

Tesis Doctoral

Teoría de campos con relaciones de dispersión modificadas en espacios curvos

López Nacir, Diana Laura

2009

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

López Nacir, Diana Laura. (2009). Teoría de campos con relaciones de dispersión modificadas en espacios curvos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

López Nacir, Diana Laura. "Teoría de campos con relaciones de dispersión modificadas en espacios curvos". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2009.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

*Teoría de campos con relaciones de dispersión
modificadas en espacios curvos*

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas.

por DIANA LAURA LÓPEZ NACIR

Director de Tesis: Francisco Diego Mazzitelli
Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCEN, UBA

Octubre 2009



A mi familia

Resumen

La ausencia de una teoría cuántica satisfactoria para la gravedad ha motivado numerosas investigaciones en el contexto de la aproximación semiclásica, así como también el desarrollo de enfoques fenomenológicos con el fin de analizar los límites de las predicciones de la teoría semiclásica. Se ha argumentado que algunos efectos de gravedad cuántica podrían aparecer como modificaciones en las relaciones de dispersión de campos cuánticos. Por estos motivos resulta interesante el estudio de campos cuánticos con relaciones de dispersión generalizadas en espacios curvos. La presencia de este tipo de campos cuánticos afecta la estructura de la teoría cuántica de campos y, en particular, el proceso de renormalización.

En el caso de la relación de dispersión usual, el proceso de renormalización para campos cuánticos en fondos curvos es bien conocido. El objetivo principal de esta tesis es extender los métodos de renormalización al caso en que los campos cuánticos satisfacen relaciones de dispersión generalizadas en fondos curvos. Más específicamente, analizamos la renormalización de las ecuaciones semiclásicas para la métrica y para el valor de expectación de un campo escalar cuántico ϕ con relaciones de dispersión generalizadas. Para introducir relaciones de dispersión generalizadas y a su vez preservar la covariancia general, trabajamos en el marco de la teoría de Einstein-Éter. En esta teoría, además de la métrica, hay un campo vectorial dinámico, de tipo temporal y unitario. Adoptamos la aproximación semiclásica y consideramos al campo escalar cuántico propagándose en un espacio-tiempo curvo con una métrica de fondo clásica y acoplado al campo vectorial unitario, también clásico. Distintas relaciones de dispersión son obtenidas modificando la interacción entre el campo escalar y el campo vectorial.

Con el fin de analizar el proceso de renormalización trabajamos, en primer lugar, en el límite de campos clásicos débiles. Para caracterizar las divergencias asociadas a $\langle\phi^2\rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ realizamos un desarrollo adiabático, es decir, un desarrollo en derivadas de las perturbaciones de la métrica y del campo vectorial. El análisis de las divergencias muestra una diferencia cualitativa en el comportamiento ultravioleta de ambos objetos. Suponiendo que la relación de dispersión se comporta como $\omega_k \sim k^s$ (con s un número natural) para valores grandes del vector de onda k , notamos que $\langle\phi^2\rangle$ es convergente para valores de s suficientemente grandes, mientras que el número de términos divergentes en el desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ aumenta con s . También señalamos otra diferencia cualitativa entre el caso en que las perturbaciones de la métrica y del campo vectorial son homogéneas espacialmente y el caso en que no lo son. En el primer caso, las divergencias resultan ser

considerablemente más “suaves” y técnicamente más simples de tratar. Por esta razón y motivados por el problema “trans-planckiano” en cosmología, nos concentramos en métricas homogéneas espacialmente.

Para llevar a cabo la renormalización más allá del límite de campos débiles, extendemos el esquema de sustracción adiabática basado en un desarrollo WKB de los modos del campo escalar. Usando además el método de regularización dimensional, analizamos la renormalización de $\langle\phi^2\rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ en espacios-tiempos de Friedman-Robertson-Walker (FRW) espacialmente planos de n dimensiones. Para campos libres propagándose en este espacio-tiempo, los contratérminos requeridos para renormalizar las ecuaciones semiclásicas para la métrica tienen la misma forma que los correspondientes a la teoría usual. Es decir, no resulta posible discernir la aparición de nuevos contratérminos que involucren al campo vectorial. Esto se debe a las simetrías del espacio-tiempo. Por este motivo, consideramos un espacio-tiempo anisotrópico con métrica de Bianchi I y analizamos la renormalización de la ecuación semiclásica para la métrica, en el caso en que el campo escalar es libre, y la renormalización de la ecuación para el valor de expectación de un campo escalar auto-interactuante, en la aproximación de un lazo. En ambos casos, encontramos que aparecen nuevos contratérminos.

A modo de aplicación, usamos los resultados obtenidos para relaciones de dispersión genéricas y espacios-tiempos de FRW en el caso de una relación de dispersión particular y un espacio-tiempo de De Sitter. En este caso, evaluamos numéricamente la traza del tensor de energía-momento del campo y analizamos su dependencia con la escala de masa asociada a los efectos “trans-planckianos” (o de nueva física). A partir de esto, analizamos las soluciones autoconsistentes de las ecuaciones semiclásicas para la métrica de De Sitter y discutimos acerca de la posibilidad de reproducir, con la teoría usual, los efectos debidos a modificaciones de la relación de dispersión, eligiendo apropiadamente el estado cuántico inicial para los modos del campo escalar. Finalmente, discutimos acerca de algunos trabajos previos donde se evalúa la importancia de la reacción de un campo escalar cuántico con relación de dispersión modificada sobre la evolución inflacionaria.

Palabras claves: Teoría de campos en espacios-tiempos curvos; Renormalización; Física trans-Planckiana

Quantum field theory with modified dispersion relations in curved spaces

Abstract: The absence of a satisfactory quantum theory of gravity has motivated numerous researches in the context of the semiclassical approximation, as well as the development of phenomenological approaches to assess the robustness of the predictions obtained in the semiclassical theory. It has been argued that some quantum gravity effects could show up as modifications in the dispersion relations of quantum fields. For these reasons it is interesting to study quantum fields with generalized dispersion relations in curved spaces. The presence of such quantum fields affect the structure of the quantum field theory, in particular, the renormalization process.

In the case of the usual dispersion relation, the renormalization process for quantum fields in curved backgrounds is well-known. The main goal of this thesis is to extend the renormalization methods to the case where the quantum fields satisfy generalized dispersion relations in curved backgrounds. More specifically, we analyze the renormalization of the semiclassical equations for the metric and for the expectation value of a quantum scalar field ϕ with generalized dispersion relations. To introduce generalized dispersion relations and in turn preserve general covariance, we work in the framework of the Einstein-Aether theory. In this theory, besides the metric, there is a dynamical, time-like, unit vector field. We adopt the semiclassical approximation and consider the quantum scalar field propagating in a curved space-time with a classical background metric and coupled to a classical unit vector field. Different dispersion relations are obtained by modifying the interaction between the scalar field and the vector field.

In order to analyze the renormalization process, we firstly work in the weak classical field limit. To characterize the divergences associated with $\langle\phi^2\rangle$ and $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ we perform an adiabatic expansion, i.e. an expansion in derivatives of the metric and vector field perturbations. The analysis of the divergences shows a qualitative difference in the ultraviolet behavior of these two objects. Assuming that the dispersion relation behaves as $\omega_k \sim k^s$ (with s a natural number) for large values of the wave vector k , we note that $\langle\phi^2\rangle$ is convergent for sufficiently large values of s , while the number of divergent terms in the adiabatic expansion of $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ increases with s . We also point out another qualitative difference between the case where the metric and vector field perturbations are spatially homogeneous and where they are not. In the first case, the divergences appear to be considerably “milder” and technically

simpler to deal with. For this reason and motivated by the “trans-planckian” problem in cosmology, we focus on spatially homogeneous metrics.

To go beyond the weak field limit, we extend the adiabatic subtraction scheme based on a WKB expansion of the field modes. By using in addition the dimensional regularization method, we analyze the renormalization of $\langle\phi^2\rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ for n-dimensional Friedman-Robetson-Walker (FRW) space-times. For free fields propagating in this background, the counterterms required to renormalize the semiclassical equations for the metric have the same form of the ones corresponding to the usual theory. That is, it is not possible to distinguish the emergence of new counterterms involving the vector field. This is due to the symmetries of this space-time. For this reason, we consider an anisotropic space-time with Bianchi type I metric and analyze the renormalization of the semiclassical equations for the metric, in the case of a free scalar field, and the renormalization of the equation for the expectation value of a self-interacting scalar field, up to one loop order. In both cases, the emergence of new counterterms becomes evident.

As an application, we use the results obtained for generic dispersion relations and FRW space-times in the case of a particular dispersion relation and a De Sitter space-time. In this situation, we evaluate numerically the trace of the energy momentum tensor of the field and analyze its dependence on the mass scale associated with the “trans-planckian effects” (or with new physics). From this, we analyze the self-consistent solutions of the semiclassical equations for the De Sitter metric and discuss about the possibility of reproducing, with the usual theory, the effects of modifications of the dispersion relation, by choosing appropriately the quantum initial state for the modes of the scalar field. Finally, we discuss about some previous works assessing the importance of the backreaction of a quantum scalar field with modified dispersion relation on the inflationary evolution.

Keywords: field theory in curved space-times; renormalization; trans-Planckian physics

Agradecimientos

En primer lugar quisiera expresar mi sentimiento de gratitud para con Diego Mazzitelli, por haberme permitido realizar el doctorado bajo su supervisión, por su apoyo y dedicación permanente, por su paciencia, su entusiasmo y por que trabajar con alguien con sus cualidades humanas y su gran capacidad es todo un placer.

Quisiera agradecer a Claudio Simeone por su colaboración y por las discusiones enriquecedoras.

Gracias a Ted Jacobson por haberse interesado en este trabajo y por sus valiosas observaciones.

A Fernando Lombardo por su constante predisposición para prestar ayuda y por el apoyo brindado.

A mi ex-compañera de oficina Paula Villar por su buen humor y por la ayuda prestada.

A los docentes y no docentes del departamento por su dedicación y paciencia.

Quisiera agradecer infinitamente a mi mamá Bruna, por su apoyo permanente, su comprensión y, principalmente, por todo el amor que me brinda. Gracias a mi hermano Aimar, a mi cuñada Lore y a mi preciosa sobrina Meli, por llenar mi corazón con tanta felicidad. Un agradecimiento enorme a Carlos Andrés, por darme fuerzas, por su valioso apoyo, su paciencia e invaluable amor.

Finalmente, a mis amigos, compañeros y ex-compañeros de oficina, por los buenos momentos compartidos.

Tabla de Contenidos

Índice	1
Introducción	3
1. Teoría de campos en espacios curvos	11
1.1. Cuantización de un campo escalar real ϕ y el tensor de energía-momento . . .	11
1.2. Construcción de $\langle\phi^2\rangle_{\text{ren}}$ y $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}$	14
1.3. Ecuaciones semiclásicas y renormalización	18
1.4. Sustracción adiabática basada en el desarrollo WKB	22
2. Campos con relaciones de dispersión generalizadas	27
2.1. Ruptura de la simetría de Lorentz	27
2.2. La teoría de Einstein-Éter	29
2.3. El acoplamiento entre el Éter y los campos de materia	33
3. Contaje de potencias en el límite de campos débiles	37
3.1. Ecuación de movimiento y el propagador de Feynman	37
3.2. Divergencias en $\langle\phi^2\rangle$	39
3.2.1. Cancelación de divergencias?	42
3.3. Divergencias en $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$	45
4. Sustracción adiabática en espacios de Friedman-Robertson-Walker	51
4.1. El desarrollo WKB	52
4.2. Renormalización de $\langle\phi^2\rangle$	53
4.3. Construcción de $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle_{\text{ren}}$	56
4.3.1. Órdenes adiabáticos cero, dos y cuatro de $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$	57
4.3.2. Ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter: renormalización y contratérminos	61
5. Renormalización adiabática para campos interactuantes y espacios anisótropos	67
5.1. Métricas de Bianchi I	67
5.2. Campo ϕ autointeractuante: desarrollo WKB	68
5.2.1. Regularización de $\langle\hat{\phi}^2\rangle_{ad2}$	70
5.2.2. Renormalización de la ecuación semiclásica para ϕ_0	72
5.3. Renormalización de $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ en Bianchi I	73

6. Anomalía de Traza y soluciones autoconsistentes en De Sitter	79
6.1. Traza de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ en De Sitter para la teoría en $1 + 1$: Dependencia con M_C	80
6.2. Traza de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ en De Sitter para la teoría en $3 + 1$: Dependencia con M_C	83
6.3. Soluciones autoconsistentes en De Sitter	85
6.3.1. Inflación: un estado inicial efectivo?	89
6.3.2. Ecuación de estado y la reacción de un campo cuántico con RD modificada sobre la evolución inflacionaria	90
7. Conclusiones	93
A. Regularización de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ en Friedman-Robertson-Walker	101
B. Evaluación de los órdenes adiabáticos cero y dos regularizados de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$	105
C. Identidades para espacios-tiempos tipo Bianchi I	109
D. Regularización de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)}$ en Bianchi I	111

Introducción

Como es bien sabido, aún no se ha podido desarrollar una teoría cuántica satisfactoria de la gravedad. Si bien, por un lado, la búsqueda de tal teoría ha dado lugar a un gran desarrollo teórico, por otro lado, las dificultades encontradas ha motivado la elaboración y el análisis de una teoría semiclásica para la gravedad.

En la aproximación semiclásica para la gravedad se tienen en cuenta las propiedades cuánticas de los campos de materia, e incluso de eventuales perturbaciones de la métrica, y se considera a la geometría de fondo dada por una métrica clásica, acoplada a los campos cuánticos. En la teoría semiclásica se destacan dos componentes: la teoría de campos en espacios curvos y las ecuaciones semiclásicas para la métrica. La teoría de campos en espacios curvos describe los efectos de la gravedad sobre los campos cuánticos y las ecuaciones semiclásicas para la métrica describen cómo los campos cuánticos actúan como fuente de la gravedad. Las ecuaciones semiclásicas están bien definidas sólo luego de que se implementa un método regularización y se lleva a cabo una renormalización. Como se resumirá en el Capítulo 1, esto último está bien establecido para campos cuánticos que satisfacen la relación de dispersión usual en fondos curvos.

Hoy en día hay varias motivaciones teóricas y fenomenológicas para estudiar posibles efectos conocidos como “trans-planckianos” en el marco de una teoría de campos efectiva y semiclásica para la gravedad.

En la teoría de campos cuánticos en espacios curvos, usualmente se descompone al operador campo en funciones modos, las cuales son soluciones de las ecuaciones de campo normalizadas apropiadamente. Con esta teoría como base, se han estudiado muchos fenómenos en el universo temprano y en espacios-tiempos de agujeros negros. En algunos casos, las funciones modos con longitud de onda muy corta (cercanas a la escala de Planck o a otra escala a la cual las leyes físicas podrían no ser las usuales) se corren al rojo significativamente y se vuelven modos relevantes para los efectos observacionales [1]. En esos casos, ha surgido la pregunta de si los efectos observacionales son sensibles o no a modificaciones de las leyes de la física para esas escalas de longitudes cortas. Esta posibilidad es la base

de lo que se conoce como *problema trans-planckiano*.

Hay al menos dos casos en los cuales el problema trans-planckiano ha sido analizado. Uno es el de la radiación de Hawking [2, 3, 4, 5, 6, 7] y otro el de un universo en expansión [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. También se ha notado que efectos trans-planckianos podrían ser relevantes en astrofísica, como para la física de los rayos cósmicos de energías altas [15, 16].

Puesto que aún no se conoce una teoría cuántica de la gravedad, el estudio es necesariamente fenomenológico. En particular, en la literatura se ha argumentado que algunos efectos de gravedad cuántica podrían aparecer como modificaciones en las relaciones de dispersión de los modos de campos cuánticos [17, 18, 19, 20]. Esta posibilidad aparece, por ejemplo, en gravedad cuántica de lazos [19], en algunos modelos inspirados en la teoría de cuerdas [17, 18] o debido a la interacción con los gravitones [20]. Dado esto, se han iniciado estudios de las implicancias de suponer que la relación de dispersión (RD) de los modos de campos cuánticos es diferente a la usual, siendo más notoria la diferencia cuanto más chica es la longitud de onda de un modo.

Para proceder fenomenológicamente, varios autores han considerado modelos puramente cinemáticos, principalmente en el contexto de la astrofísica; por ejemplo, con el fin de analizar el umbral para la producción de ciertas partículas [15, 16]. No obstante, en general resulta necesario considerar un modelo dinámico. En la literatura se han propuesto modelos basados en teorías de campos efectivas, tanto para el caso de un espacio-tiempo con métrica minkowskiana (como el modelo de Myers y Pospelov [21]), como para espacios-tiempos curvos (como la denominada teoría de Einstein-Éter [22]).

En particular, en el contexto cosmológico, los efectos trans-planckianos podrían producirse en los modelos inflacionarios [10, 11]. Los modelos inflacionarios fueron introducidos principalmente para explicar algunos problemas conceptuales del modelo del Big Bang, tales como los denominados problema del horizonte y de planitud [23, 24]. Poco después se notó que el mismo podría utilizarse para explicar el origen de las inhomogeneidades del Universo [25]. La idea básica de inflación es agregar una etapa anterior a las descritas por el modelo del Big Bang y obtener una explicación causal de las condiciones iniciales necesarias para la evolución posterior (tales como la existencia de “pequeñas” inhomogeneidades). El mecanismo está basado en una expansión del universo acelerada, la cual produce un crecimiento exponencial (o cuasi exponencial) de las longitudes de onda físicas. El crecimiento exponencial de las longitudes de onda físicas se produce durante el periodo inflacionario cuando la métrica es aproximadamente la del espacio-tiempo de De Sitter. La métrica de De Sitter es solución de las ecuaciones de Einstein si se incluye una constante cosmológica positiva Λ o, equivalentemente, un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu} = -\Lambda/(8\pi G_N)g_{\mu\nu}$,

con $\Lambda > 0$, G_N la constante de Newton y $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo. Bajo ciertas condiciones, el tensor de energía-momento de un campo escalar resulta similar a este último y puede producir el período inflacionario. En tal caso, dicho campo escalar se denomina inflatón. Para poder resolver los problemas conceptuales del modelo del Big Bang el período de expansión debe ser suficientemente largo, de manera que las longitudes de onda físicas relevantes para las observaciones actuales (como ser las propiedades estadísticas de la distribución de la materia a gran escala y de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo) sean menores que la escala de longitud que mide el horizonte causal durante inflación. Típicamente, esta escala puede ser tan chica como $H_{inf}^{-1} \sim 10^5 m_{pl}^{-1}$, donde m_{pl} es la masa de Planck. Es más, este período de aceleración podría durar lo suficiente como para que las escalas de longitudes físicas relevantes para las observaciones actuales sean menores que la escala de Planck (u otra escala a la cual las leyes físicas podrían ser diferentes las usuales) al comienzo de la etapa de inflación [10, 11]. Dado esto, las predicciones podrían depender de las leyes de la física a tales escalas pequeñas, dando lugar a los efectos trans-planckianos [9, 10]. Por ejemplo, esto ha conducido a preguntarse si la física trans-planckiana (o “nueva física”) podría haber dejado una huella en el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo o en la evolución de la métrica del universo [13, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37]. En particular, no hay un consenso claro acerca de si una modificación a frecuencias altas en la relación de dispersión para los modos de un campo escalar durante inflación podría afectar significativamente o no la evolución de la métrica del espacio-tiempo de fondo [8, 28, 32, 33]. En este contexto, se ha sugerido que si los modos con longitudes de onda menores que la escala de Hubble H_{inf}^{-1} pero mayores que la de Planck aparecen excitados durante inflación, su densidad de energía podría ser comparable a la del fondo, modificando la expansión inflacionaria. Por un lado, se ha argumentado que evitar esta posibilidad da lugar a cotas para los números de ocupación de tales modos, limitando así el efecto de la física trans-planckiana sobre las predicciones inflacionarias [8, 28, 32, 31]. Por otro lado, se han señalado algunas sutilezas relacionadas con la elección de una frecuencia de corte máxima y con la ecuación de estado para los modos trans-planckianos, las cuales indicarían que la contribución de esos modos excitados podría no modificar significativamente la expansión [33]. Una solución a esta controversia requiere de un estudio consistente de cómo afecta la presencia de un campo escalar con RD modificada a la evolución del espacio-tiempo de fondo. Este estudio debería involucrar la evaluación de valores de expectación de cantidades tales como las componentes del tensor de energía-momento del campo con la RD propuesta, así como también un análisis las ecuaciones semiclásicas para la métrica, que tienen a este tensor como fuente. Puesto que tales

valores de expectación son formalmente divergentes y las ecuaciones semiclásicas deben ser compatibles con la identidad de Bianchi, para obtener resultados finitos y ecuaciones consistentes, es necesario estudiar en detalle el proceso de renormalización.

En el contexto del problema trans-planckiano, la inclusión de campos con relaciones de dispersión modificadas rompe la simetría local ante el grupo de Lorentz. En ausencia de esta simetría, en cada punto del espacio-tiempo hay un marco de referencia privilegiado en el cual se escribe la RD. Por ejemplo, en la literatura se han propuesto distintas relaciones de dispersión para estudiar el problema trans-planckiano asociado con el efecto Hawking [3, 4, 5, 6, 7]. Las dos primeras propuestas más conocidas en este contexto son la relación de dispersión de Unruh [3],

$$\omega_k = k_0 (\tanh(k/k_0)^n)^{1/n}, \quad (0.1)$$

y la propuesta por Corley y Jacobson [4],

$$\omega_k^2 = k^2 - \frac{k^4}{k_0^2}, \quad (0.2)$$

donde k_0 fija la escala a la cual las desviaciones de la relación de dispersión usual para campos no masivos se vuelven importantes. En este contexto, se considera que las relaciones de dispersión tienen esta forma en el marco de referencia de un observador que cae libremente al agujero negro.

Relaciones de dispersión similares han sido consideradas en el contexto de los modelos inflacionarios [9, 10, 12]. En este caso las relaciones de dispersión se escriben generalmente en los marcos privilegiados fijos a aquellos observadores cosmológicos que están en reposo con respecto al promedio espacial de la materia en el universo.

Una manera de garantizar la invariancia de la teoría ante transformaciones generales de coordenadas, es introducir marcos privilegiados que sean dinámicos [22]. Esto último es fundamental para que las ecuaciones semiclásicas para la métrica sean consistentes, puesto que éstas deben ser compatibles con la identidad de Bianchi. En la denominada teoría de Einstein-Éter [22], esto se realiza introduciendo un campo vectorial dinámico u^μ , de tipo temporal y unitario ($u_\mu u^\mu = -1$), al cual se le ha llamado “Éter”. Los marcos privilegiados quedan entonces determinados por la configuración del campo vectorial. En esta teoría, es posible incluir en forma consistente campos cuánticos que satisfacen relaciones de dispersión generalizadas en espacios curvos, acoplando los campos cuánticos con el Éter. En la aproximación semiclásica, la métrica del espacio-tiempo de fondo y el campo vectorial u^μ se consideran objetos clásicos.

El objetivo fundamental de esta tesis es extender los métodos de renormalización conocidos al caso en que los campos cuánticos satisfacen una relación de dispersión generalizada

en fondos curvos ¹. Para ello, consideraremos un modelo específico de un campo escalar cuántico ϕ con RD generalizada en el contexto de la teoría de Einstein-Éter y adoptaremos la aproximación semiclásica. Los detalles del modelo se describirán en el Capítulo 2. Técnicamente, utilizaremos el método de regularización dimensional junto con sustracción adiabática. En toda la tesis se utilizarán unidades en las cuales la velocidad de la luz y la constante de Planck valen uno $c = \hbar = 1$ y se adoptarán las convenciones de signos denotadas (+ + +) por Misner, Thorne, y Wheeler [39].

Para las ecuaciones semiclásicas de la métrica, el objeto de interés es el valor de expectación del tensor energía-momento del campo en cuestión $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle$. Otro objeto de interés es $\langle \phi^2 \rangle$. Por ejemplo, para que la ecuación del valor de expectación ϕ_0 de un campo escalar autointeractuante con potencial $\lambda\phi^4$ esté bien definida en la aproximación de un lazo, resulta necesaria la renormalización de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$, donde $\hat{\phi}$ describe las fluctuaciones cuánticas alrededor de ϕ_0 . A su vez, dado que el procedimiento para renormalizar $\langle \phi^2 \rangle$ es considerablemente más sencillo que para $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle$, estudiar este objeto nos servirá de entrenamiento para luego aplicar básicamente los mismos pasos para $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle$.

Dada la complejidad de los cálculos, primero (en el Capítulo 3) trabajaremos en el límite de campos débiles, es decir, en el límite en que existe un sistema de coordenadas tal que la métrica es la correspondiente a un espacio-tiempo de Minkowski más pequeñas perturbaciones ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) y el campo u_{μ} es normal a las hipersuperficies de coordenada temporal t constante más perturbaciones ($u_{\mu} = \delta_{\mu}^0 + v_{\mu}$). En este límite, investigaremos la aparición de divergencias en el desarrollo adiabático de $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle$ mediante un conteo de potencias. El desarrollo adiabático es un desarrollo en derivadas de la métrica y del campo u^{μ} . El orden adiabático de un término está dado por la cantidad de derivadas de dichos objetos que aparecen en el mismo. A partir de este análisis mostraremos que para relaciones de dispersión donde la frecuencia de los modos del campo se comporta como k^s para valores grandes del vector de onda k (donde s es un número natural) la sustracción necesaria para renormalizar los dos objetos de interés depende de s en una manera cualitativamente diferente: mientras que $\langle \phi^2 \rangle$ es convergente para valores suficientemente grandes de s , el número de términos divergentes en el desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle$ generalmente aumenta con s . De esta manera, podremos concluir que, al menos en este límite de campos débiles, la renormalización de las ecuaciones semiclásicas resulta más complicada cuanto mayor es s . Esto es así ya que cuanto mayor es s , por un lado, la renormalización involucra el cálculo y la regularización de más cantidad de términos y, por el otro, mayor es

¹Un resumen breve acerca de los trabajos originales que dieron lugar a esta tesis puede encontrarse en [38].

la cantidad de contratérminos que se deben incluir en la acción desnuda para absorber las divergencias. No obstante, los contratérminos que se deben ir incluyendo a medida que s aumenta contienen cada vez más derivadas de la métrica. Por consiguiente, desde el punto de vista fenomenológico, esperamos que no sean relevantes. Por el contrario, como resumiremos en el Capítulo 2, los términos del lagrangiano del campo vectorial que involucran dos derivadas de la métrica sí son fenomenológicamente relevantes.

A modo de ejemplo, consideraremos una RD particular y perturbaciones de la métrica y del campo Éter inhomogéneas espacialmente, en cinco dimensiones. En este caso, calcularemos explícitamente el orden adiabático dos de $\langle\phi^2\rangle$ a primer orden en las perturbaciones. Notaremos que el mismo puede escribirse como la suma de dos contribuciones. Una es finita y proporcional al escalar de curvatura R , mientras que la otra es divergente y proporcional a R_{00} . Esta última puede escribirse de manera covariante usando, además de la métrica, el campo vectorial. Contrariamente, para métricas homogéneas espacialmente el término proporcional a R_{00} no aparece y este orden adiabático es finito.

También mostraremos que en el caso particular en que las perturbaciones son homogéneas espacialmente (independientes de las coordenadas espaciales), para valores de s suficientemente grandes sólo el primer término del desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ es divergente. En este caso, si s es suficientemente grande, a los efectos de remover las divergencias, solamente sería necesario redefinir una constante desnuda gravitacional: la constante cosmológica. Este capítulo está basado principalmente en la Ref.[40].

Con el objeto avanzar en la investigación de si las predicciones de un modelo inflacionario dependen fuertemente o no de las leyes físicas a escalas “trans-planckianas”, en el Capítulo 4 (basado en las referencias [41] y [42]) nos concentraremos en espacios-tiempos de Friedman-Robertson-Walker (FRW) espacialmente planos. Para una mayor generalidad, trabajaremos en n dimensiones.

Para estudiar el proceso de renormalización a nivel de las ecuaciones semiclásicas, extendaremos el esquema denominado sustracción adiabática basado en un desarrollo WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) de los modos del campo escalar. Al igual que en el capítulo anterior, utilizaremos también el método de regularización dimensional. A modo de entrenamiento, comenzaremos con el caso sencillo de un campo libre y analizaremos la renormalización de $\langle\phi^2\rangle$. Pasaremos luego a estudiar el tensor de energía-momento y las ecuaciones semiclásicas para la métrica. En el caso de la RD usual (como se resumirá en el Capítulo 1), es bien sabido que para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, los términos divergentes del desarrollo adiabático del tensor de energía-momento provienen del orden adiabático cero, dos y cuatro. Dado esto, para absorber las divergencias que aparecen en este tensor,

además de la constante cosmológica y la constante de Newton, otras constantes correspondientes a términos de la acción gravitacional que son cuadráticos en la curvatura son también necesarias. En el caso de una RD generalizada, mostraremos explícitamente que los órdenes adiabáticos cero, dos y cuatro pueden absorberse haciendo una redefinición de las mismas constantes gravitacionales necesarias en el caso usual, cualquiera sea la RD.

Este resultado nos llevó a preguntarnos si nuevos contratérminos (que involucren tensores diferentes a los requeridos en la teoría usual) aparecen para métricas de fondo homogéneas espacialmente más generales. Para estudiar esto, en el Capítulo 5, el cual se basa en la Ref. [43], consideraremos un espacio-tiempo de fondo anisótropo con métrica de Bianchi I. Para tal fondo, analizaremos la renormalización de las ecuaciones semiclásicas para la métrica en presencia de un campo escalar con RD modificada y de la ecuación para el valor de expectación del campo escalar en el caso en que éste es autointeractuante. En ambos casos, obtendremos que además de los contratérminos usuales, también aparecen contratérminos que involucran al campo vectorial unitario de fondo. Es importante mencionar que dependiendo de la RD los contratérminos podrían ser finitos, dando lugar a una renormalización finita de las constantes desnudas de la acción de la teoría de Einstein-Éter. Fenomenológicamente, puesto que los valores de los parámetros asociados a los distintos términos de la acción del campo vectorial están restringidos fuertemente por las observaciones [44, 45], dichos contratérminos deben ser elegidos apropiadamente para que la teoría sea compatible con las observaciones.

En el Capítulo 6 aplicaremos los resultados del Capítulo 4 para llevar a cabo cálculos explícitos con los objetos renormalizados. Nos restringiremos al caso simple (aunque relevante en el contexto inflacionario) de un espacio-tiempo de fondo de De Sitter. Este capítulo está basado en la Ref.[42]. Para una RD generalizada particular, mediante evaluaciones numéricas, analizaremos la dependencia de la traza del tensor energía-momento renormalizado con la escala de masa M_C asociada a los efectos trans-planckianos. Así, recuperaremos la conocida anomalía de traza en el límite $M_C \rightarrow \infty$. Esto lo haremos primero para la teoría en 1+1 dimensiones y posteriormente generalizaremos el análisis al caso de un espacio-tiempo de 3 + 1 dimensiones. Luego, consideraremos el problema de resolver las ecuaciones semiclásicas para la métrica de De Sitter en forma autoconsistente, teniendo en cuenta los efectos cuánticos de campos escalares libres con una RD generalizada. Este análisis también nos permitirá establecer una comparación entre el modelo utilizado y la posibilidad de modelar los efectos trans-planckianos mediante condiciones iniciales diferentes a la usual para los modos de Fourier del campo [34, 46, 47, 48]. Así, notaremos que ciertos aspectos del modelo no pueden ser reproducidos modificando dichas condiciones iniciales.

También discutiremos acerca de los trabajos [32, 33] donde se analizó la importancia de la reacción de un campo escalar cuántico con RD modificada sobre la evolución inflacionaria.

Finalmente, en el último capítulo, desarrollaremos nuestras conclusiones.

Capítulo 1

Teoría de campos en espacios curvos

En este capítulo resumiremos algunos aspectos de la teoría de campos en espacios curvos, poniendo especial énfasis en la renormalización. Como se ha mencionado en la Introducción, el propósito de esta teoría es el estudio de campos cuánticos que se propagan en espacios-tiempos curvos y de los efectos que estos campos producen sobre la geometría del espacio-tiempo. Como campo cuántico, nos restringiremos al caso más sencillo de todos, el de un campo escalar real. Los conceptos básicos y los métodos se extienden a campos tensoriales y espinoriales.

Comenzaremos describiendo el método de cuantización canónica para el campo escalar. Luego, pasaremos a construir los valores de expectación renormalizados $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ y, a continuación, nos concentraremos en las ecuaciones semiclásicas y mencionaremos los contratérminos requeridos para la renormalización. Finalmente, resumiremos el método de sustracción adiabática basado en un desarrollo WKB, el cual extenderemos en el Capítulo 4 al caso en que el campo satisface relaciones de dispersión generalizadas. Este capítulo está basado principalmente en las referencias [49],[50] y [51].

1.1. Cuantización de un campo escalar real ϕ y el tensor de energía-momento

Consideramos una variedad espacio-tiempo de n -dimensiones, globalmente hiperbólica $(M, g_{\mu\nu})$ con métrica $g_{\mu\nu}$ y un campo escalar cuántico ϕ que se propaga en dicha variedad. La generalización de la acción clásica para un campo escalar real, libre, de masa m que se propaga en un espacio-tiempo de Minkowski, al caso de un espacio-tiempo curvo es

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + (m^2 + \xi R) \phi^2], \quad (1.1)$$

donde n es el número de dimensiones del espacio-tiempo, $g = \det g_{\mu\nu}$ es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, ξ es una constante y R es el escalar de curvatura de Ricci. El caso particular en que $\xi = 0$ corresponde a un acoplamiento mínimo entre el campo y la geometría del fondo. En el caso en que el campo no tiene masa, hay otro valor particular de ξ que se destaca: $\xi = \xi_n \equiv (n-2)/(4n-4)$. Para este ξ_n la acción resulta invariante (a menos de un término de borde) ante transformaciones conformes, dadas por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad \tilde{\phi} = \Omega^{(2-n)/2}\phi. \quad (1.2)$$

La ecuación de movimiento para el campo (obtenida variando la acción con respecto a ϕ e igualando a cero) resulta

$$[-\square + m^2 + \xi R]\phi = 0, \quad (1.3)$$

donde $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]$ (siendo ∇_ν la derivada covariante asociada a $g_{\mu\nu}$, la cual, para simplificar la notación en algunas expresiones, en lo que sigue también la denotaremos con un punto y coma; por ejemplo, $\phi_{;\mu\nu} \equiv \nabla_\nu\nabla_\mu\phi$).

La cuantización del campo se realiza siguiendo los mismos lineamientos que en el espacio-tiempo de Minkowski. La definición del producto de Klein-Gordon se extiende a espacios-tiempos curvos mediante la ecuación:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \{ \phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - (\partial_\mu \phi_1) \phi_2^* \} d\Sigma^\mu, \quad (1.4)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado; $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, siendo n^μ un vector unitario orientado hacia el futuro, ortogonal a la superficie tipo espacial Σ y $d\Sigma$ el elemento de volumen en Σ . Usando el teorema de Gauss, se puede demostrar que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de movimiento del campo (Ec.(1.3)) que se anulan en el infinito espacial, el resultado del producto (ϕ_1, ϕ_2) no depende de la superficie Σ que se elija para calcularlo. El producto satisface las siguientes relaciones: $(\phi_1, \phi_2)^* = -(\phi_1^*, \phi_2^*) = (\phi_2, \phi_1)$ y $(\phi_1, \phi_1^*) = 0$.

La Ec.(1.3) admite un conjunto completo de soluciones $u_i(x)$ que satisfacen

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \quad (1.5a)$$

$$(u_i, u_j^*) = 0, \quad (1.5b)$$

con el índice i representando el conjunto de cantidades necesarias para etiquetar los modos. Dado esto, el campo clásico ϕ puede desarrollarse como una combinación de estas funciones con coeficientes $a_i = (\phi, u_i)$ y sus complejos conjugados.

La cuantización se implementa adoptando las relaciones de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (1.6a)$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad (1.6b)$$

donde ahora a_i es un operador y a_i^\dagger es el hermítico conjugado de a_i , concebidos como operadores de aniquilación y creación de partículas, respectivamente.

El campo cuántico puede entonces escribirse en términos de las funciones u_i y los operadores asociados las mismas a_i y a_i^\dagger ,

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \quad (1.7)$$

Dado esto, se puede definir un estado de vacío mediante la propiedad $a_i|0\rangle = 0$ y construir el correspondiente espacio de Fock de la manera usual. Es importante notar que la definición del vacío y el concepto de partículas presenta una ambigüedad inherente. Esto es así ya que el campo podría ser desarrollado en diferentes conjuntos de funciones que satisfagan (1.5). Más específicamente, si en lugar de las funciones u_i usamos otras alternativas $\bar{u}_j(x)$ tales que $(\bar{u}_j^*, u_i) \neq 0$ (para algún i, j) y definimos un nuevo estado de vacío mediante $\bar{a}_i|\bar{0}\rangle = 0$, donde $\bar{a}_i = (\phi, \bar{u}_i)$, (usando las propiedades (1.5)) obtenemos que $a_i|\bar{0}\rangle = (\phi, u_i)|\bar{0}\rangle = \sum_j (\bar{u}_j^*, u_i)\bar{a}_j^\dagger|\bar{0}\rangle \neq 0$. Por consiguiente, los dos espacios de Fock basados en las dos elecciones de funciones u_i y \bar{u}_j son diferentes.

Las distintas funciones de dos puntos o funciones de Green se construyen de la manera usual. Dos de las más utilizadas son el propagador de Hadamard,

$$G_1(x, x') = \langle \{\phi(x), \phi(x')\} \rangle, \quad (1.8)$$

y el de Feynman,

$$G_F(x, x') = i\langle T[\phi(x)\phi(x')] \rangle, \quad (1.9)$$

donde $\{, \}$ denota el anticonmutador, T es el producto t -ordenado de los campos y $\langle \rangle$ denota el valor de expectación en el estado cuántico correspondiente. Estas funciones satisfacen las ecuaciones:

$$[\square_x - m^2 - \xi R(x)]G_1(x, x') = 0, \quad (1.10)$$

$$[\square_x - m^2 - \xi R(x)]G_F(x, x') = -\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\delta(x, x'). \quad (1.11)$$

El propagador de Hadamard puede obtenerse a partir del de Feynman mediante

$$G_1(x, x') = 2\text{Im}[G_F(x, x')]. \quad (1.12)$$

Podemos notar que el valor de expectación del cuadrado del campo $\langle \phi^2 \rangle$ puede escribirse como

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x'} G_1(x, x') = \lim_{x \rightarrow x'} \text{Im}[G_F(x, x')]. \quad (1.13)$$

Como se ha mencionado en la Introducción, un objeto de gran interés es el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Clásicamente, este tensor aparece como fuente de las ecuaciones de Einstein y, de acuerdo con nuestras convenciones, la definición es

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.14)$$

A partir de la acción (1.1), el mismo resulta

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1 - 2\xi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\xi \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2\xi g_{\mu\nu} \phi \square \phi + \xi \phi^2 G_{\mu\nu} \\ & + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} \phi^2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2$ es el tensor de Einstein.

