

Tesis Doctoral

Modelos para la expansión acelerada del universo

Bengochea, Gabriel R.

2009

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Bengochea, Gabriel R.. (2009). Modelos para la expansión acelerada del universo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Bengochea, Gabriel R.. "Modelos para la expansión acelerada del universo". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2009.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Modelos para la expansión acelerada del universo

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de
Ciencias Físicas

Lic. Gabriel R. Bengochea

Director de Tesis: Dr. Rafael Ferraro

Consejero de estudios: Dr. Rafael Ferraro

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio
(CONICET-UBA)

Buenos Aires, Diciembre de 2009

A Aníbal O. Gattone
y a Juan G. Roederer,
quienes inculcaron en mí
el entusiasmo por la Física;
y a Dario Tosone,
un curioso importante

Modelos para la expansión acelerada del universo

Resumen

El descubrimiento de una disminución inesperada en los flujos de energía provenientes de supernovas del tipo Ia ha abierto uno de los problemas más enigmáticos y profundos en la cosmología actual. Estas observaciones han sido interpretadas como evidencia sólida de que la expansión actual del universo es acelerada por algo que genéricamente se ha denominado *energía oscura*. A pesar de que la constante cosmológica parece ser la explicación más simple y más favorecida observacionalmente para el fenómeno de la aceleración, otros escenarios se han estado desarrollando desde el hallazgo en 1998.

En esta Tesis se presenta, primeramente, un análisis de modelos electrodinámicos no lineales mediante lagrangianos de Born-Infeld aplicados a la propagación de un rayo de luz en un contexto cosmológico, en donde se halla una corrección a la distancia luminosa a una fuente puntual como una manera de estudiar posibles contribuciones al momento de realizar estas observaciones para supernovas del tipo Ia; y en la segunda parte de este trabajo se realiza un repaso de los rasgos característicos de las llamadas teorías $f(R)$ y se presenta una nueva clase de teorías de gravedad modificada, a las que llamamos teorías $f(L_T)$, para explicar la aceleración del universo recientemente detectada sin la necesidad de energía oscura. Esta clase de teorías surge a partir de una modificación del lagrangiano del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (TEGR), cuyas ecuaciones de movimiento son siempre de segundo orden en contraste con las ecuaciones de cuarto orden que la mayoría de las mencionadas teorías $f(R)$ posee. Se muestra además que la solución cosmológica estudiada presenta las tres últimas fases cosmológicas esperadas, y a través de un análisis conjunto de datos provenientes de las observaciones más recientes de supernovas del tipo Ia, Radiación Cómica de Fondo (CMB) y Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO), se ponen cotas para el valor del único parámetro adicional que poseen estas teorías.

Palabras clave: Relatividad General, Electrodinámica de Born-Infeld, Cosmología, Energía Oscura, Teleparalelismo.

Models for the accelerated expansion of the Universe

Abstract

The discovery of an unexpected diminution in the observed energy fluxes coming from type Ia supernovae has opened one of the most puzzling and deepest problems in cosmology today. These observations have been interpreted as solid evidence for an accelerating universe dominated by something called *dark energy*. Although the cosmological constant seems to be the simplest explanation for the phenomenon, several dynamical scenarios have been tried out since 1998.

In this Thesis we present, in first place, an analysis of non-linear electrodynamic models by employing Born-Infeld type lagrangians. We obtain exact solutions of the Born-Infeld theory for electromagnetic plane waves propagating in the presence of static background fields. After that, we use these results to show how the luminosity distance to a point-like source such as type Ia supernovae is modified when a static magnetic background is present in an expanding universe. In second place, we carried out a review of the characteristic features of $f(R)$ theories and we present a new class of modified gravity theories, namely $f(L_T)$ theories, to explain the recently discovered acceleration of the universe without the need for dark energy. This class of theories arises from a modification of the teleparallel equivalent of general relativity (TEGR) whose field equations are always second order equations in contrast to the fourth-order equations that most of $f(R)$ theories holds. It is also shown that the cosmological solution has the last three expected cosmological phases, and finally we perform a joint analysis with measurements of the most recent type Ia supernovae, baryon acoustic oscillation peak, and estimates of the cosmic microwave background shift parameter data to constrain the only new parameter this theory has.

Keywords: General Relativity, Born-Infeld Electrodynamics, Cosmology, Dark Energy, Teleparallelism.

Agradecimientos

Quisiera comenzar los agradecimientos extendiendo los mismos a Rafael Ferraro por aceptar el desafío de dirigirme un trabajo de Tesis conociendo cuáles eran mis motivaciones cosmológicas y todo lo que ello implicaba. A lo largo de estos años supo mostrarme nuevamente su calidad docente y su manera de proceder tanto como investigador como persona.

A Javier, con quien desde hace unos cuantos años hemos venido compartiendo infinidad de charlas académicas y personales y en cada una su punto de vista ha sido de mucho valor para mí; y siempre ha sabido reafirmar su calidez como amigo.

Al amigo Diego el travieso, quien por sobre todas las cosas me condujo nuevamente al camino de la risa. Las horas trabajadas junto a Diego fueron siempre un *juego* de lógica, de desafíos y de un sin fin de *perdedoreces* que sólo él sabe tejer cual *spiderman* y que sin él no habría disfrutado tanto de jugarlo.

A mis amigos del CAIFA, con quienes desde hace casi 20 años he venido compartiendo charlas científicas estimulantes, fruto de las cuales ha sido aprender a mejorar mi manera de transmitir ciencia a la gente y de respetar variados puntos de vista.

A mis colegas de la gr-qc (*querida cervecita*), por orden alfabético: Carlos, Leo, Lorena, Matías y Mauricio. Sin su compañía los años en el Instituto no habrían sido tan amenos como lo fueron ni hubiera aprendido muchas de las cosas que hoy se. Gracias a Matías por los buenos ratos de oficina que hemos estado compartiendo, siempre con un toque de humor *institucional*.

Quiero agradecerle a Mauricio, Gastón y a Franco las discusiones muy interesantes y productivas sobre tópicos de Gravitación que he tenido con ellos en los últimos tiempos; charlas que me han llevado a comprender mejor los temas que he desarrollado en este trabajo.

A mis colegas de estudios y lecturas, Horacio, Ariel y Juan Carlos, con quienes siempre cualquier café se transforma en una riquísima experiencia de historias.

A mis padres quienes siempre me han ayudado en todo lo que estuviera

a su alcance para que yo estuviera mejor. También quisiera dar mi agradecimiento a Liliana Opradolce, Laura Bertoletti y a Susana Boudemont quienes me permitieron realizar actividades de difusión en el IAFE y tener la oportunidad de contar lo que hacía en mi lugar de trabajo; y a todos aquellos integrantes del personal del IAFE con los que compartí espacios y tiempos en común en todo esta larga temporada.

A todo el resto de amigos que de una manera u otra han participado en mi vida académica; a mis colegas del Saint John's School que me han brindado muy variados enfoques de la vida enriqueciendo la mía, estímulo a la educación básica y al valor de transmitir ciencias; a mis alumnos y ex-alumnos del SJ de quienes yo he aprendido tanto como lo que yo les he enseñado, y por sobre todas las cosas me han permitido enseñar en un ambiente divertido; y a los chicos de *CloudStuRed* quienes me brindaron un cable a tierra en cada ensayo al que asistí.

Por último, pero no menos importante, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por su apoyo económico en mis años de Doctorado.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Presentación del problema	1
1.1.1. La visión cosmológica	1
1.1.2. Sorpresas a las puertas del siglo XXI	6
1.1.3. El universo que acelera	9
1.2. Propósito y desarrollo de la Tesis	16
2. Efectos anisótropos en la propagación de la luz	21
2.1. Introducción	21
2.2. Solución de ondas planas de Born-Infeld	23
2.2.1. Caso con fondo magnético	25
2.2.2. Caso con fondo eléctrico	31
3. Modificación de la distancia luminosa a una fuente	35
3.1. Introducción	35
3.2. Ondas planas en un universo en expansión	39
3.3. Distancia luminosa a una fuente puntual	43
4. Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo	51
4.1. Teorías $f(R)$ de gravedad modificada	52
4.1.1. Ecuaciones de campo para una $f(R)$ genérica	54
4.1.2. El Principio de equivalencia	59
4.1.3. Teorías $f(R)$ y la aceleración del universo	66
4.2. Gravitación y Teleparalelismo	72

4.3. Teorías $f(L_T)$	78
4.3.1. Ecuaciones de campo.	78
4.3.2. Solución cosmológica acelerada y cotas observacionales	80
5. Conclusiones	91

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación del problema

1.1.1. La visión cosmológica

Para describir el objetivo de esta Tesis, empecemos por hacer un repaso de las cuestiones básicas que hacen al estudio del universo como un todo. Si bien aquí haremos una breve compilación de las ideas fundamentales que motivan este trabajo, se sugieren al lector libros de texto tales como los de Kolb y Turner [1] o Weinberg [2] para una discusión más detallada acerca de tópicos sobre cosmología o Relatividad General.

La cosmología es la ciencia que estudia cómo son la estructura y la evolución en el tiempo del universo a gran escala. El contexto teórico de la cosmología moderna es la Teoría de la Relatividad General, cuya descripción de la gravitación viene dada por las ecuaciones de campo (usaremos que $c = 1$ salvo que se indique lo contrario):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

donde,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ y R son el tensor y el escalar de Ricci res-

pectivamente, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico correspondiente, G es la constante gravitacional de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la materia. Bajo la suposición de isotropía y homogeneidad, la métrica (conocida como la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)) puede escribirse como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

donde (t, r, θ, ϕ) son las llamadas coordenadas comóviles, $a(t)$ es el factor de escala y k es el parámetro de curvatura de las secciones espaciales. La métrica (1.3) requiere la validez del Principio Cosmológico, esto es que la materia a grandes escalas también se encuentre distribuida de manera isótropa y homogénea; si suponemos que la materia que llena el universo puede ser descrita como un fluido ideal, entonces su tensor energía-momento es:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

donde u^μ es la cuadrivelocidad del fluido con densidad de energía ρ y presión p . Reemplazando (1.3) y (1.4) en las ecuaciones de Einstein se obtienen las ecuaciones de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (1.6)$$

donde un punto significa derivar una vez respecto al tiempo t . Por un análisis simplemente cinemático (esto es, sin resolver explícitamente las ecuaciones de Einstein), considerando la propagación de un rayo de luz de una galaxia distante que viaja a través de una geodésica nula de la métrica FLRW, se llega al resultado de que la luz en su viaje debe cambiar su frecuencia. Así, se define el corrimiento al rojo cosmológico z de un objeto en términos de la frecuencia observada de la onda de luz ν_o y aquella que la luz tenía cuando partió del objeto en el momento de la emisión ν_e , o lo que es equivalente, al cociente entre el valor del factor de escala hoy a_o y el correspondiente al tiempo t de la emisión $a(t)$. Esto es: $1 + z \equiv \frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{a_o}{a(t)}$.

Las ecuaciones (1.5) y (1.6), junto a alguna ecuación de estado $p = p(\rho)$ determinan completamente la dinámica del factor de escala $a(t)$ y las funciones $\rho(t)$ y $p(t)$. Cualquier incremento (decrecimiento) en $a(t)$ conducirá a un corrimiento al rojo (azul) de la luz de fuentes lejanas. Puesto que hoy los astrónomos detectan estos corrimientos de frecuencias hacia el rojo en los espectros de galaxias distantes, podemos concluir que el universo está en expansión.

Combinando las ecuaciones (1.5) y (1.6), puede escribirse la ecuación de conservación:

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2 \quad (1.7)$$

De esta manera, una vez dada la ecuación de estado $p = p(\rho)$, podemos integrar (1.7) para obtener $\rho = \rho(a)$. Luego, usando la función $\rho(a)$ en (1.5) se conoce $a(t)$. Por ejemplo, para una ecuación de estado del tipo $p = w\rho$ con $w = cte$, la integración de (1.7) da como resultado que $\rho \propto a^{-3(w+1)}$. Usando esto en (1.5) e integrando nuevamente ($w \neq -1, k = 0$) se arriba a que $a \propto t^{\frac{2}{3(w+1)}}$. Para el caso $w = -1$ la ecuación de conservación nos dice que $\rho = cte$ y por lo tanto $a \propto e^{\lambda t}$ con λ una constante.

Mientras que (1.5) relaciona la velocidad \dot{a} de la expansión o contracción del universo, la ecuación (1.6) nos informa sobre la aceleración \ddot{a} . Prestemos atención entonces a la ecuación (1.6). Notemos que k no aparece en dicha ecuación por lo que una eventual aceleración no dependerá de las características de la curvatura espacial. La presencia de un término de presión en dicha ecuación es un reflejo del hecho de que en Relatividad General no sólo la materia gravita sino que también la energía y por lo tanto la presión debe estar incluida. Para lo que podemos llamar *materia ordinaria* (radiación, polvo, etc) se espera que tanto la densidad de energía ρ como la presión p sean positivas y satisfagan la *Condición Fuerte de Energía* que dice que $\rho + p \geq 0$ y que $\rho + 3p \geq 0$ [4]. Por lo tanto, si el universo esta constituido por materia ordinaria, una vez que asumimos la positividad de ρ y p junto con la validez de la Condición Fuerte de la Energía, la gravitación siempre es atractiva y la expansión del universo debe ser siempre desacelerada a partir de un evento inicial singular. Hoy $\dot{a} \geq 0$ y en efecto, si la función $a(t) > 0$ tiene siempre

$\ddot{a} < 0$ inevitablemente $a(t)$ debe anularse para algún valor de t finito en el pasado. En tal evento inicial la geometría descrita por la métrica FLRW es singular.

Tanto este evento inicial como el modelo mismo que describe la evolución forman parte de lo que conocemos hoy como *modelo del Big Bang*.

A partir de la evidencia observacional sólida sobre la recesión de las galaxias cercanas brindada por Edwin Hubble en 1929 [5], y las primeras ideas sobre nucleosíntesis presentadas por George Gamow alrededor de 1946 [6], junto con la detección en 1965 [7] de un fondo cósmico de microondas también predicho por Gamow en 1948, el modelo del Big Bang se transformó en la descripción con más consenso sobre cómo pudieron haber sido los acontecimientos en el universo desde los comienzos hasta nuestros días a través de miles de millones de años.

Sin embargo, con el correr de los años el modelo del Big Bang comenzó a enfrentarse con algunos problemas. Puesto que la velocidad de la luz es finita, no todo el universo está accesible a nosotros. Sólo la región dentro del *horizonte de partícula* (esto es, la frontera desde la cual nosotros ya hemos recibido información) está causalmente conectada con nosotros. Puede ser intuitivo que regiones conectadas causalmente sean homogéneas ya que han tenido tiempo de interactuar entre ellas. Sin embargo, la homogeneidad de regiones que no han podido estar en contacto causal y que podemos testear apropiadamente mediante observaciones han conformado lo que se conoce como el *problema del horizonte*. Otro inconveniente que surgió es el llamado *problema de la planitud*. Volviendo a la ecuación de Friedmann (1.5), si definimos el parámetro de Hubble como $H = \dot{a}/a$, usamos que la densidad crítica (la densidad necesaria para que las secciones espaciales del universo sean planas) viene dada por:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.8)$$

y empleamos esta densidad crítica para armarnos las contribuciones adimen-

sionales,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.9)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.10)$$

podemos verificar fácilmente con estas definiciones que a partir de (1.5) se tiene que $\Omega + \Omega_k = 1$. Tanto Ω como Ω_k son cantidades medibles observacionalmente y ya para los '70 era conocido que en el presente $\Omega \approx 1$ (ver por ejemplo [8]). Extrapolando esta cantidad hacia el pasado (usando que $\Omega(t) = \frac{1}{1-a(t)^2}$ para épocas tempranas [1]) revela que el universo tuvo que haber sido extremadamente plano al comienzo de la historia, por ejemplo, el modelo requiere que en la época de nucleosíntesis $\Omega = 1 \pm 10^{-16}$ [1]. Esto significa que las condiciones iniciales para la geometría del universo hayan tenido que ser 'ajustadas' muy finamente, lo que resulta desfavorable para el modelo.

Una posible solución a estos problemas llegó a principios de los '80 cuando Alan Guth propuso que un período de expansión exponencial podría ser la respuesta [9]. La idea es la siguiente: un incremento exponencial del factor de escala $a(t)$ implica que el parámetro de Hubble permanezca constante. Por otro lado podemos tomar a la cantidad $c/H(t)$ como una buena medida del radio del universo observable a un cierto tiempo t . Entonces, cuando $a(t)$ incrementa exponencialmente, el radio de Hubble permanece constante, mientras que cualquier longitud física crece exponencialmente en tamaño. Esto implica que en un breve período de tiempo, dos observadores inicialmente conectados causalmente a una cierta distancia podrían separarse más allá del radio de Hubble durante esta expansión acelerada. Por lo tanto, la parte del universo que hoy observamos podría haber sido mucho más pequeña en el pasado de lo que calculamos simplemente a través de las ecuaciones de Friedmann, y entonces todas estas regiones pudieron haber tenido tiempo para estar conectadas causalmente e interactuar. Esta expansión rápida también conduciría a Ω_k a cero (y por lo tanto $\Omega \rightarrow 1$). Este período de expansión acelerada es conocida como *inflación* y constituyó la primera razón para que

el modelo cosmológico posea una fase (inicial) acelerada. Para una reciente revisión sobre este tópico, ver por ejemplo los trabajos [10] y [11].

Estrictamente hablando, cualquier período acelerado será aquel en el cual $\ddot{a} > 0$. Pero lograr esto, como ya se mencionó más arriba en (1.6) no es fácil de obtener con materia ordinaria en el contexto de la Relatividad General en tanto que la densidad y la presión de los fluidos sean positivas. Lograr que $\ddot{a} > 0$ requiere entonces que:

$$(\rho + 3p) < 0 \Rightarrow p < -\frac{\rho}{3} \quad (1.11)$$

o, si el fluido ideal es descrito por la ecuación de estado $p = w\rho$, la desigualdad (1.11) implica que $w < -1/3$ y por lo tanto la violación de la Condición Fuerte de Energía ya mencionada [4]. Si queremos seguir conservando el hecho de que la densidad debe ser positiva, una fase acelerada en el universo significará que la presión deba ser negativa.

Pero los problemas que el modelo del Big Bang tuvo que afrontar no se detuvieron aquí. Fritz Zwicky en 1933 fue la primera persona que mencionó un faltante de masa en un cúmulo de galaxias, conocido como el cúmulo de Coma [12]. Sin embargo fue a partir de 1970 con el trabajo de V. Rubin que aparecieron las primeras evidencias indirectas más sólidas de la existencia de *materia oscura*, luego del análisis de velocidades de rotación de estrellas en galaxias y el descubrimiento de anomalías en dichas rotaciones a la luz de la dinámica Kepleriana [13]. Si esta dinámica es correcta, las observaciones parecían indicar que debía haber más masa que la que se observa en las galaxias.

Para comienzos de 1990, la visión cosmológica que se tenía era que sólo el 4% de la densidad del universo estaba constituida por átomos como los que conocemos, mientras que el restante 96% lo conformaba la materia oscura. (Para una reciente revisión sobre materia oscura, ver por ejemplo [14]).

1.1.2. Sorpresas a las puertas del siglo XXI

Si bien el modelo cosmológico aceptado parecía dar cuenta de una gran cantidad de observaciones disponibles, año tras año las mismas fueron siendo

cada vez más precisas gracias al avance tecnológico disponible. Es así como algunos autores a partir de 1990 comenzaron a sugerir que teníamos que incorporar un nuevo componente a la densidad total del universo (lo que posteriormente mencionaremos como constante cosmológica) para poder explicar correlaciones observadas en galaxias [15], lograr un mejor acuerdo entre modelo y datos disponibles [16], solucionar conflictos entre el valor observado para Ω y el valor observado del parámetro de Hubble presente H_o [17] y también para salvar una discrepancia entre las edades de algunos cúmulos globulares y la correspondiente del universo aceptada en ese momento [18]. Pero no fue hasta 1998 que se dio el paso final hacia el nuevo paradigma.

Las supernovas del tipo Ia tienen una gran importancia para la cosmología: nos permiten medir grandes distancias a través del universo. Estas explosiones estelares se producen en sistemas binarios de estrellas masivas, y cuando ello sucede la luminosidad de la estrella que explota (o su magnitud absoluta) parece ser siempre la misma en todos estos eventos convirtiéndolas en candelas patronas.

Suponiendo conocida la luminosidad absoluta L de estas supernovas y midiendo el flujo de esa energía F que nos llega a un detector en la Tierra podemos calcular su *distancia luminosa* d_L a través de la sencilla relación:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (1.12)$$

O lo que es equivalente, conocida la magnitud absoluta M de la estrella y observada la magnitud aparente m , la distancia luminosa (medida en megaparsecs) puede inferirse a partir de:

$$m = M + 5 \log(d_L) + 25 \quad (1.13)$$

La motivación para la *definición* de la distancia luminosa (1.12) es que, en ausencia de expansión, el flujo detectado (o brillo aparente) es simplemente la fracción del área, cubierta por un detector, de la esfera que rodea a la fuente multiplicada por la luminosidad L . En este caso d_L es simplemente la distancia ordinaria o real a la fuente en una geometría euclídeana. Como

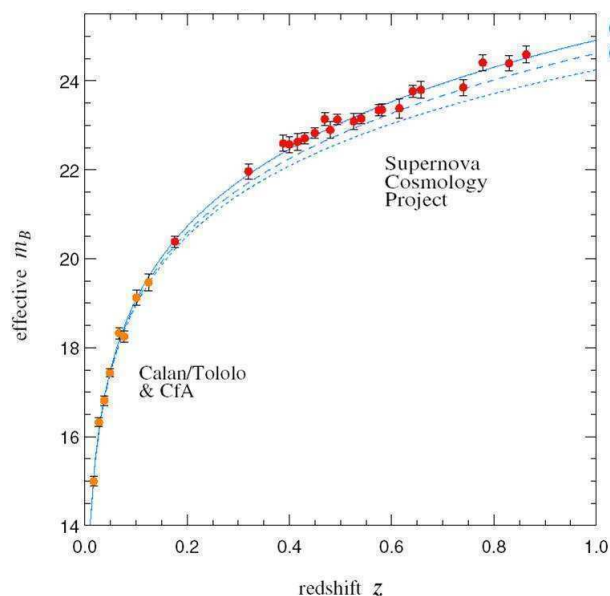


Figura 1.1: Observaciones de las magnitudes aparentes de diversos sets de supernovas del tipo Ia para varios valores de corrimientos al rojo. Las líneas corresponden a ajustes a los datos con diferentes modelos teóricos que contemplan o no la adición de una constante cosmológica además de átomos y materia oscura. Reproducida desde [19]

veremos luego, la expansión del universo complica un poco las cosas.

Cuando dos grupos de trabajo, liderados por Saul Perlmutter y Adam Riess midieron y analizaron los flujos de energía de varias supernovas del tipo Ia para diferentes valores de corrimiento al rojo z se encontraron con un panorama como el que se muestra en la Figura 1.1.

En dicha Figura aparecen, con valores de corrimientos al rojo hasta $z \simeq 0,4$, las primeras supernovas del tipo Ia que fueron calibrando estos trabajos [20]. Y luego, hasta $z \simeq 1$, aparecen las supernovas más distantes detectadas para 1998. Una vez ubicadas en estos *diagramas de Hubble* la idea es encontrar la curva que mejor ajuste los datos, a partir de algún modelo teórico. Como se verá con más en detalle en los capítulos 3 y 4 de la Tesis, la relación entre luminosidad absoluta y flujo de energía en un universo FLRW espacialmente plano ($k = 0$) conduce a que la distancia luminosa a una fuente puntual con

un corrimiento al rojo z viene dada por:

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H} \quad (1.14)$$

donde en el parámetro de Hubble H están contenidas las contribuciones a la densidad total del universo (radiación, átomos, materia oscura, etc.). Cuando se compararon los datos observados a partir de (1.12) con curvas trazadas usando (1.14) los grupos de trabajo se encontraron con que dichas observaciones no podían ser ajustadas con modelos cosmológicos que sólo contemplaran la existencia de átomos y materia oscura. Y se dieron cuenta que si agregaban una contribución del estilo de una constante cosmológica los datos podían ser perfectamente ajustados. En la Figura 1.1 la curva que mejor ajusta es la línea llena, que corresponde a un modelo cosmológico con $\Omega_m = 0,25$ y $\Omega_\Lambda = 0,75$, siendo Ω_m la contribución a la densidad total por parte de los átomos y de materia oscura y Ω_Λ la proporción correspondiente a una constante cosmológica. Este fue el resultado sorprendente al que llegaron los grupos de Perlmutter y Riess en 1998 [21]. La consecuencia del agregado de este nuevo parámetro cosmológico Ω_Λ es que el universo presente estaría en una nueva fase de expansión acelerada como veremos a continuación.

1.1.3. El universo que acelera

El primer físico que probablemente consideró un universo que contemplara una expansión acelerada fue Willem de Sitter [22]. En realidad, de Sitter halló una solución de vacío a las ecuaciones de Einstein para el caso estático y luego Lemaître encontró el cambio de coordenadas apropiado que muestra a tal solución como una expansión acelerada.

