces reflejado y transmitido están dados por las ecuaciones (5.18) y (5.53), mientras que las ecuaciones (5.34) y (5.60) corresponden a un paquete incidente extraordinario. Aunque las ondas refractadas están elípticamente polarizadas y las reflejadas tienen polarización lineal, puede observarse un cierto paralelismo formal que existe entre las ecuaciones. El corrimiento longitudinal depende de la variación de la fase de la onda media reflejada o refractada con el ángulo de incidencia o refracción; mientras que el corrimiento transversal depende de la variación de la fase de la onda media reflejada o refractada con δ (ángulo comprendido entre el plano perpendicular a la interfaz que contiene a la dirección media de las ondas reflejadas o refractadas y el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico).

Si comparamos las expresiones clásicas de Artmann para el corrimiento lateral en interfaces isótropas, con las componentes longitudinales de los vectores corrimiento en presencia de reflexión inhibida (obtenidas con la generalización al método de Artmann), vemos que la mayor semejanza, como era de esperar, se encuentra en la reflexión de un haz ordinario. En este caso el ángulo de incidencia y el de reflexión de la normal media son iguales mientras que, tanto el ángulo de reflexión como el de refracción son diferentes al ángulo de incidencia en las otras tres situaciones. Puede observarse también en las ecuaciones (5.34) y (5.60) que -en la componente perpendicular del

vector corrimiento del haz extraordinario- existe un factor 2 responsable de que las franjas de interferencia del haz bidimensional reflejado y refractado que provienen de las ondas incidentes 3 y 4, no sean perpendiculares a las que provienen de las ondas 1 y 2 (figuras 5.5 y 5.8). Esto se debe a que, cuando la onda incidente es extraordinaria, tanto el ángulo de reflexión extraordinario γ'' como el ángulo de refracción β dependen no sólo del ángulo de incidencia γ sino también del plano de incidencia que contiene a la normal media (dado por el ángulo δ).

En las figuras 5.9 y 5.10 se grafican las componentes longitudinales y transversales de los vectores corrimiento en función del ángulo γ (ángulo medio de incidencia) para los haces reflejado propagante y refractado en condiciones de reflexión inhibida, cuando el haz incidente es ordinario o extraordinario respectivamente. Los mayores corrimientos laterales se obtienen para ángulos de incidencia próximos al ángulo límite. Cuando el ángulo de incidencia difiere un grado del ángulo de reflexión inhibida, los corrimientos longitudinales son del orden de una longitud de onda y los transversales un orden de magnitud menor. Los corrimientos laterales decrecen rápidamente cuando el ángulo de incidencia media se aleja unos pocos grados del ángulo de reflexión inhibida, se anulan (aunque nunca simultáneamente ambas componentes) para un cierto ángulo de incidencia, y luego vuelven a crecer. Observamos también que ambas componentes del vector corrimiento pueden tomar valores positivos o negativos dependiendo de las condiciones de incidencia. Este comportamiento puede compararse con lo que ocurre en interfaces en las que están presentes medios isótropos absorbentes teniendo en