Ingenuamente, para definir el correspondiente operador cuántico, luego de adoptar una prescripción para ordenar los operadores, uno debería reemplazar en esta expresión el campo clásico por el correspondiente operador cuántico. Este procedimiento involucraría tomar el producto de dos distribuciones en un mismo punto, lo cual no está bien definido. Por lo tanto, surge la necesidad de implementar un método de regularización. Más específicamente, si calculamos el valor de expectación de este tensor para un estado cuántico dado $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$, el mismo será divergente. Las divergencias son de carácter ultravioleta, ya que aparecen cuando tomamos el producto de dos distribuciones evaluadas en un mismo punto. Por lo tanto, para caracterizar las mismas debemos estudiar el comportamiento de tales productos, no para un mismo punto, sino para puntos distintos pero muy cercanos. En lo que sigue adoptaremos la prescripción de Weyl para el orden de los operadores, es decir, simetrizaremos las expresiones; por ejemplo, al término $\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ de la Ec.(1.15) lo reemplazaremos por $\{\phi, \nabla_\mu \nabla_\nu \phi\}/2$, donde $\{, \}$ denota el anticonmutador.

1.2. Construcción de $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$

En esta sección resumiremos los métodos que se han desarrollado para obtener las versiones renormalizadas de $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. El valor de expectación del tensor de energía-momento $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ es de especial importancia debido a que puede utilizarse para estudiar la reacción de los campos cuánticos sobre la geometría del espacio-tiempo. El mismo aparece como fuente de las ecuaciones semiclásicas de Einstein, definidas por

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle, \quad (1.16)$$

donde G_N es la constante de Newton y Λ la constante cosmológica. Para darle sentido a esta ecuación, la idea es primero utilizar un método de regularización y escribir $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ como

una parte divergente más una parte finita: $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{div}} + \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$. Esta separación de los términos divergentes no es trivial ya que, por un lado, la parte divergente debe poder cancelarse con contratérminos adecuados (lo cual será tratado en la siguiente sección) y, por el otro, dado que el miembro de la izquierda de esta ecuación satisface la identidad de Biachi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, debemos tener que $\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}} = 0$, lo cual está garantizado si se utiliza un método de regularización covariante.

Existen varios métodos de regularización adecuados, como ser el de separación covariante de puntos [52] o la regularización dimensional [53]. Es más, estos métodos junto con un análisis covariante de las contribuciones singulares correspondientes (tales como el desarrollo de Schwinger-De Witt [54] en el espacio de coordenadas o el de Bunch y Parker [55] en el espacio de momentos) permiten conocer los contratérminos requeridos para la renormalización para métricas de fondo arbitrarias.

El método de separación covariante de puntos consiste en concebir al tensor de energía-momento en un dado punto x como el límite cuando $x \rightarrow x'$ de un bi-tensor $\tau_{\mu\nu'}(x, x')$, el cual transforma como el producto de un tensor en x por otro en x' . Al hacer esto, el valor de expectación del tensor de energía-momento puede escribirse en términos del propagador de Hadamard, y el resultado es:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle &= \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \frac{1}{4} (1 - 2\xi) (G_{1;\mu'\nu'}(x, x') + G_{1;\nu'\mu'}(x, x')) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}\xi (G_{1;\mu\nu}(x, x') + G_{1;\nu\mu}(x, x')) + \frac{1}{8}\xi g_{\mu\nu} (G_{1;\rho}{}^{i\rho}(x, x') + G_{1;\rho'}{}^{i\rho'}(x, x')) \\ &\quad + \frac{(n-1)}{n}\xi (\xi R + m^2) G_1(x, x') g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\xi G_{\mu\nu} G_1(x, x') - \frac{m^2}{4} g_{\mu\nu} G_1(x, x') \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} \left(G_{1;\lambda}{}^{i\lambda}(x, x') + G_{1;\lambda'}{}^{i\lambda'}(x, x') \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde se ha usado la Ec.(1.10) para reescribirlo de manera tal que para el caso en de un campo no masivo acoplado conformemente ($m = 0$ y $\xi = \xi_n$) se cumpla directamente $\langle T_{\mu}{}^{\mu}(x) \rangle = 0$, sin tener que recurrir a la Ec.(1.10).

Esta expresión de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ es puramente formal, puesto que es divergente y además aparecen sumadas cantidades que transforman como tensores, pero en diferentes puntos del espacio-tiempo. Esto último no es un impedimento serio, ya que pueden definirse métodos de transporte paralelo que otorguen significado definido a esta expresión.

Para separar en forma covariante la parte divergente, se utiliza un desarrollo covariante para el propagador G_1 , que tiene la forma conocida como solución elemental Hadamard:

$$G_H(x, x') = \frac{u(x, x')}{\sigma(x, x')} + v(x, x') \ln \sigma(x, x') + w(x, x'), \quad (1.18)$$

donde u , v y w son funciones no singulares y simétricas, y $\sigma = s^2(x, x')/2$ es un medio del cuadrado de la distancia geodesica entre x y x' ; es decir, s es la distancia medida a lo largo de la única geodésica que une a los puntos x y x' si están contenidos en un entorno coordenado normal.

El desarrollo más utilizado es el conocido como desarrollo de Schwinger-De Witt (para otros posibles ver [56]), el cual está dado por

$$G_1^{SD}(x, x') = -2\text{Im}\Delta^{1/2}(x, x') \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(4\pi is)^{n/2}} \exp\left\{\frac{\sigma(x, x')}{2s} - im^2s\right\} \times \sum_{k \geq 0} (is)^k a_k(x, x'), \quad (1.19)$$

con $\Delta(x, x') = -\det[\partial_\mu \partial_\nu \sigma(x, x')][g(x)g(x')]^{-1/2}$ el determinante de Van Vleck. Las funciones $a_k(x, x')$ se definen mediante un conjunto de relaciones de recurrencia a partir de $a_0(x, x') = 1$, las cuales garantizan que G_1^{SD} sea solución de la Ec.(1.10). Se puede demostrar que este desarrollo tiene la forma de Hadamard (Ec(1.18)).

En el límite de coincidencia (es decir, para $x \rightarrow x'$), las funciones $a_k(x, x)$ son escalares formados con la métrica y sus derivadas. A medida que k aumenta, a_k contiene más cantidad de derivadas de la métrica; por ejemplo,

$$a_1(x, x) = -(\xi - 1/6) R \quad (1.20a)$$

$$a_2(x, x) = \frac{1}{180} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi\right) \square R + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2, \quad (1.20b)$$

...

En general, el coeficiente a_k tiene $2k$ derivadas de la métrica. De esta manera se obtiene un desarrollo adiabático para G_1 , donde el orden adiabático está dado por la cantidad de derivadas de la métrica que aparecen en los coeficientes. Con ésta terminología, a_1 es de orden adiabático dos, mientras que a_2 es de orden adiabático cuatro.

Introduciendo el propagador G_1^{SD} en las ecuaciones (1.13) y (1.17) se obtiene un desarrollo adiabático para $\langle \phi^2(x) \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$, respectivamente. Utilizando métodos de transporte paralelo, se puede separar de manera covariante la parte divergente de cada uno de estos valores de expectación. El límite $x \rightarrow x'$ se toma al final de los cálculos. Alternativamente, se puede trabajar directamente con $x = x'$ y utilizar el método de regularización dimensional. En este trabajo utilizaremos este último procedimiento.

Para $x = x'$ es simple calcular la integral de la Ec.(1.19). Introduciendo una escala de masa μ para mantener las unidades correctas de G_1^{SD} en un espacio-tiempo de \bar{n} dimensiones

físicas, obtenemos

$$G_1^{SD}(x, x) = 2 \left(\frac{\mu}{m} \right)^{\bar{n}-n} \sum_{k \geq 0} \frac{a_k(x, x)}{(4\pi)^n} m^{\bar{n}-2(k+1)} \Gamma \left[1 + k - \frac{n}{2} \right], \quad (1.21)$$

donde $\Gamma[x]$ es la función Gamma.

A partir de este desarrollo es fácil ver que para \bar{n} dimensiones hay una cantidad finita de términos de la serie que son divergentes para $n \rightarrow \bar{n}$: los primeros términos del desarrollo con $k \leq \text{int}(n/2 - 1)$, donde $\text{int}(x)$ es la parte entera de x . Dado esto, usando la relación (1.13) podemos caracterizar las divergencias que aparecen en el desarrollo adiabático de $\langle \phi^2(x) \rangle$.

En n dimensiones, se puede demostrar que las divergencias que aparecen el desarrollo adiabático de $\langle \phi^2(x) \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ contienen coeficientes de orden adiabático $2i \leq 2i_{max}^u$ y $2j \leq 2j_{max}^u$, respectivamente, con

$$2i_{max}^u = 2 \text{int} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \quad (1.22a)$$

$$2j_{max}^u = 2 \text{int} \left(\frac{n}{2} \right), \quad (1.22b)$$

donde hemos introducido un superíndice u (por usual) para diferenciar estos resultados que corresponden al caso de la RD usual, con los que encontraremos más adelante en este trabajo.

Luego, se definen los valores de expectación renormalizados, $\langle \phi^2(x) \rangle_{\text{ren}}$ y $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$, mediante la sustracción:

$$\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}} = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi^2 \rangle^{(0)} \dots - \langle \phi^2 \rangle^{(2i_{max}^u)}, \quad (1.23a)$$

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle - \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(0)} \dots - \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(2j_{max}^u)}, \quad (1.23b)$$

donde el superíndice $2l$ denota al término de orden adiabático $2l$ que contribuye al desarrollo adiabático del objeto correspondiente.

Es importante notar que para poder construir los valores de expectación $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, que aparecen en estas ecuaciones, es necesario especificar la elección del estado para el cual se toman los valores de expectación, mientras que los términos que se sustraen son independientes de dicha elección. Una consecuencia importante de esta construcción es que no todos los estados darán lugar a un $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ finito. Esto es así ya que el propagador de Hadamard construido a partir de alguno de dichos estados y las derivadas del mismo hasta el orden adiabático requerido, podrían no tener, respectivamente, la misma estructura singular que el propagador G_1^{SD} y sus derivadas. Aquellos estados para los cuales esta construcción no lleva a un $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ finito son considerados no físicos.

Otra consecuencia importante de esta construcción es que, gracias a que el método es covariante, obtenemos automáticamente que $\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle_{\text{ren}} = 0$. Como hemos mencionado al comienzo de esta sección, esto último es de suma importancia para garantizar la consistencia de las ecuaciones semiclásicas de Einstein.

Como hemos notado en la sección anterior, para el caso no masivo $m = 0$ y acoplamiento conforme $\xi = \xi_n = (n - 2)/(4n - 4)$ la teoría clásica del campo escalar ϕ tiene invariancia conforme, por lo cual el tensor de energía-momento no tiene traza. Una tercera consecuencia de esta construcción es la anomalía de traza en dimensiones pares, es decir, se obtiene que $\langle T_\mu^\mu \rangle_{\text{ren}} \neq 0$ en el caso no masivo y con acoplamiento conforme. En n dimensiones, esta anomalía viene dada por el coeficiente $a_{n/2}$ del desarrollo de Schwinger-De Witt. En dos y cuatro dimensiones resultan [49]:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{\text{ren}} = \frac{a_1}{4\pi} = \frac{R}{24\pi} \quad (n = 2), \quad (1.24a)$$

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{\text{ren}} = \frac{a_2}{16\pi^2} = \frac{1}{2880} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \square R) \quad (n = 4). \quad (1.24b)$$

1.3. Ecuaciones semiclásicas y renormalización

Hasta ahora nada hemos dicho acerca de la renormalización, es decir acerca de los contratérminos requeridos para absorber las divergencias.

A modo de entrenamiento, describiremos primero el caso de $\langle \phi^2 \rangle$ y, para mayor simplicidad, consideraremos un espacio-tiempo de cuatro dimensiones físicas.

Como se ha mencionado en la Introducción, el valor de expectación del cuadrado de un campo escalar aparece, por ejemplo, en la ecuación semiclásica para el valor de expectación de un campo interactuante. Para ver esto, agreguemos la siguiente acción de interacción a la de la Ec.(1.1),

$$S_{\text{int}} = - \int d^n x \sqrt{-g} \lambda \phi^4. \quad (1.25)$$

La ecuación de movimiento del campo es

$$\square \phi - [m^2 + \xi R] \phi - 4\lambda \phi^3 = 0. \quad (1.26)$$

Supongamos que el estado del sistema es tal que el campo escalar toma un valor de expectación no nulo $\langle \phi \rangle = \phi_0$. Para obtener la ecuación semiclásica en la aproximación de un lazo para ϕ_0 , tomamos el valor de expectación de la Ec.(1.26) ecuación y definimos un nuevo campo cuántico $\hat{\phi}$ de manera que $\phi = \phi_0 + \hat{\phi}$. De esta manera, en la aproximación de un lazo, obtenemos

$$\square \phi_0 - [m^2 + \xi R + 12\lambda \langle \hat{\phi}^2 \rangle + 4\lambda \phi_0^2] \phi_0 = 0, \quad (1.27)$$

donde $\hat{\phi}$ debe satisfacer

$$\square\hat{\phi} - [m^2 + \xi R + 12\lambda\phi_0^2] \hat{\phi} = 0. \quad (1.28)$$

En la ecuación para ϕ_0 aparece $\langle\hat{\phi}^2\rangle$, que es divergente. Por consiguiente, para que esta ecuación esté bien definida es necesario llevar a cabo la renormalización.

En este caso, el campo $\hat{\phi}$ satisface una ecuación similar a la de un campo libre, pero con masa variable. La construcción de $\langle\hat{\phi}^2\rangle_{\text{ren}}$ procede de manera análoga al caso de un campo libre. No obstante, es necesario modificar el propagador de Schwinger-De Witt para tener en cuenta que la masa no es constante. La generalización del propagador de Schwinger-De Witt para este caso y las expresiones de los primeros términos del desarrollo han sido obtenidas en la Ref.[57]. Allí los autores notaron que en el desarrollo adiabático las potencias de ϕ_0 deben contarse como de orden adiabático uno. De esta manera el orden adiabático de un término está dado por el número de derivadas que aparecen en él más la potencia a la cual aparece elevado el campo. A partir del propagador de Schwinger-De Witt generalizado y utilizando el método de regularización dimensional, en [57] los autores obtuvieron los dos primeros términos del desarrollo adiabático de $\langle\hat{\phi}^2\rangle$ y el resultado para $n \rightarrow 4$ es:

$$\langle\hat{\phi}^2\rangle_{\text{ad}2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[M^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] \left(\frac{2}{(n-4)} + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \quad (1.29)$$

donde el subíndice “ad2” indica que el resultado contiene términos hasta de orden adiabático dos inclusive, $M^2 = m^2 + 12\lambda\phi_0^2$ y μ es una constante arbitraria con unidades de masa introducida para garantizar que $\langle\hat{\phi}^2\rangle$ tenga las unidades correctas.

Luego, sumando y restando $12\lambda\langle\hat{\phi}^2\rangle_{\text{ad}2}\phi_0$ en la Ec.(1.27), definiendo $\langle\hat{\phi}^2\rangle_{\text{ren}} = \langle\hat{\phi}^2\rangle - \langle\hat{\phi}^2\rangle_{\text{ad}2}$ y reescribiendo los parámetros desnudos λ , m^2 y ξ como los renormalizados (λ_R , m_R^2 y ξ_R) más los asociados a los contratérminos ($\delta\lambda$, δm^2 y $\delta\xi$), obtenemos

$$\square\phi_0 - \left\{ (m_R^2 + \delta m^2) + (\xi_R + \delta\xi)R + 12\lambda_R\langle\hat{\phi}^2\rangle_R + 4(\lambda_R + \delta\lambda)\phi_0^2 \right. \\ \left. + \frac{3\lambda_R}{2\pi^2(n-4)} \left[m_R^2 + 12\lambda_R\phi_0^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] + \frac{3\lambda_R}{4\pi^2} \ln \frac{M_R^2}{\mu^2} \left[M_R^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R \right] \right\} \phi_0 = 0.$$

A partir de esta ecuación es simple ver que las divergencias pueden removerse usando los siguientes contratérminos:

$$\delta m^2 = -\frac{3\lambda_R m_R^2}{2\pi^2(n-4)} + \Delta m^2, \quad (1.30a)$$

$$\delta\lambda = -\frac{9\lambda_R^2}{2\pi^2(n-4)} + \Delta\lambda, \quad (1.30b)$$

$$\delta\xi = -\frac{3\lambda_R}{2\pi^2(n-4)} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) + \Delta\xi, \quad (1.30c)$$

siendo Δm^2 , $\Delta\lambda$ y $\Delta\xi$ contribuciones finitas para $n \rightarrow 4$, las cuales se determinan eligiendo una prescripción de renormalización; por ejemplo, usando la denominada prescripción mínima $\Delta m^2 = \Delta\lambda = \Delta\xi = 0$. Adoptando la prescripción mínima, las ecuaciones del grupo de renormalización se obtienen fácilmente derivando la ecuación para ϕ_0 con respecto a μ , la cual debe ser independiente de esta escala introducida en el proceso de regularización. De esta manera obtenemos:

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} = \frac{3\lambda_R m_R^2}{2\pi^2}, \quad (1.31a)$$

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{9\lambda_R^2}{2\pi^2}, \quad (1.31b)$$

$$\mu \frac{d\xi_R}{d\mu} = \frac{3\lambda_R}{2\pi^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right). \quad (1.31c)$$

Pasaremos ahora a resumir los resultados para la renormalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein. Por simplicidad, consideraremos solamente el caso en el que el campo escalar es libre ($\lambda = 0$) y se propaga en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Como se ha notado en la sección anterior, las divergencias que aparecen en el desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ van acompañadas de coeficientes de orden adiabático cero, dos y cuatro. Dado esto, es necesario comenzar con una acción desnuda para la gravedad que contenga hasta cuatro derivadas de la métrica, la cual puede escribirse como:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^n x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{-g} (\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (1.32)$$

donde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de curvatura, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$, y Λ , G_N , α , β y γ son parámetros desnudos, los cuales deben ser elegidos apropiadamente para cancelar las divergencias de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Con esta acción para la gravedad, las ecuaciones semiclásicas de Einstein resultan:

$$\frac{1}{8\pi G_N} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) + \alpha H_{\mu\nu}^{(1)} + \beta H_{\mu\nu}^{(2)} + \gamma H_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (1.33)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ es el tensor de Einstein y

$$H_{\mu\nu}^{(1)} = 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\square R + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 - 2RR_{\mu\nu}, \quad (1.34a)$$

$$H_{\mu\nu}^{(2)} = R_{;\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - 2R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu}, \quad (1.34b)$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\delta\sigma\gamma}R^{\rho\delta\sigma\gamma} - 2R_{\mu\rho\delta\sigma}R_{\nu}^{\rho\delta\sigma} - 4\square R_{\mu\nu} + 2R_{;\mu\nu} \\ + 4R_{\mu\sigma}R^{\sigma}_{\nu} - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu}. \quad (1.34c)$$

Para renormalizar la Eq.(1.33) se escribe $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ad4}}$, donde $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ad4}}$ es el obtenido utilizando el propagador de Schwinger-De Witt y el método de regularización

elegido, como se ha descrito en la sección anterior, pero truncado a orden adiabático cuatro. Es bien sabido que las divergencias que aparecen en $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ad4}}$ pueden absorberse mediante la siguiente redefinición de los parámetros desnudos $(\Lambda, G_N, \alpha, \beta \text{ y } \gamma)$, para $(n \rightarrow 4)$ [49]:

$$\Lambda G_N^{-1} = (\Lambda G_N^{-1})_R - \frac{m^4}{4\pi} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (1.35a)$$

$$G_N^{-1} = (G_N^{-1})_R + \frac{m^2}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (1.35b)$$

$$\alpha = \alpha_R - \frac{\left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (1.35c)$$

$$\beta = \beta_R + \frac{1}{1440\pi^2} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (1.35d)$$

$$\gamma = \gamma_R - \frac{1}{1440\pi^2} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right]. \quad (1.35e)$$

En el caso en que $\lambda \neq 0$, además de las constantes gravitacionales también es necesario redefinir λ , ξ y m^2 como se indica en la Eq.(1.30)[57].

Puesto que las constantes desnudas no dependen de la escala μ introducida en regularización dimensional, derivando estas ecuaciones respecto de μ obtenemos las ecuaciones del grupo de renormalización:

$$\mu \frac{d(\Lambda G_N^{-1})_R}{d\mu} = -\frac{m^4}{4\pi}, \quad (1.36a)$$

$$\mu \frac{d(G_N^{-1})_R}{d\mu} = \frac{m^2}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right), \quad (1.36b)$$

$$\mu \frac{d\alpha_R}{d\mu} = -\frac{\left(\xi_R - \frac{1}{6} \right)^2}{16\pi^2}, \quad (1.36c)$$

$$\mu \frac{d\beta_R}{d\mu} = \frac{1}{1440\pi^2}, \quad (1.36d)$$

$$\mu \frac{d\gamma_R}{d\mu} = -\frac{1}{1440\pi^2}. \quad (1.36e)$$

Para finalizar esta sección, haremos un comentario acerca de la manera de estudiar el efecto del campo cuántico sobre la métrica de fondo. En general, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ puede ser dividido en una parte clásica más una parte cuántica: $T_{\mu\nu}^{\text{cl}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle^q$. Luego de renormalizar las ecuaciones semiclásicas de Einstein, las contribuciones proporcionales a los tensores $H_{\mu\nu}^{(1,2)}$ y $H_{\mu\nu}$, que contienen derivadas superiores de la métrica, son generalmente consideradas despreciables o tratadas de manera perturbativa ¹. Conociendo el orden de magnitud de las componentes

¹Aunque éste no siempre es el caso. Una acción con $\beta = \gamma = 0$, donde sólo aparece el tensor $H_{\mu\nu}^{(1)}$ (el cual corresponde al término de la acción proporcional a R^2) fue considerada no perturbativamente por ejemplo en [58, 59].

del tensor de Riemann del espacio-tiempo, podemos caracterizar cuándo estos términos pueden despreciarse. En general, podemos esperar que la teoría semiclásica sea válida si $G_N |R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}| \ll 1$. Suponiendo que estamos en este régimen, despreciando las contribuciones proporcionales a los tensores $H_{\mu\nu}^{(1,2)}$ y $H_{\mu\nu}$ y omitiendo el subíndice “R” en las constantes renormalizadas, obtenemos:

$$\frac{1}{8\pi G_N} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}^{cl} + \langle T_{\mu\nu} \rangle^q. \quad (1.37)$$

Para estudiar el efecto del campo cuántico sobre la métrica, una posibilidad es primero despreciar la contribución de la parte cuántica y obtener una solución $g_{\mu\nu}^{(0)}$ de las ecuaciones de Einstein clásicas. Luego, calcular $\langle T_{\mu\nu} \rangle^q$ para la métrica de fondo $g_{\mu\nu}^{(0)}$. Finalmente, plantear la ecuación completa para $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(1)}$ y resolver para $g_{\mu\nu}^{(1)}$. De esta manera se obtiene la reacción $g_{\mu\nu}^{(1)}$ del campo cuántico sobre la métrica, donde tanto $g_{\mu\nu}^{(1)}$ como $\langle T_{\mu\nu} \rangle^q$ son de orden \hbar en relación a $g_{\mu\nu}^{(0)}$ y $T_{\mu\nu}^{cl}$. Alternativamente, en situaciones con suficiente simetría es posible buscar soluciones autoconsistentes de estas ecuaciones. En el Capítulo 6 seguiremos este último procedimiento.

1.4. Sustracción adiabática basada en el desarrollo WKB

El método de renormalización covariante descrito arriba tiene la ventaja de que en principio puede aplicarse para espacios-tiempos con métricas arbitrarias. Sin embargo, tiene la desventaja de que a partir de éste resulta difícil construir en forma explícita los valores de expectación renormalizados. Afortunadamente, para ciertas métricas de fondo particulares existe otra manera de obtener $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$, el cual resulta adecuado para llevar a cabo evaluaciones numéricas de estas cantidades. Este método se basa en un desarrollo tipo WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) para los modos del campo y se conoce como sustracción adiabática. Esta sustracción debe complementarse con un método de regularización covariante. En este trabajo utilizaremos regularización dimensional.

Con el fin de describir el método, nos restringimos al caso de un espacio-tiempo espacialmente plano de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), cuyo elemento de línea está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = C(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j], \quad (1.38)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1 \dots n-1$ (con n la dimensión del espacio-tiempo), $C(\eta)$ es el cuadrado del factor de escala $a(\eta)$ escrito como una función del tiempo conforme η , el cual está relacionado con el tiempo cósmico t mediante $d\eta = dt/\sqrt{C}$.

El campo ϕ puede ser descompuesto como

$$\phi(\vec{x}, \eta) = \int d^{n-1}k [a_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{x}, \eta) + a_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*(\vec{x}, \eta)], \quad (1.39)$$

donde

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}, \eta) = \frac{C^{(2-n)/4} \chi_k(\eta)}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \exp\{i\vec{k} \cdot \vec{x}\}. \quad (1.40)$$

La ecuación de movimiento para los modos χ_k puede escribirse (a partir de la Ec.(1.3)) como

$$\chi_k'' + [(\xi - \xi_n)RC + \omega_k^2] \chi_k = 0, \quad (1.41)$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a η .

Puesto que los índices de las funciones modos son el vector de onda \vec{k} , la condición de ortonormalización de la Ec.(1.5) $((u_i, u_j) = \delta_{i,j})$ debe reemplazarse por $(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'} = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$. Haciendo esto, obtenemos la siguiente condición para los modos:

$$\chi_k \chi_k'^* - \chi_k' \chi_k^* = i. \quad (1.42)$$

El desarrollo WKB se obtiene escribiendo al modo χ_k en la forma

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{2W_k}} \exp\left(-i \int^\eta W_k(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}\right). \quad (1.43)$$

De esta manera, la condición de la Ec.(1.42) se cumple automáticamente. Utilizando esta forma para χ_k , la descomposición del campo (1.39) y la definición del vacío $a_{\vec{k}}|0\rangle$ hallamos

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{\mu^{\bar{n}-n} \sqrt{C}}{(2\pi \sqrt{C})^{n-1}} \int d^{n-1}k |\chi_k|^2 = \frac{\mu^{\bar{n}-n} \sqrt{C}}{(2\pi \sqrt{C})^{n-1}} \int d^{n-1}k \frac{1}{2W_k}, \quad (1.44)$$

donde hemos omitido $|0\rangle$ en la notación para el estado y hemos usado el conmutador $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$. En esta ecuación μ es una escala de masa introducida en el procedimiento de regularización dimensional para garantizar que ϕ tenga las unidades correctas y $n \rightarrow \bar{n}$ al final de los cálculos. Asimismo, podemos escribir $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ en términos de W_k .

Insertando la expresión para χ_k de la Ec.(1.43) en la Ec.(1.41) obtenemos

$$W_k^2 = \Omega_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{W_k''}{W_k} - \frac{3}{2} \frac{W_k'^2}{W_k^2} \right), \quad (1.45)$$

donde $\Omega_k^2 = \omega_k^2 + (\xi - \xi_n)CR$. Esta ecuación diferencial y no lineal para W_k puede resolverse en forma iterativa, suponiendo que W_k es una función que varía lentamente con η . De esta manera podemos obtener un desarrollo adiabático de W_k , donde el orden adiabático

de un término está dado por la cantidad de derivadas respecto de η que aparecen en él. Así obtenemos $W_k^2 = {}^{(0)}W_k^2 + {}^{(2)}W_k^2 + \dots$, donde

$${}^{(0)}W_k^2 = \omega_k^2, \quad (1.46a)$$

$${}^{(2)}W_k^2 = (\xi - \xi_n)R - \frac{1}{4} \frac{C''}{C} \left(1 - \frac{k^2}{\omega_k^2}\right) + \frac{5}{16} \frac{C'^2}{C^2} \left(1 - \frac{k^2}{\omega_k^2}\right)^2, \quad (1.46b)$$

...

A partir de esto, es notorio que el desarrollo adiabático solamente será útil para aproximar las funciones modos con frecuencias grandes frente a la escala característica asociada a la variación del factor de escala $\mathcal{H} = C'/C$.

Introduciendo el desarrollo adiabático de W_k^2 en las expresiones para $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ obtenemos los desarrollos adiabáticos correspondientes para estas cantidades. Truncando dichos desarrollos al orden requerido para la renormalización, podemos utilizarlos para construir $\langle \phi^2(x) \rangle_{\text{ren}}$ y $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$, mediante la sustracción de la Ec.(1.23).

Se ha mostrado que la renormalización mediante esta sustracción adiabática procede de la misma manera que con el método manifiestamente covariante mencionado en la sección anterior. En particular, para métricas de FRW en la Ref. [60] se ha mostrado que el desarrollo adiabático del propagador de Hadamard construido con el desarrollo WKB coincide con el propagador de Schwinger-De Witt, hasta el orden adiabático cuatro.

Este método de sustracción adiabática se extiende a espacios-tiempos de FRW con curvatura espacial [60, 61, 62], campos interactuantes [57, 63], espacios-tiempos de Bianchi I [64, 65] y métricas estacionarias con simetría esférica [66, 67, 68].

Para finalizar, haremos un comentario acerca de la construcción de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ y de los estados para los cuales esperamos que $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ sea finito. Como se ha remarcado debajo de la Ec.(1.23), en esa ecuación $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ depende del estado para el que se toma el valor de expectación, mientras que los términos que se sustraen quedan determinados por la construcción del desarrollo adiabático. Para el espacio-tiempo considerado en esta sección, $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ podría escribirse en términos de funciones modos que satisfagan la Ec.(1.41) en forma exacta, junto con la condición de normalización (1.42). De esta manera, especificando las condiciones iniciales para las funciones modos podríamos fijar el estado del sistema. No obstante, no toda solución particular $\chi_k(\eta)$ dará lugar a un $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{ren}}$ finito. Dicho de otro modo, la solución debe ser tal que la transformada de Fourier de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ coincida con la obtenida mediante el desarrollo WKB para valores grandes del vector de onda $|\vec{k}|$, hasta el orden adiabático requerido para la renormalización. Es más, si esto ocurre, la sustracción puede realizarse para cada componente de Fourier, es decir, antes de hacer las integrales. Esto último es muy útil ya que en general es difícil hacer las integrales en forma analítica

y, puesto que son divergentes, mediante regularización dimensional. Si la sustracción se realiza antes de hacer las integrales y el estado es físico, las mismas resultan convergentes. Entonces, el límite $n \rightarrow \bar{n}$ puede tomarse antes de integrar, lo cual hace posible que pueda implementarse un cálculo numérico de las integrales.

Una discusión detallada y una caracterización de los estados permitidos para métricas de FRW pueden encontrarse en [69, 70]. Por ejemplo, para un espacio-tiempo de De Sitter de cuatro dimensiones, donde $C(\eta) = (H\eta)^{-2}$ (siendo H constante), un estado permitido es el denominado estado de vacío de Bunch-Davies $|0\rangle$. Las funciones modos correspondientes están dadas por

$$u_{\vec{k}}^{BD}(\vec{x}, \eta) = \left(\frac{\pi}{4HC^{3/2}(2\pi)^3} \right)^{1/2} e^{i\pi\nu} e^{i\pi/4} H_\nu^{(1)}(|k\eta|), \quad (1.47)$$

donde $H_\nu^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie y

$$\nu^2 = \frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2} - 12\xi. \quad (1.48)$$

Sin embargo, hay otros estados físicos. Una manera de caracterizarlos consiste en escribir sus correspondientes funciones modos $\bar{u}_{\vec{k}}$ como una combinación de las asociadas al vacío de Bunch-Davies,

$$\bar{u}_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^{BD} + \beta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^{BD*}, \quad (1.49)$$

donde $\alpha_{\vec{k}}$ y $\beta_{\vec{k}}$ son conocidos como coeficientes de Bogoliubov, los cuales satisfacen $|\alpha_{\vec{k}}| - |\beta_{\vec{k}}| = 1$ (debido a que ambos conjuntos de funciones modos deben ser ortonormales (1.5)). De esta manera, el estado de vacío $|\bar{0}\rangle$ asociado a estos modos en general contendrá partículas definidas a partir del estado de Bunch-Davies, es decir $a_k|\bar{0}\rangle \neq 0$. El número de partículas $n_{\vec{k}}$ en un modo \vec{k} se obtiene mediante

$$n_{\vec{k}} = \frac{(2\pi)^3}{V} \langle \bar{0} | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | \bar{0} \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} |\beta_{\vec{k}}|^2 \langle \bar{0} | \bar{a}_{\vec{k}} \bar{a}_{\vec{k}}^\dagger | \bar{0} \rangle = |\beta_{\vec{k}}|^2, \quad (1.50)$$

donde V es el volumen espacial. Se ha mostrado que para que el estado descrito de esta manera sea físico, el coeficiente $|\beta_{\vec{k}}|^2$ debe tender a cero para $k \rightarrow \infty$ más rápido que k^{-4} [70].

Capítulo 2

Campos con relaciones de dispersión generalizadas

2.1. Ruptura de la simetría de Lorentz

El descubrimiento de la simetría de Lorentz fue uno de los avances más grandes de la historia de la física. Esta simetría ha sido confirmada con gran precisión y ha sido muy importante a la hora de construir nuevas teorías físicas. Naturalmente se podría suponer que ésta es una simetría de la naturaleza para boost arbitrarios, sin embargo, aún está la posibilidad de que dicho supuesto no sea cierto. Si bien la duda de si la simetría de Lorentz se extiende o no a boost arbitrarios no es nueva, recientemente ha resurgido el interés en la misma, básicamente, por dos motivos. Por un lado están los numerosos intentos teóricos y fenomenológicos de caracterizar posibles efectos de gravedad cuántica. En esta caracterización la ruptura o no de la simetría de Lorentz podría jugar un rol importante. Por otro lado, la mejora en la sensibilidad de los experimentos y las observaciones ha dado lugar a la posibilidad de probar efectos de ruptura de la simetría de Lorentz incluso si están suprimidos por la escala de Planck [16, 71, 72].

Es valioso notar que si efectos de gravedad cuántica pueden caracterizarse por una ruptura de la simetría de Lorentz, esto no necesariamente implica que la teoría cuántica para la gravedad no posea tal simetría, sino que ésta podría aparecer rota a bajas energías. Ésta sería la situación si a bajas energías hay campos tensoriales que adquieren valores de expectación no nulos en el vacío [17] o incluso si hay un campo escalar que adquiere un valor de expectación en el vacío que no es constante [73].

Dado esto y con el fin de realizar predicciones fenomenológicamente relevantes, en la literatura se han propuesto modelos basados en teorías de campos efectivas que rompen la

simetría de Lorentz. Para métricas minkowskianas, una de las más conocidas es denominada extensión mínima del modelo estándar (mSME) propuesta por Colladay y Kostelecký [74]. La misma consiste en extender el modelo estándar agregando términos en el Lagrangiano con dimensiones de masa menor que cinco que rompan la simetría de Lorentz, pero que mantengan la invarianza de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. A partir de los experimentos se han puesto cotas muy restrictivas sobre los parámetros correspondientes a los nuevos términos. Por esta razón, se ha argumentado que en lugar de estos nuevos términos se deberían agregar otros de dimensión de masa igual a cinco, los cuales darían efectos que están suprimidos para energías mucho menores que la de Planck [21]. Sin embargo, en ausencia de una simetría que lo justifique, mantener solamente los términos de dimensión de masa igual a cinco podría no ser natural, en el sentido que los coeficientes de los términos con dimensión de masa menor deberían ser ajustados a cero o a valores muy cercanos a cero [75, 76].

Por otro lado, se ha propuesto incorporar la posibilidad de una ruptura de la simetría de Lorentz modificando la teoría de la gravedad. Una manera de modificar la acción de Einstein-Hilbert para la gravedad consiste en agregar otros campos tensoriales independientes de la métrica [18, 22]. Por ejemplo, manteniendo sólo términos con dos derivadas de la métrica, una acción posible es

$$S_G = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^n x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}], \quad (2.1)$$

donde en principio los coeficientes $s^{\mu\nu}$ y $t^{\mu\nu\rho\sigma}$ pueden depender de x . Si consideramos esta acción, el problema principal que aparece es la identidad de Bianchi. La variación de los dos primeros términos respecto de la métrica dará una contribución a las ecuaciones para la métrica que satisface $\nabla^\mu (G_{\nu\mu} + \Lambda g_{\mu\nu}) = 0$, mientras que la contribución de los términos restantes en general no tendrá esta propiedad. Para evitar este problema, los nuevos campos tensoriales deben ser dinámicos. Habría que agregar entonces términos cinéticos para los campos tensoriales y además potenciales que den lugar a una solución en la que estos tensores sean no nulos. De esta manera, si los nuevos campos tensoriales satisfacen las correspondientes ecuaciones de movimiento, la nueva contribución a las ecuaciones para la métrica será compatible con la identidad de Bianchi. Casos particulares de este tipo de teorías son aquellas en la que parte de la simetría de Lorentz se rompe porque un campo vectorial toma un valor no nulo. En este caso $S^{\mu\nu}$ puede escribirse como $u^\mu u^\nu$ y $t^{\mu\nu\rho\sigma}$ puede ser reducido a $S^{\mu\nu}$ debido a las simetrías del tensor de Riemann. Agregando términos cinéticos y una parte potencial para el campo vectorial $V(u_\mu u^\mu)$, obtenemos una teoría vectorial-tensorial. Teorías vectorial-tensorial para la gravedad ya han sido estudiadas desde los comienzos de la década del 70 [77], pero habían sido dejadas de lado por problemas

de consistencia. En la Ref. [78] los autores han argumentado que este tipo de teorías posee problemas de estabilidad a menos que $V = \tilde{\lambda}(u_\mu u^\mu + 1)$, con $\tilde{\lambda}$ un multiplicador de Lagrange. La teoría con este vínculo se conoce como teoría de Einstein-Éter. Esta teoría es muy interesante. Por un lado, constituye una extensión natural de la Relatividad General, que debe satisfacer ciertos vínculos para ser consistente con las observaciones astrofísicas y cosmológicas. Por otro lado, es el escenario natural para introducir relaciones de dispersión modificadas para los campos de materia de manera covariante, rompiendo parte de la simetría de Lorentz.

2.2. La teoría de Einstein-Éter

La teoría de Einstein-Éter es una teoría vectorial-tensorial en la cual se impone que el campo vectorial tome un valor no nulo y tipo temporal, determinando así sistemas de referencia privilegiados de manera local.

La acción más general que involucra solamente dos derivadas de los campos puede escribirse como

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_u, \quad (2.2a)$$

$$S_u = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} \mathcal{L}_u, \quad (2.2b)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$, R es el escalar de Ricci, Λ es la constante cosmológica, G es una constante relacionada con la constante de Newton y \mathcal{L}_u describe la dinámica del nuevo grado de libertad u^μ ,

$$\mathcal{L}_u = -\tilde{\lambda}(g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu + 1) - K^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \nabla_\rho u^\mu \nabla_\sigma u^\nu, \quad (2.3)$$

donde

$$K^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = c_1 g^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + c_2 \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma + c_3 \delta_\nu^\rho \delta_\mu^\sigma + c_4 u^\rho u^\sigma g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

o más explícitamente

$$K^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \nabla_\rho u^\mu \nabla_\sigma u^\nu = c_1 \nabla_\mu u^\nu \nabla^\mu u_\nu + c_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 + c_3 \nabla_\mu u^\nu \nabla_\nu u^\mu + c_4 u^\rho u^\sigma \nabla_\rho u_\mu \nabla_\sigma u^\mu. \quad (2.5)$$

En este lagrangiano, el multiplicador de Lagrange $\tilde{\lambda}$ es introducido para imponer la condición $u_\mu u^\mu = -1$ y los coeficientes c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) son en principio arbitrarios. El término $\nabla_\mu u^\nu \nabla_\nu u^\mu$ puede escribirse como

$$\nabla_\mu u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \nabla_\mu J^\mu + (\nabla_\mu u^\mu)^2 - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (2.6)$$

con $J^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu - u^\mu \nabla_\nu u^\nu$, donde hemos usado que $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]u^\mu = R_{\nu\mu}u^\mu$. Por esta razón el término $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ ha sido omitido en el lagrangiano¹.