Sin embargo, esta solución de de Sitter no era una solución a las ecuaciones de Einstein (1.1) a menos que se agregara del lado izquierdo el término $\Lambda g_{\mu\nu}$. La constante cosmológica Λ fue introducida por Einstein en 1917 para modificar sus ecuaciones del campo gravitatorio con la intención de eliminar soluciones no Machianas de su teoría y obtener un universo cerrado y estático con un valor adecuado de Λ [23]. Si permitimos que el término de constante

cosmológica esté presente en las ecuaciones de Einstein, las ecuaciones de Friedmann (1.5) y (1.6) se transforman en

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.16)$$

A partir de (1.16) vemos que ahora el universo puede entrar en una fase acelerada ($\ddot{a} > 0$) una vez que el término de la constante cosmológica domine sobre el término de la materia. Mientras que el valor de la constante cosmológica no cambia en el tiempo (como su nombre lo sugiere), la densidad de la materia decrece como $1/a^3$ y por lo tanto en algún momento es esperable que sea superado por el término de constante cosmológica y el universo tienda asintóticamente a un universo como el de de Sitter. Definiendo $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H^2)$ vemos que ahora a partir de (1.15) se tiene que,

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (1.17)$$

Como se mencionó anteriormente, las recientes mediciones de corrimiento al rojo cosmológico en supernovas del tipo Ia (consideradas candelas patrones) con valores de z del orden de la unidad muestran que el universo atraviesa actualmente una etapa de expansión acelerada [21, 31]. Pero ésta no es la única línea de investigación que ha revelado este sorprendente descubrimiento.

Hasta que la temperatura media del universo no cayó hasta unos 3200 K, los fotones eran dispersados permanentemente (a través de scatterings de Thomson con los electrones libres). A partir de este momento los protones, neutrones y electrones comenzaron a combinarse para formar átomos estables de hidrógeno y helio fundamentalmente. Este proceso tiene como consecuencia que a $t \simeq 380000$ años después del Big Bang sucediera lo que se conoce como el momento del desacople de la materia y la radiación. A partir de ese momento los fotones no encontraron prácticamente electrones libres para hacer scatterings y pudieron viajar libremente, constituyendo lo que hoy se

conoce como la *Radiación Cósmica de Fondo* (o CMB por sus siglas en inglés) que llena el universo en todas direcciones. Desde su predicción hecha por Gamow en 1948 [6], su descubrimiento por Penzias y Wilson en 1965 [7] hasta la detección de sus anisotropías en la temperatura por primera vez en 1992 por el satélite COBE [24], esta radiación otorga evidencia muy importante de la época temprana del universo, en particular sobre la isotropía, homogeneidad y contenido del mismo, sobre el momento de la recombinación, y sobre el desacople de la materia y la radiación.

Las fluctuaciones en la densidad reflejadas en las pequeñas anisotropías detectadas en la temperatura de la CMB serían las huellas de las semillas que condujeron el colapso gravitatorio de la materia y que luego dieron origen a las estructuras que observamos. Varios relevamientos de galaxias a través de todo el cielo dan cuenta de este escenario [25,26]. También hay otros métodos usados para medir estas variaciones de densidad tales como analizar efectos de lentes gravitatorias [27] o estudios en rayos X [28]. Recientemente, analizando la función de correlación de cierto tipo de galaxias en el Sloan Digital Sky Survey, se detectó un pico en dicha función que establece una escala de 150 Mpc. [29]; una escala compartida con la CMB y que se corresponde a la distancia máxima (*horizonte de sonido*) que una oscilación acústica de bariones (BAO) en forma de ondas pudo viajar hasta el momento del desacople de la materia y la radiación.

Las observaciones más recientes de la radiación cósmica de fondo por parte del satélite WMAP [30], las más actuales de supernovas Ia (*the Union sample*) [31] y la detección del pico de BAO [29] determinan que $-0,0179 < \Omega_k < 0,0081$ (al 95% CL), por lo que Ω tiene un valor muy próximo a la unidad.

Pero estas observaciones también dicen que la contribución de la materia bariónica es del 4% ($\Omega_b = 0,04$), que la materia oscura aporta el 25% ($\Omega_{cdm} = 0,25$) y que la densidad de la constante cosmológica es del 71% ($\Omega_\Lambda = 0,71$) [31]. Estos resultados se muestran gráficamente en la Figura 1.2.

Ya se mencionó que no hay motivos para descartar matemáticamente la presencia del término de constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General. Recordemos que el tensor de segundo orden más

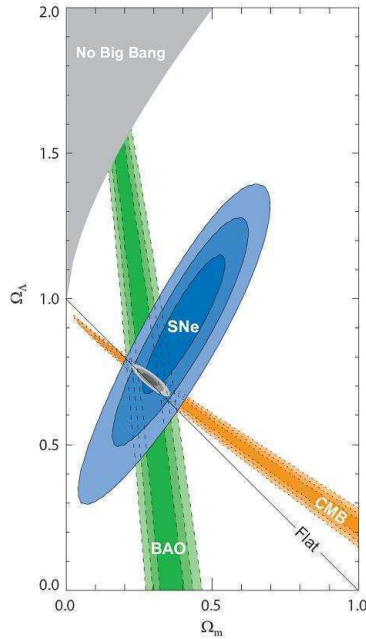


Figura 1.2: Se muestran las elipses de probabilidades conjuntas de los dos parámetros Ω_Λ vs Ω_m al combinar los datos de supernovas del tipo Ia, CMB y BAO. Reproducida desde [31]

general construido con el tensor métrico y sus dos primeras derivadas, con cuadrivergencia nula, simétrico y lineal en las segundas derivadas de la métrica, es el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ con el término de constante cosmológica incluido [32,33]. Por otra parte, es fácil ver que si el término de constante cosmológica es llevado al lado derecho de las ecuaciones de Einstein, éste puede verse como parte del término de materia escribiéndolo en la forma de un tensor de energía-momento de la forma $T_\nu^\mu = \text{diag}(\Lambda, -\Lambda, -\Lambda, -\Lambda)$; o sea, puede verse como un fluido ideal con una ecuación de estado $p = -\rho$ o $w = -1$. Esto es justamente lo que hace del modelo Λ CDM (Λ Cold Dark Matter) una descripción tan exitosa. Cuando se combinan los sets de datos observacionales se encuentra que la contribución del fluido que hace acelerar al universo posee una ecuación de estado con $w \simeq -0,97 \pm 0,06$ [31]. Este fluido por lo tanto parece satisfacer (1.11) y por lo tanto violar la Condición Fuerte de Energía. La Figura 1.3 muestra esta situación. Es interesante notar aquí que las observaciones conjuntas mostradas en la Figura 1.3 no descar-

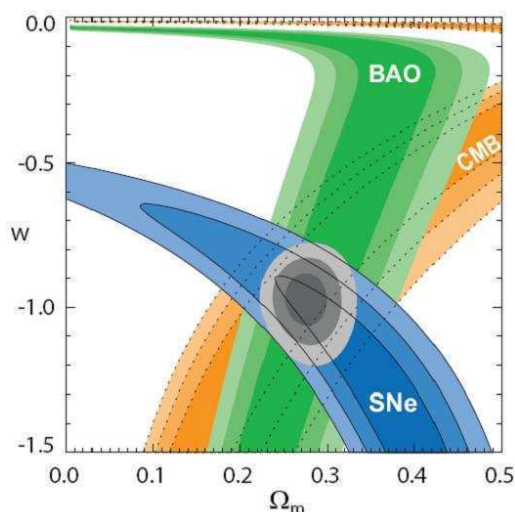


Figura 1.3: Se muestran las elipses de probabilidades conjuntas de los dos parámetros w vs Ω_m al combinar los datos de supernovas del tipo Ia, CMB y BAO. La superposición de los datos parece favorecer modelos con $w \simeq -1$. Reproducida desde [31]

tan modelos teóricos que contemplen fluidos con $w < -1$. Estos modelos se conocen como *modelos fantasmas* [34] y tienen la curiosa propiedad de que al ser $w < -1$ la densidad de energía de tal fluido *crece* con la expansión del universo en vez de diluirse, prediciendo en un tiempo finito la existencia de un *Big Rip* del espacio-tiempo.

Entonces, el panorama actual para la evolución del universo, como se infiere de las observaciones, es que luego del período inflacionario por el que brevemente pudo haber transitado siguió una época dominada por la radiación (un fluido con $w = 1/3$), luego una dominación por parte de la materia ($w = 0$) para finalmente aparecer una segunda era de expansión acelerada por la que actualmente estaríamos transcurriendo.

A pesar de este éxito, por otro lado las teorías cuánticas de las interacciones fundamentales prevén la existencia de una energía de vacío asociada al estado cuántico fundamental de los campos cuya ecuación de estado coincide con la de la constante cosmológica. Notablemente, el valor estimado de esta energía de vacío llega a ser 120 órdenes de magnitud mayor que el valor observado, lo que constituye uno de los enigmas que desafía a cosmólogos y

físicos en general [35,36] y se le ha dado el status de *problema de la constante cosmológica*. Otro inconveniente al que frecuentemente se hace referencia en la literatura y que debe afrontar la constante cosmológica es el llamado *problema de la coincidencia*, el cual tiene que ver con el hecho de que el período de transición entre la dominación del universo por parte de la materia y la dominación por la constante cosmológica es muy corto comparado a otras escalas temporales cosmológicas y parece haber sucedido, en términos de z , recientemente. Tanto estos “problemas” como además la cuestión de agregar una nueva constante universal al modelo cosmológico estándar y tener que ir en búsqueda de una explicación a su valor particular, han llevado a la comunidad científica a explorar otras variantes para explicar la aceleración del universo.

Genéricamente, se denomina *energía oscura* [37] a la entidad con la que se trata de describir al fluido que contribuye con más del 70 % de la densidad de energía del universo y hace que la expansión del mismo sea acelerada [38].

En los últimos 11 años desde el descubrimiento de la energía oscura por parte de S. Perlmutter y A. Riess, muchos modelos teóricos han sido desarrollados para tratar de describir este fluido con presión negativa [39–41].

Las teorías de *quintaesencia* [35,42] proponen un campo *ad hoc* cuyo potencial es escogido para lograr el efecto de presión negativa que le permita tomar el papel de energía oscura. Por un lado, el reemplazo de la constante Λ por un campo brinda una mayor flexibilidad al modelo y una mayor capacidad de describir los fenómenos, siendo estos modelos los típicos del grupo de una energía oscura dinámica; por ejemplo la dinámica de las perturbaciones del campo puede dejar huellas en la radiación cósmica de fondo que permitan diferenciar los modelos de quintaesencia de una mera constante cosmológica, o nueva física puede surgir de la incorporación de quintaesencia a las teorías unificadas de las interacciones fundamentales. Pero por otro lado, la quintaesencia requiere el ajuste de condiciones iniciales muy críticas para dar cuenta de los valores actuales de energía oscura. Se ha tratado de eludir estas dificultades proponiendo términos cinéticos no lineales en el lagrangiano de quintaesencia [43].

Recientemente se ha propuesto un lagrangiano tipo Born-Infeld para la

quintaesencia [44], que produce una ecuación de estado semejante a la de los modelos de gas de Chaplygin generalizado [45]. La comparación de este modelo con datos tomados de supernovas Ia y de fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo deja abierto un cierto rango de parámetros en la ecuación de estado del gas compatible con las observaciones.

Lagrangianos tipo Born-Infeld han sido utilizados también en el contexto de teoría de "branas" (donde nuestro universo sería el borde cuadridimensional de un espacio-tiempo de 5 dimensiones). Algunos autores sostienen que un único campo escalar de este tipo podría cumplir el doble papel de "inflatón" en el universo primitivo y de energía oscura en el universo actual [46].

Una línea de trabajo diferente busca explicar la expansión acelerada sin recurrir a un nuevo tipo de campo o fluido. En su lugar propone distintas modificaciones de las ecuaciones de Einstein en un escenario de materia y radiación ordinarias [47–49]. Algunas de estas variantes se desarrollan apelado a más dimensiones espaciales [50, 51]. En general existe una amplia gama de posibles lagrangianos cuadráticos en la curvatura para generalizar el lagrangiano de Einstein-Hilbert. Algunos de ellos, los lagrangianos de Lovelock [52, 53], conducen a ecuaciones pseudo-lineales en las derivadas segundas de la métrica.

Otros más generales, han pasado a constituir las llamadas teorías $f(R)$ de la gravedad en donde los lagrangianos los constituyen funciones genéricas del escalar de curvatura R [54–58]. Algunas de las teorías $f(R)$ propuestas en los últimos años parecen dar una explicación alternativa al problema de la energía oscura y la aceleración del universo (ver por ejemplo [59–63]). Sin embargo, existe una controversia sobre cuáles de las propuestas satisfacen cotas existentes en el régimen de campos gravitatorios débiles [64, 65] o superan criterios de estabildades gravitatorias [66]. Algunas revisiones del tema pueden consultarse en [67–69].

En resumen, si bien el modelo Λ CDM goza de un gran éxito gracias a la precisión increíble con que las observaciones más recientes se han llevado a cabo, nada se sabe sobre la *naturaleza* del 96 % del contenido del universo, en particular del ~ 70 % que conforma la energía oscura. Se estima que las distintas alternativas para explicar la energía oscura podrían ser contrastadas

con mayor precisión con los resultados que en pocos años entregarán satélites como el Supernova Acceleration Probe (SNAP) [70].

1.2. Propósito y desarrollo de la Tesis

En esta Tesis se propone investigar algunas alternativas sugeridas en la literatura para explicar la expansión acelerada del universo y la naturaleza de la energía oscura y realizar una contribución a las mismas.

Puesto que la evidencia que dio origen a este enigma en la cosmología actual ha sido el análisis de las distancias luminosas a supernovas del tipo Ia, y además por tratarse éstas de las pericias más contundentes, el trabajo presente busca encarar y contestar el asunto desde dos perspectivas complementarias: 1) ¿Son las distancias luminosas afectadas por el hecho de que la electrodinámica que rige la propagación de la luz podría ser incorrecta a escala cosmológica? 2) ¿Son las distancias luminosas afectadas si la gravedad que describe la geometría por la que los rayos de luz se propagan fuera modificada a escalas cosmológicas?

El presente trabajo entonces está dividido en dos partes. Por un lado se plantea y analiza una posible alternativa para la interpretación de las mediciones del flujo luminoso proveniente de supernovas del tipo Ia, puesto que son las observaciones que dieron origen a partir de 1998 al problema de la energía oscura. Estas mediciones son utilizadas cotidianamente para el cálculo de las distancias cosmológicas en donde intervienen diversos parámetros cosmológicos y además la suposición de que la propagación de la luz está perfectamente descrita por la teoría lineal de Maxwell del electromagnetismo.

Decidimos entonces estudiar algún posible efecto de teorías de electrodinámica no-lineales sobre las relaciones usualmente utilizadas en cosmología. Para ello tomamos el caso de lagrangianos tipo Born-Infeld [71], los cuales han surgido con motivaciones tales como evitar la divergencia en la autoenergía de una partícula cargada puntual; además algunos modelos recientes que intentan explicar la expansión acelerada del universo están basados en estas teorías [72–74] o también lagrangianos tipo Born-Infeld han sido utilizados en el contexto de teorías de branas como se mencionó más arriba. En la teoría

de Born-Infeld se introduce una nueva constante fundamental b con unidades de campo. Cuando $b \rightarrow \infty$ se recupera la teoría de Maxwell.

Conociendo cuales son las ecuaciones dinámicas para la teoría de Born-Infeld, en el capítulo 2 analizamos los efectos de la electrodinámica no lineal en presencia de campos externos para el caso de la propagación de una onda electromagnética de Born-Infeld. Algunos formalismos al respecto han sido desarrollados por Plebanski, Novello y otros autores [75–77] quienes, estudiando las superficies características de las ecuaciones de onda no lineales, mostraron que en presencia de un campo de fondo la propagación se realiza por el interior del cono de luz. En dicho capítulo se exhiben soluciones exactas de la teoría de Born-Infeld para ondas electromagnéticas planas propagándose en presencia de campos magnéticos y eléctricos estáticos de fondo.

Siguiendo esta idea, en el capítulo 3 estudiamos cómo es la propagación de una onda de Born-Infeld en una métrica FLRW con un campo magnético de fondo de origen cosmológico. Calculamos las modificaciones a las ecuaciones correspondientes del flujo luminoso y la distancia luminosa a una fuente puntual, tal como una supernova Ia, ecuaciones que cotidianamente se utilizan en la cosmología y cuyas correcciones podrían decirnos que estamos malinterpretando los datos observacionales. Con este estudio damos por concluida la primera etapa de la Tesis.

En el capítulo 4 se presenta la segunda parte de esta Tesis que consiste en estudiar otro tipo de modificaciones a las teorías clásicas de campos y sus aplicaciones a la cosmología; modificaciones a las ecuaciones de Einstein que apelen a lagrangianos más generales (teorías $f(R)$ de la gravedad u otras). Mientras que con la teoría de Born-Infeld buscamos una corrección a cortas distancias de la teoría de Maxwell, las teorías $f(R)$ ofrecen modificaciones a largas distancias de la teoría de Einstein de la Relatividad General.

La idea de buscar teorías alternativas para describir la gravitación no es nueva. Una de las primeras personas en preguntarse si la teoría de Einstein era la única capaz de describir a la gravedad fue Sir Arthur S. Eddington [78]. Otro ejemplo es el de Robert Dicke junto a Carls Brans, quienes desarrollaron una teoría alternativa que lleva sus nombres [79]. Quizás sea prematuro decir que la Relatividad General deba ser modificada para dar cuenta de

los problemas presentados en la sección anterior, pero a pesar de que muchas veces se tenga que pagar el precio de aumentar la complejidad de los modelos, analizar modificaciones a la teoría existente o buscar teorías alternativas trae la ventaja de indagarse sobre si la Relatividad General es o no la única teoría que puede describir los fenómenos gravitacionales.

Siguiendo este espíritu de investigación, se halló una solución cosmológica en el marco del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General [80, 84] en lugar de hallar variantes en el ámbito de las $f(R)$. Mientras que las teorías $f(R)$ presentan en general ecuaciones de cuarto orden para la métrica, una teoría de gravedad modificada basada en términos de la geometría de Weitzenböck [85] presenta, al igual que Relatividad General, ecuaciones de movimiento de segundo orden. En estas teorías será la torsión, una propiedad geométrica del espacio-tiempo, la que conduzca la aceleración del universo en lugar de una energía oscura. Se contrastó, con datos observacionales provenientes de tres líneas de investigación independientes, la solución hallada en el marco de estas nuevas teorías de gravedad modificada para poner cotas al único parámetro adicional que posee ésta frente al modelo Λ CDM.

Por último, en el capítulo 5 se resumen las conclusiones de esta Tesis.

A modo de síntesis entonces, digamos que si bien se conocen muchas posibles soluciones al problema de la energía oscura y la aceleración del universo, poco desarrollo ha sido llevado a cabo en el análisis de efectos no lineales que podrían estar presentes en la propagación de ondas electromagnéticas; y como se mencionó anteriormente, la distancia luminosa a una fuente es cotidianamente utilizada en cosmología y es además la manera más directa y consistente con que se determina la historia reciente de la expansión del universo.

Por otra parte, la gran mayoría de las teorías de gravedad modificada que se han estado elaborando a la fecha (teorías $f(R)$), son modificaciones de la Relatividad General que conducen en general a ecuaciones de movimiento de cuarto orden para la métrica y muy pocos de estos modelos han superado requisitos mínimos de estabilidad y que reproduzcan resultados conocidos en el régimen de campo débil.

Por lo tanto, el trabajo de esta Tesis provee un análisis de modelos elec-

rodinámicos no lineales mediante lagrangianos de Born-Infeld aplicados a la propagación de un rayo de luz en un contexto cosmológico; y un estudio de teorías de gravedad modificada para explicar la aceleración del universo pero en el contexto del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General cuyas ecuaciones de movimiento son siempre de segundo orden lo que las convierte en teorías mucho más sencillas de analizar que las mencionadas teorías $f(R)$.

Capítulo 2

Efectos anisótropos en la propagación de la luz

En este capítulo se calculan soluciones exactas de la teoría de Born-Infeld para ondas electromagnéticas planas propagándose en presencia de campos estáticos de fondo.

El carácter no-lineal de las ecuaciones de Born-Infeld genera una interacción entre la onda que se propaga y el campo de fondo que cambia la velocidad de propagación y además adiciona una componente longitudinal a la onda. Como consecuencia de ello, en la presencia de un fondo de naturaleza magnética, la dirección del rayo difiere de la dirección en la que la onda se propaga; un comportamiento que se asemeja al de una onda propagándose en un medio anisótropo.

2.1. Introducción

En 1934 Born e Infeld [71, 86] propusieron una teoría electrodinámica no-lineal con la idea de obtener un valor finito para la auto-energía de una carga eléctrica puntual. El lagrangiano de Born-Infeld conduce a ecuaciones de campo cuya solución estática y esféricamente simétrica provee un valor finito b para el campo electrostático en el origen. La constante b aparece en el lagrangiano de Born-Infeld como una nueva constante universal que pone

una cota máxima al valor del campo.

Siguiendo las ideas de Einstein, Born e Infeld consideraron al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y al tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (A^μ el potencial electromagnético) como las partes simétrica y antisimétrica de un único campo $b g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$. Con estas ideas presentes, ellos postularon la densidad Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{|\det(b g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})|} - \sqrt{-\det(b g_{\mu\nu})} \right] \quad (2.1)$$

donde el segundo término se elige de tal manera que el lagrangiano de Born-Infeld tienda al correspondiente de Maxwell cuando $b \rightarrow \infty$. En particular, \mathcal{L} se anula en ausencia de campos electromagnéticos.

En cuatro dimensiones, este lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} \right) \quad (2.2)$$

donde S y P son los invariantes de campo escalar y pseudoescalar respectivamente definidos como:

$$S = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$P = \frac{1}{4} {}^*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.4)$$

donde en la última ecuación el tensor dual está definido como ${}^*F_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} F^{kl}$ con ε_{ijkl} la densidad tensorial de Levi-Civita. Para el caso del espacio-tiempo de Minkowski se tiene que $2S = |\mathbb{B}|^2 - |\mathbb{E}|^2$ y $P = \mathbb{E} \cdot \mathbb{B}$, siendo \mathbb{B} y \mathbb{E} los campos magnético y eléctrico totales respectivamente. La electrodinámica no-lineal presenta un rasgo típico que es la presencia de birrefringencia, o sea, que las ecuaciones para el cuadvivector de onda k_μ no poseen solución unívoca. Sin embargo, la teoría de Born-Infeld es la única teoría no-lineal de campos de spin 1 que contempla propagación causal y ausencia de birefringencia [87, 88].

Es un hecho bien conocido que en el caso de la electrodinámica no-lineal la presencia de campos de fondo modifica la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas que allí viajen. Esto ya ha sido estudiado en varios

trabajos [75–77, 88–90] considerando la propagación de discontinuidades. El resultado es que la velocidad de fase es menor que la velocidad de la luz c . Además, los autores mencionados hallaron que la dirección del cuadvectores de onda puede describirse a través de geodésicas nulas de una geometría efectiva que depende del campo de fondo [76]. Cuando no hay campo de fondo presente, la solución de onda plana es la misma tanto para la teoría de Maxwell como para la de Born-Infeld, hecho que ya había sido mencionado por Schrödinger [91].

En la siguiente sección se obtienen las soluciones exactas para ondas planas de Born-Infeld propagándose en presencia de un campo de fondo. Se encontró también un rasgo desconocido hasta el momento que consiste en que la presencia de un fondo magnético modifica la dirección del rayo (dirección en que viaja la energía), la cual no coincide con la dirección de propagación [92]. Esto es lo que da origen al título de este capítulo puesto que es lo que sucedería en un medio anisótropo.

2.2. Solución de ondas planas de Born-Infeld

En esta sección se hará uso de un lenguaje geométrico, en donde frecuentemente aparecerán *formas diferenciales* (o simplemente *formas*) con el fin de aprovechar algunas de sus propiedades y ventajas en algunos cálculos. Ver por ejemplo [93] para un estudio en detalle sobre este formalismo.

Se denominan *p-formas* a los tensores covariantes completamente antisimétricos que tienen p índices, con $p \leq n$ donde n es la dimensión del espacio. Así, los escalares son 0-formas, cualquier vector covariante V_μ es una 1-forma, los tensores antisimétricos del tipo $F_{\mu\nu}$ son 2-formas, etc.

El *producto wedge* \wedge es el producto tensorial antisimetrizado entre p -formas. Dada una p -forma A y una q -forma B , podemos construirnos una $(p+q)$ -forma a través de la definición del producto wedge, cuyas componentes se escriben como:

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p! q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]} \quad (2.5)$$

donde los corchetes indican antisimetrización de dichos índices. De esta forma, por ejemplo, las componentes del producto wedge de dos 1-formas valen: $(A \wedge B)_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$. Este producto además tiene la propiedad de que se satisface que: $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$.

La *derivada exterior* d , nos permite derivar una p -forma para obtener una $(p+1)$ -forma. Esta derivada está definida como la derivada parcial totalmente antisimetrizada y apropiadamente normalizada. Es decir, para una p -forma A , se escribe:

$$dA = \frac{1}{p!} \frac{\partial A_{i\dots p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^p \quad (2.6)$$

o escribiendo sus componentes,

$$(dA)_{\mu_1\dots\mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\dots\mu_{p+1}]} \quad (2.7)$$

Por ejemplo, para la 1-forma con componentes V_ν , su derivada exterior consiste en realizar la operación $(dV)_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$.

La razón por la cual la derivada exterior merece una especial atención es porque sus componentes transforman como las de un tensor inclusive en espacio-tiempos curvados, sin importar cuál es la métrica o el sistema de coordenadas.

Otras propiedades importantes de la derivada exterior que usaremos son el hecho que $d(dA) \equiv 0$ para cualquier p -forma A y que $d\omega \wedge d\omega \equiv 0$ para cualquier 1-forma ω . La nilpotencia del operador d es consecuencia de la misma definición de la derivada exterior y del hecho que las derivadas parciales conmutan ($\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$).

La electrodinámica provee un típico y elegante ejemplo del uso de formas diferenciales. Como es conocido, las ecuaciones de Maxwell (sin fuentes) del electromagnetismo pueden escribirse a partir del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ como:

$$F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\mu\nu,\lambda} = 0 \quad (2.8)$$

$$(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (2.9)$$

donde hemos usado la notación de que una coma indica derivada parcial.

