

Tesis de Posgrado

Nuevas familias de distribuciones polarimétricas para imágenes SAR

Jacobo Berlles, Julio C. A.

2005

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en Ciencias de la Computación de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Jacobo Berlles, Julio C. A.. (2005). Nuevas familias de distribuciones polarimétricas para imágenes SAR. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3834_JacoboBerlles.pdf

Cita tipo Chicago:

Jacobo Berlles, Julio C. A.. "Nuevas familias de distribuciones polarimétricas para imágenes SAR". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2005. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3834_JacoboBerlles.pdf

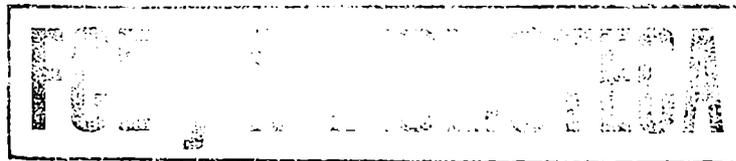
EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN



*Nuevas Familias de
Distribuciones
Polarimétricas para
Imágenes SAR*

Julio C. A. JACOBO BERLLES

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la
Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias de la

5834

Computación

Marzo 2005

Director: Dr. Alejandro C. FRERY ORGAMBIDE

Consejero de estudios: Lic. Irene LOISEAU

Resumen

Título: Nuevas Familias de Distribuciones Polarimétricas para Imágenes SAR.

En esta tesis se deriva una nueva distribución polarimétrica para datos de radar de apertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* – SAR). Esta distribución se basa en el uso del modelo multiplicativo, suponiendo una ley Wishart compleja multivariada para el *speckle* y la ley gaussiana inversa para el *backscatter*. Con esta propuesta se obtiene la distribución armónica polarimétrica y, como caso particular, las distribuciones armónicas para datos de intensidad y de amplitud. Se calculan los estimadores para los parámetros que indexan estas distribuciones por el método de los momentos. Se muestra que la extracción de estos parámetros como características es una forma de aumentar la información y el poder de discriminación en el problema de clasificación de imágenes SAR.

Palabras clave: Polarimetría, Radar de Apertura Sintética, Distribuciones.

Abstract

Title: New Families of Polarimetric Distributions for SAR Images.

This thesis presents the derivation of a new distribution for polarimetric Synthetic Aperture Radar (SAR) imagery. This distribution is based on the multiplicative model, assuming a multivariate complex Wishart law for the speckle and an inverse gaussian law for the backscatter. With this proposal, the harmonic polarimetric distribution and the harmonic distributions for intensity and amplitude data are obtained. Moments-based estimators for the parameters that index these distributions are derived and assessed. It is shown that the extraction of these parameters as features is a way of augmenting the information content and the discriminating power in SAR image classification.

Keywords: Polarimetry, Synthetic Aperture Radar, Distributions.

Índice general

1	Introducción	1
2	Preliminares	9
2.1	Aspectos físicos y tecnológicos de los Radares de Apertura Sintética (SAR)	9
2.1.1	Geometría de los sistemas generadores de imágenes SAR	9
2.1.2	Polarimetría	11
2.1.3	Datos SAR	17
2.2	Conceptos y convenciones de notación	18
3	Modelo multiplicativo en imágenes SAR	22
3.1	Distribución para el Speckle	23
3.2	Distribuciones para la retrodispersión	25
3.2.1	Distribución Gaussiana Inversa Generalizada (GIG)	26
3.2.2	Distribución Gamma Γ	28
3.2.3	Distribución Recíproca de Gamma Γ^{-1}	28
3.2.4	Distribución Gaussiana Inversa (GI)	28
3.2.5	Relaciones entre Distribuciones	33
3.3	Distribuciones para el retorno	34
3.3.1	Distribución $\mathcal{G}_I(\alpha, \gamma, \lambda, n)$	35
3.3.2	Distribución $\mathcal{K}_I(\alpha, \lambda, n)$	36

3.3.3	Distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, n)$	36
3.3.4	Distribución $\mathcal{G}_I^H(\omega, \eta, n)$	37
4	El Modelo Multiplicativo para datos polarimétricos	38
4.1	Distribución para el speckle polarimétrico	39
4.1.1	Distribución Gaussiana Compleja Multivariada	39
4.1.2	Distribución Wishart Centrada Compleja	41
4.2	Modelo multiplicativo polarimétrico	42
4.3	Modelos polarimétricos clásicos	44
4.3.1	Modelo Wishart	44
4.3.2	Modelo \mathcal{K}_p	45
4.4	Modelos polarimétricos \mathcal{G}_p	45
4.4.1	Modelo $\mathcal{G}_p^0(\Sigma_Y, n)$	45
4.4.2	Modelo $\mathcal{G}_p^H(\omega, \Sigma_Y, n)$	46
4.5	Ajustes	47
5	Inferencia para Datos Polarimétricos	55
5.1	Técnicas de Estimación: Analogía y Máxima Verosimilitud	55
5.2	Estimadores para datos en formato de intensidad	58
5.3	Estimadores para datos polarimétricos	60
5.3.1	Estimadores para la distribución Wishart Centrada Compleja	60
5.3.2	Estimadores para la distribución \mathcal{K}_p	61
5.3.3	Estimadores para la distribución \mathcal{G}_p^H	61
5.4	Algoritmos para simulación	63
5.4.1	Generación de muestras de variables aleatorias con distribución Gaussiana Multivariada	63
5.4.2	Generación de muestras de variables aleatorias con distribución Gaussiana Inversa	64
6	Separabilidad de Clases	66
7	Conclusiones	72

Índice de figuras

2.1 Geometría del Radar de Apertura Sintética.	10
2.2 Lugar geométrico del extremo del vector campo eléctrico en un plano perpendicular a la dirección de propagación (elipse de polarización).	12
2.3 Lugar geométrico del extremo del vector campo eléctrico para polarización lineal.	13
2.4 Componentes horizontal y vertical del campo eléctrico. . .	14
2.5 a) componente co-polarizada, b) componente de polarización cruzada	16
3.1 Adición coherente de los retornos correspondientes a los elementos presentes en una celda de resolución.	24
3.2 Curvas de la distribución Γ , correspondiente al speckle, para número de looks igual a: 1 (sólida), 2 (trazos), 3 (puntos), 4 (punto-trazo) y 10 (punto-punto-trazo).	26
3.3 Curvas de la distribución Γ^{-1} para media unitaria y γ igual a: 1 (sólida), 2 (trazos), 3 (puntos), 5 (punto-trazo), 10 (punto-punto-trazo), 20 (sólida) y 100 (trazos).	29
3.4 Curvas de la distribución Γ^{-1} para media unitaria y α igual a: $-1,5$ (sólida), -2 (trazos), -4 (puntos), -5 (punto-trazo), -10 (punto-punto-trazo), -20 (sólida) y -100 (trazos).	30
3.5 Curvas de la distribución Γ^{-1} para $\gamma = 1$ y α igual a: $-1,5$ (sólida), -2 (trazos), -4 (puntos) y -5 (punto-trazo).	31

3.6	Densidad de la distribución $GI(x, \omega, \eta)$, para $\eta = 1$ y $\omega = 1$ (sólida), $\sqrt{2}$ (trazos), 2 (puntos), 3 (punto-trazo), 4 (punto-punto-trazo), 5 (sólida) y 6 (trazos).	32
3.7	Densidad de la distribución $GI(x, \omega, \eta)$, para $\omega = 1$ y $\eta = 0,5$ (sólida), 1 (trazos), 2 (puntos) y 3 (punto-trazo).	33
4.1	Imagen E-SAR banda L de la zona cercana a la ciudad de Weßling, Bavaria, Alemania. Regiones de interés: ciudad(rojo), bosque(verde oscuro), pasto(verde claro).	47
4.2	Correlación espacial para datos de ciudad.	50
4.3	Ajustes de las distribuciones \mathcal{G}_p^H y \mathcal{G}_p^O para datos de ciudad.	51
4.4	Ajustes de las distribuciones \mathcal{G}_p^H y \mathcal{G}_p^O para datos de bosque.	52
4.5	Ajustes de las distribuciones \mathcal{G}_p^H y \mathcal{G}_p^O para datos de pasto.	53
4.6	Imágenes de los parámetros estimados para la distribución \mathcal{G}_p^H	54
6.1	Composición en falso color de datos de Munich obtenidos por el E-SAR.	67
6.2	Histogramas de datos de pasto y ciudad para las tres polarizaciones (intensidad) y para el parámetro estimado ω ; ciudad en rojo y pasto en verde.	70
6.3	Diagramas de dispersión de pares de variables para áreas urbana (rojo) y de pasto (verde).	71

Índice de cuadros

1.1	Bandas de frecuencia para radar.	2
1.2	Sistemas SAR satelitales pasados y proyectados.	3
4.1	Valores estimados de los parámetros α y ω para ciudad. .	49
4.2	Valores estimados de los parámetros α y ω para bosque. .	49
4.3	Valores estimados de los parámetros α y ω para pasto. . .	49

Capítulo 1

Introducción

El radar de imágenes es un instrumento que mide la respuesta del terreno a la radiación electromagnética en el rango de las microondas. El valor de esta respuesta, para cada punto de una zona determinada de la tierra puede ser utilizado de varias formas, en particular para construir una imagen de la misma.

El proceso de adquisición de una imagen comienza con la emisión de radiación electromagnética polarizada en dirección a la superficie terrestre. Esta radiación es emitida por la antena del radar. Cuando la radiación incide sobre la superficie terrestre sufre un proceso de dispersión el cual resulta en radiación emitida en todas las direcciones. Una porción de esta energía dispersada es captada por la antena del radar y se la llama energía retrodispersada.

En este tipo de radares, la radiación emitida por el radar está polarizada linealmente, de forma horizontal o vertical. La radiación retrodispersada por cada elemento del terreno posee componentes en ambas direcciones, horizontal y vertical. Dichas componentes poseen una amplitud y una fase que dependen de la forma, distancia y orientación del mismo, así como de su constante dieléctrica a la frecuencia de operación del radar.

En los radares llamados monopolares, se utiliza una sola polarización de emisión y se detecta una sola de las componentes de la radiación retrodispersada. Es así que podemos tener radares monopolares

HH, HV, VH o VV, donde la primera letra indica la polarización de la radiación emitida y la segunda indica la componente de polarización detectada. Los radares monopolares existentes a la fecha son HH o VV solamente.

Los radares llamados polarimétricos completos, en cambio, operan en las cuatro combinaciones citadas, al mismo tiempo, generando así, en principio, imágenes de cuatro bandas.

Existen también los radares polarimétricos de polarización dual, los cuales poseen sólo dos de las cuatro combinaciones de polarización citadas más arriba.

Entre los radares de imágenes, el Radar de Apertura Sintética (*Synthetic Aperture Radar* o SAR, en inglés) utiliza el efecto Doppler electromagnético, el cual se produce al existir desplazamiento relativo entre el radar y el suelo, para lograr que la resolución espacial en la dirección del movimiento de la plataforma que lo transporta (llamada dirección azimutal) no dependa de la distancia a la zona sensada, sino que sólo dependa de la longitud de la antena. Esta dependencia es lineal, por lo tanto una antena más corta provee mejor resolución espacial.

La no dependencia de la resolución azimutal respecto de la distancia al objeto sensado, permite la utilización de Radares de Apertura Sintética a bordo de satélites, sin pérdida en la resolución espacial.

Banda	Frecuencia (GHz)	Longitud de onda (cm)
P	0.3-1	30-100
L	1-2	15-30
S	2-4	8-15
C	4-8	4-8
X	8-12	2.5-4
K		1.7-2.5 y 0.75-1.2

Cuadro 1.1: Bandas de frecuencia para radar.

Las misiones satelitales equipadas con Radares de Apertura Sintética comenzaron en 1978 con el satélite Seasat y continuaron en los siguientes años con las misiones que se detallan en el Cuadro 1.2. Éstas han

sido agrupadas de acuerdo a la frecuencia de operación de los radares utilizados en cada una.

Banda L	Banda C	Banda X
Seasat+	ERS-1/2	X-SAR+
SIR-A/B+	Radarsat-1	Terrasar-X*
SIR-C+	SIR-C+	Cosmo Skymed*
JERS-1	ENVISAT/ASAR	
TERRASAR-L*	Radarsat-2*	
SAOCOM-A*	Radarsat-3*	

Cuadro 1.2: Sistemas SAR satelitales: “+” pasados y “*” proyectados.

El Seasat fue el primero de un programa conjunto NASA/JPL. Transportaba un SAR en banda L polarización HH de resolución 25m, con ángulo de incidencia fijo en $23^{\circ} \pm 3^{\circ}$. El propósito central de este satélite fue comprobar la posibilidad de monitorear fenómenos oceánicos y determinar los requerimientos para un satélite aplicado a oceanografía.

Luego fueron enviados los SIR-A (*Shuttle Imaging Radar*) y SIR-B. La misión SIR-A (1981/1982) transportó un SAR en banda L y polarización HH con una resolución de 40m y ángulo de incidencia fijo entre de $50^{\circ} \pm 3^{\circ}$. El SIR-B (1985) era similar a SIR-A pero poseía un ángulo de incidencia variable entre 15° y 55° y una resolución entre 16m y 58m en rango y y entre 20m y 30m en azimut (para imágenes de 4 looks).

La misión SIR-C/X-SAR (*Spaceborne Imaging Radar*) (1994) fue un proyecto conjunto de la NASA y las agencias espaciales alemana e italiana (DARA y ASI, respectivamente) y contaba con un radar polarimétrico completo (HH, HV, VH y VV) en banda L y en Banda C: el SIR-C. Sobre la misma plataforma se incluyó también el X-SAR, radar en banda X y polarización VV. El ángulo de incidencia era variable entre 20° y 65° y la resolución estaba entre los 10m y los 25m.

Las misiones ERS-1/2 de la ESA (Agencia Espacial Europea) fueron lanzadas en los años 1992 y 1995, respectivamente. Utilizan un SAR banda C, polarización VV con ángulo de incidencia fijo en $23^{\circ} \pm 3^{\circ}$ y 23m de resolución (3 looks).

El SAR del satélite JERS-1, enviado por la agencia espacial japonesa (NASDA), opera en banda L, polarización HH, con ángulo de incidencia fijo de $35^{\circ} \pm 3^{\circ}$ y resolución de 18m.

La misión Radarsat-1, lanzada por la agencia espacial canadiense (CSA), lleva a bordo un SAR banda C con polarización HH que se diferencia de los anteriores por el hecho de tener varios tipos de haz con diferentes resoluciones (8m-27m en azimut y 7m-31m en rango), ángulo de incidencia entre 16° y 59° , y ancho de *swath* entre 75km y 170km. También se pueden combinar varios haces para obtener modos de mayor *swath* (entre 300km y 500km) y ángulo de incidencia entre 20° y 46° . A estos modos se los denomina genéricamente “modos *ScanSAR*”.

El satélite ENVISAT, de la Agencia Espacial Europea, posee entre otros instrumentos un radar de apertura sintética: el ASAR. Este instrumento posee capacidades comparables a las del Radarsat-1, pero con el agregado de la polarización dual, esto es, produce imágenes HH/HV o HH/VV o HV/VV.

Las misiones proyectadas mencionadas en el Cuadro 1.2 poseen la multiplicidad de haces y la capacidad de generar imágenes polarimétricas como características principales. Entre estas misiones está el proyecto SAOCOM, de la comisión Nacional de Actividades Espaciales. Este estará constituido por dos satélites (SAOCOM-A y SAOCOM-B) que trabajarán en banda L y formarán un sistema en conjunto con cuatro satélites de la serie Cosmo Skymed, de la Agencia Espacial Italiana (ASI), los que trabajarán en banda X.

El estudio de las bases teóricas para el análisis de datos polarimétricos cobra así importancia tanto desde el punto de vista del desarrollo científico-tecnológico general, como desde el punto de vista del desarrollo de este campo en nuestro país.

En el estudio de los datos generados por Radares de Apertura Sintética, el modelado estadístico de los mismos ocupa un lugar importante debido a su utilidad para la clasificación en imágenes y para la disminución del ruido inherente al proceso de formación de las mismas. Dentro de los modelos propuestos en la literatura, la familia de modelos multiplicativos presenta varias alternativas que difieren en su complejidad.

dad matemática y computacional así como también en su capacidad de ajustarse a los datos provenientes de diversos tipos de terreno. Específicamente, para el caso de datos univariados, o sea monopolarizados ya sea en amplitud o en intensidad, los modelos más importantes son los siguientes: El modelo Rayleigh, para datos de amplitud, y su contrapartida Exponencial para datos de intensidad presentan la ventaja de su simplicidad pero la desventaja de suponer que la variabilidad de los valores dentro de una misma área depende solamente de la existencia de ruido. Son apropiados para zonas como pasturas, suelo desnudo y algunos tipos de cultivos. El modelo K incorpora la variabilidad espacial de la retrodispersión pero a costa de incrementar la complejidad matemática y computacional. Permite ajustar datos provenientes de zonas tales como algunos tipos de bosques y otros cultivos además de datos provenientes de los tipos de zonas mencionados para el modelo Rayleigh. La subfamilia de modelos G, perteneciente a la familia de modelos multiplicativos, permite el ajuste de datos provenientes de las zonas ya mencionadas e incorpora también datos provenientes de otros tipos de bosques y de ciudades. En particular los modelos G_0 y G_h agregan a esta capacidad de ajuste a los datos, la ventaja de una mayor simplicidad matemática y computacional. Para datos polarimétricos podemos citar el modelo Wishart, que se corresponde al modelo Rayleigh en sus suposiciones acerca de la variabilidad de la retrodispersión y el modelo K polarimétrico que se corresponde al modelo K para datos monopolarizados. Recientemente Freitas, Frery & Correia (in press) proponen la extensión del modelo G_0 al caso polarimétrico. En esta tesis se propone la extensión del modelo G_h al caso polarimétrico.

El objetivo central de esta tesis es la propuesta, evaluación y uso de nuevas distribuciones para describir y analizar, en el contexto estadístico, imágenes de radar de apertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* — SAR) de modalidad polarimétrica.

Con este fin, se utiliza el Modelo Multiplicativo, cuyo éxito para modelar datos degradados por ruido speckle es notorio (ver, por ejemplo, las referencias (Frery, Müller, Yanasse & Sant'Anna 1997, Jakeman & Pusey 1976, Jakeman & Tough 1987, Ulaby, Kouyate, Brisco &

Williams 1986, Ulaby & Elachi 1990)). Utilizando una versión bastante general de este modelo, se deriva una nueva distribución multivariada capaz de describir con éxito diversos tipos de blancos en imágenes SAR.

Para datos SAR monopolarizados la distribución propuesta por Ulaby et al. (1986) exhibe un buen ajuste a los datos cuando estos provienen de blancos homogéneos, tal como es el caso de pasturas, mientras que la propuesta por Jakeman & Tough (1987) ajusta también datos moderadamente heterogéneos tales como bosque. Esta última, a pesar de ser más flexible que la primera exhibe dificultades en el tratamiento matemático y numérico (Yanasse, Frery & Sant'Anna 1995) debido a la presencia de la función modificada de Bessel del tercer tipo en la fórmula de su densidad. Ambas propuestas fallan cuando se trata de describir datos provenientes de zonas heterogéneas o extremadamente heterogéneas, tales como ciertos tipos de bosque y ciudad.

Trabajos como los de Frery et al. (1997) y de Müller, Frery, Jacobo-Berlles, Mejail & Moreira (2000) subsanaron este inconveniente proponiendo distribuciones que son aptas para datos SAR con todo tipo de grados de heterogeneidad y que la vez son matemáticamente tratables y numéricamente estables.

En el caso de datos SAR multipolarizados, se destaca la distribución Wishart Compleja Multivariada (Srivastava 1965), usada por Lee, Grunes & Kwok (1994) para modelar datos polarimétricos provenientes de zonas homogéneas, la distribución K polarimétrica (Lee, Du, Schuler & Grunes 1995) para datos moderadamente heterogéneos y la reciente G0 polarimétrica (Frery, Correia, Rennó, Freitas, Jacobo-Berlles, Mejail & Vasconcellos 1999).