La restricción de incluir términos con no más de dos derivadas está motivada por la concepción de la teoría como una teoría de campos efectivas [79, 80], a partir de lo cual se espera que los términos con derivadas superiores estén suprimidos por un factor pequeño con dimensiones de longitud adicional por cada derivada. El orden de magnitud para los coeficientes c_i depende de la escala de energía asociada a la física desconocida para energías altas. En particular, si la única escala relevante es la escala de Planck, se espera que todos ellos sean de orden uno. En esta acción el campo u^μ ha sido reescalando de modo que resulte adimensional. Alternativamente, puede introducirse otra escala de masa v , reescribiendo la acción en términos de $\tilde{u}^\mu = vu^\mu$. Esta última opción ha sido adoptada en [80], donde el autor analizó a la teoría desde la perspectiva de las teorías de campos efectivas. Allí, el lagrangiano se escribió en términos de nuevas constantes de acoplamiento $\tilde{c}_i = (4\pi Gv^2)^{-1}c_i$, donde las constantes \tilde{c}_i son consideradas de orden uno. Mediante un conteo de potencias y utilizando regularización dimensional se mostró que una expansión de la acción en derivadas resulta consistente para $4\pi Gv^2 \lesssim 1$.

La ecuación para el campo vectorial obtenida variando la acción (2.2) con respecto a u^ν es:

$$\frac{8\pi G}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_G}{\delta u^\nu} = \nabla_\rho J_\nu^\rho - c_4 a_\mu \nabla_\nu u^\mu - \tilde{\lambda} u_\nu = 0, \quad (2.7)$$

con

$$J^\rho{}_\mu = K^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \nabla_\rho u^\mu, \quad (2.8a)$$

$$a_\nu = u^\mu \nabla_\mu u_\nu. \quad (2.8b)$$

Contrayendo la Ec.(2.7) con u^μ podemos determinar $\tilde{\lambda}$,

$$\tilde{\lambda}^u = -u^\nu \nabla_\rho J_\nu^\rho + c_4 a_\mu a^\mu. \quad (2.9)$$

El tensor de energía-momento asociado a u^μ es:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^u &= \frac{1}{8\pi G} \left\{ \nabla_\rho [J^\rho{}_{(\mu} u_{\nu)} - J_{(\mu\nu)}{}^\rho u^\rho] + c_1 [\nabla_\mu u^\rho \nabla_\nu u_\rho - \nabla_\rho u_\mu \nabla^\rho u_\nu] \right. \\ &\quad \left. - c_4 a_\nu a_\mu + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \mathcal{L}_u - \tilde{\lambda} u_\mu u_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde los paréntesis indican que las expresiones deben simetrizarse de acuerdo a la fórmula $A_{(\mu\nu)} = [A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}]/2$.

¹En la Ref.[43] hemos utilizado otra parametrización de \mathcal{L}_u . Sin embargo, usando la Ec.(2.6) es fácil ver que los parámetros usados en [43] están relacionados con los c_i de la siguiente manera: $b_1 = c_1/2$, $b_2 = c_1 + c_2 + c_3$, $b_3 = -c_1 - c_3$ y $b_4 = c_4$.

En esta expresión $\tilde{\lambda}$ podría reemplazarse por $\tilde{\lambda}^u$, dada en la Ec.(2.9). Sin embargo, es importante notar que si el campo u^μ está acoplado con otros campos tendríamos $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^u + \tilde{\lambda}^{\text{int}}$, donde en general $\tilde{\lambda}^{\text{int}}$ también dependerá de los otros campos.

La consistencia de la teoría y las observaciones imponen restricciones sobre los parámetros c_i . Un resumen actualizado de dichas restricciones puede encontrarse en la Ref. [45]. En lo que sigue mencionaremos algunas de ellas.

En el límite de campos débiles y estáticos, con el campo u^μ alineado con el vector de Killing tipo temporal y con materia no relativista, la teoría se reduce a la gravedad de Newton con una constante de Newton G_N relacionada con la constante G de la acción (2.2) mediante ($n = 4$) [81]:

$$G_N = \frac{G}{1 - c_{14}/2}, \quad (2.11)$$

donde $c_{14} \equiv c_1 + c_4$ (a continuación también usaremos una notación similar para la suma de otras combinaciones de los coeficientes c_i). Dado esto, el límite Newtoniano sólo se recupera si $c_{14} < 2$. Se ha demostrado que de todos los parámetros post-newtonianos (PPN) de esta teoría solamente aquellos dos (α_1 y α_2) relacionados con la presencia de sistemas de referencia privilegiados pueden diferir de los correspondientes a la Relatividad General [44]. En la Ref. [44] estos parámetros han sido obtenidos en términos de los coeficientes c_i :

$$\alpha_1 = \frac{-8(c_3^2 + c_1c_4)}{2c_1 - c_1^2 + c_3^2} \quad (2.12a)$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} - \frac{(c_1 + 2c_3 - c_4)(2c_1 + 3c_2 + c_3 + c_4)}{c_{123}(2 - c_{14})} \quad (2.12b)$$

Las observaciones actuales indican que $\alpha_1 \lesssim 10^{-4}$ y $\alpha_2 \lesssim 4 \times 10^{-7}$ [82]. Si se fijan los parámetros α_1 y α_2 a cero pueden obtenerse dos ecuaciones que relacionan los c_i , las cuales dan la condición para que todos los parámetros post-newtonianos coincidan con los de la Relatividad General. Si se imponen dichas ecuaciones, dos de los cuatro parámetros adicionales de la teoría quedarían determinados.

En el contexto cosmológico, para mantener la homogeneidad e isotropía espacial, los sistemas de referencia privilegiados, determinados por la configuración del campo vectorial u^μ , deben coincidir con los correspondientes a los observadores isotrópicos. Dado esto, el elemento de línea para una métrica de FRW espacialmente plana puede escribirse en coordenadas comovientes como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv -(u_\mu dx^\mu)^2 + \perp_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = C(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (2.13)$$

donde $u_\mu \equiv C^{1/2}(\eta)\delta_\mu^\eta$ y $\perp_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ coincide con la métrica espacial definida por

un observador comoviente con 4-velocidad $-u^\mu$ ². Este u_μ satisface automáticamente la ecuación de movimiento del campo (2.7). En este caso el tensor de energía-momento del campo u_μ se reduce a (para n dimensiones)

$$T_{\mu\nu}^u = -\frac{[c_{13} + (n-1)c_2]}{8\pi G(n-2)}G_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

a partir de donde podemos concluir que el mismo puede absorberse en una redefinición de la constante G_{cosm} que aparece en la ecuación de Friedman usual, mediante

$$G_{\text{cosm}} = \frac{G}{1 + \left[\frac{c_{13} + (n-1)c_2}{(n-2)} \right]}. \quad (2.15)$$

Como G_{cosm} es diferente a G_N (2.11) para $n = 4$ la tasa de expansión del universo difiere de la que se obtendría en Relatividad General con el mismo contenido de materia. El cociente entre estas dos constantes está restringido por la abundancia primordial de ${}^4\text{He}$ inferida a partir de las observaciones, $|G_{\text{cosm}}/G_N - 1| \lesssim 1/8$ [81]. Si los parámetros α_1 y α_2 son fijados a cero, resulta que $G_{\text{cosm}} = G_N$ [44] y esta cota se satisface automáticamente.

En el límite de campos débiles, en la Ref. [83] se han estudiado las perturbaciones de la métrica y del campo u^μ alrededor de la solución con métrica minkiwskiana $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y campo $\bar{u}^\mu = -\delta_0^\mu$. En dicho trabajo se han puesto restricciones sobre los coeficientes c_i para evitar inestabilidades, que aparecerían si el cuadrado de la velocidad de alguno de los cinco modos no masivos encontrados para cada vector de onda en cuatro dimensiones resultase negativa. En [84] se han analizado las densidades de energía de los modos y se han encontrado restricciones para los c_i imponiendo que las densidades de energía sean positivas.

También se han estudiado soluciones estáticas con simetría esférica para describir el exterior de estrellas con tal simetría, en las cuales el campo u^μ está alineado con el vector de Killing tipo temporal [85], y soluciones de agujeros con una componente del u^μ (el cual es tipo temporal) no alineada con el vector de Killing que ya no es tipo temporal en todos lados [86].

En resumen, la teoría de Einstein-Éter ha sido estudiada en diversos contextos y se han puesto cotas sobre los parámetros de la acción. De acuerdo con el resumen de resultados reportados en [45], aunque quedan varias situaciones interesantes para estudiar, las ya analizadas indican que aún hay una región de parámetros para los cuales la teoría podría ser compatible con las observaciones.

²Alternativamente uno puede elegir $u_\mu \equiv -C^{1/2}(\eta)\delta_\mu^\eta$ para que coincida con la cuatrivelocidad de los observadores isotrópicos. Sin embargo, los resultados físicos no dependerán de esta elección convencional.

2.3. El acoplamiento entre el Éter y los campos de materia

Como se ha mencionado arriba, la teoría de Einstein-Éter es el escenario natural para introducir, de manera covariante, campos con relaciones de dispersión modificadas. En este trabajo nos restringiremos al caso de campos escalares y reales. A continuación describiremos los detalles del modelo, el cual está basado en la acción propuesta en [32] y es una generalización de la acción considerada en [22, 87].

La acción clásica para el campo escalar y real de masa m puede escribirse como [32]:

$$S_\phi = \int d^n x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_{cor}), \quad (2.16)$$

donde \mathcal{L}_L es el lagrangiano estándar para el campo escalar,

$$\mathcal{L}_L = -\frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + (m^2 + \xi R) \phi^2], \quad (2.17)$$

y \mathcal{L}_{cor} es lagrangiano que da lugar a las relaciones de dispersión generalizadas,

$$\mathcal{L}_{cor} = - \sum_{1 \leq q \leq q_M, p \leq q} b_{qp} (\mathcal{D}^{2q} \phi) (\mathcal{D}^{2p} \phi). \quad (2.18)$$

siendo q_M un número natural, $\mathcal{D}^2 \phi = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi \equiv \perp_\mu^\lambda \nabla_\lambda (\perp_\gamma^\mu \nabla^\gamma \phi)$ (donde $\perp_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ y $\perp_\mu^\lambda \equiv g^{\lambda\nu} \perp_{\mu\nu}$) y los coeficientes b_{qp} son en principio arbitrarios. Si el orden de magnitud de estos coeficientes b_{qp} está dado por una única escala de masa M_C , asociada a la nueva física, los mismos podrían suponerse naturalmente de orden $M_C^{2(1-q-p)}$.

Más en general, la derivada covariante \mathcal{D}_μ asociada con la métrica $\perp_{\mu\nu}$ de un campo tensorial $T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p}$ se define como

$$\mathcal{D}_\delta T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \perp_{\lambda_1}^{\mu_1} \dots \perp_{\lambda_p}^{\mu_p} \perp_{\nu_1}^{\sigma_1} \dots \perp_{\nu_p}^{\sigma_p} \perp_\rho^\delta \nabla_\rho T_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\sigma_1 \dots \sigma_p}. \quad (2.19)$$

Por construcción, esta derivada satisface

$$\mathcal{D}_\rho \perp_{\mu\nu} = 0, \quad (2.20a)$$

$$u^{\mu_i} \mathcal{D}_\delta T_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = u_{\nu_j} \mathcal{D}_\delta T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_p} = u^\delta \mathcal{D}_\delta T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = 0. \quad (2.20b)$$

Teniendo en cuenta que el campo u^μ es unitario, el tensor de energía-momento derivado a partir de la acción de la Ec.(2.16) puede separarse en tres partes:

$$T_{\mu\nu}^\phi = T_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^{cor} + T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}}. \quad (2.21)$$

Las dos primeras $T_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^{cor}$ provienen de la variación de la acción (2.16) respecto de $g^{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^{cor} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.22)$$

siendo $T_{\mu\nu}^L$ el tensor de energía-momento usual dado en la Ec.(1.15). El tensor $T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}}$ proviene de la contribución de esta acción al multiplicador de lagrange $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^u + \tilde{\lambda}_{cor}$ y está dado por

$$T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}} = -\frac{\tilde{\lambda}_{cor}}{8\pi G} u_\mu u_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} u^\rho \frac{\delta S_\phi}{\delta u^\rho} u_\mu u_\nu. \quad (2.23)$$

Dado esto, el cálculo del tensor de energía-momento clásico $T_{\mu\nu}^\phi$, aunque algo tedioso, es directo. Sin embargo, por el motivo que ilustraremos a continuación, hay casos en los cuales el cálculo se simplifica. Consideremos la siguiente integral:

$$\int \sqrt{-g} d^n x f(\phi) \mathcal{D}^{2q} \phi = \int \sqrt{-g} d^n x f(\phi) \perp_\mu^\lambda \nabla_\lambda (\perp_\gamma^\mu \nabla^\gamma \mathcal{D}^{2q-2} \phi), \quad (2.24)$$

con $q \geq 1$ y $f(\phi)$ un escalar que puede depender de ϕ y de sus derivadas. Integrando por partes dos veces obtenemos:

$$\int \sqrt{-g} d^n x \nabla^\lambda (\perp_\lambda^\mu \nabla_\gamma (\perp_\mu^\gamma f(\phi))) \mathcal{D}^{2q-2} \phi. \quad (2.25)$$

El factor con derivadas de $f(\phi)$ puede reescribirse como

$$\nabla^\lambda (\perp_\lambda^\mu \nabla_\gamma (\perp_\mu^\gamma f(\phi))) = (\mathcal{D}^2 + \nabla_\rho a^\rho + 2a_\rho a^\rho) f(\phi). \quad (2.26)$$

donde $a_\rho = u^\mu \nabla_\mu u_\rho$.

A partir de esto es evidente que cuando $a_\mu = 0$ el cálculo es más sencillo. La condición $a_\mu = 0$ se cumple por ejemplo para métricas de FRW y métricas de Bianchi I. Por simplicidad, en lo que sigue del capítulo nos restringiremos a los casos en los que esta condición se cumple.

El tensor de energía-momento resulta (más detalles acerca del cálculo pueden encontrarse en [32]):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\phi &= T_{\mu\nu}^L + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{cor} + E(\phi) \{ 2u_{(\nu} \nabla^{\rho} u_{\mu)} \nabla_{\rho} \phi - 2u_{(\nu} \nabla_{\mu)} u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \phi \\ &+ \perp_{\mu\nu} [\square \phi + (\nabla_{\rho} u^{\rho}) u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \phi + u^{\rho} \nabla_{\rho} (u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \phi)] \} - u_{\mu} u_{\nu} (u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \phi) u^{\rho} \nabla_{\rho} E(\phi) \\ &- 2\nabla_{(\mu} \phi \nabla_{\nu)} E(\phi) - 2(u^{\lambda} \nabla_{\lambda} E(\phi)) u_{(\nu} \nabla_{\mu)} \phi + \perp_{\mu\nu} (\nabla^{\rho} \phi) \nabla_{\rho} E(\phi) \\ &- 2(u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \phi) u_{(\nu} \nabla_{\mu)} E(\phi) + g_{\mu\nu} (u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \phi) u^{\rho} \nabla_{\rho} E(\phi), \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $T_{\mu\nu}^L$ es el tensor de energía-momento usual dado en la Ec.(1.15) y

$$E(\phi) = \sum_{1 \leq q \leq q_M, p \leq q} b_{qp} (q+p) \mathcal{D}^{2(q+p-1)} \phi. \quad (2.28)$$

La ecuación de movimiento para el campo es

$$\square\phi - \left[m^2 + \xi R + 2 \sum_{1 \leq q \leq q_M, p \leq q} b_{qp} \mathcal{D}^{2(q+p)} \right] \phi = 0. \quad (2.29)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener la RD generalizada. En el caso de una métrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$ y un campo Éter $u^\mu = -\delta_\mu^0$, la RD es

$$\omega^2(|\vec{k}|^2) = m^2 + |\vec{k}|^2 + 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} (-1)^{q+p} |\vec{k}|^{2(q+p)}, \quad (2.30)$$

siendo $1 \leq q \leq q_M$ y $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$.

Para el caso de métricas de FRW (2.13), cuando los sistemas privilegiados coinciden con los de los observadores comovientes, la misma expresión se aplica para $\omega_f^2(k_f^2)$, donde $\omega_f = \omega/\sqrt{C(\eta)}$ y $k_f = |\vec{k}_f| = |\vec{k}|/\sqrt{C(\eta)}$ son, respectivamente, la frecuencia física y el vector de onda físico, siendo ω la frecuencia comoviente y \vec{k} el vector de onda comoviente.

Relaciones de dispersión de esta forma han sido usadas para estudiar el problema transplanckiano. En particular, si solamente $b_{11} \neq 0$ obtenemos la RD de Corley-Jacobson [4].

Como hemos mencionado en la Introducción, en el contexto de los modelos inflacionarios no hay un consenso claro acerca de si la presencia de un campo escalar cuántico con una RD modificada afecta significativamente o no la evolución de la métrica de fondo. Para analizar esto adecuadamente, en primer lugar, es necesario contar con el tensor de energía-momento del campo (2.27). Teniendo este tensor, en [32] se ha argumentado que durante inflación la densidad de energía de ciertos modos de un campo cuántico que satisfacen una RD de la forma $\omega_f^2 = k_f^2 - 2|b_{11}|k_f^4 + 2|b_{12}|k_f^6$ podría ser comparable con la densidad de energía del fondo que da lugar a inflación. Sin embargo, en [33] se ha señalado que la ecuación de estado podría resultar similar a la del fondo $p \sim -\rho$.

Para analizar en forma consistente el efecto de un campo cuántico sobre la métrica podemos adoptar la aproximación semiclásica y resolver las ecuaciones semiclásicas para la métrica. Es decir, la generalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein (1.37): ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter. Para ello, como hemos enfatizado en el Capítulo 1, es necesario primero estudiar en detalle el proceso de renormalización.

Para finalizar este capítulo mencionaremos una relación entre la teoría de Einstein-Éter y una teoría propuesta recientemente por Hořava como una teoría de gravedad cuántica [88]. La teoría de Hořava ha despertado muchísimo interés, principalmente porque resulta renormalizable por contaje de potencias. La idea es tratar de manera diferente la coordenada temporal y las coordenadas espaciales, de manera de introducir potencias más altas de los impulsos en las inversas de los propagadores, mejorando el comportamiento ultravioleta

de la teoría sin introducir los problemas de unitariedad que están típicamente presentes en teorías de gravedad con derivadas de orden superior, en las que se mantiene la covariancia. En particular, los autores de [89] han comenzado a analizar perturbaciones escalares de la métrica alrededor de espacio-tiempos isótropos y homogéneos. En dicho trabajo, se ha puntualizado que la ecuación de movimiento para las perturbaciones incluye relaciones de dispersión modificadas, inducidas por las derivadas espaciales de orden superior presentes en el modelo. Por otra parte, en [90] se ha mostrado que la teoría de Hořava puede reinterpretarse como una teoría vectorial-tensorial en un gauge particular.

Capítulo 3

Contaje de potencias en el límite de campos débiles

En este capítulo consideramos el modelo del campo escalar con RD generalizada descrito en la Sec. 2.3. El objetivo es investigar hasta que orden adiabático deben realizarse las sustracciones de la Ec.(1.23) para poder obtener un $\langle\phi^2\rangle_{\text{ren}}$ y un $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle_{\text{ren}}$ finitos. Para ello, trabajaremos bajo la aproximación de campos débiles e investigaremos la aparición de divergencias en el desarrollo adiabático de $\langle\phi^2\rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ mediante un análisis basado en el contaje de potencias. Este capítulo está basado en la Ref.[40].

En el caso de campos cuánticos interactuantes en el espacio-tiempo de Minkowski, la presencia de derivadas espaciales superiores en la acción de los campos (es decir, de potencias de $|\vec{k}|$ más grandes que uno en las relaciones de dispersión $\omega(|\vec{k}|^2)$) mejoran el comportamiento ultravioleta de los diagramas de Feynman [91]. En este capítulo mostraremos que mientras esta mejora también ocurre para $\langle\phi^2\rangle$, lo opuesto ocurre para $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$. También mostraremos que existe una diferencia cualitativa entre el caso en que la métrica es homogénea espacialmente y el caso en que no lo es. En el primer caso, el comportamiento ultravioleta de $\langle T_{\mu\nu}^\phi\rangle$ mejora cuanto mayor es la potencia de $|\vec{k}|$ que aparece en la RD, mientras que en el segundo caso sucede lo contrario.

3.1. Ecuación de movimiento y el propagador de Feynman

Para derivar la ecuación de movimiento del campo escalar y el tensor de energía-momento, en la Sec. 2.3 nos hemos restringido a métricas y campos u^μ que satisfacen $a^\alpha \equiv u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = 0$. Consideramos ahora el caso más general. A partir de la variación de

la acción (2.16) respecto de ϕ obtenemos la ecuación para la función de Green $G(x, x')$ asociada,

$$\left[\square - (m^2 + \xi R) - \sum_{q,p \leq q} b_{qp} (H^q \mathcal{D}^{2p} + H^p \mathcal{D}^{2q}) \right] G(x, x') = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta(x - x'), \quad (3.1)$$

donde $1 \leq q \leq q_M$ y H es un operador dado por

$$H = \mathcal{D}^2 + \nabla_\alpha a^\alpha + 2a^\alpha \nabla_\alpha. \quad (3.2)$$

Bajo la aproximación de campos débiles, consideramos pequeñas perturbaciones alrededor de la solución con métrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$ y campo Éter constante \underline{u}_μ [83]. Adoptando coordenadas (x^0, \dots, x^{n-1}) tales que $\underline{u}_\mu = \delta_\mu^0$, la métrica y el campo Éter pueden escribirse como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.3a)$$

$$u_\mu = \delta_\mu^0 + v_\mu, \quad u^\mu = -\delta_0^\mu - h^{0\mu} + v^\mu. \quad (3.3b)$$

En lo que sigue nos quedaremos solamente con los términos lineales en $h_{\mu\nu}$ y v_μ . A partir del vínculo $u_\mu u^\mu = -1$ podemos despejar v^0 y obtener $v^0 = h^{00}/2$.

Eligiendo el gauge de Lorentz

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.4a)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h, \quad (3.4b)$$

siendo $h = h^\rho_\rho$, hallamos

$$\sqrt{|g|} \square = (\eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu, \quad (3.5a)$$

$$\sqrt{|g|} \sum_{q,p \leq q} b_{qp} (H^q \mathcal{D}^{2p} + H^p \mathcal{D}^{2q}) = 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} \Delta^{q+p} + h \sum_{q,p \leq q} b_{qp} \Delta^{q+p} + \mathcal{K}, \quad (3.5b)$$

donde Δ es el Laplaciano y \mathcal{K} es un operador de orden uno en las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ y v_μ . La expresión explícita del operador \mathcal{K} puede encontrarse fácilmente en el caso particular en el que las perturbaciones dependen sólo de la coordenada temporal x^0 . En el caso general, aunque es más complicado, también puede ser calculado. Sin embargo, la expresión de la Ec.(3.5b) será suficiente para nuestros propósitos inmediatos.

Para resolver la Ec.(3.1), escribimos primero $G = G^0 + G^1$, donde el superíndice indica que G^0 y G^1 son de orden cero y uno, respectivamente, en $h_{\mu\nu}$ y v_μ . La función de Green de orden cero G^0 satisface

$$\left[-\partial_0^2 + \Delta - m^2 - 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} \Delta^{q+p} \right] G^0(x, x') = -\delta(x - x'). \quad (3.6)$$

Por lo tanto, el propagador de Feynman correspondiente es

$$G_F^0(x, x') = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik(x-x')}}{[-k_0^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2) - i\epsilon]} \quad (3.7)$$

donde $\epsilon > 0$, $kx = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$, y

$$\omega^2(|\vec{k}|^2) = m^2 + |\vec{k}|^2 + 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} (-1)^{q+p} |\vec{k}|^{2(q+p)}, \quad (3.8)$$

siendo $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$.

La corrección al propagador de orden uno satisface

$$\begin{aligned} & \left[-\partial_0^2 + \Delta - m^2 - 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} \Delta^{q+p} \right] G^1(x, x') \\ &= \left[\bar{h}^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu - \frac{\xi}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \partial_\mu h) + \frac{h}{2} (\omega^2(-\Delta) + \Delta) + \mathcal{K} \right] G^0(x, x'). \end{aligned} \quad (3.9)$$

La solución correspondiente es

$$\begin{aligned} G_F^1(x, x') &= - \int d^n y G_F^0(x, y) \left[\bar{h}^{\mu\nu}(y) \partial_\nu \partial_\mu - \frac{\xi}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \partial_\mu h(y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h(y)}{2} (\omega^2(-\Delta) + \Delta) + \mathcal{K}(y) \right] G_F^0(y, x'). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por razones de conveniencia, salvo en la Sec. 3.2.1, en lo que sigue del capítulo trabajaremos en el espacio euclídeo con $k_n = -ik^0$ y $x_n = -ix^0$. La relación entre la función de Green euclídea G_E y el propagador de Feynman es $G_F = iG_E$.

3.2. Divergencias en $\langle \phi^2 \rangle$

Como hemos mencionado en la Sec. 1.1, $\langle \phi^2 \rangle$ está dado por el límite de coincidencia de la parte imaginaria del propagador de Feynman (Ec.(1.13)), por lo cual $\langle \phi^2 \rangle = \text{Re}G_E(x, x) (= \text{Im}G_F(x, x))$.

Con el fin de investigar la aparición de divergencias en $\langle \phi^2 \rangle$, consideremos, a modo de ejemplo, solamente una contribución a G_E^1 . Elegimos que la misma sea

$$g_E^1(x, x') = \frac{1}{2} \int d^n y h(y) G_E^0(x, y) \omega^2(-\Delta) G_E^0(y, x'). \quad (3.11)$$

Se puede mostrar que este término, junto con aquél proporcional a $\bar{h}^{00}(y) \partial_0 \partial_0$ y otros similares que aparecen en $\mathcal{K}(y)$, son los potencialmente más divergentes.

Reemplazando la solución de orden cero G_E^0 en esta ecuación, introduciendo la transformada de Fourier de h ,

$$h(p) = \int d^n y e^{-ipy} h(y), \quad (3.12)$$

y haciendo algunas integrales sencillas, obtenemos

$$g_E^1(x, x') = \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ipx} h(p) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik(x-x')} \omega^2(|\vec{k}|^2)}{[(k_n + p_n)^2 + \omega^2(|\vec{k} + \vec{p}|^2)][k_n^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2)]}. \quad (3.13)$$

Para deducir el grado superficial de divergencia de cada orden adiabático, comenzamos desarrollando el integrando de la Ec.(3.13) en potencias de p_i ($i = 1 \dots n$),

$$\begin{aligned} g_E^1(x, x') &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ipx} h(p) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik(x-x')} \omega^2(|\vec{k}|^2)}{[k_n^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2)]^2} \left(\frac{1}{1 + \epsilon_p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ipx} h(p) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik(x-x')} \omega^2(|\vec{k}|^2)}{[k_n^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2)]^2} \sum_{r=0}^{+\infty} (-\epsilon_p)^r, \end{aligned} \quad (3.14a)$$

donde

$$\epsilon_p = \frac{2k_n p_n + p_n^2 + \omega^2(|\vec{k} + \vec{p}|^2) - \omega^2(|\vec{k}|^2)}{k_n^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2)}. \quad (3.15)$$

En el límite de coincidencia, g_E^1 puede desarrollarse como

$$g_E^1(x, x) = \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ipx} h(p) \mathcal{I}(p), \quad (3.16a)$$

$$\mathcal{I}(p) = \int \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1}} \omega^2(|\vec{k}|^2) I(p, |\vec{k}|), \quad (3.16b)$$

$$I(p, |\vec{k}|) = \int \frac{dk_n}{2\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-\epsilon_p)^r}{[k_n^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2)]^2}. \quad (3.16c)$$

A partir de este desarrollo podemos notar que los términos con potencias impares de p_n o de $|\vec{p}|$ no contribuyen, por lo que no hay contribuciones de orden adiabático impar. Esto último era esperable ya que no se ha roto la simetría ante rotaciones.

De las ecuaciones (3.16b) y (3.16c) es posible derivar el grado superficial de divergencia de $\mathcal{I}(p)$ para cada término con una potencia de p_i dada. Sin embargo, podemos obtener más información calculando la integral en k_n en forma explícita. Es más, para una mejor apreciación de las diferencias existentes entre los casos donde las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ y v_μ dependen de \vec{x} y aquellos donde no, analicemos estas dos situaciones por separado.

Para campos de fondo que sólo dependen de x_n , en la Ec.(3.16) podemos reemplazar la transformada de Fourier en n -dimensiones $h(p)$ por $h(p) = (2\pi)^{n-1} \delta^{n-1}(\vec{p}) h(p_n)$. Luego de hacer la integral en k_n de la Ec.(3.16c), es sencillo reescribirla como

$$I(p, |\vec{k}|) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{\omega^3(|\vec{k}|^2)} \left(\frac{p_n}{\omega(|\vec{k}|^2)} \right)^{2i}, \quad (3.17)$$

donde α_i es independiente de \vec{k} . Luego, sustituyendo la Ec.(3.17) en la Ec.(3.16b), podemos contar las potencias de $|\vec{k}|$ y, para una RD dada, determinar qué términos del desarrollo de $I(p, |\vec{k}|)$ en potencias de p_n dan lugar a divergencias. Teniendo en cuenta que las potencias de p_n corresponden a derivadas de la métrica, podemos así determinar cuáles son los órdenes adiabáticos divergentes. De esta manera encontramos que cuando la RD es tal que $\omega(|\vec{k}|^2) \sim |\vec{k}|^s$ para valores grandes de $|\vec{k}|$, la convergencia del orden adiabático $2i$ de $\mathcal{I}(p)$ está garantizada si $-s(2i+3) + 2s + n - 2 < -1$. Es decir, dada la potencia más grande s de $|\vec{k}|$ que aparece en la DR y la dimensión n del espacio-tiempo, podemos esperar que el valor máximo del orden adiabático de $\langle \phi^2 \rangle$ que contiene divergencias sea

$$2i_{max}^h = 2 \text{int} \left(\frac{n-1}{2s} - \frac{1}{2} \right), \quad (3.18)$$

donde el superíndice h indica que este resultado sólo es válido cuando las perturbaciones son homogéneas espacialmente.

En primer lugar podemos notar que para $s = 1$, lo cual corresponde a la RD usual, recuperamos el resultado correcto de la Ec.(1.22a). Este resultado indica que cuanto mayor es el valor de s , la cantidad de órdenes adiabáticos divergentes disminuye. También es valioso mencionar que el mismo resultado podría haberse obtenido usando el análisis basado en el contaje de potencias descrito en la Ref.[91], en el cual, dependiendo de la RD, las potencias de k_n son contadas con un peso a diferente a las potencias de $|\vec{k}|$.

Para campos de fondo que dependen solamente de \vec{x} , podemos introducir la transformada de Fourier espacial $h(\vec{p})$, relacionada con $h(p)$ mediante $h(p) = (2\pi)\delta(p_n)h(\vec{p})$. En este caso, luego de hacer las integrales en k_n obtenemos

$$I(p, |\vec{k}|) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\beta_r}{\omega^3(|\vec{k}|^2)} \left(\frac{\omega^2(|\vec{k} + \vec{p}|^2)}{\omega^2(|\vec{k}|^2)} - 1 \right)^r, \quad (3.19)$$

donde β_r no depende de \vec{k} . Esta ecuación debería compararse con la Ec.(3.17). En este caso, las potencias impares en $|\vec{p}|$ desaparecen una vez que se realizan las integrales angulares de la Ec.(3.16b). Para hacer las integrales angulares podemos usar la fórmula [53]:

$$\int d^{n-1}k k^{i_1} \dots k^{i_r} g(|\vec{k}|^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar,} \\ T^{i_1 \dots i_r} A_r[g] & \text{si } r \text{ es par,} \end{cases} \quad (3.20)$$

donde

$$T^{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!} [\delta^{i_1 i_2} \delta^{i_3 i_4} \dots \delta^{i_{r-1} i_r} + \text{todas las permutaciones de los índices } i_m], \quad (3.21a)$$

$$A_r[g] = \frac{2\pi^{(n-1)/2} \Gamma[(r+1)/2]}{\Gamma[1/2] \Gamma[(n-1+r)/2]} \int_0^\infty dk k^{n+r-2} g(k^2), \quad (3.21b)$$

siendo $\Gamma[x]$ la función Gamma y $k = |\vec{k}|$.

Para valores grandes de $|\vec{k}|$, $\omega^2(|\vec{k} + \vec{p}|^2) - \omega^2(|\vec{k}|^2) \sim |\vec{k}|^{2s-2}(\vec{p} \cdot \vec{k})$, entonces, el conteo de potencias indica que el orden adiabático $2i$ será finito si $2i > n - 1 - s$. A partir de esto, esperamos encontrar divergencias hasta en el orden adiabático $2i_{max}^g$ de $\langle \phi^2 \rangle$, donde

$$2i_{max}^g = 2 \text{int} \left(\frac{n - 1 - s}{2} \right). \quad (3.22)$$

El superíndice g significa *general*, ya que puede demostrarse fácilmente que este resultado también es válido para perturbaciones arbitrarias (es decir, $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(\vec{x}, x_n)$, $v_\mu = v_\mu(\vec{x}, x_n)$).

Al igual que $2i_{max}^h$, $2i_{max}^g$ se reduce al resultado correcto cuando la RD es la usual ($s = 1$). En este caso también obtenemos que a medida que s aumenta la cantidad de órdenes adiabáticos divergentes disminuye. Para $n = 4$, por ejemplo, si $s = 1$ los órdenes adiabáticos cero y dos son divergentes, si $s = 2$ o 3 solamente el orden adiabático cero es divergente y si $s \geq 4$, $\langle \phi^2 \rangle$ es finito.

Por otra parte, podemos notar que mientras los valores de $2i_{max}^g$ coinciden con los obtenidos para perturbaciones homogéneas espacialmente (Ec.(3.18)) para $n \leq 4$, estos son generalmente más grandes para un número mayor de dimensiones. Por ejemplo, para $n = 5$ y $s = 2$ tenemos $2i_{max}^g = 2$ mientras que $2i_{max}^h = 0$.

3.2.1. Cancelación de divergencias?

En la sección anterior llevamos a cabo un análisis basado en el conteo de potencias para una contribución particular g_E^1 al propagador G_E^1 . Podemos entonces preguntarnos si las otras contribuciones a G_E^1 pueden cancelar las divergencias adicionales que aparecen para perturbaciones inhomogéneas espacialmente en g_E^1 . Para mostrar explícitamente que este no es el caso, consideremos un espacio-tiempo de cinco dimensiones y una RD de la forma

$$\omega^2(|\vec{k}|^2) = m^2 + |\vec{k}|^2 + 2b_{11}|\vec{k}|^4. \quad (3.23)$$

En este caso, contrariamente a lo ocurre para perturbaciones independientes de \vec{x} (para las que $2i_{max}^h = 0$), esperamos que para perturbaciones que sí dependen de las coordenadas espaciales el orden adiabático dos también sea divergente ($2i_{max}^g = 2$). Para ver esto, calculemos explícitamente el orden adiabático dos de $\langle \phi^2 \rangle$ para métricas inhomogéneas espacialmente.

Para esta RD, el operador \mathcal{K} definido en la Ec.(3.5) puede escribirse como

$$\mathcal{K} = 2b_{11} [\mathcal{D}^4 - \Delta^2 + (\nabla_\alpha a^\alpha)\Delta + 2a^\alpha \nabla_\alpha \Delta] + b_{11} [(\Delta \nabla_\alpha a^\alpha) + 2(\Delta a^\alpha) \nabla_\alpha]. \quad (3.24)$$

Puesto que estamos interesados en calcular el orden adiabático dos, los últimos dos términos no contribuyen, ya que involucran más de dos derivadas de las perturbaciones. Para calcular este operador a orden uno en las perturbaciones, podemos comenzar escribiendo el operador \mathcal{D}^2 (actuando sobre un escalar). Trabajando en el gauge de Lorentz (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \perp^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + (\nabla_\mu u^\mu) u^\rho \partial_\rho \\ &= \sum_{i,j} (\eta^{ij} - h^{ij}) \partial_i \partial_j - 2 \sum_i u^i \partial_0 \partial_i - \Gamma_{00}^\mu \partial_\mu - (\nabla_\mu u^\mu) \partial_0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\Gamma_{\sigma\rho}^\mu$ son los símbolos de Christoffel. Por lo tanto $\mathcal{D}^4 = \mathcal{D}^2 \mathcal{D}^2$ está dado por:

$$\mathcal{D}^4 = \Delta \mathcal{D}^2 - \sum_{i,j} h^{ij} \partial_i \partial_j \Delta - 2 \sum_i u^i \partial_0 \partial_i \Delta - \Gamma_{00}^\mu \partial_\mu \Delta - (\nabla_\mu u^\mu) \partial_0 \Delta. \quad (3.26)$$

Introduciendo esta ecuación en la Ec.(3.24) y usando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} u^i &= v^i - h^{0i}, \\ \nabla_\mu u^\mu &= -\frac{1}{2} \partial_0 (h_{00} + h) + \sum_i \partial_i (v^i - h^{0i}), \\ a^i &= -\partial_0 v^i - \frac{1}{2} \partial^i h_{00}, \quad a^0 = 0, \\ \nabla_\mu a^\mu &= -\sum_i \partial_0 \partial_i v^i - \frac{1}{2} \Delta h_{00}, \\ \Gamma_{00}^\mu &= \partial_0 h_0^\mu - \frac{1}{2} \partial^\mu h_{00}. \end{aligned}$$

es directo calcular \mathcal{K} .