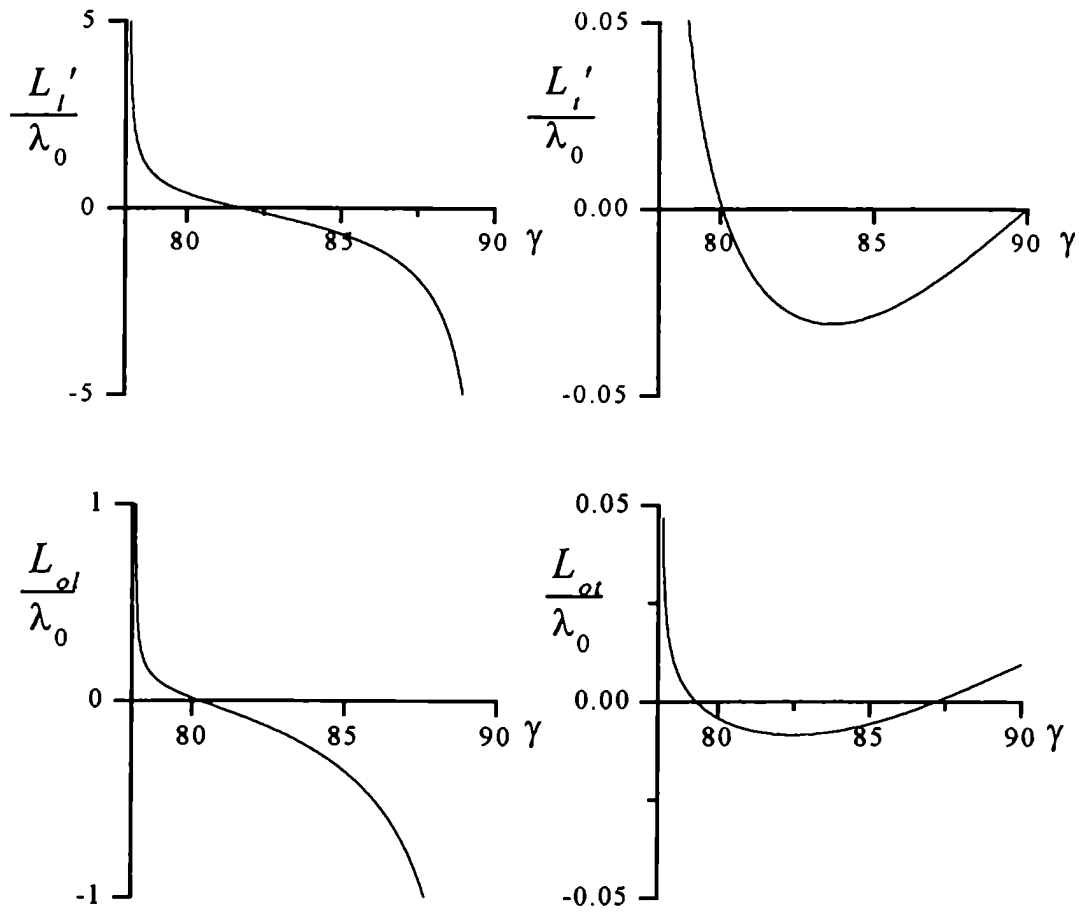


Figura 5.9: Componentes longitudinal y transversal del vector corrimiento del: a) haz reflejado; b) haz transmitido. El haz incidente es ordinario. $n = 1,70$; $n_o = 1,66$; $n_e = 1,49$; $\theta = 5^\circ$; $\delta = 25^\circ$. El ángulo límite de reflexión inhibida es $78,2^\circ$.

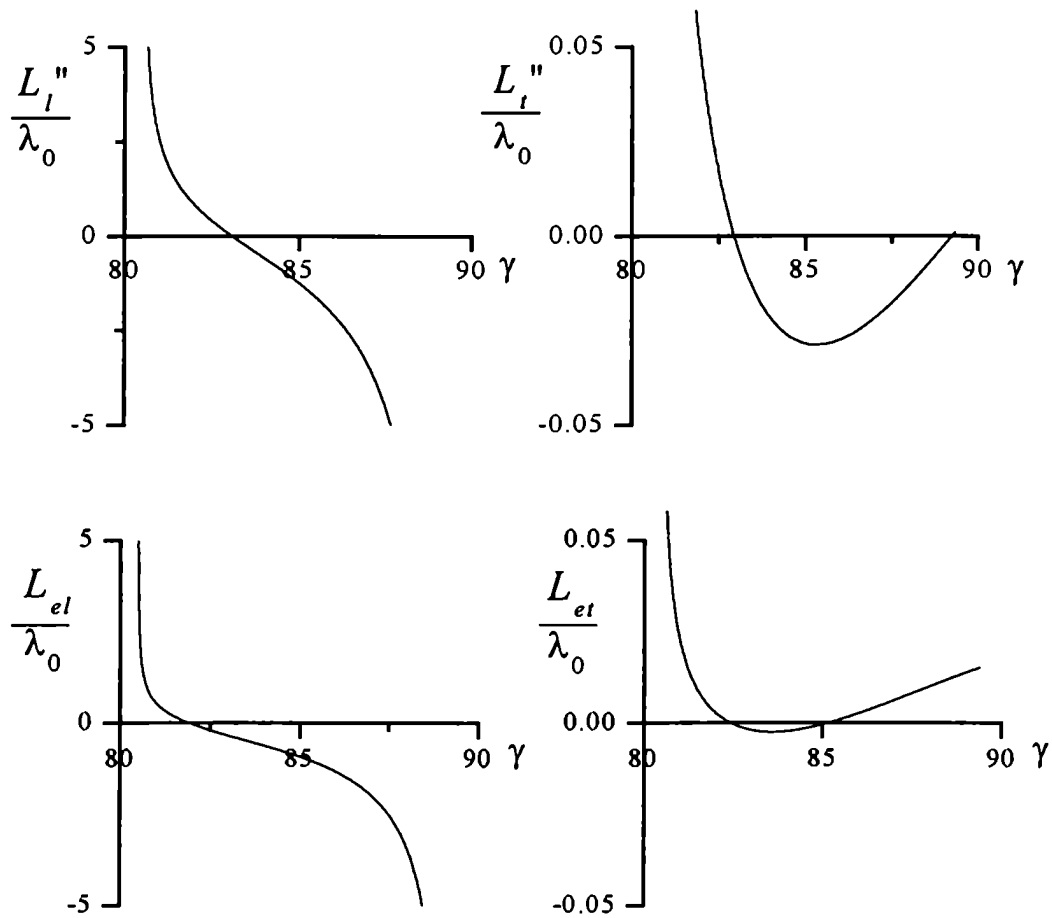


Figura 5.10: Componentes longitudinal y transversal del vector corrimiento del: a) haz reflejado; b) haz transmitido. El haz incidente es extraordinario. $n = 1,70$; $n_o = 1,55$; $n_e = 1,65$; $\theta = 5^\circ$; $\delta = 25^\circ$. El ángulo límite de reflexión inhibida es $80,5^\circ$.

cuenta que, en condiciones de reflexión inhibida, se puede atribuir al cristal un índice de reflexión y una velocidad de fase complejos, como hemos visto en el Capítulo 2.

Cuando se consideran interfaces isótropas no absorbentes la superficie virtual de reflexión se encuentra siempre por debajo de la interfaz ya que los corrimientos para haces incidentes con polarizaciones p y s son siempre positivos. En consecuencia, cuando el haz incidente está polarizado, pero no en un modo propio, el reflejado -que está elípticamente polarizado- sufrirá un desplazamiento positivo que será resultado de la contribución positiva de ambos modos de polarización [54], [55]. En cambio, cuando el segundo medio es un medio absorbente el desplazamiento para la polarización p es negativo, mientras que para la polarización s es positivo [56]. Es decir que, dependiendo de la polarización del haz, éste parece reflejarse sobre una superficie virtual que está por encima o por debajo de la interfaz. En consecuencia, si el haz que incide sobre la superficie absorbente está polarizado, pero no en un modo propio, el reflejado puede tener un desplazamiento positivo o negativo dependiendo de las contribuciones relativas de ambas polarizaciones.