A partir de la definición de la derivada exterior, la ecuación (2.8) puede expresarse simplemente como $dF = 0$ siendo F una 2-forma. Pero esto indica entonces que además existe una 1-forma A (el potencial electromagnético A_μ) tal que $F = dA$. Por otro lado, la ecuación (2.9) se escribe como $d(*F) = 0$.

En las siguientes subsecciones usaremos este lenguaje para analizar el caso de ondas planas de Born-Infeld en presencia de campos de fondo.

2.2.1. Caso con fondo magnético

El campo F de Born-Infeld satisface las ecuaciones,

$$F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\mu\nu,\lambda} = 0 \quad (2.10)$$

$$(\sqrt{-g} \mathcal{F}^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \quad (2.11)$$

donde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ representa las componentes de la 2-forma \mathcal{F} definida como:

$$\mathcal{F} = \frac{F - \frac{P}{b^2} *F}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \quad (2.12)$$

La ecuación (2.10) es una identidad que proviene de la definición de $F_{\mu\nu}$, mientras que la ecuación (2.11) es la ecuación de Euler-Lagrange que resulta de variar el lagrangiano (2.2).

Nuevamente, aquí podemos usar el hecho que $F = dA$, y las ecuaciones (2.10) y (2.11) pueden reescribirse como:

$$dF = 0 \quad (2.13)$$

$$d*\mathcal{F} = 0 \quad (2.14)$$

En este capítulo se buscan hallar y mostrar soluciones de ondas planas en una geometría plana de Minkowski, por lo que el intervalo aquí lo escribimos como:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.15)$$

En presencia de un campo magnético uniforme de fondo, se propone la

solución [92]:

$$F = E(\xi) d\xi \wedge dx + B_B dx \wedge dz - B_E dy \wedge dz - B_L dx \wedge dy + \gamma E(\xi) dt \wedge dz \quad (2.16)$$

donde:

$$\xi = z - \beta t \quad (2.17)$$

es la fase de la onda y es la única variable en la solución; mientras que B_B , B_E , B_L son las componentes del campo magnético uniforme de fondo $\mathbf{B} = B_E \hat{x} + B_B \hat{y} + B_L \hat{z}$.

La ecuación (2.16) significa en notación de índices $F_{xz} = -E(\xi) + B_B$, $F_{tx} = -\beta E(\xi)$, etc. Por lo tanto, el campo eléctrico total es $\mathbb{E} = -E(\xi)\hat{x} + \gamma E(\xi)\hat{z}$, y el campo magnético total es $\mathbb{B} = -E(\xi)\hat{y} + \mathbf{B}$.

Observemos que $\beta \leq 1$ en la ecuación (2.17) tiene en cuenta el hecho de que las ondas podrían propagarse dentro del cono de luz. La solución propuesta (2.16) cumple con la ecuación (2.13) para cualquier función $E(\xi)$ (ya que por la propiedad mencionada más arriba $d\xi \wedge d\xi \equiv 0$, etc.). En la Figura 2.1 se muestra la orientación de los campos de la onda como también el del campo de fondo.

Los invariantes S y P para esta solución ahora se escriben,

$$2S = (1 - \gamma^2 - \beta^2) E(\xi)^2 + B^2 - 2E(\xi)B_B \quad (2.18)$$

$$P = (-\beta B_E + \gamma B_L) E(\xi). \quad (2.19)$$

donde $B^2 = B_L^2 + B_E^2 + B_B^2$. Para satisfacer la ecuación (2.14), es conveniente

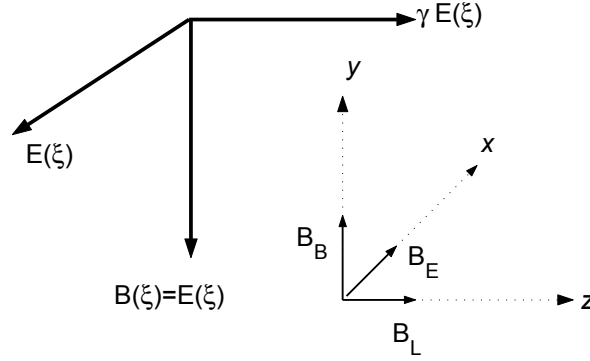


Figura 2.1: Esquema representando la orientación de los campos de la onda y del fondo magnético uniforme.

analizar el numerador en *F . De acuerdo a (2.12) éste se escribe como:

$$\begin{aligned}
 & * \left(F - \frac{P}{b^2} {}^*F \right) = {}^*F + \frac{P}{b^2} F \\
 & = E(\xi) d(t - \beta dz) \wedge dy - B_B dt \wedge dy - B_E dt \wedge dx \\
 & \quad - B_L dt \wedge dz - \gamma E(\xi) dx \wedge dy + b^{-2} (-\beta B_E + \gamma B_L) \\
 & \quad E(\xi) (E(\xi) d\xi \wedge dx + B_B dx \wedge dz - B_E dy \wedge dz - \\
 & \quad B_L dx \wedge dy + \gamma E(\xi) dt \wedge dz)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si ahora se reemplaza dz por $d\xi + \beta dt$, el resultado anterior puede reescribirse como,

$$\begin{aligned}
 & * \left(F - \frac{P}{b^2} {}^*F \right) \\
 & = (-B_E - b^{-2} \beta B_B (-\beta B_E + \gamma B_L) E(\xi)) dt \wedge dx \\
 & \quad + ((1 - \beta^2)E(\xi) - B_B - b^{-2} \beta B_E (\beta B_E - \gamma B_L) E(\xi)) \\
 & \quad dt \wedge dy + (-\gamma E(\xi) + b^{-2} B_L (\beta B_E - \gamma B_L) E(\xi)) \\
 & \quad dx \wedge dy + d\xi \wedge \dots
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por la propiedad de la derivada exterior ya mencionada, esto es que $d(d\xi \wedge \dots) \equiv 0$, y debido a que ξ es la única variable en el campo F , entonces el cumplimiento de (2.14) depende exclusivamente del comportamiento de los

tres primeros términos en el resultado que se muestra en la ecuación (2.21). Pero teniendo en cuenta que la diferenciación de estos términos con respecto a ξ arrojarán tres componentes independientes, entonces la ecuación (2.14) sólo puede satisfacerse si las componentes tx , ty y xy de ${}^*\mathcal{F}$ son constantes. El hecho de que la componente xy en la ecuación (2.21) sea lineal y homogénea en $E(\xi)$, pero que esto no suceda con el denominador de (2.12), hace que para que se satisfaga que ${}^*\mathcal{F}_{xy} = \text{constante}$, deberá tenerse que $E(\xi) = 0$ o también que [92],

$$\gamma = \frac{\frac{B_E B_L}{b^2}}{1 + \frac{B_L^2}{b^2}} \beta \quad (2.22)$$

Si ahora este valor de γ se reemplaza en las componentes ${}^*\mathcal{F}_{tx}$ y ${}^*\mathcal{F}_{ty}$, éstas serán constantes para β igual a [92]:

$$\beta = \sqrt{\frac{1 + \frac{B_L^2}{b^2}}{1 + \frac{B^2}{b^2}}} \quad (2.23)$$

De esta manera, los valores de las componentes examinadas resultan ser independientes de la función $E(\xi)$,

$${}^*\mathcal{F}_{tx} = -\frac{B_E}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}}}, \quad {}^*\mathcal{F}_{ty} = -\frac{B_B}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}}}, \quad {}^*\mathcal{F}_{xy} = 0 \quad (2.24)$$

y la ecuación (2.14) se satisface como era necesario.

Los valores obtenidos para γ y β implican que,

$$\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} = \sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}} - \frac{B_B E(\xi)}{b^2 \sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2}}} \quad (2.25)$$

Por otra parte, el valor $\beta < 1$ en (2.23) es la velocidad de propagación de una onda electromagnética de Born-Infeld en presencia de un campo magnético uniforme de fondo. Aquí es importante tener en cuenta que la constante $\gamma \neq 0$ en (2.22) implica la existencia de una componente eléctrica longitudinal no nula de la onda debida a su interacción con el campo de fondo [92]. Por supuesto, estas diferencias con el caso de Maxwell desaparecen

en el límite donde $b \rightarrow \infty$.

Se considera ahora el flujo de energía para una onda de Born-Infeld en presencia de un campo de fondo. El tensor energía-momento en la teoría de Born-Infeld es,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[F^\mu{}_\rho \mathcal{F}^{\nu\rho} + b^2 g^{\mu\nu} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

En particular, las componentes del flujo de energía son relativamente sencillas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} T^{tz} &= -\frac{1}{4\pi} F^t{}_\rho \mathcal{F}^{z\rho} = -\frac{1}{4\pi} (F^t{}_x \mathcal{F}^{zx} + F^t{}_y \mathcal{F}^{zy}) \\ &= \frac{F_{tx}F_{xz} + F_{ty}F_{yz}}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cabe entonces definir el vector de Poynting de la electrodinámica de Born-Infeld como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \quad (2.28)$$

Las componentes del flujo de energía asociadas con la solución hallada resultan ser [92]:

$$\mathcal{S}_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma E(\xi)(E(\xi) - B_B)}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \quad (2.29)$$

$$\mathcal{S}_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\beta E(\xi)B_L + \gamma E(\xi)B_E}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{S}_z = \frac{1}{4\pi} \frac{\beta E(\xi)(E(\xi) - B_B)}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \quad (2.31)$$

Como es usual cuando $E(\xi)$ es una función periódica, se consideran sólo los promedios temporales del flujo de energía. A diferencia de lo que sucede en la teoría de Maxwell, los rasgos no-lineales de la teoría de Born-Infeld harán

aparecer ahora componentes transversales no nulas del vector de Poynting $\langle \mathcal{S} \rangle$. Esta característica puede verse sencillamente por ejemplo en $\langle \mathcal{S}_x \rangle$. Aquí, \mathcal{S}_x es el flujo de energía a lo largo de la dirección de polarización de la onda debido a la existencia peculiar de un campo eléctrico longitudinal, el cual como ya ha sido mencionado, es una consecuencia de la interacción entre la onda y el campo de fondo.

Para una onda monocromática escrita como $E(\xi) = E_0 \cos(\beta^{-1}\omega\xi)$, el promedio del flujo de energía al orden más bajo en b^{-2} es

$$\langle \mathcal{S}_x \rangle = \frac{E_0^2 B_L B_E}{8 \pi b^2} + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (2.32)$$

$$\langle \mathcal{S}_y \rangle = \frac{E_0^2 B_L B_B}{8 \pi b^2} + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (2.33)$$

$$\langle \mathcal{S}_z \rangle = \frac{E_0^2}{8 \pi} \left[1 - \frac{4B_B^2 + 2B_E^2 + B_L^2}{2b^2} \right] + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (2.34)$$

Bajo esta aproximación, la parte transversal de $\langle \mathcal{S} \rangle$ resulta ser paralela a la componente transversal del campo magnético de fondo. El ángulo α entre $\langle \mathcal{S} \rangle$ y la dirección de propagación se encuentra que vale [92]:

$$\tan \alpha = \frac{B_L \sqrt{B_E^2 + B_B^2}}{b^2} + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (2.35)$$

De la misma manera, calculando la densidad de energía resulta ser [92]:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{|\mathbf{E}|^2 + b^{-2} P^2}{4 \pi \sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} - \frac{b^2}{4 \pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} \right) \\ &= \frac{b^2}{4 \pi} \left[\frac{1 + b^{-2} |\mathbb{B}|^2}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Y entonces, la densidad de energía promediada para la solución estudiada

aquí se escribirá como:

$$\begin{aligned} \langle T^{00} \rangle = & \frac{E_0^2}{8\pi} \left[1 - \frac{3B_B^2 + B_E^2 + B_L^2}{2b^2} \right] + \frac{B^2}{8\pi} \left[1 - \frac{B^2}{4b^2} \right] \\ & + \mathcal{O}(b^{-4}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

la cual es menor que aquella esperada para la densidad de energía del caso Maxwelliano. Observemos además que, al orden b^{-2} , el módulo de la velocidad con que viaja la energía $\langle \mathcal{S} \rangle \langle T^{00} \rangle_{onda}^{-1}$ no difiere de la velocidad de fase β .

2.2.2. Caso con fondo eléctrico

Se analiza en esta subsección, el caso en donde el campo de fondo presente es un campo eléctrico $\mathcal{E} = E_E \hat{x} + E_B \hat{y} + E_L \hat{z}$. Realizando el mismo procedimiento que en la sección anterior, la solución de (2.13) y (2.14) es [92]:

$$\begin{aligned} F = & E(\xi) d\xi \wedge dx + E_E dt \wedge dx + E_B dt \wedge dy \\ & + E_L dt \wedge dz + \gamma E(\xi) dt \wedge dz \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde ahora

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{E_B^2 + E_E^2}{b^2}}, \quad \gamma = \frac{E_L E_E}{b^2 \sqrt{1 - \frac{E_B^2 + E_E^2}{b^2}}} \quad (2.39)$$

Entonces se tiene que,

$$\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} = \sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}^2}{b^2}} \left(1 + \frac{E_E E(\xi)}{\beta b^2} \right) \quad (2.40)$$

y ahora las componentes constantes de ${}^*\mathcal{F}$ son,

$$\begin{aligned} {}^*\mathcal{F}_{tx} &= -\sqrt{\frac{1 - \frac{E_E^2 + E_B^2}{b^2}}{1 - \frac{\mathcal{E}^2}{b^2}}} E_B, & {}^*\mathcal{F}_{xy} &= -\frac{E_L}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}^2}{b^2}}}, \\ {}^*\mathcal{F}_{ty} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{E_E^2 + E_B^2}{b^2}}{1 - \frac{\mathcal{E}^2}{b^2}}} E_E \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $\mathcal{E}^2 = E_B^2 + E_L^2 + E_E^2$. Las componentes del vector de Poynting \mathbf{S} para este caso se escriben como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x &= \frac{1}{4\pi} \frac{(E_L + \gamma E(\xi))E(\xi)}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}}, & \mathcal{S}_y &= 0, \\ \mathcal{S}_z &= -\frac{1}{4\pi} \frac{(E_E - \beta E(\xi))E(\xi)}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Encontramos aquí un hecho remarcable. Puesto que el factor $E_L + \gamma E(\xi)$ en el numerador de \mathcal{S}_x es proporcional a la raíz cuadrada del denominador, estos factores se cancelan y \mathcal{S}_x resulta ser lineal y homogéneo en $E(\xi)$. Por lo tanto hay una diferencia fundamental entre el caso en el que una onda electromagnética de Born-Infeld se propaga en un fondo magnético o eléctrico: en el segundo caso, la dirección del promedio temporal del flujo de energía coincide con la dirección de propagación mientras que como se mostró en la sección anterior este hecho no sucede en el caso magnético. Basta observar que en el caso en consideración en esta subsección, los flujos de energía promediados resultan ser,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_x \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{S}_y \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{S}_z \rangle &= \frac{E_0^2}{8\pi} \left(1 + \frac{2E_E^2 + E_L^2}{2b^2} \right) + \mathcal{O}(b^{-4}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde E_0 es la amplitud de la onda.

Por completitud, las velocidades de propagación halladas aquí (ecuaciones

(2.23) y (2.39)) pueden ser comparadas con los resultados obtenidos por otros autores en [75] y en [76]. En esos trabajos se analiza la propagación de discontinuidades en presencia de campos de fondo para una teoría no-lineal general. Bajo este estudio los autores muestran que la ecuación que gobierna al cuadvivector de onda puede entenderse como si los rayos se propagaran a lo largo de geodésicas nulas de una métrica *efectiva*. Para el caso de la electrodinámica de Born-Infeld, la métrica efectiva $\bar{g}_{\mu\nu}$ es [76]:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (b^2 + \frac{1}{2}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})g_{\mu\nu} + F_{\mu\lambda}F^{\lambda}_{\nu} \quad (2.44)$$

siendo $g_{\mu\nu}$ la métrica ordinaria, y $F_{\mu\nu}$ es el campo electromagnético de fondo donde los rayos de luz se propagan. Para un rayo propagándose a lo largo de la dirección z tendremos entonces,

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{00}dt^2 + \bar{g}_{zz}dz^2 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \sqrt{-\frac{\bar{g}_{00}}{\bar{g}_{zz}}} \quad (2.45)$$

Cuando la métrica efectiva (2.44) se evalúa para el caso de un campo magnético de fondo, resulta:

$$\bar{g}_{00} = \frac{1}{b^2 + B^2} \quad \bar{g}_{zz} = \frac{-1}{b^2 + B_L^2} \quad (2.46)$$

Mientras que para el caso de un campo eléctrico de fondo se tiene:

$$\bar{g}_{00} = \frac{1}{b^2} \quad \bar{g}_{zz} = \frac{-1}{b^2 - E_B^2 - E_L^2} \quad (2.47)$$

Por lo tanto, las velocidades de propagación coinciden con las que se mostraron en (2.23) y en (2.39).

Capítulo 3

Modificación de la distancia luminosa a una fuente

En este capítulo se analiza la propagación de ondas electromagnéticas de Born-Infeld interactuando con un campo magnético estático de fondo en un universo en expansión. El carácter no-lineal de la electrodinámica de Born-Infeld modifica la relación entre el flujo de energía y la distancia a una fuente, la cual tiene una nueva dependencia con el corrimiento al rojo cosmológico que está gobernada por el campo de fondo. Se calcula luego la distancia luminosa como función del corrimiento al rojo y se comparan las nuevas curvas con el caso de Maxwell para fuentes tales como supernovas del tipo Ia.

3.1. Introducción

El descubrimiento de una disminución inesperada en los flujos de energía observados provenientes de supernovas del tipo Ia [21], las cuales se creen constituyen candelas patrones de luminosidad, ha sido interpretada en el contexto del modelo cosmológico estándar como evidencia de que la expansión del universo estaría atravesando por una fase acelerada dominada por algo que genéricamente se ha llamado *energía oscura*.

Esto hecho constituye hoy uno de los más misteriosos y profundos proble-

mas en la cosmología y en la física teórica. A pesar de que la constante cosmológica Λ parece ser la explicación más simple para este fenómeno, otros modelos han sido desarrollados en los últimos años [94] como ya se mencionó en la Introducción de esta Tesis.

Pero es importante destacar, que la evidencia de que el universo estaría acelerando radica fundamentalmente en mediciones de flujos de energía provenientes de supernovas del tipo Ia a diferentes valores de corrimientos al rojo cosmológicos. Estas mediciones proveen la manera más directa y consistente de determinar la historia reciente de la expansión del universo; no obstante, la relación entre el corrimiento al rojo cosmológico y el flujo de energía de una fuente puntual contempla no sólo la evolución del universo durante el tiempo de viaje de la luz, sino también algunas suposiciones acerca de la naturaleza de la luz misma. Uno acepta que la teoría de Maxwell describe la propagación de la luz, donde la misma se propaga sin interactuar con otros campos eléctricos o magnéticos que pudiera encontrarse en su camino hasta nosotros. Sin embargo, en el contexto de la electrodinámica no-lineal, la interacción entre la luz emitida desde fuentes lejanas y campos magnéticos de fondo de origen cosmológico modifican la relación entre el corrimiento al rojo y el flujo de energía. Si este tipo de efecto estuviera presente y no fuese correctamente interpretado podría conducir a una conclusión errónea sobre la expansión del universo. Concretamente, un efecto proveniente de la electrodinámica no-lineal podría explicar, por ejemplo, las curvas de distancia luminosa de supernovas tipo Ia sin la necesidad de contemplar la existencia de la energía oscura.

Este planteo nos condujo a utilizar los resultados que obtuvimos en el trabajo [92] presentados en el capítulo anterior y extenderlos al caso de una onda de Born-Infeld propagándose en un universo en expansión.

Recordemos que Born e Infeld propusieron en 1934 [71, 86] una teoría electrodinámica no-lineal con la idea de obtener un valor finito para la autoenergía de una carga eléctrica puntual. En el lagrangiano de dicha teoría aparece una nueva constante universal b que pone una cota máxima al valor del campo. Por un lado, dicha teoría posee como límite de campo débil a la teoría de Maxwell, y por otro lado, las ecuaciones no lineales de la teoría de

Born-Infeld predicen que una onda electromagnética interactúa con un campo estático externo afectando su velocidad de propagación. Es conocido también que la aproximación de 1 loop de la electrodinámica cuántica (QED) posee un límite de campo débil descrito por el lagrangiano no lineal de Euler-Heisenberg [95]. En la sección 1.3 del texto de Jackson [96] se hace referencia al límite de bajas energías de la electrodinámica cuántica y a su relación con teorías electrodinámicas no-lineales para poner una cota a la constante b .

Si bien el valor de la constante b aún permanece desconocido, resultaría interesante averiguar si la presencia de campos externos, como los campos magnéticos intergalácticos, podrían incidir sobre el flujo de energía en el marco de una electrodinámica no lineal y permitir algún aporte al respecto por consideraciones cosmológicas.

Cabe mencionar que con motivaciones diferentes a las de esta Tesis, la teoría de Born-Infeld recientemente ha tenido un resurgimiento en el contexto de supercuerdas debido a que lagrangianos tipo Born-Infeld emergen en el límite de bajas energías de algunas teorías de cuerdas [97]. Este tipo de lagrangianos también han sido propuestos para describir modelos capaces de conducir al universo a una etapa acelerada [98]. Otros autores se han valido de la electrodinámica no lineal para estudiar la propagación de un pulso electromagnético en un fondo del tipo de CMB [99], y para interpretar el resultado del experimento de PVLAS [100].

Como se describió en el capítulo anterior, en el trabajo [92] mostramos que cuando una onda electromagnética de Born-Infeld se propaga, por ejemplo a lo largo de la dirección x , en un campo magnético de fondo $\mathbf{B} = B_E \hat{z} + B_B \hat{y} + B_L \hat{x}$, su velocidad de propagación β se modifica según la ecuación (2.23) y además aparece en la onda un campo eléctrico longitudinal que depende de B_L y B_E , de tal manera que los campos eléctrico y magnético totales pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\beta E_{onda}(\xi) \hat{z} + \mathbf{E}_{long}(\xi) , \\ \mathbf{B} &= -E_{onda}(\xi) \hat{y} + \mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $E_{onda}(\xi)$ es el campo eléctrico transversal ya conocido de la onda, y

$\xi = x - \beta t$ es su fase. La componente longitudinal del campo eléctrico de la onda es,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{long} &= \frac{-\mathbf{B} \cdot (E_{onda}(\xi)\hat{z})}{b^2 \left(1 + \frac{B_L^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{B}_L \\ &= \frac{-B_E B_L E_{onda}(\xi)}{b^2 \left(1 + \frac{B_L^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \hat{x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(donde por supuesto, \mathbf{E}_{long} se anula cuando $b \rightarrow \infty$).

Como consecuencia de esta nueva componente longitudinal del campo eléctrico de la onda, el vector de Poynting \mathcal{S} adquiere una componente transversal a la dirección de propagación. El vector de Poynting entonces puede escribirse como:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{\sqrt{1 + b^{-2} (|\mathbb{B}|^2 - |\mathbb{E}|^2) - b^{-4} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{B})^2}} \quad (3.3)$$

Si escribimos la onda como $E_{onda} = E_o \cos(x - \beta t)$ entonces los valores promediados para las componentes transversal y longitudinal del vector de Poynting asociadas con el campo (3.1) son:

$$\langle \mathcal{S}_\perp \rangle = \frac{E_o^2 B_L \mathbf{B}_\perp}{8\pi b^2} + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (3.4)$$

$$\langle \mathcal{S}_x \rangle = \frac{E_o^2}{8\pi} \left[1 - \frac{4B_\perp^2 - 2B_E^2 + B_L^2}{2b^2} \right] + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (3.5)$$

El símbolo \perp aquí significa que es la contribución de las componentes perpendiculares a la dirección de propagación.

Por otra parte la densidad de energía asociada con la onda, promediada en el tiempo, puede escribirse como se mostró en la ecuación (2.37) como:

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{E_o^2}{8\pi} \left[1 - \frac{3B_\perp^2 - 2B_E^2 + B_L^2}{2b^2} \right] + \\ &+ \frac{B^2}{8\pi} \left[1 - \frac{B^2}{4b^2} \right] + \mathcal{O}(b^{-4}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

A partir de estos resultados se estudiará en la siguiente sección cómo es la propagación de una onda electromagnética plana de Born-Infeld en un universo en expansión, para luego analizar cómo se modifica la distancia luminosa a una fuente puntual tal como por ejemplo, una supernova tipo Ia.

3.2. Ondas planas en un universo en expansión

Para estudiar el flujo de energía de ondas de Born-Infeld que se propagan en un universo en expansión, consideraremos por simplicidad el caso espacialmente plano, isótropo y homogéneo, cuyo intervalo espacio-temporal será el de FLRW que aquí lo escribiremos como:

$$ds^2 = a(\eta)^2(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \quad (3.7)$$

El tiempo conforme η está relacionado con el tiempo cosmológico t (el tiempo propio de un fluido comóvil) a través de la relación $dt = a(\eta) d\eta$.

Las leyes de conservación de energía-momento, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, pueden reescribirse como:

$$[\sqrt{-g} T^{\mu\nu}]_{;\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \sqrt{-g} T^{\rho\nu} = 0 \quad (3.8)$$

Para el caso aquí analizado donde la geometría es la dictada por (3.7) se tiene que $\Gamma_{\nu\rho}^0 = a_{,0} a^{-1} \delta_{\nu\rho}$, y entonces este balance de energía resulta ser,

$$a^{-2} [a^4 T_0^0]_{,0} + a^2 T_0^{\alpha}{}_{,\alpha} - a_{,0} a T = 0 \quad (3.9)$$

donde $\alpha = 1, 2, 3$ y $T = T_{\mu}^{\mu}$ es la traza del tensor energía-momento.