Para métricas que dependen sólo de las coordenadas espaciales, introducimos la transformada de Fourier

$$h^{\mu\nu}(\vec{y}) = \int \frac{d^{n-1}p}{(2\pi)^{n-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}} h^{\mu\nu}(\vec{p}). \quad (3.28)$$

Introduciendo el operador \mathcal{K} y el propagador de orden cero (3.7) en la Ec.(3.10), luego de hacer algunas integrales triviales obtenemos

$$\begin{aligned} G_F^1(x, x') &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{5-n} \int \frac{d^{n-1}p}{(2\pi)^{n-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{ik(x-x')} \\ &\times \frac{\{-2k^{02} \bar{h}_{00}(\vec{p}) + h(\vec{p})m^2 + \xi p^2 h(\vec{p}) - 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} \bar{h}^{ij}(\vec{p}) k_i k_j + f_k(\vec{p})\}}{[-k^{02} + \omega(|\vec{k}|^2) - i\epsilon][k^{02} + \omega(|\vec{k} + \vec{p}|^2) - i\epsilon]}, \end{aligned}$$

donde, a segundo orden en p_i ,

$$\begin{aligned} f_k(\vec{p}) &= 2b_{11} \left\{ h(\vec{p}) |\vec{k}|^4 - h_{00}(\vec{p}) \left[|\vec{p}|^2 |\vec{k}|^2 - 2(\vec{p} \cdot \vec{k})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} h^{ij}(\vec{p}) k_i k_j \left[|\vec{p}|^2 + 2|\vec{k}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{k} \right] \right\}. \end{aligned}$$

La integral en k^0 puede realizarse usando el método de los residuos. En el límite $x \rightarrow x'$ el resultado es:

$$\langle \phi^2 \rangle^1 = \text{Im}G_F^1(x, x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{m} \right)^{5-n} \int \frac{d^{n-1}p}{(2\pi)^{n-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1}} \left\{ \frac{\bar{h}_{00}(\vec{p})}{\omega(|\vec{k}|^2) + \omega(|\vec{k} + \vec{p}|^2)} + \frac{h(\vec{p})m^2 + \xi p^2 h(\vec{p}) - 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} \bar{h}^{ij}(\vec{p}) k_i k_j + f_k(\vec{p})}{2\omega(|\vec{k}|^2)\omega(|\vec{k} + \vec{p}|^2)[\omega(|\vec{k}|^2) + \omega(|\vec{k} + \vec{p}|^2)]} \right\}, \quad (3.29)$$

donde el superíndice en $\langle \phi^2 \rangle$ indica que es la contribución de orden uno en las perturbaciones. Desarrollando los términos entre corchetes de esta ecuación a segundo orden en p_i , obtenemos una expresión integral para la contribución de orden adiabático dos $\langle \phi^2 \rangle^{(2)}$. Usando regularización dimensional, podemos hacer integrales por partes descartando los términos de borde [53], y así expresar todas las integrales que aparecen en $\langle \phi^2 \rangle^{(2)}$ en términos de solamente dos de ellas. Por ejemplo, consideremos el siguiente término con \bar{h}_{00} :

$$J_i \equiv \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1}} \frac{\bar{h}_{00}}{\omega(|\vec{k}|^2) + \omega(|\vec{k} + \vec{p}|^2)}. \quad (3.30)$$

Quedándonos con la contribución de orden dos en p_i hallamos

$$J_i^{(2)} = \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1}} \bar{h}_{00} \left\{ -\frac{p^2}{8\omega_k^3} \frac{d\omega_k^2}{dk^2} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{p})^2}{4\omega_k^5} \left[\omega_k^2 \frac{d\omega_k^2}{dk^2} - \left(\frac{d\omega_k^2}{dk^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.31)$$

donde $k = |\vec{k}|$, $p = |\vec{p}|$ y $\omega_k = \omega(k^2)$. Haciendo las integrales angulares y el cambio de variables $x = k^2$, obtenemos

$$J_i^{(2)} = -\frac{p^2 \bar{h}_{00} \Omega_{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} \int dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \left\{ \frac{1}{8\omega_k^3} \frac{d\omega_k^2}{dx} + \frac{x}{4(n-1)\omega_k^5} \left[\omega_k^2 \frac{d\omega_k^2}{dx} - \left(\frac{d\omega_k^2}{dx} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.32)$$

donde el factor $\Omega_{n-1} = 2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma[(n-1)/2]$ proviene de las integrales en los ángulos. Para ilustrar el procedimiento consideremos la última integral del miembro derecho de esta ecuación,

$$\begin{aligned} \int dx \frac{x^{\frac{(n-1)}{2}}}{4(n-1)\omega_k^5} \left(\frac{d\omega_k^2}{dx} \right)^2 &= -\frac{1}{6} \int dx \frac{x^{\frac{(n-1)}{2}}}{(n-1)} \frac{d\omega_k^{-3}}{dx} \frac{d\omega_k^2}{dx} \\ &= \frac{1}{12} \int dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\omega_k^3} \frac{d\omega_k^2}{dx} + \frac{1}{6} \int dx \frac{x^{\frac{(n-1)}{2}}}{(n-1)} \frac{d^2\omega_k^2}{dx^2} \\ &= \frac{1}{12}(I_3 + \tilde{I}_3) + \frac{1}{6(n-1)} \tilde{I}_3, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde luego de hacer una integral por partes hemos usado que para la RD considerada $\frac{d\omega_k^2}{dx} = 1 + x \frac{d^2\omega_k^2}{dx^2}$. Las integrales que aparecen en la última igualdad de (3.33) están dadas

por

$$I_3 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\omega^3(x)}, \quad (3.34a)$$

$$\tilde{I}_3 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-1)}{2}}}{\omega^3(x)} \frac{d^2 \omega^2(x)}{dx^2}. \quad (3.34b)$$

Procediendo en forma similar con el resto de los términos, obtenemos que $\langle \phi^2 \rangle^{(2)}$ regularizado puede escribirse como:

$$\langle \phi^2 \rangle^{(2)} = - \left(\frac{\mu}{m} \right)^{5-n} \frac{\Omega_{n-1}}{8(2\pi)^{n-1}} \left\{ I_3 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R^1 + \tilde{I}_3 \left[\frac{R^1}{6} + R_{00}^1 \frac{3n-7}{6(n-1)} \right] \right\}, \quad (3.35)$$

donde $R^1 = -\Delta h/2$ y $R_{00}^1 = -\Delta h_{00}/2$.

A partir de la Ec.(3.34) podemos ver que mientras la integral I_3 converge para $n = 5$, la integral \tilde{I}_3 , que es proporcional a b_{11} , diverge para $n \rightarrow 5$. Es más, el término con esta nueva divergencia es proporcional a R_{00}^1 . Este término puede escribirse en forma covariante usando el campo Éter (además, por supuesto, de la métrica y sus derivadas). A orden lineal en las perturbaciones, $R_{00}^1 = R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \nabla_\mu a^\mu$. Por otro lado, procediendo de manera similar, puede calcularse $\langle \phi^2 \rangle^{(2)}$ para perturbaciones que dependen solamente de la coordenada temporal. En tal caso, el resultado puede también escribirse como en la Ec.(3.35) con $R^1 = \partial_0^2 h/2$, pero el segundo término no aparece y, de acuerdo con la Ec.(3.18), este orden adiabático es finito. Sin embargo, para campos de fondo generales no es esperable que ocurran cancelaciones. Por lo tanto, podemos concluir que en general aparecerán divergencias hasta en el orden adiabático $2i_{max}^g$ dado en la Ec.(3.22).

3.3. Divergencias en $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$

En esta sección aplicaremos el análisis basado en el conteo de potencias al valor de expectación del tensor de energía-momento $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ del campo escalar. Como hemos mencionado en la Sec. 1.2, este tensor puede escribirse en términos del límite de coincidencia del propagador de Hadamard (Ec.(1.17)), el cual es el doble de la parte imaginaria del propagador de Feynman G_F . Por ejemplo, en términos del propagador euclídeo $G_E = -iG_F$, el límite de coincidencia de la derivada de $G_E^1(x, x')$ con respecto a x_n y a x'_n , contribuye a $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$.

Para el análisis basado en el conteo de potencias, consideremos la siguiente contribución:

$$[\partial_n \partial'_n g_E^1(x, x')]_{x=x'} = \frac{1}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ipx} h(p) \mathcal{T}(p), \quad (3.36a)$$

$$\mathcal{T}(p) = \int \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1}} \omega^2(|\vec{k}|^2) T(p, |\vec{k}|), \quad (3.36b)$$

$$T(p, |\vec{k}|) = \int \frac{dk_n}{2\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{k_n^2 (-\epsilon_p)^r}{[k_n^2 + \omega^2(|\vec{k}|^2)]^2}. \quad (3.36c)$$

Procediendo de manera análoga a la sección anterior, cuando las perturbaciones dependen sólo de x_n encontramos que $T(p, |\vec{k}|)$ puede escribirse como

$$T(p, |\vec{k}|) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\gamma_j}{\omega(|\vec{k}|^2)} \left(\frac{p_n}{\omega(|\vec{k}|^2)} \right)^{2j}, \quad (3.37)$$

siendo γ_j independiente de k . Luego de sustituir esta expresión en la Ec.(3.36b) obtenemos que las divergencias están contenidas en términos con hasta $2j_{max}^h$ potencias de p_n , donde

$$2j_{max}^h = 2 \text{int} \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2s} \right). \quad (3.38)$$

Para el caso de la RD usual ($s = 1$) recuperamos el resultado correcto de la Ec.(1.22b). Este resultado indica que al aumentar s hay cada vez menos términos divergentes. Es más, para s suficientemente grande sólo el orden adiabático cero es divergente; por ejemplo, para $n = 4$, basta tomar $s > 3$.

Por otro lado, para perturbaciones que sólo dependen de \vec{x} obtenemos

$$T(p, |\vec{k}|) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\zeta_r}{\omega(|\vec{k}|^2)} \left(\frac{\omega^2(|\vec{k} + \vec{p}|^2)}{\omega^2(|\vec{k}|^2)} - 1 \right)^r, \quad (3.39)$$

donde ζ_r no depende de \vec{k} . Usando que $\omega^2(|\vec{k} + \vec{p}|^2) - \omega^2(|\vec{k}|^2) \sim |\vec{k}|^{2s-2} (\vec{p} \cdot \vec{k})$ para valores grandes de $|\vec{k}|$, encontramos

$$2j_{max}^g = 2 \text{int} \left(\frac{n-1+s}{2} \right). \quad (3.40)$$

Nuevamente, para la RD usual ($s = 1$) recuperamos el resultado correcto.

A partir de este resultado podemos ver que, a diferencia del caso anterior, $2j_{max}^g$ aumenta con s . Por ejemplo, para $n = 4$ y $s = 1, 2$ aparecen divergencias hasta en el orden adiabático cuatro, mientras que para $s = 3$ el orden adiabático seis también es divergente. Por consiguiente, esperamos que para $s \geq 3$ la renormalización las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter requiera la introducción de contratérminos de orden adiabático mayor a cuatro.

En la práctica, este resultado da lugar a un problema técnico, ya que para espacios-tiempos de cuatro dimensiones con métricas no homogéneas espacialmente, cuando $s \geq 3$ la construcción de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ involucraría un cálculo del desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ hasta órdenes mayores que cuatro, el cual es significativamente complicado. No obstante, para métricas homogéneas espacialmente, como los órdenes adiabáticos mayores que cuatro son finitos (cualquiera sea la RD) dicho cálculo puede evitarse. Volveremos a este punto más adelante en este capítulo.

Análogamente al caso de $\langle \phi^2 \rangle$, para perturbaciones generales no esperamos que las nuevas divergencias se cancelen. Por tanto, concluimos que la sustracción de la Ec.(1.23) debe realizarse hasta los órdenes adiabáticos $2j_{max}^g$ y $2j_{max}^g$, dados en las ecuaciones (3.22) y (3.40), respectivamente. En particular, para renormalizar las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter será necesario introducir todos los posibles contratérminos construidos con $g_{\mu\nu}$ y u_μ que sean de orden adiabático $2j \leq 2j_{max}^g$.

Antes de finalizar este capítulo, es conveniente resumir aquí los resultados encontrados por M. Rinaldi en [92, 93] y compararlos con los obtenidos en esta sección. En la Ref. [92], el autor consideró una métrica ultra-estática dada por

$$ds^2 = -d\tau^2 + \perp_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.41)$$

donde $\perp_{\mu\nu}$ no depende de τ . En este caso, el vector u^μ es tal que $u_\mu = -\partial_\mu \tau$. Para un campo escalar acoplado mínimamente ($\xi = 0$), cuyos modos de Fourier satisfacen una RD de la forma

$$\omega_k^2 = m^2 + |\vec{k}|^2 + \epsilon^2 |\vec{k}|^4, \quad (3.42)$$

siendo ϵ una constante con unidades de inversa de masa, el autor utilizó un desarrollo de $\perp_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ en coordenadas normales de Riemann [94, 95] alrededor de un punto base x . A partir de dicho desarrollo encontró una representación en el espacio de momentos, análoga a la de Bunch y Parker [55], de la función de Green del campo escalar $G(x, x')$, donde x' es un punto en un entorno coordenado normal de x . Para $x \rightarrow x'$, el resultado es [92]:

$$G(x, x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [1 - f_1 \frac{\partial}{\partial k^2} + f_2 \frac{\partial^2}{\partial k^2}] (m^2 + |\vec{k}|^2 + \epsilon^2 |\vec{k}|^4 - k_0^2)^{-1}, \quad (3.43)$$

donde

$$f_1 = \frac{\hat{R}}{6}, \quad (3.44a)$$

$$f_2 = \frac{\hat{R}^2}{72} + \frac{1}{90} \hat{R}_j^i \hat{R}_i^j - \frac{1}{180} (\hat{R}_{ij} \hat{R}^{ij} + \hat{R}_{ijls} \hat{R}^{ijls}) - \frac{1}{30} \hat{R}_{;i}^i, \quad (3.44b)$$

siendo \hat{R}_{ijls} el tensor de curvatura construido con \perp_{ij} . Como puede verse a partir de esta expresión, las divergencias que aparecen en los órdenes adiabáticos cero, dos y cuatro están de acuerdo con el resultado de la Ec.(3.22).

En [93] se consideró un campo escalar libre y acoplado mínimamente en un espacio-tiempo con una métrica dada por

$$ds^2 = -(u_\mu dx^\mu)^2 + \perp_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.45)$$

Para hallar la función de Green del campo, se utilizaron coordenadas normales de Fermi adaptadas a las curvas integrales del campo u^μ . Para ello se consideró que el campo u^μ es geodésico, $a^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0$, que existe una familia de superficies ortogonales a u^μ , $u_{[\mu} \nabla_\nu u_{\rho]} = 0$ (donde los corchetes indican que la expresión debe antisimetrizarse con respecto a los tres índices) y que u^μ se transporta paralelamente a lo largo de las geodésicas que intersectan ortogonalmente a aquellas tangentes a u^μ . En este caso, para la ecuación de movimiento del campo dada en la Ec.(2.29) con $\xi = 0$, se utilizó un desarrollo de las cantidades que aparecen en esta ecuación en coordenadas normales de Fermi y se obtuvo hasta el orden adiabático dos de $G(x, x')$. Las divergencias encontradas están de acuerdo con el resultado de la Ec.(3.22).

Es importante notar que debido a las hipótesis realizadas sobre el vector u^μ , el cálculo realizado en [93] no se aplica al caso de métricas de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), al menos cuando los sistemas de referencias privilegiados coinciden con aquellos fijos a los observadores comovientes. Esto último es evidente a partir de la observación de que para el u^μ elegido en la Ref.[93] el escalar de curvatura extrínseca de las superficies ortogonales a u^μ , $K = \nabla_\mu u^\mu$, se anula sobre las geodésicas tangentes a u^μ (las cuales se utilizan como base de las coordenadas de Fermi), mientras que cuando los sistemas de referencias privilegiados coinciden con los de los observadores comovientes, el vector u^μ satisface $\nabla_\mu u^\mu \propto C' \neq 0$, siendo C' la derivada con respecto al tiempo conforme η del cuadrado del factor de escala C .

En resumen, en este capítulo hemos generalizado los resultados mencionados en el Capítulo 1, dados en la Ec.(1.22), sobre la renormalización de $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ en espacios curvos, al caso en que los campos satisfacen relaciones de dispersión generalizadas. Los resultados correspondientes son las ecuaciones (3.22) y (3.40). Más específicamente, dada la RD y la dimensión del espacio-tiempo, trabajando en la aproximación de campos débiles, hemos encontrado cuáles son los órdenes adiabáticos potencialmente divergentes en los desarrollos de $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$.

Como hemos mencionado al comienzo del capítulo, es sabido que aumentar la potencia más grande $2s$ de $|\vec{k}|$ que aparece en la RD, $\omega_k^2(|\vec{k}|^2)$, mejora el comportamiento ultravioleta

de los diagramas de Feynman para campos interactuantes en Minkowski [91]. En principio, podría haberse esperado que sucediera lo mismo para $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ en espacios curvos. El resultado principal de este capítulo muestra que en general esto no sucede: mientras que aumentar s mejora el comportamiento ultravioleta de $\langle \phi^2 \rangle$, ocurre lo contrario para $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$; la cantidad de órdenes adiabáticos potencialmente divergentes en el desarrollo de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ aumenta con s . Por lo tanto, para relaciones de dispersión generalizadas tales que $\omega_k \sim |\vec{k}|^s$ para valores grandes de $|\vec{k}|$, un cálculo explícito de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ es más complicado cuanto mayor es s , puesto que involucra el cálculo de más términos del desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$.

Por otro lado, hemos mostrado que en el caso particular en que las perturbaciones de la métrica y del campo Éter son homogéneas espacialmente, el comportamiento ultravioleta de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ mejora considerablemente: la cantidad de órdenes adiabáticos potencialmente divergentes en el desarrollo de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ disminuye con s . Dado esto, para llevar a cabo la renormalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter, cualquiera sea la RD, podemos evitar calcular más términos del desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ que los requeridos para la RD usual. Los términos de orden superior son finitos e involucran más cantidad de derivadas de la métrica y/o del campo Éter y, desde la perspectiva de las teorías de campos efectivas, esperamos que los contratérminos que deberían incluirse en la acción para absorberlos no sean relevantes fenomenológicamente.

Desde el punto de vista de las teorías de campos efectivas, esperamos que además de los contratérminos proporcionales a tensores geométricos, aparezca la necesidad de introducir nuevos contratérminos que involucren al campo vectorial. En la Sec. 3.2.1, hemos mostrado que éste es el caso para métricas inhomogéneas espacialmente, puesto que aparece un término nuevo que involucra al campo vectorial en el orden adiabático dos de $\langle \phi^2 \rangle$ (Ec.(3.35)).

Capítulo 4

Sustracción adiabática en espacios de Friedman-Robertson-Walker

Como se ha mencionado en la Introducción, un estudio de la reacción de campos cuánticos con relaciones de dispersión modificadas sobre la métrica de fondo es importante para investigar el problema trans-planckiano. También hemos enfatizado que para estudiar este fenómeno adecuadamente en la aproximación semiclásica, es necesario analizar la renormalización de las ecuaciones semiclásicas para la métrica.

Debido al problema técnico encontrado en el capítulo anterior, en los capítulos siguientes nos concentraremos en espacios-tiempos con métricas homogéneas espacialmente. En particular, motivados por el problema trans-planckiano en cosmología, en este capítulo consideramos un espacio-tiempo de Friedman-Robertson-Walker (FRW) espacialmente plano de n dimensiones, con métrica y campo Éter dados por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv -(u_\mu dx^\mu)^2 + \perp_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = C(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (4.1)$$

donde $u_\mu \equiv C^{1/2}(\eta)\delta_\mu^\eta$. Consideramos también el modelo del campo escalar descrito en la Sec. 2.3. Por razones de comodidad, reescribimos aquí la ecuación de movimiento para el campo

$$\square\phi - \left[m^2 + \xi R + 2 \sum_{1 \leq q \leq q_M, p \leq q} b_{qp} \mathcal{D}^{2(q+p)} \right] \phi = 0. \quad (4.2)$$

y la RD generalizada para los modos de Fourier del mismo

$$\omega_k^2 = k^2 + C(\eta) \left[m^2 + 2 \sum_{1 \leq q \leq q_M, p \leq q} (-1)^{q+p} b_{qp} \left(\frac{k}{C^{1/2}(\eta)} \right)^{2(q+p)} \right], \quad (4.3)$$

donde ω_k es la frecuencia comoviente y $k = |\vec{k}|$ es el vector de onda comoviente.

Comenzaremos calculando el desarrollo WKB para los modos del campo escalar. Usando este desarrollo, a modo de entrenamiento, estudiaremos la renormalización de $\langle \phi^2 \rangle$ y calcularemos explícitamente $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ para un espacio-tiempo de De Sitter de cuatro dimensiones. Pasaremos luego a regularizar los primeros tres órdenes adiabáticos no nulos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$. A continuación, nos concentraremos en la renormalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter y obtendremos los contratérminos con los cuales pueden absorberse dichos órdenes adiabáticos. Este capítulo está basado en las referencias [41] y [42].

4.1. El desarrollo WKB

Para calcular el desarrollo WKB para los modos del campo escalar podemos proceder de manera análoga al caso usual, el cual hemos resumido en la Sec. 1.4. El punto de partida es escribir a los modos del campo reescalado $\chi = C^{(n-2)/4} \phi$ en la forma

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{2W_k}} \exp\left(-i \int^\eta W_k(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}\right). \quad (4.4)$$

La ecuación de movimiento para estos modos es

$$\chi_k'' + [(\xi - \xi_n)RC + \omega_k^2] \chi_k = 0, \quad (4.5)$$

donde ahora ω_k está dada por la Ec.(4.3). Introduciendo la Ec.(4.4) en esta ecuación, obtenemos

$$W_k^2 = \Omega_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{W_k''}{W_k} - \frac{3}{2} \frac{W_k'^2}{W_k^2} \right), \quad (4.6)$$

donde $\Omega_k^2 = \omega_k^2 + (\xi - \xi_n)CR$, siendo R el escalar de Ricci,

$$R = \frac{(n-1)}{C} \left[\mathcal{H}' + \frac{(n-2)}{4} \mathcal{H}^2 \right], \quad (4.7)$$

donde $\mathcal{H} \equiv C'/C$.

Resolviendo la Ec.(4.6) en forma iterativa obtenemos el desarrollo adiabático de W_k . En lo que sigue, denotaremos ${}^{(j)}W_k^2$ a los términos de W_k^2 de orden adiabático j . Es directo calcular ${}^{(2)}W_k^2$ reemplazando W_k por Ω_k en el miembro derecho de la Ec.(4.6),

$$\begin{aligned} {}^{(2)}W_k^2 &= (\xi - \xi_n)(n-1) \left(\frac{C''}{C} + \frac{(n-6)}{4} \frac{C'^2}{C^2} \right) \\ &- \frac{1}{4} \frac{C''}{C} \left(1 - \frac{k^2}{\omega_k^2} \frac{d\omega_k^2}{dk^2} \right) - \frac{1}{4} \frac{C'^2}{C^2} \frac{k^4}{\omega_k^2} \frac{d^2\omega_k^2}{d(k^2)^2} \\ &+ \frac{5}{16} \frac{C'^2}{C^2} \left(1 - \frac{k^2}{\omega_k^2} \frac{d\omega_k^2}{dk^2} \right)^2 \\ &= \frac{\mathcal{H}^2}{16} [f^2 - 4\dot{f} + 4(\xi - \xi_n)(n-1)(n-2)] + \frac{\mathcal{H}'}{4} [f + 4(\xi - \xi_n)(n-1)], \quad (4.8) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\tilde{\omega}_k^2 \equiv \omega_k^2/C$ depende del tiempo sólo a través de la variable $x \equiv k^2/C$ para reescribir el miembro derecho en términos de la función

$$f \equiv \frac{d \ln \tilde{\omega}_k^2}{d \ln x} - 1, \quad (4.9)$$

y denotamos con un punto a una derivada con respecto a $\ln x$.

Para $n = 4$ también necesitaremos el orden adiabático cuatro, entonces, hacemos una iteración más en la Ec.(4.6). Descartando términos de orden adiabático superior a cuatro, encontramos

$${}^{(4)}W_k^2 = \frac{1}{8\omega_k^2} \left\{ {}^{(2)}W_k^2 [\mathcal{H}^2(2\dot{f} - 3f^2) - 2\mathcal{H}'f] - 5{}^{(2)}W_k^{2'} \mathcal{H}f - 2{}^{(2)}W_k^{2''} \right\}, \quad (4.10)$$

donde hemos usado que

$$\frac{(\omega_k^2)'}{\omega_k^2} = -\mathcal{H}f, \quad (4.11a)$$

$$\frac{(\omega_k^2)''}{\omega_k^2} = \mathcal{H}^2(f^2 + \dot{f}) - \mathcal{H}'f. \quad (4.11b)$$

A continuación será importante saber el comportamiento para valores grandes de k de los diferentes órdenes adiabáticos. A partir de las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.10), mediante un argumento inductivo, es fácil mostrar que el orden adiabático $2j$ de W_k^2 se comporta como ω_k^{2-2j} .

4.2. Renormalización de $\langle \phi^2 \rangle$

En esta sección nos concentramos en el caso más simple: la renormalización de $\langle \phi^2 \rangle$ cuando el campo escalar es libre. Con el fin de ilustrar cómo puede obtenerse un $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ finito mediante sustracción adiabática, calcularemos este valor de expectación renormalizado en un caso sencillo. Para ello, y por simplicidad, consideraremos una RD tal que para $n = 4$ únicamente el orden adiabático cero de $\langle \phi^2 \rangle$ es divergente y resolveremos la ecuación de los modos en forma exacta para un espacio-tiempo de De Sitter.

Como en la Sec. 1.4, escribimos $\langle \phi^2 \rangle$ en términos de la función W_k ,

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{\sqrt{C}}{2} \frac{\mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{n-1}} \int d^{n-1}k |\chi_k|^2 = \frac{\sqrt{C}}{2} \frac{\mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{n-1}} \int d^{n-1}k \frac{1}{2W_k}. \quad (4.12)$$

Introduciendo el desarrollo adiabático de $W_k^{-1} = (\sum_j {}^{(2j)}W_k^2)^{-1/2}$ en esta ecuación y suponiendo que $\omega_k \sim k^s$, podemos contar potencias y ver hasta qué orden adiabático aparecen divergencias. Usando que ${}^{(2j)}W_k^2$ se comporta como $\omega_k^{2-2j} \sim k^{2s-2js}$ para valores grandes de

k , vemos que el orden adiabático $2j$ de W_k^{-1} se comporta como k^{-s-2js} . Por lo tanto, para que las integrales de los términos de orden adiabático $2j$ no sean divergentes debe ocurrir que $-s - 2js + n - 2 < -1$, es decir, $2j > (n - 1)/s - 1$. De esta manera recuperamos el resultado de la Ec.(3.18) obtenido bajo la aproximación de campos débiles.

Para calcular $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ en un caso simple, consideramos un espacio-tiempo de De Sitter, $C(\eta) = \alpha^2/\eta^2$, de cuatro dimensiones y la siguiente RD:

$$\omega_k^2 = k^2 + 2b_{11} \frac{k^4}{C}. \quad (4.13)$$

La ecuación para los modos χ_k en De Sitter es

$$\frac{\partial^2 \chi_k}{\partial \eta^2} + \left(k^2 + \frac{\tilde{\mu}^2 \alpha^2}{\eta^2} + \frac{2b_{11} k^4 \eta^2}{\alpha^2} \right) \chi_k = 0, \quad (4.14)$$

donde $\tilde{\mu}^2 = m^2 + n(n-1)(\xi - \xi_n)/\alpha^2$. Esta ecuación puede resolverse exactamente en el caso $\tilde{\mu}^2 = 0$, o para valores de $\tilde{\mu}$ arbitrarios en el límite $\eta \rightarrow -\infty$. En ambos casos, con la sustitución $s = (2b_{11})^{1/4} \alpha^{-1/2} k \eta$ e introduciendo la constante $\lambda = \alpha(2b_{11})^{-1/2}$, la ecuación a resolver puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 \chi_k}{\partial s^2} + (\lambda + s^2) \chi_k = 0. \quad (4.15)$$

La solución particular es

$$\chi_k(s) = D_{-\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)} [\pm(1+i)s], \quad (4.16)$$

donde D es la función parabólica cuya definición puede encontrarse, por ejemplo, en [96].

Para nuestros propósitos inmediatos, es suficiente conocer el desarrollo de $D_p(z)$ para valores grandes de $|s|$, lo que corresponde a $\eta \rightarrow -\infty$. Este desarrollo tiene la forma

$$D_p(z) \approx e^{-z^2/4} z^p \left(1 - \frac{p(p-1)}{2z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{8z^4} - \dots \right), \quad (4.17)$$

donde $p = -(1+i\lambda)/2$ y $z = \pm(1+i)s$.

Luego de imponer la condición de normalización (1.42), es fácil ver que la solución particular que tiende al modo adiabático de frecuencia positiva para $|s| \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow -\infty$) es:

$$\chi_k(s) = \frac{e^{-\lambda\pi/8}}{\sqrt{k}} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/4} D_{-\left(\frac{1-i\lambda}{2}\right)} [(1-i)s]. \quad (4.18)$$

Por lo tanto, si definimos $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}}$ simplemente como

$$\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}} = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi^2 \rangle^{(0)}, \quad (4.19)$$

obtenemos

$$\langle \phi^2 \rangle_{\text{Ren}} = \frac{\sqrt{C} \Omega_{n-1} \mu^{4-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{n-1}} \int dk k^{n-2} \left[|\chi_k|^2 - |\chi_k^{(0)}|^2 \right]. \quad (4.20)$$

A partir del desarrollo (4.17) también podemos ver que sólo el primer término dará lugar a divergencias en $\langle \phi^2 \rangle$. Quedándonos solamente con ese término del desarrollo de D , obtenemos

$$\chi_k \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/4} (\sqrt{2}s)^{-\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{4} + s^2 \right) \right], \quad (4.21)$$

a partir de lo cual

$$|\chi_k|^2 \sim \frac{\alpha}{2k^2 |\eta| \sqrt{2b_{11}}}. \quad (4.22)$$

Por otra parte, para valores grandes de k tenemos que

$$\left| \chi_k^{(0)} \right|^2 = \frac{1}{2^{(0)} W_k} = \frac{1}{2\omega_k} \sim \frac{\alpha}{2k^2 |\eta| \sqrt{2b_{11}}}. \quad (4.23)$$

Por lo tanto, las divergencias en (4.20) se cancelan. Entonces, el límite $n \rightarrow 4$ puede tomarse antes de evaluar las integrales en k .

Para finalizar esta sección calcularemos explícitamente el orden adiabático cero usando regularización dimensional. El orden adiabático cero es

$$\langle \phi^2 \rangle^{(0)} = \frac{\mu^{4-n} \sqrt{C}}{(2\pi \sqrt{C})^{n-1}} \int d^{n-1} k \frac{1}{2\omega_k} = \frac{\mu^{4-n} \Omega_{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} \int dk k^{(n-3)} \left(\frac{C}{2b_{11}} \right)^{1/2} \frac{1}{(k^2 + \frac{C}{2b_{11}})^{1/2}},$$

donde $\Omega_{n-1} = 2\pi^{(n-1)/2} / \Gamma[(n-1)/2]$. Haciendo la integral y tomando el límite $n \rightarrow 4$ hallamos el siguiente resultado:

$$\langle \phi^2 \rangle^{(0)} = \frac{1}{8b_{11}} \frac{\Gamma[-1/2]}{\Gamma[1/2]} = -\frac{1}{4b_{11}}, \quad (4.24)$$

el cual es finito. Que el resultado sea finito (luego de usar regularización dimensional) podría haberse anticipado debido a que (a menos del factor $(C/2b_{11})^{1/2}$) esta ecuación es formalmente análoga, en el límite $n \rightarrow 4$, a la correspondiente a un campo escalar con masa $m^2 = 1/2b_{11}$ que satisface la RD usual en $2 + 1$ dimensiones. Es bien sabido que en este caso el método de regularización dimensional da lugar a resultados finitos para integrales que en principio son divergentes por conteaje de potencias [97].

4.3. Construcción de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$

Análogamente al caso de $\langle \phi^2 \rangle$, podemos escribir el valor de expectación del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}^\phi$, dado en la Ec.(2.27), en términos de los modos χ_k :

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle &= \sqrt{C} \int \frac{d^{n-1}k \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{(n-1)}} \left\{ \frac{C^{(n-2)/2}}{2} \left| \left(\frac{\chi_k}{C^{(n-2)/4}} \right)' \right|^2 + \frac{\omega_k^2}{2} |\chi_k|^2 + \xi G_{\eta\eta} |\chi_k|^2 \right. \\ &\quad \left. + \xi \frac{(n-1)}{2} \left[\frac{C'}{C} (\chi'_k \chi_k^* + \chi_k \chi_k'^*) - \frac{C'^2 (n-2)}{C^2} |\chi_k|^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{11}^\phi \rangle &= \sqrt{C} \int \frac{d^{n-1}k \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{(n-1)}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) C^{(n-2)/2} \left| \left(\frac{\chi_k}{C^{(n-2)/4}} \right)' \right|^2 + \xi G_{11} |\chi_k|^2 \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{k^2}{n-1} \right) \frac{d\omega_k^2}{dk^2} - \frac{\omega_k^2}{2} \right] |\chi_k|^2 - \xi (\chi_k'' \chi_k^* + \chi_k \chi_k''^*) + \xi \frac{C'}{2C} (\chi'_k \chi_k^* + \chi_k \chi_k'^*) \\ &\quad \left. + \xi \frac{(n-2)}{2} \left(\frac{C''}{C} - \frac{(8-n)C'^2}{4C^2} \right) |\chi_k|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.25b)$$

con $T_{11}^\phi = T_{22}^\phi = \dots = T_{(n-1)(n-1)}^\phi$. En esta ecuación \bar{n} es la dimensión física del espacio-tiempo, μ es una escala de masa arbitraria y $G_{\eta\eta}$ y $G_{11} = G_{22} = \dots = G_{(n-1)(n-1)}$ son las componentes no triviales del tensor de Einstein,

$$G_{\eta\eta} = \frac{(n-1)(n-2)}{4} \mathcal{H}^2, \quad (4.26a)$$

$$G_{11} = -\frac{(n-2)}{2} \left[\mathcal{H}' + \frac{(n-3)}{4} \mathcal{H}^2 \right]. \quad (4.26b)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (4.25a) y (4.25b) la expresión WKB para los modos χ_k (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle &= \Omega_{n-1} \frac{\sqrt{C}}{2} \int \frac{dk k^{n-2} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{n-1}} \left\{ \frac{[(W_k^2)']^2}{32W_k^5} + \frac{W_k}{2} + \frac{(n-2)}{2} \left[\frac{C'^2(n-2)}{16W_k C^2} + \frac{C'(W_k^2)'}{8CW_k^3} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_k^2}{2W_k} + \xi \frac{G_{\eta\eta}}{W_k} - \xi \frac{(n-1)}{2} \left[\frac{C'^2(n-2)}{C^2} \frac{1}{2W_k} + \frac{C'(W_k^2)'}{C} \frac{1}{2W_k^3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.27a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{11}^\phi \rangle &= \Omega_{n-1} \frac{\sqrt{C}}{2} \int \frac{dk k^{n-2} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi\sqrt{C})^{n-1}} \left\{ \frac{[(W_k^2)']^2}{32W_k^5} + \frac{W_k}{2} - \frac{\omega_k^2}{2W_k} + \frac{k^2}{(n-1)W_k} \frac{d\omega^2}{dk^2} \right. \\ &\quad + \xi \frac{G_{11}}{W_k} + \frac{(n-2)}{2} \left[\frac{C'^2(n-2)}{16W_k C^2} + \frac{C'(W_k^2)'}{8CW_k^3} \right] + \frac{(n-2)}{2} \frac{\xi}{W_k} \left[\frac{C''}{C} - \frac{3C'^2}{2C^2} \right] \\ &\quad \left. + \xi \left[\frac{(W_k^2)''}{2W_k^3} - \frac{3}{4} \frac{[(W_k^2)']^2}{W_k^5} - \frac{(n-1)}{4} \frac{C'(W_k^2)'}{CW_k^3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.27b)$$

donde $\Omega_{n-1} \equiv 2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma[(n-1)/2]$. A partir de esta expresión, introduciendo el desarrollo adiabático de W_k podemos ver que si para valores grandes de k tenemos que $\omega_k \sim k^s$, el

orden adiabático $2j$ del integrando se comporta como $\omega_k^{1-2j} k^{n-2} \sim k^{n-2+s-2js}$. Entonces, la convergencia está garantizada si $n - 2 + s - 2js < -1$, es decir, $2j > (n - 1)/s + 1$, lo cual coincide con el resultado de la Ec. (3.38) obtenido bajo la aproximación de campos débiles. Este resultado indica que, dada la dimensión del espacio-tiempo y la RD, cuando $n \leq 3s + 1$ solamente necesitamos calcular los órdenes adiabáticos cero, dos y cuatro. En lo que sigue nos restringiremos a estos casos. Notemos que, para $n = 4$, esta desigualdad se cumple siempre y se satura para la RD usual. Es más, para $s \geq 2$ el resultado indica que el orden adiabático cuatro es convergente.

4.3.1. Órdenes adiabáticos cero, dos y cuatro de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$

En esta sección calcularemos los órdenes adiabáticos cero, dos y cuatro de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ y sus expresiones regularizadas. El objetivo principal es expresar cada orden adiabático regularizado de manera que sea evidente cuáles son los contratérminos que debemos utilizar para absorberlo. Para ello, dado que estamos usando el método de regularización dimensional, lo que haremos es llevar a cabo sucesivas integraciones por partes (descartando los términos de borde), como las realizadas en el capítulo anterior, con el fin de escribir cada orden adiabático en términos de unas pocas integrales independientes (es decir, de integrales que no pueden obtenerse unas de las otras haciendo integraciones por partes).

Como hemos resumido en el Capítulo 1, para la RD usual, es necesario incluir términos cuadráticos en la curvatura en la acción gravitacional para poder absorber hasta el orden adiabático cuatro inclusive. Estos términos cuadráticos dan lugar a los tensores $H_{\mu\nu}^{(1)}$, $H_{\mu\nu}^{(2)}$ y $H_{\mu\nu}$ de la Ec.(1.34). La combinación particular

$$H_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^{(1)} - 4H_{\mu\nu}^{(2)} \equiv H_{\mu\nu}^{(3)}(n - 4), \quad (4.28)$$

que proviene de la variación con respecto de la métrica de lo que sería el invariante topológico de Gauss-Bonnet en $n = 4$, será importante en lo que sigue para el caso de espacios-tiempos de cuatro dimensiones. Es valioso notar que para métricas conformes a la plana, como la que estamos considerando, estos tensores no son independientes, sino que satisfacen la siguiente relación:

$$2H_{\mu\nu}^{(1)} + (n - 1)[(n - 2)H_{\mu\nu} - 4H_{\mu\nu}^{(2)}] = 0. \quad (4.29)$$

Por tanto, será suficiente trabajar con dos de estos tensores. Por conveniencia, elegimos

$H_{\mu\nu}^{(1)}$ y $H_{\mu\nu}^{(3)}$, cuyas componentes no triviales son:

$$H_{\eta\eta}^{(1)} = -\frac{(n-1)^2}{C} \left[\mathcal{H}\mathcal{H}'' + \frac{(n-4)}{2}\mathcal{H}^2\mathcal{H}' - \frac{\mathcal{H}'^2}{2} + \frac{(n-10)(n-2)}{32}\mathcal{H}^4 \right], \quad (4.30a)$$

$$H_{11}^{(1)} = \frac{2(n-1)}{C} \left[\mathcal{H}''' + \mathcal{H}^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n-4) \right) + \mathcal{H}\mathcal{H}'' \left(-\frac{1}{2} + (n-4) \right) \right. \\ \left. + \mathcal{H}'\mathcal{H}^2 \left(\frac{3}{8}(n-4)(n-6) - \frac{3}{2} \right) + \mathcal{H}^4 \left(\frac{3}{16} + \frac{(n-4)}{64}(n^2 - 13n + 28) \right) \right], \quad (4.30b)$$

$$H_{\eta\eta}^{(3)} = -\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{32C}\mathcal{H}^4, \quad (4.30c)$$

$$H_{11}^{(3)} = \frac{(n-2)(n-3)}{4C} \left[\mathcal{H}'\mathcal{H}^2 + \frac{(n-5)}{8}\mathcal{H}^4 \right], \quad (4.30d)$$

con $H_{11}^{(1,3)} = H_{22}^{(1,3)} = \dots = H_{(n-1)(n-1)}^{(1,3)}$.