En esta tesis se propone una versión polarimétrica de la distribución armónica, derivada en Müller et al. (2000) para datos de una única polarización. Las principales propiedades de esta nueva distribución son examinadas desde los puntos de vista analítico y numérico, y se derivan estimadores para sus parámetros. Disponiendo de más de un estimador, se hace necesario evaluar su desempeño relativo y, con tal fin, se utilizan técnicas Monte Carlo. Para ello, se presentan algoritmos para la generación de muestras de esta nueva distribución. Esta tesis concluye

aplicando la nueva distribución a datos reales.

Las principales contribuciones de esta tesis son las siguientes:

1. La derivación de un nuevo modelo para datos SAR univariados, verbigracia, la distribución GH, en las versiones de amplitud e intensidad. Para esto, se calcularon las funciones de densidad de probabilidad, las principales propiedades de la distribución (momentos y otras características), estimadores, y se analizaron las propiedades numéricas (la independencia de funciones de Bessel). Se verificó también que estas distribuciones son adecuadas para el modelado de datos reales.
2. La derivación de un nuevo modelo para datos SAR polarimétricos, verbigracia, la distribución GHP. Para esto, se verificó que la distribución GH es un caso particular de la ley GHP, con lo que se preserva la naturaleza unificada del modelado. Se derivaron también las principales propiedades del modelo (función de densidad de probabilidad y estimadores) y se propuso una técnica eficaz para la estimación de los parámetros que la caracterizan. También se discutieron aspectos numéricos del uso de esta nueva distribución, y se la aplica con éxito a datos reales.
3. Comparación de la nueva distribución multivariada con las principales disponibles en la literatura que devengan del modelo multiplicativo.

El resto de esta tesis está organizado de la siguiente manera:

Capítulo 2: Principales conceptos, notación, convenciones y aspectos tecnológicos de la generación de imágenes por radar de apertura sintética.

Capítulo 3: Principales distribuciones para datos de intensidad en imágenes monopolarizadas.

Capítulo 4: Modelos polarimétricos clásicos y modelos \mathcal{G} , que incluyen la propuesta de esta tesis.

Capítulo 5: Principales estimadores para las distribuciones presentadas para datos en formatos de intensidad y polarimétricos.

Capítulo 6: Estudio del aporte del parámetro estadístico relacionado con la variabilidad de la retrodispersión a la separabilidad de clases en datos polarimétricos.

Capítulo 7: Evaluación de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo presentaremos los principales aspectos físicos y tecnológicos de la generación de imágenes por radar de apertura sintética. También serán presentados los principales conceptos y convenciones de notación que se utilizarán a lo largo de este documento.

2.1 Aspectos físicos y tecnológicos de los Radars de Apertura Sintética (SAR)

En esta sección se presentan conceptos fundamentales para la comprensión del significado físico de los datos SAR. Se presentan también, en forma esquemática, la geometría del sistema y el tipo de datos que puede generar.

2.1.1 Geometría de los sistemas generadores de imágenes SAR

Los radares de apertura sintética son instrumentos llamados de “visión lateral”, debido a que dirigen la radiación por ellos emitida en una dirección perpendicular a la dirección de avance de la plataforma (avión o satélite) sobre la cual están montados

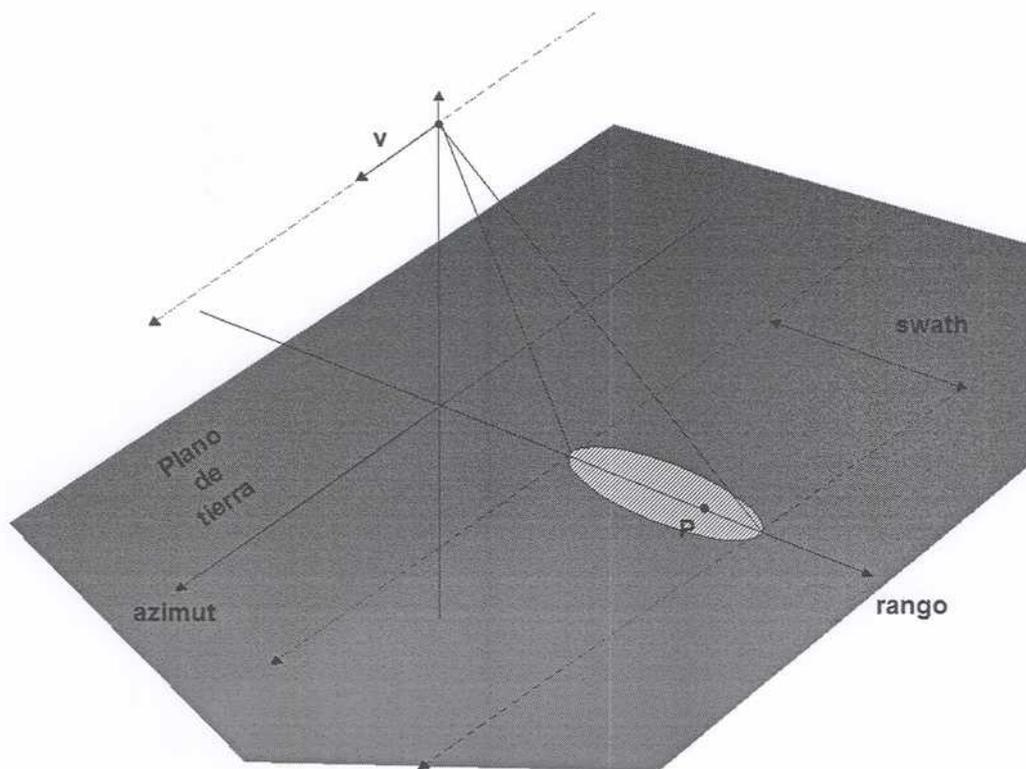


Figura 2.1: Geometría del Radar de Apertura Sintética.

En la figura 2.1 puede verse esquemáticamente el radar desplazándose con una velocidad \vec{v} a una altura h sobre la tierra, la cual con fines ilustrativos y por simplicidad es aproximada por un plano en dicha figura.

La radiación electromagnética emitida está concentrada principalmente en el cono correspondiente al lóbulo central del diagrama de radiación de la antena del radar, la cual, en un instante dado, "ilumina" una zona del terreno, representada en esta figura por una elipse. Al desplazarse el radar en la dirección indicada, la zona iluminada se desplaza con él, "barriendo" una franja de terreno paralela a su trayectoria.

La dirección de avance se denomina "azimuth", la dirección perpendicular a esta se denomina "rango" y la dirección perpendicular al plano de tierra se denomina "nadir". El ancho de la franja iluminada se denomina *swath*.

A medida que se desplaza, el radar emite pulsos de radiación electromagnética y recibe la señal correspondiente a la energía retrodispersada por la superficie sensada. Esta señal es luego procesada para generar la imagen \emptyset .

2.1.2 Polarimetría

La radiación electromagnética posee el vector campo eléctrico \vec{E} y el vector campo magnético \vec{H} perpendiculares entre sí y perpendiculares a su vez, a la dirección de propagación. En un medio sin cargas eléctricas ni pérdidas, el cociente $|\vec{E}|/|\vec{H}|$ entre los mismos está dada por la impedancia $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon'}$ (donde ϵ' es la permitividad eléctrica y μ es la permeabilidad magnética) del medio en el que la radiación se propaga.

En el caso de polarización más general, la orientación y magnitud del vector campo eléctrico, y consecuentemente las del vector de campo magnético, varían a medida que la onda electromagnética se desplaza de manera tal que, para un punto fijo en el espacio, la posición del extremo del vector campo eléctrico sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación describe una elipse. A este tipo de polarización se lo denomina polarización elíptica. En la figura 2.2 puede apreciarse un

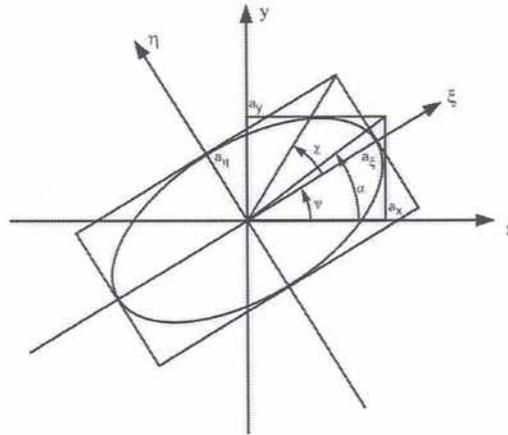


Figura 2.2: Lugar geométrico del extremo del vector campo eléctrico en un plano perpendicular a la dirección de propagación (elipse de polarización).

ejemplo de la elipse de polarización. La misma está caracterizada por el ángulo de rotación ψ del eje mayor de la elipse respecto del eje x , el ángulo de elipticidad χ dado por

$$\tan \chi = \pm \frac{a_{\eta}}{a_{\xi}},$$

donde a_{η} y a_{ξ} son los semiejes menor y mayor de la elipse, y el ángulo auxiliar α , dado por

$$\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x}.$$

La rotación del vector campo eléctrico puede ser en cualquiera de los dos sentidos. La polarización lineal es un caso particular de la polarización elíptica en el cual la elipse degenera en un segmento de recta. En este caso, el ángulo de elipticidad χ es nulo y los ángulos de rotación ψ y auxiliar α son iguales.

En los sistemas de radar de apertura sintética existentes, se utiliza este tipo de polarización. Además, si el vector campo eléctrico está orientado horizontalmente respecto del plano de tierra, diremos que la polarización es horizontal. En cambio, si la orientación del vector campo eléctrico es perpendicular a esta dirección, diremos que la polarización

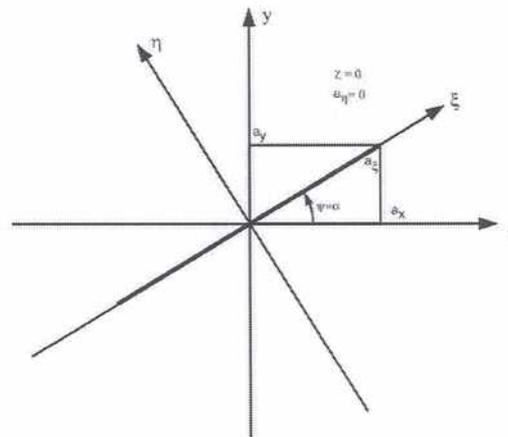


Figura 2.3: Lugar geométrico del extremo del vector campo eléctrico para polarización lineal.

es vertical. El caso en el cual el vector campo eléctrico posee ambas componentes se muestra en la figura 2.4

A título ilustrativo, en la figura ?? se muestran los valores de los campos eléctrico y magnético para puntos sobre una recta en la dirección de propagación de una onda plana.

Cuando la radiación electromagnética incide sobre un objeto, ésta induce en él corrientes que a su vez producirán una radiación que llamaremos dispersada. Las corrientes inducidas, y por lo tanto la radiación dispersada, dependerán de la forma del objeto, de su orientación relativa a la onda incidente y del valor de la constante dieléctrica ϵ dado por

$$\epsilon = \epsilon' + i \frac{\sigma}{\omega},$$

donde σ es la conductividad del material y $\omega = 2\pi f_0$, con f_0 la frecuencia de la radiación incidente. La variación de ϵ' y σ con ω es característica de cada material.

Si el campo eléctrico incidente sobre un objeto en el punto \vec{P} de la figura 2.4 está dado por $\vec{E}^i = [E_v^i \vec{v} + E_h^i \vec{h}]^t$ con \vec{v} y \vec{h} versores en la dirección horizontal y vertical, respectivamente, y E_v^i y E_h^i los valores complejos que corresponden al campo eléctrico en esas direcciones, entonces

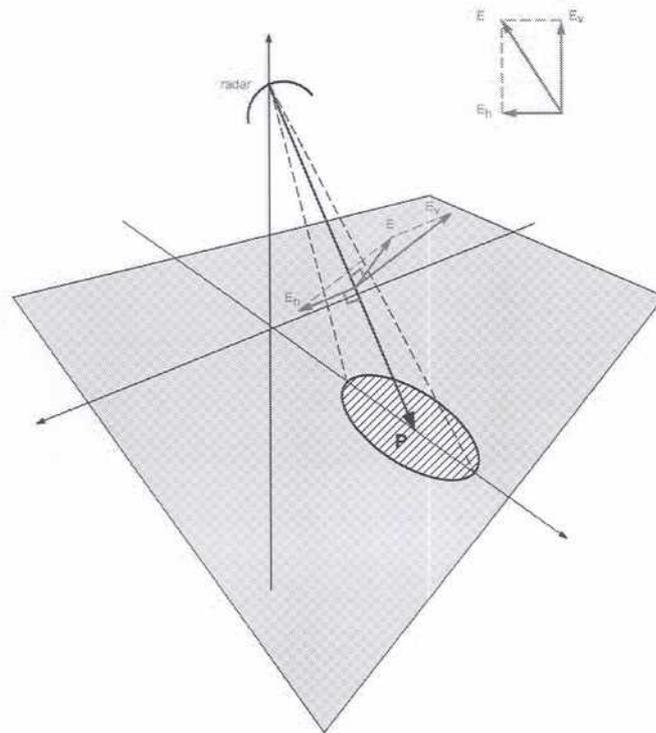


Figura 2.4: Componentes horizontal y vertical del campo eléctrico.

el valor del campo dispersado por el objeto en $\vec{\mathbf{P}}$ medido por el radar, el que notaremos $\mathbf{E}^s = \left[E_v^s \vec{\mathbf{v}} + E_h^s \vec{\mathbf{h}} \right]^t$ está dado por (Zyl & Ulaby 1990)

$$\mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} E_v^s \\ E_h^s \end{bmatrix} = \frac{e^{ik_0 r}}{r} \begin{bmatrix} S_{vv} & S_{vh} \\ S_{hv} & S_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_v^i \\ E_h^i \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde r es la distancia entre el punto $\vec{\mathbf{P}}$ y el radar, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es el número de onda, con λ_0 la longitud de onda de la radiación emitida (y de la dispersada también), y S_{vv} , S_{vh} , S_{hv} , S_{hh} son los valores de la matriz de dispersión S dada por

$$S = \begin{bmatrix} S_{vv} & S_{vh} \\ S_{hv} & S_{hh} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Para los elementos de esta matriz, el segundo subíndice indica la polarización de la onda emitida (o incidente) y el primer subíndice indica la componente del campo eléctrico dispersado detectada por el radar. Además estos valores son complejos, y dependen de la frecuencia f_0 (debido a la variación de la constante dieléctrica ϵ con la misma), de la posición del radar relativa al objeto en $\vec{\mathbf{P}}$ y de la orientación del mismo respecto del radar. Entonces, la matriz S caracteriza la respuesta del objeto en $\vec{\mathbf{P}}$ en dirección al radar para una frecuencia, posición relativa y orientación dadas.

Las componentes S_{vv} y S_{hh} son llamadas co-polares, mientras que las componentes S_{vh} y S_{hv} son llamadas componentes de polarización cruzada.

A título ilustrativo, la matriz de dispersión para un cilindro de longitud l , radio a ($l, a \ll \lambda$) y orientación α respecto de la horizontal está dada por (Zyl & Ulaby 1990)

$$S = \frac{k_0^2 l^3}{3(\ln(4l/a) - 1)} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

En la figura 2.5 se muestran los gráficos correspondientes a las componentes co-polarizada de polarización cruzada para un cilindro alineado horizontalmente, en función de los ángulos de elipticidad y de orientación.

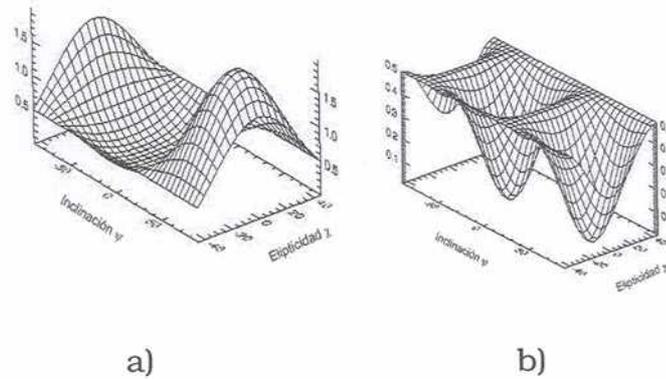


Figura 2.5: a) componente co-polarizada, b) componente de polarización cruzada

En el caso de radar mono-estático, la antena emisora y la antena receptora son la misma. Este tipo de radar es el más común, y en él las componentes de polarización cruzada S_{hv} y S_{vh} son iguales, por lo que la respuesta del objeto sensado queda determinada por S_{hh} , S_{hv} y S_{vv} , o, lo que es lo mismo, por tres módulos y dos diferencias de fase.

En el caso del radar bi-estático, en el cual, las antenas emisora y receptora no son la misma, no puede hacerse esta simplificación. Aquí, la distancia r en la fórmula (2.1) es la distancia a la antena receptora y los elementos de la matriz de dispersión \mathcal{S} tienen en cuenta la diferencia entre los ángulos de incidencia y de dispersión considerados.

Al ser \mathcal{S} una matriz compleja, aún cuando la radiación incidente esté polarizada linealmente (lo que corresponde a que E_h^i y E_v^i posean igual fase), en general la onda dispersada poseerá una polarización elíptica. El radar polarimétrico mide E_h^s y E_v^s para radiación emitida con polarización horizontal (E_v^i nulo) y con polarización vertical (E_h^i nulo), lo que permite determinar los valores de la matriz de dispersión \mathcal{S} .

2.1.3 Datos SAR

En los sistemas de radar de apertura sintética, la onda electromagnética es emitida en forma de pulsos y el retorno de los mismos es detectado y almacenado para su posterior procesamiento. En el proceso de detección, el retorno es demodulado mediante la multiplicación por dos funciones: una función coseno de la frecuencia de operación del radar, obteniéndose así la componente I (*in phase*), y una función seno de la frecuencia de operación del radar, obteniéndose así la componente Q (*in quadrature*). Estas magnitudes constituyen las partes real e imaginaria, respectivamente, de los así llamados “pulsos crudos”. A partir de los pulsos crudos el procesador SAR produce la imagen de la zona sensada. Este proceso mejora notablemente la resolución en la dirección del rango y en la dirección azimutal.

Las imágenes SAR poseen un ruido inherente a su proceso de formación llamado *speckle* (ver capítulo 3), el cual es propio de todos los sistemas generadores de imágenes con iluminación coherente. Para reducir este ruido, una de las técnicas utilizadas es generar varias “vistas” o *looks* a partir del mismo conjunto de pulsos crudos, durante el proceso de generación de la imagen. Estos *looks* son generados de manera que sean estadísticamente independientes. El promediado, pixel a pixel, de cada uno de los *looks* genera una imagen *multilook* que posee un menor ruido *speckle*.

Las imágenes producidas pueden ser de un solo *look* y datos complejos (*Single Look Complex*, o SLC) o de uno o varios *looks* y datos reales. En este segundo caso, los datos consistirán en la amplitud de los complejos correspondientes o en el cuadrado de esta magnitud. En el primer caso se los llamará datos de amplitud, y en el segundo se los llamará datos de intensidad.

En el caso de las imágenes de 1 *look*, la relación señal-ruido es baja, lo que puede dificultar tanto el análisis visual como el automático. Para mejorar la relación señal-ruido, se recurre a una gama de técnicas, siendo la más importante el llamado procesamiento *multilook*.

Para ilustrar este tipo de procesamiento, consideremos la coordena-

da $s \in S$. En ella se observan los ℓ valores complejos $z(1), z(2), \dots, z(\ell)$, cada uno de ellos proveniente de una “vista” de la imagen. Sean $z^2(1), z^2(2), \dots, z^2(\ell)$ las intensidades observadas. La imagen final será formada por la media de las intensidades, si se desea tener formato final en intensidad, o por su raíz, si es en formato de amplitud, ésto es,

$$z_1^{(\ell)} = \frac{z^2(1) + \dots + z^2(\ell)}{\ell}$$

y $z_A^{(\ell)} = \sqrt{z_1^{(\ell)}}$. La imagen resultante se denomina “imagen de ℓ looks” o, genéricamente, “imagen multilook”, sea en formato de amplitud o en formato de intensidad.