Se usará (3.9) para estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en un campo magnético de fondo; entonces, T_0^{ν} en (3.9) incluirá tanto al campo de la onda como el de fondo. En el electromagnetismo de Maxwell la traza T es idénticamente nula. Y como consecuencia de ello, si $\{T_0^{\nu}\}^M$ resuelve (3.9) en el espacio-tiempo de Minkowski ($a = \text{constante}$) entonces $\{T_0^{\nu}\}^{FLRW} = a(\eta)^{-4} \{T_0^{\nu}\}^M$ resolverá (3.9) en el caso de FLRW espacialmente plano. Como

el tensor energía-momento de Maxwell es cuadrático en los campos, lo último dicho significará entonces que los campos de Maxwell escalean con el factor de escala como $a(\eta)^{-2}$. Esta conclusión general es aplicable en particular a nuestro caso de una onda propagándose en un campo magnético de fondo.

Por el contrario, T no es nula en el caso de la electrodinámica de Born-Infeld. Por lo tanto ahora el escaleo de T_0^ν con el factor $a(\eta)^{-4}$ no garantiza que se satisfagan las ecuaciones de conservación (3.9). Se necesita una corrección adicional que deberá desaparecer en el límite $b \rightarrow \infty$. Para hallar esta corrección, se buscará la misma hasta el orden más bajo en b^{-2} siguiendo los lineamientos de la sección anterior. Se supondrá además que el campo magnético de fondo no afecta apreciablemente la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo al cual suponemos dominado por materia y (presumiblemente) por energía oscura, debido a que la densidad de energía del campo de fondo es despreciable comparada con las densidades correspondientes a la materia y energía oscura (un valor típico para el campo de fondo cosmológico es del orden de $10^{-7}G$ [101]).

Puesto que se considerará la corrección al orden más bajo en b^{-2} para las magnitudes tales como (3.2), (3.4), (3.5) y (3.6), bastará para cualquier magnitud de este orden o mayor sólo considerar el escaleo Maxwelliano de los campos con el factor $a(\eta)^{-2}$. En el caso de la velocidad de propagación (2.23) la corrección también puede obtenerse a partir de los resultados trabajados en [75,76] (ver la sección 2.2), donde se ha mostrado que la ecuación que gobierna el cuadvivector de onda puede entenderse como si los rayos se propagaran a lo largo de geodésicas nulas de una métrica efectiva $\bar{g}_{\mu\nu}$. En el caso de la electrodinámica de Born-Infeld que aquí estamos considerando, la métrica efectiva $\bar{g}_{\mu\nu}$ es:

$$\bar{g}^{\mu\nu} = (b^2 + \frac{1}{2}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})g^{\mu\nu} + F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} \quad (3.10)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica usual y $F_{\mu\nu}$ es el campo electromagnético de fondo por el cual los rayos se propagan, que en este caso sus componentes serán:

$$F_{xy} = -B_E, \quad F_{yz} = -B_L, \quad F_{xz} = B_B \quad (3.11)$$

3.2 Ondas planas en un universo en expansión

Si el rayo se propaga en la dirección x entonces tendremos que:

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\eta\eta}d\eta^2 + \bar{g}_{xx}dx^2 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{d\eta} = \sqrt{-\frac{\bar{g}_{\eta\eta}}{\bar{g}_{xx}}} \quad (3.12)$$

Cuando la métrica efectiva (3.10) se evalúa para el campo magnético de fondo (3.11) resulta que:

$$\bar{g}_{\eta\eta} = \frac{1}{\left(b^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{a(\eta)^4}\right)a(\eta)^2} \quad \bar{g}_{xx} = \frac{-1}{\left(b^2 + \frac{B_L^2}{a(\eta)^4}\right)a(\eta)^2} \quad (3.13)$$

Y entonces se obtiene que la velocidad de propagación de la onda en el caso de un universo en expansión en presencia de un campo magnético de fondo es:

$$\beta(\eta) = \frac{dx}{d\eta} = \left(\frac{1 + \frac{B_L^2}{a(\eta)^4 b^2}}{1 + \frac{B^2}{a(\eta)^4 b^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

Si ahora integramos la trayectoria del rayo (3.12) vemos que ahora la fase ξ tiene que ser reemplazada con

$$\xi = x - \int^{\eta} \beta(\eta') d\eta' \quad (3.15)$$

(ver por ejemplo el tratamiento adiabático para un oscilador cuya frecuencia varía lentamente en [102, 103]). Observemos que dado que $\partial\xi/\partial x = 1$ y $\partial\xi/\partial\eta = -\beta$ como en el caso de Minkowski, entonces las derivadas de T_{ν}^{μ} en (3.9) conservarán su estructura Minkowskiana. Por otro lado, la traza del tensor energía-momento de Born-Infeld a orden b^{-2} es: [92]

$$T = \frac{b^2}{\pi} \left[\frac{1 + b^{-2} S}{\sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}}} - 1 \right] = \frac{S^2 + P^2}{2\pi b^2} + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (3.16)$$

y escala como $a(\eta)^{-8}$. Consideremos una solución $\{T_0^{\nu}\}^M$ para el campo de Born-Infeld en el espacio-tiempo de Minkowski; i.e., $\{T_0^0\}^M_{,0} + \{T_0^{\alpha}\}^M_{,\alpha} = 0$ (para el caso en consideración, $\{T_0^0\}^M$ es la densidad de energía (3.6), y

$\{T_0^\alpha\}^M$ son las componentes del vector de Poynting (3.4-3.5)). Como ya fue mencionado más arriba, el escaleo de los campos con $a(\eta)^{-2}$ no es suficiente para encontrar una solución para (3.9), ya que el término asociado con la traza ahora no es nulo. Como la traza ya es de orden b^{-2} , solamente T_0^ν tiene que ser corregido en (3.9). Entonces, probando con $\{T_0^\nu\}^{FLRW} = (1 - \varepsilon a^{-4} b^{-2}) a^{-4} \{T_0^\nu\}^M$ y reemplazando en (3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} & a^{-2} (1 - \varepsilon a^{-4} b^{-2}) (\{T_0^0\}^M_{,0} + \{T_0^\alpha\}^M_{,\alpha}) + \\ & + 4\varepsilon b^{-2} a_{,0} a^{-7} \{T_0^0\}^M - a_{,0} a^{-7} \{T\}^M = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Y por lo tanto,

$$\varepsilon = b^2 \frac{\{T\}^M}{4 \{T_0^0\}^M} \quad (3.18)$$

Como la traza es de orden b^{-2} , entonces S , P y $\rho = T_0^0$ pueden calcularse con los campos de Maxwell. El promedio temporal de la traza para una onda plana propagándose en un campo magnético de fondo es [92]:

$$\langle \{T\}^M \rangle = \frac{B^4 + 2E_o^2 B_\perp^2}{8\pi b^2} \quad (3.19)$$

Entonces ε resulta ser:

$$\varepsilon = \frac{B^4 + 2E_o^2 B_\perp^2}{4(B^2 + E_o^2)} \quad (3.20)$$

lo que permite obtener la densidad de energía y el vector de Poynting de una onda plana de Born-Infeld en un campo magnético de fondo para el caso de un universo de FLRW espacialmente plano.

En la siguiente sección se aplicarán estos resultados para hallar cómo es el flujo de energía que nos llega de una fuente luminosa distante, y entonces analizar cómo cambia la ecuación que gobierna la distancia luminosa a una fuente puntual.

3.3. Distancia luminosa a una fuente puntual

De acuerdo a los resultados de la sección anterior, las componentes del vector de Poynting (3.4)-(3.5) deben ser corregidas con el factor $(1-\varepsilon a^{-4} b^{-2}) a^{-4}$. Entonces, el flujo de energía en la dirección de propagación es,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_x \rangle &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{a(\eta)^4 b^2}\right) \frac{E_o^2}{8 \pi a(\eta)^4} \\ &\left[1 - \frac{4B_{\perp}^2 - 2B_E^2 + B_L^2}{2 a(\eta)^4 b^2}\right] + \mathcal{O}(b^{-4}) \\ &= \left(1 - \frac{\Delta_B}{a(\eta)^4 b^2}\right) \frac{E_o^2}{8 \pi a(\eta)^4} + \mathcal{O}(b^{-4}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $\Delta_B = 2B_{\perp}^2 - B_E^2 + \frac{B_L^2}{2} + \frac{B^4 + 2E_0^2 B_{\perp}^2}{4(B^2 + E_0^2)}$ es una cantidad positiva. Como estamos interesados en analizar rayos de luz emitidos por fuentes puntuales en el universo, debemos tener presente que cuando un rayo viaja en el medio intergaláctico se ve modificado por campos magnéticos presentes en diferentes regiones a lo largo de su camino hasta nosotros. En este caso, los valores de B , B_E , etc. que intervienen en la propagación deberían ser tomados como valores representativos del campo intergaláctico a lo largo de la trayectoria del rayo de luz, por lo tanto será correcto tomar a la cantidad Δ_B como una magnitud del mismo orden que el cuadrado del campo intergaláctico representativo. (Notar que para los valores típicos del campo intergaláctico, el último término de Δ_B siempre es despreciable comparado a los otros términos).

Para el caso de propagación radial, el flujo de energía esférico Minkowskiano puede obtenerse a partir del flujo plano (3.21) simplemente dividiendo este último por el cuadrado de la distancia radial a la fuente $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Por lo tanto, el flujo de energía radial en el caso de un universo FLRW espacialmente plano podrá escribirse como:

$$\mathfrak{F} = \left(1 - \frac{\Delta_B}{a(\eta)^4 b^2}\right) \frac{E_o^2}{8 \pi a(\eta)^4 r^2} + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (3.22)$$

En el caso de la electrodinámica de Maxwell el campo de fondo no interfiere con la onda, pero en el caso electrodinámico no-lineal de Born-Infeld estu-

diado aquí la primera corrección en (3.22) muestra que existe un acoplamiento entre la onda y el campo magnético de fondo.

La luminosidad de un objeto resulta de integrar el flujo en el instante del tiempo de emisión η_e ; esta integración normaliza la amplitud E_o con respecto al valor de la luminosidad L . Usando la ecuación (3.22) se obtiene,

$$L = \frac{E_o^2}{2 a_e^2} \left(1 - \frac{\Delta_B}{a_e^4 b^2} \right) \quad (3.23)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (3.22) y (3.23) el flujo de energía puede reescribirse como:

$$\mathfrak{F} \simeq \frac{L a_e^2}{4\pi a(\eta)^4 r^2} \left[1 + \frac{\Delta_B}{a(\eta)^4 b^2} \left(\frac{a(\eta)^4}{a_e^4} - 1 \right) \right] \quad (3.24)$$

Por otra parte, la distancia luminosa d_L está definida como (ver por ejemplo [1])

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4 \pi \mathfrak{F}_o} \quad (3.25)$$

donde \mathfrak{F}_o es el flujo medido en el instante η_o en la posición del observador r_o (suponemos la fuente ubicada en $r = 0$). Por lo tanto,

$$d_L = \frac{a_o^2 r_o}{a_e} \left[1 - \frac{\Delta_B}{2 a_o^4 b^2} \left(\frac{a_o^4}{a_e^4} - 1 \right) \right] + \mathcal{O}(b^{-4}) \quad (3.26)$$

Para relacionar la distancia luminosa con el corrimiento al rojo cosmológico, consideremos qué sucede con un rayo de luz para el cual $dr = \beta(\eta) d\eta$. Entonces, si se emite un rayo en el instante η_e desde una fuente localizada en $r = 0$, y llega en el instante η_o a la posición r_o del observador, la cresta de una onda emitida al tiempo $\eta_e + \delta\eta_e$ arribará al observador al tiempo $\eta_o + \delta\eta_o$, de tal manera que

$$\int_{\eta_e}^{\eta_o} \beta d\eta = \int_{\eta_e + \delta\eta_e}^{\eta_o + \delta\eta_o} \beta d\eta \quad (3.27)$$

o lo que es lo mismo:

$$\int_{\eta_e}^{\eta_e + \delta\eta_e} \beta d\eta = \int_{\eta_o}^{\eta_o + \delta\eta_o} \beta d\eta \quad (3.28)$$

3.3 Distancia luminosa a una fuente puntual

Entonces vemos que $\beta_e \delta\eta_e = \beta_o \delta\eta_o$, i.e. $\beta_e a_e^{-1} \delta t_e = \beta_o a_o^{-1} \delta t_o$. Por lo tanto, el corrimiento al rojo z cumplirá que:

$$\begin{aligned} 1 + z &\equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\delta t_o}{\delta t_e} \\ &= \frac{a_o}{a_e} \left[1 + \frac{B_{\perp}^2}{2 a_o^4 b^2} \left(1 - \frac{a_o^4}{a_e^4} \right) \right] + \mathcal{O}(b^{-4}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Invertiendo esta última ecuación se obtiene:

$$\frac{a_o}{a_e} \simeq (1 + z) \left[1 + \left[(1 + z)^4 - 1 \right] \frac{B_{\perp}^2}{2 a_o^4 b^2} \right] \quad (3.30)$$

Este cociente entre factores de escala es uno de los componentes en la distancia luminosa (3.26). El otro es la distancia propia $a_o r_o$. Esta distancia depende de cómo es la evolución del universo. En efecto, siguiendo el movimiento de un rayo, la distancia propia resulta ser:

$$a_o r_o = \int_{\eta_e}^{\eta_o} a_o \beta(\eta) d\eta = \int_z^0 \frac{a_o \beta(z')}{a(z') \frac{dz'}{dt}} dz' \quad (3.31)$$

donde z' es el corrimiento al rojo de una onda emitida en el instante $t \leq t_o$. Aquí uno puede reemplazar dz'/dt en términos del parámetro de Hubble $H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt} \log \left(\frac{a(t)}{a_o} \right)$ realizando la derivada del logaritmo de (3.30). Entonces,

$$H(z) \simeq -\frac{1}{(1+z)} \left[1 + (1+z)^4 \frac{2B_{\perp}^2}{a_o^4 b^2} \right] \frac{dz}{dt} \quad (3.32)$$

Y por lo tanto, la distancia propia puede escribirse como:

$$\begin{aligned} a_o r_o &\simeq \int_0^z \frac{a_o}{a(z')} \left[1 + (1+z')^4 \frac{2B_{\perp}^2}{a_o^4 b^2} \right] \frac{\beta(z') dz'}{(1+z')H(z')} \\ &\simeq \int_0^z \frac{a_o}{a(z')} \left[1 + (1+z')^4 \frac{3B_{\perp}^2}{2a_o^4 b^2} \right] \frac{dz'}{(1+z')H(z')} \\ &\simeq \int_0^z \left[1 + (4(1+z')^4 - 1) \frac{B_{\perp}^2}{2a_o^4 b^2} \right] \frac{dz'}{H(z')} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Las ecuaciones de Einstein nos dicen que el parámetro de Hubble para un

universo espacialmente plano dominado por materia y constante cosmológica es [1]:

$$H(z)^2 = H_o^2 \left[\Omega_m \left(\frac{a_o}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda \right] \quad (3.34)$$

Donde Ω_m y Ω_Λ son las contribuciones de la materia y la constante cosmológica a la densidad total del universo (o sea, se está considerando aquí que $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$). Usando (3.30) se obtiene entonces que:

$$\frac{H(z)^2}{H_o^2} \simeq \Omega_m (1+z)^3 \left[1 + [(1+z)^4 - 1] \frac{3B_\perp^2}{2a_o^4 b^2} \right] + \Omega_\Lambda \quad (3.35)$$

Y por lo tanto la distancia propia (3.33) multiplicada por el valor del parámetro de Hubble hoy, resulta ser:

$$H_o a_o r_o \simeq \int_1^{1+z} dZ \left[\frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m Z^3}} + \frac{3B_\perp^2}{2a_o^4 b^2} \left(\frac{4Z^4 - 1}{3\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m Z^3}} - \frac{\Omega_m Z^3 (Z^4 - 1)}{2(\Omega_\Lambda + \Omega_m Z^3)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \quad (3.36)$$

Ahora, reemplazando esta última integral en la ecuación (3.26) y combinando este resultado con la ecuación (3.30), se arriba a la distancia luminosa [104]:

$$H_o d_L \simeq (1+z) f_L(z) + \frac{3B_\perp^2}{2a_o^4 b^2} (1+z) g_L(z) + \left(\frac{B_\perp^2 - \Delta_B}{2a_o^4 b^2} \right) (1+z) [(1+z)^4 - 1] f_L(z) \quad (3.37)$$

donde:

$$g_L(z) = \int_1^{1+z} \left[\frac{4Z^4 - 1}{3\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m Z^3}} - \frac{\Omega_m Z^3 (Z^4 - 1)}{2(\Omega_\Lambda + \Omega_m Z^3)^{\frac{3}{2}}} \right] dZ \quad (3.38)$$

y

$$f_L(z) = \int_1^{1+z} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m Z^3}} dZ \quad (3.39)$$

En la ecuación (3.37) los últimos dos términos conteniendo las funciones f_L y g_L caracterizan la corrección a la distancia luminosa proveniente del campo magnético de fondo al orden aquí considerado (la aproximación vale cuando $(1+z)^4 \frac{B_\perp^2}{a_o^4 b^2} \ll 1$; ver por ejemplo la ecuación (3.30)). El factor que aparece multiplicando al tercer término, $\frac{B_\perp^2 - \Delta_B}{2a_o^4 b^2}$, es negativo. Las funciones $f_L(z)$ y $g_L(z)$ dependen de Ω_m y Ω_Λ . Para analizar estos términos extra en la distancia luminosa, consideremos por simplicidad el caso donde las tres componentes del campo magnético de fondo son iguales al valor representativo. Llamando a estas componentes B y reemplazando esto en la ecuación (3.37) se obtiene:

$$H_o d_L \simeq (1+z)f_L(z) + \frac{B^2}{2a_o^4 b^2} F(z) \quad (3.40)$$

donde,

$$F(z) = 6(1+z)g_L(z) - \frac{9}{2}(1+z) [(1+z)^4 - 1] f_L(z) \quad (3.41)$$

La Figura 3.1 muestra el comportamiento de $F(z)$ para tres modelos diferentes. Si $\Omega_m = 0$ entonces $F(z)$ tiene un máximo en $z = 0,35$ y se vuelve negativa cuando $z > z_r = 0,54$. Por otra parte, si $\Omega_m = 0,3$, $F(z)$ tiene un máximo en $z = 0,26$ y se vuelve negativa cuando $z > z_r = 0,43$; y si $\Omega_m = 1$, entonces $F(z)$ tiene un máximo en $z = 0,21$ y se vuelve negativa cuando $z > z_r = 0,35$. Puede observarse entonces que cuanto menor es el valor de Ω_m más alto es el valor de z_r .

La Figura 3.2 muestra la distancia luminosa multiplicada por el parámetro de Hubble (3.37) para los tres casos considerados de la Figura 3.1 (aquí se eligió que $\frac{B^2}{2a_o^4 b^2} = 5 \times 10^{-3}$). Cuando $z \ll 1$ los términos dominantes en (3.40) son $H_o d_L \simeq z(1 + \frac{3B^2}{a_o^4 b^2})$. Por lo que la pendiente a corrimientos al rojo chicos gana una contribución proveniente del campo de fondo.

En la Figura 3.3 se compara el comportamiento de la cosmología estándar

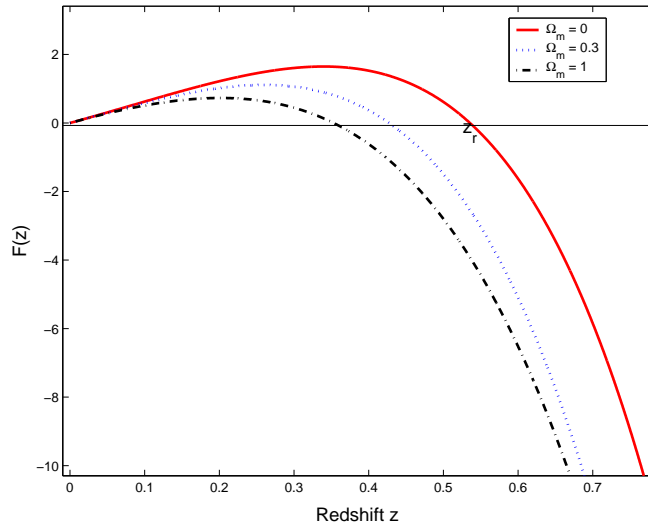


Figura 3.1: Corrección a la distancia luminosa $F(z)$ para tres conjuntos diferentes de valores de $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$. Si $z > z_r$ la corrección se vuelve negativa (z_r son los ceros de la función $F(z)$). Reproducida desde [104].

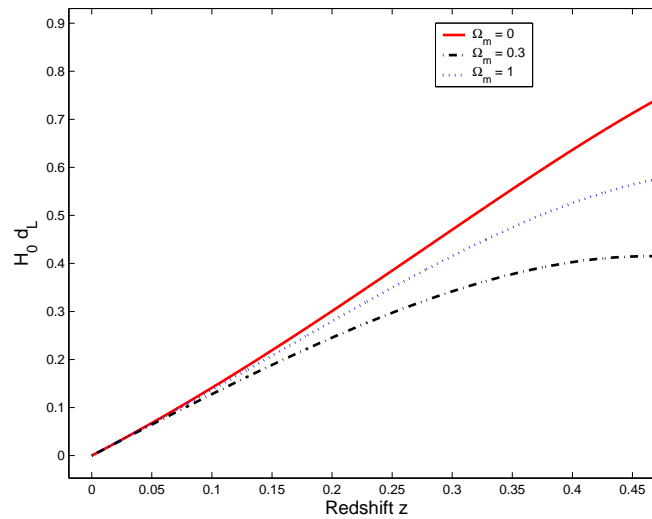


Figura 3.2: Distancia luminosa por el parámetro de Hubble actual para los tres conjuntos de valores de $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ ($\frac{B^2}{2a_0^4 b^2} = 5 \times 10^{-3}$). Reproducida desde [104].

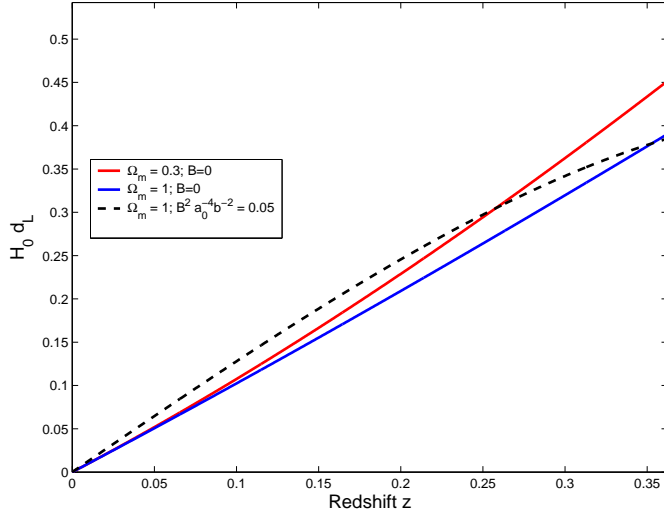


Figura 3.3: Comportamientos de las curvas teóricas para corrimientos al rojo chicos tanto para el caso de la cosmología estándar (Maxwelliana) (línea continua) como para el caso de modelos a partir de la electrodinámica de Born-Infeld sin constante cosmológica. Reproducida desde [104].

para valores chicos de corrimientos al rojo ($\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_m = 0,3$, $b \rightarrow \infty$) con modelos basados en la electrodinámica de Born-Infeld sin constante cosmológica ($\Omega_m = 1$). Notablemente, las observaciones de d_L vs z pueden ser bien ajustadas sin incluir constante cosmológica eligiendo $\frac{B^2}{2a_0^4 b^2} \sim 0,05$. Para apreciar mejor el rol de la electrodinámica de Born-Infeld en estas curvas, en la Figura 3.3 también se incluye la curva que resulta de la cosmología estándar (Maxwelliana) con $\Omega_m = 1$.

A pesar de que los efectos de la electrodinámica no-lineal podrían explicar las curvas de distancia luminosa vs corrimiento al rojo para supernovas del tipo Ia [21, 31] sin considerar una componente de energía oscura, uno debe ser cauteloso. Aceptando un valor típico de $10^{-7}G$ para el campo magnético cosmológico de fondo $|\mathbf{B}_o| = B/a_o^2$ [101], junto con una cota de $b \gtrsim 10^{20}V/m$ para el parámetro de Born-Infeld [96], entonces las correcciones a la cosmología estándar serían despreciables. Aún así, la electrodinámica no-lineal debería ser considerada como una fuente de degeneración en las curvas de d_L vs z . En la Figura 3.4 se compara la curva de la cosmología estándar

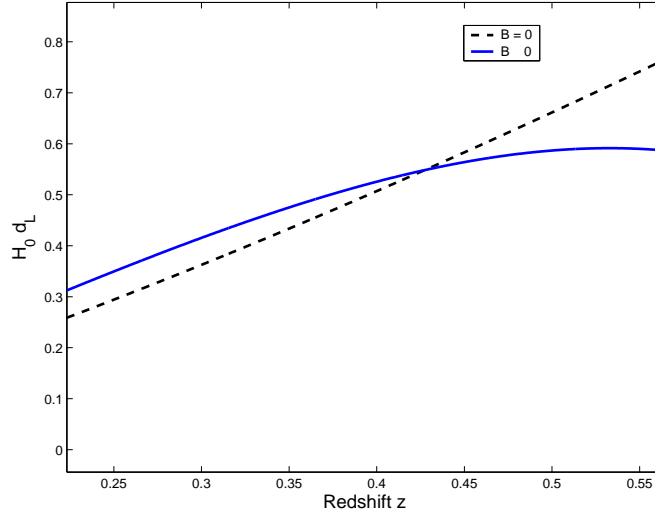


Figura 3.4: Distancia luminosa por el parámetro de Hubble presente para $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$. Comparación entre la electrodinámica de Maxwell (línea a trazos) y la de Born-Infeld (línea continua) ($\frac{B^2}{2a_0^4 b^2} = 5 \times 10^{-3}$). Reproducida desde [104].