Introduciendo el desarrollo adiabático de W_k^2 en las ecuaciones (4.27a) y (4.27b), con un poco de trabajo, podemos separar el orden cero $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)}$, dos $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)}$ y cuatro $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$. El orden adiabático cero está dado por

$$\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(0)} = \frac{C}{4} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \tilde{\omega}_k, \quad (4.31a)$$

$$\langle T_{11}^\phi \rangle^{(0)} = \frac{C}{4} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \frac{(f+1)}{n-1} \tilde{\omega}_k; \quad (4.31b)$$

Recordando la definición de f dada en la Ec.(4.9), la componente espacial puede reescribirse, usando regularización dimensional, como

$$\langle T_{11}^\phi \rangle^{(0)} = \frac{C}{4} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{2}{n-1} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dx} \\ = -\frac{C}{4} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \tilde{\omega}_k = -\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(0)}.$$

Por lo tanto, el orden adiabático cero resulta proporcional a la métrica,

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)} = -\frac{g_{\mu\nu}}{4} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-1}} I_0. \quad (4.32)$$

A continuación aparecerán varias integrales I_j , siendo I_0 una de ellas, por esta razón listamos las mismas en la Tabla 4.1 que se encuentra al final de esta sección.

El orden adiabático dos puede escribirse como

$$\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(2)} = \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \left\{ \frac{\mathcal{H}^2}{32} (f-n+2)^2 + \xi \frac{\mathcal{H}^2}{4} (n-1)(f-n+2) + \xi G_{\eta\eta} \right\}, \\ \langle T_{11}^\phi \rangle^{(2)} = \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \left\{ \frac{(f-n+2)^2}{32(n-1)} [\mathcal{H}^2(n-1) - 4\mathcal{H}'] + \frac{\mathcal{H}^2(f-n+2)}{32(n-1)} \right. \\ \times [4\dot{f} - f^2 + (n-2)^2] + \frac{\xi \mathcal{H}^2}{8} [4\dot{f} - 2f^2 + nf + (n-2)(n-4)] \\ \left. - \xi \mathcal{H}'(f-n+2) + \xi G_{11} \right\}.$$

Mediante integraciones por partes podemos escribir este tensor en términos de las integrales I_1 e I_2 de la Tabla 4.1. Para hacer esto en forma sistemática introducimos las siguientes integrales:

$$I_{mn} = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{\frac{n-3}{2}}}{\tilde{\omega}_k} f^m \dot{f}^n, \quad (4.34)$$

con m, n números enteros. Por definición $I_{00} = I_1$. En términos de estas integrales $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)}$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(2)} &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \left\{ \frac{\mathcal{H}^2}{32} [I_{20} - 2(n-2)I_{10} + (n-2)^2 I_1] + \xi \frac{\mathcal{H}^2}{4} (n-1) [I_{10} - (n-2)I_1] \right. \\ &\quad \left. + \xi G_{\eta\eta} I_1 \right\}, \end{aligned} \quad (4.35a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{11}^\phi \rangle^{(2)} &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k} \left\{ \frac{(\mathcal{H}^2(n-1) - 4\mathcal{H}')}{32(n-1)} [I_{20} - 2(n-2)I_{10} + (n-2)^2 I_1] \right. \\ &\quad + \frac{\mathcal{H}^2}{32(n-1)} [4I_{11} - I_{30} + (n-2)^2 I_{10} - (n-2)(4I_{01} - I_{20} + (n-2)^2 I_1)] + \xi G_{11} I_1 \\ &\quad \left. + \frac{\xi \mathcal{H}^2}{8} [4I_{01} - 2I_{20} + nI_{10} + (n-2)(n-4)I_1] - \xi \mathcal{H}' [I_{10} - (n-2)I_1] \right\}. \end{aligned} \quad (4.35b)$$

Haciendo integraciones por partes I_{10} puede escribirse en términos de I_1 ,

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{\frac{n-3}{2}}}{\tilde{\omega}_k} \left(\frac{x}{\tilde{\omega}_k^2} \frac{d\tilde{\omega}_k^2}{dx} - 1 \right) = -2 \int_0^{+\infty} dx x^{\frac{n-1}{2}} \frac{d\tilde{\omega}_k^{-1}}{dx} - I_1 \\ &= (n-2)I_1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Similarmente obtenemos:

$$I_{20} = \frac{(n-4)(n-2)}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2, \quad (4.37a)$$

$$I_{30} = \frac{(n-4)(n-2)(n-1)}{15} I_1 + \frac{2(3n-1)}{15} I_2 + \frac{8}{15} I_8 - I_{20}, \quad (4.37b)$$

$$I_{01} = I_2 - I_{10} - I_{20}, \quad (4.37c)$$

$$I_{11} = \frac{n}{3} I_2 + \frac{2}{3} I_8 - I_{20} - I_{30}. \quad (4.37d)$$

Introduciendo estas expresiones en (4.35), con un poco de álgebra hallamos

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} = G_{\mu\nu} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \left\{ \frac{I_2}{6(n-1)(n-2)} + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) I_1 \right\}. \quad (4.38)$$

Como se detalla en el Apéndice A, el orden adiabático cuatro puede escribirse como

$$\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(4)} = \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4C(2\pi)^{(n-1)}} [\alpha_1 \mathcal{H}' \mathcal{H}^2 + \alpha_2 \mathcal{H}'' \mathcal{H} + \alpha_3 \mathcal{H}^4 + \alpha_4 \mathcal{H}'^2], \quad (4.39a)$$

$$\langle T_{11}^\phi \rangle^{(4)} = \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4C(2\pi)^{(n-1)}} [\beta_1 \mathcal{H}' \mathcal{H}^2 + \beta_2 \mathcal{H}'' \mathcal{H} + \beta_3 \mathcal{H}^4 + \beta_4 \mathcal{H}'^2 + \beta_5 \mathcal{H}'''], \quad (4.39b)$$

donde los coeficientes α_i y β_i están dados en dicho apéndice en términos de ciertas integrales que involucran a $\tilde{\omega}_k$ y a sus derivadas. En el Apéndice A mostramos cómo estos coeficientes están relacionados con las integrales I_i de la Tabla 4.1. Por ejemplo, el coeficiente α_2 está dado por

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -\frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{dx x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} [4(n-1)(\xi - \xi_n) + f]^2 \\ &= -\frac{1}{4}(n-1)^2(\xi - \xi_n)^2 I_3 - \frac{1}{8}(n-1)(\xi - \xi_n) \int_0^{+\infty} \frac{dx x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f \\ &\quad - \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{dx x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f^2.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Teniendo en cuenta la definición de f (Ec.(4.9)) obtenemos,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f &= -\frac{2}{3} \int_0^{+\infty} x^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{d\tilde{\omega}_k^{-3}}{dx} - I_3 = \frac{(n-4)}{3} I_3, \\ \int_0^{+\infty} \frac{dx x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f^2 &= -\frac{2}{5} \int_0^{+\infty} x^{\frac{(n+1)}{2}} \frac{d\tilde{\omega}_k^{-5}}{dx} \frac{d\tilde{\omega}_k^2}{dx} + \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} x^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{d\tilde{\omega}_k^{-3}}{dx} + I_3 \\ &= \frac{1}{15}(n-4)(n-6)I_3 + \frac{2}{5}I_4.\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha_2 = -\frac{(n-1)^2}{4} \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 I_3 + \frac{(n-4)(n-1)}{1440} I_3 - \frac{I_4}{160}.\tag{4.42}$$

Mediante un procedimiento similar, delineado en el Apéndice A, puede verse que los coeficientes α_i y β_i están relacionados de manera tal que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ tiene la forma

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)} = B_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + B_3 H_{\mu\nu}^{(3)},\tag{4.43}$$

donde $H_{\mu\nu}^{(1)}$ y $H_{\mu\nu}^{(3)}$ son los tensores dados en la Ec.(4.30), y

$$B_1 = \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{(n-1)}} \left\{ \frac{I_3}{4} \left[\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{(n-4)}{360(n-1)} \right] + \frac{I_4}{160(n-1)^2} \right\}\tag{4.44a}$$

$$\begin{aligned}B_3 &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{(n-1)}} \left\{ \frac{I_3(n-6)(n-4)}{1440(n-3)} + \frac{I_4}{(n-3)} \left[\frac{(n+2)}{4(n-2)} (\xi - \xi_n)^2 + \frac{9(n+26)}{1440(n-1)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{1440} \frac{(32I_5(n-5) + 60I_6 - 210I_7)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \right\},\end{aligned}\tag{4.44b}$$

donde todas las integrales pueden encontrarse en la Tabla 4.1.

Recordando la definición de $H_{\mu\nu}^{(3)}$ dada en la Ec.(4.28) y usando la relación (4.29), $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ puede escribirse como

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)} = B_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + B_3 \frac{(n-3)}{(n-4)} \left[\frac{H_{\mu\nu}^{(1)}}{(n-1)} - H_{\mu\nu} \right].\tag{4.45}$$

$$I_0 = \int_0^\infty dx x^{\frac{(n-3)}{2}} \tilde{\omega}_k, \quad I_1 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k}, \quad I_2 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+1)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} \frac{d^2 \tilde{\omega}_k^2}{dx^2},$$

$$I_3 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3}, \quad I_4 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+1)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^5} \frac{d^2 \tilde{\omega}_k^2}{dx^2}, \quad I_5 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^5} \frac{d^3 \tilde{\omega}_k^2}{dx^3},$$

$$I_6 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+5)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^5} \frac{d^4 \tilde{\omega}_k^2}{dx^4}, \quad I_7 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+5)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^7} \left(\frac{d^2 \tilde{\omega}_k^2}{dx^2} \right)^2, \quad I_8 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} \frac{d^3 \tilde{\omega}_k^2}{dx^3},$$

$$I_9 = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+7)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^5} \frac{d^5 \tilde{\omega}_k^2}{dx^5}, \quad I_{10} = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n+7)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^7} \frac{d^3 \tilde{\omega}_k^2}{dx^3} \frac{d^2 \tilde{\omega}_k^2}{dx^2}.$$

Tabla 4.1: Expresiones explícitas de las integrales I_i . Para obtener estas integrales hemos hecho el cambio de variables $x \equiv k^2/C$ y hemos definido $\tilde{\omega}_k = \omega_k/\sqrt{C}$.

4.3.2. Ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter: renormalización y contratérminos

En la sección anterior hemos obtenido las expresiones regularizadas de los primeros tres órdenes adiabáticos no nulos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$. Con estos resultados, pasaremos ahora a analizar la renormalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter.

Como hemos mencionado en la Sec. 2.2, para métricas de FRW espacialmente planas el tensor de energía-momento del campo Éter resulta proporcional al tensor de Einstein (ver Ec.(2.14)). Dicho de otro modo, para estas métricas, el tensor de Einstein es el único tensor de orden adiabático dos con divergencia covariante nula que puede obtenerse a partir de la acción más general construida con la métrica, el campo Éter y sus derivadas. Por este motivo y puesto que estamos trabajando explícitamente con la métrica de FRW, era de esperar que el orden adiabático dos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$, dado en la Ec.(4.38), resulte proporcional al tensor de Einstein. Consecuentemente, no será posible distinguir entre una renormalización de las constantes c_i de la acción del campo u^μ y una renormalización de la constante de Newton.

A partir del resultado obtenido para el orden adiabático cuatro regularizado (4.45), es evidente que usando la acción gravitacional de la Ec.(1.32) con términos cuadráticos en

la curvatura es posible absorberlo redefiniendo las constantes α , β y γ . Más explícitamente, consideremos las ecuaciones semiclásicas para la métrica obtenida usando la acción de Einstein-Éter y los términos cuadráticos en la curvatura de la Ec.(1.32). Luego de especializar las ecuaciones para métricas de FRW espacialmente planas y usar la relación (4.29), obtenemos

$$\frac{G_{\mu\nu}}{8\pi G_{\text{cosm}}} + \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi G} + \left(\alpha + \frac{\beta}{2(n-1)} \right) H_{\mu\nu}^{(1)} + \left(\gamma + \frac{(n-2)}{4}\beta \right) H_{\mu\nu} = \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle, \quad (4.46)$$

donde G_{cosm} está relacionada con las constantes G y c_i por la Ec.(2.15).

Definimos $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{\text{ren}}$ como para la RD usual

$$\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle - \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{ad4}, \quad (4.47)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{ad4} = \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(0)} + \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(2)} + \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(4)}, \quad (4.48)$$

donde, como vimos en la sección anterior,

$$\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(0)} = -\frac{g_{\mu\nu}}{4} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-1}} I_0, \quad (4.49a)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(2)} = G_{\mu\nu} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \left\{ \frac{I_2}{6(n-1)(n-2)} + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) I_1 \right\}, \quad (4.49b)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(4)} &= B_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + B_3 H_{\mu\nu}^{(3)} \\ &= B_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + B_3 \frac{(n-3)}{(n-4)} \left[\frac{H_{\mu\nu}^{(1)}}{(n-1)} - H_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.49c)$$

Los coeficientes B_1 y B_3 están dados en la Ec.(4.44) y las integrales I_i están definidas en la Tabla 4.1.

Sumando y restando $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{ad4}$ en la Ec.(4.46), vemos que el $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{ad4}$ sumado puede absorberse mediante la siguiente redefinición de los parámetros desnudos ($\Lambda G^{-1}, G_{\text{cosm}}^{-1}, \alpha, \beta$ y γ):

$$\Lambda G^{-1} = (\Lambda G^{-1})_R - \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-2}} I_0, \quad (4.50a)$$

$$G_{\text{cosm}}^{-1} = (G_{\text{cosm}}^{-1})_R + \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{(2\pi)^{n-2}} \left\{ \frac{I_2}{6(n-1)(n-2)} + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) I_1 \right\}, \quad (4.50b)$$

$$\alpha + \frac{\beta}{2(n-1)} = \alpha_R + \frac{\beta_R}{2(n-1)} + B_1 + \frac{(n-3)B_3}{(n-4)(n-1)}, \quad (4.50c)$$

$$\gamma + \frac{(n-2)}{4}\beta = \gamma_R + \frac{(n-2)}{4}\beta_R - \frac{(n-3)}{(n-4)}B_3. \quad (4.50d)$$

Derivando de ambos miembros estas ecuaciones con respecto a μ obtenemos las ecuaciones del grupo de renormalización para $n \rightarrow \bar{n}$:

$$\mu \frac{d(\Lambda G^{-1})_R}{d\mu} = -(\bar{n} - n) \frac{\Omega_{n-1}}{(2\pi)^{n-2}} I_0, \quad (4.51a)$$

$$\mu \frac{d(G_{\text{cosm}}^{-1})_R}{d\mu} = (\bar{n} - n) \frac{\Omega_{n-1}}{(2\pi)^{n-2}} \left\{ \frac{I_2}{6(n-1)(n-2)} + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) I_1 \right\}, \quad (4.51b)$$

$$\mu \frac{d\alpha_R}{d\mu} + \frac{1}{2(n-1)} \mu \frac{d\beta_R}{d\mu} = (\bar{n} - n) \left[B_1 + \frac{(n-3)B_3}{(n-4)(n-1)} \right], \quad (4.51c)$$

$$\mu \frac{d\gamma_R}{d\mu} + \frac{(n-2)}{4} \mu \frac{d\beta_R}{d\mu} = -(\bar{n} - n) \frac{(n-3)}{(n-4)} B_3. \quad (4.51d)$$

Como una comprobación de los resultados, podemos recuperar a partir de estos los resultados conocidos para la RD usual ($\tilde{\omega}_k^2(x) = m^2 + x$) y un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. En este caso las únicas integrales no nulas son I_0 , I_1 e I_3 . En el límite $n \rightarrow 4$ estas integrales están dadas por

$$\mu^{4-n} I_0 \rightarrow \frac{m^4}{4} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.52a)$$

$$\mu^{4-n} I_1 \rightarrow m^2 \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.52b)$$

$$\mu^{4-n} I_3 \rightarrow -2 \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.52c)$$

donde, como es usual, en los miembros derechos hemos redefinido la constante $\mu \rightarrow 2\mu/e$. Introduciendo estas integrales en (4.50) obtenemos

$$\Lambda G^{-1} = (\Lambda G^{-1})_R - \frac{m^4}{4\pi} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.53a)$$

$$G_{\text{cosm}}^{-1} = (G_{\text{cosm}}^{-1})_R + \frac{m^2}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.53b)$$

$$\alpha + \frac{\beta}{6} = \alpha_R + \frac{\beta_R}{6} - \left[\frac{(\xi - \frac{1}{6})^2}{16\pi^2} - \frac{1}{8640\pi^2} \right] \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.53c)$$

$$\gamma + \frac{\beta}{2} = \gamma_R + \frac{\beta_R}{2} - \frac{1}{2880\pi^2} \left[\frac{1}{n-4} + \ln \left(\frac{m}{\mu} \right) \right], \quad (4.53d)$$

que efectivamente concuerda con el resultado conocido de la Ec.(1.35).

Consideremos una RD generalizada tal que $\tilde{\omega}_k^2 \sim x^s$ para valores grandes de x y un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Como puede verse de la Tabla 4.1, la integral I_0 es divergente cualquiera sea la RD, mientras que las integrales I_1 e I_2 divergen solamente para $s \leq 3$. Los coeficientes B_1 y B_3 dados en la Ec.(4.44) son divergentes sólo para la RD usual, para $s > 1$ son finitos.

Hay un punto sutil en la renormalización de las constantes α , β y γ . Como puede verse en la Ec.(4.49c), cuando escribimos $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ en términos de tensores geométricos ($H_{\mu\nu}^{(1)}$ y $H_{\mu\nu}$) aparece explícitamente un polo en $n = 4$. Dicho de otro modo, $H_{\mu\nu}^{(3)}$ no es un tensor que pueda obtenerse de la acción gravitacional (1.32), sino que de ésta podemos obtener $(n - 4)H_{\mu\nu}^{(3)} = H_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^{(1)} - 4H_{\mu\nu}^{(2)}$, a partir de la combinación particular $GB = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ (ver ecuaciones (1.32) y (1.33))¹. Por esta razón aparece un factor $1/(n - 4)$ en las ecuaciones (4.50c) y (4.50d).

Como hemos mencionado al comienzo de la sección, estamos considerado una acción desnuda que involucra sólo dos derivadas del campo vectorial. Estamos agregando solamente términos geométricos con cuatro derivadas que son cuadráticos en la curvatura. Desde el punto de vista de las teorías de campos efectivas, podemos esperar que también se renormalicen las constantes correspondientes a términos con cuatro derivadas que involucren al campo vectorial. Éste podría ser el caso si a partir de este tipo de términos pueden obtenerse $H_{\mu\nu}^{(1)}$ y/o $H_{\mu\nu}^{(3)}$. En efecto, agreguemos al lagrangiano de Einstein-Éter un término de la forma

$$S^a = -\frac{\sigma}{2} \int d^n x \sqrt{-g} (\nabla_\mu u^\mu)^2 R, \quad (4.54)$$

donde σ es una constante y el superíndice denota que es una contribución adicional. La contribución de este término al tensor de energía-momento del campo u^μ es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^a &= -2\sigma \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta - 2\sigma \theta \nabla_\mu \nabla_\nu \theta + 2\sigma g_{\mu\nu} \theta \square \theta + \sigma \theta^2 G_{\mu\nu} \\ &+ 2\sigma g_{\mu\nu} \partial_\lambda \theta \partial^\lambda \theta + \sigma u^\mu \nabla_\mu (\theta R) \perp_{\mu\nu} + \sigma g_{\mu\nu} \theta^2 R, \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde $\theta = \nabla_\mu u^\mu$ y hemos tenido en cuenta que el multiplicador de Lagrange $\tilde{\lambda}$ se modifica. Para métricas de FRW espaciamiento planas este tensor se reduce a

$$T_{\mu\nu}^a = \sigma \frac{(n-1)^2(n+2)}{(n-2)(n-3)} H_{\mu\nu}^{(3)}. \quad (4.56)$$

Trabajando explícitamente con métricas de FRW espaciamiento planas no es posible discernir si las contribuciones al orden adiabático cuatro de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ proporcionales a $H_{\mu\nu}^{(3)}$ dan lugar a una renormalización (finita) de la constante σ . También podrían renormalizarse otras constantes correspondientes a otros términos con cuatro derivadas que involucren al campo vectorial.

Para el orden adiabático dos, como hemos mencionado al comienzo de la sección, tampoco es posible distinguir entre una renormalización de las constantes G y c_i , ya que sólo

¹Esta combinación GB corresponde a lo que sería el invariante topológico de Gauss-Bonnet en $n = 4$.

conocemos cómo se renormaliza G_{cosm} , que es una combinación de dichas constantes (ver la Ec.(2.15)). Lo mismo sucede para los términos con cuatro derivadas. Es decir, podemos reemplazar a las combinaciones de las constantes α , β y γ que aparecen en la Ec.(4.46) por dos constantes (α_{cosm} y β_{cosm}), que serían una combinación de las correspondientes a todos los términos con cuatro derivadas que contribuyen (formados con la métrica y el campo vectorial),

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{\beta}{2(n-1)} &\longrightarrow \alpha_{\text{cosm}}, \\ \gamma + \frac{(n-2)}{4}\beta &\longrightarrow \beta_{\text{cosm}}.\end{aligned}$$

A partir de la Ec.(4.51) puede estudiarse la dependencia con la escala μ de las constantes involucradas. Por simplicidad, nos restringimos a las ecuaciones (4.51a) y (4.51b), que dan la dependencia con μ de $(\Lambda G^{-1})_R$ y $G_{\text{cosm}R}$. No obstante, podemos notar que los miembros derechos de las ecuaciones (4.51c) y (4.51d) son en principio no nulos para $n \rightarrow 4$, cualquiera sea la RD, lo cual indica que las constantes α_{cosm} y β_{cosm} dependen μ .

Para relaciones de dispersión tales que $\omega_k^2 \sim x^s$ con $s > 3$, las integrales I_1 e I_2 son finitas en el límite $n \rightarrow 4$, por lo que el miembro derecho de la Ec.(4.51b) se anula en dicho límite. En el Apéndice B evaluamos explícitamente los órdenes adiabáticos cero y dos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ para dos relaciones de dispersión con $s \leq 3$.

Para una RD de la forma $\tilde{\omega}_k^2 = x + m^2 + 2b_{11}x^2$, con $b_{11} > 0$, en dicho apéndice mostramos que el orden adiabático dos resulta finito. Una observación interesante que podría ayudar a entender por qué el resultado es finito en este caso, es que los integrandos de las expresiones de I_1 e I_2 , cuando k es grande o cuando el campo es no masivo, se comportan de la misma manera que las que se obtendrían en $2 + 1$ dimensiones para la RD usual. Como hemos mencionado en la Sec. 4.2, en ese caso es bien sabido que el método de regularización dimensional produce resultados finitos para integrales que son en principio divergentes por contaje de potencias [97]. Entonces, para $n \rightarrow 4$, los miembros derechos de (4.51a) y (4.51b) se anulan y las constantes $(\Lambda G^{-1})_R$ y de $G_{\text{cosm}R}$ son independientes de μ .

En el Apéndice B también consideramos el caso en el que el campo escalar es no masivo y sus modos satisfacen una RD de la forma $\tilde{\omega}_k^2 = x + 2b_{11}x^2 + 2|b_{12}|x^3$, donde suponemos que $|b_{12}| > b_{11}^2/2$ para evitar que la frecuencia tenga ceros. En este caso los resultados son divergentes para $n \rightarrow 4$ (ver ecuaciones (2.13) y (2.14) de dicho apéndice). Usando los mismos obtenemos:

$$\mu \frac{d(\Lambda G^{-1})_R}{d\mu} = -\frac{b_{11}(2|b_{12}| - b_{11}^2)}{4\sqrt{2}\pi|b_{12}|^{5/2}}, \quad (4.58a)$$

$$\mu \frac{d(G_{\text{cosm}}^{-1})_R}{d\mu} = \frac{\xi}{\pi^2 \sqrt{2|b_{12}|}}, \quad (4.58b)$$

de donde vemos que, como $|b_{12}| > b_{11}^2/2$ el signo del miembro derecho de la primera ecuación depende del signo de b_{11} . Es interesante notar que, para la RD usual, estas constantes son independientes de la escala μ cuando los campos son no masivos.

En resumen, en esta sección hemos encontrado los contratérminos necesarios para absorber, en las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter, el desarrollo de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ hasta el orden adiabático cuatro. Con el formalismo desarrollado es posible, en principio, calcular en forma consistente la reacción de campos escalares cuánticos sobre la geometría del espacio-tiempo de FRW espacialmente plano.

Los contratérminos tienen la misma forma que los requeridos para renormalizar las ecuaciones semiclásicas de Einstein, cualquiera sea de la RD del campo. Esto último se debe a que estamos trabajando explícitamente con la métrica de FRW espacialmente plana. Por lo tanto, para poder distinguir entre la renormalización de las constantes gravitacionales y aquellas que aparecen en el lagrangiano del campo Éter, debemos considerar métricas de fondo más generales.

Capítulo 5

Renormalización adiabática para campos interactuantes y espacios anisótropos

En este capítulo extenderemos el método de sustracción adiabática del capítulo anterior a campos interactuantes y a espacios-tiempos anisótropos. El objetivo principal es mostrar que tanto para campos interactuantes como para campos libres en espacios anisotrópicos es posible distinguir la aparición de nuevos contratérminos, los cuales involucran, además de la métrica y sus derivadas, al campo vectorial u^μ y a sus derivadas. Consideraremos primero un campo escalar autointeractuante con RD generalizada, descrito por el modelo de la Sec. 2.3, pero con términos de interacción adicionales en el lagrangiano. En este caso, estudiaremos la renormalización de la ecuación semiclásica para el valor de expectación del campo en la aproximación de un lazo. Nos restringiremos luego al caso en el que el campo es libre y analizaremos la renormalización del valor de expectación del tensor de energía-momento del mismo. Este capítulo está basado en la Ref.[43].

5.1. Métricas de Bianchi I

Consideramos un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con métrica del tipo Bianchi I,

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 C_i(t) dx_i^2 = -C(\eta) d\eta^2 + \sum_{i=1}^3 C_i(t) dx_i^2, \quad (5.1)$$

donde $C = (C_1 C_2 C_3)^{1/3}$, $d\eta = dt/C^{1/2}$, y elegimos los marcos de referencias privilegiados mediante $u_\mu \equiv C^{1/2}(\eta) \delta_\mu^\eta$. Entonces, el campo Éter satisface $a_\nu = u^\mu \nabla_\mu u_\nu = 0$, por lo cual la ecuación de movimiento para el campo libre y el tensor de energía-momento son los que

obtuvimos en la Sec. 2.3 y están dados por las ecuaciones (2.29) y (2.21), respectivamente. Como en el capítulo anterior, denotaremos con una prima a la derivada con respecto al tiempo conforme η y no usaremos la convención de sumas para índices espaciales (latinos). La relación de dispersión para los modos del campo es

$$\omega_k^2 = C(\eta) \left[m^2 + x + 2 \sum_{q,p \leq q} (-1)^{q+p} b_{qp} x^{(q+p)} \right], \quad (5.2)$$

donde $x = \sum_{i=1}^3 k_i^2 / C_i \equiv \sum_{i=1}^3 x_i \equiv \sum_{i=1}^3 x \lambda_i^2$, siendo $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = 1$.

5.2. Campo ϕ autointeractuante: desarrollo WKB

En esta sección consideramos la siguiente acción para el campo escalar ϕ :

$$S_\phi = \int d^n x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_{cor} + \mathcal{L}_{int}), \quad (5.3)$$

donde \mathcal{L}_L y \mathcal{L}_{cor} son las densidades lagrangianas dadas en las ecuaciones (2.17) y (2.18), respectivamente, y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -\frac{1}{2} [\xi_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \xi_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 + \xi_3 \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu \\ & + \xi_4 u^\rho u^\sigma \nabla_\rho u_\mu \nabla_\sigma u^\mu + \xi_5 u^\mu u^\nu R_{\mu\nu}] \phi^2 - \lambda \phi^4, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde ξ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)¹ y λ son parámetros desnudos.

La ecuación de movimiento del campo es

$$\begin{aligned} \square \phi - \left[m^2 + \xi R + \xi_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 + \xi_3 \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu + \xi_5 R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right. \\ \left. + 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} \mathcal{D}^{2(q+p)} \right] \phi - 4\lambda \phi^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para obtener la ecuación semiclásica en la aproximación de un lazo para el valor de expectación del campo escalar $\phi_0 = \langle \phi \rangle$, seguimos el procedimiento descrito en la Sec. 1.3. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \square \phi_0 - \left[m^2 + \xi R + \xi_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 + \xi_3 \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu + \xi_5 R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right. \\ \left. + 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} \mathcal{D}^{2(q+p)} + 12\lambda \langle \hat{\phi}^2 \rangle \right] \phi_0 - 4\lambda \phi_0^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

¹El término usual $\xi R \phi^2$ está incluido en \mathcal{L}_L (2.17).

Los modos de Fourier del campo $\chi = C^{1/2}\hat{\phi}$ deben satisfacer

$$\begin{aligned} \chi_k'' + \left[\omega_k^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) CR + Q + \xi_2 C (\nabla_\mu u^\mu)^2 \right. \\ \left. + \xi_3 C \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu + \xi_5 C R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + 12C \lambda \phi_0^2 \right] \chi_k = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

y la condición de normalización

$$\chi_k \chi_k'^* - \chi_k' \chi_k^* = i. \quad (5.8)$$

Para la métrica (5.1), las expresiones explícitas de los distintos términos de las ecuaciones (5.6) y (5.7) son:

$$(\nabla_\mu u^\mu)^2 = \frac{9D^2}{4C}, \quad (5.9a)$$

$$R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\frac{3}{C} \left[\frac{D'}{2} + 2Q \right], \quad (5.9b)$$

$$R = \frac{1}{C} \left[3D' + \frac{3}{2}D^2 + 6Q \right], \quad (5.9c)$$

$$\nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu = \sum_{i=1}^3 \frac{d_i^2}{4C} = \frac{3}{4C}(D^2 + 8Q), \quad (5.9d)$$

$$Q = \frac{1}{72} \sum_{i<j}^3 (d_i - d_j)^2, \quad (5.9e)$$

donde $d_i = C'_i/C_i$ y $D = \sum_{i=1}^3 d_i/3 = C'/C$. Además, se cumple la siguiente relación:

$$2R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + R = (\nabla_\mu u^\mu)^2 - \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu, \quad (5.10)$$

por lo cual, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\xi_5 = 0$.

Para obtener el desarrollo WKB de los modos χ_k en el modelo que estamos considerando, introducimos la expresión

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{2W_k}} \exp \left(-i \int^\eta W_k(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right), \quad (5.11)$$

en la Ec.(5.7) y encontramos la ecuación para W_k ,

$$\begin{aligned} W_k^2 = & \omega_k^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) CR + Q + \xi_2 C (\nabla_\mu u^\mu)^2 \\ & + \xi_3 C \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu + 12\lambda C \phi_0^2 + \frac{5}{16} \frac{[(W_k^2)']^2}{W_k^4} - \frac{1}{4} \frac{(W_k^2)''}{W_k^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Al igual que en el capítulo anterior, para implementar el método de regularización adiabática, suponemos que W_k varía lentamente con η y resolvemos esta ecuación iterativamente,

$$W_k = {}^{(0)} W_k + {}^{(2)} W_k + \dots, \quad (5.13)$$

comenzando con el orden adiabático cero ${}^{(0)}W_k = \omega_k$. En este caso, como se ha mencionado en la Sec. 1.3, el orden adiabático de un término está dado por el número de derivadas de $C(\eta)$ más la potencia a la cual está elevado ϕ_0 [57].

Reemplazando W_k por ω_k en el miembro derecho de la Ec.(5.12) obtenemos el orden adiabático dos,

$$\begin{aligned} {}^{(2)}W_k^2 &= CR\left(\xi - \frac{1}{6}\right) + Q + \frac{D^2}{16} - \frac{D'}{4} + \xi_2 C(\nabla_\mu u^\mu)^2 \\ &+ \xi_3 C \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu - \frac{(f+1)}{4} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \left[\frac{Dd_i}{2} + d_i^2 - d_i' \right] \\ &+ \frac{1}{16} \left(\sum_{i=1}^3 d_i \lambda_i^2 \right)^2 \left[f^2 + 6f - 4\dot{f} + 5 \right] + 12\lambda C \phi_0^2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde la función f es

$$f \equiv \frac{d \ln \tilde{\omega}_k^2}{d \ln x} - 1, \quad (5.15)$$

siendo $\tilde{\omega}_k^2 \equiv \omega_k^2/C$. Para llegar a esta expresión de ${}^{(2)}W_k^2$, también hemos usado que

$$\frac{(\omega_k^2)'}{\omega_k^2} = D - (f+1) \sum_{i=1}^3 d_i \lambda_i^2, \quad (5.16a)$$

$$\frac{(\omega_k^2)''}{\omega_k^2} = D' + D^2 + (f+1) \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 [d_i^2 - 2d_i D - d_i'] + (\dot{f} + f^2 + f) \left(\sum_{i=1}^3 d_i \lambda_i^2 \right)^2, \quad (5.16b)$$

donde un punto corresponde a una derivada con respecto a $\ln x$.

Como puede inferirse del resultado dado en la Ec.(3.18), para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones como el que estamos considerando, cuando la RD es tal que la frecuencia se comporta como $\omega_k \sim k^s$ (con $s > 0$) para valores grandes de k , los únicos órdenes adiabáticos de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$ que son potencialmente divergentes son el orden cero y el orden dos. Es más, el mismo resultado indica que si $s > 1$ el orden dos es finito y que si $s > 3$ también el orden cero es finito. Entonces, nos quedamos a orden dos en el desarrollo adiabático de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$ y, como para la RD usual, definimos la correspondiente cantidad renormalizada como

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ren} = \langle \hat{\phi}^2 \rangle - \langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad2}, \quad (5.17)$$

siendo $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad2} = \langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(0)} + \langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(2)}$, donde nuevamente el superíndice indica el orden adiabático.

5.2.1. Regularización de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad2}$

Al igual que en el capítulo anterior, utilizaremos el método de regularización dimensional. Para evitar tener que calcular todas las cantidades en n dimensiones, haremos primero

las integrales angulares y luego generalizaremos las integrales en cuatro dimensiones a integrales n -dimensionales, reemplazando $d^3k = C^{3/2}d^3y = C^{3/2}y^2dyd\Omega$ ($y_i = k_i/\sqrt{C_i}$) por $C^{3/2}y^{(n-2)}dyd\Omega$. Este procedimiento es suficiente para identificar las divergencias [64, 65].

Para calcular los dos primeros términos del desarrollo adiabático de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$, comenzamos con la expresión del mismo en términos de W_k :

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle = \frac{\mu^{4-n}}{(2\pi)^3 C} \int d^3k |\chi_k|^2 = \frac{\mu^{4-n}}{(2\pi)^3 C} \int d^3k \frac{1}{2W_k}. \quad (5.18)$$

El orden adiabático cero está dado por

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(0)} = \frac{\mu^{4-n}}{(2\pi)^3} \int y^{n-2} dy d\Omega \frac{1}{2\omega_k} = \frac{\mu^{4-n}}{2(2\pi)^2} I_1, \quad (5.19)$$

donde I_1 figura en la Tabla 4.1. Notemos que, como esperábamos, la integral I_1 es divergente a menos que ω_k^2 se comporte como x^s con $s > 3$, para valores grandes de x . Como veremos debajo, esta divergencia puede absorberse en la masa desnuda del campo.

El orden adiabático dos es

$$\langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(2)} = -\frac{\sqrt{C}\mu^{4-n}}{32\pi^3} \int y^{n-2} dy d\Omega \frac{{}^{(2)}W_k^2}{\omega_k^3}. \quad (5.20)$$

Las integrales angulares pueden realizarse usando las identidades listadas en el Apéndice C. Introduciendo la Ec.(5.14) en esta expresión y haciendo las integrales angulares, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(2)} &= -\frac{\mu^{4-n}}{16\pi^2} \left\{ I_3 \left[\frac{D^2}{16C} - \frac{D'}{4C} + R \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + \frac{Q}{C} + \xi_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 \right. \right. \\ &+ \xi_3 \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu + 12\lambda \phi_0^2 \left. \right] - \left[\frac{3D^2}{8C} + 2\frac{Q}{C} - \frac{D'}{4C} \right] (J_{1000} + I_3) \\ &+ \left. \left[\frac{D^2}{16C} + \frac{Q}{5C} \right] (J_{2000} + 6J_{1000} - 4J_{0100} + 5I_3) \right\}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde I_3 está dada en la Tabla 4.1 y hemos definido las integrales

$$J_{mnl s} \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f^m \dot{f}^n \ddot{f}^l \ddot{\ddot{f}}^s, \quad (5.22)$$

donde m, n, l, s son números enteros. En el Apéndice A mostramos cómo están relacionadas las integrales $J_{mnl s}$ que necesitamos para este cálculo con las que figuran en la Tabla 4.1. Para $n \rightarrow 4$, tenemos que (ver Apéndice A):

$$J_{1000} = 0, \quad (5.23a)$$

$$J_{2000} = \frac{2}{5} I_4 \quad (5.23b)$$

$$J_{0100} = \frac{3}{5} I_4. \quad (5.23c)$$

Por lo tanto, sustituyendo este resultado en la Ec.(5.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(2)} &= -\frac{\mu^{4-n} I_3}{16\pi^2} \left[R \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + 12\lambda\phi_0^2 + \xi_2 (\nabla_\mu u^\mu)^2 + \xi_3 \nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu \right] \\ &+ \frac{\mu^{4-n} I_4}{480\pi^2} [(\nabla_\mu u^\mu)^2 + 2\nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Este es el resultado principal de esta sección. El punto importante es que, además de los términos usuales que son proporcionales a R y a ϕ_0^2 , este orden adiabático contiene términos con dos derivadas del campo u^μ , los cuales aparecen incluso si $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Para la relación de dispersión usual, la integral I_3 diverge e I_4 es nula (ver Tabla 4.1). Por lo tanto, cuando $\xi_2 = \xi_3 = 0$, usando la expresión (4.52c) para I_3 recuperamos el resultado usual de la Ec.(1.29). Sin embargo, para cualquier otra RD de la forma dada en la Ec. (5.2), I_3 e I_4 son finitas. Un punto interesante es que, si consideramos una RD generalizada, evaluamos estas últimas integrales explícitamente en cuatro dimensiones y *luego* tomamos el límite en el cual la RD tiende a la usual, obtenemos un resultado finito pero no nulo. Por ejemplo, para una RD de la forma $\omega_k^2 = C(x + 2b_{11}x^2)$ encontramos

$$I_4 = 4b_{11} \int_0^{+\infty} dx (1 + 2b_{11}x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{4}{3}, \quad (5.25)$$

que resulta independiente de b_{11} . Este resultado puede interpretarse como la obtención de un remanente finito de la física trans-planckiana en el orden adiabático dos, incluso en el límite en el cual la escala de la nueva física es muy grande $M_C \rightarrow \infty$ ($b_{11} \rightarrow 0$).