Aunque teóricamente ℓ es un entero, no es así en la mayoría de las situaciones prácticas dado que no se verifica independencia entre las muestras. En el trabajo de Freitas, Correia, Frery & Sant’Anna (1998) se discuten técnicas para estimar el número equivalente de looks a partir de datos.

2.2 Conceptos y convenciones de notación

Toda imagen será definida sobre una grilla regular euclideana de la siguiente forma

$$\mathbf{s} = [0, \dots, m-1] \times [0, \dots, n-1],$$

donde $m \geq 1$ denota el número de filas y $n \geq 1$ el número de columnas. Cada coordenada de \mathbf{s} podrá ser denotada $s \in \mathbf{s}$, si no hubiera necesidad de identificar a primera vista la fila y la columna, o (i, j) , con $0 \leq i \leq m-1$ y $0 \leq j \leq n-1$ en caso contrario.

Existen diversas formas de describir y de almacenar imágenes. En esta tesis será fuertemente utilizado el contexto estadístico, según el cual cada posición $s \in S$ indexa una variable aleatoria conveniente. Estas variables aleatorias pueden tener por contradominio los reales, los complejos, vectores reales o vectores complejos, dependiendo del tipo de imagen que está siendo modelado. Para identificar estas variables aleatorias o sus eventos, serán utilizados subíndices.

El hecho de trabajar con datos almacenados en un cierto tipo de palabra computacional no será tomado en cuenta en esta tesis, ésto es, el uso de palabras de tipo byte, entera con o sin signo, de punto flotante, de precisión doble, compleja o compleja de precisión doble no será descripto por el modelo. Para detalles sobre la influencia del tipo de almacenamiento en el análisis de imágenes SAR puede consultarse el trabajo de Mascarenhas, Dutra & Frery (2000).

Solamente consideraremos variables aleatorias reales y complejas univariadas y multivariadas.

En el contexto estadístico de esta tesis, *pixel* será la coordenada que indexa cada una de las variables aleatorias que describen las imágenes. En otros contextos, se entiende por pixel al par posición-valor.

Las variables aleatorias serán denotadas en mayúscula, y sus valores particulares en minúscula. Las matrices y vectores serán denotados en negrita. El modelo estadístico para una imagen real será, entonces, de la forma $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s$, mientras que una imagen compleja será de la forma $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^s$, donde Ω denota el espacio muestral genérico. La imagen observada, será un objeto de la forma $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^s$ o $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^s$, si es real o si es compleja respectivamente.

Los conjuntos de variables aleatorias definidos sobre conjuntos del tipo \mathbf{s} serán llamados *campos aleatorios*. En este trabajo no será considerada la posibilidad de las variables aleatorias definidas sobre \mathbf{s} tener dependencia entre sí, por ser la distribución marginal y sus consecuencias el centro de interés.

Será utilizada la notación $\mathbf{1}_A$ para la función indicadora del conjunto A , ésto es

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Siempre que esté bien definida, la esperanza matemática de una función g de la variable aleatoria X está dada por $\mathbb{E}(g(x)) = \int g(u) dF_X(u)$. Si la variable aleatoria es continua, sustituimos $dF_X(u)$ por la densidad de la variable aleatoria X , si es discreta por la función de probabilidad. A través de esta definición serán calculados los momentos y otras cantidades características de variables, vectores y matrices aleatorios.

Se dirá que la variable aleatoria X tiene distribución degenerada en el punto $k \in \mathbb{R}$ si la función de distribución acumulada de X es dada por $\mathbf{1}_{[k, \infty)}(x)$, ésto es, si vale que $\Pr(X = k) = 1$. Esta distribución aparecerá como caso particular o límite de varias distribuciones de interés en este trabajo.

Conociendo $f_X(x)$, la densidad de la variable aleatoria X , es inmediato calcular la distribución de la variable aleatoria $Y = kX$, con $k \in \mathbb{R}_+$, utilizando la propiedad de escala dada por $f_Y(y) = k^{-1}f_X(yk^{-1})$. Esta propiedad será muy utilizada para derivar las distribuciones de interés para este trabajo, que son las relacionadas con el Modelo Multiplicativo.

Dos distribuciones que serán de particular utilidad en esta tesis son la Gaussiana Estándar y la Uniforme sobre el intervalo $I = (a, b)$, con $a < b$ números reales, caracterizadas por las densidades

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R},$$

y

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(x),$$

respectivamente. Estas situaciones serán denotadas, respectivamente, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $X \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$.

Dada la muestra (x_1, \dots, x_n) de la variable aleatoria X , el momento muestral de orden r se denotará como m_{rX} y se define como

$$m_{rX} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r. \quad (2.4)$$

Asimismo, para las variables aleatorias X e Y , dada la muestra bivariada $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ el momento muestral cruzado de primer orden se notará como m_{XY} y se define como

$$m_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Esta notación también será válida para vectores y matrices aleatorias, siempre que las grandezas estén bien definidas.

En el Capítulo 4 será utilizado el concepto de matriz Hermítica. Una matriz A es Hermítica si y sólo si $A^{t*} = A$.

En ese mismo capítulo se utilizará el operador tr , llamado “traza de una matriz” y definido de la siguiente manera: dada una matriz cuadrada A de tamaño $p \times p$, la traza de la misma es la suma de los elementos pertenecientes a la diagonal principal, o sea, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ entonces

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^p a_{i,i}.$$

Capítulo 3

Modelo multiplicativo en imágenes SAR

En el capítulo anterior se recordaron los principales aspectos físicos y tecnológicos de la generación de imágenes con radares de apertura sintética. Este capítulo se encargará de discutir uno de los modelos más exitosos para describir este tipo de datos: el Modelo Multiplicativo. Se tratará en particular la situación univariada, haciendo una contribución al proponer la familia de distribuciones Harmónicas.

El modelo multiplicativo considera a la imagen retornada por el SAR, la cual denominaremos \mathbf{z} , como una realización del campo aleatorio \mathbf{Z} resultante del producto punto a punto de un campo de aleatorio correspondiente al *backscatter* \mathbf{X} por un campo aleatorio correspondiente al *speckle* \mathbf{Y} , o sea

$$\mathbf{Z} = \mathbf{XY}. \quad (3.1)$$

Se supondrá la independencia de las variables aleatorias correspondientes a cada uno de los pixels de la imagen y también la independencia de los campos aleatorios \mathbf{X} e \mathbf{Y} . La fórmula (3.1) puede escribirse, para cada pixel (i, j) en imágenes de tamaño $m \times n$, como

$$Z_{i,j} = X_{i,j}Y_{i,j}, \text{ para } 0 \leq i \leq M - 1, 0 \leq j \leq N - 1. \quad (3.2)$$

El formato de la imagen SAR considerada (compleja, amplitud o intensidad) determina la distribución de las variables aleatorias $Y_{i,j}$ mientras

que el número de looks determina el valor de su parámetro estadístico. Por otro lado, la heterogeneidad de la zona correspondiente a cada pixel (i, j) determina la distribución más apropiada para cada $X_{i,j}$.

En este capítulo, sólo se considerará el caso de datos SAR en formato intensida, si hubiera necesidad de utilizar datos de amplitud, bastará utilizar la transformación $Z_A = \sqrt{Z_I}$ donde Z_A es el retorno en amplitud y Z_I es el retorno en intensidad.

3.1 Distribución para el Speckle

El ruido *speckle* proviene de la adición coherente de los retornos individuales producidos por los elementos presentes en cada celda de resolución. Así por ejemplo, en un pixel sobre el terreno que esté cubierto por vegetación, los retornos correspondientes a cada uno de los elementos de las plantas y del suelo presentes en el mismo se sumarán con su correspondiente fase (adición incoherente) y el valor de gris del pixel será el módulo del número complejo resultante, para el caso de las imágenes de amplitud, y el cuadrado de dicha magnitud, en el caso de las imágenes de intensidad. En la figura 3.1 se observa el plano complejo con los fasores correspondientes a los retornos individuales y el fasor resultante de la adición de los mismos. La distribución resultante para datos complejos de un solo *look* es una Gaussiana compleja de valor medio nulo y varianza proporcional a la retrodispersión. En lo que sigue, consideraremos que una variable aleatoria X está distribuida $\Gamma(\alpha, \lambda)$ cuando su densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x). \quad (3.3)$$

La distribución para la componente de speckle asociada a cada pixel es la $\Gamma(n, 2n)$, donde n es la cantidad de *looks*, o número equivalente de *looks* (ver Jakeman & Pusey 1976). Por lo tanto su densidad será

$$f_Y(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-ny} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y), \quad (3.4)$$

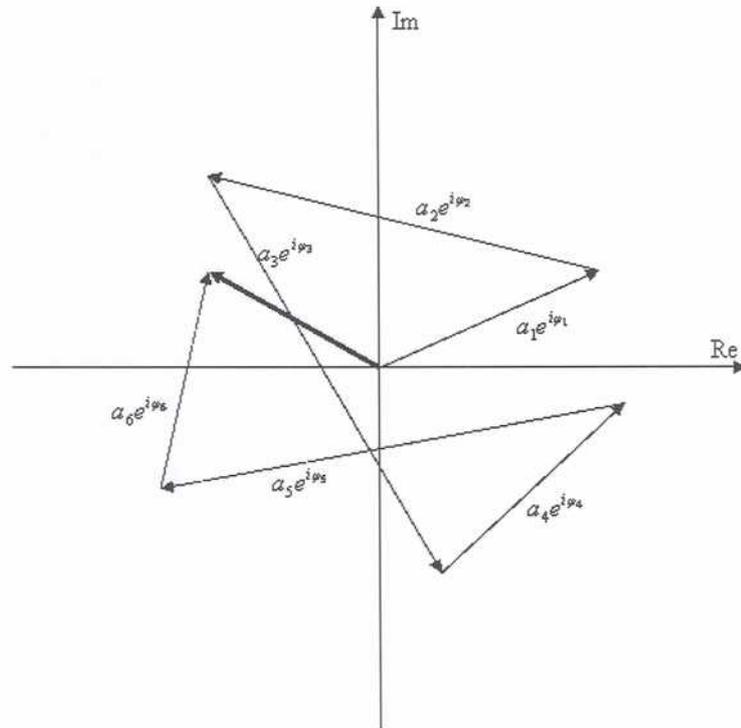


Figura 3.1: Adición coherente de los retornos correspondientes a los elementos presentes en una celda de resolución.

donde se han omitido los índices de la variable aleatoria porque esta distribución es válida para todas las coordenadas, ya que la cantidad de *looks* es la misma para toda la imagen. Para el modelado de imágenes SAR el mínimo valor para n es 1. Este valor corresponde a las imágenes generadas sin realizar el promedio de varios *looks*. Las imágenes así generadas son más ruidosas pero poseen mejor resolución azimutal y con ello, potencialmente, más información. Este parámetro n puede suponerse conocido, o bien puede ser estimado en una etapa inicial del análisis de la imagen. Por esta razón, aunque en teoría debería ser un entero, en la práctica es necesario considerarlo real para el caso en el que sea estimado a partir de los datos. En esta tesis, al número de *looks* n se lo supondrá entero y conocido.

Los momentos de la distribución están del *speckle* están dados por

$$\mathbb{E}[Y^r] = \frac{1}{n^r} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}, \quad (3.5)$$

donde r es el orden del momento y $n \geq 1$ es el número de looks. Utilizando la ecuación (3.5), es posible derivar la asimetría γ_1 y la curtosis γ_2 de una variable aleatoria con esta distribución:

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^3]}{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^{3/2}]} = 2n^{-1/2},$$

$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^4]}{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]} - 3 = 6n^{-1}.$$

De esta manera, ambas cantidades decrecen con el número de looks, hecho que puede constatarse en la figura (3.2), esto es, a medida que aumenta el número de looks esta distribución tiende a adoptar una forma mas cercana a la distribución normal. En el límite se tiene una distribución degenerada en el valor 1.

3.2 Distribuciones para la retrodispersión

Tal como ya fue dicho, el modelo multiplicativo consiste en suponer que el retorno en cada coordenada $z_{i,j}$ está descrito por la variable aleatoria $Z_{i,j}$, que resulta de multiplicar las variables aleatorias independientes $X_{i,j}$ e $Y_{i,j}$. Esta última, que describe al ruido *speckle*, fue presentada en la sección anterior. En esta sección veremos diversas alternativas para modelar la retrodispersión, esto es, presentaremos algunas distribuciones para la variable aleatoria $X_{i,j}$. Conociendo la distribución del *speckle* (sección 3.1) y la del backscatter, la distribución de la variable aleatoria que describe los datos observados queda perfectamente caracterizada.

En esta sección veremos las principales propiedades de algunas de las distribuciones más comunmente empleadas para modelar el backscatter de datos SAR, y de las que serán centrales para esta tesis. El

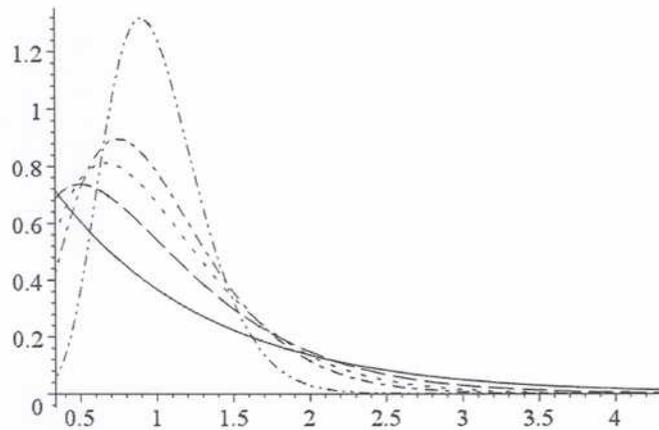


Figura 3.2: Curvas de la distribución Γ , correspondiente al speckle, para número de looks igual a: 1 (sólida), 2 (trazos), 3 (puntos), 4 (punto-trazo) y 10 (punto-punto-trazo).

enfoque adoptado consistirá en partir del modelo más general disponible (la distribución Gaussiana Inversa Generalizada, sección 3.2.1) para derivar casos particulares relevantes: las distribuciones Gamma (sección 3.2.2), Recíproca de Gamma (sección 3.2.3) y Gaussiana Inversa (sección 3.2.4). En la sección 3.2.5 se hace un resumen gráfico de las relaciones entre estas distribuciones.

3.2.1 Distribución Gaussiana Inversa Generalizada (GIG)

A partir de los resultados presentados en (Frery et al. 1997, Mejail 1999, Mejail, Jacobo-Berlles, Frery & Bustos 2000), es posible considerar como modelo general para el backscatter una variable aleatoria con distribución Gaussiana Inversa Generalizada. Esta distribución es caracterizada por la densidad

$$f_X(x) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{2K_\alpha(\sqrt{\lambda\gamma})} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda x + \frac{\gamma}{x}\right)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (3.6)$$

determinada por los parámetros γ , λ y α . Los rangos de variación de estos parámetros están dados por

$$\begin{cases} \gamma > 0 \text{ y } \lambda \geq 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ \gamma > 0 \text{ y } \lambda > 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \gamma \geq 0 \text{ y } \lambda > 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} . \quad (3.7)$$

La función K_α es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden α y está dada por

$$K_\alpha(\sqrt{ab}) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(ax + bx^{-1})\right) dx.$$

Los momentos de esta distribución están dados por

$$\mathbb{E}[X^r] = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{r/2} \frac{K_{\alpha+r}(\sqrt{\gamma\lambda})}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})}. \quad (3.8)$$

Esta distribución es lo suficientemente general como para describir una gran cantidad de blancos, pero tiene como desventaja el llevar a distribuciones para el retorno para las cuales la estimación de parámetros es analíticamente compleja y numéricamente inestable. Varios casos particulares de esta distribución tienen interés particular para este trabajo: la distribuciones Constante, Gamma, Recíproca de Gamma y Gaussiana Inversa, comentadas a seguir.

El uso de una constante como modelo para el backscatter fue propuesto inicialmente, pero es una hipótesis muy restrictiva que, más modernamente (Frery et al. 1997), puede ser entendida como un caso particular de las tres distribuciones estudiadas a seguir. La distribución Gamma se utiliza para describir el backscatter de datos heterogéneos, y lleva a la distribución K para el retorno (Goodman 1985, Jakeman & Pusey 1976, Oliver & Quegan 1998). La distribución Recíproca de Gama fue propuesta en (Mejail 1999, Mejail et al. 2000) como un modelo universal para datos SAR, y redundante en la distribución GIO para el retorno. La principal contribución de esta tesis es la propuesta de la distribución Gaussiana Inversa como modelo para el backscatter de datos polarimétricos que, para el caso de datos de intensidad, lleva a la distribución GIH (Müller et al. 2000).

Estos casos particulares se obtienen instanciando los parámetros de la distribución Gaussiana Inversa Generalizada. Para ello, es necesario utilizar las siguientes propiedades de la función K de Bessel (Gradshteyn & Ryzhik 1980):

- para todo x y para todo ν vale que $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$;
- para valores muy pequeños del argumento es posible aproximar a la función $K_\nu(x)$ por $2^{|\nu|-1} \Gamma(|\nu|) x^{-|\nu|}$.

3.2.2 Distribución Gamma Γ

Haciendo $\gamma \rightarrow 0$, con $\alpha, \lambda > 0$ en la fórmula (3.6), esta densidad se transforma en

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda x\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x). \quad (3.9)$$

y la fórmula de los momentos (3.8) deviene en

$$\mathbb{E}[X^\tau] = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^\tau \frac{\Gamma(\alpha + \tau)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.10)$$

3.2.3 Distribución Recíproca de Gamma Γ^{-1}

Haciendo $\lambda \rightarrow 0$, con $-\alpha, \gamma > 0$ en la fórmula (3.6), esta densidad se reduce a

$$f_X(x) = \frac{2^\alpha}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{2x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (3.11)$$

y la fórmula de los momentos (3.8) deviene en

$$\mathbb{E}[X^\tau] = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^\tau \frac{\Gamma(-\alpha - \tau)}{\Gamma(-\alpha)}, \quad (3.12)$$

donde $\alpha < 0$ y $|\alpha| > \tau$. Si $-\tau < \alpha < 0$ el momento vale ∞ .

3.2.4 Distribución Gaussiana Inversa (GI)

Es un caso particular de la distribución Gaussiana Inversa Generalizada al hacer $\alpha = -1/2$ en la fórmula (3.6). Esta distribución fue extensamente estudiada en Jørgensen (1982) para diversas aplicaciones, y

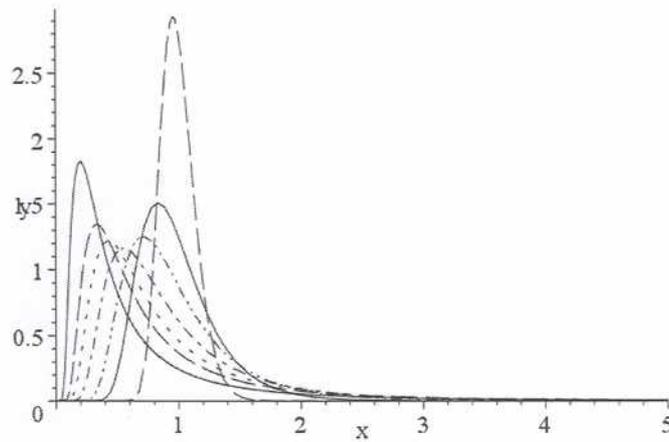


Figura 3.3: Curvas de la distribución Γ^{-1} para media unitaria y γ igual a: 1 (sólida), 2 (trazos), 3 (puntos), 5 (punto-trazo), 10 (punto-punto-trazo), 20 (sólida) y 100 (trazos).

se la utilizó para derivar otras distribuciones importantes en Barndorff-Nielsen & Blæsild (1981). La distribución Gaussiana Inversa debe su nombre a la relación que su función generadora de momentos tiene con respecto a la función generadora de momentos de variables aleatorias con distribución Gaussiana. Tal como es mostrado en Jørgensen (1982), se la puede utilizar con éxito para modelar datos positivos para los cuales la distribución Gamma no ofrece un buen ajuste. Es también notable que puede dársele una interpretación física en varios problemas.

Una variable aleatoria X posee una distribución Gaussiana Inversa con parámetros γ, λ cuando su densidad esta dada por

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{\lambda x} - \sqrt{\gamma})^2}{2x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (3.13)$$

con $\lambda, \gamma > 0$. Esta situación será denotada $X \sim GI^*(\lambda, \gamma)$.