($\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $b \rightarrow \infty$) con una proveniente de la electrodinámica de Born-Infeld para los mismos valores de Ω_m y Ω_Λ . Las curvas se intersectan en $z_r = 0,43$. Si $z < z_r$ las curvas alcanzan su máxima separación para $z = 0,26$. Si $z > z_r$ la distancia luminosa predicha por la electrodinámica de Born-Infeld se vuelve más chica que la de la cosmología estándar. En este último caso las curvas parecen separarse considerablemente (sin embargo este rasgo debería ser confirmado extendiendo el cálculo hasta órdenes más altos en la aproximación). El grado de separación de ambas curvas está gobernado por el valor de $\frac{B^2}{2a_0^4 b^2}$. Observaciones futuras más precisas quizás podrían permitir testar estos nuevos rasgos y poner una cota para dicho valor.

Capítulo 4

Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

En este capítulo se analiza otro enfoque al problema de explicar la posible expansión acelerada del universo recientemente detectada. Una pregunta que uno puede hacerse es qué tan bien funciona como pilar teórico del modelo del Big Bang la Teoría de la Relatividad General. Al respecto en los últimos años ha crecido el interés en el estudio de teorías alternativas de la gravedad conocidas como teorías $f(R)$. Si bien el inicio del estudio mismo de estas teorías se remonta a la década de 1920, en los últimos tiempos ha resurgido el interés por la posibilidad de dar respuesta al problema de la energía oscura y la expansión acelerada del universo. Sin embargo, estas teorías, modificaciones de la Relatividad General, conducen en general a ecuaciones de movimiento de cuarto orden para la métrica y muy pocos de estos modelos han superado requisitos mínimos de estabilidad, que reproduzcan todas las fases cosmológicas por las que el universo habría transcurrido, o no contemplan resultados conocidos en el régimen de campo débil. Por tal motivo se estudió aquí una solución cosmológica a partir de un modelo de gravedad modificada basado en el equivalente Teleparalelo de la Relatividad General en términos de la geometría de Weitzenböck. Este modelo presenta, entre otros atractivos

que se desarrollan a posteriori, el hecho de que al igual que en la Relatividad General sus ecuaciones de movimiento son siempre de segundo orden. Se presenta a continuación un breve repaso de algunas teorías de gravedad modificada, se desarrolla el modelo a partir del equivalente Teleparalelo y se muestran cotas observacionales para la solución cosmológica hallada.

4.1. Teorías $f(R)$ de gravedad modificada

Las llamadas teorías de gravedad modificada se han convertido en un área con mucho desarrollo en los últimos años con el fin de lograr una descripción de la interacción gravitatoria que difiera de la Relatividad General convencional. Los primeros intentos fueron elaborados por Eddington y Weyl [78,105] entre 1919 y 1922 considerando modificaciones a la teoría de Einstein incluyendo invariantes de órdenes superiores en su acción, simplemente por curiosidad científica.

Llamamos teoría $f(R)$ a aquella cuya densidad lagrangiana \mathcal{L} contempla la posibilidad de una generalización de la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert a través de una función genérica del escalar de Ricci R . Simbólicamente:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} R \longrightarrow \mathcal{L} = \sqrt{-g} f(R) \quad (4.1)$$

Este tipo de modificación a la Relatividad General no es la única posibilidad. Uno podría preguntarse por qué no incluir invariantes de la forma $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ por ejemplo, o también considerar otras maneras de apartarse de la Relatividad General como teorías escalar-tensoriales [79] o modelos del estilo DGP [50] como son los llamados *braneworlds* [106]. Sin embargo las teorías $f(R)$ parecen ser la manera más simple de buscar alternativas y son lo suficientemente generales para que aparezcan un gran número de fenómenos interesantes a estudiar.

Recientemente, con los datos observacionales más actuales en el ámbito de la cosmología, nuestro panorama del universo con respecto a décadas anteriores ha cambiado radicalmente como ya fue mencionado en los capítulos anteriores de esta Tesis. Las recientes observaciones de supernovas del tipo

Ia [21, 31] parecen indicar que la expansión del universo es acelerada en la actualidad y para dar cuenta de ello, mientras algunos autores sostienen la idea de la existencia de una energía oscura otros proponen modificaciones del lagrangiano de Einstein-Hilbert que den soluciones cosmológicas consistentes con un universo acelerado para justificar las observaciones citadas.

En particular, una corrección del tipo $1/R$ fue sugerida recientemente con la idea de justificar la expansión acelerada sin la necesidad de energía oscura o de una constante cosmológica [59, 60]. Tal tipo de modificación ha sido criticada por algunos autores argumentando que no son viables por cotas dentro del sistema solar [64, 65] impuestas a través del formalismo PPN [107] o por presentar fuertes inestabilidades [66].

Aquí es importante realizar la siguiente salvedad: si bien se espera que futuras observaciones nos permitan descartar o favorecer con mayor precisión algunos modelos frente a otros para explicar la expansión acelerada del universo, a la fecha todas las evidencias observacionales no descartan el caso más sencillo; esto es que $f(R) = R - 2\Lambda$. Este lagrangiano conduce a las conocidas ecuaciones de Einstein de la Relatividad General en vacío que incluyen el término de constante cosmológica. No solamente las observaciones actuales no parecen descartar esta posibilidad sino que además resulta ser el caso más favorecido [21, 30, 31, 38, 108]. Recordemos además que el tensor de segundo orden más general construido con el tensor métrico y sus dos primeras derivadas, con cuadridivergencia nula, simétrico y lineal en las segundas derivadas de la métrica, es el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ con el término de constante cosmológica incluido [32, 33]:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

La motivación entonces deberá ser, por el momento, encontrar o descartar *otras* teorías $f(R)$ que también contemplen un universo acelerado además de la teoría que actualmente tenemos. No haremos aquí un estudio exhaustivo de las teorías $f(R)$ sino simplemente remarcaremos algunos rasgos importantes para el objetivo de esta Tesis. Para una revisión reciente del tema, ver por ejemplo [68] y las referencias mencionadas allí.

4.1.1. Ecuaciones de campo para una $f(R)$ genérica

Veamos entonces cómo se modifican las ecuaciones (4.2) cuando uno considera un caso más general. Sea la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} f(R) \quad (4.3)$$

donde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci arriba mencionado. Entonces la variación de la acción S respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$ cuyo determinante es g se escribe como:

$$\delta S = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R} \delta R + f(R) \delta \sqrt{-g} \right] \quad (4.4)$$

Usando la definición del escalar de Ricci se tendrá que $\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ y por lo tanto:

$$\delta S = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(R) \delta \sqrt{-g} \right] \quad (4.5)$$

La variación de la acción δS está compuesta por la suma de tres términos. Numerando a dichos términos de izquierda a derecha como $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3$ podemos analizar por separado cada término y hallar las respectivas contribuciones a las ecuaciones de Einstein buscadas.

La variación δS_2 ya está escrita en la forma deseada, esto es, como 'algo' multiplicado por la variación de la métrica $\delta g^{\mu\nu}$. Por otra parte, el término que corresponde a δS_3 puede trabajarse de manera similar al caso de las ecuaciones de Einstein ordinarias. Escribiendo en δS_3 que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ y juntando términos se puede escribir que:

$$\delta S_2 + \delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial f}{\partial R} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

Estos términos conducirán a las contribuciones:

$$\delta S_2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial R} R_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

$$\delta S_3 \longrightarrow -\frac{1}{2}f(R) g_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

Falta analizar δS_1 . Para el caso de las ecuaciones de Einstein ordinarias, esta contribución no aporta debido a que la integral respectiva puede llevarse a una integral de superficie y puesto que $\delta S = 0$ y los extremos están fijos, el término no contribuye. Pero en este caso aparece en la integral el factor $\frac{\partial f}{\partial R}$ que impide poder realizar lo mismo.

El término a analizar es entonces:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

Usando ahora que $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)$, donde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ es la conexión de Levi-Civita, la ecuación (4.9) puede reescribirse en la forma:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\partial f}{\partial R} g^{\mu\nu} \nabla_\sigma V^\sigma \quad (4.10)$$

donde hemos llamado $V^\sigma = g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)$.

Sabiendo que $\nabla_\sigma V^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma(\sqrt{-g} V^\sigma)$ e integrando por partes (4.10) se llega a que:

$$\delta S_1 = - \int d^4x \sqrt{-g} V^\sigma \partial_\sigma \frac{\partial f}{\partial R} \quad (4.11)$$

Para continuar, debe analizarse como escribir las variaciones $\delta\Gamma$ en términos de variaciones de la métrica $\delta g^{\mu\nu}$. Para ello se debe tener en cuenta primero que:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left[\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right] \quad (4.13)$$

Entonces, el primer término de V^σ es

$$g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[\delta g^{\lambda\sigma} [\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] + g^{\lambda\sigma} [\delta(\partial_\mu g_{\lambda\nu}) + \delta(\partial_\nu g_{\lambda\mu}) - \delta(\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \right] \quad (4.14)$$

Para proseguir, se intercambian en los últimos tres términos las variaciones δ por las correspondientes derivadas ∂_ρ y además debe tenerse en

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

cuenta que por ejemplo $\delta g_{\lambda\nu} = -g_{\gamma\nu} g_{\lambda\beta} \delta g^{\beta\gamma}$. Usando esto en (4.14) entonces,

$$g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[\delta g^{\lambda\sigma} [\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}] + \right. \\ \left. + g^{\lambda\sigma} [-\partial_{\mu}(g_{\gamma\nu} g_{\lambda\beta} \delta g^{\beta\gamma}) - \partial_{\nu}(g_{\gamma\mu} g_{\lambda\beta} \delta g^{\beta\gamma}) + \partial_{\lambda}(g_{\gamma\nu} g_{\mu\beta} \delta g^{\beta\gamma})] \right] \quad (4.15)$$

Por otra parte, usando (4.12), el segundo término de V^{σ} se puede reescribir como:

$$g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) = g^{\mu\sigma} \delta \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \sqrt{-g} \right) \quad (4.16)$$

Con este término también será necesario intercambiar las variaciones por las derivadas y usar que $\partial_{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta \sqrt{-g} \right) = \partial_{\lambda} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right)$. Por lo tanto, esta contribución a la variación de la acción (4.11) será:

$$+ \int d^4x \frac{1}{2} \partial_{\lambda} \left[\sqrt{-g} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) g^{\lambda\sigma} \right] g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.17)$$

Juntando este último resultado junto a las contribuciones de los términos provenientes de haber usado (4.15) en (4.11), y además renombrando apropiadamente los índices en las variaciones de tal manera que en todos los términos aparezca $\delta g^{\mu\nu}$ e integrando por partes se llega a que:

$$\delta S_1 = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_{\lambda} \left[\sqrt{-g} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) g^{\lambda\sigma} \right] g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \\ - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) g^{\lambda\sigma} \left[\partial_{\sigma} g_{\nu\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} g_{\lambda\sigma} \right] \delta g^{\mu\nu} - \\ - \int d^4x \partial_{\beta} \left[\sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) g^{\beta\gamma} g^{\lambda\sigma} \right] (g_{\nu\gamma} g_{\lambda\mu} \delta g^{\mu\nu}) - \\ - \int d^4x \partial_{\gamma} \left[\sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) g^{\beta\gamma} g^{\lambda\sigma} \right] (g_{\nu\beta} g_{\lambda\mu} \delta g^{\mu\nu}) + \\ + \int d^4x \partial_{\lambda} \left[\sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) g^{\beta\gamma} g^{\lambda\sigma} \right] (g_{\nu\gamma} g_{\beta\mu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (4.18)$$

Expandiendo las derivadas en cada término, usando los resultados (4.7)

y (4.8), y recordando que:

$$\begin{aligned}\square \frac{\partial f}{\partial R} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \left[\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \partial_\lambda \sqrt{-g} + \partial_\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \partial_\lambda g^{\lambda\sigma} + g^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \partial_\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \\ -\nabla_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) &= -\partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + \partial_\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \right]\end{aligned}$$

se llega finalmente a que:

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[g_{\mu\nu} \square \frac{\partial f}{\partial R} - \nabla_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + R_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial R} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Como pedimos que $\delta S = 0$ y las variaciones $\delta g^{\mu\nu}$ son arbitrarias, el tensor de Einstein generalizado para una función genérica $f(R)$ será:

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \square \frac{\partial f}{\partial R} - \nabla_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + R_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial R} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

Lo que está de acuerdo con el resultado mostrado por ejemplo en [68]. Nótese que las ecuaciones (4.19) son ecuaciones diferenciales no-lineales de cuarto orden para la métrica $g_{\mu\nu}$.

En el *formalismo de la métrica* por el cual se dedujeron las ecuaciones (4.19), frecuentemente en la literatura se hace referencia a diferentes *frames* en los cuales puede escribirse la acción S (ver por ejemplo [109]). Así, la acción (4.4) que conduce a las ecuaciones (4.19) se encuentran escritas en el *Jordan frame*. Sin embargo se pueden transformar las ecuaciones (4.19) en dos ecuaciones de segundo orden, en donde una contiene hasta derivadas segundas de la métrica y la otra representa la dinámica de un campo escalar ϕ . Esto puede realizarse a partir de la acción escrita en el *Helmholtz-Jordan frame*:

$$S_{HJ} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi) + (R(g) - \phi) f'(\phi) \right] \quad (4.20)$$

donde $'$ representa la derivada respecto al campo escalar ϕ . Variando la acción (4.20) ahora respecto al campo ϕ y a la métrica $g_{\mu\nu}$ mediante un procedimien-

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

to similar al seguido para la acción (4.4) se llega al par de ecuaciones:

$$g_{\mu\nu}\square f'(\phi) - \nabla_\mu \partial_\nu f'(\phi) + R_{\mu\nu} f'(\phi) - \frac{1}{2} f(\phi) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R f'(\phi) g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi f'(\phi) g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.21)$$

$$f''(\phi) [R - \phi] = 0 \quad (4.22)$$

Para el caso en que $f''(\phi) \neq 0$ se tiene entonces que $R = \phi$ y por lo tanto las ecuaciones de movimiento tanto para la acción S como para S_{HJ} son las mismas.

Pero también a la acción S_{HJ} (ecuación (4.20)) podemos hacerle la transformación conforme $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} g_{\mu\nu}$ con $e^{-2\alpha} \equiv f'(\phi)$. Usando que $R(g) = e^{-2\alpha} [\bar{R} - 6\bar{\square}\alpha - 6(\bar{\nabla}\alpha)^2]$ [109] y definiendo que:

$$V(\alpha) = \frac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{2(f'(\phi))^2}$$

la acción puede reescribirse ahora en el *Einstein frame* como:

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\bar{R}(\bar{g}) - 6(\bar{\nabla}\alpha)^2 - 2V(\alpha) \right] \quad (4.23)$$

Escrita la acción de esta manera, el lagrangiano queda escrito como el de Einstein-Hilbert acoplado a un campo escalar α .

Variando esta acción respecto a la métrica y al campo α las ecuaciones de movimiento en este frame son:

$$G_{\mu\nu}(\bar{g}) = 6 \left[\bar{\nabla}_\mu \alpha \bar{\nabla}_\nu \alpha - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (\bar{\nabla}\alpha)^2 \right] - \bar{g}_{\mu\nu} V(\alpha) \quad (4.24)$$

$$\bar{\square}\alpha = \frac{1}{6} \frac{dV(\alpha)}{d\alpha} \quad (4.25)$$

donde: $G_{\mu\nu}(\bar{g}) = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R}$. Puesto que el frame de Einstein y el de Jordan están relacionados por una transformación conforme, las ecuaciones de movimiento en el frame de Jordan (las equivalentes a las ecuaciones (4.19)) pueden obtenerse a partir de (4.24) y (4.25) que resultan ser:

$$G_{\mu\nu}(g) = -2\nabla_\mu \nabla_\nu \alpha + 4\nabla_\mu \alpha \nabla_\nu \alpha - g_{\mu\nu} W(\alpha) \quad (4.26)$$

$$\square\alpha = 2(\nabla\alpha)^2 + \frac{e^{-2\alpha}}{6} \frac{dV(\alpha)}{d\alpha} \quad (4.27)$$

donde: $W(\alpha) = \frac{f+\phi f'}{6f'}$. Con algo de trabajo puede verse que efectivamente son análogas a las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la acción (4.20).

Con estos cambios de *frames* efectivamente uno encuentra que son teorías equivalentes puesto que sus ecuaciones de movimiento lo son, pero con el beneficio de que analizadas de esta forma uno ve claramente que toda teoría $f(R)$ puede escribirse como una teoría lineal en R acoplada mínimamente a un campo escalar. De esta manera, modelos de energía oscura variable (como por ejemplo quintaesencia con algún campo escalar ϕ [35, 42]) pueden verse como una teoría $f(R)$ y viceversa.

4.1.2. El Principio de equivalencia

Con el objetivo de hallar enfoques alternativos al problema de la aceleración del universo y la energía oscura en el marco de las teorías $f(R)$, han resucitado algunas malas interpretaciones referidas a lo que distintas *representaciones* de una misma *teoría* pueden o no decirnos [111, 112]. Gran parte de estas malas interpretaciones están vinculadas con el Principio de equivalencia.

El Principio de equivalencia [2, 110, 113] emerge de la igualdad entre la masa inercial y gravitatoria. Galileo (1564-1642) fue quien descubrió que los cuerpos caían todos con la misma aceleración independientemente de su masa y composición. Estas observaciones fueron luego corroboradas por Huygens (1629-1695). Por un lado, de acuerdo a la segunda ley de Newton (1642-1727) la masa inercial m_i es aquella que mide la resistencia de un objeto a ser acelerado cuando sobre él actúa una fuerza \mathbf{F} , esto es:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \quad (4.28)$$

Y por otro lado, la masa gravitatoria m_g es la que aparece como la propiedad de un cuerpo que mide la magnitud de la fuerza gravitatoria que

sentirá en presencia de un campo gravitatorio \mathbf{g} según,

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g} \quad (4.29)$$

Comparando (4.28) y (4.29) vemos que la aceleración que tal cuerpo tendría en un dado punto del espacio,

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \mathbf{g} \quad (4.30)$$

sería diferente para cuerpos con diferentes valores de la relación m_g/m_i . Newton realizó experimentos con el fin de testear esta relación entre las masas, así como también Bessel (1784-1846) y más recientemente Eötvös (1848-1947) entre otros, logrando una precisión para la relación de masas de 10^{-9} sin encontrar diferencias. De esta manera se confirman las ideas de Galileo de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Esta universalidad de la caída libre de los cuerpos fue lo que llevó a Einstein en 1907 [125] a proponer la equivalencia entre fuerzas gravitatorias y las fuerzas de inercia sobre la base de la igualdad mencionada entre las masas inercial y gravitatoria y construir su teoría de la Relatividad General. Extender entonces el Principio de relatividad consistió en establecer la indistinguibilidad entre un campo gravitatorio y un campo de fuerzas de inercia de un sistema no-inercial, o dicho de otra manera, fuerzas inerciales en sistemas acelerados debían ser equivalentes a fuerzas gravitatorias. La identidad entre m_i y m_g impide que un experimentador dentro de un laboratorio reconozca su estado acelerado.

Einstein también se dio cuenta que si el campo gravitatorio no fuese uniforme aparecerían *fuerzas de marea* que delatarían la existencia de dicho campo a un observador en caída libre. Por lo tanto, la anulación del campo gravitatorio-inercial en un sistema que se encuentre en caída libre es una propiedad *local*. Así, un sistema en caída libre es *localmente* indistinguible de un sistema de referencia inercial y en él se verificará localmente el Principio de inercia.

La equivalencia local entre fuerzas gravitatorias y fuerzas de inercia per-

miten entonces formular el Principio de equivalencia como [2,3,113]: *En cada evento del espacio-tiempo existe una familia de sistemas localmente inerciales donde las leyes físicas adoptan la forma conocida que tienen en Relatividad Especial.* (Para una discusión sobre algunas variantes de este enunciado ver por ejemplo [2,110,112]).

Para darle contenido matemático al Principio de equivalencia, la herramienta apropiada es la derivada covariante [113]. El Principio pretende que las leyes físicas en una geometría riemanniana sean tales que en los sistemas localmente inerciales se reduzcan a la forma que tenían en Relatividad Especial. En el marco de esta última, las leyes se construyen con magnitudes tensoriales ante transformaciones del grupo de Lorentz y derivadas cartesianas comunes. En la geometría riemanniana los objetos geométricos (independientes del sistema de coordenadas), con los que se representan las magnitudes físicas y se escriben las leyes que las gobiernan, son los tensores ante cambios generales de coordenadas y las derivadas covariantes. Las leyes físicas tienen así carácter tensorial ante cambios generales de coordenadas (*covariancia general*), manifestando que sus enunciados son independientes del sistema de coordenadas utilizado. Pero en cada evento del espacio-tiempo existe un sistema localmente inercial donde los elementos de la conexión de Levi-Civita ($\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$) se anulan localmente, las derivadas covariantes devienen localmente en derivadas ordinarias, y las componentes del tensor métrico adoptan localmente la forma diagonal de Minkowski. Para que estas propiedades de los sistemas localmente inerciales reduzcan las leyes físicas a la forma que tienen en Relatividad Especial, el Principio de equivalencia se implementa diciendo [2,3,113]: *Las leyes físicas de la formulación covariante de la Relatividad Especial se trasladan a una geometría riemanniana sustituyendo derivadas parciales por derivadas covariantes.*

Un ejemplo de este enunciado es la ecuación que gobierna el movimiento de una partícula libremente gravitante y su relación con el Principio de inercia. Como sabemos el movimiento de una partícula libremente gravitante (sometida sólo a campos gravitatorios) es independiente de las propiedades de la misma, como consecuencia de la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria. En virtud de esta propiedad el movimiento puede geometrizar

y decimos que una partícula libremente gravitante se mueve inercialmente a lo largo de curvas naturales en esa geometría. Para la Física clásica como para la Relatividad Especial las curvas naturales en una geometría plana son las líneas rectas. Mientras que en la geometría euclídeana las rectas hacen mínima la distancia entre dos puntos del espacio, en la geometría pseudo-euclídeana del espacio-tiempo de Minkowski, la línea de universo temporal rectilínea tiene la cualidad de hacer máximo el tiempo propio entre dos eventos causalmente conectados.

En general, la curva que une un par de eventos dados haciendo estacionario el valor de la acción $S = -mc \int ds$ se llama *geodésica*. Si el parámetro que elegimos para describir la curva es el tiempo propio τ la ecuación para una partícula libremente gravitante es,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (4.31)$$

Ahora, si en cada punto del espacio-tiempo x^μ podemos encontrar un sistema de coordenadas localmente inercial $\xi^i(x^\mu)$ donde las componentes de la conexión métrica se anulen en dicho punto y por lo tanto se anule allí el campo gravitatorio-inercial, debemos poder recuperar las leyes físicas tal como las conocemos en Relatividad Especial. Efectivamente, en tal sistema de coordenadas la ecuación (4.31) se escribe como:

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = 0 \quad (4.32)$$

que no es otra cosa que el Principio de inercia de la Relatividad Especial. En sistemas localmente inerciales, las trayectorias de una partícula en caída libre son, localmente, líneas rectas.

Otro ejemplo particular del enunciado del Principio de equivalencia, que abajo discutiremos un poco más, es lo que concierne a la conservación local de la energía y momento de un sistema aislado que, en Relatividad Especial, se escribe como $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Puesto que en Relatividad General el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein (el tensor (4.2)) satisface que $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$, entonces automáticamente se garantiza la conservación del tensor energía-

momento de un sistema aislado que se encuentra del lado derecho de las ecuaciones de Einstein, esto es que $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

Para el caso de las teorías $f(R)$, mediante un cálculo formal uno puede convencerse de que el nuevo tensor de Einstein (4.19) deducido en el Jordan frame en el marco del formalismo de la métrica sigue teniendo cuadridivergencia nula y por lo tanto el Principio de equivalencia, en el sentido mencionado arriba, se sigue satisfaciendo.

En efecto, realizando la derivada covariante ∇^ν en cada término de (4.19) y recordando que $\nabla^\nu g_{\mu\nu} = 0$ se llega a la expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial R} \nabla^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\nu f(R) + R_{\mu\nu} \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + g_{\mu\nu} \partial^\nu \square \frac{\partial f}{\partial R} - \nabla^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \quad (4.33)$$

Usando la identidad de Bianchi:

$$\nabla^\nu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0 \quad (4.34)$$

el primer término de (4.86) puede describirse como:

$$\frac{\partial f}{\partial R} \nabla^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial R} \partial^\nu R \quad (4.35)$$

Mientras que el segundo término de (4.86) puede escribirse de la forma,

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\nu f(R) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_\nu} \quad (4.36)$$

que es justamente igual y opuesto a (4.87) y por lo tanto los dos primeros términos de (4.86) se cancelan mutuamente.

Los términos que quedan hasta aquí son entonces,

$$R_{\mu\nu} \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + \partial_\mu \left(\square \frac{\partial f}{\partial R} \right) - \nabla^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \quad (4.37)$$

habiendo usado que $g_{\mu\nu} \partial^\nu = \partial_\mu$.