5.2.2. Renormalización de la ecuación semiclásica para ϕ_0

Para hallar los contratérminos con los cuales podamos absorber hasta el orden adiabático dos inclusive, sumamos y restamos $12\lambda\langle\hat{\phi}^2\rangle_{ad2}\phi_0$ en el miembro derecho de la Ec.(5.6) y escribimos los parámetros desnudos como los renormalizados más los correspondientes a los contratérminos. De esta manera, obtenemos

$$\begin{aligned} &\square\phi_0 - [m_R^2 + \delta m^2 + (\xi_R + \delta\xi)R + (\xi_{2R} + \delta\xi_2)(\nabla_\mu u^\mu)^2 + (\xi_{3R} + \delta\xi_3)\nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu \\ &+ 2 \sum_{q,p} b_{qp} \mathcal{D}^{2(q+p)} + 12\lambda_R (\langle\hat{\phi}^2\rangle_{ren} + \langle\hat{\phi}^2\rangle_{ad2})] \phi_0 - 4(\lambda_R + \delta\lambda)\phi_0^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Introduciendo las ecuaciones (5.19) y (5.24) en esta ecuación, vemos que $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{ad2}$ puede absorberse usando los contratérminos dados por

$$\delta m^2 = -\frac{6\lambda_R}{(2\pi)^2} I_1, \quad (5.27a)$$

$$\delta \lambda = \frac{9\lambda_R^2}{(2\pi)^2} I_3, \quad (5.27b)$$

$$\delta \xi = \frac{3\lambda_R}{(2\pi)^2} \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) I_3, \quad (5.27c)$$

$$\delta \xi_2 = \frac{3\lambda_R \xi_{2R}}{(2\pi)^2} I_3 - \frac{\lambda_R}{40\pi^2} I_4, \quad (5.27d)$$

$$\delta \xi_3 = \frac{3\lambda_R \xi_{3R}}{(2\pi)^2} I_3 - \frac{\lambda_R}{20\pi^2} I_4. \quad (5.27e)$$

De estas ecuaciones podemos notar que, incluso cuando los parámetros ξ_{2R} y ξ_{3R} son fijados a cero, los contratérminos correspondientes aparecen debido a la autointeracción del campo escalar. También podemos notar que, con la misma teoría para el campo escalar, pero en un espacio-tiempo de FRW espacialmente plano, estos nuevos contratérminos también aparecen. Sin embargo, en ese caso no resulta posible distinguir entre las redefiniciones de ξ_2 y de ξ_3 , ya que para tal espacio-tiempo tenemos que

$$\nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu = \frac{1}{3} (\nabla_\mu u^\mu)^2. \quad (5.28)$$

A partir de los resultados obtenidos en esta sección concluimos que, en lo que respecta a la renormalización de la ecuación para ϕ_0 en espacios-tiempos del tipo Bianchi I, para relaciones de dispersión donde $\tilde{\omega}_k^2 \sim x^s$, con $s > 1$, es suficiente restar el orden adiabático cero de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$, puesto que el orden dos ya es finito. El orden adiabático dos solamente da lugar a una renormalización finita de las constantes desnudas. Por otra parte, el resultado de la Ec.(3.22) indica que para $n = 4$ el orden adiabático dos también es finito para métricas inhomogéneas. De todos modos, el cálculo del orden adiabático dos presentado en esta sección muestra que los términos de interacción proporcionales a ξ_2 y a ξ_3 que figuran en el lagrangiano (5.4) son generados por efectos cuánticos, incluso si a nivel clásico están ausentes. Probablemente, los otros términos de interacción también sean generados para métricas más generales.

5.3. Renormalización de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ en Bianchi I

En esta sección nos concentramos en la renormalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter. Nos restringimos al caso en el que el campo escalar es libre ($\lambda = 0$) y,

para mayor simplicidad, tomamos $\xi_i = 0$ ($i=1,2,3,4,5$). En este caso, calcularemos hasta el orden adiabático dos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ para la métrica de la Ec.(5.1).

Las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter toman la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu}^{\bar{u}} + \langle T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}_c} + T_{\mu\nu}^s \rangle + T_{\mu\nu}^{clas}] \quad (5.29)$$

donde Λ y G son constantes desnudas, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein,

$$T_{\mu\nu}^s = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (5.30a)$$

$$T_{\mu\nu}^u = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_u}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}^{\bar{u}} + T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}_c}, \quad (5.30b)$$

siendo $T_{\mu\nu}^{\bar{u}}$ el tensor de energía-momento para el campo u^μ libre, dado en la Ec. (2.10) con $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^u$ (dada en la Ec.(2.9)), mientras que $T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}_c}$ es la contribución adicional debida a que el acoplamiento de u^μ con ϕ modifica el multiplicador de Lagrange $\tilde{\lambda}$. $T_{\mu\nu}^{clas}$ es un tensor correspondiente a fuentes clásicas no acopladas al Éter. Al igual que en los capítulos anteriores, llamamos $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ a

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle = \langle T_{\mu\nu}^s + T_{\mu\nu}^{\tilde{\lambda}_c} \rangle. \quad (5.31)$$

Como no calcularemos $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ mas allá del orden adiabático dos, hemos omitido en las ecuaciones semiclásicas los términos con cuatro derivadas de la métrica ($H_{\mu\nu}^{(1)}$, $H_{\mu\nu}^{(2)}$, etc.).

Las componentes no triviales del tensor de Einstein son:

$$G_{\eta\eta} = 3 \left[\frac{D^2}{4} - Q \right], \quad (5.32a)$$

$$G_{ii} = -\frac{C_i}{2C} \left[3D' + \frac{3}{2}D^2 + 6Q - d'_i - d_i D \right]. \quad (5.32b)$$

El tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}^{\bar{u}}$ puede escribirse como

$$T_{\mu\nu}^{\bar{u}} = \frac{c_{13}}{8\pi G} G_{\mu\nu} - \frac{c_{123}}{8\pi G} \tilde{T}_{\mu\nu}^u, \quad (5.33)$$

donde $c_{13} = c_1 + c_3$ y $c_{123} = c_1 + c_2 + c_3$. Las componentes no nulas de $\tilde{T}_{\mu\nu}^u$ son:

$$\tilde{T}_{\eta\eta}^u = \frac{9}{8} D^2, \quad (5.34a)$$

$$\tilde{T}_{ii}^u = -\frac{3}{2} \frac{C_i}{C} \left[D' + \frac{D^2}{4} \right]. \quad (5.34b)$$

El valor de expectación del tensor de energía-momento cuántico $T_{\mu\nu}^\phi$ está dado por

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle &= \frac{\mu^{4-n}}{2C} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ |\chi'_k|^2 + 3D \left(\xi - \frac{1}{6} \right) (\chi'_k \chi_k^* + \chi_k \chi_k'^*) \right. \\ &\quad \left. + |\chi_k|^2 \left[\omega_k^2 - 3D^2 \left(\xi - \frac{1}{12} \right) + 2\xi G_{\eta\eta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{ii}^\phi \rangle &= \mu^{4-n} \frac{C_i}{C^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) |\chi'_k|^2 + \left(\frac{\xi}{2} (2D + d_i) - \frac{D}{4} \right) (\chi'_k \chi_k^* + \chi_k \chi_k'^*) \right. \\ &\quad \left. - \xi (\chi_k'' \chi_k^* + \chi_k \chi_k''^*) + |\chi_k|^2 \left(k_i^2 \frac{d\omega_k^2}{dk_i^2} - \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{D^2}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{2} |\chi_k|^2 \left[2D' - d_i D + 2 \frac{C}{C_i} G_{ii} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.35b)$$

Usando la expresión de la Ec.(5.11) para los modos χ_k , podemos escribir este tensor como

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle &= \frac{\mu^{4-n}}{2C} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{[(W_k^2)']^2}{32W_k^5} - 3D \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \frac{(W_k^2)'}{4W_k^3} + \frac{W_k}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2W_k} \left[\omega_k^2 - 3D^2 \left(\xi - \frac{1}{12} \right) + 2\xi G_{\eta\eta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.36a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{ii}^\phi \rangle &= \mu^{4-n} \frac{C_i}{C^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left(\frac{1}{8} - 3\xi \right) \frac{[(W_k^2)']^2}{8W_k^5} + \xi \frac{(W_k^2)''}{4W_k^3} + \frac{W_k}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(W_k^2)'}{4W_k^3} \left(-\frac{D}{4} + \frac{\xi}{2} (2D + d_i) \right) + \frac{1}{2W_k} \left[k_i^2 \frac{d\omega_k^2}{dk_i^2} - \frac{\omega_k^2}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{D^2}{8} + \xi D' - \frac{\xi}{2} D d_i + \xi \frac{C}{C_i} G_{ii} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.36b)$$

Luego, el orden adiabático cero es

$$\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(0)} = \mu^{4-n} \frac{C}{2} \int \frac{d\Omega dy}{(2\pi)^3} y^{n-2} \tilde{\omega}_k = \frac{\mu^{4-n} C}{2(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dx x^{\frac{n-3}{2}} \tilde{\omega}_k, \quad (5.37a)$$

$$\langle T_{ii}^\phi \rangle^{(0)} = \mu^{4-n} \frac{C_i}{2} \int \frac{d\Omega dy}{(2\pi)^3} y^{n-2} \lambda_i^2 \frac{y^2}{\tilde{\omega}_k} \frac{d\tilde{\omega}_k^2}{dy^2} = \frac{\mu^{4-n} C_i}{3(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dx x^{\frac{n-1}{2}} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dx}, \quad (5.37b)$$

donde hemos usado que $\int d\Omega \lambda_i^2 = 4\pi/3$. Por lo tanto, luego de hacer una integral por partes en la Ec.(5.37b) obtenemos, para $n \rightarrow 4$,

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)} = -\frac{\mu^{4-n}}{2(2\pi)^2} I_0 g_{\mu\nu}, \quad (5.38)$$

donde I_0 es divergente para $n \rightarrow 4$ cualquiera sea la RD de la forma que estamos considerando (5.2) (ver Tabla 4.1). Siendo proporcional a la métrica, este orden adiabático puede absorberse en una redefinición de Λ/G .

El orden adiabático dos puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(2)} &= \mu^{4-n} \frac{C}{2} \int \frac{d\Omega dy}{(2\pi)^3} \frac{y^{(n-2)}}{\tilde{\omega}_k} \left\{ \frac{[(\omega_k^2)']^2}{32\omega_k^4} - 3D \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \frac{(\omega_k^2)'}{4\omega_k^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} D^2 \left(\xi - \frac{1}{12} \right) + \xi G_{\eta\eta} \right\}, \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{ii}^\phi \rangle^{(2)} &= \mu^{4-n} C_i \int \frac{d\Omega dy}{(2\pi)^3} \frac{y^{(n-2)}}{\tilde{\omega}_k} \left\{ \left(\frac{1}{8} - 3\xi \right) \frac{[(\omega_k^2)']^2}{8\omega_k^4} + \xi \frac{(\omega_k^2)''}{4\omega_k^2} \right. \\ &\quad - \frac{(\omega_k^2)'}{4\omega_k^2} \left(-\frac{D}{4} + \frac{\xi}{2} (2D + d_i) \right) + \frac{{}^{(2)}W_k^2}{4} \left(1 - \lambda_i^2 \frac{y^2}{\omega_k^2} \frac{d\omega_k^2}{dy^2} \right) \\ &\quad \left. + \frac{D^2}{16} + \frac{\xi}{2} D' - \frac{\xi}{4} D d_i + \xi \frac{C}{2C_i} G_{ii} \right\}, \end{aligned} \quad (5.39b)$$

donde ${}^{(2)}W_k^2$ esta dado por la Ec.(5.14) en la cual ahora $\lambda = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Las expresiones explícitas para $(\omega_k^2)'/\omega_k^2$ y $(\omega_k^2)''/\omega_k^2$ están dadas en la Ec.(5.16).

Luego de hacer las integrales en los ángulos, usando las identidades del Apéndice C y algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos:

$$\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(2)} = \frac{\mu^{4-n}}{(2\pi)^2} [\alpha_1 D^2 + \alpha_2 Q], \quad (5.40a)$$

$$\langle T_{ii}^\phi \rangle^{(2)} = \frac{\mu^{4-n} C_i}{C(2\pi)^2} [\beta_1 D^2 + \beta_2 D' + \beta_3 D d_i + \beta_4 Q + \beta_5 d_i^2 + \beta_6 d_i'], \quad (5.40b)$$

Los coeficientes α_i y β_i están dados en el Apéndice D, donde mostramos que mediante integraciones por partes los mismos pueden expresarse en términos de dos de las integrales de la Tabla 4.1. De esta manera, encontramos

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} = \frac{\mu^{4-n}}{8\pi^2} \left\{ \left[I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{I_2}{45} \right] G_{\mu\nu} + \frac{I_2}{30} \tilde{T}_{\mu\nu}^u \right\}. \quad (5.41)$$

Notemos que tanto I_1 como I_2 divergen cuando $\tilde{\omega}_k^2$ se comporta como x^s , con $s \leq 3$, para valores grandes de x . Por lo tanto, en este caso las divergencias pueden absorberse mediante una redefinición de las constantes G y c_{123} . Sin embargo, cuando $s > 3$, el orden adiabático dos da lugar a renormalizaciones finitas de ambas constantes.

Al igual que para la evaluación de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$, dependiendo de la RD, uno podría tener un remanente de la física trans-planckiana en el orden adiabático dos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$. En efecto, mientras I_2 se anula para la RD usual, obtenemos un resultado no nulo (e incluso divergente) para una RD generalizada en el límite $M_C \rightarrow \infty$ ($b_{qp} \rightarrow 0$). Por ejemplo, para una RD de la forma $\omega_k^2 = C(x + 2b_{22}x^4)$ obtenemos el siguiente resultado para I_2 :

$$I_2 = 24b_{22} \int_0^{+\infty} dx \frac{x^3}{(1 + 2b_{22}x^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\pi} b_{22}^{\frac{1}{3}}} \Gamma[1/6] \Gamma[4/3], \quad (5.42)$$

el cual es divergente para $M_C \rightarrow \infty$ ($b_{22} \rightarrow 0$).

La Ec.(5.41) es el resultado principal de esta sección. A partir de la misma vemos que, para las relaciones de dispersión generalizadas de la Ec.(5.2), no sólo necesitamos una redefinición de G para absorber el orden adiabático dos, sino también una redefinición de la combinación c_{123} de las constantes del lagrangiano desnudo del campo vectorial.

Es valioso notar que para un espacio-tiempo de FRW espacialmente plano se cumple que $G_{\mu\nu} = 3/2\tilde{T}_{\mu\nu}^u$, razón por la cual en el capítulo anterior no fue posible mostrar que redefinir solamente G no es suficiente para absorber el orden adiabático dos. En efecto, como hemos visto en el Capítulo 2, para ese espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ son los únicos tensores con divergencia covariante nula que pueden derivarse de una acción con no más de dos derivadas, formada combinando la métrica $g_{\mu\nu}$, el campo u^μ y sus derivadas.

Los resultados de esta sección sugieren que, para métricas de fondo más generales, cualquier término covariante que pueda formarse combinando el campo vectorial u^μ , la métrica $g_{\mu\nu}$ y hasta dos derivadas de los mismos, aparecerán en el orden adiabático dos del valor de expectación del tensor de energía-momento, siempre que la teoría contenga un campo escalar con una RD generalizada como la de la Ec.(5.2). A partir de esto, para absorber hasta el orden adiabático dos, debemos considerar una acción desnuda de Einstein-Éter tan general como la dada en la Ec.(2.2). Dependiendo de la RD, el orden adiabático dos podría ser finito. En tal caso, los efectos cuánticos producen renormalizaciones finitas de las constantes que aparecen en el lagrangiano del campo u^μ (2.2b). Como hemos señalado arriba de la Ec.(5.42), estas renormalizaciones finitas podrían ser muy grandes, debido a que los límites en el que la RD tiende a la usual y $n \rightarrow 4$ no conmutan. Como hemos mencionado en la Sec. 2.2, los términos con dos derivadas de la acción (2.2b) podrían tener consecuencias observacionales. En efecto, las constantes c_i deben satisfacer ciertas restricciones para que la teoría pueda ser compatible con las observaciones.

En esta sección nos hemos restringido al desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ truncado a orden dos. Para una RD generalizada, donde $\tilde{\omega}_k^2 \sim x^s$ (con $s > 1$) esperamos que el orden adiabático cuatro sea finito (ver Ec.(3.38)). Sin embargo, como hemos señalado en la Sec. 4.3.2, hay un punto sutil relacionado con la renormalización de las constantes correspondientes a términos con cuatro derivadas. Además, de acuerdo con el resultado de la Ec.(3.40), para métricas de fondo más generales (con $n = 4$), dependiendo de la RD, tenemos que hay órdenes adiabáticos mayores a dos que también son potencialmente divergentes. En particular, para métricas inhomogéneas espacialmente esperamos que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ sea divergente cualquiera sea la RD. Por otra parte, es razonable esperar que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ contenga términos proporcionales a $R(\nabla_\mu u^\mu)^2$, $(R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu)^2$, $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu R$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}u^\mu u^\rho R^{\nu\sigma}$, etc., además de los

usuales, que son proporcionales a: R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. No obstante, desde la perspectiva de teorías de campos efectivas esperamos que estos términos no sean importantes fenomenológicamente a bajas energías.

Capítulo 6

Anomalía de Traza y soluciones autoconsistentes en De Sitter

En el Capítulo 4 hemos calculado y regularizado los tres primeros órdenes adiabáticos nulos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ y hemos visto que todos ellos pueden absorberse redefiniendo adecuadamente las constantes de la teoría de Einstein-Éter. En este capítulo usaremos los resultados del Capítulo 4 para llevar a cabo evaluaciones de las cantidades renormalizadas en el caso particular de un espacio-tiempo con métrica de De Sitter,

$$ds^2 = -(u_\mu dx^\mu)^2 + \perp_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\alpha^2}{\eta^2} [-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (6.1)$$

donde $u_\mu \equiv \alpha^{1/2} \delta_\mu^\eta / |\eta|$.

Por conveniencia, reescribimos aquí la RD generalizada

$$\tilde{\omega}_k^2 = x + m^2 + 2 \sum_{1 \leq q \leq q_M, p \leq q} (-1)^{q+p} b_{qp} x^{2(q+p)}, \quad (6.2)$$

siendo $\tilde{\omega}_k = \eta^2 \omega_k / \alpha^2$ y $x = (k\eta)^2 / \alpha^2$. Notemos nuevamente que si suponemos que el orden de magnitud de los coeficientes b_{qp} está dado por una escala de masa M_C asociada a la nueva física, podemos suponerlos naturalmente de orden $M_C^{2(1-q-p)}$.

A continuación, consideraremos una RD particular para la cual únicamente $b_{11} \neq 0$ y estudiaremos el comportamiento de la traza de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ como función de b_{11} o equivalentemente, si $b_{11} \sim M_C^{-2}$, como función de M_C . Para ello consideraremos que el campo es no masivo y la constante de acoplamiento con el escalar de Ricci es $\xi = \xi_n = (n-2)/(4n-4)$, ya que en este caso conocemos la solución exacta para los modos del campo (Ec.(4.18)). Por simplicidad, estudiaremos esto primero para un espacio-tiempo de 1 + 1 dimensiones y después para el caso de 3 + 1 dimensiones.

Pasaremos luego a analizar la existencia de soluciones autoconsistentes en el espacio-tiempo de De Sitter. En primer lugar mostraremos que, al igual que para la RD usual, para una RD generalizada existe una familia de estados caracterizada por dos números reales para los cuales $\langle T_{\mu\nu} \rangle \propto g_{\mu\nu}$, que es la estructura tensorial del término correspondiente a la constante cosmológica Λ . Para una RD de la forma $\tilde{\omega}_k^2 = x + 2b_{11}x^2$, con $b_{11} > 0$, elegiremos al miembro de la familia que generaliza el estado de vacío de Bunch-Davies usual (1.47) y analizaremos la relación entre el escalar de curvatura de De Sitter ($R = 12\alpha^{-2}$) y la constante cosmológica.

Finalmente, discutiremos si los resultados que pueden obtenerse modificando la RD del campo escalar pueden o no reproducirse en el marco de la teoría semiclásica de Einstein modificando apropiadamente el estado cuántico del campo escalar (cuyos modos satisfacen la RD usual). También discutiremos acerca de los trabajos [32, 33] donde se analizó, en el contexto de los modelos inflacionarios, la reacción de un campo escalar cuántico con RD modificada sobre la métrica del espacio-tiempo de fondo.

Este capítulo está basado en la Ref.[42].

6.1. Traza de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ en De Sitter para la teoría en $1 + 1$: Dependencia con M_C

Para un espacio-tiempo de $1 + 1$ dimensiones, a partir de las ecuaciones (4.32) y (4.38) es fácil ver que cualquiera sea la RD, incluso cuando la RD es la usual, el orden adiabático cero es divergente, mientras que el orden dos es finito. Para la RD usual $I_2 = 0$, por lo que a partir de la Ec.(4.38) obtenemos (para $n \rightarrow 2$),

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} &= G_{\mu\nu} \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) I_1 \\ &= -\frac{G_{\mu\nu}}{2\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{1}{n-2} + \ln \left(\frac{m}{2\mu} \right) + \mathcal{O}(n-2) \right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

el cual parece divergente para $n \rightarrow 2$. Este es un punto que debe tratarse cuidadosamente. Cuando $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)}$ es escrito en términos de $G_{\mu\nu}$ aparece explícitamente un polo en $n = 2$. Pero teniendo en cuenta que $G_{\mu\nu}$ se anula para $n = 2$ (ver Ec.(4.26))¹, el resultado es finito. Entonces, podemos preguntarnos si debemos sustraer o no el orden adiabático dos para obtener $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$. Dado que el procedo de renormalización debe ser covariante, el procedimiento correcto es absorber el polo en la constante de Newton antes de tomar el

¹Esto es debido a que el tensor de Einstein es el resultado de la variación con respecto a la métrica de lo que sería el invariante topológico de Gauss-Bonnet en $n = 2$.

límite $n \rightarrow 2$. En consecuencia, como es bien sabido, para la RD usual también debemos restar el orden adiabático dos [49]:

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle - \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{ad2}. \quad (6.4)$$

En efecto, esta contribución de orden adiabático dos es la que da lugar a la conocida anomalía de traza en el caso en que el campo es no masivo y está acoplado conformemente ($\xi = 0$) [49]:

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{ren} = -\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} = \frac{R}{24\pi}. \quad (6.5)$$

Para una RD generalizada tal que $\omega_k \sim k^s$ con $s > 1$, tanto la integral I_1 como I_2 que aparecen en (4.38) son finitas. Sin embargo, de la Ec.(4.38) podemos notar que aparece un polo en $n = 2$ multiplicando a I_2 . Entonces, podría surgir nuevamente la pregunta de si este orden debe ser sustraído. Si la constante G fuese la única constante de la teoría que puede renormalizarse, entonces el caso sería análogo al de la RD usual. Pero ahora tenemos además las constantes del lagrangiano del Éter. Teniendo en cuenta la expresión de la Ec.(2.14) para el tensor de energía-momento de u^μ (el cual, a diferencia de $G_{\mu\nu}$, es no nulo para $n = 2$), vemos que el término con I_2 podría absorberse mediante una renormalización finita de las constantes c_i . Sin embargo, trabajando explícitamente con métricas de FRW espaciamente planas no es posible distinguir entre una renormalización de G y renormalización de las constantes c_i . En 1 + 1 dimensiones, a partir del resultado de la Ec. (3.40), esperamos que para métricas más generales el orden adiabático dos sea divergente, cualquiera sea la RD. Es más, para $s > 2$ incluso el orden adiabático cuatro podría ser divergente. Por este motivo, consideramos que para definir $\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{ren}$ de manera consistente debemos sustraer al menos el orden adiabático dos.

En esta sección, definimos el tensor de energía-momento renormalizado como en el caso de la RD usual,

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle - \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{ad2}. \quad (6.6)$$

De esta manera, podemos analizar consistentemente el comportamiento de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ cuando la RD se aproxima a la usual.

Para estudiar cómo depende $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ de la escala M_C asociada a la nueva física, consideramos un espacio-tiempo de De Sitter (6.1) y nos restringimos al caso en el que el campo es no masivo, $\xi = 0$ y la RD es de la forma

$$\tilde{\omega}_k^2 = x + 2b_{11}x^2, \quad (6.7)$$

siendo $b_{11} > 0$. Esperamos entonces recuperar la anomalía de traza usual en el límite $b_{11} \rightarrow 0$.

Luego de restar solamente el orden adiabático cero para $n = 2$, obtenemos

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} = -\frac{1}{\pi C} \int_0^{\infty} dk \left(1 - \frac{k^2}{\omega_k^2} \frac{d\omega_k^2}{dk^2} \right) \left(\omega_k^2 |\chi_k|^2 - \frac{\omega_k}{2} \right), \quad (6.8)$$

donde χ_k satisface la Ec.(4.14) con $\tilde{\mu}^2 = 0$, cuya solución exacta hemos obtenido en la Sec. 4.2 y está dada por la Ec.(4.18). Haciendo el cambio de variable $s = k\eta/\sqrt{\lambda}$ y un poco de álgebra hallamos

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} = \frac{R}{2\pi} \int_0^{\infty} ds s^3 \left\{ f(\lambda, s) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda + s^2}} \right\}, \quad (6.9)$$

donde $f(\lambda, s) \equiv k|\chi_k(s)|^2$ y $R = 12\alpha^{-2}$. Mediante evaluaciones numéricas de esta integral puede verse que en el límite $b_{11} \rightarrow 0$,

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} \rightarrow -\frac{R}{24\pi}, \quad (6.10)$$

es decir, obtenemos la anomalía de traza con el signo opuesto. A partir de esto podemos notar que si definiésemos $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle_{\text{ren}}$, para $b_{11} \neq 0$, restando solamente el orden adiabático cero, obtendríamos una discontinuidad en el límite $b_{11} \rightarrow 0$. Esta discontinuidad (como veremos debajo) desaparece si también restamos el orden dos. La traza del orden adiabático dos puede obtenerse de la Ec.(4.38) y para n cercano a 2 resulta

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} = -\frac{R}{48\pi} ((2-n)I_1 + I_2) \mu^{2-n}. \quad (6.11)$$

Puesto que I_1 es finita para $b_{11} \neq 0$, el primer término no contribuye a la traza para $n \rightarrow 2$. Por otro lado, I_2 puede evaluarse explícitamente y resulta independiente de b_{11} , a partir de lo cual obtenemos

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} = -\frac{R}{12\pi}. \quad (6.12)$$

Entonces, combinando las ecuaciones (6.6), (6.10) y (6.12) podemos ver que en el límite $b_{11} \rightarrow 0$ recuperamos la anomalía de traza usual (6.5),

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} \rightarrow \frac{R}{24\pi}. \quad (6.13)$$

En la Fig.6.1 hemos graficado la traza $T \equiv \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{\text{ren}}$ en función de la variable $\lambda = \alpha/\sqrt{2b_{11}}^2$. En esta figura vemos que a medida que λ aumenta (b_{11} disminuye) la traza se aproxima al valor anómalo.

²Es importante recordar que el límite $m \rightarrow 0$ debe tomarse al final de los cálculos.

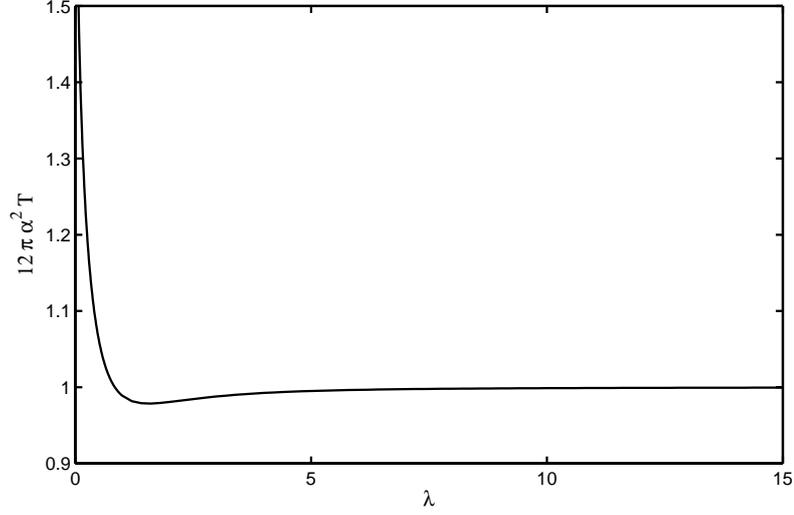


Figura 6.1: La traza T del tensor de energía-momento renormalizado (con la prescripción de la Ec.(6.6)), normalizada a su valor anómalo, como función de $\lambda = \alpha/\sqrt{2b_{11}}$. Estos resultados numéricos corresponden a un campo escalar no masivo con $\xi = 0$ y $\tilde{\omega}_k^2 = x + 2b_{11}x^2$, propagándose en un espacio-tiempo de De Sitter bidimensional.

6.2. Traza de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ en De Sitter para la teoría en 3 + 1: Dependencia con M_C

Para espacios-tiempos de 3 + 1 dimensiones, cuando la RD es la usual y $\xi = 1/6$ los términos del desarrollo adiabático de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ de orden adiabático cuatro son finitos. Sin embargo, la situación en 3 + 1 dimensiones es análoga a la descrita arriba para 1 + 1 dimensiones. En este caso, de la Ec.(4.43) tenemos que

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)} = B_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + B_3 H_{\mu\nu}^{(3)}, \quad (6.14)$$

donde B_1 y B_3 están dados en la Ec.(4.44). B_3 es finito para la RD usual en el límite $n \rightarrow 4$ y para $\xi = 1/6$, B_1 también lo es. Sin embargo, como hemos mencionado en la Sec. 4.3.2, $H_{\mu\nu}^{(3)}$ no es un tensor que pueda obtenerse de la acción gravitacional (1.32). De esta acción podemos obtener $(n-4)H_{\mu\nu}^{(3)} = H_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^{(1)} - 4H_{\mu\nu}^{(2)}$ a partir de la combinación $GB = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, que corresponde a lo que sería el invariante topológico de Gauss-Bonnet en $n = 4$. Por lo tanto, podemos escribir $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ como en la Ec.(4.45),

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)} = B_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + B_3 \frac{(n-3)}{(n-4)} \left[\frac{H_{\mu\nu}^{(1)}}{(n-1)} - H_{\mu\nu} \right]. \quad (6.15)$$

donde, como mencionamos en la sección anterior, el polo en $n = 4$ debe absorberse en las constantes desnudas gravitacionales (1.32) antes de tomar el límite $n \rightarrow 4$, por lo que el orden adiabático cuatro debe ser sustraído de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ para obtener $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ y es el que da lugar a la conocida anomalía de traza para $\xi = 1/6$.

Para poder analizar el límite en el cual $M_C \rightarrow \infty$ de manera consistente, en esta sección definimos $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ de la misma forma que para la RD usual,

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}} = \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle - \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{ad4}, \quad (6.16)$$

ya que si no restásemos el orden adiabático cuatro, obtendríamos una discontinuidad en el límite $M_C \rightarrow \infty$. Para ilustrar esto, podemos proceder de manera análoga al caso de 1 + 1 dimensiones. Consideramos un campo no masivo, con $\xi = 1/6$ y la RD de la Ec.(6.7), en un espacio-tiempo de De Sitter (6.1). De la Tabla 4.1 podemos ver que para la RD usual, la única integral divergente que aparece en el orden adiabático cuatro es I_3 (ver Ec.(4.44)). Entonces, cerca de $n = 4$, obtenemos

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)} \rightarrow \frac{1}{2880\pi^2} \left[\frac{1}{6} {}^{(1)}H_{\mu\nu} + {}^{(3)}H_{\mu\nu} \right], \quad (6.17)$$

que es el resultado conocido [49, 62]. Por lo tanto, la anomalía de traza usual es

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{ren} = -\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(4)} = -\frac{R^2}{34560\pi^2} = -\frac{1}{240\pi^2\alpha^4}. \quad (6.18)$$

Por otro lado, para $b_{11} > 0$ todas las integrales que aparecen en la definición (4.44) de B_1 y B_3 son finitas y pueden calcularse explícitamente. Calculando las mismas hallamos

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(4)} = \frac{1}{120\pi^2\alpha^4}, \quad (6.19)$$

que es -2 veces la anomalía de traza usual. Notemos que el resultado no depende de b_{11} . Restando los correspondientes órdenes adiabáticos cero y dos a la traza de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$, hallamos

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} &= \frac{\lambda}{2\pi^2\alpha^4} \int_0^{+\infty} ds s^5 \left\{ f(\lambda, s) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2(\lambda + s^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda}}{8(\lambda + s^2)^{5/2}} + \frac{5\sqrt{\lambda}}{16(\lambda + s^2)^{7/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Evaluando numéricamente esta expresión, para $b_{11} \rightarrow 0$, obtenemos

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} \rightarrow \frac{1}{240\pi^2\alpha^4}. \quad (6.21)$$

Por lo tanto, recuperamos el resultado correcto en el límite $b_{11} \rightarrow 0$, solo cuando restamos también el orden adiabático cuatro:

$$\langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{ren} = \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(0)} - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(2)} - \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle^{(4)} \rightarrow -\frac{1}{240\pi^2\alpha^4}. \quad (6.22)$$

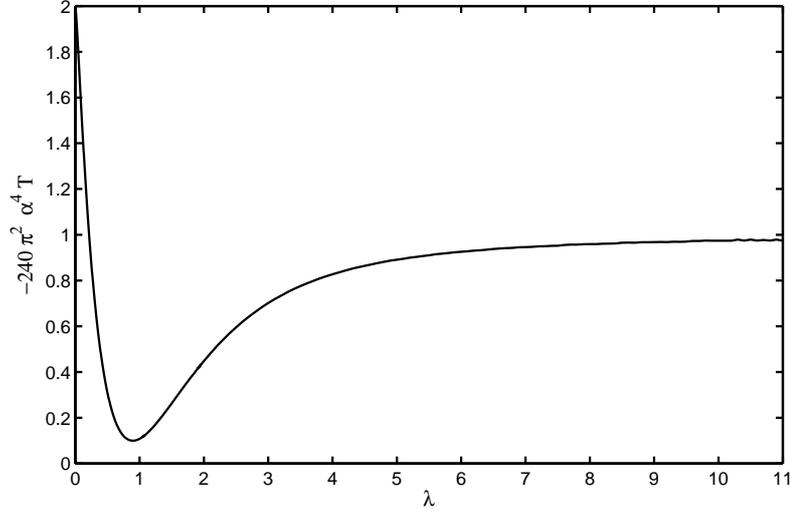


Figura 6.2: La traza del tensor de energía-momento renormalizado, normalizada a su valor anómalo, como función de $\lambda = \alpha/\sqrt{2b_{11}}$. Estos resultados numéricos corresponden a un campo no masivo, con $\xi = 1/6$ y $\tilde{\omega}_k^2 = x + 2b_{11}x^2$, que se propaga en un espacio-tiempo de De Sitter de $3 + 1$ dimensiones.

En la Fig.6.2 hemos graficado la traza $T \equiv \langle T^{\phi\mu}_{\mu} \rangle_{ren}$ como función de $\lambda = \alpha/\sqrt{2b_{11}}$. En la misma podemos ver que T tiende al valor anómalo cuando la RD se aproxima a la usual.

6.3. Soluciones autoconsistentes en De Sitter

En esta sección estudiaremos las ecuaciones semiclásicas para la métrica en un espacio-tiempo de De Sitter (6.1), teniendo en cuenta los efectos cuánticos de campos escalares libres con una RD generalizada, es decir, incluyendo la reacción de los campos cuánticos sobre la dinámica de la métrica del espacio-tiempo.

Es bien sabido que en el espacio-tiempo de De Sitter existe una familia de estados para los cuales el valor de expectación del tensor de energía-momento $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ de un campo escalar libre que satisface la RD usual es proporcional a la métrica $g_{\mu\nu}$ [98]. Uno de los miembros de dicha familia es el estado de Bunch-Davies dado en la Ec.(1.47) para $n = 4$. Los otros miembros de la familia están relacionados con el estado de Bunch-Davies mediante transformaciones de Bogoliubov,

$$\bar{u}_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^{BD} + \beta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^{BD*}, \quad (6.23)$$

con coeficientes independientes del vector de onda,

$$\alpha_{\vec{k}} = \alpha = e^{i\gamma} \cosh r, \quad (6.24a)$$

$$\beta_{\vec{k}} = \beta = e^{i\gamma+i\theta} \sinh r, \quad (6.24b)$$

los cuales satisfacen $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, siendo r , γ y θ parámetros reales. Sin embargo, sin pérdida de generalidad (ya que una fase global de $\bar{u}_{\vec{k}}$ es irrelevante), podemos elegir que α sea real ($\gamma = 0$). Por tanto, estos estados forman una familia cuyos miembros se caracterizan por dos números reales (r y θ). Los mismos son conocidos como estados invariantes de De Sitter, en el sentido que el propagador de Hadamard $G_1(x, x')$ construido a partir de ellos es invariante ante la componente del grupo de isometrías de De Sitter conectada con la identidad [99]³.

A continuación, mostramos que para una RD generalizada también existe una familia de estados caracterizada por dos números reales para los cuales $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle \propto g_{\mu\nu}$.

En el espacio-tiempo de De Sitter, los modos χ_k del campo $\chi = C^{(n-2)/4} \phi$ satisfacen

$$\frac{\partial^2 \chi_k}{\partial \eta^2} + \left(\omega_k^2(\eta) + \frac{\tilde{\mu}^2 \alpha^2}{\eta^2} \right) \chi_k = 0, \quad (6.25)$$

donde $\tilde{\mu}^2 = m^2 + n(n-1)(\xi - \xi_n)/\alpha^2$. Sustituyendo $s = k\eta/\sqrt{\lambda}$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 \chi_k}{\partial s^2} + \left(\bar{\omega}^2(s) + \frac{\tilde{\mu}^2 \alpha^2}{s^2} \right) \chi_k = 0. \quad (6.26)$$

donde $\bar{\omega}^2(s) = \omega_k^2(\eta)/k^2$ es una función de k y η solamente a través de la variable s . Denotando por $f(s)$ y $g(s)$ a las dos soluciones independientes de esta ecuación, podemos expresar convenientemente las funciones modo χ_k de la siguiente manera:

$$\chi_k(s) = \frac{A_{\vec{k}}}{\sqrt{k}} f(s) + \frac{B_{\vec{k}}}{\sqrt{k}} g(s). \quad (6.27)$$

Elegimos ahora que los coeficientes sean independientes de \vec{k} : $A_{\vec{k}} = A$ y $B_{\vec{k}} = B$. Luego, definiendo $\psi(s) \equiv \sqrt{k} \chi_k(s)$, la condición de normalización (1.42) puede escribirse como

$$\psi(s) \frac{\partial \psi^*}{\partial s}(s) - \frac{\partial \psi}{\partial s}(s) \psi^*(s) = i\sqrt{\lambda}. \quad (6.28)$$

Introduciendo estas soluciones particulares ($\chi_k(s) = \psi(s)/\sqrt{k}$) en las ecuaciones (4.25a) y (4.25b), y reescalando la variable de integración, podemos mostrar que $\rho = \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle / C$ y $p = \langle T_{11}^\phi \rangle / C$ son independientes del tiempo. Dado esto, usando que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ satisface $\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle = 0$,

³Para el caso particular de un campo no masivo con acoplamiento mínimo los propagadores de Hadamard asociados a estos estados tienen problemas en el infrarrojo [99].

lo cual en este espacio-tiempo es equivalente a $\rho' = -3\mathcal{H}(p + \rho)/2 = 0$, obtenemos $p = -\rho$. Por lo tanto, para los estados correspondientes a este tipo de funciones modos tenemos que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle \propto g_{\mu\nu}$. Es valioso notar que esta familia de estados caracterizados por dos parámetros reales existe cualquiera sea la RD.