Los momentos de esta distribución están dados por

$$\mathbb{E}[X^r] = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{\gamma\lambda}\right)^{1/2} \exp(\sqrt{\gamma\lambda}) \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}\right)^r K_{r-\frac{1}{2}}(\sqrt{\gamma\lambda}), \quad (3.14)$$

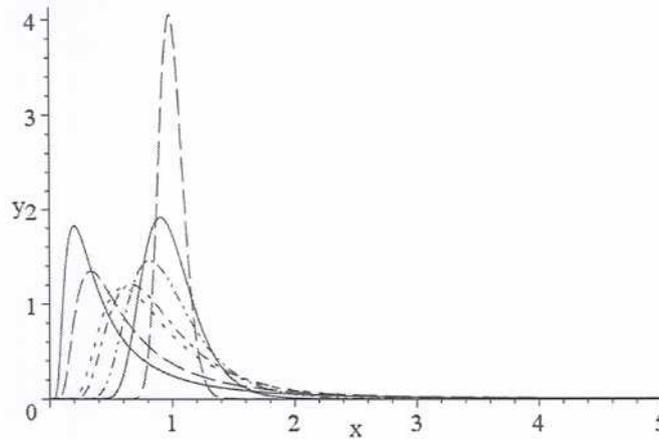


Figura 3.4: Curvas de la distribución Γ^{-1} para media unitaria y α igual a: $-1,5$ (sólida), -2 (trazos), -4 (puntos), -5 (punto-trazo), -10 (punto-punto-trazo), -20 (sólida) y -100 (trazos).

por lo que, los momentos de primer orden, de segundo orden y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}, \quad (3.15)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{\gamma}{\lambda} + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda^3}} \gamma \quad (3.16)$$

$$\mathbb{E}[(X^2 - \mathbb{E}[X])] = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda^3}}, \quad (3.17)$$

respectivamente.

Los parámetros γ y λ pueden ser utilizados para definir un nuevo par de parámetros ω y η , mediante las siguientes fórmulas

$$\omega = \sqrt{\gamma\lambda}, \quad (3.18)$$

$$\eta = \sqrt{\gamma/\lambda},$$

de manera que tenemos que la fórmula (3.6) queda expresada como

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\omega\eta}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \frac{(x-\eta)^2}{x\eta}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x). \quad (3.19)$$

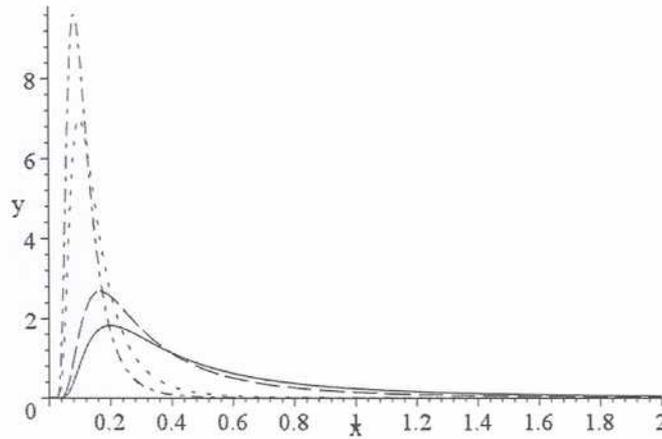


Figura 3.5: Curvas de la distribución Γ^{-1} para $\gamma = 1$ y α igual a: $-1,5$ (sólida), -2 (trazos), -4 (puntos) y -5 (punto-trazo).

Esta situación será denotada $X \sim \text{GI}(\omega, \eta)$, y es posible ver que los momentos correspondientes están dados por

$$\mathbb{E}[X^r] = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} e^{\omega\eta^r} K_{r-\frac{1}{2}}(\omega). \quad (3.20)$$

Entonces, los momentos de primer orden, de segundo orden y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \eta, \quad (3.21)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \eta^2 \frac{\omega + 1}{\omega}. \quad (3.22)$$

$$\mathbb{E}[(X^2 - \mathbb{E}[X])^2] = \eta^2 \frac{\omega + 1}{\omega} \quad (3.23)$$

respectivamente. Puede observarse que con esta reparametrización uno de los parámetros corresponde al valor medio y el otro se relaciona con la forma de la densidad.

De la fórmula (3.20) surge que la asimetría y la curtosis de una va-

riable aleatoria con esta distribución están dadas, respectivamente, por

$$\gamma_1 = \frac{3}{\sqrt{\omega}},$$

$$\gamma_2 = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\omega^2 + \frac{15}{\omega}.$$

Se puede comprobar que si $X \sim \text{GI}(\omega, \eta)$ entonces $X/\eta \sim \text{GI}(\omega, 1)$, con lo que, al ser η el valor medio de la distribución, la densidad de la variable aleatoria X/η es

$$f_{X/\eta}(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \frac{(x-1)^2}{x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

En la figura 3.6 pueden verse las curvas correspondientes a la densidad para $\eta = 1$ y varios valores de ω . Tal como puede observarse en esta figura, el parámetro ω tiene influencia en la forma de la densidad. En la figura 3.7 pueden verse las curvas correspondientes a la densidad para $\omega = 1$ y varios valores de η . Este último comportamiento es el típico exhibido por los parámetros de escala.

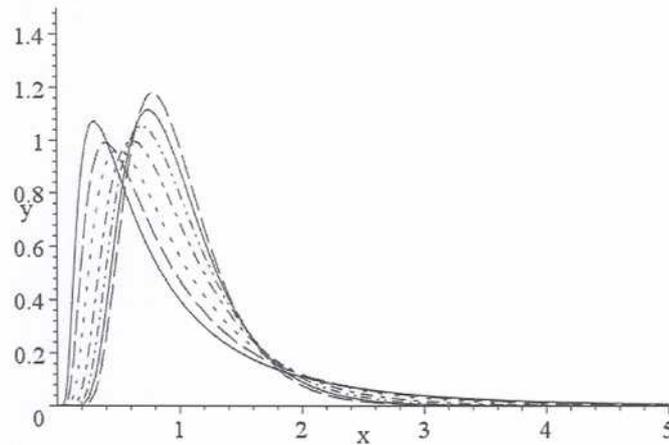


Figura 3.6: Densidad de la distribución $\text{GI}(x, \omega, \eta)$, para $\eta = 1$ y $\omega = 1$ (sólida), $\sqrt{2}$ (trazos), 2 (puntos), 3 (punto-trazo), 4 (punto-punto-trazo), 5 (sólida) y 6 (trazos).

(XXX Poner la fórmula de la moda, para confirmar lo que se ve en la figura 3.6.)

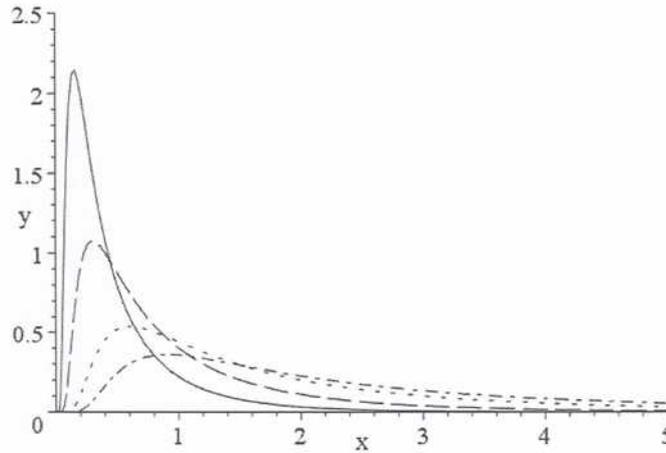


Figura 3.7: Densidad de la distribución $GI(x, \omega, \eta)$, para $\omega = 1$ y $\eta = 0,5$ (sólida), 1 (trazos), 2 (puntos) y 3 (punto-trazo).

3.2.5 Relaciones entre Distribuciones

Las distribuciones para el backscatter se relacionan como casos particulares de la distribución Gaussiana Inversa Generalizada. Estos casos particulares se obtienen asignando ciertos valores a los parámetros de esta distribución. Las relaciones entre los mismos se ilustran en el esquema (3.24).

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda) & \\
 (\lambda = 0) & (\alpha = -1/2) & (\gamma = 0) \\
 \swarrow & \downarrow & \searrow \\
 \Gamma^{-1}(-\alpha, \gamma) & GI^*(\lambda, \gamma) & \Gamma(\alpha, \lambda) \\
 \left(\begin{array}{l} -\alpha \rightarrow \infty, \\ \gamma \rightarrow \infty \\ -\alpha/\gamma \rightarrow \beta_1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{l} \gamma \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow \infty \\ \gamma/\lambda \rightarrow \beta_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \infty, \\ \lambda \rightarrow \infty \\ \alpha/\gamma \rightarrow \beta_3 \end{array} \right) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \beta_1^{-1} & \beta_2^2 & \beta_3
 \end{array} \tag{3.24}$$

Tal como puede verse, los tres casos particulares de interés para modelar el backscatter tienen, a su vez, a constantes como casos espe-

aplicaciones. Las relaciones exhibidas en el esquema (3.24) se interpretan, para la distribución Γ , de la siguiente manera: α y λ son constantes de valores positivos tales que $\alpha > \lambda$ y x es el elemento de la relación $\alpha, \gamma, \lambda \rightarrow \beta_1 \in \mathbb{R}^+$, es decir, α, γ, λ son variables aleatorias $X_{\alpha, \gamma, \lambda} \sim \Gamma(\alpha, \gamma, \lambda)$ con $\alpha > \lambda$ y x es una variable aleatoria degenerada en el punto β_1 . Analogamente, γ, λ son constantes de valores positivos tales que $\gamma > \lambda$ y x es el elemento de la relación $\gamma, \lambda \rightarrow \beta_2 \in \mathbb{R}^+$, es decir, γ, λ son variables aleatorias $X_{\gamma, \lambda} \sim \Gamma(\gamma, \lambda)$ con $\gamma > \lambda$ y x es una variable aleatoria degenerada en el punto β_2 . Finalmente, α, γ son constantes de valores positivos tales que $\alpha > \gamma$ y x es el elemento de la relación $\alpha, \gamma \rightarrow \beta_3 \in \mathbb{R}^+$, es decir, α, γ son variables aleatorias $X_{\alpha, \gamma} \sim \Gamma(\alpha, \gamma)$ con $\alpha > \gamma$ y x es una variable aleatoria degenerada en el punto β_3 . En suma (1999)

ciales. El backscatter constante es el primer modelo tratado para datos SAR, y aparece siempre que la escala de la rugosidad sea menor que la longitud de onda empleada para formar la imagen. Ésto ocurre en, por ejemplo, áreas cultivadas con papa, remolacha etc., y esta situación se conoce como *datos homogéneos*. Por esta razón es importante que los modelos empleados para describir el backscatter puedan reducirse a una constante, ya que datos homogéneos son muy frecuentes en las aplicaciones.

Las relaciones exhibidas en el esquema (3.24) deben interpretarse, para la distribución Γ , de la siguiente manera: sean α_m y λ_m secuencias de valores positivos tales que $\alpha_m \rightarrow \infty$ y $\lambda_m \rightarrow \infty$ obedeciendo la relación $\alpha_m/\lambda_m \rightarrow \beta_1 \in \mathbb{R}_+$, entonces la secuencia de variables aleatorias $X_m \sim \Gamma(\alpha_m, \lambda_m)$ converge en distribución a una variable aleatoria degenerada en el punto β_1 . Análogamente deben interpretarse las convergencias enunciadas para las distribuciones Γ^{-1} y GI^* . En Silva (1999) pueden verse las pruebas detalladas así como resultados más fuertes de estas convergencias.

Para el caso particular de la distribución $GI^*(\lambda, \gamma)$ se tiene que de (3.35), (3.18) y (3.36) se deduce fácilmente que si $X \sim GI^*(\lambda, \gamma)$ entonces

$$\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}$$

y que

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda^3}}$$

las cuales justifican las convergencias indicadas en la columna correspondiente del esquema (3.24).

3.3 Distribuciones para el retorno

La distribución correspondiente al retorno Z , queda fijada por la distribución del backscatter X y por la distribución del speckle Y . Dado que $Z = XY$, y que estas variables aleatorias son independientes, $f_Z(z)$ puede

calcularse como

$$f_z(z) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{z|Y=y}(z) f_Y(y) dy, \quad (3.25)$$

donde $f_{z|Y=y}$ es la densidad del retorno Z considerando $Y = y$ constante y f_Y es la densidad del speckle Y .

En las siguientes secciones derivaremos las distribuciones para el retorno suponiendo que la distribución del speckle es $\Gamma(n, n)$, cuya densidad está dada en la ecuación (3.4), para los casos de backscatter tratados en la sección 3.2.

3.3.1 Distribución $\mathcal{G}_I(\alpha, \gamma, \lambda, n)$

Es el caso más general, puesto que es el resultado de considerar que el backscatter posee una distribución Gaussiana Inversa Generalizada. En este caso, utilizando la propiedad de escala en la densidad dada en (3.6), surge que la densidad $f_{z|Y=y}$ está dada por

$$f_{z|Y=y}(z) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{2K_\alpha(\sqrt{\lambda\gamma}) y^\alpha} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{z}{y} + \gamma\frac{y}{z}\right)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z), \quad (3.26)$$

utilizando la densidad del speckle, dada en la ecuación (3.4), y el resultado presentado en la ecuación (3.25), se obtiene la densidad del retorno Z , dada por

$$f_z(z) = \frac{n^n \lambda^{n/2}}{\gamma^{\alpha/2} \Gamma(n) K_\alpha(\sqrt{\lambda\gamma})} z^{n-1} (\gamma + 2zn)^{(\alpha-n)/2} K_{n-\alpha}\left(\sqrt{\lambda(\gamma + 2zn)}\right). \quad (3.27)$$

Esta situación será denotada $Z \sim \mathcal{G}_I(\alpha, \gamma, \lambda, n)$. Los momentos de \mathbf{z} están dados por

$$\mathbb{E}[Z^\tau] = \left(\frac{\gamma}{\lambda n^2}\right)^{\tau/2} \frac{K_{\alpha+\tau}(\sqrt{\gamma\lambda})}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} \frac{\Gamma(n+\tau)}{\Gamma(n)}. \quad (3.28)$$

El espacio paramétrico de α , γ y λ está dado por la relación dada en (3.7), y $n \geq 1$. Esta distribución fue propuesta en Frery et al. (1997) como un modelo general para datos SAR.

3.3.2 Distribución $\mathcal{K}_I(\alpha, \lambda, n)$

Esta distribución fue propuesta en (poner aquí la referencia)

$$f_{Z|Y=y}(z) = \frac{(\lambda/y)^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda z}{y}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z), \quad (3.29)$$

$$f_Z(z) = \frac{\lambda n}{2 \Gamma(\alpha) \Gamma(n)} \left(\frac{\lambda n z}{2}\right)^{\frac{n+\alpha}{2}-1} K_{n-\alpha}\left(\sqrt{2n\lambda z}\right), \quad (3.30)$$

3.3.3 Distribución $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, n)$

Surge de considerar que la variable aleatoria X correspondiente al backscatter posee distribución Recíproca de Gamma $\Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$. Entonces, utilizando la densidad dada en la ecuación (3.11) y la propiedad de escala, puede demostrarse que la densidad de $Z | Y = y$ está dada por

$$f_{Z|Y=y}(z) = \frac{2^\alpha}{(\gamma y)^\alpha \Gamma(-\alpha)} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma y}{2z}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z), \quad (3.31)$$

luego, de (3.25), (3.31) y (3.4) puede deducirse que la densidad del retorno Z , está dada por

$$f_Z(z) = \frac{n^n \Gamma(n-\alpha)}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} z^{n-1} \left(\frac{\gamma}{2} + nz\right)^{\alpha-n} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z), \quad (3.32)$$

con $\alpha < 0$, $\gamma > 0$ y $n \geq 1$.

Esta situación será denotada $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, n)$. Dada la independencia entre el backscatter X y el speckle Y , los momentos del retorno Z se calculan como el producto de los momentos de X e Y , dados por (3.12) y (3.5) respectivamente, resultando

$$\mathbb{E}[Z^\tau] = \left(\frac{\gamma}{2n}\right)^\tau \frac{\Gamma(-\alpha-\tau) \Gamma(n+\tau)}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(n)}, \quad (3.33)$$

recordando que estos momentos sólo serán finitos para $-\alpha > \tau$.

Esta distribución fue propuesta en Frery et al. (1997) como un modelo para datos extremadamente heterogéneos, pero se constató su utilidad para la descripción de una gran variedad de blancos naturales y artificiales. En Mejail (1999) se constató que esta distribución permite aproximar otros modelos para cualquier tipo de retorno y, con ésto, se la propuso como modelo universal para datos SAR.

3.3.4 Distribución $\mathcal{G}_I^H(\omega, \eta, n)$

Esta distribución fue propuesta en Müller et al. (2000) como un modelo universal alternativo para datos SAR en el contexto del Modelo Multiplicativo. A pesar de requerir el empleo de funciones K de Bessel, se verá que este inconveniente, en este caso, puede ser subsanado utilizando la equivalencia entre estas funciones y ciertas series finitas. Dado que esta distribución es poco conocida, puesto que es una propuesta reciente, en esta sección serán presentados algunos resultados no disponibles en la literatura. En el Capítulo ?? de esta tesis se mostrarán aplicaciones de esta distribución a imágenes SAR en formato de intensidad.

Para este caso, se considera que la variable aleatoria X posee distribución GI(ω, η) por lo que su densidad está dada por (3.19), de allí y de considerar $Z = XY$ se puede deducir que

$$f_{Z|Y=y}(z) = \sqrt{\frac{\omega\eta y}{2\pi z^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega\frac{(z-\eta y)^2}{yz\eta}\right)$$

y utilizando (3.25) se concluye que la densidad para el backscatter z es

$$f_Z(z) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \sqrt{\frac{2\omega\eta}{\pi}} \exp(\omega) \left(\frac{\omega}{\eta(\omega\eta + 2zn)}\right)^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{n-1} K_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\eta}(\omega\eta + 2zn)}\right).$$

Debido a la independencia entre el backscatter X y el speckle Y, los momentos del retorno Z se calculan simplemente como el producto entre los momentos de ambos, dados por las ecuaciones (3.20) y (3.5) respectivamente, lo que da como resultado

$$\mathbb{E}[Z^r] = \left(\frac{\eta}{n}\right)^r e^{\omega} \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} K_{r-\frac{1}{2}}(\omega) \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}. \quad (3.34)$$

De esta última, los momentos de primer y segundo orden resultan ser

$$\mathbb{E}[Z] = \eta \quad (3.35)$$

y

$$\mathbb{E}[Z^2] = \eta^2 \frac{\omega + 1}{\omega} \frac{n + 1}{n} \quad (3.36)$$

respectivamente.

Capítulo 4

El Modelo Multiplicativo para datos polarimétricos

En este capítulo se presentarán los modelos polarimétricos clásicos y los modelos \mathcal{S} , que son la propuesta de esta tesis. Para ello se modelarán tanto el speckle como el backscatter, ambos para datos polarimétricos, en el contexto del Modelo Multiplicativo. Las distribuciones que se utilizarán para el backscatter son las estudiadas en el capítulo 3.

A diferencia de lo visto en ese capítulo, el cual trata de imágenes con una sola polarización, en éste se considerará que la componente de backscatter en el modelo multiplicativo polarimétrico tendrá en cuenta sólo la variabilidad del mismo, ya que se la supondrá de media unitaria. El valor medio del backscatter será tenido en cuenta en la componente que modela el speckle.

En la sección 4.1 de éste capítulo se estudiará la distribución Wishart, que es la adoptada para modelar el speckle de datos en modalidad polarimétrica.

Estas distribuciones, a través del modelo multiplicativo polarimétrico a ser descrito en la sección 4.2, darán lugar a las distribuciones para datos polarimétricos explicadas en las secciones 4.3 y 4.4.