Usando la propiedad de que para un vector V^λ vale:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda = R_{\rho\nu\mu}^\lambda V^\rho \quad (4.38)$$

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

para el caso $\lambda = \nu$ tendremos que $R_{\rho\nu\mu}^\nu = R_{\rho\mu}$ y si además el vector es $\partial^\nu(\frac{\partial f}{\partial R})$, entonces se puede escribir que:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) = \nabla_\mu \nabla_\nu \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + R_{\rho\mu} \partial^\rho \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \quad (4.39)$$

Ahora, como $\nabla_\nu \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) = \square \frac{\partial f}{\partial R}$ y sabiendo que el tensor de Ricci $R_{\rho\mu}$ es simétrico, para $\rho = \nu$ se encuentra que:

$$R_{\mu\nu} \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) + \partial_\mu \left(\square \frac{\partial f}{\partial R} \right) = \nabla_\nu \nabla_\mu \partial^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) = \nabla^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \quad (4.40)$$

Encontramos entonces que el tercer término de (4.37) se cancela con los dos primeros y por lo tanto se satisface que:

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (4.41)$$

y entonces, la fuente $T_{\mu\nu}$ que se agregue en el lado derecho de las ecuaciones de Einstein generalizadas deberá cumplir que $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ y por consiguiente se mantendrá válida esta condición implicada por el Principio de equivalencia.

Aquí es el punto en donde uno debe tener cierta precaución. Existirán representaciones en las cuales será obvio que un Principio se satisface y otras en las cuales quizás sea más laborioso e intrincado ver que así ocurre. Sin embargo, estará claro que la teoría sigue siendo la misma y que sus axiomas o principios son *independientes* de la representación que se utilice. Cada representación podría mostrar diferentes características de una teoría pero no deberemos incurrir en malas interpretaciones al momento de sacar conclusiones.

Cuando por ejemplo se realizó el procedimiento variacional de la acción (4.4), se llevó a cabo buscando soluciones de vacío. Está claro que la acción completa S_{tot} es aquella compuesta por la parte gravitatoria en sí S y por la acción de la materia S_m , o sea $S_{tot} = S + S_m$. El tensor $T_{\mu\nu}$ que agreguemos como fuente de materia estamos considerándolo como aquel que proviene de variar la acción de la materia S_m respecto a la métrica $g^{\mu\nu}$ según: $T_{\mu\nu} \equiv$

$$-(2/\sqrt{-\bar{g}})\delta S_m/\delta g^{\mu\nu}.$$

Cuando hacemos una transformación conforme a la métrica del estilo $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} g_{\mu\nu}$ y arribamos a (4.23) para la acción de gravedad en el llamado *Einstein frame*, tenemos claro que es sólo una manera alternativa de representar a la misma teoría y que son físicamente equivalentes. Una inequivalencia física podría aparecer cuando la teoría esta especificada de manera incompleta, por ejemplo, si uno realiza las transformaciones conformes en el primer término de la acción S_{tot} y no lo hace en el segundo (el de la materia). Como menciona Brans [114], si uno hiciera esto estaría expresando la acción de la teoría en diferentes sistemas conformes pero sólo uno de ellos sería físicamente correcto.

Notemos ahora que si uno define el tensor energía-momento en el Einstein frame como $\bar{T}_{\mu\nu} \equiv -(2/\sqrt{-\bar{g}})\delta S_m/\delta \bar{g}^{\mu\nu}$, puede mostrarse que ahora este tensor satisface, con respecto a la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$, que [112]:

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{T}^{\mu\nu} = -\bar{T} \frac{\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}} \quad (4.42)$$

y que por lo tanto la cuadridivergencia será cero sólo cuando la fuente de materia posea traza \bar{T} nula, lo que por supuesto no es el caso general. Esto podría conducir a la conclusión de que el Principio de equivalencia no se satisface en términos de las variables elegidas para la representación del Einstein frame. Sin embargo ningún Principio será violado simplemente por una elección de representación de una teoría. Suele mencionarse que el hecho de que la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ no es la métrica cuyas geodésicas coinciden con las trayectorias de una partícula libremente gravitante implica una violación del Principio de equivalencia en el Einstein frame, cuando en realidad lo que el Principio implica es la existencia de *alguna* métrica cuyas geodésicas sean las trayectorias de caída libre y de hecho ya poseemos una (la $g_{\mu\nu}$ involucrada en el Jordan frame). Si uno elige o no dicha métrica para la representación es irrelevante a la hora de llegar a una conclusión sobre la validez de un Principio. El hecho de que tengamos una métrica $g_{\mu\nu}$ que se distinga por alguna razón de otras, tales como $\bar{g}_{\mu\nu}$, no justifica como a veces sucede en la literatura llamar o no '*física*' a una representación. Dentro de esta suerte de malas

interpretaciones, uno podría decir que el hecho de que el campo escalar ϕ en el Einstein frame no esté acoplado al escalar de Ricci R pero sí esté acoplado no-mínimamente a la materia, permite considerar a ϕ como un campo de materia y contener dichos términos dentro de la acción de la materia S_m . Hecho esto, uno puede verificar que ahora $\bar{T}_{\mu\nu}$ tiene cuadridivergencia nula respecto a la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ y decir: *'ok, ahora no se viola el Principio de equivalencia. El problema había surgido de una mala elección de como escribir el tensor de energía-momento'*. Sin embargo, esto no es cierto. El tensor métrico $\bar{g}_{\mu\nu}$ sigue siendo la métrica cuyas geodésicas no coinciden con las trayectorias de caída libre y además el tensor $\bar{T}_{\mu\nu}$ que así resulta (dependiendo ahora también de ϕ) no conduce al caso de Relatividad Especial cuando $\bar{g}_{\mu\nu}$ se reduce al caso plano de Minkowski.

De manera repetida ha sido aclamado en la literatura [115–120, 122] que sólo una elección de frame es la correcta o 'física', y que a raíz de ello diferentes representaciones conformes de una teoría no son físicamente equivalentes. De hecho se han sugerido algunos criterios para determinar cuáles frames son correctos y cuáles no [117, 119, 121]. Algunos autores sostienen que predicciones físicas distintas se obtienen por ejemplo en el Jordan o Einstein frame [119].

En resumen, al querer describir una teoría en términos matemáticos, uno elige un conjunto de variables que corresponderán tan sólo a una posible representación que *no* es única. Luego, a pesar de que enunciados tales como el Principio de equivalencia son *independientes* de la representación, al querer transformarlos en relaciones matemáticas cuantitativas contrastables (como por ejemplo los llamados postulados métricos [124]) éstas se tornan dependientes de la representación. Esto conduce a que la mayoría de las variantes en las teorías de gravitación son tan sólo distintas representaciones de la misma teoría o clase de teorías.

4.1.3. Teorías $f(R)$ y la aceleración del universo

Como se mencionó al principio de este capítulo, la motivación más reciente para el estudio de las teorías $f(R)$ proviene de la cosmología puesto que algunos de estos modelos parecen dar una explicación alternativa a la

aceleración del universo sin la necesidad de energía oscura.

En cosmología, la identificación de nuestro universo con un espacio-tiempo isótropo y homogéneo descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) está basada fundamentalmente por el alto grado de isotropía detectado en la radiación cósmica de fondo de microondas [30, 38]. Considerando que éste sea realmente el caso de nuestro universo, la métrica de FLRW puede escribirse como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (4.43)$$

donde (t, r, θ, ϕ) son las llamadas coordenadas comóviles, $a(t)$ es el factor de escala y k es el parámetro de curvatura de las secciones espaciales. Si además suponemos que el universo está lleno de fluidos ideales, el tensor de energía-momento se escribe como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (4.44)$$

donde u^μ representa la cuadrivelocidad de un observador comóvil que se mueve con el fluido de densidad de energía ρ y presión p .

Si consideramos el caso de una geometría espacialmente plana ($k = 0$), usando (4.43) en las ecuaciones de movimiento (4.19) y suponiendo que el tensor de energía-momento viene dado por (4.44) las ecuaciones de Friedmann modificadas pueden escribirse como [68]:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3f'} \left[\rho + \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'' \right] \quad (4.45)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{8\pi G}{f'} \left[p + (\dot{R})^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf') \right] \quad (4.46)$$

donde H es el parámetro de Hubble, ' indica derivada respecto a R y el punto representa la derivada respecto al tiempo t .

Para analizar la motivación que tienen las $f(R)$ para dar cuenta de la expansión acelerada del universo, es útil definir una densidad de energía y

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

una presión efectivas como:

$$\rho_{ef} = \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'' \quad (4.47)$$

$$p_{ef} = \dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf') \quad (4.48)$$

de esta manera, las ecuaciones (4.45) y (4.46) pueden reescribirse como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_{ef}) \quad (4.49)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6} \left[\rho + \rho_{ef} + 3(p + p_{ef}) \right] \quad (4.50)$$

y de esta forma, las correcciones a la curvatura pueden verse como la contribución proveniente de un fluido efectivo.

Con estas definiciones, el parámetro de la ecuación de estado para este fluido efectivo será:

$$w_{ef} \equiv \frac{p_{ef}}{\rho_{ef}} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{\frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f''} \quad (4.51)$$

Considerando que $f(R) \propto R^n$ y si el factor de escala sigue una ley como $a(t) = a_0(\frac{t}{t_0})^\alpha$ puede hallarse w_{ef} en función de n . El resultado es [68]:

$$w_{ef} = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3} \quad (4.52)$$

Por lo tanto, eligiendo adecuadamente el valor de n uno puede obtener un valor de w_{ef} tal que la expansión del universo sea acelerada.

Como ya fue mencionado, algunos autores proclamaron haber encontrado una solución a la aceleración del universo por este mecanismo (ver por ejemplo [60]). Sin embargo pronto otros autores llamaron la atención sobre que este tipo de modelos presentaba fuertes inestabilidades [66] o no pasaban tests de regímenes de campo débil (ver por ejemplo [64, 65]).

El análisis de estas inestabilidades [66] fue generalizado para una $f(R)$ arbitraria en el formalismo de la métrica [126] y puede verse de la siguiente manera.

Supongamos que planteamos una teoría que no se aparte mucho de la Relatividad General. Entonces, podremos parametrizarla como $f(R) = R + \epsilon\varphi(R)$ donde ϵ es un parámetro pequeño con unidades de masa al cuadrado y φ es una función sin unidades. Trazando la ecuación (4.19) con la métrica $g^{\mu\nu}$ (suponiendo ahora que del lado derecho de la igualdad hay una fuente $T_{\mu\nu}$) se obtiene:

$$3\Box f'(R) + f'(R)R - 2f(R) = 8\pi G T \quad (4.53)$$

donde T es la traza del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Para la $f(R)$ ahora en consideración esta última ecuación (suponiendo que $\varphi'' \neq 0$ y dividiendo por $3\epsilon\varphi''$) puede reescribirse como:

$$\frac{\Box\varphi'}{\varphi''} + \frac{(\epsilon\varphi' - 1)}{3\epsilon\varphi''}R - \frac{2}{3}\frac{\varphi}{\varphi''} = \frac{8\pi GT}{3\epsilon\varphi''} \quad (4.54)$$

usando que:

$$\Box\varphi'(R) = \varphi'''(R)\nabla^\alpha R\nabla_\alpha R + \varphi''(R)\Box R \quad (4.55)$$

entonces:

$$\Box R + \frac{\varphi'''}{\varphi''}\nabla^\alpha R\nabla_\alpha R + \frac{(\epsilon\varphi' - 1)}{3\epsilon\varphi''}R = \frac{8\pi GT}{3\epsilon\varphi''} + \frac{2\varphi}{3\varphi''} \quad (4.56)$$

Considerando una pequeña región del espacio-tiempo en el régimen de campo débil y aproximando localmente la métrica y el escalar de curvatura por,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad R = -8\pi G T + R_1 \quad (4.57)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y R_1 es una pequeña perturbación, se encuentra que R_1 a través de la ecuación (4.56) satisface (a primer orden en R_1) la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1 - \nabla^2 R_1 + \frac{16\pi G\varphi'''}{\varphi''}(\vec{\nabla}T \cdot \vec{\nabla}R_1 - \dot{T}\dot{R}_1) + \frac{1}{3\varphi''}\left(\frac{1}{\epsilon} - \varphi'\right)R_1 = \\ = 8\pi G\ddot{T} - 8\pi G\nabla^2 T - \frac{(8\pi G\varphi' + 2\varphi)}{3\varphi''} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

donde $\vec{\nabla}$ y ∇^2 son el gradiente y el Laplaciano en 3D respectivamente. La función φ y sus derivadas están evaluadas en $R = -8\pi GT$.

El coeficiente de R_1 en el cuarto término del lado izquierdo de la ecuación (4.58) es el cuadrado de una masa efectiva y está dominado por el término $(3\epsilon\varphi'')^{-1}$ debido a la pequeñez de ϵ para que estas teorías reproduzcan la correcta dinámica del universo. De este análisis se encuentra entonces que sólo aquellas teorías con $\varphi'' = f'' > 0$ serán estables puesto que conducen a que R_1 no diverja.

Además del asunto de la estabilidad, otro rasgo sobre el que algunos autores han llamado la atención es el que tiene que ver con el hecho de que las teorías $f(R)$ más sencillas, del estilo $f(R) = R - \alpha/R^n$, no parecen presentar una fase dominada por materia antes de la era acelerada [127, 128]. Modelos un poco más complejos parecen solucionar estos problemas (ver por ejemplo la revisión [63]).

Para terminar con esta sección, es interesante destacar que intentar resolver el problema de la energía oscura y generar universos acelerados con teorías $f(R)$ desde el *formalismo de la métrica* no es el único camino. Otra aproximación variacional es el *formalismo de Palatini*, según el cual, la variación de la acción se realiza tanto respecto a la métrica como a la conexión, tomándose a ambas como campos independientes.

Escribiendo la acción como:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_m \quad (4.59)$$

donde ahora, el tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ son construidos con la conexión tomada de manera independiente. Por otra parte, la acción de la materia S_m sigue siendo tomada como dependiente sólo de la métrica y los campos de materia. La variación de (4.59) respecto a la métrica y a la conexión conduce a las ecuaciones de segundo orden:

$$f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.60)$$

$$\vec{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) = 0 \quad (4.61)$$

donde $\bar{\nabla}$ es la derivada covariante definida con la conexión independiente y $(\mu\nu)$ indica la simetrización sobre los índices μ y ν . Además, cuando $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ se recupera la Relatividad General y la ecuación (4.61) se convierte en la definición de la conexión de Levi-Civita conocida. Este último caso implica también que tanto el formalismo de la métrica como el de Palatini son equivalentes, dejando de serlo una vez que uno se aparta de la Relatividad General.

Suponiendo un universo descrito por la métrica FLRW, la ecuación de Friedmann modificada en términos del corrimiento al rojo z y el parámetro de la contribución a la densidad total por parte de la materia Ω_m puede escribirse como [129]:

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \frac{3\Omega_m (1+z)^3 + f/H_o^2}{6f' \xi^2} \quad (4.62)$$

donde:

$$\xi = 1 + \frac{9}{2} \frac{f''}{f'} \frac{H_o^2 \Omega_m (1+z)^3}{\mathcal{R} f'' - f'} \quad (4.63)$$

Nuevamente, se manifiesta una complejidad adicional en las ecuaciones cosmológicas una vez que uno se aparta de la Relatividad General. A pesar de esto, las ecuaciones obtenidas por el formalismo de Palatini permiten ser abordadas con un poco más de optimismo que las respectivas en el formalismo de la métrica. Es así como algunos autores trabajando con (4.62) han logrado poner cotas observacionales para teorías del estilo $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \alpha/\mathcal{R}^n$ [129–131] con el fin de determinar cuáles de estas variantes permiten modelos de universos acelerados compatibles con los datos disponibles.

Aunque el método de Palatini conduce a ecuaciones de movimiento de segundo orden, siguen siendo algo difíciles de analizar como ya se manifiesta en la forma funcional de las ecuaciones de Friedmann modificadas que se obtienen y algunos autores sostienen que algunas teorías $f(R)$ dentro de este formalismo violarían el Principio de equivalencia mencionado en la sección anterior (ver por ejemplo [123]).

Recientemente se han estudiado modelos basados en modificaciones al equivalente Teleparalelo de la Relatividad General como aproximaciones al-

ternativas a los modelos inflacionarios [132, 133]. Con este espíritu, en la siguiente sección se hallará una solución cosmológica para la expansión acelerada del universo por medio de una clase de teorías, llamadas teorías $f(L_T)$, donde la torsión será la responsable de la aceleración observada y las ecuaciones de campo serán siempre de segundo orden. Veremos además que estos modelos tienen algunos beneficios interesantes frente a las teorías $f(R)$.

4.2. Gravitación y Teleparalelismo

Como se mencionó en la sección 4.1.2, la gravitación tiene la peculiaridad de que partículas con diferentes masas y composiciones sienten esta interacción de tal manera que todas adquieren la misma aceleración y además, dadas las mismas condiciones iniciales, también siguen las mismas trayectorias. Esta universalidad de la caída libre, como se vio anteriormente, se la identifica con el Principio de equivalencia, el cual establece la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitatoria.

La Relatividad General de Einstein es una teoría basada fundamentalmente en el Principio de equivalencia. La presencia de un campo gravitatorio es manifestada a través de la *curvatura* del espacio-tiempo y las partículas (sin spin) siguen geodésicas de este espacio-tiempo curvado por ser las curvas naturales de esa geometría. En la Relatividad General la geometría reemplaza el concepto de fuerza y las trayectorias se determinan por ecuaciones de geodésicas y no por ecuaciones de fuerzas.

Cualquier variedad diferenciable (a través de su conexión) tiene, en principio, dos propiedades: *curvatura* y *torsión* [134]. Geométricamente, si al trasladar paralelamente un vector \mathbf{V}_i [2, 3] a lo largo de una curva cerrada, encontramos que al retornar al punto de partida el vector \mathbf{V}_f no es el mismo que el de partida sino que aparece rotado, esto será señal de que la geometría subyacente está curvada (Figura 4.1a)). Un ejemplo clásico para ilustrar esto es la superficie de una esfera (Figura 4.1b)): partimos con el vector \mathbf{V}_i en el polo norte y lo trasladamos paralelamente por una línea de longitud constante hasta el ecuador. De allí lo trasladamos paralelamente a lo largo del ecuador una cierta distancia arbitraria y nuevamente, cerrando la curva,

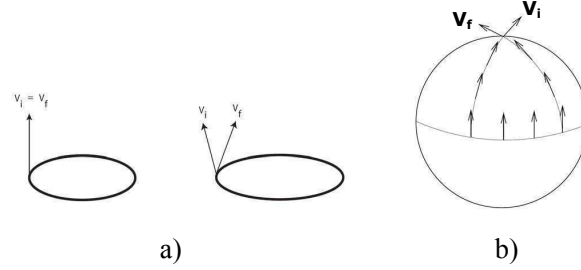


Figura 4.1: a) La figura muestra cómo visualizar, a través del transporte paralelo de un vector \mathbf{V}_i a lo largo de una curva cerrada, la presencia o no de curvatura de una superficie. Si el vector trasladado \mathbf{V}_f aparece rotado respecto al original, la geometría subyacente estará curvada. b) Ejemplo de éste análisis trasladando paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada sobre la superficie de una esfera.

volvemos al punto de partida en el polo norte trasladando paralelamente al vector por otra línea de longitud constante. Al comparar el vector inicial \mathbf{V}_i con el vector final \mathbf{V}_f vemos que aparecen rotados. Concluimos entonces que la superficie de la esfera está curvada.

Tomemos ahora dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} . Traslademos paralelamente al vector \mathbf{A} a lo largo de una curva que tenga como vector tangente al vector \mathbf{B} una pequeña distancia, digamos ϵ_1 , y llamemos a ese vector trasladado, \mathbf{A}' . Luego, tomemos el vector \mathbf{B} y trasladémoslo paralelamente a lo largo de una curva que tenga como vector tangente al vector \mathbf{A} otra pequeña distancia, digamos ϵ_2 , y nombrémoslo \mathbf{B}' . Si al finalizar este procedimiento el paralelogramo formado no se cierra será una evidencia de que la geometría subyacente está torsionada (ver Figura 4.2)

Para una variedad provista de una conexión arbitraria $\Upsilon^\rho_{\sigma\mu}$ esta información está contenida en los tensores de curvatura $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ y de torsión $T^\rho_{\sigma\mu}$, que en una base coordenada sus componentes se escriben:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Upsilon^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Upsilon^\rho_{\sigma\mu} + \Upsilon^\rho_{\lambda\mu} \Upsilon^\lambda_{\sigma\nu} - \Upsilon^\rho_{\lambda\nu} \Upsilon^\lambda_{\sigma\mu}. \quad (4.64)$$

$$T^\rho_{\sigma\mu} = \Upsilon^\rho_{\sigma\mu} - \Upsilon^\rho_{\mu\sigma} \quad (4.65)$$

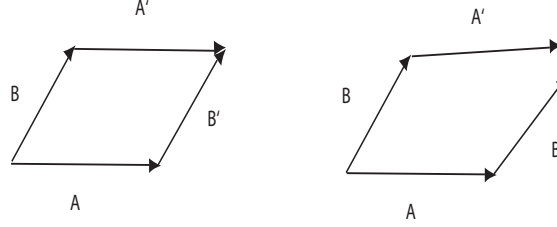


Figura 4.2: La figura muestra cómo visualizar, a través del transporte paralelo de dos vectores **A** y **B**, si una superficie no presenta torsión (*izq*) o si está torsionada (*der*).

Allí donde estos tensores se anulen, diremos que dicha superficie (variedad) es plana o que no posee torsión según sea el caso.

La conexión de la Relatividad General es la conexión de Levi-Civita, que en una base coordenada y en términos del tensor métrico se escribe como (ecuación (4.13)),

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left[\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \right] \quad (4.66)$$

Esta conexión tiene torsión nula, $T^{\sigma}{}_{\mu\nu} = 0$ pero posee curvatura $R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda} \neq 0$. En términos de esta conexión, la ecuación de movimiento de una partícula está dada por la ecuación geodésica (4.31), o lo que es equivalente:

$$\frac{du_{\mu}}{ds} - \Gamma^{\theta}{}_{\mu\nu} u_{\theta} u^{\nu} = 0 \quad (4.67)$$

lo que simplemente nos dice que la cuadri-aceleración es nula. Esta propiedad revela la ausencia del concepto de fuerza gravitatoria en Relatividad General.

La elección de Einstein de la conexión de Levi-Civita implicó otorgarle a la curvatura el protagonismo en la descripción de la gravitación y no darle un rol a la torsión en dicho esquema. Cartan fue el primero en contemplar la posibilidad de esta extensión y pronto surgió la formulación de una nueva teoría, la teoría de Einstein-Cartan [135], en la cual la conexión de Levi-Civita fue reemplazada por una conexión general con curvatura y torsión. Según esta teoría, a nivel microscópico, la materia que representamos por

partículas elementales está caracterizada no sólo por su masa sino además por su spin. Éste último debería ser también fuente de gravitación y lo haría a través de la torsión. Por lo tanto, en el marco de esta teoría, tanto la curvatura como la torsión representan grados de libertad independientes y ambas propiedades son fuentes de gravitación; entonces, deberíamos esperar nueva física asociada con la torsión. A nivel macroscópico, sin embargo, el spin es irrelevante y la teoría de Einstein-Cartan deviene en la Relatividad General.

Pero aquí analizaremos un enfoque diferente para la torsión: ¿existe una teoría en donde los efectos gravitatorios puedan ser descritos *sin* curvatura y *sólo* con torsión? La respuesta es afirmativa y tal teoría es conocida como el *equivalente Teleparalelo de la Relatividad General* (TEGR).

La noción de paralelismo absoluto o *teleparalelismo* fue introducida por Einstein entre 1920 y 1930 en un intento infructuoso de unificar la gravedad con el electromagnetismo [80]. Algunas décadas después sus ideas motivaron a otros autores para la búsqueda de su utilización en el ámbito de la gravitación [81–84].

Mientras que en Relatividad General se utiliza la conexión de Levi-Civita (la cual posee curvatura pero no torsión), y las geodésicas se caracterizan por ser curvas autoparalelas de esta conexión, en teleparalelismo se usará la conexión de Weitzenböck [85], con torsión no nula y sin curvatura. Ahora ya no será el tensor métrico el que contenga la información sobre el campo gravitatorio sino que será un campo de tétradas en cada punto del espacio-tiempo $\mathbf{e}_i(x^\mu)$, donde $i = 0, 1, 2, 3$. Por otra parte, cada vector \mathbf{e}_i está descrito por sus componentes e_i^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ en alguna base coordenada, o sea podemos escribirlo como $\mathbf{e}_i = e_i^\mu \partial_\mu$. Los índices latinos hacen referencia al espacio tangente en cada punto donde está definida la métrica de Minkowski $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, mientras que los índices griegos se refieren a las coordenadas de una dada variedad curva cuya geometría está expresada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. El nexo entre la tetrada y la métrica proviene de pedir que la tetrada sea ortonormal:

$$\eta_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu \tag{4.68}$$

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

o bien, usando la co-tétrada e_μ^i (satisfaciendo que $e_\mu^i e_i^\nu = \delta_\mu^\nu$) a través de la relación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j \quad (4.69)$$

Con la finalidad de hallar una noción diferente de paralelismo, se define la conexión de Weitzenböck como:

$$\overset{\mathbf{w}}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = e_i^\lambda \partial_\nu e_\mu^i = -e_\mu^i \partial_\nu e_i^\lambda \quad (4.70)$$

De esta manera, la derivada covariante de Weitzenböck de un vector cualquiera $\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i = V^i e_i^\mu \partial_\mu$ será:

$$\overset{\mathbf{w}}{\nabla}_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \overset{\mathbf{w}}{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu V^\lambda = e_i^\mu \partial_\nu V^i \quad (4.71)$$

y entonces ahora un vector \mathbf{V} será autoparalelo si sus componentes $V^i = e_\mu^i V^\mu$ son constantes, o sea, si sus proyecciones sobre la tétrada no cambian. En particular, la propia tétrada es autoparalela.