Si elegimos el estado particular de la familia que reproduce la solución WKB para $|s| \rightarrow \infty$, obtenemos que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ (definido en la Ec.(6.16)) es finito y, como hemos mostrado en el Capítulo 2, los tres órdenes adiabáticos restados $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ad4}}$ pueden absorberse mediante redefiniciones de las constantes de la teoría de Einstein-Éter. En este caso, las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter (omitiendo el subíndice R en las constantes renormalizadas) pueden escribirse como

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi N G_{\text{cosm}} \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}, \quad (6.29)$$

donde hemos redefinido $\Lambda \rightarrow \Lambda G_{\text{cosm}}/G$, hemos despreciado los términos con las constantes α , β y γ renormalizadas, y hemos incluido la posibilidad de tener N campos escalares idénticos.

Usando que para el espacio-tiempo de De Sitter

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}, \quad (6.30a)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{4} \langle T_{\mu}^{\phi\mu} \rangle_{\text{ren}} g_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} T g_{\mu\nu}, \quad (6.30b)$$

obtenemos

$$-\frac{R}{4} + \Lambda = 2\pi N G_{\text{cosm}} T. \quad (6.31)$$

Por lo tanto, si se cumple esta condición para $R > 0$, la métrica de De Sitter es una solución autoconsistente de las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter incluso cuando incluimos la reacción de campos escalares cuánticos con una RD generalizada.

Cuando el campo es no masivo, $\xi = 1/6$ y la RD está dada por la Ec.(6.7), la ecuación para los modos puede resolverse exactamente y la solución está dada en la Ec.(4.18) (donde $s = (2b_{11})^{1/4} \alpha^{-1/2} k\eta \equiv k\eta/\sqrt{\lambda}$). Es valioso notar que cuando $b_{11} \rightarrow 0$ estos modos tienden a los modos de Bunch-Davies (1.47), por lo que definen un estado de vacío de Bunch-Davies generalizado. Para hallar la traza renormalizada T de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ restamos hasta el orden adiabático cuatro inclusive, es decir, usamos la prescripción de la Ec.(6.16). De la Ec.(6.20) tenemos una expresión integral para la traza con la sustracción del orden adiabático cero y dos, y de la Ec.(6.19) tenemos el orden adiabático cuatro. Notemos que la función $f \equiv T/R^2$ depende solamente de un parámetro libre $b_{11}R = 6/\lambda^2$. Por lo tanto, tenemos que

$$\Lambda(R) = \frac{R}{4} + 2\pi N G_{\text{cosm}} T = \frac{R}{4} + 2\pi N G_{\text{cosm}} R^2 f(b_{11}R). \quad (6.32)$$

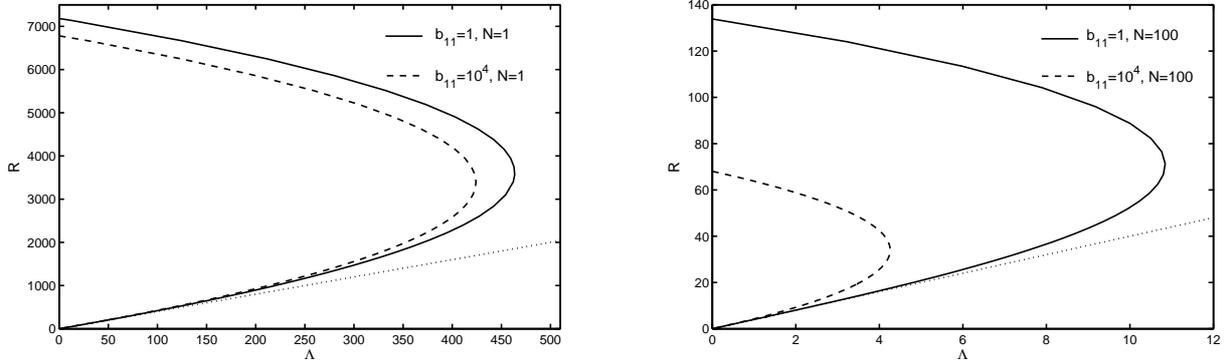


Figura 6.3: Gráficos de la relación de la Ec.(6.32) entre el escalar de la curvatura del espacio-tiempo de De Sitter R y la constante cosmológica Λ para dos valores de b_{11} (todas las cantidades están en unidades de G_{cosm}): con trazo continuo $b_{11} = G_{cosm}$ y con trazo discontinuo $b_{11} = 10^4 G_{cosm}$, con $N = 1$ (a la izquierda) y $N = 100$ (a la derecha). En cada caso, hemos graficado la relación clásica $\Lambda = R/4$ con línea punteada. Estos resultados corresponden a N campos escalares no masivos con $\xi = 1/6$ y $\tilde{\omega}_k^2 = x + 2b_{11}x^2$ en cuatro dimensiones. Notar la diferencia de escala entre las abscisas.

Evaluando $f(b_{11}R)$ numéricamente para diferentes valores de $b_{11}R$ podemos graficar la relación de la Ec.(6.32). Los resultados numéricos que presentamos en la Fig. 6.3 corresponden a las elecciones de parámetros dadas por $b_{11} = G_{cosm}$ y $10^4 G_{cosm}$ para $N = 1$ y $N = 100$. Para valores intermedios de los parámetros los gráficos están entremedio de los presentados. En la Fig. 6.3 también mostramos el gráfico de la relación clásica $\Lambda = R/4$. A partir de estos gráficos, podemos ver que para distintos valores de los parámetros los mismos son cualitativamente similares. No hay una solución autoconsistente para valores grandes de la constante cosmológica Λ . El valor de Λ por encima del cual ya no hay una solución autoconsistente aumenta a medida que b_{11} disminuye. Para valores más chicos de Λ hay dos soluciones autoconsistentes: una es cercana a la solución clásica $\Lambda = R/4$, mientras que la otra tiene una curvatura R positiva y mayor que 4Λ y existe incluso para valores de Λ negativos. Esta última solución, en general, está fuera del régimen en el cual esperamos que las ecuaciones semiclásicas sean válidas. Estos resultados son similares a los obtenidos en la Ref.[98]⁴ para la RD usual.

⁴Para un análisis similar donde también se incluyen campos con espín ver Ref.[100].

6.3.1. Inflación: un estado inicial efectivo?

En los modelos inflacionarios usualmente se supone que las fluctuaciones cuánticas que dan lugar al espectro de potencias primordial que caracteriza las propiedades estadísticas de las “pequeñas” inhomogeneidades iniciales, se originan en el estado de vacío de Bunch-Davies correspondiente a un espacio-tiempo de De Sitter. El vacío de Bunch-Davies es considerado ser el estado natural por muchos motivos [70, 101, 102]. Por un lado, el propagador de Hadamard construido con el mismo coincide con el propagador de Schwinger-De Witt hasta el orden adiabático cuatro [70, 101]. Por otro lado, para este estado $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle \propto g_{\mu\nu}$ (ver Sec. 6.4 de la Ref.[49]). Además, si el estado es diferente al de Bunch-Davies pero el propagador de Hadamard coincide con el desarrollo de Schwinger-De Witt hasta el orden adiabático cuatro, debido a la expansión exponencial, para tiempos largos $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ se aproxima al correspondiente al estado de Bunch-Davies [102].

En la literatura se ha sugerido que los posibles efectos trans-planckianos pueden tenerse en cuenta en el marco de la teoría semiclásica usual (donde los modos de los campos satisfacen la RD usual) si se consideran estados “iniciales” suficientemente generales para los modos del campo inflatón cuántico [31, 34, 46, 47]. El tiempo inicial en el cual se imponen las condiciones iniciales para las funciones modos del campo podría ser diferente para cada modo; por ejemplo, definiéndolo como el momento en el que el modo deja de estar en el régimen trans-planckiano [26, 34, 35, 36].

En particular, se ha argumentado que si la RD de los modos del inflatón se aparta de la RD usual para vectores de onda $k_f(\eta) = |\vec{k}|/\sqrt{C(\eta)} > M_C$, para los modos que al comienzo de infación η_i satisfacen $k_f(\eta_i) > M_C$ y en los tiempos $\eta_{f,k}$ dejan de estar en el régimen trans-planckiano $k_f(\eta_{f,k}) < M_C$, los mismos efectos de la evolución entre η_i y $\eta_{f,k}$ (con la RD modificada) pueden ser modelados modificando apropiadamente el estado cuántico en el tiempo $\eta_{f,k}$ [8, 28, 34, 35, 36]. Es decir, considerando estados “iniciales” efectivos para los modos con $k_f(\eta_{f,k}) < M_C$. La evolución de los modos para tiempos posteriores a $\eta_{f,k}$ es descrita por la teoría semiclásica usual (con la RD usual). Se pueden encontrar discusiones interesantes acerca de este abordaje en [70, 101]. En este contexto, hay un debate acerca de si pueden obtenerse correcciones trans-planckianas al espectro de potencias primordial de manera consistente, sin modificar significativamente la expansión inflacionaria, eligiendo un estado inicial efectivo para los modos del campo diferente al estado de vacío usual de Bunch-Davies [26, 34, 35, 103]. Por un lado, se ha notado que la elección del tiempo en el cual se imponen las condiciones iniciales es un problema no trivial. En efecto, en la Ref.[12] los autores señalaron que una elección inadecuada del mismo podría dar lugar a oscilaciones artificiales en el espectro de potencias. Por otro lado, con esta descripción de los efectos

trans-planckianos podría resultar difícil cuantificar cómo es afectada la métrica de fondo [28, 29, 31, 33, 36]. Para analizar esto último, consideremos un estado inicial arbitrario en el marco de la teoría semiclásica de Einstein. Si adoptamos la prescripción de renormalización usual, las divergencias que aparecen en $\langle \bar{0} | T_{\mu\nu} | \bar{0} \rangle$ pueden absorberse mediante redefiniciones de las constantes gravitacionales desnudas que aparecen en la acción de la Ec. (1.32), siempre que el estado $|\bar{0}\rangle$ coincida con el estado definido por los modos del desarrollo adiabático hasta el orden adiabático cuatro (para más detalles ver por ejemplo [69, 70]). Debido a esto, como se ha mencionado hacia el final del Capítulo 1, el coeficiente β_k de la transformación de Bogoliubov (6.23) que relaciona las funciones modos \bar{u}_k (correspondientes al estado $|\bar{0}\rangle$) con las de Bunch-Davies u_k^{BD} , debe tender a cero más rápido que k^{-2} para $k \rightarrow \infty$. Los estados mencionados en la Sec. 6.3, los cuales dan un $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ proporcional a la métrica, están caracterizados por coeficientes de Bogoliubov constantes. Por lo tanto, solo aquél estado con $\beta = 0$, el estado de Bunch-Davies, satisface la condición requerida para dar lugar a un $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren}}$ finito [70, 101].

Como hemos señalado en la Sec. 6.3, para cada RD generalizada de la forma dada en la Ec.(6.2) existe una familia de estados para los cuales $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle \propto g_{\mu\nu}$ (al igual que para la RD usual). Por lo tanto, siempre que ω_k sea bien comportada, $\omega_k > 0$ y $\omega_k \rightarrow +\infty$ para $k_f \rightarrow +\infty$, podemos elegir el miembro de la familia cuyos modos tienden a los modos adiabáticos de frecuencia positiva para $k_f \rightarrow \infty$. De esta manera, podemos obtener un estado de Bunch-Davies generalizado para el cual $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}} \propto g_{\mu\nu}$. Por consiguiente, hay estados para los cuales el valor de expectación del tensor de un campo escalar con RD generalizada no puede reproducirse modificando el estado inicial de un campo con la RD usual, a menos que se implemente otro esquema de renormalización [46, 47, 48]. Dicho de otro modo, mientras que podemos obtener distintas soluciones autoconsistentes para la métrica de De Sitter cambiando la RD del campo, en la teoría usual dichas soluciones no existen para estados iniciales diferentes del de Bunch-Davies.

6.3.2. Ecuación de estado y la reacción de un campo cuántico con RD modificada sobre la evolución inflacionaria

Como se ha mencionado al final del Capítulo 2, aún no hay un consenso claro acerca de si la reacción de un campo cuántico con RD modificada afecta significativamente o no la evolución inflacionaria. En particular, en [32] los autores consideraron un campo escalar cuántico descrito por el modelo de la Sec. 2.3 con acoplamiento mínimo ($\xi = 0$) y una RD de la forma

$$\omega_f^2 = k_f^2 - 2|b_{11}|k_f^4 + 2|b_{12}|k_f^6. \quad (6.33)$$

En dicho trabajo se evaluó, en forma aproximada, la densidad de energía ρ ,

$$\rho = \langle w^\mu w^\mu T_{\mu\nu}^\phi \rangle, \quad (6.34)$$

de las fluctuaciones cuánticas del campo escalar, con el fin de analizar si ésta es o no comparable con la densidad de energía del fondo. Los autores concluyeron que la densidad de energía ρ podría ser incluso mayor que la del fondo si los coeficientes b_{11} y b_{12} son tales que la RD tiene un mínimo en algún vector de onda físico $k_2 > H_{inf}$, para el cual $\omega_f(k_2^2) < H_{inf}$, donde H_{inf} es la escala de Hubble durante inflación ($H_{inf} = a^{-1} \frac{da}{dt} \sim cte$, con $a(t) = \sqrt{C(t)}$). Para los modos con frecuencias $\omega_f < H_{inf}$, no es válido usar una aproximación WKB (4.4) para la solución exacta de los modos y puede tener lugar el efecto de producción de partículas (definidas con respecto al vacío adiabático).

Más específicamente, en [32] los autores eligieron los coeficientes b_{11} y b_{12} de manera que $\omega_f(k_f^2)$ tenga un máximo local en k_1 con $\omega_f(k_1^2) > H_{inf}$ y un mínimo local en $k_2 > k_1$ con $\omega_f(k_2^2) < H_{inf}$. De esta manera, hay una región intermedia entre dos valores de k_f , k_a y $k_b > k_a$, dados por la condición $\omega_f(k_a^2) = \omega_f(k_b^2) = H_{inf}$ en la cual la aproximación WKB para los modos no es válida. Para definir la densidad de energía de las partículas creadas, se sustrajo de ρ la densidad de energía del punto cero, es decir, el orden adiabático cero de ρ . Se consideró como solución aproximada el orden adiabático cero del desarrollo WKB (4.4) para valores de $k_f > k_b$ (es decir, la aproximación que se obtiene reemplazando a W_k en la Ec.(4.4) por $a(t)\omega_f(k_f^2)$). Se utilizaron también soluciones aproximadas para cada una de las otras regiones de valores de k_f y se impusieron condiciones de empalme para las mismas. De esta manera los autores estimaron la densidad de energía de los modos cuyos vectores de onda están en la región $H_{inf} < k_f < k_a$.

Por otro lado, en [33] los autores utilizaron el mismo modelo y la misma RD que en [32] y analizaron la ecuación de estado para las fluctuaciones cuánticas del campo escalar. Mediante el mismo procedimiento de la Ref. [32], que consiste en empalmar las soluciones aproximadas para cada región, estimaron la ecuación de estado obtenida de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$, es decir, la relación entre la densidad ρ y la presión p ,

$$p = \frac{1}{3} \perp^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle. \quad (6.35)$$

Para ello, se consideró la contribución a ρ y a p correspondiente a los modos con $H_{inf} < k_f < k_a$ y, separadamente, la correspondiente a aquellos con $k_a < k_f < k_b$. Al igual que en [32], se sustrajo de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ el orden adiabático cero del mismo. A partir de ello, señalaron que aunque la densidad de energía de dichas fluctuaciones podría ser comparable con la del fondo, la ecuación de estado podría ser similar a la del fondo, $p \sim -\rho$, por lo cual el

único efecto sobre la evolución de la métrica podría ser equivalente a una renormalización de la densidad de energía y presión que dan lugar a inflación. Si bien las estimaciones de la Ref. [33] indican que $p \sim -\rho$ para los modos con $k_f < H_{inf}$, en el mismo trabajo, los autores señalaron la existencia de un apartamiento $p + \rho \simeq 4\sqrt{|b_{11}|}H_{inf}$ (si $b_{11} \simeq -M_C^{-2}$, $p + \rho \simeq 4H_{inf}/M_C$), el cual podría tener consecuencias observacionales para la evolución inflacionaria si la cantidad de partículas creadas (definidas con respecto al vacío de orden adiabático cero) es tal que $|\beta_k|^2 > H_{inf}/m_{pl}$, siendo m_{pl} la masa de Planck y β_k el coeficiente de Bogoliuvov correspondiente (el cual se supuso independiente de k para cierto rango de valores de $k_f > H_{inf}$).

En vistas de los resultados de esta sección, cualquiera sea la RD, siempre que $\omega_k > 0$ y $\omega_k \rightarrow +\infty$ para $k \rightarrow +\infty$, si consideramos un estado de Bunch-Davies generalizado (el cual se corresponde con el vacío adiabático para valores grandes de k_f) tenemos que $p_{ren} = -\rho_{ren}$, por lo que pueden existir soluciones autoconsistentes de las ecuaciones semiclásicas para la métrica de De Sitter. Por lo tanto, podemos concluir que el apartamiento encontrado en [33] puede deberse básicamente a dos motivos: a que sólo se sustrajo el orden adiabático cero de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ o a las aproximaciones realizadas, tales como la introducción de frecuencias de corte y el empalme de las distintas soluciones aproximadas.

Para la RD usada en [32, 33], los ordenes adiabáticos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ potencialmente divergentes son el orden cero y el orden dos. El orden adiabático cuatro es finito. Cada orden adiabático satisface formalmente la misma ecuación de estado que $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{ren}$, ya que formalmente $\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2j)} = 0$ y ρ y p son independientes del tiempo. Además, como mostramos en el Apéndice B, para $\xi = 0$ el orden adiabático dos también es finito. Consecuentemente, la ecuación de estado no se modifica si los órdenes adiabáticos dos y cuatro no se sustraen (como se hizo en [32, 33]). Por lo tanto, la diferencia $p + \rho \neq 0$ encontrada en [33] es debida a las aproximaciones.

Finalmente, cabe mencionar que en la Ref. [37] los autores han estudiado las correcciones al espectro de potencias correspondiente a las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar no masivo y con $\xi = 0$ durante inflación, debidas a que los modos del campo satisfacen una RD generalizada, similar a la que estamos considerando (6.2). Consideraron las relaciones de dispersión para las cuales $\omega_k \rightarrow +\infty$ para $k \rightarrow +\infty$ y usaron el estado de vacío que se aproxima a los modos adiabáticos para $k_f \rightarrow +\infty$. Dicho estudio lo hicieron analíticamente en el caso en que el único coeficiente no nulo es b_{11} y numéricamente para relaciones de dispersión más generales. Entre otras cosas, concluyeron que si $H_{inf} \ll M_C$ en general las correcciones a dicho espectro de potencias provienen de b_{11} (en el caso en que sea no nulo) o del primer coeficiente $b_{qp} \neq 0$.

Capítulo 7

Conclusiones

Esta tesis tuvo como objetivo fundamental extender los métodos de renormalización conocidos al caso de campos cuánticos con relaciones de dispersión generalizadas en fondos curvos. Como se desprende de la Introducción, la motivación principal de la misma fue avanzar en la comprensión de un aspecto del problema trans-planckiano: la reacción de campos cuánticos con relaciones de dispersión generalizadas sobre la geometría del espacio-tiempo.

Para introducir consistentemente campos cuánticos con relaciones de dispersión generalizadas en el contexto de una teoría semiclásica para la gravedad, hemos trabajado en el marco de la teoría de Einstein-Éter. En particular, hemos considerado el modelo descrito en el Capítulo 2 de un campo escalar cuántico cuyos modos satisfacen una RD generalizada debido a que el mismo está acoplado con el Éter.

Para la solución de la teoría de Einstein-Éter con métrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$ y campo Éter $u_\mu = \delta_\mu^0$, las relaciones de dispersión generalizadas son de la forma

$$\omega^2(|\vec{k}|^2) = m^2 + |\vec{k}|^2 + 2 \sum_{q,p \leq q} b_{qp} (-1)^{q+p} |\vec{k}|^{2(q+p)}, \quad (7.1)$$

siendo $1 \leq q \leq q_M$ (con q_M un número natural), $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$ y b_{qp} coeficientes que en principio son arbitrarios.

Bajo la aproximación de campos débiles, en el Capítulo 3 hemos considerado perturbaciones genéricas de la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y del campo Éter $u_\mu = \delta_\mu^0 + v_\mu$. Con el fin de investigar en qué órdenes del desarrollo adiabático de $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ aparecen divergencias, hemos obtenido expresiones integrales para los términos potencialmente divergentes que contribuyen a estos desarrollos. Hemos notado que la aparición de divergencias en los distintos órdenes adiabáticos depende no sólo de la dimensión del espacio-tiempo sino también de la RD. Es más, depende a su vez de si las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ y v_μ son o no homogéneas

espacialmente. En cualquier caso, para un espacio-tiempo de n dimensiones y una RD para la cual la frecuencia ω_k se comporta como k^s para valores grandes de k , mediante un conteo de potencias, hemos encontrado cuáles son los órdenes adiabáticos potencialmente divergentes en los desarrollos de $\langle \phi^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$.

Denotando con el superíndice $2i$ ($2j$) al término de orden adiabático $2i$ ($2j$) que contribuye al desarrollo adiabático de $\langle \phi^2 \rangle$ ($\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$), hay un orden adiabático máximo, $2i_{max}$ ($2j_{max}$) tal que si $i > i_{max}$ ($j > j_{max}$) la contribución $\langle \phi^2 \rangle^{(2i)}$ ($\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2j)}$) es finita. Conociendo los valores máximos $2i_{max}$ y $2j_{max}$, podemos construir un $\langle \phi^2 \rangle_{ren}$ y un $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ finitos, mediante la siguiente sustracción:

$$\langle \phi^2 \rangle_{ren} = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi^2 \rangle^{(0)} \dots - \langle \phi^2 \rangle^{(2i_{max})}, \quad (7.2a)$$

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \langle T_{\mu\nu} \rangle - \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(0)} \dots - \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(2j_{max})}. \quad (7.2b)$$

En el Capítulo 3 hemos obtenido los siguientes resultados:

- Para perturbaciones homogéneas espacialmente ($h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t)$ y $v_\mu = v_\mu(t)$),

$$2i_{max}^h = 2 \operatorname{int} \left(\frac{n-1}{2s} - \frac{1}{2} \right), \quad (7.3a)$$

$$2j_{max}^h = 2 \operatorname{int} \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2s} \right). \quad (7.3b)$$

- Para perturbaciones generales ($h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ y $v_\mu = v_\mu(\vec{x}, t)$),

$$2i_{max}^g = 2 \operatorname{int} \left(\frac{n-1-s}{2} \right), \quad (7.4a)$$

$$2j_{max}^g = 2 \operatorname{int} \left(\frac{n-1+s}{2} \right). \quad (7.4b)$$

En ambos casos recuperamos el resultado conocido para la RD usual (1.22) especializando estos en $s = 1$.

A partir de estos resultados es importante notar la diferencia entre el caso en que las perturbaciones son homogéneas espacialmente y el caso de perturbaciones más generales. Los valores obtenidos para perturbaciones homogéneas espacialmente son generalmente menores que los obtenidos para el caso general. Esta diferencia es más notoria para $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$. Para métricas homogéneas espacialmente $2j_{max}^h$ disminuye con s ; por ejemplo, para $n = 4$ el orden adiabático cuatro contiene divergencias solo cuando la RD es la usual, para $s > 1$ el orden adiabático cuatro y los órdenes superiores son finitos y para $s > 3$ sólo el orden adiabático cero es divergente. Por el contrario, para el caso general $2j_{max}^g$ aumenta con s ; por ejemplo, para $n = 4$ los órdenes adiabáticos mayores que cuatro son finitos solo si $s < 3$

y si $s \geq 3$ esperamos que el orden adiabático seis también contenga divergencias. Este último resultado da lugar a un problema técnico, ya que el cálculo de órdenes adiabáticos mayores a cuatro y de los contratérminos correspondientes requeridos para renormalizar las ecuaciones semiclásicas para la métrica, es significativamente más complicado.

En el caso de $\langle \phi^2 \rangle$, $2i_{max}^g$ también es generalmente mayor que $2i_{max}^h$, sin embargo, ambos disminuyen con s e indican que para s suficientemente grande $\langle \phi^2 \rangle$ es finito. En particular, en la Sec. 3.2.1, hemos considerado una RD particular y perturbaciones de la métrica y del campo Éter inhomogéneas espacialmente, en cinco dimensiones. A partir de este ejemplo, hemos mostrado que aparece una divergencia que involucra al campo vectorial en el orden adiabático dos de $\langle \phi^2 \rangle$ (Ec.(3.35)). Esta divergencia no aparece para métricas homogéneas espacialmente.

En general, dada la RD y la dimensión del espacio-tiempo, podemos definir $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ para métricas genéricas como en la Ec.(7.2b) con $2j_{max} = 2j_{max}^g$. Sin embargo, para métricas homogéneas podemos evitar calcular los órdenes adiabáticos mayores que los requeridos para la RD usual, ya que, por un lado, tales órdenes adiabáticos son finitos cualquiera sea la RD y, por el otro, desde la perspectiva de las teorías efectivas esperamos que no sean relevantes fenomenológicamente.

Por estos motivos y motivados por el problema trans-planckiano en cosmología, en los capítulos siguientes nos hemos restringido a métricas homogéneas espacialmente. En el Capítulo 4 hemos extendido el método de sustracción adiabática basado en un desarrollo WKB para los modos del campo escalar, al caso de relaciones de dispersión generalizadas y espacios-tiempos de FRW espacialmente planos de n dimensiones. En este caso, la expresión (7.1) para las relaciones de dispersión generalizadas es válida para $\omega_f^2(k_f^2)$, donde $\omega_f^2 = \omega^2/C(\eta)$ y $k_f^2 = |\vec{k}_f|^2 = |\vec{k}|^2/C(\eta)$, siendo ω la frecuencia comoviente y \vec{k} el vector de onda comoviente. Usando este método hemos reobtenido los resultados de la Ec.(7.3) hallados bajo la aproximación de campos débiles.

A modo de entrenamiento en la Sec. 4.2 hemos considerado el caso simple de una RD con $s = 2$ para la cual solamente el orden adiabático cero de $\langle \phi^2 \rangle$ es divergente. En este caso, para un espacio-tiempo de De Sitter de cuatro dimensiones hemos resuelto en forma exacta la ecuación de movimiento para los modos del campo escalar cuando éste es no masivo y está acoplado conformemente. Seleccionando la solución particular que tiende a los modos adiabáticos para valores grandes del vector de onda, hemos definido un estado de vacío de Bunch-Davies generalizado. Para este estado hemos mostrado explícitamente que las divergencias que aparecen en $\langle \phi^2 \rangle$ se cancelan al restar el orden adiabático cero, dando un $\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}} = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi^2 \rangle^{(0)}$ finito. Usando regularización dimensional hemos evaluado

$\langle \phi^2 \rangle^{(0)}$, el cual resulta finito para la RD considerada.

En la Sec. 4.3 hemos calculado y hemos regularizado los tres primeros órdenes adiabáticos no nulos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$, los cuales para $n = 4$ son requeridos para construir un $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ que sea finito cualquiera sea la RD (incluyendo la RD usual). Definiendo $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ como en el caso de la RD usual para $n = 4$, hemos llevado a cabo la renormalización de las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter, calculando los contratérminos requeridos para absorber hasta el orden adiabático cuatro. En el límite en el que la RD tiende a la usual hemos recuperado las expresiones conocidas de los contratérminos. Usando regularización dimensional, en el Apéndice B, hemos evaluado explícitamente los órdenes adiabáticos cero y dos de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ para dos relaciones de dispersión particulares.

En general, podemos esperar que además de los contratérminos usuales construidos con la métrica y sus derivadas (es decir, las contribuciones al lagrangiano proporcionales a Λ , R , R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$) nuevos contratérminos construidos con la métrica, el campo Éter y sus derivadas (por ejemplo, proporcionales a $(\nabla_\mu u^\mu)^2$, $\nabla_\mu u_\nu \nabla^\mu u^\nu$, ..., $R(\nabla_\mu u^\mu)^2$, $R^{\mu\nu}(\nabla_\mu u_\nu)$, etc.) también sean requeridos para remover hasta el orden adiabático cuatro de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$. No obstante, trabajando explícitamente con métricas de FRW espacialmente planas no es posible distinguir la aparición de nuevos contratérminos. Esto se debe a las simetrías del espacio-tiempo de fondo; por ejemplo, para este fondo el tensor de energía-momento más general de u^μ con hasta dos derivadas resulta proporcional al tensor de Einstein. Dado esto, para poder distinguir la aparición de nuevos contratérminos en el Capítulo 5 hemos considerado el caso de un campo autointeractuante y espacios tiempos anisotrópicos con métricas de Bianchi I.

En el Capítulo 5 hemos extendido el método de sustracción adiabática del Capítulo 4 al caso en el que el campo es autointeractuante y se propaga en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con métricas de Bianchi I. Para el campo autointeractuante (con potencial $\lambda\phi^4$) hemos analizado la renormalización de la ecuación semiclásica para el valor de expectación del campo ϕ_0 en la aproximación de un lazo. En esta ecuación, las divergencias aparecen en $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$, donde $\hat{\phi}$ describe las fluctuaciones cuánticas alrededor de ϕ_0 . Definiendo $\langle \hat{\phi}^2 \rangle_{\text{ren}}$ restando los mismos órdenes adiabáticos que para el caso de la RD usual, hemos calculado los contratérminos requeridos para absorber hasta el orden adiabático dos. En este caso, hemos notado que incluso para métricas de FRW espacialmente planas aparecen nuevos contratérminos. Los mismos corresponden a acoplamientos del campo escalar con el Éter de la forma $\xi_2(\nabla_\mu u^\mu)^2\phi^2$, $\xi_3\nabla_\mu u_\nu \nabla^\nu u^\mu\phi^2$, los cuales generalizan el acoplamiento usual con el escalar de Ricci ($\xi R\phi^2$). Al igual que con el acoplamiento usual, los nuevos contratérminos aparecen incluso si a nivel clásico están ausentes. Dependiendo de la RD, el orden adiabáti-

co dos puede ser finito y, en ese caso, el efecto de orden adiabático dos obtenido por la presencia de campos cuánticos con tal RD resulta equivalente a una redefinición finita de las constantes ξ_2 y ξ_3 .

Para analizar la renormalización del valor de expectación del tensor de energía-momento del campo escalar, nos hemos restringido al caso del campo libre. Hemos calculado hasta el orden adiabático dos del mismo y hemos encontrado los contratérminos correspondientes para absorberlo en las ecuaciones semiclásicas de Einstein-Éter. Hemos mostrado que en este caso además de los contratérminos usuales (proporcionales a Λ y R) aparecen otros correspondientes a términos del lagrangiano del campo Éter con dos derivadas, como ser $(\nabla_\mu u^\mu)^2$. Dependiendo de la RD, el orden adiabático dos puede ser finito y este cálculo muestra que los efectos de orden adiabático dos generados por la presencia de un campo cuántico con tal RD son equivalentes a una redefinición finita de las constantes correspondientes a los términos con dos derivadas del lagrangiano del Éter. Como hemos resumido en el Capítulo 2, los términos con dos derivadas del lagrangiano del Éter están restringidos por las observaciones. Dado esto, los mismos deben elegirse adecuadamente para que la teoría pueda ser compatible con las observaciones.

Por otro lado, hemos señalado que es importante el orden en el cual se toman los límites en el que la RD tiende a la usual y $n \rightarrow 4$. Para ilustrar esto, hemos mostrado que si consideramos una integral que para una RD generalizada es finita para $n \rightarrow 4$ mientras que para la RD usual es formalmente nula y la calculamos explícitamente para $n = 4$, en el límite en el que la RD tiende a la usual, la misma puede resultar no nula e incluso divergente.

En el Capítulo 6 hemos aplicado los resultados del Capítulo 4 en el caso particular de métricas de De Sitter. Para campos escalares acoplados conformemente con relaciones de dispersión de la forma $\omega_k^2 = k^2 + 2b_{11}k^4/C(\eta)$ y para el estado de Bunch-Davies generalizado (obtenido en la Sec. 4.2), hemos analizado la traza del tensor de energía-momento renormalizado como función de b_{11} . Suponiendo que el coeficiente b_{11} está determinado por una única escala de masa M_C , asociada a la nueva física, $b_{11} \sim M_C^{-2}$. Este análisis lo hemos hecho tanto para un espacio-tiempo de 1 + 1 dimensiones como para uno de 3 + 1 dimensiones. En ambos casos hemos definido $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ restando los mismos órdenes adiabáticos que son requeridos en el caso de la RD usual. De esta manera, hemos podido analizar consistentemente el límite en el cual la RD se aproxima a la usual (o el límite en el cual la escala de masa asociada a la nueva física es muy grande) y recuperar la anomalía de traza conocida.

Con el propósito de avanzar en la comprensión de la reacción de campos cuánticos con relaciones de dispersión generalizadas sobre la geometría del espacio-tiempo, hemos

considerado las ecuaciones semiclásicas para la métrica en un espacio-tiempo de De Sitter de cuatro dimensiones, teniendo en cuenta los efectos cuánticos de campos escalares libres con una RD generalizada.

En primer lugar, hemos mostrado que cualquiera sea la RD, existe una familia de estados caracterizados por dos números reales para los cuales $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle \propto g_{\mu\nu}$. Dado esto, pueden existir soluciones autoconsistentes de las ecuaciones semiclásicas para la métrica de De Sitter incluso cuando incluimos la reacción de campos escalares cuánticos con una RD generalizada. La existencia de soluciones autoconsistentes para el caso de la RD usual es bien conocida [98]. Sin embargo, también es bien sabido que de todos los miembros de la familia sólo aquel cuyas funciones modos asociadas se aproximan a los modos adiabáticos (hasta el orden adiabático cuatro) para vectores de onda grandes, da lugar a un $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ finito [69, 70]. Para una RD generalizada tal que ω_k es bien comportada, es decir $\omega_k > 0$ y $\omega_k \rightarrow +\infty$ para $k \rightarrow +\infty$, podemos elegir el miembro de la familia cuyos modos se aproximan a los modos adiabáticos para $k \rightarrow \infty$. De esta manera, podemos obtener un estado de Bunch-Davies generalizado para el cual $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}} \propto g_{\mu\nu}$. A partir de esto, hemos señalado que modificando la RD del campo podemos obtener distintas soluciones autoconsistentes, las cuales no pueden obtenerse en la teoría usual modificando el estado del campo escalar.

Por otro lado, hemos señalado que la ecuación de estado obtenida a partir de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle_{\text{ren}}$ en el espacio-tiempo de De Sitter es exactamente $\rho_{\text{ren}} = -p_{\text{ren}}$ para estados de Bunch-Davies generalizados. Con este resultado, hemos discutido sobre el análisis realizado en [32, 33], en el contexto de los modelos inflacionarios, acerca de la reacción de un campo escalar cuántico con RD modificada sobre la métrica del espacio-tiempo de fondo.

Finalmente, hemos considerado nuevamente campos escalares acoplados conformemente con relaciones de dispersión de la forma $\omega_k^2 = k^2 + 2b_{11}k^4/C(\eta)$ y hemos estudiado gráficamente las soluciones autoconsistentes para distintos valores de b_{11} y una cantidad N de campos escalares idénticos. Mediante evaluaciones numéricas hemos mostrado que dados los valores de b_{11} y N , no hay una solución autoconsistente para valores grandes de la constante cosmológica Λ . Para valores más chicos de Λ hay dos soluciones autoconsistentes: una es cercana a la solución clásica $\Lambda = R/4$, mientras que la otra tiene una curvatura R positiva y mayor que 4Λ y existe incluso para valores de Λ negativos. Esta última solución, en general, está fuera del régimen en el cual esperamos que las ecuaciones semiclásicas sean válidas.

En lo que respecta a posibles extensiones y aplicaciones de los resultados obtenidos en esta tesis, sería interesante describir el proceso de renormalización para métricas completamente arbitrarias. En principio, esto podría realizarse generalizando el desarrollo de

Schwinger-De Witt para propagadores correspondientes a campos con relaciones de dispersión modificadas. Esta sería una extensión interesante, pero extremadamente complicada, ya que involucraría resolver la ecuación de Klein-Gordon modificada por las derivadas de orden superior, utilizando coordenadas normales de Riemann [94, 95]. Por otra parte, sería interesante analizar el proceso de renormalización en el contexto de la teoría de Hořava ya que, como hemos mencionado al final de Capítulo 2, los propagadores en esta teoría contienen potencias del impulso más grandes que la correspondiente a la teoría usual.

Apéndice A

Regularización de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ en Friedman-Robertson-Walker

En este apéndice derivaremos la Ec.(4.43) para $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(4)}$ regularizado, comenzando con la expresión no regularizada del mismo.