4.1 Distribución para el speckle polarimétrico

En esta sección se verán la distribución Gaussiana Compleja Multivariada y la distribución Wishart Centrada Compleja. La primera define vectores aleatorios complejos y la segunda define una matriz aleatoria basada en éstos. La distribución Wishart Centrada Compleja (Goodman 1963b, Goodman 1963a, Srivastava 1965) es el modelo consagrado en la literatura (Oliver & Quegan 1998) para el retorno oriundo de zonas homogéneas, y sirve de base para construir las distribuciones que describirán el retorno que proviene de otro tipo de blancos.

4.1.1 Distribución Gaussiana Compleja Multivariada

Esta distribución fue derivada en (Goodman 1963b, Goodman 1963a) para trabajar con ciertas funciones y transformadas de Fourier. Srivastava (1965) da otra forma de derivar la misma distribución. Goodman (1985) utiliza esta distribución para derivar modelos para el ruido speckle, común a todas las imágenes formadas con iluminación coherente. Esta distribución es un caso particular de una cierta distribución Gaussiana multivariada, donde algunas componentes se suponen imaginarias y donde se impone una estructura de correlación particular.

Para especificar la distribución Gaussiana Compleja Multivariada sobre un vector complejo \mathbf{T} , construiremos un vector aleatorio real \mathbf{H} con una cierta distribución Gaussiana multivariada.

Sea $\mathbf{T} = [t_1, \dots, t_p]^t$ un vector de p variables aleatorias complejas, donde cada una puede escribirse dejando explícitas las componentes real e imaginaria de la siguiente forma: $t_k = r_k + j i_k$, con r_k e i_k variables aleatorias reales y $j = \sqrt{-1}$. Se define entonces un vector aleatorio \mathbf{H} de longitud $2p$ dado por $\mathbf{H} = [r_1, i_1, \dots, r_p, i_p]^t$, con distribución Normal Multivariada y matriz de covarianza $\Sigma_{\mathbf{H}}$. Esta matriz se define de forma tal que puede ser descompuesta en bloques $(\Sigma_{\mathbf{H}})_{k,\ell}$ de tamaño 2×2 con

$k, \ell = 1, \dots, p$ dados por

$$\begin{aligned}
 (\Sigma_{\mathbf{H}})_{k,\ell} &= \mathbb{E} \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_k - \mu_{\mathbf{r}_k})(\mathbf{r}_\ell - \mu_{\mathbf{r}_\ell}) & (\mathbf{r}_k - \mu_{\mathbf{r}_k})(\mathbf{i}_\ell - \mu_{\mathbf{i}_\ell}) \\ (\mathbf{i}_k - \mu_{\mathbf{i}_k})(\mathbf{r}_\ell - \mu_{\mathbf{r}_\ell}) & (\mathbf{i}_k - \mu_{\mathbf{i}_k})(\mathbf{i}_\ell - \mu_{\mathbf{i}_\ell}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{cases} \frac{\sigma_k^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } k = \ell \\ \frac{\sigma_k \sigma_\ell}{2} \begin{bmatrix} a_{k\ell} & -b_{k\ell} \\ b_{k\ell} & a_{k\ell} \end{bmatrix} & \text{si } k \neq \ell \end{cases}, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

donde $\sigma_k/\sqrt{2}$ son las desviaciones estándar de cada una de las componentes del vector aleatorio \mathbf{H} y los $a_{k\ell}$ y $b_{k\ell}$ son los coeficientes de correlación.

De la matriz de covarianza especificada en la ecuación (4.1) se desprende que las partes real e imaginaria de cada una de las componentes t_k del vector aleatorio \mathbf{T} no están correlacionadas y poseen la misma desviación estándar $\sigma_k/\sqrt{2}$. Se observa también que, para las correlaciones cruzadas entre dos componentes distintas t_k y t_ℓ , tenemos que la correlación entre partes reales, dada por $a_{k\ell}$, es igual a la correlación entre partes imaginarias. La correlación entre la parte real y la parte imaginaria está dada por $-b_{k\ell}$, mientras que la correlación entre la parte imaginaria y la parte real está dada por $b_{k\ell}$, o sea que poseen igual valor absoluto pero distinto signo.

Si el vector aleatorio \mathbf{H} sigue la distribución detallada más arriba, entonces el vector aleatorio \mathbf{T} correspondiente poseerá una distribución Gaussiana Compleja Multivariada, hecho que se denota como $\mathbf{T} \sim \mathcal{N}_C(\mu_{\mathbf{T}}, \Sigma_{\mathbf{T}})$, y su función de densidad estará dada por

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_{\mathbf{T}}|} \exp\left(-(\mathbf{T} - \mu_{\mathbf{T}})^* \Sigma_{\mathbf{T}}^{-1} (\mathbf{T} - \mu_{\mathbf{T}})\right),$$

donde $\mu_{\mathbf{T}}$ es el valor medio y la matriz de covarianza $\Sigma_{\mathbf{T}}$ es Hermítica (ver Capítulo 1) y está dada por

$$(\Sigma_{\mathbf{T}})_{k,\ell} = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{para } k = \ell \\ (a_{k\ell} + jb_{k\ell}) \sigma_k \sigma_\ell & \text{para } k \neq \ell \end{cases}, \quad (4.2)$$

con $k, \ell = 1, \dots, p$, y donde los $(\Sigma_{\mathbf{T}})_{k,\ell}$ son los elementos que la componen.

La distribución Gaussiana Compleja Multivariada sirve de base para construir la distribución de Wishart Centrada Compleja, que es el modelo más aceptado para el retorno de áreas homogéneas.

4.1.2 Distribución Wishart Centrada Compleja

La distribución Wishart Centrada Compleja se utiliza para modelar el speckle en datos polarimétricos. En la misma se tienen en cuenta los n looks modelados como n vectores aleatorios $\mathbf{T}(1), \dots, \mathbf{T}(n)$ i.i.d. Gaussianos Complejos Multivariados tales que $\mathbf{T}(k) \sim \mathcal{N}_C(0, \Sigma_{\mathbf{T}})$ y su tamaño $p \leq n$. En ellos, cada una de las p componentes corresponde a una combinación particular de polarización de emisión y polarización de recepción. En Polarimetría SAR tendremos $p = 3$ para el caso más común en el que la antena de emisión es la misma que la antena de recepción, y $p = 4$ si ambas antenas son distintas.

Definimos la matriz aleatoria \mathbf{W} de tamaño $p \times p$ mediante

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^n \mathbf{T}(k) \mathbf{T}(k)^{*t}. \quad (4.3)$$

La distribución conjunta de los $p \times p$ elementos de la matriz \mathbf{W} se llama distribución de Wishart Compleja Centrada (Goodman 1985) y se nota $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{T}}, n)$ donde el parámetro n indica los grados de libertad.

La función de densidad de la matriz aleatoria \mathbf{W} está dada por

$$f_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}) = \frac{|\mathbf{W}|^{n-p}}{\pi^{p(p-1)/2} \Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\mathbf{T}}|^n} \exp(-\text{tr}(\Sigma_{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{W})), \quad (4.4)$$

para $n \geq p$ y para todo $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{p \times p}$, en ella tr es el operador traza de una matriz (ver Capítulo 1).

En aplicaciones polarimétricas clásicas, y cuando se observan áreas homogéneas, esta es la distribución que se utiliza para describir los datos. Las peculiaridades de cada región, esto es, los parámetros que deberían discriminar diferentes blancos, son los valores de la matriz dada en la ecuación (4.2), que son los que caracterizan a la distribución Wishart Centrada Compleja que, la cual a su vez, posee la densidad dada en la ecuación (4.4).

Cuando se trata de áreas con diversos grados de heterogeneidad, en un rango entre lo homogéneo y lo heterogéneo, es necesario generalizar este modelo introduciendo la posibilidad de tener características de terreno variables, en vez de constantes. Para este fin se propuso la distribución \mathcal{K} polarimétrica (Lee, Schuler, Lang & Ranson 1994). En la práctica, se observan también datos extremadamente heterogéneos, para los cuales una propuesta más flexible es la distribución \mathcal{G}^0 polarimétrica, la cual se notará \mathcal{G}_p^0 y será explicada en la sección 4.4.1. En esta tesis se propone también una nueva distribución, a la que llamaremos Armónica polarimétrica. Ésta se notará \mathcal{G}_p^H y será explicada en la sección 4.4.2.

4.2 Modelo multiplicativo polarimétrico

Se adoptará para los datos SAR polarimétricos el siguiente modelo

$$\begin{bmatrix} Z_{hh} \\ Z_{hv} \\ Z_{vv} \end{bmatrix} = \sqrt{X} \begin{bmatrix} Y_{hh} \\ Y_{hv} \\ Y_{vv} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

donde el vector aleatorio $\mathbf{Z} = [Z_{hh}, Z_{hv}, Z_{vv}]^t$ modela el retorno, el vector aleatorio $\mathbf{Y} = [Y_{hh}, Y_{hv}, Y_{vv}]^t$ modela el ruido *speckle* y la variable aleatoria x modela la variabilidad del *backscatter* debida a la heterogeneidad de la zona sensada.

Dado que el ruido *speckle* suele ser intenso y puede perjudicar la interpretabilidad de las imágenes, es muy frecuente que sea realizado el procesamiento multilook para disminuir su efecto nocivo. Tal como se vio en el Capítulo 1, este procesamiento consiste en promediar looks idealmente independientes de la misma región y bajo las mismas condiciones (ángulo de observación, frecuencia, instante etc.). La variable aleatoria compleja que describe cada una de estos looks será denotada $\mathbf{Z}(k)$, donde k es el índice de cada look.

Definamos ahora la matriz aleatoria $\mathbf{Z}^{(n)}$ de 3×3 elementos como

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}(k) \mathbf{Z}(k)^{*t}, \quad (4.6)$$

donde n es la cantidad de looks y k el índice utilizado para recorrerlos. Definamos también $\mathbf{Y}^{(n)}$ en forma análoga, o sea

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}(k)^{*t}, \quad (4.7)$$

Entonces, de (4.5), (4.6) y (4.7) es fácil comprobar que

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \chi \mathbf{Y}^{(n)}, \quad (4.8)$$

o sea

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(n)} &= \chi \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}(k)^{*t} \\ &= \frac{\chi}{n} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} |Y_{hh}(k)|^2 & Y_{hh}(k)Y_{hv}^*(k) & Y_{hh}(k)Y_{vw}^*(k) \\ Y_{hv}(k)Y_{hh}^*(k) & |Y_{hv}(k)|^2 & Y_{hv}(k)Y_{vw}^*(k) \\ Y_{vw}(k)Y_{hh}^*(k) & Y_{vw}(k)Y_{hv}^*(k) & |Y_{vw}(k)|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si se considera que las componentes $\mathbf{Y}(k)$ poseen una distribución Gaussiana Compleja Multivariada, como la que se describe en la sección 4.1.1 con $p = 3$, entonces $n\mathbf{Y}^{(n)}$ poseerá una distribución Wishart Compleja Centrada, de acuerdo a lo expuesto en la sección 4.1.2 y, por lo tanto, la densidad de $\mathbf{Y}^{(n)}$ será

$$f_{\mathbf{Y}^{(n)}}(\mathbf{y}) = \frac{n^{np} |\mathbf{y}|^{n-p}}{\pi^{p(p-1)/2} \Gamma(n) \cdots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\mathbf{Y}}|^n} \exp(-n \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{y})), \quad (4.10)$$

para $n \geq p$ y para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{p \times p}$.

En las secciones 4.3 y 4.4 veremos los diferentes modelos que surgen de asignarles diversas distribuciones a la componente de backscatter χ . En todos ellos, el valor medio de dicha variable será considerado unitario, de manera que esta dará cuenta sólo de la variabilidad del backscatter, quedando a cargo de las componentes del vector aleatorio \mathbf{Y} el representar tanto la variabilidad del retorno \mathbf{Z} debido al ruido speckle como el valor medio del mismo.

Para la deducción de la densidad correspondiente al retorno para cada uno de los casos que se expondrán en éste capítulo, se utilizará la fórmula

$$f_{\mathbf{Z}^{(n)}}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{\mathbf{z}^{(n)}|\chi=x}(\mathbf{z}) f_{\chi}(x) dx, \quad (4.11)$$

en la que, debido a (4.8), debe tenerse en cuenta que

$$f_{\mathbf{Z}^{(n)}|X=x}(\mathbf{z}) = x^{-p^2} f_{\mathbf{Y}^{(n)}}(x^{-1}\mathbf{z}), \quad (4.12)$$

y que $|Z| = x^p |Y|$, por lo tanto (4.11) queda finalmente

$$f_{\mathbf{Z}^{(n)}}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^{-pn} n^{np} |\mathbf{z}|^{n-p}}{\pi^{p(p-1)/2} \Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\mathbf{Y}}|^n} \exp(-nx^{-1} \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{z})) f_X(x) dx. \quad (4.13)$$

4.3 Modelos polarimétricos clásicos

Esta sección trata modelos de datos polarimétricos en los que el backscatter es modelado como una constante: modelo Wishart, o como una variable aleatoria con distribución Γ : modelo \mathcal{K}_p . El primer modelo se adapta a datos homogéneos tales como los provenientes de pasturas y algunos tipos de cultivos. El segundo sirve también para datos heterogéneos, tales como los correspondientes a algunos tipos de bosques. El primero es una versión polarimétrica del modelo Gamma para datos monopolarizados. Análogamente, el segundo es una versión polarimétrica del modelo \mathcal{K} para datos monopolarizados.

4.3.1 Modelo Wishart

En este modelo el backscatter x es constante, por esto se lo modela como una variable aleatoria constante, o sea $X \sim \mathcal{C}(\beta)$ para el caso de un backscatter $x = \beta$ constante. Entonces la función de densidad para X será

$$f_X(x) = \delta(x - \beta). \quad (4.14)$$

El retorno estará dado por $\mathbf{Z}^{(n)} = \beta \mathbf{Y}^{(n)}$ y su función de densidad será

$$f_{\mathbf{Z}^{(n)}}(\mathbf{z}) = \frac{\left(\frac{n}{\beta}\right)^{np} |\mathbf{z}|^{n-p}}{\pi^{p(p-1)/2} \Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\mathbf{Y}}|^n} \exp\left(-\frac{n}{\beta} \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1}\mathbf{z})\right), \quad (4.15)$$

4.3.2 Modelo \mathcal{K}_p

En este caso, el backscatter posee una distribución Γ con media unitaria, o sea $X \sim \Gamma(\alpha, 2\alpha)$, por lo tanto

$$f_X(x) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\alpha x), \quad (4.16)$$

por lo tanto, reemplazando 4.16 en 4.13 obtenemos

$$f_{\mathbf{z}^{(n)}}(\mathbf{z}) = \frac{2n^{np}\alpha^\alpha}{\pi^{p(p-1)/2}\Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\mathbf{Y}}|^n \Gamma(\alpha)}. \quad (4.17)$$

$$|\mathbf{z}|^{n-p} \left(\frac{2n \operatorname{tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{z})}{2\alpha} \right)^{(\alpha-np)/2} K_{\alpha-np} \left(2\sqrt{n\alpha \operatorname{tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{z})} \right). \quad (4.18)$$

4.4 Modelos polarimétricos \mathcal{G}_p

Los modelos polarimétricos \mathcal{G}_p surgen de considerar el backscatter como una variable aleatoria con distribución \mathcal{G}^0 o con distribución \mathcal{G}_H . En el primer caso obtenemos la distribución \mathcal{G}_p^0 , en el segundo, la distribución obtenida será la \mathcal{G}_p^H . En esta sección se detallan ambas distribuciones.

4.4.1 Modelo $\mathcal{G}_p^0(\Sigma_{\mathbf{Y}}, n)$

En este caso, el backscatter posee una distribución Γ con media unitaria, o sea $X \sim \Gamma^{-1}(\alpha, 2(-\alpha-1))$, por lo tanto

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(-\alpha-1)^\alpha \Gamma(-\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha+1}{x}\right), \quad (4.19)$$

por lo tanto, reemplazando 4.19 en 4.13 obtenemos

$$f_{\mathbf{z}^{(n)}}(\mathbf{z}) = \frac{n^{np}\Gamma(np-\alpha)}{\pi^{p(p-1)/2}\Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_{\mathbf{Y}}|^n (-\alpha-1)^\alpha \Gamma(-\alpha)}. \quad (4.20)$$

$$|\mathbf{z}|^{n-p} (n \operatorname{tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{z}) + (-\alpha-1)). \quad (4.21)$$

4.4.2 Modelo $\mathcal{G}_p^H(\omega, \Sigma_Y, n)$

Para esta distribución se considera que el backscatter X posee una distribución Gaussiana Inversa con media unitaria, o sea $X \sim GI(\omega, 1)$. Utilizando la ecuación (4.13) con

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{z}^{(n)}}(\mathbf{z}) &= \int_{\mathbb{R}_+} f_{\mathbf{z}^{(n)}|X}(\mathbf{z})f_X(x)dx \\ &= \frac{n^{np}|\mathbf{z}|^{n-p}}{\pi^{p(p-1)/2}\Gamma(n)\dots\Gamma(n-p+1)|\Sigma_Y|^n}e^\omega\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}_+} x^{-np-3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}[\omega x + (2n\text{Tr}(\Sigma_Y^{-1}\mathbf{z}) + \omega)x^{-1}]\right)dx. \end{aligned}$$

Como además $K_\nu(\sqrt{ab}) = (a/b)^{\nu/2} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\nu-1} \exp(-\frac{1}{2}(ax + bx^{-1})) dx$, con K_ν función modificada de Bessel de tercera especie de orden ν , entonces

$$f_{\mathbf{z}_C^{(n)}}(\mathbf{z}) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}n^{np}e^\omega\omega^{np+1}|\mathbf{z}|^{n-p}}{\pi^{p(p-1)/2}\Gamma(n)\dots\Gamma(n-p+1)|\Sigma_Y|^n} \frac{K_{np+1/2}\left(\sqrt{\omega(2n\text{Tr}(\Sigma_Y^{-1}\mathbf{z}) + \omega)}\right)}{(\omega(2n\text{Tr}(\Sigma_Y^{-1}\mathbf{z}) + \omega))^{\frac{np}{2} + \frac{1}{4}}}. \quad (4.22)$$

En particular se trabajará con $p = 3$, por lo tanto la fórmula anterior queda

$$f_{\mathbf{z}_C^{(n)}}(\mathbf{z}) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}n^{3n}e^\omega\omega^{3n+1}|\mathbf{z}|^{n-3}}{\pi^3\Gamma(n)\dots\Gamma(n-2)|\Sigma_Y|^n} \frac{K_{3n+1/2}\left(\sqrt{\omega(2n\text{Tr}(\Sigma_Y^{-1}\mathbf{z}) + \omega)}\right)}{(\omega(2n\text{Tr}(\Sigma_Y^{-1}\mathbf{z}) + \omega))^{\frac{3}{2}n + \frac{1}{4}}}. \quad (4.23)$$

Es interesante notar que, haciendo $p = 1$ y $\Sigma_Y = 1$, la densidad 4.22 corresponde a la densidad de distribución $\mathcal{G}_1^H(\omega, 1, n)$. Las funciones de Bessel modificadas del tercer tipo, que aparecen en las fórmulas 4.22 y 4.23 pueden ser calculadas mediante una fórmula cerrada dada por

$$K_{np+1/2}(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}e^\nu \sum_{k=0}^{np} \frac{(np+k)!}{k!(np-k)!(2\nu)^k}, \quad (4.24)$$

con

$$\nu = \sqrt{\omega(2n\text{Tr}(\Sigma_Y^{-1}\mathbf{z}) + \omega)}. \quad (4.25)$$

4.5 Ajustes

Con el objetivo apreciar la capacidad de los modelos explicados en la sección 4.4 para describir datos polarimétricos, se utilizó una imagen E-SAR banda L de la zona de Weßling, en Bavaria, Alemania (fig 4.1). A partir de la imagen polarimétrica compleja de 1 look se generaron tres imágenes de intensidad, tomando una de cada tres columnas en la dirección azimutal. Estas imágenes fueron promediadas obteniéndose así una imagen de intensidad de 3 looks.