Excepto en condiciones de alta simetría en las que los modos están separados (y en los que no existe reflexión inhibida), los modos propios de los cristales pueden ser considerados como combinación lineal de los modos p y s de manera que, en condiciones de reflexión inhibida en las que puede atribuirse al cristal un índice complejo, siempre habrá contribución de ambos modos de polarización, tanto en la onda reflejada como en la onda refractada. Además, como la contribución de cada modo dependerá de la dirección de incidencia (determinada por los ángulos γ y δ) y de las características de la

interfaz, los corrimientos serán positivos o negativos dependiendo de estos parámetros.

Como hemos visto, en este capítulo se generalizó el método de Artmann para el cálculo analítico de los corrimientos laterales, estableciéndose un método general y sencillo que permite calcular los corrimientos longitudinales y transversales no sólo para interfaces isótropas con polarización arbitraria de los haces, sino también para interfaces que involucren medios anisótropos. Se lo aplicó al estudio de los corrimientos sufridos en condiciones de reflexión inhibida mostrando que, en estas condiciones, existen corrimientos laterales tanto en el haz reflejado que subsiste, como en el haz transmitido. Estos corrimientos son pequeños: las componentes longitudinales son del orden de la longitud de onda para ángulos cercanos al límite de reflexión inhibida, y mucho menores que el ancho de los paquetes considerados. Los corrimientos transversales son todavía un orden de magnitud menor.

El corrimiento del haz transmitido es un fenómeno nuevo, ya que efectos no geométricos de este tipo sólo eran conocidos con anterioridad a esta Tesis en los haces reflejados: el corrimiento del haz transmitido es una consecuencia directa de la reflexión inhibida. Debido a la anisotropía del medio birrefringente, y a diferencia de los que ocurre con los corrimientos asociados a la reflexión total de haces polarizados en sus modos propios en interfaces isótropas, estos corrimientos no se encuentran contenidos en el plano de incidencia sino que tienen una componente paralela y otra perpendicular a él.

Conclusiones y prospectiva

El análisis realizado a lo largo de esta Tesis reafirma que el comportamiento - ampliamente conocido- de las ondas electromagnéticas en medios isótropos no puede trasladarse a los medios birrefringentes de manera directa. Por esta razón, se hace necesaria la realización de un estudio detenido de sus peculiares propiedades ópticas, entre ellas la reflexión inhibida.

Los resultados que habían sido obtenidos cuando todas las ondas eran propagantes, para la reflexión y refracción en interfaces formadas por un cristal uniaxial y un medio isótropo dieléctricos, se generalizaron para determinar las características de las ondas en reflexión inhibida. Aunque en estas condiciones la onda reflejada que subsiste y la transmitida son propagantes, hemos mostrado que la onda que corresponde al rayo reflejado que desaparece es una onda evanescente. La normal al frente de onda que corresponde a la onda evanescente ordinaria se encuentra contenida en la interfaz, como sucede cuando los medios son isótropos. En cambio, cuando la onda reflejada evanescente es la extraordinaria, la normal al frente de onda no es paralela a la interfaz, y el ángulo comprendido entre ellas es independiente del ángulo de incidencia. Mostramos además, que las ondas evanescentes reflejadas tienen polarización elíptica y que no son ondas transversales, es decir, que el plano que contiene a la elipse de polarización no es perpendicular a la di-

rección de la normal al frente de onda asociado. Pero el medio birrefringente también impone otras restricciones a las direcciones de los campos asociados a las ondas evanescentes. En efecto, cuando la onda reflejada evanescente es la ordinaria, el vector campo eléctrico asociado a ella no tiene componente en la dirección del eje óptico, y lo mismo sucede con el vector campo magnético asociado a la onda evanescente extraordinaria. Se mantiene así, en las ondas evanescentes, la correspondencia que existe cuando las ondas son propagantes, entre las orientaciones de los campos y la dirección del eje óptico. Obtuvimos también, como era de esperar, que la amplitud de la onda evanescente, tanto ordinaria como extraordinaria, sufre una atenuación a medida que se aleja de la interfaz. Sin embargo, en condiciones de reflexión inhibida, el comportamiento del vector de Poynting difiere notablemente del correspondiente a ondas evanescentes en interfaces isótropas: el promedio temporal del vector de Poynting de las ondas evanescentes no está contenido en el plano de incidencia y su dirección varía con el ángulo de incidencia. Esto sucede incluso cuando la onda reflejada evanescente es la ordinaria.

Por otra parte, aunque la onda reflejada que se propaga en el cristal está siempre linealmente polarizada, en condiciones de reflexión inhibida sufre un salto de fase; y la onda transmitida, además de sufrir un salto de fase, cambia su polarización de lineal a elíptica cuando se refracta bajo estas condiciones. Como la diferencia de fase entre la onda reflejada/refractada y la onda incidente depende de la dirección de incidencia, las ondas reflejadas y refractadas sufren un corrimiento que sólo puede ser estudiado considerando haces limitados en el espacio.