A partir de las ecuaciones (4.27a) y (4.27b), con el uso del desarrollo WKB de W_k , los órdenes adiabáticos cuatro de $\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle$ y $\langle T_{11}^\phi \rangle$ pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(4)} &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4C(2\pi)^{(n-1)}} \int_0^{+\infty} \frac{dx x^{(n-3)/2}}{8\tilde{\omega}_k^3} \left\{ [{}^{(2)}W_k^2]^2 - {}^{(2)}W_k^2 \mathcal{H} \left[\frac{f}{2} + 2(n-1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\xi - \xi_n) \right] - {}^{(2)}W_k^2 \mathcal{H}^2 \left[\frac{5}{8} f^2 + (n-1)(\xi - \xi_n) \left(3f - \frac{(n-2)}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.1a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{11}^\phi \rangle^{(4)} &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4C(2\pi)^{(n-1)}} \int_0^{+\infty} \frac{dx x^{(n-3)/2}}{8\tilde{\omega}_k^3 (n-1)} \left\{ {}^{(2)}W_k^2 [f + 4(n-1)(\xi - \xi_n)] \right. \\ &\quad \left. - [{}^{(2)}W_k^2]^2 (2n-5-3f) + {}^{(2)}W_k^2 \mathcal{H}' \left[6(\xi - \xi_n)(n-1)f + \frac{(n-2)}{2} f + f^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + {}^{(2)}W_k^2 \mathcal{H} \left[2(n-1)(\xi - \xi_n)(6f - (n-1)) - \frac{f}{2} + \frac{5}{2} f^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + {}^{(2)}W_k^2 \mathcal{H}^2 \left[(\xi - \xi_n)(n-1) \left(\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 9f^2 - 6f - 3(n-1)f \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} f^3 + \frac{(n-7)}{8} f^2 - f\dot{f} - \frac{(n-2)}{2} \dot{f} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.1b)$$

donde la función $f = f(x)$ está definida en la Ec.(4.9) y hemos usado la Ec.(4.10) para

escribir ${}^{(4)}W_k^2$ en términos de ${}^{(2)}W_k^2$ y sus derivadas. Usando además que

$$\begin{aligned} {}^{(2)}W_k^{2'} &= \frac{\mathcal{H}\mathcal{H}'}{8}[f^2 - 6\dot{f} + 4(n-2)(n-1)(\xi - \xi_n)] \\ &\quad + \frac{\mathcal{H}''}{4}[4(\xi - \xi_n)(n-1) + f] + \frac{\mathcal{H}^3}{8}[2\ddot{f} - f\dot{f}], \end{aligned} \quad (1.2a)$$

$$\begin{aligned} {}^{(2)}W_k^{2''} &= \frac{\mathcal{H}'^2}{8}[f^2 - 6\dot{f} + 4(n-2)(n-1)(\xi - \xi_n)] \\ &\quad + \frac{\mathcal{H}\mathcal{H}''}{8}[f^2 - 8\dot{f} + 4(n-2)(n-1)(\xi - \xi_n)] + \frac{\mathcal{H}^4}{8}[f\ddot{f} + f\dot{f} - 2\ddot{f}] \\ &\quad + \frac{\mathcal{H}^2\mathcal{H}'}{8}[12\ddot{f} - 5f\dot{f}] + \frac{\mathcal{H}'''}{4}[4(\xi - \xi_n)(n-1) + f], \end{aligned} \quad (1.2b)$$

podemos escribir $\langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(4)}$ y $\langle T_{11}^\phi \rangle^{(4)}$ en la forma dada en la Ec.(4.39), donde los coeficientes α_i y β_i pueden expresarse como una combinación lineal de integrales de la forma

$$J_{mnl} \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f^m \dot{f}^n \ddot{f}^l \ddot{f}^s. \quad (1.3)$$

siendo m, n, l, s números enteros. Por ejemplo, el coeficiente α_2 considerado en el cuerpo de la tesis (Ec.(4.40)) está dado por

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4}(n-1)^2(\xi - \xi_n)^2 I_3 - \frac{1}{8}(n-1)(\xi - \xi_n) J_{1000} - \frac{1}{64} J_{2000}, \quad (1.4)$$

donde $I_3 = J_{0000}$ está definida en la Tabla 4.1 y de la Ec.(4.41) identificamos

$$J_{1000} = \frac{(n-4)}{3} I_3, \quad (1.5a)$$

$$J_{2000} = \frac{1}{15}(n-4)(n-6)I_3 + \frac{2}{5}I_4. \quad (1.5b)$$

Es directo mostrar que

$$\alpha_4 = -\frac{1}{2}\alpha_2. \quad (1.6)$$

Encontrar una relación entre α_1 y α_2 requiere un poco más de trabajo. El coeficiente α_1 está dado por

$$\alpha_1 = -\frac{3}{8}(n-1)^2(\xi - \xi_n)^2 J_{1000} - \frac{1}{16}(n-1)(\xi - \xi_n)[3J_{2000} - 2J_{0100}] - \frac{1}{128}[3J_{3000} - 4J_{1100}]. \quad (1.7)$$

Para expresar éste en términos de las integrales I_i de la Tabla 4.1 es útil observar que

$$\begin{aligned} J_{2000} &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} f \left(\frac{x}{\tilde{\omega}_k^2} \frac{d\tilde{\omega}_k^2}{dx} - 1 \right) \\ &= -J_{1000} + 2 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{(n-1)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^4} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dx} f \\ &= \frac{(n-4)}{3} J_{1000} + \frac{2}{3} J_{0100}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde la última igualdad resulta de hacer una integral por partes. De esta manera hallamos

$$3J_{2000} - 2J_{0100} = (n-4)J_{1000}, \quad (1.9)$$

que es la combinación de integrales que aparece en la Ec.(1.7). Similarmente, la integral J_{3000} puede escribirse como

$$\begin{aligned} J_{3000} &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{(n-3)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^3} \left(\frac{x}{\tilde{\omega}_k^2} \frac{d\tilde{\omega}_k^2}{dx} - 1 \right) f^2 \\ &= -J_{2000} + 2 \int_0^\infty \frac{x^{\frac{(n-1)}{2}}}{\tilde{\omega}_k^4} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dx} f^2 \\ &= -J_{2000} + \frac{(n-1)}{3} J_{2000} + \frac{4}{3} J_{1100}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

a partir de lo cual obtenemos

$$3J_{3000} - 4J_{1100} = (n-4)J_{2000}. \quad (1.11)$$

Insertando las ecuaciones (1.5a), (1.9) y (1.11) en la Ec.(1.7), encontramos

$$\alpha_1 = -\frac{1}{8}(n-1)^2(\xi - \xi_n)^2(n-4)I_3 - \frac{1}{16}(n-1)(\xi - \xi_n)(n-4)J_{1000} - \frac{1}{128}(n-4)J_{2000}. \quad (1.12)$$

Comparando este coeficiente con α_2 (dado en la Ec.(1.4)) vemos que

$$\alpha_1 = \frac{(n-4)}{2}\alpha_2. \quad (1.13)$$

Por lo tanto, usando las ecuaciones (4.30a), (4.30c), (1.6) y (1.13), la componente $\langle T_{\eta\eta} \rangle^{(4)}$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle T_{\eta\eta}^\phi \rangle^{(4)} &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \left\{ -\frac{\alpha_2 H_{\eta\eta}^{(1)}}{(n-1)^2} - \frac{32H_{\eta\eta}^{(3)}}{(n-1)(n-2)(n-3)} \left[\alpha_3 - \frac{(n-10)(n-2)}{32}\alpha_2 \right] \right\} \\ &\equiv B_1 H_{\eta\eta}^{(1)} + B_3 H_{\eta\eta}^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Puesto que de la Ec.(4.42) tenemos la expresión del coeficiente α_2 en términos de las integrales I_i , es directo obtener la Ec.(4.44a) para B_1 .

Para mostrar que la misma ecuación (1.14) se satisface para la componente $\langle T_{11}^\phi \rangle^{(4)}$, con $H_{\eta\eta}^{(1,3)}$ reemplazado por $H_{11}^{(1,3)}$, notemos que

$$\beta_5 = -\frac{2}{(n-1)}\alpha_2, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{(\xi - \xi_n)^2}{2}(n-1) \left[-\frac{1}{2} + (n-4) \right] I_3 + \frac{(\xi - \xi_n)}{8} [6J_{2000} - 4J_{0100} - J_{1000}] \\ &\quad + \frac{1}{64(n-1)} [6J_{3000} - 8J_{1100} - J_{2000}], \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \frac{(\xi - \xi_n)^2}{8}(n-1) [9J_{1000} + I_3] + \frac{(\xi - \xi_n)}{16} [9J_{2000} - 6J_{0100} + J_{1000}] \\ &\quad + \frac{1}{128(n-1)} [9J_{3000} - 12J_{1100} + J_{2000}]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Usando las ecuaciones (1.5a), (1.9) y (1.11) obtenemos

$$\beta_2 = \left[-\frac{1}{2} + (n-4) \right] \beta_5, \quad (1.18)$$

$$\beta_4 = \left[\frac{1}{4} + \frac{3(n-4)}{4} \right] \beta_5. \quad (1.19)$$

Entonces, $\langle T_{11} \rangle^{(4)}$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} \langle T_{11} \rangle^{(4)} &= \frac{\Omega_{n-1} \mu^{\bar{n}-n}}{4(2\pi)^{n-1}} \left\{ -\frac{\alpha_2 H_{11}^{(1)}}{(n-1)^2} + \left[\beta_1 - \left(\frac{3}{8}(n-4)(n-6) - \frac{3}{2} \right) \beta_5 \right] \frac{\mathcal{H}'\mathcal{H}^2}{C} \right. \\ &+ \left. \left[\beta_3 - \left(\frac{3}{16} + \frac{(n-4)}{64}(n^2 - 13n + 28) \right) \beta_5 \right] \frac{\mathcal{H}^4}{C} \right\} \\ &\equiv \left\{ B_1 H_{11}^{(1)} + \tilde{\beta}_1 \frac{\mathcal{H}'\mathcal{H}^2}{C} + \tilde{\beta}_3 \frac{\mathcal{H}^4}{C} \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Mediante el mismo procedimiento de integrar por partes y descartar los términos de borde, y luego de mucha álgebra, encontramos

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{(n-5)}{8} \tilde{\beta}_1 = \frac{(n-5)}{2(n-2)(n-3)} B_3, \quad (1.21)$$

donde el coeficiente B_3 está dado en la Ec.(4.44a). Finalmente, luego de insertar estas últimas relaciones en la Ec.(1.20), teniendo en cuenta (1.14), llegamos a la Ec.(4.43).

Apéndice B

Evaluación de los órdenes adiabáticos cero y dos regularizados de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$

En este apéndice usamos el método de regularización dimensional para evaluar los órdenes adiabáticos cero (4.32) y dos (4.38) de $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$, los cuales fueron obtenidos en la Sec. 4.3.1 en términos de las integrales I_0 , I_1 e I_2 de la Tabla 4.1. En el límite $n \rightarrow 4$ el orden adiabático cero es divergente cualquiera sea la RD, mientras que el orden dos es divergente únicamente cuando la frecuencia se comporta como $\omega_k \sim k^s$ con $s \leq 3$, para valores grandes de k . Por este motivo, consideramos los siguientes casos particulares:

- Caso (i): un campo masivo con una RD dada por

$$\omega_k^2 = k^2 + Cm^2 + 2b_{11} \frac{k^4}{C}, \quad (2.1)$$

con $b_{11} > 0$.

- Caso (ii): un campo no masivo con una RD de la forma

$$\omega_k^2 = k^2 + 2b_{11} \frac{k^4}{C} + 2|b_{12}| \frac{k^6}{C^2}, \quad (2.2)$$

donde para evitar que la frecuencia se anule suponemos que $|b_{12}| > b_{11}^2/2$.

Haciendo el cambio de variables $y^2 = x$, las integrales de la Tabla 4.1 que necesitamos pueden escribirse en términos de la siguiente integral:

$$G(A, B, a, p, n) = \int_0^\infty dy \frac{y^{n-2+p}}{(y^4 + Ay^2 + B)^a}. \quad (2.3)$$

Para evaluar esta última, es conveniente usar la representación de Schwinger [53],

$$\frac{1}{(y^4 + Ay^2 + B)^a} = \frac{1}{\Gamma[a]} \int_0^\infty dt t^{a-1} \exp\{-t(y^4 + Ay^2 + B)\}, \quad (2.4)$$

e intercambiar el orden de integración. Haciendo las integrales y usando algunas propiedades de las funciones Hipergeométricas generalizadas ${}_pF_q$ [96], hallamos:

$$\begin{aligned}
G(A, B, a, p, n) &= \frac{B^{(n+p-4a-3)/4}}{4\Gamma[a]} \left\{ B^{1/2} \Gamma \left[a - \frac{(n+p-1)}{4} \right] \Gamma \left[\frac{n+p-1}{4} \right] \right. \\
&\times {}_2F_1 \left[a - \frac{(n+p-1)}{4}, \frac{n+p-1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{A^2}{4B} \right] \\
&- A \Gamma \left[a - \frac{(n+p-3)}{4} \right] \Gamma \left[\frac{n+p+1}{4} \right] \\
&\left. \times {}_2F_1 \left[a - \frac{(n+p-3)}{4}, \frac{n+p+1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{A^2}{4B} \right] \right\}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

El caso (i), para evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (4.32) y (4.38) podemos usar esta última expresión con $A = (2b_{11})^{-1}$ y $B = m^2(2b_{11})^{-1}$. Usando además algunas propiedades de la función Gamma [104], en el límite $n \rightarrow 4$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)} &= \frac{m^{3/2} g_{\mu\nu}}{2^{1/4} 64 b_{11}^{5/4} \pi^{5/2}} \left\{ \Gamma \left[-\frac{3}{4} \right] \Gamma \left[\frac{5}{4} \right] {}_2F_1 \left[-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{1}{8b_{11}m^2} \right] \right. \\
&- \left. \sqrt{2b_{11}m^2} \Gamma \left[-\frac{5}{4} \right] \Gamma \left[\frac{3}{4} \right] {}_2F_1 \left[-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8b_{11}m^2} \right] \right\}, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$(2.7)$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} &= \frac{G_{\mu\nu} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)}{2^{1/4} 32 b_{11}^{5/4} \sqrt{m} \pi^{5/2}} \left\{ \sqrt{2b_{11}m^2} \Gamma \left[-\frac{1}{4} \right] \Gamma \left[\frac{3}{4} \right] \right. \\
&\times {}_2F_1 \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8b_{11}m^2} \right] - \Gamma \left[\frac{1}{4} \right] \Gamma \left[\frac{5}{4} \right] {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{1}{8b_{11}m^2} \right] \left. \right\} \\
&+ \frac{G_{\mu\nu}}{2^{1/4} 288 b_{11}^{5/4} \sqrt{m} \pi^{5/2}} \left\{ \sqrt{2b_{11}m^2} \Gamma \left[-\frac{1}{4} \right] \Gamma \left[\frac{7}{4} \right] \right. \\
&\times {}_2F_1 \left[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8b_{11}m^2} \right] - \Gamma \left[\frac{1}{4} \right] \Gamma \left[\frac{9}{4} \right] {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}; \frac{3}{2}; \frac{1}{8b_{11}m^2} \right] \left. \right\}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

En el caso de un campo no masivo, estos resultados se reducen a

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)} = \frac{1}{120 b_{11}^2 \pi^2}, \quad (2.9)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} = -\frac{G_{\mu\nu}}{8\pi^2 b_{11}} \left(\xi - \frac{1}{18} \right). \quad (2.10)$$

Todas las contribuciones son formalmente divergentes para $n \rightarrow 4$ y resultan finitas al ser evaluadas mediante regularización dimensional. Como hemos mencionado en el cuerpo de la tesis, esto último podría haberse anticipado a partir de la observación de que la frecuencia se comporta como $\omega_k^2 \sim k^4$ para valores grandes de k y las expresiones integrales (cuando k

es grande o cuando el campo es no masivo) se comportan de la misma manera que las que se obtendrían en $2 + 1$ dimensiones para la RD usual [97].

En el caso (ii), la frecuencia puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k &= (y^2 + 2b_{11}y^4 + 2|b_{12}|y^6) \\ &= (2|b_{12}|y^2) \left(y^4 + \frac{b_{11}}{|b_{12}|}y^2 + \frac{1}{2|b_{12}|} \right).\end{aligned}$$

A partir de esto podemos ver que las integrales que necesitamos pueden escribirse en términos de la integral dada en la Ec.(2.3) con $A = b_{11}/|b_{12}|$ y $B = (2|b_{12}|)^{-1}$. Los resultados son:

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)} &= g_{\mu\nu} \frac{\mu^{4-n} (2|b_{12}|)^{\frac{(2-n)}{4}}}{4\Gamma[-\frac{1}{2}] (4\pi)^{\frac{(n-1)}{2}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2|b_{12}|}} \Gamma\left[\frac{n}{4}\right] \Gamma\left[-\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right] \right. \\ &\times {}_2F_1\left[-\frac{1}{2} - \frac{n}{4}, \frac{n}{4}; \frac{1}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] - \frac{b_{11}}{|b_{12}|} \Gamma\left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] \Gamma\left[-\frac{n}{4}\right] \\ &\left. \times {}_2F_1\left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}, -\frac{n}{4}; \frac{3}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] \right\},\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} &= \mu^{4-n} G_{\mu\nu} \frac{(2|b_{12}|)^{\frac{(2-n)}{4}}}{(4\pi)^{\frac{(n-1)}{2}}} \left\{ \frac{b_{11}}{\sqrt{2|b_{12}|}} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right] \Gamma\left[\frac{n}{4}\right]}{96\Gamma\left[\frac{1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right]} \right. \\ &\times \left({}_2F_1\left[\frac{3}{2} - \frac{n}{4}, \frac{n}{4}; \frac{1}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] - \frac{(n-4)(n-2)}{2} {}_2F_1\left[\frac{3}{2} - \frac{n}{4}, \frac{n}{4}; \frac{3}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] \right) \\ &+ \frac{\Gamma\left[2 - \frac{n}{4}\right] \Gamma\left[\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right]}{24\Gamma\left[\frac{1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right]} \left({}_2F_1\left[1 - \frac{n}{4}, \frac{n}{4} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] \right. \\ &+ \left. \frac{b_{11}^2}{4|b_{12}|} {}_2F_1\left[2 - \frac{n}{4}, \frac{n}{4} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] \right) + \frac{\xi}{4\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]} \Gamma\left[1 - \frac{n}{4}\right] \Gamma\left[-\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right] \\ &\times {}_2F_1\left[1 - \frac{n}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{n}{4}; \frac{1}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] - \frac{2b_{11}\xi}{\sqrt{2|b_{12}|}} \frac{\Gamma\left[\frac{3}{2} - \frac{n}{4}\right] \Gamma\left[\frac{n}{4}\right]}{4\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]} \\ &\left. \times {}_2F_1\left[\frac{3}{2} - \frac{n}{4}, \frac{n}{4}; \frac{3}{2}; \frac{b_{11}^2}{2|b_{12}|}\right] \right\},\end{aligned}\quad (2.12)$$

donde hemos usado algunas propiedades de la función gamma Γ y de la función hipergeométrica ${}_2F_1$ [104].

Tomando el límite de estas expresiones para $n \rightarrow 4$ hallamos:

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(0)} = -g_{\mu\nu} \frac{b_{11}(b_{11}^2 - 2|b_{12}|)}{32\sqrt{2\pi^2}|b_{12}|^{5/2}} \left[\frac{1}{n-4} - \ln(|b_{12}|^{1/4}\mu) \right] + \mathcal{O}(n-4), \quad (2.13)$$

$$\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle^{(2)} = -\frac{\xi G_{\mu\nu}}{(2\pi)^2\sqrt{2|b_{12}|}} \left[\frac{1}{n-4} - \ln(|b_{12}|^{1/4}\mu) \right] + PF, \quad (2.14)$$

donde hemos redefinido μ para absorber un término constante, y PF denota los términos finitos para $n \rightarrow 4$ e independientes de μ . A partir de esta expresión vemos que el orden adiabático dos es finito si $\xi = 0$.

Apéndice C

Identidades para espacios-tiempos tipo Bianchi I

En este apéndice resumimos algunas fórmulas requeridas para la renormalización de $\langle \hat{\phi}^2 \rangle$ y $\langle T_{\mu\nu}^\phi \rangle$ en espacios-tiempos tipo Bianchi I.

Como ya hemos mencionado en el cuerpo de la tesis, para regularizar hacemos primero las integrales angulares en cuatro dimensiones y luego generalizamos las integrales a n -dimensiones. Para ello primero reescalamos las variables de integración $k_i \rightarrow y_i = k_i/C_i$ y transformamos el elemento de volumen de coordenadas rectangulares d^3y a coordenadas esféricas $y^2 dy d\Omega$, donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido. En términos de $y_i^2 = y^2 \lambda_i^2$, las integrales relevantes son de la forma

$$I(i, j, k) = \int d\Omega \lambda_1^{2i} \lambda_2^{2j} \lambda_3^{2k}, \quad (3.1)$$

las cuales pueden evaluarse usando que las mismas son invariantes ante permutaciones de $\{i, j, k\}$. A continuación listamos las integrales que hemos utilizado en el Capítulo 5 (más detalles pueden encontrarse en [64, 65]):

$$I(0, 0, k) = \frac{4\pi}{2k + 1}, \quad (3.2a)$$

$$I(1, 1, 0) = \frac{4\pi}{5 \times 3}, \quad (3.2b)$$

$$I(1, 2, 0) = \frac{4\pi}{7 \times 5}, \quad (3.2c)$$

$$I(1, 1, 1) = \frac{4\pi}{7 \times 5 \times 3}. \quad (3.2d)$$

Estos resultados, junto con la fórmula $\sum_{i=1}^3 d_i^2 = 3(8Q + D^2)$, nos permiten derivar las

siguientes identidades:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int d\Omega d_j d_k \lambda_j^2 \lambda_k^2 = 4\pi \left(D^2 + \frac{16}{5}Q \right), \quad (3.3a)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \int d\Omega d_j d_k \lambda_i^2 \lambda_j^2 \lambda_k^2 = \frac{4\pi}{7 \times 5} \left[5D^2 + 4d_i D + \frac{8}{3}d_i^2 + 16Q \right], \quad (3.3b)$$

$$\sum_{j=1}^3 \int d\Omega (d'_j + 2d_j D - d_j^2) \lambda_i^2 \lambda_j^2 = \frac{4\pi}{5 \times 3} \left[2(d'_i + 2d_i D - d_i^2) + 3(D' + D^2 - 8Q) \right], \quad (3.3c)$$

las cuales son útiles para evaluar $\langle \hat{\phi}^2 \rangle^{(2)}$ y $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(2)}$.

Apéndice D

Regularización de $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(2)}$ en Bianchi I

En este apéndice presentamos algunos detalles del cálculo del orden adiabático dos de $\langle T_{\mu\nu}^{\phi} \rangle^{(2)}$ en espacios-tiempos tipo Bianchi I. Las expresiones explícitas de los coeficientes que aparecen en la Ec.(5.40) son:

$$\alpha_1 = \frac{1}{64}[-4I_{10} + I_{20} + 4(I_{00} - 6\xi I_{00} + 6\xi I_{10})], \quad (4.1a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{20}[I_{00} + 2I_{10} + I_{20} - 30\xi I_{00}], \quad (4.1b)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2240}[52I_{00} - 120I_{01} - 76I_{10} + 20I_{11} + 77I_{20} - 5I_{30} + 280\xi(-I_{00} + 2I_{01} + I_{10} - I_{20})], \quad (4.1c)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{640}[2I_{00} + 39I_{10} - 8I_{20} - 20\xi(22I_{00} + I_{10})], \quad (4.1d)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1680}[-8I_{00} + 12I_{01} - 19I_{10} + 12I_{11} - 14I_{20} - 3I_{30} + 210\xi I_{10}], \quad (4.1e)$$

$$\beta_4 = \frac{1}{140}[-24I_{01} + 3I_{10} + 4I_{11} + 21I_{20} - I_{30} - 14\xi(-8I_{01} + I_{10} + 4I_{20}) + I_{00}(42\xi - 19)], \quad (4.1f)$$

$$\beta_5 = \frac{1}{840}[2I_{00} + 4I_{01} + 3I_{10} + 4I_{11} - I_{30}], \quad (4.1g)$$

$$\beta_6 = \frac{1}{120}[-I_{00} - 2I_{10} - I_{20} + 30\xi I_{00}], \quad (4.1h)$$

donde las integrales I_{mn} están dadas por

$$I_{mn} = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{\frac{n-3}{2}}}{\tilde{\omega}_k} f^m \dot{f}^n, \quad (4.2)$$

siendo $m, n = 0, 1, 2, 3$.

El procedimiento para encontrar relaciones entre estos coeficientes usando regularización dimensional es completamente análogo al descrito en la Sec. 4.3.1 para el caso del espacio-tiempo de FRW. Por definición, $I_{00} = I_1$ y para $n \rightarrow 4$, de las ecuaciones (4.36) y (4.37),

hallamos:

$$I_{10} = 2I_1, \quad (4.3a)$$

$$I_{20} = \frac{2}{3}I_2, \quad (4.3b)$$

$$I_{30} = \frac{4}{5}I_2 + \frac{8}{15}I_8, \quad (4.3c)$$

$$I_{01} = -2I_1 + \frac{1}{3}I_2, \quad (4.3d)$$

$$I_{11} = -\frac{2}{15}I_2 + \frac{2}{15}I_8, \quad (4.3e)$$

donde las integrales I_i de los miembros derechos están dadas en la Tabla 4.1 (I_8 no aparecerá en el resultado final).

Reemplazando estos resultados en (4.1), obtenemos:

$$\alpha_1 = \frac{3}{8}I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + \frac{I_2}{96}, \quad (4.4a)$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + \frac{I_2}{30}, \quad (4.4b)$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{8}I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + \frac{I_2}{480}, \quad (4.4c)$$

$$\beta_2 = -\frac{3}{4}I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{I_2}{120}, \quad (4.4d)$$

$$\beta_3 = \beta_6 = \frac{1}{4}I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) - \frac{I_2}{180}, \quad (4.4e)$$

$$\beta_4 = -\frac{3}{2}I_1 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + \frac{I_2}{30}, \quad (4.4f)$$

$$\beta_5 = 0. \quad (4.4g)$$

Finalmente, sustituyendo estos coeficientes en la Ec.(5.40) llegamos a la Ec.(5.41).

Bibliografía

- [1] T. Jacobson, “Trans-Planckian redshifts and the substance of the space-time river,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 136, p. 1, 1999, hep-th/0001085.
- [2] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 43, pp. 199–220, 1975.
- [3] W. G. Unruh, “Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 51, p. 2827, 1995.
- [4] S. Corley y T. Jacobson, “Hawking Spectrum and High Frequency Dispersion,” *Phys. Rev. D*, vol. 54, p. 1568, 1996, hep-th/9601073.
- [5] W. G. Unruh y R. Schützhold, “Universality of the Hawking effect,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 024028, 2005.
- [6] R. Schutzhold y W. G. Unruh, “On the origin of the particles in black hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 041504, 2008, 0804.1686v1.
- [7] C. Barcelo, L. J. Garay, y G. Jannes, “Sensitivity of Hawking radiation to superluminal dispersion relations,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 024016, 2009, arXiv:0807.4147.
- [8] A. A. Starobinsky, “Robustness of the inflationary perturbation spectrum to trans-Planckian physics,” *JETP Lett.*, vol. 73, p. 371, 2001, astro-ph/0104043v2.
- [9] R. H. Brandenberger y J. Martin, “The Robustness of Inflation to Changes in Super-Planck-Scale Physics,” *Mod. Phys. Lett.A*, vol. 16, p. 999, 2001, astro-ph/0005432.
- [10] J. Martin y R. Brandenberger, “Trans-Planckian Problem of Inflationary Cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 123501, 2001, hep-th/0005209.
- [11] R. H. Brandenberger, “Trans-Planckian Physics and Inflationary Cosmology,” 2002, hep-th/0210186v2.

-
- [12] J. Martin y R. H. Brandenberger, “Corley-Jacobson dispersion relation and trans-Planckian inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 103514, 2002, hep-th/0201189.
- [13] R. H. Brandenberger, S. E. Joras, y J. Martin, “Trans-Planckian Physics and the Spectrum of Fluctuations in a Bouncing Universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 083514, 2002.
- [14] R. Brandenberger y X. Zhang, “The Trans-Planckian Problem for Inflationary Cosmology Revisited,” 2009, arXiv:0903.2065.
- [15] T. Jacobson, S. Liberati, y D. Mattingly, “Threshold effects and Planck scale Lorentz violation: combined constraints from high energy astrophysics,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 124011, 2003.
- [16] G. Amelino-Camelia, “Quantum Gravity Phenomenology,” 2008, arXiv:0806.0339.
- [17] V. A. Kostelecký y S. Samuel, “Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, p. 1886, 1989.
- [18] V. A. Kostelecký, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 105009, 2004.
- [19] R. Gambini y J. Pullin, “Nonstandard optics from quantum space-time,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 124021, 1999.
- [20] D. A. Dalvit, F. D. Mazzitelli, y C. Molina-París, “One-loop graviton corrections to Maxwell’s equations,” *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 084023, 2001.
- [21] R. C. Myers y M. Pospelov, “Ultraviolet Modifications of Dispersion Relations in Effective Field Theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 211601, 2003, hep-ph/0301124.
- [22] T. Jacobson y D. Mattingly, “Gravity with a dynamical preferred frame,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 024028, 2001.
- [23] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Phys. Rev. D*, vol. 23, p. 347, 1981.
- [24] A. Albrecht y P. J. Steinhardt, “Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, p. 1220, 1982.
- [25] A. D. Linde, “Coleman-Weinberg theory and the new inflationary universe scenario,” *Phys. Lett. B*, vol. 114, p. 431, 1982.

-
- [26] J. Martin y R. H. Brandenberger, “Dependence of the spectra of fluctuations in inflationary cosmology on trans-Planckian physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 68, p. 063513, 2003, hep-th/0305161.
- [27] Y.-F. Cai y X. Zhang, “Primordial perturbation with a modified dispersion relation,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 043520, 2009, arXiv:0906.3341.
- [28] T. Tanaka, “A comment on trans-Planckian physics in inflationary universe,” 2000, astro-ph/0012431v2.
- [29] R. Brandenberger, “Back reaction of cosmological perturbations and the cosmological constant problem,” *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, vol. 80, pp. C405+, 2000, hep-th/0210165.
- [30] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, y P. Spindel, “Hawking radiation without trans-Planckian frequencies,” *Phys. Rev. D*, vol. 52, p. 4559, 1995, hep-th/9506121v1.
- [31] M. Porrati, “Bounds on Generic High-Energy Physics Modifications to the Primordial Power Spectrum from Back-Reaction on the Metric,” *Phys. Lett. B*, vol. 596, p. 306, 2004, hep-th/0402038.
- [32] M. Lemoine, M. Lubo, J. Martin, y J.-P. Uzan, “The stress-energy tensor for trans-Planckian cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 023510, 2002, hep-th/0109128.
- [33] R. H. Brandenberger y J. Martin, “Back-Reaction and the Trans-Planckian Problem of Inflation Reexamined,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 023504, 2005, hep-th/0410223.
- [34] U. H. Danielsson, “Note on inflation and trans-Planckian physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 023511, 2002, hep-th/0203198.
- [35] J. C. Niemeyer, R. Parentani, y D. Campo, “Minimal modifications of the primordial power spectrum from an adiabatic short distance cutoff,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 083510, 2002, hep-th/0206149.
- [36] U. H. Danielsson, “Transplanckian energy production and slow roll inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 023516, 2005, hep-th/0411172.
- [37] J. Macher y R. Parentani, “Signatures of trans-Planckian dispersion in inflationary spectra,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 043522, 2008, arXiv:0804.1920.

-
- [38] D. L. Nacir y F. D. Mazzitelli, “On the renormalization procedure for quantum fields with modified dispersion relation in curved spacetimes,” *Int.J.Mod.Phys. A*, vol. 24, p. 1565, 2009, arXiv:0905.1974.
- [39] C. W. Misner, K. S. Thorne, y J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and company, 1973.
- [40] D. L. Nacir y F. D. Mazzitelli, “Renormalization in theories with modified dispersion relations: weak gravitational fields,” *Phys. Lett.*, vol. B672, p. 294, 2009, arXiv:0810.2922.
- [41] D. L. Nacir, F. D. Mazzitelli, y C. Simeone, “Renormalized stress tensor for transplanckian cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 124013, 2005, gr-qc/0511046.
- [42] D. L. Nacir y F. D. Mazzitelli, “Backreaction in trans-Planckian cosmology: renormalization, trace anomaly and selfconsistent solutions,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 024013, 2007, arXiv:0706.2179.
- [43] D. L. Nacir y F. D. Mazzitelli, “New counterterms induced by trans-Planckian physics in semiclassical gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 044001, 2008, arXiv:0711.4554.
- [44] B. Z. Foster y T. Jacobson, “Post-Newtonian parameters and constraints on Einstein-aether theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 73, p. 064015, 2006.
- [45] T. Jacobson, “Einstein-aether gravity: a status report,” *Proc. Science*, vol. QG-PH, p. 020, 2007, arXiv:0801.1547.
- [46] K. Schalm, G. Shiu, y J. P. van der Schaar, “Decoupling in an expanding universe: boundary RG-flow affects initial conditions for inflation,” *JHEP*, vol. 0404, p. 076, 2004, hep-th/0401164.
- [47] H. Collins y R. Holman, “Renormalization of initial conditions and the trans-Planckian problem of inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 085009, 2005, hep-th/0501158.
- [48] H. Collins y R. Holman, “The renormalization of the energy-momentum tensor for an effective initial state,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 045009, 2006, hep-th/0605107.
- [49] N. D. Birrell y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.

-
- [50] L. H. Ford, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime,” 1997, gr-qc/9707062.
- [51] T. Jacobson, “Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect,” 2003, gr-qc/0308048.
- [52] S. M. Christensen, “Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, p. 2490, 1976.
- [53] J. Collins, *Renormalization*. Cambridge University Press, 1984.
- [54] B. S. DeWitt, “Quantum Field Theory in Curved Space-Time,” *Phys. Rept.*, vol. 19, p. 295, 1975.
- [55] T. S. Bunch y L. Parker, “Feynman Propagator in Curved Space-Time: A Momentum Space Representation,” *Phys. Rev. D*, vol. 20, p. 2499, 1979.
- [56] D. D. Harari, *Aspectos geométricos de la renormalización y de los estados cuánticos en el espacio curvo*. Tesis Doctoral, 1983.
- [57] J. P. Paz y F. D. Mazzitelli, “Renormalized evolution equations for the back-reaction problem with a self-interacting scalar field,” *Phys. Rev. D*, vol. 37, p. 2170, 1988.
- [58] A. Starobinsky, “A new type of isotropic cosmological models without singularity,” *Phys. Lett. B*, vol. 91, p. 99, 1980.
- [59] A. Strominger, “Positive-energy theorem for $R + R^2$ gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 30, p. 2257, 1984.
- [60] P. R. Anderson y L. Parker, “Adiabatic regularization in closed Robertson-Walker universes,” *Phys. Rev. D*, vol. 36, p. 2963, 1987.
- [61] L. Parker y S. A. Fulling, “Adiabatic regularization of the energy-momentum tensor of a quantized field in homogeneous spaces,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, p. 341, 1974.
- [62] T. S. Bunch, “Adiabatic regularisation for scalar fields with arbitrary coupling to the scalar curvature,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 13, p. 1297, 1980.
- [63] C. Molina-París, P. R. Anderson, y S. A. Ramsey, “One-loop $\lambda\varphi^4$ field theory in Robertson-Walker spacetimes: Adiabatic regularization and analytic approximations,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 127501, 2000.

- [64] B. L. Hu, “Calculation of the trace anomaly of the conformal energy-momentum tensor in Kasner spacetime by adiabatic regularization,” *Phys. Rev. D*, vol. 18, p. 4460, 1978.
- [65] S. A. Fulling, L. Parker, y B. L. Hu, “Conformal energy-momentum tensor in curved spacetime: Adiabatic regularization and renormalization,” *Phys. Rev. D*, vol. 10, p. 3905, 1974.
- [66] P. R. Anderson, “A method to compute $\langle \varphi^2 \rangle$ in asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. 41, p. 1152, 1990.
- [67] P. R. Anderson, W. A. Hiscock, y D. A. Samuel, “Stress-energy tensor of quantized scalar fields in static black hole spacetimes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, p. 1739, 1993.
- [68] S. Sushkov, “Analytical approximation of $\langle \varphi^2 \rangle$ for a massive scalar field in static spherically symmetric spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 064007, 2000.
- [69] F. D. Mazzitelli, J. P. Paz, y M. A. Castagnino, “Cauchy data and Hadamard singularities in time-dependent backgrounds,” *Phys. Rev. D*, vol. 36, p. 2994, 1987.
- [70] P. R. Anderson, C. Molina-París, y E. Mottola, “Short distance and initial state effects in inflation: Stress tensor and decoherence,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 043515, 2005, hep-th/0504134.
- [71] D. Mattingly, “Modern tests of Lorentz invariance,” *Liv. Rev. Rel.*, vol. 5, 2005, gr-qc/0502097.
- [72] T. Jacobson, S. Liberati, y D. Mattingly, “Lorentz violation at high energy: concepts, phenomena and astrophysical constraints,” *Annals Phys.*, vol. 321, p. 150, 2006, astro-ph/0505267.
- [73] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty, y S. Mukohyama, “Ghost Condensation and a Consistent Infrared Modification of Gravity,” *JHEP*, vol. 0405, p. 074, 2004, hep-th/0312099.
- [74] D. Colladay y A. Kostelecky, “Lorentz-Violating Extension of the Standard Model,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 116002, 1998.
- [75] A. Perez y D. Sudarsky, “Comments on Challenges for Quantum Gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 179101, 2003, gr-qc/0306113.

-
- [76] J. Collins, A. Perez, D. Sudarsky, L. Urrutia, y H. Vucetich, “Lorentz invariance and quantum gravity: an additional fine-tuning problem?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 191301, 2004, gr-qc/0403053.
- [77] K. J. Nordtvedt y C. M. Will, “Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism,” *Astrophys. J.*, vol. 177, p. 757, 1972.
- [78] J. W. Elliott, G. D. Moore, y H. Stoica, “Constraining the New Aether: Gravitational Cherenkov Radiation,” *JHEP08*, vol. 066, 2005, hep-ph/0505211.
- [79] C. P. Burgess, “Quantum Gravity in Everyday Life: General Relativity as an Effective Field Theory,” *Liv. Rev. Rel.*, vol. 5, 2004, gr-qc/0311082.
- [80] B. Withers, “Einstein-aether as a quantum effective field theory,” 2009, arXiv:0905.2446.
- [81] S. M. Carroll y E. A. Lim, “Lorentz-Violating Vector Fields Slow the Universe Down,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 123525, 2004, hep-th/0407149.
- [82] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment,” *Liv. Rev. Rel.*, vol. 9, 2006.
- [83] T. Jacobson y D. Mattingly, “Einstein-Aether Waves,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 024003, 2004, gr-qc/0402005.
- [84] C. Eling, “Energy in the Einstein-Aether Theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 73, p. 084026, 2006, gr-qc/0507059.
- [85] C. Eling y T. Jacobson, “Spherical Solutions in Einstein-Aether Theory: Static Aether and Stars,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 23, p. 5625, 2006, gr-qc/0603058.
- [86] C. Eling y T. Jacobson, “Black Holes in Einstein-Aether Theory,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 23, p. 5643, 2006, gr-qc/0604088.
- [87] T. Jacobson y D. Mattingly, “Generally covariant model of a scalar field with high frequency dispersion and the cosmological horizon problem,” *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 041502, 2001, hep-th/0009052.
- [88] P. Hořava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 084008, 2009, arXiv:0901.3775.

- [89] X. Gao, Y. Wang, R. Brandenberger, y A. Riotto, “Cosmological Perturbations in Hořava-Lifshitz Gravity,” 2009, arXiv:0905.3821.
- [90] C. Germani, A. Kehagias, y K. Sfetsos, “Relativistic quantum gravity at a lifshitz point,” 2009, arXiv:0906.1201.
- [91] D. Anselmi y M. Halat, “Renormalization of Lorentz violating theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 125011, 2007, arXiv:0707.2480.
- [92] M. Rinaldi, “A momentum-space representation of Green’s functions with modified dispersion on ultra-static space-time,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 104027, 2007, arXiv:0709.2657.
- [93] M. Rinaldi, “A momentum-space representation of Green’s functions with modified dispersion relations on general backgrounds,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 024025, 2008, arXiv:0803.3684.
- [94] E. Poisson, “The Motion of Point Particles in Curved Spacetime,” *Liv. Rev. Rel.*, vol. 7, 2004.
- [95] A. Hatzinikitas, “A note on Riemann normal coordinates,” 2000, hep-th/0001078.
- [96] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 1994.
- [97] D. G. McKeon y G. Tsoupros, “Perturbative evaluation of renormalization-group functions in massive three-dimensional φ^6 theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 46, p. 1794, 1992.
- [98] S. Wada y T. Azuma, “De Sitter metric as a self-consistent solution of the back reaction problem,” *Phys. Lett. B*, vol. 132, p. 313, 1983.
- [99] B. Allen, “Vacuum states in de Sitter space,” *Phys. Rev. D*, vol. 32, p. 3136, 1985.
- [100] M. A. Castagnino, D. D. Harari, y J. P. Paz, “De Sitter self-consistent cosmology for Weinberg-type fields,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 3, p. 569, 1986.
- [101] N. Kaloper, M. Kleban, A. Lawrence, S. Shenker, y L. Susskind, “Initial Conditions for Inflation,” *JHEP*, vol. 0211, p. 037, 2002, hep-th/0209231.
- [102] P. R. Anderson, W. Eaker, S. Habib, C. Molina-Paris, y E. Mottola, “Attractor states and infrared scaling in de Sitter space,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 124019, 2000, gr-qc/0005102.

-
- [103] L. Sriramkumar y T. Padmanabhan, “Initial state of matter fields and trans-Planckian physics: Can CMB observations disentangle the two?,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 103512, 2005, gr-qc/0408034.
- [104] M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1972.