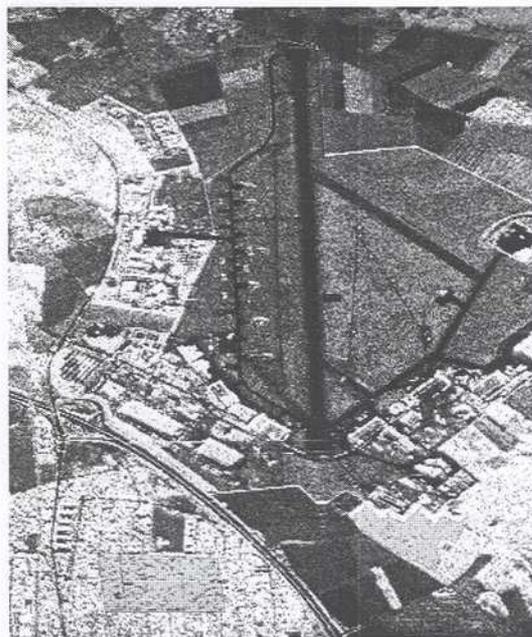


Figura 4.1: Imagen E-SAR banda L de la zona cercana a la ciudad de Weßling, Bavaria, Alemania. Regiones de interés: ciudad(rojo), bosque(verde oscuro), pasto(verde claro).

Para que la hipótesis de ausencia de correlación espacial, común a todos los modelos presentados en esta tesis, pueda ser considerada como razonable, la imagen de intensidad de 3 looks fue posteriormente submuestreada cada 4 posiciones en rango y en azimut para bajar la correlación espacial a menos del 10% en la zona de ciudad, que es la que presenta la más alta correlación espacial. En la figura 4.2 pueden apreciarse los gráficos correspondientes a la correlación espacial en las

tres bandas para las direcciones de rango y de azimut. En ella se vé que para los seis casos, la correlación desciende por debajo del 10% para una distancia de 4 posiciones.

Se consideraron tres tipos de zona: ciudad, bosque y pastura, indicadas en la figura 4.1. Se calcularon los valores de los parámetros estadísticos por el método de los momentos utilizándose las fórmulas 5.7 y 5.9. En general, se observó un buen ajuste de las densidades estudiadas a los datos polarimétricos utilizados, lo que constituye un argumento a favor de la utilización de una variable X, que modela la variabilidad del backscatter común a las tres polarizaciones y, consecuentemente, la utilización de un solo parámetro de rugosidad.

En el caso de ciudad, en HH el ajuste de la distribución \mathcal{G}_p^0 fue bueno mientras que el de la \mathcal{G}_p^H fue deficiente. En HV y en VV los ajustes de ambas distribuciones fueron regulares. En bosque, ambas distribuciones ajustaron bien para todas las polarizaciones. En pasto, la \mathcal{G}_p^0 ajustó significativamente mejor que la \mathcal{G}_p^0 .

Respecto de la validez de la adopción de un valor promedio para el parámetro ω en el caso de la \mathcal{G}_p^H y α promedio en el caso de la \mathcal{G}_p^0 , la variación relativa para cada una de las polarizaciones parece indicar que: para la distribución \mathcal{G}_p^H la suposición es aceptable para bosque y para pasto, mientras que para la distribución \mathcal{G}_p^0 lo es para bosque y ciudad (ver cuadros ??, 4.2 y 4.3).

Las matrices de covarianza para las clases ciudad, bosque y pasto están dadas por las fórmulas 4.26, 4.27 y 4.28, respectivamente.

$$(\Sigma_{\mathbf{Y}})_{ciudad} = \begin{pmatrix} 962892 & 19171 - j3579 & -154638 + j191388 \\ 19171 + j3579 & 56707 & -5798 + j16812 \\ -154638 - j191388 & -5798 - j16812 & 472251 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$(\Sigma_{\mathbf{Y}})_{bosque} = \begin{pmatrix} 360932 & 11050 + j3759 & 63896 + j1581 \\ 11050 - j3759 & 98960 & 6593 + j6868 \\ 63896 - j1581 & 6593 - j6868 & 208843 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

	HH	HV	VV	promedio
$\hat{\alpha}$	-2.25	-3.48	-2.44	-2.72
$\hat{\omega}$	0.17	0.94	0.19	0.43

Cuadro 4.1: Valores estimados de los parámetros α y ω para ciudad.

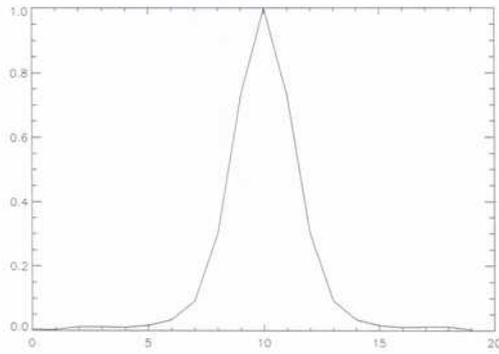
	HH	HV	VV	promedio
$\hat{\alpha}$	-19.56	-18.59	-17.80	-18.65
$\hat{\omega}$	10.22	8.53	10.55	9.77

Cuadro 4.2: Valores estimados de los parámetros α y ω para bosque.

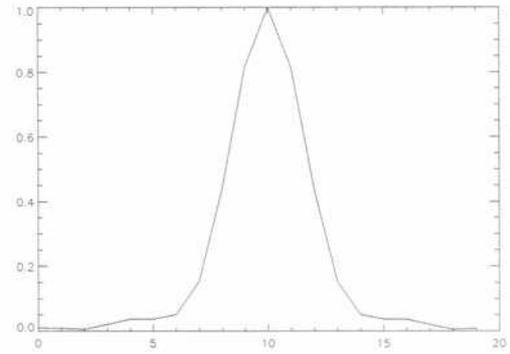
$$(\Sigma_{\mathbf{Y}})_{\text{pasto}} = \begin{pmatrix} 32556 & 556 + j787 & 24046 - j27287 \\ 556 - j787 & 1647 & -146 - j482 \\ 24046 + j27287 & -146 + j482 & 61028 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

	HH	HV	VV	promedio
$\hat{\alpha}$	-29.64	-64.88	-36.24	-43.59
$\hat{\omega}$	19.88	22.54	18.32	20.24

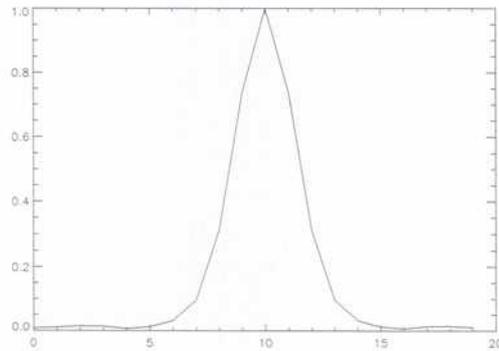
Cuadro 4.3: Valores estimados de los parámetros α y ω para pasto.



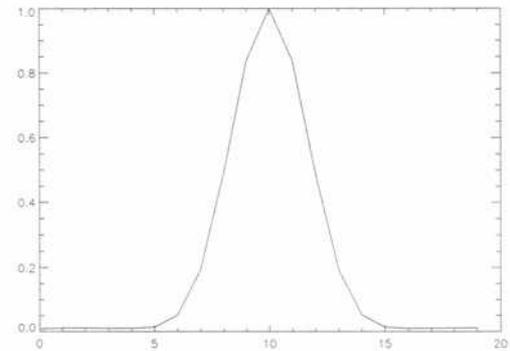
(a) HH azimuth



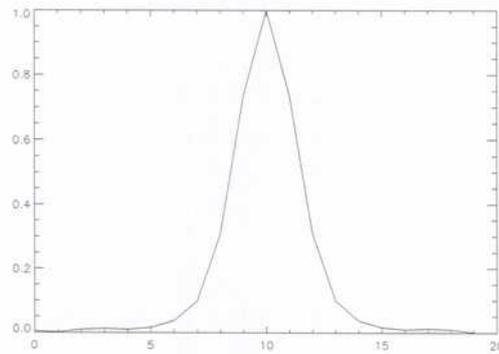
(b) HH rango



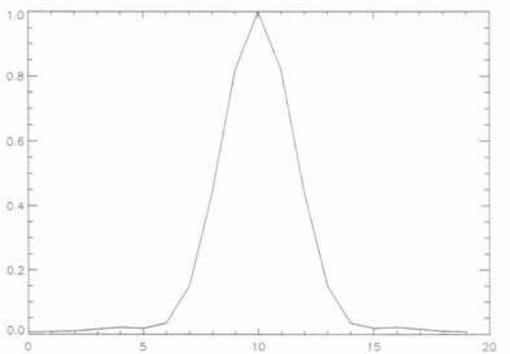
(c) HV azimuth



(d) HV rango

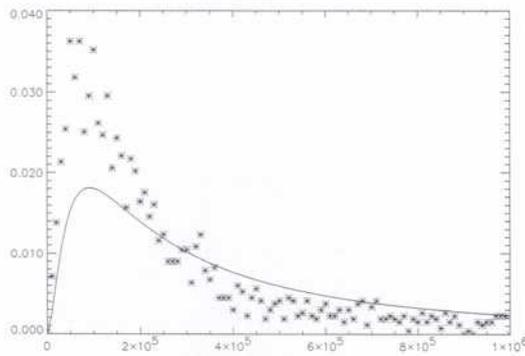


(e) VV azimuth

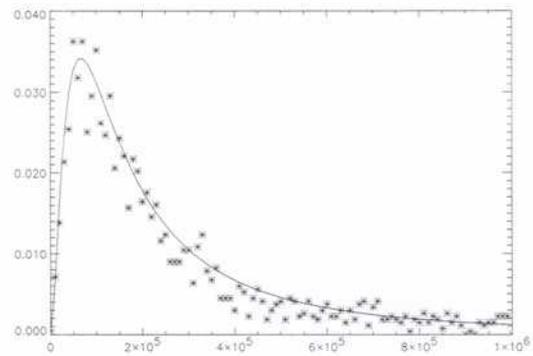


(f) VV rango

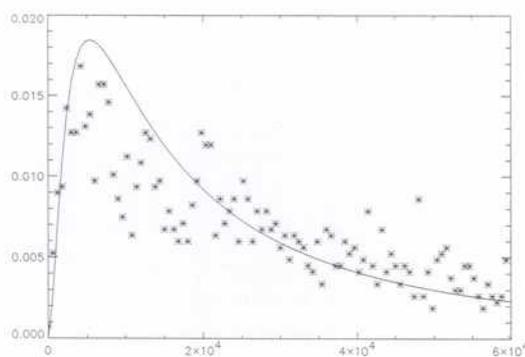
Figura 4.2: Correlación espacial para datos de ciudad.



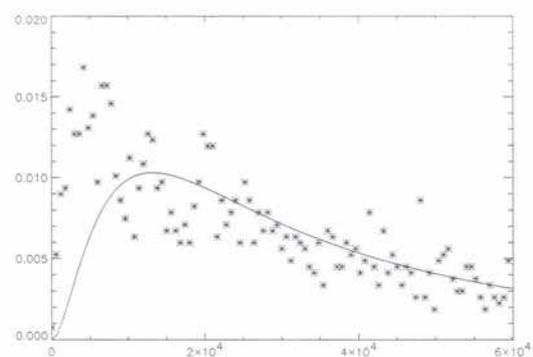
(a) HH \mathcal{G}_p^H



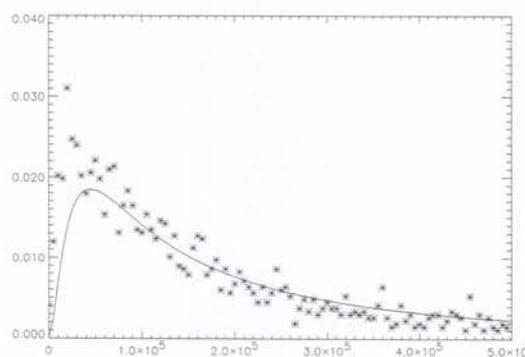
(b) HH \mathcal{G}_p^0



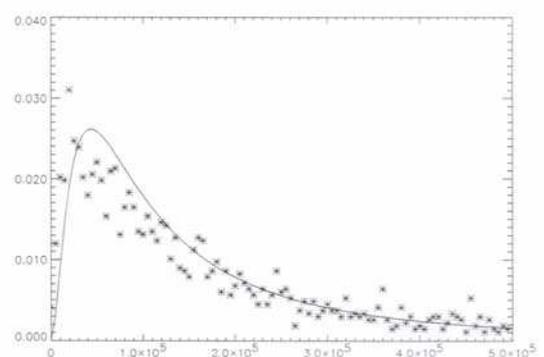
(c) HV \mathcal{G}_p^H



(d) HV \mathcal{G}_p^0



(e) VV \mathcal{G}_p^H



(f) VV \mathcal{G}_p^0

Figura 4.3: Ajustes de las distribuciones \mathcal{G}_p^H y \mathcal{G}_p^0 para datos de ciudad.

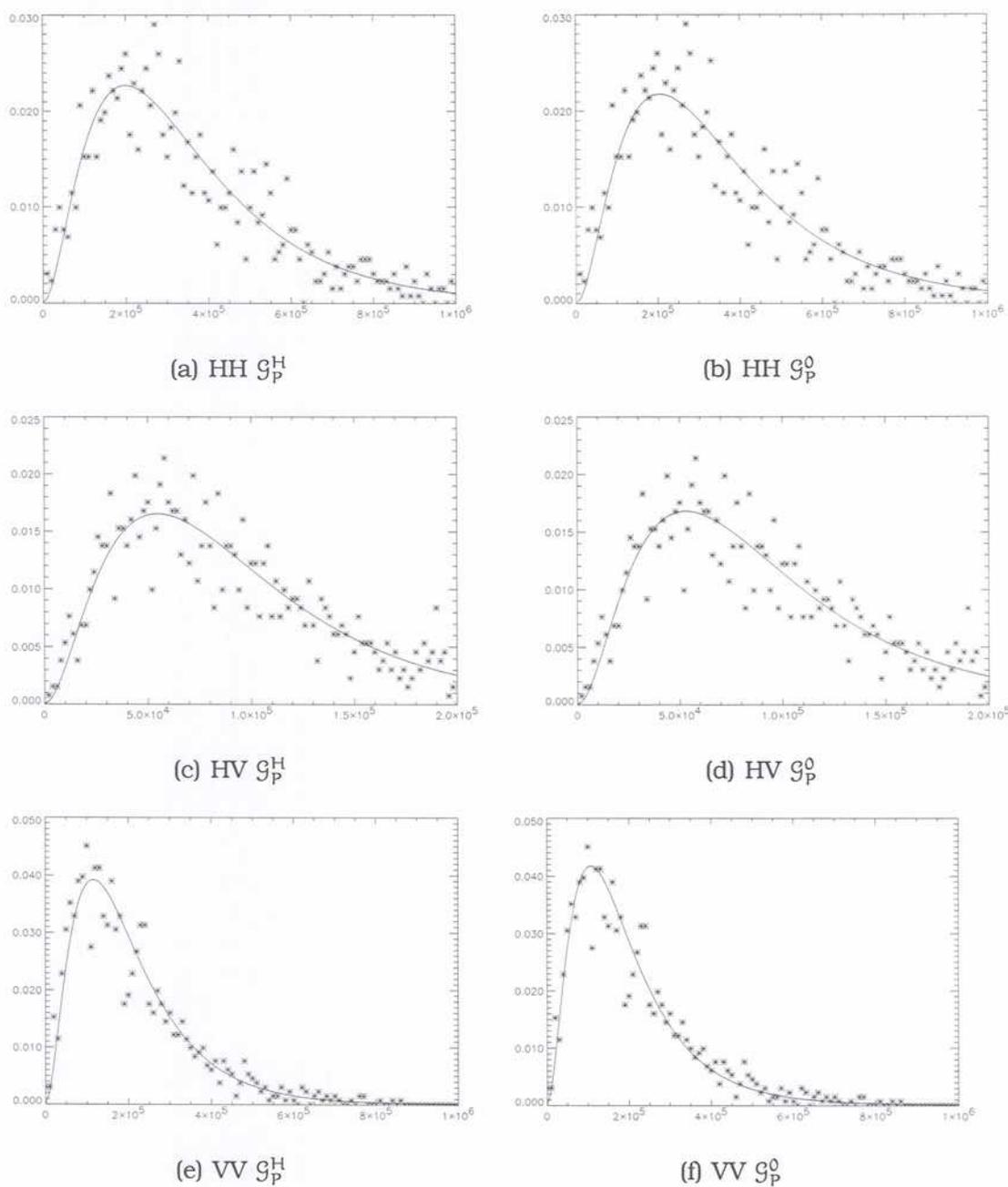


Figura 4.4: Ajustes de las distribuciones \mathcal{G}_p^H y \mathcal{G}_p^0 para datos de bosque.

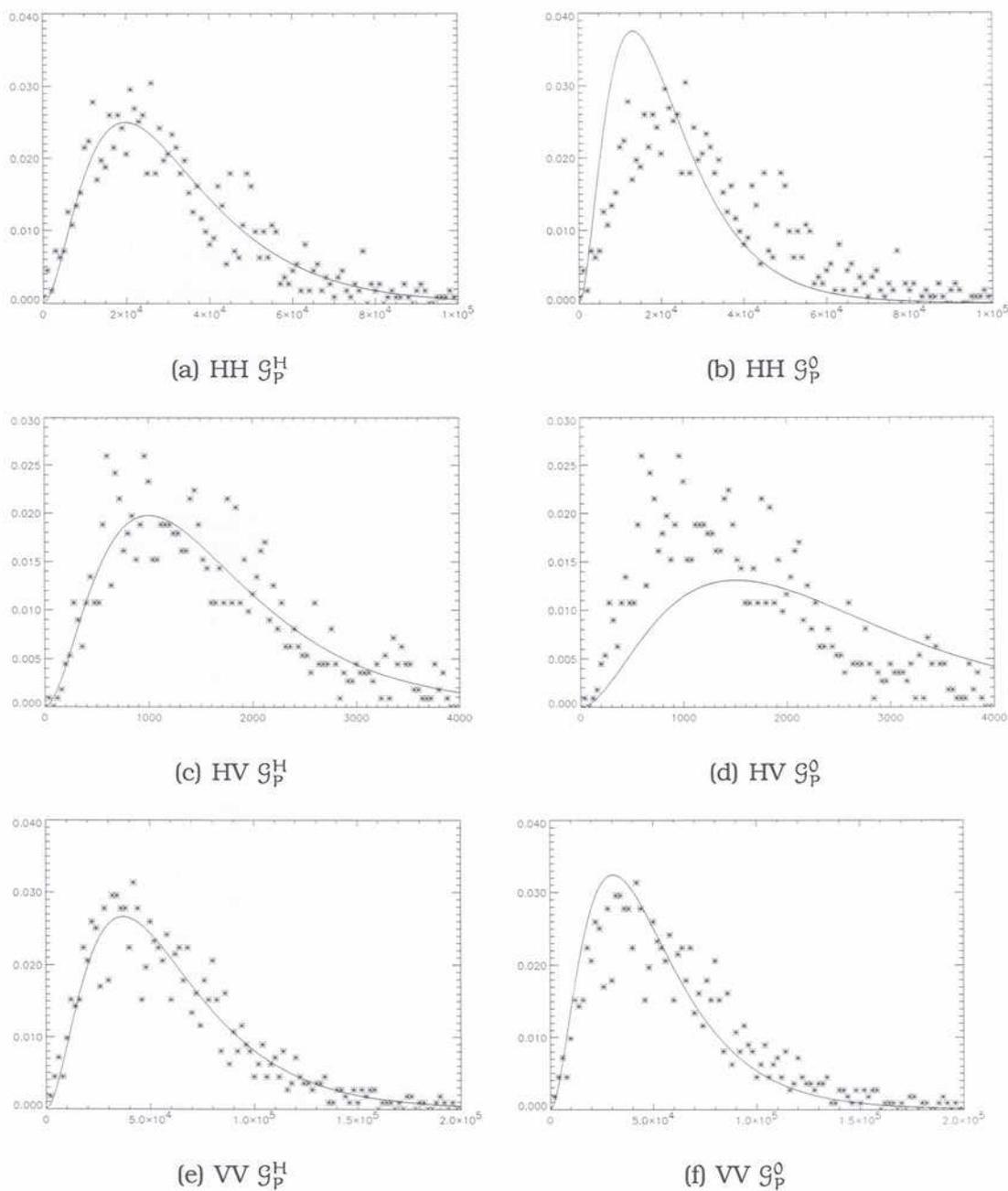


Figura 4.5: Ajustes de las distribuciones \mathcal{G}_p^H y \mathcal{G}_p^0 para datos de pasto.