La relación hallada entre el lugar geométrico de los primeros máximos de

interferencia de las ondas que componen un haz bidimensional, la normal al frente de onda media, y la dirección del flujo de energía, permite establecer un prometedor camino para el estudio de la propagación de haces de luz. En efecto, hemos mostrado que, para haces simétricos bidimensionales en medios birrefringentes uniaxiales, tanto ordinarios como extraordinarios, la posición del primer máximo de interferencia coincide con la proyección del rayo -asociado a la normal media del haz- sobre el plano que determinan las normales de las ondas que componen el paquete bidimensional. Además, dentro de la aproximación paraxial, la posición del primer máximo de interferencia entre las ondas no depende de su proximidad a la normal media; de modo que es posible considerar paquetes compuestos sólo por dos ondas sin perder generalidad en la información que el patrón de interferencia aporta sobre la dirección del flujo de energía. Hemos encontrado, también, una manera sencilla de construir paquetes tridimensionales a partir de dos paquetes bidimensionales; ambos paquetes deben compartir la misma normal media, pero no es necesario que tengan los ejes de simetría perpendiculares entre sí. De esta manera, es posible conocer la dirección del flujo de energía correspondiente a un paquete tridimensional a partir del análisis del patrón de interferencia de dos paquetes bidimensionales cualesquiera. Estos resultados nos permitieron generalizar el método de Artmann para haces limitados en dos direcciones, y hacerlo también apto para ser utilizado en interfaces en las que esté presente algún medio anisótropo. En particular lo aplicamos al estudio de la reflexión y refracción de un haz limitado en dos direcciones que incide sobre una interfaz formada por un cristal uniaxial y un medio isótropo en presencia de reflexión inhibida. Hemos visto que, en estas circunstancias,

tanto el haz reflejado que no se inhibe (que está linealmente polarizado) como el haz refractado (que está elípticamente polarizado) sufren un corrimiento lateral que no se encuentra contenido en el plano de incidencia, y hallamos las expresiones a primer orden de las componentes longitudinales y transversales de estos corrimientos. Mostramos que el corrimiento longitudinal es proporcional a la variación de la fase de la onda media reflejada o refractada con el ángulo de incidencia, mientras que el corrimiento transversal es proporcional a la variación de la fase de la onda media reflejada o refractada con el ángulo comprendido entre el plano de incidencia y el plano perpendicular a la interfaz que contiene al eje óptico.

El análisis realizado, y la metodología propuesta, abren un camino para el estudio del comportamiento de haces finitos bi y tridimensionales simétricos y no simétricos en sistemas que involucren medios isótropos y anisótropos con y sin actividad óptica (absorbentes y no absorbentes) de utilidad en el diseño de instrumentos o sistemas en los cuales se debe analizar qué tipo de tratamiento (escalar o vectorial) es el más adecuado. Se está así en condiciones de considerar geometrías sin simetría y de proceder al estudio de otros efectos no-geométricos presentes (corrimientos angulares y focales, modificación del ancho del haz, deformaciones, modificación de la polarización y de la amplitud, etc); así como de constituir el fundamento analítico que es necesario para un posterior estudio de cavidades resonantes birrefringentes.

Bibliografía

- [1] Sommerfeld, A.: "Optics Lectures on Theoretical Physics", Vol.IV, 1952, Academic Press, New York.
- [2] Ramachandran, G.N., and Ramaseshan, S.: "Crystal Optics", *Handbuch der Physik*, eds. Flügge, H., 1961, Springer-Verlag, Berlin XXV/I.
- [3] Born, M. and Wolf, E.: "Principles of Optics" , 1975, Pergamon Press, Oxford.
- [4] Azzam, R.M.A. and Bashara, N.M.: "Ellipsometry and Polarized Light", 1988, North-Holland.
- [5] Yeh, P.: "Optical waves in layered media", 1988, Wiley, New York.
- [6] Berreman, D.W: Optics in stratified and anisotropic media: 4x4-Matrix formulation, *J. Opt. Soc. Am.*, 1971, vol. 62, 502-510.
- [7] Stannes, J.J ; Sherman, G.C.: Reflection and refraction of an arbitrary wave at a planar interface separating two uniaxial crystals. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, vol. 67, 683-695.

- [8] Presa, V.A ; Simon, J.M.: Reflection and transmission coefficients of multilayers on an uniaxial substrate *Optik*, 1995. vol. 98, 181-185.
- [9] Abdulhalim,I.: Exact 2x2 matrix method for the transmission and reflection at the interface between two arbitrary oriented biaxial crystals *Pure Appl. Opt.*, 1999, vol. 1, 655-661.
- [10] Simon,M.C. : Ray tracing formulas for monoaxial optical components. *Appl. Opt.*, 1983, vol. 22, no. 2, 354-360.
- [11] Simon,M.C ; Echarri,R.M : Ray tracing formulas for monoaxial optical components: Vectorial Formulation *Appl. Opt.*, 1986, vol. 25, 1935-1939.
- [12] Perez, L.I.: "Reflexión y refracción en cristales birrefringentes monoaxiales", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1991.
- [13] Echarri, R.M.: "Estudio electromagnético de la reflexión en superficies de discontinuidad en cristales", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1990.
- [14] Simon, M.C ; Echarri, R.M.: Internal reflection in uniaxial crystals I. Geometrical description. *Jour. Mod. Opt.*, 1990, vol.37, no. 1, 121-129.
- [15] Simon, M.C ; Echarri, R.M.: Internal total reflection in monoaxial crystals. *Appl. Opt.*, 1987, vol. 26, no. 18, 3878-3883.
- [16] Simon, M.C ; Echarri, R.M: Internal reflection in uniaxial crystals II: Coefficients of transmission and reflection for an ordinary incident wave. *Jour. Mod. Opt.*, 1990, vol.37, no. 1, 131-144.