Como se mencionó, el tensor de curvatura (4.64) asociado a la conexión de Weitzenböck es nulo, pero tiene torsión no nula. En general, cuando una conexión no es simétrica hemos visto que se define el *tensor de torsión* de tal manera que en una base coordinada sus componentes se escriben según (4.65).

En el caso de la conexión de Weitzenböck este tensor resulta,

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \overset{\mathbf{w}}{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda - \overset{\mathbf{w}}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = e_i^\lambda (\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i) \quad (4.72)$$

y el hecho de que ahora este tensor no se anule será el que dará cuenta de la existencia de un campo gravitatorio.

El lagrangiano del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General debe ser tal que el valor de la acción teleparalela coincida, a menos de términos de superficie, con el de la acción de Einstein-Hilbert cuando la métrica es escrita en función de la tétrada usando (4.69). Para lograr esto, a partir de las tres componentes irreducibles de la torsión que pueden construirse, se requiere la anulación de la parte axial-vectorial de la torsión, lo que implica ignorar

las contribuciones del spin de la materia. De esta manera se encontró que el lagrangiano escalar Teleparalelo es [84, 136, 137]:

$$L_T = S_\rho{}^{\mu\nu} T^\rho{}_{\mu\nu} \quad (4.73)$$

donde:

$$S_\rho{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(K^{\mu\nu}{}_\rho + \delta_\rho^\mu T^{\theta\nu}{}_\theta - \delta_\rho^\nu T^{\theta\mu}{}_\theta \right) \quad (4.74)$$

y en esta ecuación aparece el tensor de *contorsión* definido como:

$$K^{\mu\nu}{}_\rho = -\frac{1}{2} \left(T^{\mu\nu}{}_\rho - T^{\nu\mu}{}_\rho - T_\rho{}^{\mu\nu} \right) \quad (4.75)$$

que no es más que la diferencia entre la conexión de Weitzenböck y la de Levi-Civita de la Relatividad General, o sea:

$$\overset{\mathbf{w}}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\mu\nu} \quad (4.76)$$

La equivalencia entre Relatividad General y el Teleparalelismo se revela en que sus respectivos lagrangianos difieren en una cuatridivergencia total no nula. Como el Teleparalelismo gobierna sólo los grados de libertad asociados a la métrica (4.69), la acción Teleparalela es invariante ante transformaciones locales de Lorentz del campo de tétradas.

En todas estas últimas ecuaciones, los índices griegos se suben y bajan con la métrica $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu}$. La métrica de Minkowski se usará en el caso de tener que subir o bajar índices latinos.

En términos de la conexión de Weitzenböck (4.70), la ecuación de la geodésica (4.67) queda ahora escrita como una ecuación de partícula sometida a una *fuerza* asociada a la torsión [137]:

$$\frac{du_\mu}{ds} - \overset{\mathbf{w}}{\Gamma}{}^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu = T^\theta{}_{\mu\nu} u_\theta u^\nu \quad (4.77)$$

Vemos así que la torsión juega el papel de fuerza gravitatoria, al estilo de fuerza de Lorentz en electrodinámica. Usando la expresión que relaciona la conexión de Weitzenböck con la de Levi-Civita (4.76) podemos pasar de la

ecuación de fuerza (4.77) a la de la geodésica (4.67) de la Relatividad General y viceversa, y por lo tanto, ambas teorías describen las mismas trayectorias físicas. La interacción gravitatoria tiene entonces dos descripciones *equivalentes*: una en términos de la curvatura (Relatividad General) y otra a través de la torsión (TEGR); ésta última ahora sin presuponer nueva física asociada a la torsión.

4.3. Teorías $f(L_T)$

4.3.1. Ecuaciones de campo.

Como se describió a lo largo de la sección 4.1 de esta Tesis, las teorías $f(R)$ resurgieron en los últimos años con el fin de dar una respuesta alternativa a la aparente aceleración del universo. Sin embargo, un rasgo que poseen todas estas teorías debido a que el escalar de Ricci R contiene derivadas segundas de la métrica, es que (en el formalismo de la métrica) conducen a ecuaciones de movimiento de cuarto orden para la misma. Para el caso particular del lagrangiano de Einstein-Hilbert en donde $f(R) = R$ las ecuaciones dinámicas terminan siendo de segundo orden porque el término que contiene las derivadas segundas puede escribirse como una integral de superficie y puesto que la variación de la acción se lleva a cabo manteniendo los extremos fijos, el término en cuestión termina anulándose. Pero ahora, como se mencionó en la sección 4.1.1, el factor $\frac{\partial f}{\partial R}$ impide realizar lo mismo.

Se buscó entonces construir una teoría de gravedad modificada con el objetivo de que portara soluciones cosmológicas con alguna fase acelerada pero que a la vez mantuviera el hecho de trabajar con ecuaciones de movimiento de segundo orden. Esto se consiguió a partir del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (TEGR) [80, 84] descrito en la sección anterior.

Consideremos entonces una teoría cuya densidad lagrangiana sea una función general del lagrangiano teleparalelo L_T . Esto es, consideremos $\mathcal{L} = e f(L_T)$ donde $e = \det(e^i_\mu) = \sqrt{-g}$. (Ver ecuación (4.69)). Recordemos que si $f(L_T) = L_T$ tenemos el caso de la Relatividad General.

Escribiendo la acción como:

$$I = \frac{1}{16 \pi G} \int d^4 x e f(L_T) \quad (4.78)$$

las ecuaciones de movimiento en vacío se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu e_\nu^i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\nu^i} = 0 \quad (4.79)$$

Desarrollando cada término se tiene que,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu e_\nu^i)} \right] &= \\ &= \partial_\mu(e) f'(L_T) \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu e_\nu^i)} + e f''(L_T) \partial_\mu L_T \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu e_\nu^i)} + e f'(L_T) \partial_\mu \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu e_\nu^i)} \right) \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_\nu^i} = \frac{\partial e}{\partial e_\nu^i} f(L_T) + e f'(L_T) \frac{\partial L_T}{\partial e_\nu^i}$$

Donde ' significa derivar respecto a L_T . Luego, usando que:

$$\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_\mu e_\nu^i)} = -4 e_i^\lambda S_\lambda^{\mu\nu} = -4 S_i^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial e_\nu^i} = -4 e_i^\lambda T^\rho_{\mu\lambda} S_\rho^{\mu\nu}$$

y si la materia se acopla a la métrica de la manera estándar, entonces las ecuaciones de movimiento o de campo que se obtienen son:

$$\begin{aligned} e^{-1} \partial_\mu (e S_i^{\mu\nu}) f'(L_T) - e_i^\lambda T^\rho_{\mu\lambda} S_\rho^{\nu\mu} f'(L_T) + S_i^{\mu\nu} \partial_\mu (L_T) f''(L_T) + \\ + \frac{1}{4} e_i^\nu f(L_T) = 4 \pi G e_i^\rho T_\rho^\nu \end{aligned} \quad (4.80)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es como siempre el tensor de energía-momento. Estas ecuaciones son, para una $f(L_T)$ genérica, ecuaciones de segundo orden para las tétradas, lo que ya manifiesta el hecho de que estas teorías tienen ecuaciones dinámicas mucho más sencillas que las teorías $f(R)$.

Algunas observaciones finales de esta subsección son las siguientes: Por un

lado, una vez que modifiquemos el lagrangiano del TEGR (4.73) para construir una teoría $f(L_T)$ está claro que ambas teorías, la Relatividad General y la gravedad Teleparalela, dejarán de ser teorías equivalentes puesto que sus ecuaciones de campo ya no serán las mismas. Por otro lado, una vez que modifiquemos el lagrangiano L_T (4.73) mediante una $f(L_T)$ debemos tener en cuenta que el lagrangiano modificado perderá la invariancia ante transformaciones de Lorentz *locales* de las tétradas. Esto equivale a decir que, ante una transformación local de Lorentz, las ecuaciones de campo no serán iguales y que dada una solución a las ecuaciones de campo modificadas, si le hacemos una transformación local de Lorentz, el resultado no será nuevamente solución. Las ecuaciones dinámicas de la teoría son entonces ecuaciones para los grados de libertad asociados a la tétroda (no sólo para aquellos grados de libertad asociados a la métrica).

4.3.2. Solución cosmológica acelerada y cotas observacionales

Como buscamos una solución cosmológica a las ecuaciones de movimiento, una elección natural es trabajar con una métrica que represente un universo isótropo y homogéneo (FLRW) que por simplicidad además supondremos el caso espacialmente plano ($k = 0$). De esta manera entonces:

$$e^i{}_\mu = \text{diag}(1, a(t), a(t), a(t)) \rightarrow g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)) \quad (4.81)$$

Para este caso, usando las definiciones (4.72), (4.74) y (4.75) se encuentra que las componentes no nulas valen:

$$\begin{aligned} T^1{}_{01} &= T^2{}_{02} = T^3{}_{03} = -\frac{\dot{a}}{a} = -T^1{}_{10} = -T^2{}_{20} = -T^3{}_{30} \\ S_1{}^{01} &= S_2{}^{02} = S_3{}^{03} = \frac{\dot{a}}{a} = -S_1{}^{10} = -S_2{}^{20} = -S_3{}^{30} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Y entonces:

$$S^{\rho\mu\nu}T_{\rho\mu\nu} = -6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -6 H^2 \quad (4.83)$$

donde en la última igualdad se hizo uso de la definición del parámetro de

Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Nótese que el invariante (4.83) es proporcional a la variable dinámica cosmológica H^2 y será ésta la que nos guiará en la búsqueda de la acción para la teoría modificada.

Particularizando las ecuaciones (4.80) para el caso de un universo FLRW (4.81) y teniendo en cuenta (4.83), la ecuación de Friedmann modificada (Ec. $i = 0 = \nu$) para una $f(L_T)$ genérica se escribe como:

$$12 H^2 f'(L_T) + f(L_T) = 16\pi G \rho \quad (4.84)$$

Por otra parte, usando que $S_i^{\mu\nu} = e_i^\rho S_\rho^{\mu\nu}$ la ecuación $i = 1 = \nu$ resulta ser:

$$48H^2 f''(L_T)\dot{H} - f'(L_T)[12H^2 + 4\dot{H}] - f(L_T) = 16\pi G p \quad (4.85)$$

donde aquí se utilizó que $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$ y ρ y p son la densidad y presión totales respectivamente de los fluidos supuestos ideales que llenan el universo. A partir de estas dos últimas ecuaciones podemos verificar fácilmente que se satisface una ecuación de conservación. Notemos que con esta afirmación estamos verificando que $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ y con ello las implicaciones del Principio de equivalencia que se discutieron en la sección 4.1.2.

Efectivamente, multiplicando por a^3 la ecuación (4.84) y derivándola respecto del tiempo se tiene,

$$36a^2\dot{a}H^2 f'(L_T) + 24a^3H\dot{H} f'(L_T) + 12a^3H^2 f''(L_T)\dot{L}_T + 3a^2\dot{a}f(L_T) + a^3 f'(L_T)\dot{L}_T = 16\pi G \frac{d}{dt}(a^3 \rho) \quad (4.86)$$

donde $\dot{L}_T = -12H\dot{H}$. Por otra parte, (4.85) puede reescribirse como,

$$H f''(L_T)\dot{L}_T = -\frac{1}{4}(f'(L_T)(12H^2 + 4\dot{H}) + f(L_T) + 16\pi G p) \quad (4.87)$$

Usando esto último en (4.86) se obtiene entonces la ecuación de conservación:

$$\frac{d}{dt}(a^3 \rho) = -3 a^3 H p \quad (4.88)$$

para cualquier $f(L_T)$. Entonces, si la ecuación de estado es $p = w\rho$ ten-

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

diremos que ρ evolucionará como $\rho \propto (1+z)^{3(1+w)}$ (siendo z como siempre el corrimiento al rojo cosmológico).

Estamos interesados en obtener una expansión acelerada sin energía oscura sino que sea conducida por la torsión. Por ello, analizamos el tipo de teorías $f(L_T)$ en donde

$$f(L_T) = L_T - \frac{\alpha}{(-L_T)^n} \quad (4.89)$$

donde α y n son constantes reales a ser determinadas por cotas observacionales. Aunque la forma funcional de (4.89) es similar a algunas consideradas en la literatura de las teorías $f(R)$, ahora el parámetro o variable que nos guiará hacia una teoría de gravedad modificada será H y no R . Este hecho da a estas teorías otro rasgo interesante puesto que H justamente es el parámetro más relevante en la cosmología. Para épocas tardías el término $-\alpha/(-L_T)^n$ será dominante mientras que en épocas tempranas, cuando $H \rightarrow \infty$, se recupera lo que ya conocemos en Relatividad General. A partir de (4.84) junto con (4.89), la ecuación de Friedmann modificada resulta ser,

$$H^2 - \frac{(2n+1)\alpha}{6^{n+1}H^{2n}} = \frac{8}{3}\pi G\rho \quad (4.90)$$

(una dependencia funcional similar a la que arribaron en sus resultados otros autores tales como [51, 138] aunque con diferentes motivaciones teóricas).

Reemplazando entonces $\rho = \rho_{mo}(1+z)^3 + \rho_{ro}(1+z)^4$, y llamando $\Omega_i = 8\pi G \rho_{io}/(3H_o^2)$ a las contribuciones de la materia y la radiación a la densidad total de energía hoy, la ecuación (4.90) se transforma en

$$y^n(y - B) = C \quad (4.91)$$

donde $y = H^2/H_o^2$, $B = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4$ y $C = \alpha(2n+1)(6H_o^2)^{-(n+1)}$. La evaluación de esta ecuación para $z = 0$ permite reescribir a la constante C como una función de Ω_i y n : $C = 1 - \Omega_m - \Omega_r$. Para $\alpha = 0$ (entonces $1 = \Omega_m + \Omega_r$) vemos que se recupera la ecuación de Friedmann de la Relatividad General para el caso espacialmente plano $H^2 = H_o^2 B$. El caso $n = 0$ recupera

la dinámica de la Relatividad General con una constante cosmológica $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$. Notar la simplicidad funcional de (4.90) en contraste con su análoga en las teorías $f(R)$. Comparada con Relatividad General, n es el único parámetro libre nuevo en (4.91), puesto que especificando el valor de n y Ω_m (Ω_r) el valor de α (en unidades de $H^{2(n+1)}$) queda automáticamente fijo a través de la relación (4.90). Para obtener soluciones exactas de $H(z)$ en función de n se resolvió numéricamente la ecuación (4.91) haciendo uso de un código implementado con el Wolfram Mathematica Software y hallando una función $H(z)$ interpolando adecuadamente y comparando esto con algunas soluciones analíticas exactas conocidas para ciertos valores de n (tales como -1, 0, 1, 2 etc.).

Dado que la evidencia más sólida para la aceleración del universo proviene de las mediciones de distancias luminosas de supernovas del tipo Ia, usamos aquí la compilación de datos más reciente que consiste en 307 eventos de SNs Ia (la compilación o muestra llamada *Union*) [31] para poner cotas en el plano de los parámetros $n - \Omega_m$. El módulo de distancia predicho para una supernova con un corrimiento al rojo z , para un dado conjunto de parámetros $\mathbf{P}=(n, \Omega_m)$, vale

$$\mu(z | \mathbf{P}) = m - M = 5 \log(d_L) + 25 \quad (4.92)$$

donde m y M son las magnitudes aparente y absoluta respectivamente, y d_L es la distancia luminosa (medida en megaparsecs),

$$d_L(z; \mathbf{P}) = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z', \mathbf{P})} \quad (4.93)$$

donde $H(z; \mathbf{P})$ está dada por la solución numérica de (4.91). Usamos también una estadística de χ^2 con el fin de hallar el mejor ajuste a los datos, para un dado conjunto de parámetros \mathbf{P} (marginalizando sobre H_o),

$$\chi_{SNe}^2 = \sum_{i=1}^{N=307} \frac{[\mu_i(z | \mathbf{P}) - \mu_i^{obs}(z)]^2}{\sigma_i^2} \quad (4.94)$$

donde $\mu_i(z | \mathbf{P})$ está definido por (4.92), μ_i^{obs} y σ_i son el módulo de distancia

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

y su incerteza para cada valor observado [31].

Como es sabido, las mediciones de SNs Ia no son suficientes para acotar el parámetro Ω_m completamente. Por ello, para llevar a cabo la estadística consideramos también, por un lado, la información proveniente del pico en las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) detectado en la función de correlación de galaxias rojas luminosas (LRG) del Sloan Digital Sky Survey. La escala observada del pico acota efectivamente la cantidad (asumiendo un modelo Λ CDM) [29],

$$A_{0,35} = D_V(0,35) \frac{\sqrt{\Omega_m H_o^2}}{0,35} = 0,469 \pm 0,017 \quad (4.95)$$

donde $z = 0,35$ es el corrimiento al rojo típico de las LRG y D_V está definido como [29]:

$$D_V(z) = \left[\frac{z}{H(z)} \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (4.96)$$

Por otro lado, también incluimos en la estadística el *shift parameter* de la Radiación Cósmica de Fondo (CMB), el cual relaciona la distancia diámetro angular a la superficie de últimos scatterings con la escala angular del primer pico acústico en el espectro angular de la CMB. Para hacer esto, consideramos una contribución de la radiación de $\Omega_r = 5 \times 10^{-5}$. El shift parameter de la CMB está dado por [30],

$$R_{1089} = \sqrt{\Omega_m H_o^2} \int_0^{1089} \frac{dz}{H(z)} = 1,710 \pm 0,019 \quad (4.97)$$

Aquí podemos usar ambos parámetros ya que nuestro modelo presenta una fase dominada por la materia al momento del desacople.

La Figura 4.3 muestra el diagrama de Hubble para las 307 SNs Ia pertenecientes a la muestra *Union*. Las curvas representan modelos con valores de Ω_m y n obtenidos a partir de haber minimizado el χ^2 usando sólo SNIa y también SNIa+BAO+CMB. También se muestra como referencia el modelo Λ CDM con $\Omega_m = 0,26$. Los valores obtenidos para el mejor ajuste a los datos de SNs solamente son $\Omega_m = 0,42$ y $n = 1,30$ con un reducido $\chi_\nu^2 \equiv \chi_{min}^2/\nu \simeq 1,02$ (o

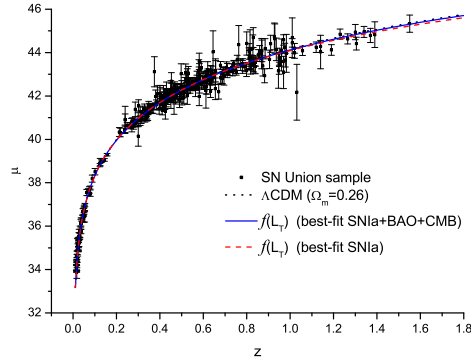


Figura 4.3: Diagrama de Hubble para las 307 SNs Ia de la muestra *Union* [31]. Las curvas corresponden al modelo de concordancia Λ CDM con $\Omega_\Lambda=0.74$ y $\Omega_m=0.26$ (línea de puntos), y a nuestro modelo con los valores correspondientes al mejor ajuste $\Omega_m=0.42$ y $n=1.30$ (línea a trazos) y también con los valores provenientes del análisis conjunto de SNIa+BAO+CMB, $\Omega_m=0.27$ y $n=-0.10$ (línea llena). Reproducida desde [139].

lo que es equivalente, un $\Delta\chi_{min}^2 = -1,1$ respecto a Λ CDM), donde ν es el número de grados de libertad [139].

En la Figura 4.4 se grafica el módulo de distancia residual ($\Delta\mu$) con respecto al modelo Λ CDM para poder apreciar mejor las discrepancias entre nuestro modelo y el Λ CDM. Puede observarse que nuestro modelo predice valores de distancias luminosas menores a éstas provenientes del modelo de concordancia.

Las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 muestran los niveles o contornos de confianza (N.C.) del 68.3%, 95.4% y 99.7%, para la probabilidad conjunta del par de parámetros n y Ω_m . Para el caso de BAO y CMB se observa una fuerte degeneración en los parámetros formando bandas en vez de gráficos que se parezcan a elipses. Esto es esperable puesto que las cantidades involucradas para el análisis de BAO y CMB están medidas a un valor específico de corrimiento al rojo z .

En la Figura 4.8 se muestran los intervalos de confianza al 68.3%, 95.4% y 99.7% para la probabilidad conjunta del par de parámetros n y Ω_m ha-

Cap.4 Teorías de gravedad modificada para la expansión acelerada del universo

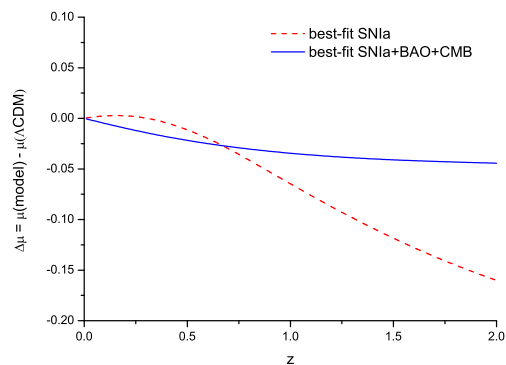


Figura 4.4: Módulo de distancia residual respecto al modelo Λ CDM para los mismos valores de la Figura 4.3. Reproducida desde [139].

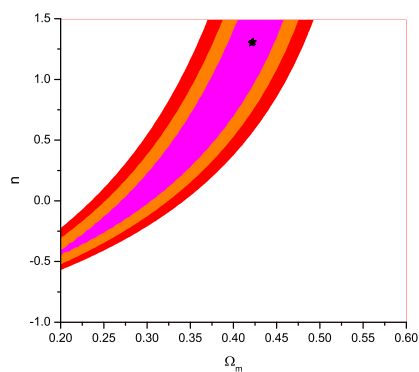


Figura 4.5: Contornos de confianza al 68.3%, 95.4% y 99.7% en el plano $n - \Omega_m$ para los datos de supernovas del tipo Ia utilizados. El mejor ajuste a los datos se logra con los valores $n = 1,3$ y $\Omega_m = 0,42$ como indica la pequeña estrella sobre el gráfico.

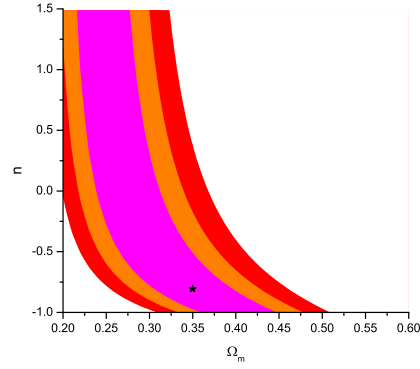


Figura 4.6: Contornos de confianza al 68.3 %, 95.4 % y 99.7 % en el plano $n - \Omega_m$ para la medición del dato $A_{0,35}$ utilizado en este trabajo. El mejor ajuste se logra con los valores $n = -0,81$ y $\Omega_m = 0,35$.

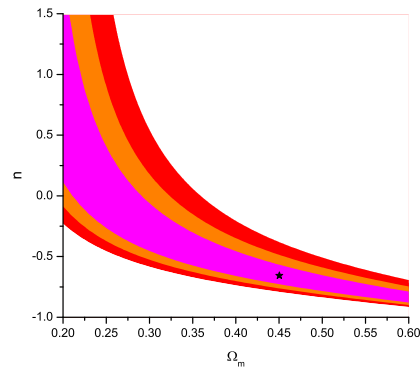


Figura 4.7: Contornos de confianza al 68.3 %, 95.4 % y 99.7 % en el plano $n - \Omega_m$ para la medición del shift parameter R_{1089} proveniente de los datos de CMB utilizado en este trabajo. El mejor ajuste se logra con los valores $n = -0,66$ y $\Omega_m = 0,45$.

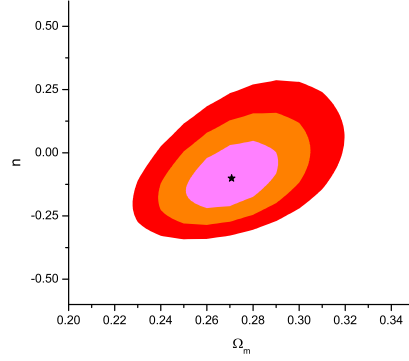


Figura 4.8: Contornos o intervalos de confianza al 68.3%, 95.4% y 99.7% en el plano $n - \Omega_m$ realizados combinando los datos de SNs Ia, BAO y CMB. El mejor ajuste al análisis conjunto se logra con los valores $n = -0,10$ y $\Omega_m = 0,27$. Reproducida desde [139].

biendo combinado los datos de SNs Ia con el dato de BAO y el respectivo de CMB. El hecho de que afortunadamente las tres líneas de investigación aquí consideradas sean complementarias a la hora de acotar parámetros cosmológicos, permite encontrar una zona de intersección entre las tres figuras 4.5, 4.6 y 4.7. Este análisis arroja que el mejor ajuste a todos los datos se logra con $n = -0,10$ y $\Omega_m = 0,27$ (con un $\chi_{min}^2/\nu \simeq 1,01$, $\Delta\chi_{min}^2 = -1,2$) y además los valores de los parámetros yacen en los rangos (al 68.4% N.C.): $n \in [-0,23, 0,03]$; $\Omega_m \in [0,25, 0,29]$ [139].