(a) Imagen E-SAR, con las posiciones para las cuales no fue posible estimar el parámetro omega en blanco.



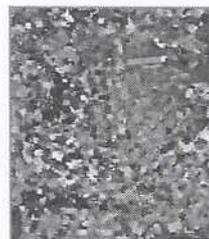
(b) Imagen del parámetro ω



(c) Imagen de los pixels donde no se pudo estimar ω en alguna de las bandas



(d) Imagen de los módulos de los coeficientes $a + jb$: $hhhv-hhvv-hvzv - \zeta R-G-B$



(e) Imagen dif. de fase hh-hv



(f) Imagen dif. de fase hh-vv



(g) Imagen dif. de fase hv-vv

Figura 4.6: Imágenes de los parámetros estimados para la distribución G_p^H .

Capítulo 5

Inferencia para Datos Polarimétricos

En el capítulo anterior se presentaron las principales distribuciones para el retorno en datos SAR polarimétricos: Wishart, \mathcal{K}_p , \mathcal{G}_p^0 y \mathcal{G}_p^H . En este capítulo serán presentados los principales estimadores para estas distribuciones en sus versiones para datos en formatos de intensidad y polarimétricos.

5.1 Técnicas de Estimación: Analogía y Máxima Verosimilitud

Un problema central en inferencia estadística es la estimación de parámetros desconocidos de una población dada. El investigador típicamente posee un muestra de tamaño n proveniente de una población desconocida, supone que esta población está descrita por una determinada distribución (modelo) $F(\theta)$, donde θ es un vector $p \times 1$ de parámetros desconocidos, y utiliza las informaciones contenidas en la muestra para obtener una estimación de θ (Bickel & Doksum 2001, Manski 1988).

Una *estadística* $T_n \equiv T_n(Y_1, \dots, Y_n)$ es cualquier función de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n que describen los datos. Una estadística utilizada para la estimación de un parámetro desconocido θ es llamada

estimador. Note que un estimador es siempre una variable aleatoria, dado que es una función de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n , que generalmente representan n realizaciones de una variable aleatoria Y que posee una función de distribución $F \equiv F(\theta)$. Cuando Y_1, \dots, Y_n son independientes y provenientes de la misma distribución decimos que las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Una *estimación* (o *estimativa*), por otro lado, no es una variable aleatoria pues representa la evaluación de un estimador en una muestra observada y_1, \dots, y_n .

Los estimadores poseen varias características y éstas usualmente determinan cuáles estimadores son más apropiados para determinadas situaciones. Una propiedad importante es el sesgo, que es la diferencia entre la esperanza del estimador y el verdadero valor del parámetro. Un estimador $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(y_1, \dots, y_n)$ es no sesgado para θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$ para todos los valores de θ en el espacio paramétrico Θ y para todo n ; o sea, el estimador se iguala en media al parámetro desconocido que deseamos estimar. Podemos también definir esta propiedad asintóticamente diciendo que un estimador es asintóticamente no sesgado si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

donde n es el tamaño de la muestra.

Una segunda propiedad importante de los estimadores puntuales es la propiedad de *consistencia*. Un estimador $\hat{\theta}_n$ del parámetro θ se dice que es consistente si $\hat{\theta}_n$ converge en probabilidad para θ , denotado $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$, i.e., si para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon \right) = 0,$$

o, equivalentemente, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \epsilon \right) = 1,$$

donde el subíndice n es usado para explicitar la dependencia del estimador del tamaño de la muestra.

El estimador $\hat{\theta}_n$ se dice *fuertemente consistente* si converge casi ciertamente para θ , denotado $\hat{\theta}_n \xrightarrow{a.e.} \theta$, i.e.,

$$\Pr \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta \right) = 1.$$

Consistencia fuerte implica consistencia.

Un criterio comumente utilizado para la evaluación de estimadores puntuales, que lleva en cuenta tanto el sesgo como la variancia del estimador, es el *error cuadrático medio* (EQM), dado por $\text{eqm}(\hat{\theta}_n) = E^2(\hat{\theta}_n - \theta) + E(\hat{\theta}_n - \theta)^2$. Para estimadores no sesgados, el error cuadrático medio es la variancia del estimador.

Para definir el estimador de máxima verosimilitud es necesario trabajar con la distribución conjunta de la población. Si consideramos variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas, tenemos que su distribución conjunta está dada por la densidad

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) = \prod_{1 \leq i \leq n} f_Y(y_i; \theta). \quad (5.1)$$

El estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ se define como el vector $\hat{\theta}$ que hace máxima la ecuación (5.1) suponiendo la muestra $\{y_1, \dots, y_n\}$ fija; en este caso la ecuación (5.1) se llama *verosimilitud*, y deja de ser una densidad conjunta para ser una mera función del vector de parámetros θ , y se la suele denotar $L(\theta; \{y_1, \dots, y_n\})$ o simplemente $L(\theta)$. Ya que $L(\theta)$ es positiva, por razones prácticas, es frecuente trabajar con el logaritmo de la verosimilitud, esto es, con

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) \quad (5.2)$$

y, muchas veces, en vez de buscar el máximo de la ecuación (5.2), se buscan los ceros de $\nabla \ell(\theta)$.

El estimador de máxima verosimilitud, cuando existe, exhibe propiedades interesantes para una gran clase de distribuciones. Entre estas propiedades son destacables que, asintóticamente, tiene sesgo nulo y distribución Gaussiana (Bickel & Doksum 1977, Sen & Singer 1993). Su principal desventaja, en la práctica, es que puede ser de difícil cómputo

o los algoritmos que lo implementan pueden ser numéricamente inestables.

Una alternativa interesante para el estimador de máxima verosimilitud es el uso de estimadores basados en el principio de la analogía (Manski 1988). Este método consiste en formar ecuaciones igualando cantidades muestrales con sus análogos poblacionales. Estos últimos están en función de los parámetros desconocidos, y al resolver las ecuaciones así formadas se tienen las estimaciones deseadas. Un caso particular de estimadores por el método de analogía son los estimadores de momentos (o método de substitución). Otros estimadores basados en analogía fueron estudiados en Mejail et al. (2000) para inferencia sobre imágenes SAR de amplitud.

Cuando se trabaja con datos polarimétricos el parámetro de interés θ tiene dimensión nueve o diez, si se trata de modelos para datos homogéneos (distribución de Wishart) o para datos no homogéneos (distribuciones K y GH), respectivamente. Tal como visto anteriormente, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ puede obtenerse maximizando la verosimilitud o encontrando las raíces del sistema de ecuaciones formado por el gradiente de la verosimilitud. Para todas las distribuciones aquí tratadas no es posible encontrar $\hat{\theta}$ de forma analítica, por lo que hay que emplear técnicas numéricas.

Las plataformas computacionales usuales para procesamiento de imágenes (tal como IDL, Matlab etc.) ofrecen una gama de funciones de optimización, aptas para minimizar funciones de varias variables. Minimizando $-\ell(\theta)$ encontraríamos el estimador de máxima verosimilitud pero, en la práctica, se observan severas inestabilidades numéricas con los datos y las funciones de interés.

5.2 Estimadores para datos en formato de intensidad

Aunque el foco de esta tesis es trabajar con datos en formato polarimétrico, los estimadores para datos en formato de intensidad son úti-

les para trabajar con aquéllos. Dado que la propuesta de la distribución Harmónica para datos de intensidad es reciente (a la fecha de redacción de esta tesis, sólo conocíamos el trabajo de Müller et al. 2000) será recordada la forma de los estimadores para esta distribución. Siguiendo el trabajo ya citado, sólo se mostrarán los estimadores basados en el método de sustitución.

Para $X \sim GI(\omega, \eta)$ la función de densidad para el retorno Z está dada por

$$f_Z(z) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \sqrt{\frac{2\omega\eta}{\pi}} \exp(\omega) \left(\frac{\omega}{\eta(\omega\eta + 2zn)} \right)^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}} z^{n-1} K_{n+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\eta}(\omega\eta + 2zn)} \right),$$

para todo $z > 0$, donde $\omega > 0$ es un parámetro de forma y $\eta > 0$ es la media. Esta distribución fue presentada y analizada en la sección 3.3.4. Los momentos de primer y segundo orden son dados, através de la ecuación (3.34), respectivamente, por

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Z] &= \eta \\ \mathbb{E}[Z^2] &= \eta^2 \frac{\omega+1}{\omega} \frac{n+1}{n} \end{cases}.$$

Con esto, podemos formular los estimadores por el método de sustitución basados en los momentos de primer y segundo orden para los parámetros η y ω como

$$\hat{\eta} = m_{1Z},$$

y

$$\hat{\omega} = \left(\frac{n}{n+1} \frac{m_{2Z}}{m_{1Z}^2} - 1 \right)^{-1},$$

donde m_{iZ} , $i = 1, 2$, son los momentos muestrales definidos en (2.4) en la página 20.

Este modelo, y sus estimadores, fue aplicado en Müller et al. (2000) para el análisis de imágenes SAR de alta resolución obtenidas por el sensor aerotransportado E-SAR. Estas imágenes, obtenidas sobre la región de Gilching (Bavaria, Alemania), poseen una gran variedad de tipos de cobertura, tales como pasturas, cultivos, bosques y áreas urbanas. Para todos los casos analizados, la distribución GIH produjo buenos ajustes, mejores o comparables a los ofrecidos por las distribuciones Γ , \mathcal{K}_1 y \mathcal{G}_1^0 .

5.3 Estimadores para datos polarimétricos

En la literatura que utiliza inferencia estadística para datos polarimétricos no siempre están disponibles de forma explícita los estimadores utilizados. Por esta razón en esta sección son derivados estimadores para las principales distribuciones polarimétricas, prestando especial cuidado al calcular los asociados al modelo Harmónico. Para este modelo serán calculados estimadores de máxima verosimilitud y por el método de sustitución.

5.3.1 Estimadores para la distribución Wishart Centrada Compleja

Sea \mathbf{W} una matriz aleatoria de tamaño $p \times p$ con distribución Wishart Centrada Compleja (ver Sección 4.1.2) resultante de la fórmula

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^n \mathbf{T}(k) \mathbf{T}(k)^{*t}, \quad (5.3)$$

donde los $\mathbf{T}(k) = [T_1(k), \dots, T_p(k)]^t$ son n vectores aleatorios i.i.d. de tamaño p y están distribuidos $\mathcal{N}_C(0, \Sigma_{\mathbf{T}})$. De esta situación resulta que $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{T}}, n)$. Se desea entonces estudiar los métodos para la estimación de la matriz $\Sigma_{\mathbf{T}}$.

De (5.3), las componentes de la diagonal principal de \mathbf{W} están dadas por la fórmula

$$W_{i,i} = \sum_{k=1}^n |T_i(k)|^2, \text{ con } i \in \{1, \dots, p\}. \quad (5.4)$$

Las variables aleatorias $W_{i,i} \sim n\sigma_i^2 \Gamma(n, 2n)$, donde $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[|T_i(k)|^2]$ para todo $k = 1, \dots, n$. De la ecuación (3.5) puede verse que el valor medio de una variable aleatoria con distribución $\Gamma(n, 2n)$ es unitario, por lo que $\mathbb{E}[W_{i,i}] = n\sigma_i^2$. De aquí, el método de los momentos para la estimación de σ_i resulta en

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{m_{1W_{i,i}}}{n}}. \quad (5.5)$$

Las componentes fuera de la diagonal principal de \mathbf{W} están dadas por

$$W_{i,\ell} = \sum_{k=1}^n T_i(k) T_\ell^*(k), \text{ con } i, \ell \in \{1, \dots, p\}. \quad (5.6)$$

Como de (4.2) tenemos que $\mathbb{E}[T_i(k) T_\ell^*(k)] = (a_{i\ell} + jb_{i\ell}) \sigma_i \sigma_\ell$ para todo $k = 1, \dots, n$, entonces $\mathbb{E}[W_{i,\ell}] = n (a_{i\ell} + jb_{i\ell}) \sigma_i \sigma_\ell$, y por lo tanto

$$\hat{a}_{i\ell} + j\hat{b}_{i\ell} = \frac{m_1 W_{i,\ell}}{n \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_\ell}. \quad (5.7)$$

5.3.2 Estimadores para la distribución \mathcal{K}_p

En la literatura consultada que utiliza la distribución \mathcal{K}_p los parámetros de esta distribución son estimados exclusivamente por el método de momentos.

Las dos maneras que permiten calcular el máximo de la función de verosimilitud o, equivalentemente, de la función de log-verosimilitud reducida, sólo pueden ser resueltas por métodos iterativos. Estos métodos requieren una gran cantidad de evaluaciones de las funciones K de Bessel, operaciones de gran costo computacional y sujetas a inestabilidades numéricas.

Siendo así, sólo mencionaremos y utilizaremos los estimadores obtenidos por el método de momentos para la distribución \mathcal{K}_p .

5.3.3 Estimadores para la distribución \mathcal{G}_p^H

Las componentes de la diagonal principal de $\mathbf{Z}^{(n)}$, están dadas por la fórmula

$$Z_{i,i}^{(n)} = X \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Y_{k,i}|^2, \text{ con } i \in \{hh, hv, vv\},$$

donde la variable aleatoria $X \sim GI(\omega, 1)$ y la variable aleatoria $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Y_{k,i}|^2 \sim \sigma_i^2 \Gamma(n, n)$. Esto equivale a considerar a $Z_{i,i}^{(n)}$ como el resultado del producto de una variable aleatoria con distribución $GI(\omega, \sigma_i^2)$ por una variable aleatoria con distribución $\Gamma(n, 2n)$, ya que una variable distribuída $\sigma_i^2 GI(\omega, 1)$ está distribuída $GI(\omega, \sigma_i^2)$. A su vez, esto implica que $Z_{i,i}^{(n)}$ es una variable aleatoria con distribución $G_1^H(\omega, \sigma_i^2, n)$.

Método de Momentos

Utilizando los resultados de la sección 3.3.4 del Capítulo 3, referentes a los momentos de la distribución \mathcal{G}_I^H se tiene para los momentos de orden 1 y 2,

$$\widehat{\sigma}_i^2 = m_{1i}, \quad (5.8)$$

y

$$\widehat{\omega}_i = \frac{1}{\frac{n}{n+1} \frac{m_{2i}}{m_{1i}^2} - 1},$$

con $i \in \{hh, hv, vv\}$, donde $\widehat{\mathbb{E}} [Z_{i,i}^{(n)r}] = m_{ri}$.

Como el modelo utilizado supone que la componente X , que tiene en cuenta la variabilidad del backscatter, es la misma para cada componente de \mathbf{Z} , entonces tendremos tres valores estimados de ω : $\widehat{\omega}_{hh}$, $\widehat{\omega}_{hv}$, $\widehat{\omega}_{vv}$. Adoptaremos entonces, como valor estimado del parámetro ω al promedio de esos tres valores, o sea,

$$\widehat{\omega} = \frac{\widehat{\omega}_{hh} + \widehat{\omega}_{hv} + \widehat{\omega}_{vv}}{3}. \quad (5.9)$$

Los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{Z}^{(n)}$, están dados por la siguiente fórmula:

$$Z_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_{k,i} Z_{k,j}^* = X \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_{k,i} Y_{k,j}^*, \text{ para } i \neq j, \text{ e } i, j \in \{hh, hv, vv\},$$

debido a la independencia entre X e Y_i , con $i \in \{hh, hv, vv\}$, y teniendo en cuenta que $\mathbb{E}[X] = 1$, tenemos que

$$\mathbb{E} [Z_{i,j}^{(n)}] = \mathbb{E} [Z_i Z_j^*] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E} [Y_i Y_j^*] = \mathbb{E} [Y_i Y_j^*].$$

Como $\mathbb{E} [Y_i Y_j^*] = (a_{ij} + j b_{ij}) \sigma_i \sigma_j$, entonces

$$\widehat{a}_{ij} + j \widehat{b}_{ij} = \frac{\widehat{\mathbb{E}} [Z_i Z_j^*]}{\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_j},$$

donde $\widehat{\mathbb{E}} [Z_i Z_j^*]$ se estima a partir de los datos observados $\mathbf{Z} = [Z_{hh}, Z_{hv}, Z_{vv}]^t$ y los $\widehat{\sigma}_i$ según la ecuación (5.8).

5.4 Algoritmos para simulación

(Para evaluar el comportamiento de los estimadores presentados en este capítulo serán utilizadas técnicas Monte Carlo, dada la dificultad de hacerlo por métodos analíticos.)

Las técnicas Monte Carlo se basan en la generación y utilización de muestras de variables aleatorias con distribuciones preestablecidas. Para las situaciones que nos interesan, serán necesarias muestras de variables aleatorias capaces de caracterizar el retorno de sistemas SAR polarimétricos. Tal como se vió en el Capítulo 4, las principales distribuciones para estos valores son, clásicamente, las distribuciones Wishart y K Polarimétrica (para datos provenientes de áreas homogéneas y heterogéneas), y más modernamente las distribuciones G0 y GH polarimétricas.

Las muestras de la distribución de Wishart serán generadas transformando muestras de variables aleatorias con distribución normal multivariada compleja (sección 5.4.1). Las muestras de las distribuciones K, G0 y GH Polarimétricas no serán generadas directamente, sino utilizando sus respectivas definiciones constructivas, esto es, através del modelo multiplicativo utilizando la distribución de Wishart centrada compleja para el speckle y las distribuciones Gamma, Recíproca de Gamma y Gaussiana Inversa para el backscatter. Los algoritmos son descriptos a seguir.

5.4.1 Generación de muestras de variables aleatorias con distribución Gaussiana Multivariada

Un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_p]^t$ posee una distribución Normal Multivariada cuando su función de densidad está dada por

$$f_{\mathbf{X}}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (X - \mu_{\mathbf{X}})^t \Sigma_{\mathbf{X}}^{-1} (X - \mu_{\mathbf{X}})\right),$$

donde $\mu_{\mathbf{X}}$ es el vector de medias de \mathbf{X} , y $\Sigma_{\mathbf{X}}$ es la matriz de covarianza, la cual es simétrica y definida positiva.

Los elementos s_{ij} de la matriz de covarianza $\Sigma_{\mathbf{X}}$ pueden expresarse como

$$s_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \text{ con } 1 \leq i, j \leq p,$$

donde σ_i es la desviación estándar de x_i , y ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre x_i y x_j . Se puede verificar que $|\rho_{ij}| \leq 1$, que $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ y que $\rho_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq p$.

Llamando $\Phi_{\mathbf{X}}$ a la matriz de tamaño $p \times p$ cuyas columnas son los vectores propios normalizados de $\Sigma_{\mathbf{X}}$, y llamando $\Lambda_{\mathbf{X}}$ a la matriz diagonal formada por los p valores propios de $\Sigma_{\mathbf{X}}$, tenemos que

$$\Sigma_{\mathbf{X}}\Phi_{\mathbf{X}} = \Phi_{\mathbf{X}}\Lambda_{\mathbf{X}}.$$

Para la generación de valores normales multivariados \mathbf{X} con valor medio $\mu_{\mathbf{X}}$ y matriz de covarianza $\Sigma_{\mathbf{X}}$, se generan valores normales Y decorrelacionados y con valor medio nulo (o sea, con $\Sigma_{\mathbf{Y}} = I$ y $\mu_{\mathbf{Y}} = 0$) y se los transforma según la siguiente fórmula

$$X = \Phi_{\mathbf{X}}\Lambda_{\mathbf{X}}^{1/2}Y + \mu_{\mathbf{X}},$$

donde $\Phi_{\mathbf{X}}$ y $\Lambda_{\mathbf{X}}$ son la matriz de vectores propios y la matriz de valores propios de X , respectivamente.

5.4.2 Generación de muestras de variables aleatorias con distribución Gaussiana Inversa

Dado que no es posible utilizar el método de inversión para generar muestras de variables aleatorias con distribución $GI(\omega, \eta)$, puesto que no se dispone de la inversa de la misma en forma explícita, es necesario utilizar otro método. El que implementa el Algoritmo 5.1, mostrado a seguir, se basa en una transformación de variables aleatorias (Devroye 1986).