- [17] Simon, M.C ; Echarri, R.M.: Internal reflection in uniaxial crystals III: Coefficients of transmission and reflection for an extraordinary incident wave. *Jour. Mod. Opt.*, 1990, vol.37, no. 6, 1139-1148.
- [18] Simon, M.C ; Echarri, R.M.: Inhibited reflection in uniaxial crystals. *Opt. Lett.*, 1989, vol.14, no.5, 257-259.
- [19] Perez, L.I. ; Simon, M.C. ; Vanney, C.E.: Evanescent waves associated to internal reflection in uniaxial crystals. *Proc. SPIE*, 1996, vol. 2730, 183-186.
- [20] Simon, M.C. ; Simon, J.M. ; Perez, L.I. ; Vanney,C.E.: Elliptic Polarization of Refracted Wave in prescence of Inhibited Reflection. *Jour. Mod. Opt.*, 1998, vol.45, no. 1, 35-43.
- [21] Vanney, C.E ; Simon, M.C.: Analysis of the Polarization of Waves under Inhibited Reflection Condition: Extraordinary Incidence. *Proc. SPIE*, 2001, vol. 4419, 458-461.
- [22] Vanney, C.E. ; Simon, M.C. ; Perez, L.I.: Diffraction of three-dimensional beams in uniaxial media. *The European Physical Journal D*. Aceptado.
- [23] Vanney, C.E.: Displacement of the Refracted Wave in Presence of Inhibited Reflection. *Jour. Mod. Opt.*, 2000, vol. 47, no. 4, 685- 700.
- [24] Vanney, C.E ; Simon, M.C: Propagating and evanescent waves associated with inhibited reflection in uniaxial crystals: extraordinary incidence. *Jour. Mod. Opt.*, 2004, vol. 51, no. 1, 139-152.

- [25] Vanney, C.E ; Perez, L.I: Corrimiento lateral del haz reflejado en presencia de reflexión inhibida en una interfaz cristal uniaxial-medio isótropo. *Cuadernos de Óptica*, Ediciones Previas del Laboratorio de Óptica, FCEN - UBA, Cuaderno no. 89, 2003.
- [26] Vanney, C.E; Perez, L.I: Refraction of a three-dimensional beam in uniaxial crystal-isotropic medium interfaces in presence of inhibited reflection. *Proc. SPIE* (enviado 2004), 5th Ibero-American Meeting on Optics, and 8th Latin-American Meeting on Optics, Laser and Their Applications (V RIAO/VIII OPTILAS).
- [27] Goos, F. ; Hänchen, H.: Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Ann. Phys.*, 1947, 6, folge, Bd. 1, 333-346.
Traducción al castellano en el Apéndice I de: Perez, L.I: "Revisión teórico experimental del efecto Goos Hänchen". Monografía presentada en el Seminario Temas de Óptica; 1986.
- [28] Artmann, K.: Berechnung der Seitversetzung des totalreflektierten. *Ann. Phys.*, 1948, vol. 6, no. 2, 87-102.
- [29] Halevi, P.: Plane electromagnetic waves in material media: Are they transverse waves?. *Am. J. Phys.*, 1980, vol.48, no. 10, 861-867.
- [30] Perez, L.I. ; Simon, M.C.: Uniaxial crystals: Fields for the evanescent waves in total reflexion. *Optik*, 1993, vol. 95, no. 2, 53-58.
- [31] Perez, L.I.: Nonabsorbent uniaxial crystals: Poynting vectors for evanescent waves in total reflection. *Optik*, 1994, vol. 97, no. 4, 142-148.

- [32] Perez, L.I. ; Vanney, C.E.: Non-absorbing isotropic-uniaxial interfaces: refraction in ordinary and extraordinary reflection. *Jour. Mod. Opt.*
Enviado.
- [33] Goodman, J.W.: "Introduction to Fourier Optics", 1968, McGraw-Hill,
New York.
- [34] Perez, L.I. ; Ciocci, F.: Nonspecular first-order effects in Kretschmann's
configuration. *Jour. Mod. Opt.*, 1998, vol. 45, no. 12, 2487-2502.
- [35] Perez, L.I. ; Garea, M.T.: Propagación de haces bi y tridimensionales
en un medio anisótropo uniaxial: Tratamiento escalar. *Cuadernos de
Óptica*, Ediciones Previas del Laboratorio de Óptica, FCEN - UBA,
Cuaderno no. 70, 1999.
- [36] Perez, L.I. ; Garea, M.T.: Propagation of 2D and 3D gaussian beams in
an anisotropic uniaxial medium: vectorial and scalar treatment. *Optik*,
2000, 111, 7, 297-306.
- [37] Barabás, M. ; Szarvas, G.: Fourier description of the propagation and
focusing of an extraordinary beam in a planar uniaxial medium. *Appl.
Opt.*, 1995, vol. 34, no. 1, 11-21.
- [38] Fleck, J.A; Feit, M.D.: Beam propagation in uniaxial anisotropic media.
J. Opt. Soc. Am., 1983, vol. 73, 920-926.
- [39] Newton, I.: "Optiks" (reproduction), 1952, Dover Publication, Inc.,
New York.

- [40] Wolter, H.: Zur genauigkeitssteigerung optischer messungen duren minimumstrahlkennzeichnung. *Z. Naturforschg. 5a*, 1950, vol. 143, 139-143.
- [41] Wolter, H.: Untersuchungen zur strahlversetzung bei totalreflexion des lichtes mit der methode der minimumstrahlkennzeichnung. *Z. Naturforschg. 5a*, 1950, vol. 143, 143-153.
- [42] Horowitz, B. ; Tamir, T.: Lateral displacement of a light beam at dielectric interface. *J. Opt. Soc. Am.*, 1971, vol. 61, no. 5, 586-594.
- [43] Mc Guirk, M. ; Carniglia, C.K.: An angular spectrum representation approach to the Goos-Hänchen shift. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, vo. 67, no.1, 103-107.
- [44] Carniglia, C.K. ; Brownstein, K.R.: Focal shift and ray model for total internal reflection. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, vol.67. no. 1, 121-122.
- [45] White, I.A. ; Snyder, A.W. ; Pask, C.: Directional change of beams undergoing partial reflection. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, vol. 67, no. 5, 703-705.
- [46] Tamir, T.: Non specular phenomena in beam fields reflected by multi-layered media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1983, vol. 3, 558-565.
- [47] Chiu Chan, C. ; Tamir, T.: Beam phenomena at and near critical incidence upon a dielectric interface. *J. Opt. Soc. Am.*, 1987, vol. 4, no. 4, 655-663.

- [48] Porras, M.A.: Nonspecular reflection of general light beams at a dielectric interface. *Optics Commun.*, 1997, vol.135, 369-377.
- [49] Nasalski, W.: Longitudinal and transverse effects of nonspecular reflection. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, vol. 13, no. 1, 172-181.
- [50] Perez, L.I.: Transverse angular shift of linearly polarized beams reflected on isotropic interfaces. *Proc. SPIE*, 2002, vol. 4829, 781-782.
- [51] Renard, R.H.: Total reflection: a new evaluation of the Goos-Hänchen shift. *J. Opt. Soc. Am.*, 1964, vol. 54, no. 10, 1190-1197.
- [52] Yasumoto, K. ; Oishi, J.: A new evaluation of the Goos-Hänchen shift and associated time delay. *J. Appl. Phys.*, 1983, vol. 54, no. 5, 2170.
- [53] Lotsch, H.K.V.: Beam displacement at total reflection: the Goos-Hänchen effect, I. *Optik*, 1970, vol. 32, no. 2, 116-137.
- [54] Lotsch, H.K.V.: Beam displacement at total reflection: the Goos-Hänchen effect, II. *Optik*, 1970, vol. 32, no. 2, 188-204.
- [55] Lotsch, H.K.V.: Beam displacement at total reflection: the Goos-Hänchen effect, III. *Optik*, 1971, vol. 32, no. 4, 299-319.
- [56] Lotsch, H.K.V.: Beam displacement at total reflection: the Goos-Hänchen effect, IV. *Optik*, 1971, vol. 32, no. 6, 553-569.
- [57] Berman, P.R.: Goos-Hänchen shift in negatively refractive media. *Physical Review E*, 2002, vol. 66, 067603.

- [58] Lakhtakia, A.: On planewave remittances and Goos-Hänchen shifts of planar slabs with negative real permittivity and permeability. *Electromagnetics*, 2003, vol. 23, 71-75.
- [59] Stamnes J.J. ; Dhayalan, V.: Transmission of a two-dimensional gaussian beam into a uniaxial crystal. *J. Opt. Soc. Am.*, 2001, vol. 18, 1662-1669.
- [60] Perez, L.I.: Nonspecular transverse effects of polarized and unpolarized symmetric beams in isotropic-uniaxial interfaces. *J. Opt. Soc. Am.*, 2003, vol. 20, 741-752.
- [61] Ciattoni, A. ; Cincotti, G. ; Palma, C.: Nonparaxial description of reflection and transmission at the interface between an isotropic medium and a uniaxial crystal. *J. Opt. Soc. Am.*, 2002, vol. 19, 1422-1431.

Apéndice I:

Dependencia funcional de los factores \mathcal{F}_o^* y \mathcal{F}_e^*

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) dan las expresiones de las componentes perpendicular y paralela al plano de incidencia del campo transmitido cuando la onda incidente es ordinaria. En ellas el factor \mathcal{F}_o^* presenta la siguiente dependencia funcional:

$$\mathcal{F}_o^* = \frac{2\mu_o u_o^4 (\vec{D}_o \cdot \vec{y})}{\cos\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{sen}\delta D_r D_c \Delta_o}$$

donde, como ya sabemos, μ_o es la permeabilidad magnética; $(\vec{D}_o \cdot \vec{y})$ indica la amplitud de la onda incidente;

$$\Delta_o = A'_o B_o'' - A_o'' B'_o$$

con A'_o , A_o'' , B'_o y B_o'' funciones de la dirección de incidencia y de parámetros del cristal -ver ecuaciones (1.90) a (1.95)-;

$$D_c = \frac{\omega}{u_o} [(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_R + i(\vec{k}_o'' \cdot \vec{x})_I](\vec{x} \cdot \vec{z}_3) + \operatorname{sen}\gamma \cos\delta (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)$$

$$D_r = \operatorname{sen}^2\gamma \cos^2\delta (\vec{x} \cdot \vec{z}_3) - \cos^2\gamma (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)$$

Para ángulos de incidencia mayores a los de reflexión inhibida tanto Δ_o como

D_c son números complejos y \mathcal{F}_o^* se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathcal{F}_o^* = \frac{f_r}{M_R + iM_I}$$

El denominador de esta ecuación es el resultado de multiplicar dos números complejos (Δ_o y D_c) obteniendo

$$\begin{aligned} M_R &= \frac{u_o}{\omega} (\vec{k}_o \cdot \vec{x})_R m_1 + m_2 \\ M_I &= \frac{u_o}{\omega} (\vec{k}_o \cdot \vec{x})_I m_1 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} m_1 &= (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)(\vec{z} \cdot \vec{z}_3) \operatorname{sen} \gamma \cos \delta \left[-\left(1 + \frac{u_o^2}{u^2}\right) \cos \gamma \cos \beta - \frac{u_o}{u} (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \right] + \\ &+ (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)^2 \frac{u_o}{u} \operatorname{sen}^2 \gamma \left[-\frac{u_o}{u} \cos \beta - \cos \gamma \right] + \\ &+ (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)^2 \left[\operatorname{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta (\cos \beta + \frac{u}{u_o} \cos \gamma) - (\cos \beta + \frac{u_o}{u} \cos \gamma) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)(\vec{z} \cdot \vec{z}_3) \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma \cos \delta \left[\cos \beta \cos \gamma \left(\frac{u_o^2}{u^2} + 1 \right) + \frac{u_o}{u} (1 + \cos^2 \gamma) - \right. \\ &- \left. \frac{u}{u_o} \operatorname{sen}^2 \gamma \right] + (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)^2 \left[\frac{u_o^2}{u^2} \cos \beta \cos \gamma (1 - \operatorname{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta) \right. \\ &+ \left. \frac{u_o}{u} (1 - \operatorname{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta (1 + \cos^2 \gamma)) - \frac{u}{u_o} \operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \delta \right] \\ &+ (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \left[\cos \beta \cos \gamma + \frac{u_o}{u} - \frac{u}{u_o} \operatorname{sen}^2 \gamma \right] \end{aligned}$$