Algoritmo 5.1 *Generación de muestras con distribución $GI(\omega, \eta)$*

1. Generar y , muestra de tamaño 1 de la variable aleatoria $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

2. Calcular $v = \eta + \frac{\eta y}{2\omega} - \frac{\eta}{2\omega} \sqrt{y(4\omega + y)}$
3. Generar u , muestra de tamaño 1 de la variable aleatoria $\mathbf{u} \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$
4. Si $u > 1/(1 + v\eta)$ entonces retornar $(\eta^2 u)^{-1}$
5. Caso contrario retornar v

Capítulo 6

Separabilidad de Clases

Uno de los objetivos fundamentales del análisis estadístico de datos en general, y de imágenes en particular, es el de ser capaz de extraer características significativas que auxilien etapas posteriores de análisis e interpretación. Este conjunto de operaciones, conocido como *feature extraction*, utiliza diversos modelos y procedimientos para, a partir de los datos brutos u originales, derivar nuevas bandas formadas por valores que tengan la información de manera más manifiesta. La estimación de parámetros vista en el Capítulo 5 tiene como aplicación directa la de transformar los parámetros estimados en características. Como aplicación primaria de esta característica veremos en este capítulo el aumento de la capacidad de discriminar clases.

La figura 6.1 muestra una composición de falso color de una imagen obtenida sobre una región urbana de Munich por el sensor E-SAR. La composición en colores fue hecha asociando el canal rojo a la intensidad del retorno en la polarización HH, el verde a la del HV y el azul a la del VV. Los datos fueron procesados en tres looks, y son evidentes dos grandes tipos de cobertura: manchas urbanas con retorno claro, y regiones de pasto con retorno oscuro. Fueron tomadas muestras de estas dos clases, visibles en la imagen como una área blanca y una área con un patrón lineal, respectivamente, en la figura 6.1. Es deseable que una técnica de extracción de características nos permita discriminar automáticamente estas dos áreas mejor de que lo haríamos solamente

con los datos brutos.



Figura 6.1: Composición en falso color de datos de Munich obtenidos por el E-SAR.

En un primer análisis cualitativo gráfico, veremos los histogramas de los datos. En cada gráfico de la Figura 6.2 tenemos en colores diferentes datos provenientes de las áreas urbana (rojo) y de pasto (verde). Es evidente que las intensidades separan, con un cierto nivel de superposición, estos dos blancos. Se nota, también, que cuando se grafican los histogramas de los parámetros ω estimados, esta separabilidad es más definida.

En el gráfico que muestra los histogramas de ciudad y pasto se puede notar que los datos provenientes de ciudad tienen más variación que aquellos provenientes de los datos de pasto.

Para ver el comportamiento de la banda del parámetro ω estimado con respecto a las otras bandas se generaron los seis diagramas de dispersión considerando cada una de las intensidades de cada polarización entre sí y con los valores estimados. Los seis diagramas se muestran en

la Figura 6.3.

En la Figura 6.3 podemos notar que en los gráficos correspondientes a ω versus z_{hh} (Figura 6.3(d)) y ω versus z_{hv} (Figura 6.3(e)), la clase ciudad queda dentro de un rango aproximado $[0, 2]$, mientras que en el gráfico z_{hh} versus z_{hv} (Figura 6.3(a)) los datos tienen una mayor dispersión. A partir de este hecho podemos ver que cuando los datos provienen de la clase ciudad van a tener un valor de ω más cercano a cero. De la Figura 6.3 podemos concluir que la información presente en el parámetro ω estimado provee información importante para discriminar las dos clases consideradas.

A seguir haremos una evaluación cuantitativa de la capacidad de discriminación entre las clases urbana y de pasto, con el objetivo de constatar que el uso del parámetro ω estimado aumenta la separabilidad entre estas clases o *clusters*. Para hacerlo introducimos la noción de distancia entre clusters.

Calcularemos la matriz de dispersión interna de cada cluster S_{int} (no confundir con la *scattering matrix* de datos polarimétricos) dada por

$$S_{int} = \sum_{i=1}^2 p_i \mathbb{E} [(\mathbb{X} - M_i)(\mathbb{X} - M_i)^t | C_i], \quad (6.1)$$

donde p_i es la probabilidad *a priori* de observar C_i , la clase considerada, y la matriz de dispersión externa entre los clusters S_{ext} , dada por

$$S_{ext} = \sum_{i=1}^2 p_i (M_i - M_0)(M_i - M_0)^t. \quad (6.2)$$

La suma es sobre dos términos puesto que consideramos solamente dos clases. Calculamos ahora la separabilidad entre las dos clases como $D = \text{tr}(S_{int}^{-1} S_{ext})$, donde tr es la traza de la matriz.

Se consideran, entonces, dos casos: por un lado tomando las bandas z_{hh} y z_{hv} y por el otro agregándole la banda de ω a las anteriores. Para cada uno de estos casos calculamos la separabilidad D y vemos para cuál de los dos casos D toma el valor más grande.

El mencionado índice da, para el caso de z_{hh} , z_{hv} , z_{vv} un valor de 1,25, y para el caso de z_{hh} , z_{hv} , z_{vv} , ω un valor de 1,53, o sea que hay

un aumento en la separabilidad al agregar la información del ω estimado (los valores de D fueron multiplicados por 10^4 para mejorar su visualización).

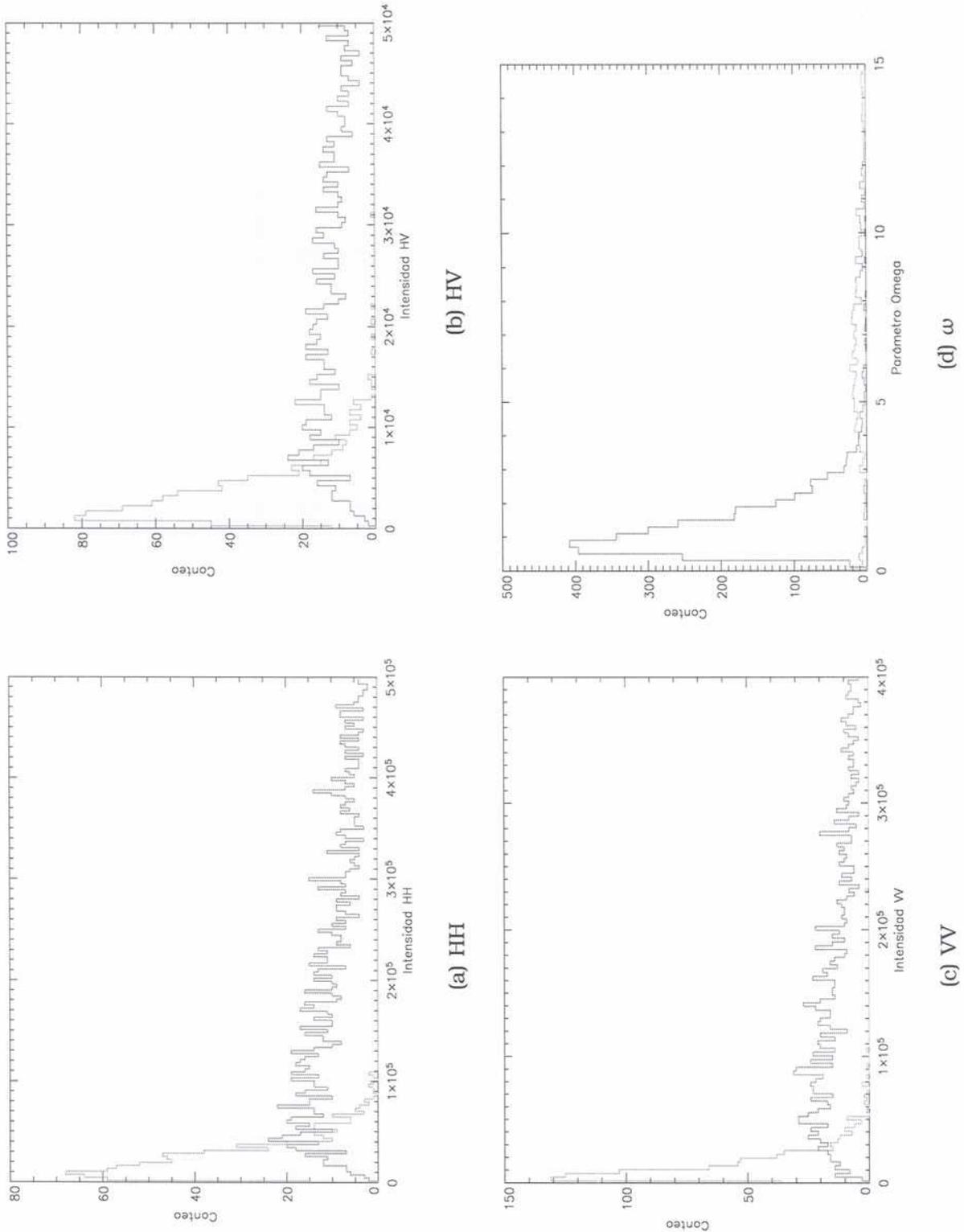


Figura 6.2: Histogramas de datos de pasto y ciudad para las tres polarizaciones (intensidad) y para el parámetro estimado ω ; ciudad en rojo y pasto en verde.

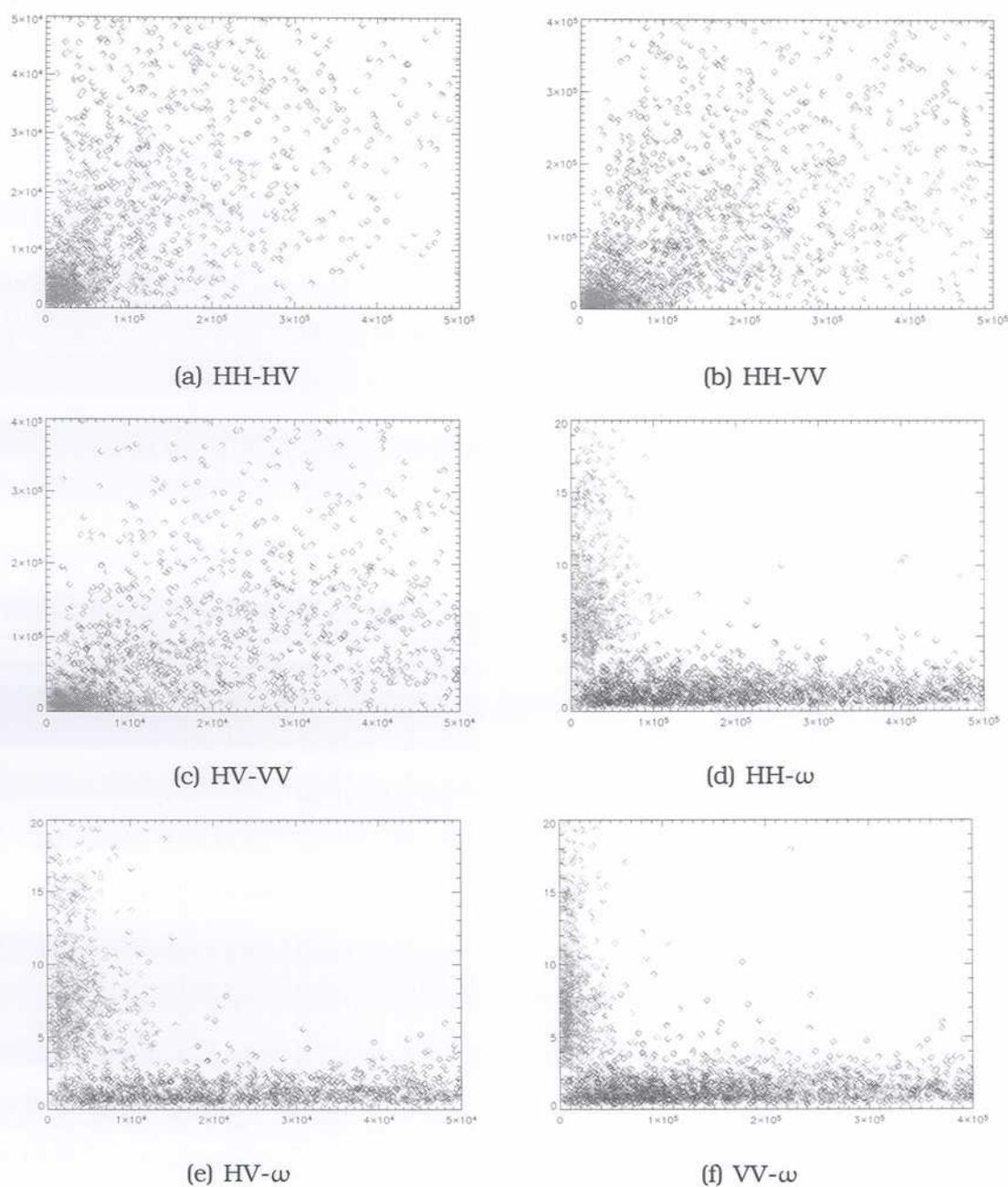


Figura 6.3: Diagramas de dispersión de pares de variables para áreas urbana (rojo) y de pasto (verde).

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se ha presentado una nueva distribución para datos SAR polarimétricos: la distribución armónica polarimétrica \mathcal{G}_p^H . Esta distribución, basada en el modelo multiplicativo, modela la matriz de correlación de datos polarimétricos teniendo en cuenta además la variabilidad de la retrodispersión. Se dedujo su función de densidad y la fórmula correspondiente a sus momentos. Se utilizaron estos momentos para evaluar los parámetros estadísticos de la misma. Se utilizaron imágenes polarimétricas E-SAR y se verificó que estas distribuciones son adecuadas para el modelado de datos reales. Se comprobó también que el modelo \mathcal{G}^H para datos monopolarizados es un caso especial del modelo \mathcal{G}_p^H . Se evaluó el aporte del parámetro estadístico ω , que depende de la variabilidad de la retrodispersión para un tipo de target dado, para la separabilidad de clases. Se comparó la distribución \mathcal{G}_p^H con la \mathcal{G}_p^0 para datos E-SAR comprobándose que es una alternativa válida para esta distribución.

Bibliografia

- Barndorff-Nielsen, O. E. & Blæsild, P. (1981), Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and applications, in C. Taillie & B. A. Baldessari, eds, 'Statistical distributions in scientific work', Reidel, Dordrecht, pp. 19–44.
- Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (1977), *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*, Holden-Day Series in Probability and Statistics, Holden-Day, San Francisco.
- Bickel, P. J. & Doksum, K. A. (2001), *Mathematical statistics: basic ideas and selected topics*, Vol. 1, 2 edn, Prentice-Hall, NJ.
- Devroye, L. (1986), *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag, New York.
- Freitas, C. C., Correia, A., Frery, A. C. & Sant'Anna, S. J. S. (1998), A system for multilook polarimetric SAR image statistical classification, in 'Second Latinoamerican Seminar on Radar Remote Sensing: Image Processing Techniques', European Space Agency (ESA), Santos, SP, Brazil, pp. 141–148.
- Freitas, C. C., Frery, A. C. & Correia, A. H. (in press), 'The polarimetric G distribution for SAR data analysis', *Environmetrics* .
- Frery, A. C., Correia, A. H., Rennó, C. D., Freitas, C. C., Jacobo-Berlles, J., Mejail, M. E. & Vasconcellos, K. L. P. (1999), 'Models for synthetic aperture radar image analysis', *Resenhas (IME-USP)* **4**(1), 45–77.

- Frery, A. C., Müller, H.-J., Yanasse, C. C. F. & Sant'Anna, S. J. S. (1997), 'A model for extremely heterogeneous clutter', *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **35**(3), 648–659.
- Goodman, J. W. (1985), *Statistical Optics*, Pure and Applied Optics, Wiley, New York.
- Goodman, N. R. (1963a), 'The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix', *Annals of Mathematical Statistics* **34**, 178–180.
- Goodman, N. R. (1963b), 'Statistical analysis based on a certain complex Gaussian distribution (an introduction)', *Annals of Mathematical Statistics* **34**, 152–177.
- Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (1980), *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York.
- Jakeman, E. & Pusey, P.Ñ. (1976), 'A model for non-Rayleigh sea echo', *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **24**(6), 806–814.
- Jakeman, E. & Tough, R. J. A. (1987), 'Generalized K distribution: a statistical model for weak scattering', *Journal of the Optical Society of America A* **4**(9), 1764–1772.
- Jørgensen, B. (1982), *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Vol. 9 of *Lecture Notes in Statistics*, Springer-Verlag, New York.
- Lee, J. S., Du, L., Schuler, D. L. & Grunes, M. R. (1995), Statistical analysis and segmentation of multilook SAR imagery using partial polarimetric data, in 'International Geoscience and Remote Sensing Symposium', IEEE, Piscataway, pp. 1422–1424.
- Lee, J. S., Grunes, M. R. & Kwok, R. (1994), 'Classification of multi-look polarimetric SAR imagery based on complex Wishart distributions', *International Journal of Remote Sensing* **15**(11), 2299–2311.

- Lee, J. S., Schuler, D. L., Lang, R. H. & Ranson, K. J. (1994), K-distribution for multi-look processed polarimetric SAR imagery, in 'International Geoscience and Remote Sensing Symposium: Surface and Atmospheric Remote Sensing: Technologies, Data Analysis and Interpretation', IEEE, IEEE Computer Society, Pasadena, USA, pp. 2179–2181.
- Manski, C. F. (1988), *Analog Estimation Methods in Econometrics*, Vol. 39 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman & Hall, New York.
*<http://elsa.berkeley.edu/books/analog.html>
- Mascarenhas, N. D. A., Dutra, L. V. & Frery, A. C. (2000), The effect of quantization on SAR parameter estimation, in 'International Geoscience and Remote Sensing Symposium: The Role of Remote Sensing in Managing the Global Environment', IEEE, IEEE Press, Hawaii. CD-ROM.
- Mejail, M. E. (1999), *La Distribución GA0 en el Modelado y Análisis de Imágenes de Radar de Apertura Sintética*, Tesis de Doctorado en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Computación, Buenos Aires, Argentina.
- Mejail, M. E., Jacobo-Berlles, J., Frery, A. C. & Bustos, O. H. (2000), 'Parametric roughness estimation in amplitude SAR images under the multiplicative model', *Revista de Teledetección* **13**, 37–49.
- Müller, H.-J., Frery, A. C., Jacobo-Berlles, J., Mejail, M. E. & Moreira, J. (2000), The Harmonic branch of the multiplicative model: properties and applications, in 'Third European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR)', München, Germany, pp. 603–606.
- Oliver, C. & Quegan, S. (1998), *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*, Artech House, Boston.

- Sen, P. K. & Singer, J. M. (1993), *Large Sample Methods in Statistics: An Introduction with Applications*, Chapman and Hall, London.
- Silva, M. F. (1999), Correção do viés do estimador de máxima verossimilhança para a distribuição GAO usando bootstrap, Dissertação de Mestrado em Estatística, Departamento de Estatística, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.
- Srivastava, M. S. (1965), 'On the complex Wishart distribution', *Annals of Mathematical Statistics* **36**(1), 313–315.
- Ulaby, F. T. & Elachi, C. (1990), *Radar Polarimetry for Geoscience Applications*, Artech House, Norwood.
- Ulaby, F. T., Kouyate, F., Brisco, B. & Williams, T. M. (1986), 'Textural information in SAR images', *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **GE-24**, 235–245.
- Yanasse, C. C. F., Frery, A. C. & Sant'Anna, S. J. S. (1995), Stochastic distributions and the multiplicative model: relations, properties, estimators and applications to SAR image analysis, Technical Report 5630-NTC/318, INPE, São José dos Campos, SP, Brazil.
- Zyl, J. J. V. & Ulaby, F. (1990), 'Radar polarimetry for geoscience applications'.

Índice alfabético

ángulo de elipticidad, 12

ángulo de rotación, 12

swath, 11

distribución

Wishart Centrada Compleja,

41

distribuciones

para el backscatter, 25

distribuciones para el retorno, 34

modelo multiplicativo, 22

polarización

dual, 2

polarización

elíptica, 11

horizontal, 12, 13

lineal, 12

radar

de Apertura Sintética, 2

de imágenes, 1

monopolar, 1

polarimétrico, 2

radiación

retrodispersada, 1

retrodispersión, 1