y las partes real e imaginaria de $(\vec{k}_o \cdot \vec{x})$ las conocemos por las ecuaciones (2.21) y (2.22). El factor f_r es ahora un factor real con la siguiente dependencia funcional:

$$f_r = \frac{2\mu_o u_o^2 \cos \gamma [\operatorname{sen} \gamma \cos \delta (\vec{x} \cdot \vec{z}_3) - \cos \gamma (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)] (\vec{D}_o \cdot \vec{y})}{\operatorname{sen}^2 \gamma \cos^2 \delta (\vec{x} \cdot \vec{z}_3)^2 - \cos^2 \gamma (\vec{z} \cdot \vec{z}_3)^2}$$

Si consideramos una onda incidente extraordinaria, y resolvemos de manera completa las condiciones de contorno se obtiene -a partir de las ecuaciones (3.29) y (3.30) y luego de un largo trabajo algebraico- la siguiente dependencia funcional para \mathcal{F}_e^* :

$$\mathcal{F}_e^* = \frac{f_{er}}{M_{er} + iM_{ei}}$$

donde f_{er} es el siguiente factor real:

$$f_{er} = \frac{\mu_0 u u'' (u'' \cos \gamma_R'' - u_e'' \cos \gamma) (\vec{D}_e \cdot \vec{y})}{u_e'' (\vec{N}_e \cdot \vec{z}_3) \text{sen} \gamma \text{sen} \delta}$$

El ángulo γ_R'' es el ángulo de reflexión del rayo reflejado extraordinario (notar que no coincide con el ángulo de reflexión de la onda reflejada extraordinaria, ya que la dirección de propagación de la onda y del rayo no coinciden) y $(\vec{D}_e \cdot \vec{y})$ considera la amplitud de la onda incidente. El denominador complejo puede expresarse en función de la dirección de incidencia y de parámetros del cristal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M_{er} &= u Q_1 + u'' \cos \beta Q_2 \\ M_{ei} &= w_x (u Q_3 + u'' \cos \beta Q_4) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \text{sen}^4 \gamma (t_1 \cos^4 \delta + t_2 \cos^2 \delta + t_3) + \\ &+ \text{sen}^3 \gamma \cos \gamma (t_4 \cos^3 \delta + t_5 \cos \delta) + \\ &+ \text{sen}^2 \gamma (t_6 \cos^2 \delta + t_7) + t_8 \text{sen} \gamma \cos \gamma \cos \delta + t_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \text{sen}^3 \gamma (t_{10} \cos^3 \delta + t_{11} \cos \delta) + \text{sen}^2 \gamma \cos \gamma (t_{12} \cos^2 \delta + t_{13}) + \\
&\quad + t_{14} \text{sen} \gamma \cos \delta + t_{15} \cos \gamma \\
Q_3 &= \text{sen}^3 \gamma (t_{16} \cos^3 \delta + t_{17} \cos \delta) + \text{sen}^2 \delta \cos \gamma (t_{18} \cos \delta + t_{19}) + \\
&\quad + t_{20} \text{sen} \gamma \cos \delta + t_{21} \cos \gamma \\
Q_4 &= t_{21} + \text{sen}^2 \gamma (t_{22} \cos^2 \delta + t_{23}) + t_{24} \text{sen} \gamma \cos \gamma \cos \delta
\end{aligned}$$

habiendo definido los siguientes parámetros que sólo dependen de características de la interfaz:

$$\begin{aligned}
t_1 &= q_2 \frac{(\check{z}_3 \cdot \check{z})^2}{(\check{z}_3 \cdot \check{x})} \left\{ (u^2 - u_e^2 - u_o^2)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) - \frac{q_2}{q_1} (\check{z}_3 \cdot \check{x})(q_1 + 4u_o^2) \right\} \\
t_2 &= \frac{q_2 u_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})}{q_1} [4q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{x}) - q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - 2(u_o^2 + u^2)(\check{z}_3 \cdot \check{z})] + \\
&\quad + (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 [6q_2^2 + u_o^2(u^2 - u_e^2) - u_e^2 u^2] \\
t_3 &= (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 [-q_2^2 + u_o^2(u^2 - u_e^2 + u_o^2)] + q_2(u_o^2 + u^2)(\check{z}_3 \cdot \check{x})(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \\
t_4 &= \frac{2q_2(\check{z}_3 \cdot \check{z})}{q_1} [2q_2(q_1 - 2u_o^2)(\check{z}_3 \cdot \check{x}) + (u_o^2 + u^2 - 2u_e^2)q_1(\check{z}_3 \cdot \check{z})] \\
t_5 &= (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \{ (\check{z}_3 \cdot \check{x}) [4q_2^2 + u_o^2(u_o^2 + u^2)] - 2q_2 u^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \} \\
t_6 &= (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \{ q_1(2u_e^2 - u^2)(\check{z}_3 \cdot \check{z}) + 2q_2[4u_o^2(\check{z}_3 \cdot \check{x}) - 2q_2(\check{z}_3 \cdot \check{z}) - q_1(\check{z}_3 \cdot \check{z})] \} \\
t_7 &= q_1 [u^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - u_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 - 2q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})(\check{z}_3 \cdot \check{z})] \\
t_8 &= 2q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) [2q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - u_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})] \\
t_9 &= -q_1^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \\
t_{10} &= q_2 (u_o^2 - u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \\
t_{11} &= 2 \frac{q_2}{q_1} \{ u_o^4 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 + u^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) [q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{x}) - q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{z})] \} + \\
&\quad + (u_o^2 + u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{x}) [u_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})] \\
t_{12} &= \frac{1}{q_1} \{ u^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 [q_1^2 - 4q_2^2] + 2q_1 q_2 (u_o^2 + u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{x})(\check{z}_3 \cdot \check{z}) \} \\
t_{13} &= (\check{z}_3 \cdot \check{x}) [-u_o^4 (\check{z}_3 \cdot \check{x}) - q_2 u^2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{14} &= (\check{z}_3 \cdot \check{x}) [4u^2 q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - (u_o^2 + u^2) q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{x})] \\
t_{15} &= -u^2 q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \\
t_{16} &= 2 \frac{q_2}{q_1} u_o (u_o^2 - u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 \\
t_{17} &= u_o [-2q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 + (u_o^2 + u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{x}) (\check{z}_3 \cdot \check{z})] \\
t_{18} &= u_o (\check{z}_3 \cdot \check{z}) \{ (u^2 - u_o^2 + u_e^2) (\check{z}_3 \cdot \check{z}) + \frac{q_2}{q_1} (\check{z}_3 \cdot \check{x}) (4u_o^2 - q_1) \} \\
t_{19} &= -q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{x})^2 u_o \\
t_{20} &= 2 u_o (\check{z}_3 \cdot \check{z}) [q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - u_o^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x})] \\
t_{21} &= -q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{z})^2 u_o \\
t_{22} &= u_o (\check{z}_3 \cdot \check{z}) [q_1 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) + 2 \frac{q_2}{q_1} (u_o^2 + u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{x})] \\
t_{23} &= -u_o (\check{z}_3 \cdot \check{x}) [u^2 (\check{z}_3 \cdot \check{x}) + q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{z})] \\
t_{24} &= u_o (\check{z}_3 \cdot \check{z}) [2q_2 (\check{z}_3 \cdot \check{z}) - (u_o^2 + u^2) (\check{z}_3 \cdot \check{x})]
\end{aligned}$$

Apéndice II: Intersección entre los planos π_γ y π_δ

Como vimos en el capítulo 4, la ecuación (4.49) es la ecuación de un plano π_γ que pasa por el origen de coordenadas. Un vector normal a este plano es el vector \vec{v}_γ

$$\vec{v}_\gamma = \vec{x} (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) - \check{\zeta} (\check{R}'' \cdot \vec{x})$$

De la misma manera podemos encontrar una expresión para un vector \vec{v}_δ que sea normal al plano definido por la ecuación (4.50), es decir al plano π_δ ,

$$\vec{v}_\delta = \vec{x} (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) \cos\gamma - \check{\eta} [(\check{R}'' \cdot \vec{x}) \cos\gamma + (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) \operatorname{sen}\gamma] + \check{\zeta} (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) \operatorname{sen}\gamma$$

En la figura II.1 graficamos el plano que contiene a los vectores \vec{v}_γ y \vec{v}_δ . La ecuación del plano que contiene a estos vectores y que pasa por el origen de coordenadas, se puede obtener resolviendo el siguiente determinante:

$$\begin{bmatrix} x & \eta & \zeta \\ (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) & 0 & -(\check{R}'' \cdot \vec{x}) \\ (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) \cos\gamma & -[(\check{R}'' \cdot \vec{x}) \cos\gamma + (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) \operatorname{sen}\gamma] & (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) \operatorname{sen}\gamma \end{bmatrix} = 0$$

de modo que resulta

$$x (\check{R}'' \cdot \vec{x}) + \eta (\check{R}'' \cdot \check{\eta}) + \zeta (\check{R}'' \cdot \check{\zeta}) = 0$$

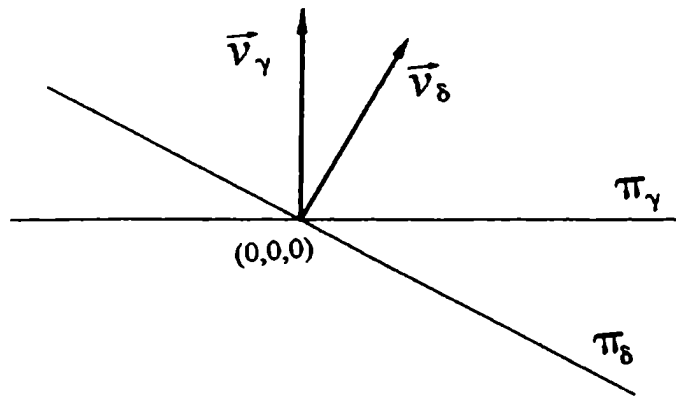


Figura II.1: Plano que contiene a los vectores \vec{v}_γ y \vec{v}_δ

Vemos entonces que la normal a este plano, que es la intersección entre los planos π_γ y π_δ , está dada por

$$\tilde{x} (\tilde{R}'' \cdot \tilde{x}) + \tilde{\eta} (\tilde{R}'' \cdot \tilde{\eta}) + \tilde{\zeta} (\tilde{R}'' \cdot \tilde{\zeta}) = \tilde{R}''$$

y coincide con la dirección del rayo.