Para nuestro modelo también analizamos las ecuaciones de estado total y efectiva en función del z . A partir de (4.90) y (4.85) junto con (4.89), uno puede definir una contribución a la densidad y la presión por parte de la torsión como:

$$\begin{aligned}
 \rho_T &= \frac{3}{8\pi G} \frac{(2n+1)\alpha}{6^{n+1}H^{2n}} \\
 p_T &= \frac{\alpha}{8\pi G} \left[(6H^2)^{-(n+1)} \dot{H} [4n(n+1) - 2n] + \right. \\
 &\quad \left. - 6n(6H^2)^{-(n+1)} H^2 - \frac{(6H^2)^{-n}}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

para luego reescribir las ecuaciones dinámicas como,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_T) \quad (4.99)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6}[\rho + \rho_T + 3(p + p_T)] \quad (4.100)$$

Entonces, haciendo uso de (4.99) y (4.100) las ecuaciones de estado total y efectiva se reescriben como,

$$w_{tot} \equiv \frac{p + p_T}{\rho + \rho_T} = -1 + \frac{2(1+z)}{3H} \frac{dH}{dz} \quad (4.101)$$

$$w_{eff} = \frac{p_T}{\rho_T} \quad (4.102)$$

La Figura 4.9 muestra la evolución de la ecuación de estado total w_{tot} como función del z para nuestro modelo con los valores del mejor ajuste logrado. Allí pueden observarse las tres últimas fases de la evolución del universo: dominada por radiación ($w = 1/3$), dominada por materia ($w = 0$) y la aceleración reciente ($w \simeq -1$). La Figura 4.10 muestra la ecuación de estado efectiva proveniente de la contribución de una componente que podríamos llamar *torsión oscura* [139].

Finalmente, analizando (4.100) encontramos que nuestro modelo con $n = -0,10$ predice que la transición desde la fase desacelerada a la acelerada ocurre a $z_{acc} \simeq 0,74$, lo que está de acuerdo con recientes trabajos como por ejemplo [140].

Un hecho interesante para destacar es que la ecuación (4.90) revela que un valor de $n > 0$, como el que se obtiene al considerar sólo los datos de SNIa, implica que la ecuación de estado de torsión oscura efectiva es del tipo *Phantom* [34]. Esto es, dado que H decrece a medida que transcurre el tiempo, la densidad de torsión oscura incrementa en vez de diluirse con la expansión ($w_{eff} < -1$). Sin embargo, cuando combinamos todos los datos SNIa+BAO+CMB podemos ver desde la Figura 4.8 que es ligeramente favorecido (1σ N.C.) un modelo con $n \leq 0$.

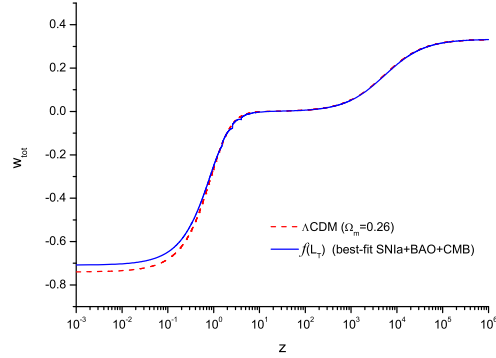


Figura 4.9: Las curvas corresponden a la ecuación de estado total en función del z esperada para el modelo estándar de concordancia Λ CDM con $\Omega_\Lambda=0.74$ y $\Omega_m=0.26$ (línea de trazos), y para nuestro modelo (línea llena) con los valores del mejor ajuste logrado proveniente de SNIa+BAO+CMB, $\Omega_m=0.27$ y $n=-0.10$. Pueden apreciarse las tres fases cosmológicas. Reproducida desde [139].

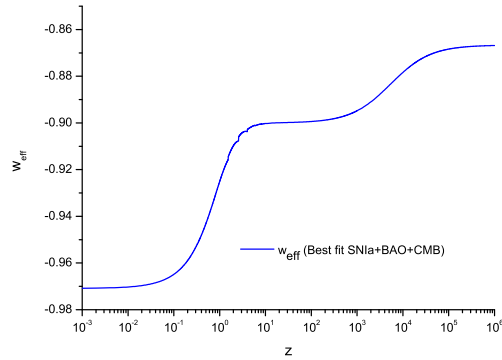


Figura 4.10: Ecuación de estado efectiva en función del z para nuestro modelo con los valores del mejor ajuste a los datos de SNIa+BAO+CMB, $\Omega_m=0.27$ y $n=-0.10$. Reproducida desde [139].

Capítulo 5

Conclusiones

”¿Qué otra cosa vislumbra en la oscura lejanía,
allá en el abismo del tiempo?”

SHAKESPEARE, *La Tempestad*

Si bien en los últimos 10 años se han conocido muchas posibles soluciones al problema de la energía oscura y la aceleración del universo, por un lado poco desarrollo ha sido llevado a cabo en el análisis de efectos no lineales que podrían estar presentes en la propagación de ondas electromagnéticas provenientes de fuentes lejanas; y por otro lado la gran mayoría de las teorías de gravedad modificada que se han estado elaborando a la fecha (teorías $f(R)$), son modificaciones de la Relatividad General que conducen en general a ecuaciones de movimiento de cuarto orden para la métrica y muy pocos de estos modelos han superado requisitos mínimos de estabilidad y que reproduzcan resultados conocidos en el régimen de campo débil o presenten todas las fases de la evolución cosmológica estándar.

Por lo tanto, en esta Tesis se realizó un análisis de modelos electrodinámicos no lineales mediante lagrangianos de Born-Infeld aplicados a la propagación de un rayo de luz en un contexto cosmológico; y posteriormente un estudio de teorías de gravedad modificada para explicar la aceleración del universo pero en el contexto del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General cuyas ecuaciones de movimiento son siempre de segundo orden, lo que las convierte en teorías mucho más sencillas de analizar que las men-

cionadas teorías $f(R)$.

A lo largo de los capítulos anteriores se ha mostrado cómo los distintos objetivos propuestos se fueron alcanzando, tanto a nivel teórico como a nivel de contrastación observacional con sets de datos provenientes de varias líneas de investigación de la Cosmología actual. A continuación se presentan las conclusiones específicas de cada parte del trabajo.

En la primera parte de esta Tesis se lograron hallar soluciones exactas de la teoría de Born-Infeld para ondas electromagnéticas propagándose en presencia de campos estáticos de fondo. El carácter no lineal de las ecuaciones de Born-Infeld genera una interacción entre estos campos de fondo y el de la onda que cambia la velocidad de propagación de la misma y se adiciona una componente longitudinal a la onda. Para el caso de un fondo magnético, como consecuencia de esto último, se halló que la dirección del rayo difiere de la correspondiente a la propagación y eventualmente esto podría ser utilizado en un futuro para testear experimentalmente la teoría de Born-Infeld.

Posteriormente, y con los resultados anteriores, se estudió cómo se propagan ondas electromagnéticas de Born-Infeld en el caso de un universo en expansión y en presencia de un campo magnético cosmológico de fondo. Hallamos que el carácter no lineal de las ecuaciones en este caso producen además una modificación a la relación entre el flujo de energía y la distancia luminosa a una fuente. Esto genera rasgos interesantes que podrían ser quizás detectados con mediciones más precisas de distancias luminosas a supernovas de tipo Ia y abrir una nueva ventana al análisis de efectos electrodinámicos no lineales presentes en la propagación de la luz que recibimos de fuentes lejanas y que llevaron a concluir la existencia de la energía oscura en 1998 para explicar la expansión acelerada del universo.

En la segunda parte de esta Tesis, hemos estudiado otro tipo de modificaciones a las teorías clásicas de campos y sus aplicaciones a la cosmología; modificaciones a las ecuaciones de Einstein que apelen a lagrangianos más generales, como son las teorías $f(R)$ de la gravedad. Mientras que con la teoría de Born-Infeld buscamos una corrección a cortas distancias de la teoría de Maxwell, las teorías $f(R)$ ofrecen modificaciones a largas distancias de la teoría de Einstein de la Relatividad General.

La idea básica de estudiar teorías de gravedad modificada es indagar sobre el hecho de si la Relatividad General es o no la única descripción geométrica posible de la gravedad. Pero como se describió a lo largo del Capítulo 4, la motivación de trabajar con teorías de gravedad modificada resurgió en los últimos años con el fin de dar una respuesta alternativa a la aparente aceleración del universo sin la necesidad de energía oscura.

Con este espíritu, mostramos que una teoría $f(L_T)$ basada en una modificación del equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (TEGR) - donde la torsión es el objeto geométrico que describe la gravedad en lugar de la curvatura- contiene ecuaciones de campo que son siempre de segundo orden y son remarcablemente más sencillas de analizar que las teorías $f(R)$.

Más allá de la marcada simplicidad matemática frente a las teorías $f(R)$, en nuestro caso no tenemos que preocuparnos por distinguir frames ni enfrentarnos con discusiones sobre si se viola o no el Principio de equivalencia como se describió en 4.1.2. para hallar teorías válidas que den cuenta al problema cosmológico en cuestión. De hecho, algunos autores sostienen que en el marco del Teleparalelismo la cuestión de si es válido o no dicho Principio puede ser irrelevante [142].

En el marco de las teorías $f(L_T)$, hemos testeado en particular una en donde $f(L_T) = L_T - \alpha(-L_T)^{-n}$ con el ánimo de reproducir la detección reciente de la aceleración del universo sin la necesidad de energía oscura. Llevamos a cabo tests de viabilidad para esta teoría usando los datos más recientes de supernovas del tipo Ia y los combinamos con la información proveniente de otras dos líneas de observación; la detección del pico acústico en las oscilaciones de bariones (BAO) y el shift parameter de la radiación cósmica de fondo (CMB), para hallar cotas en el plano $n - \Omega_m$. Con un 68.3 % de N.C. encontramos que los valores yacen en los rangos $n \in [-0,23, 0,03]$ y $\Omega_m \in [0,25, 0,29]$. Los valores para Ω_m son consistentes con las estimaciones recientes obtenidas por otros autores (ver por ejemplo, [38]). El modelo con los valores del mejor ajuste habiendo minimizado el χ^2 que combina los datos de SNIa+BAO+CMB ($n = -0,10$ y $\Omega_m = 0,27$) contiene las tres últimas fases de la evolución cosmológica estándar: era de radiación, era de materia y aceleración tardía; ésta última etapa habiendo comenzado en $z_{acc} \simeq 0,74$.

El modelo presentado en el marco de esta nueva clase de teorías de gravedad modificada, no solamente contiene ecuaciones más sencillas de manipular a la hora de realizar tests. El parámetro n nos posibilita desarrollar modelos (como el presentado aquí) que simulen a aquellos con energía oscura dinámica que quizás en los próximos años se vean favorecidos por el hecho de que se espera una notable mejora en la precisión con la que se realizan las mediciones. En particular, las perspectivas futuras que pueden preverse, están fundamentalmente orientadas a la medición más precisa de la ecuación de estado w y la determinación de si es o no constante. Uno de tales proyectos es el satélite SNAP [70] que se encuentra en pleno desarrollo y sería lanzado antes del año 2020.

Estas observaciones más precisas llevarán a que dispongamos de diagramas de Hubble con una enorme cantidad de supernovas y valores de distancias luminosas que podrían acotar mejor el valor de z_{acc} permitiendo así favorecer algunos modelos frente a otros. Además, la incorporación de otros objetos luminosos para grandes valores de corrimiento al rojo z como los Gamma Ray Bursts (GRBs) a estos diagramas de distancias luminosas, parecen sugerir valores de distancias luminosas inferiores a los esperados en el modelo de concordancia Λ CDM [141]. Si este fuera el caso, tanto el modelo presentado en esta Tesis con los valores del mejor ajuste a todos los datos, como éste en el que sólo utilizamos los datos de SNIa predicen distancias luminosas menores a las del caso Λ CDM. Adicionalmente, como se mencionó al final del Capítulo 4, nuestro modelo cosmológico contempla la posibilidad de modelos del tipo phantom en el caso de que futuras observaciones favorezcan casos con $n > 0$.

Como línea de trabajo posterior a este trabajo de Tesis, se evalúa la posibilidad de analizar y establecer requisitos de estabilidad para nuestro modelo, así como también estudiar resultados dentro del regimen de campo débil. Posiblemente, el hecho de que las ecuaciones de campo sean siempre de segundo orden haga que este tipo de análisis sea también más sencillo que en el caso de las teorías $f(R)$.

Bibliografía

- [1] Kolb E. W. y Turner M. S., *The Early Universe*, (Westview Press, Boulder, 1994).
- [2] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley & Sons, United States of America, 1972).
- [3] Misner C. W., Thorne K. S. y Wheeler J. A., *Gravitation*, (Freeman, New York, 1973).
- [4] Wald R. M., *General Relativity*, (University of Chicago Press, United States of America, 1984).
- [5] Hubble E. P., Proc. Nat. Acad. Sci., **15**, (1929) 168.
- [6] Gamow G., Phys. Rev. **70**, (1946) 572.
- [7] Penzias A. A. & Wilson R. W., Astrophys. J. **142**, (1965) 491.
- [8] Dicke R. H. y Peebles P. J. E., *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, editado por Hawking S. e Israel W. (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [9] Guth A. H., Phys. Rev. **D23**, (1981) 347.
- [10] Guth A. H. y Kaiser D. I., Science **307**, (2005) 884.
- [11] Narlikar J. V. y Padmanabhan T., Annu. Rev. Astron. Astrophys. **29**, (1991) 325.
- [12] Zwicky F., Helvetica Physica Acta **6**, (1933) 110.

- [13] Rubin V. y Ford W. K., *Astrophys. J.* **159**, (1970) 379.
- [14] Taoso M. et al., *JCAP* **0803**, (2008) 22.
- [15] Efstathiou G. et al., *Nature* **348**, (1990) 705.
- [16] Ostriker J. P. y Steinhardt P., *Nature* **377**, (1995) 600.
- [17] Bagla J. S. et al., *Comments on Astrophysics*, **18**, (1996) 275.
- [18] Krauss L. y Turner M. S., *Gen. Rel. Grav.* **27**, (1995) 1137.
- [19] Knop R. A. et al., *Astrophys. J.* **598**, (2003) 102.
- [20] Hamuy M. et al., *Astronom. J.* **112**, (1996) 2408.
- [21] Perlmutter S. et al., *Bull. Am. Astron. Soc.* **29**, (1997) 1351; *Astrophys. J.* **517**, (1999) 565; Riess A. G. et al., *Astronom. J.* **116**, (1998) 1009.
- [22] De Sitter W. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **78**, (1917) 3.
- [23] Einstein A., *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, (1917) 142.
- [24] Smoot G. F. et al., *Astrophys. J.* **396**, (1992) L1-5.
- [25] <http://www.mso.anu.edu.au/2dFGRS>
- [26] <http://www.sdss.org>
- [27] Refregier A., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **41**, (2003) 645.
- [28] Allen S. W. et al., *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **342**, (2003) 287.
- [29] Eisenstein D. et al., *Astrophys. J.* **633**, (2005) 560.
- [30] Komatsu E. et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **180**, (2009) 330.
- [31] Kowalski M. et al., *Astrophys. J.* **686**, (2008) 749.
- [32] Cartan E., *J. Math. Pure Appl.* **1**, (1922) 141.

- [33] Weyl H., *Space, time, matter* (Dover, NY, 1922).
- [34] Caldwell R. R., Phys. Lett. **B545**, (2002) 23.
- [35] Caldwell R. R. et al., Phys. Rev. Lett. **80**, (1998) 1582.
- [36] Carroll S. M., Living Rev. Rel. **4**, (2001) 1.
- [37] Huterer D. y Turner M. S. Phys. Rev. **D60**, (1999) 081301.
- [38] Spergel D. N. et al., ApJS **148**, (2003) 175; ApJS **170**, (2007) 377;
Reichardt C. L., et al., Astrophys. J. **694**, (2009) 1200.
- [39] Sahni V. and Starobinsky A. A., Int. J. Mod. Phys. **D9**, (2000) 373.
- [40] Padmanabhan T., Phys. Rep. **380**, (2003) 235.
- [41] Frieman J., Turner M. S. and Huterer D., Annu. Rev. Astron. Astrophys. **46**, (2008) 385.
- [42] Carroll S. M., *Dark Energy and the Preposterous Universe*, 2001,
ArXiv:astro-ph/0107571.
- [43] Armendariz-Picon C. et al., Phys. Rev. Lett. **85**, (2000) 4438.
- [44] Amendola L. et al., JCAP **0307**, (2003) 005.
- [45] Kamenshchik A., Moschella U. y Pasquier V., Phys. Lett. **B511**, (2001) 265.
- [46] Sami M. y Dadhich N., Phys. Lett. **B568**, (2003) 118.
- [47] Freese K. y Lewis M., Phys. Lett **B540** (2002) 1.
- [48] Wang Y. et al., Astrophys.J. **594**, (2003) 25; Freese K. y Lewis M., Phys. Lett. **B540**, (2002) 1.
- [49] Deruelle N. y Madore J., *On the quasi-linearity of the Einstein-"Gauss-Bonnet" gravity field equations*, ArXiv:gr-qc/0305004.
- [50] Dvali G. R. et al., Phys. Lett. **B485**, (2000) 208.

- [51] Dvali G. y Turner M. S., *Dark Energy as a Modification of the Friedmann Equation*, ArXiv:astro-ph/0301510.
- [52] Lovelock D., J. Math. Phys. **12**, (1971) 498.
- [53] Deruelle N. y Fariña-Busto L., Phys. Rev. **D41**, (1990) 3696.
- [54] Buchdahl H. A., Mon. Not. R. Astron. Soc. **150**, (1970) 1.
- [55] Starobinsky A. A., Phys. Lett. **B91**, (1980) 99.
- [56] Kerner R., Gen. Relat. Gravit. **14**, (1982) 453.
- [57] Barrow J. D. and Ottewill A. C., J. Phys. A: Math. Gen. **16**, (1983) 2757.
- [58] Barrow J. D. and Cotsakis S., Phys. Lett. **B214**, (1988) 515.
- [59] Carroll S. M. et al., Phys. Rev. **D70**, (2004) 043528.
- [60] Carroll S. M. et al., Phys. Rev. **D71**, (2005) 063513.
- [61] Starobinsky A., JETP Lett. **86**, (2007) 157.
- [62] Hu W. y Sawicki I., Phys. Rev. **D76**, (2007) 064004.
- [63] Nojiri S. y Odintsov S. D., *Dark energy, inflation and dark matter from modify $f(R)$ gravity*, ArXiv:0807.0685.
- [64] Chiba T., Phys. Lett. **B575**, (2003) 1.
- [65] Olmo G., Phys. Rev. Lett. **95**, (2005) 261102.
- [66] Dolgov A. y Kawasaki M., Phys. Lett. **B573**, (2003) 1.
- [67] Capozziello S. y Francaviglia M., Gen. Rel. Grav. **40**, (2008) 357.
- [68] Sotiriou T. y Faraoni V., *$f(R)$ theories of gravity*, ArXiv:0805.1726.
- [69] Nojiri S y Odintsov S. D., Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, (2007) 115.

- [70] <http://snap.lbl.gov>
- [71] Born M. y Infeld L., *Nature* **132**, (1933) 1004.
- [72] Sahni V., *Lect. Notes Phys.* **653**, (2004) 141.
- [73] Fang W. et al., *Int. J. Mod. Phys.* **D15**, (2006) 199
- [74] Novello M. et al., *Phys. Rev.* **D69**, (2004) 127301.
- [75] Plebanski J., *Lectures on non linear electrodynamics*, Nordita Lecture Notes, Copenhagen, (1968).
- [76] Novello M. et al., *Phys. Rev.* **D61**, (2000) 045001.
- [77] Novello M. y Salim J. M., *Phys. Rev.* **D63**, (2001) 083511.
- [78] Eddington A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1923).
- [79] Brans C. y Dicke R. H., *Phys. Rev.* **124**, (1961) 925.
- [80] Einstein A., *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.* (1928), 217; *ibid.*, (1930) 401; Einstein A., *Math. Annal.* **102**, (1930) 685.
- [81] C. Møller, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.*, **1**, (1961) N10.
- [82] C. Pellegrini and J. Plebanski, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.*, **2**, (1962) N4.
- [83] K. Hayashi y T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.*, **38**, (1967) 491; K. Hayashi, *Gen. Relat. Gravity*, **4**, (1973) 1; K. Hayashi, *Nuovo Cimento*, **16A**, (1973) 639; K. Hayashi, *Phys. Lett.*, **69B**, (1977) 441.
- [84] Hayashi K. y Shirafuji T., *Phys. Rev.* **D19**, (1979) 3524, Addendum-*ibid.* **D24**, (1981) 3312.
- [85] Weitzenböck R., *Invarianten Theorie*, (Nordhoff, Groningen, 1923).
- [86] Born M. y Infeld L., *Proc. Roy. Soc.(London)* **144**, (1934) 425.

- [87] Deser S. y Puzalowski R., J. Phys. **A13**, (1980) 2501.
- [88] Boillat G., J. Math. Phys. **11**, (1970) 941.
- [89] Salazar Ibarguen H., García A. y J. Plebanski J, Math. Phys. **30**, (1989) 11.
- [90] Novello M. y Perez Bergliaffa S. E., AIP Conf. Proc. **668**, (2003) 288.
- [91] Schrödinger E., Proc. Roy. Soc. A **150**, (1935) 465
- [92] Aiello M., Bengochea G. R., y Ferraro R., Phys. Lett. **A361**, (2007) 9.
- [93] Schutz B., *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1999).
- [94] Padmanabhan T., AIP Conf. Proc. **861**, AIP (New York), (2006), 179.
- [95] Heisenberg W. y Euler H., Z. Phys. **98**, (1936) 714; Schwinger J., Phys. Rev. **82**, (1951) 664.
- [96] Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, 3rd. edition, (John Wiley and Sons, N.Y., 1999).
- [97] Fradkin E. S. y Tseytlin A. A., Phys. Lett. **B163**, (1985) 123. Abouelsaood A., Callan C., Nappi C. y Yost S., Nucl. Phys. **B280**, (1987) 599. Leigh R., Mod. Phys. Lett. **A4**, (1989) 2767. Metsaev R., Rahmanov M.A. y Tseytlin A.A., Phys. Lett. **B193**, (1987) 207. Tseytlin A.A., Nuc. Phys. **B501**, (1997) 41. Tseytlin A.A., en *The many faces of the superworld*, ed. M. Shifman, World Scientific (Singapore) 2000.
- [98] Dyadichev V., Gal'tsov D., Zorin A. y Zotov M., Phys. Rev. **D65**, (2002) 084007. García-Salcedo R. y Breton R., Int. J. Mod. Phys. **A15**, (2000) 4341. Sami M., Dadhich N. y Shiromizu T., Phys. Lett. **B568**, (2003) 118. Elizalde E., Lidsey J., Nojiri S. y Odintsov S., Phys. Lett. **B574**, (2003) 1.
- [99] Marklund M., Brodin G. y Stenflo L., Phys. Rev. Lett. **91**, (2003) 163601.

- [100] Kruglov S. I., Phys. Rev. **D75**, (2007) 117301.
- [101] Howard A. y Kulsrud R., Astrophys. J. **483**, (1997) 648; Widrow L. M., Rev. Mod. Phys. **74**, (2003) 775.
- [102] Goldstein H., C.P. Poole y J.L. Safko, *Classical Mechanics*, (Addison Wesley, N.Y., 2002).
- [103] Birrell N. D. y Davies P.C.W., *Quantum Field Theory in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [104] Aiello M., Bengochea G. R. y Ferraro R., JCAP **06**, (2008) 006; *A Decade of Dark Energy: Spring Symposium, Proceedings of the conferences*, Space Telescope Science Institute, editado en DVD por Norbert Pirzkal y Henry Ferguson, Baltimore, USA (2008).
- [105] Weyl H., Ann. Phys. **59**, (1919) 101.
- [106] Maartens R., Living Rev. Rel. **7**, (2004) 7.
- [107] Will C. M., Living Rev. Rel. **4**, (2001) 4.
- [108] Sullivan S. et al., JCAP **09**, (2007) 004.
- [109] Olmo G. J. y Komp W., *Nonlinear gravity theories in the metric and Palatini formalisms*, ArXiv:gr-qc/0403092.
- [110] Will C. M., *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
- [111] Flanagan É. É., Class. Quant. Grav. **21**, (2004) 3817.
- [112] Sotiriou T., Faraoni V. y Liberati S., Int. J. Mod. Phys. **D17**, (2008) 399.
- [113] Ferraro R., *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*, (Springer, New York, NY, 2007).
- [114] Brans C. H., Class. Quant. Grav. **5**, (1988) L197.

- [115] Vollick D. N., *Class. Quant. Grav.* **21**, (2004) 3813.
- [116] Magnano G., en la *XI Italian Conference on General Relativity and Gravitation*, Trieste, 1994. ArXiv:gr-qc/9511027.
- [117] Sokolowski L. M., *Class. Quant. Grav.* **6**, (1989) 2045.
- [118] Ferraris M., Francaviglia M. y Magnano G., *Class. Quant. Grav.* **7**, (1990) 261.
- [119] Magnano G. y Sokolowski L. M., *Phys. Rev.* **D50**, (1994) 5039.
- [120] Sokolowski L. M., en la *14th Conference on General Relativity and Gravitation*, Florencia, 1995. ArXiv:gr-qc/9511073.
- [121] Faraoni V. y Gunzig E., *Int. J. Theor. Phys.* **38**, (1999) 217.
- [122] Capozziello S., de Ritis R. y Marino A. A., *Class. Quant. Grav.* **14**, (1997) 3243.
- [123] Olmo G., *Phys. Rev. Lett.* **98**,(2007) 061101.
- [124] Thorne K. S. y Will C. M., *Astrophys. J.* **163**, (1971) 595.
- [125] Einstein A., *Jahrb. Radioakt.* **4**, (1907) 411.
- [126] Faraoni V., *Phys. Rev.* **D74**, (2006) 104017.
- [127] Amendola L., Polarski D. y Tsujikawa S., *Phys. Rev. Lett.* **98**, (2007) 131302.
- [128] Amendola L. et al., *Phys. Rev.* **D75**, (2007) 083504.
- [129] Fay S., Tavakol R. y Tsujikawa S., *Phys. Rev.* **D75**, (2007) 063509.
- [130] Amarzguioui M. et al., *Astron. and Astrophys.* **454**, (2006) 707.
- [131] Santos J. et al., *Phys. Lett.* **B669**, (2008) 14.
- [132] Ferraro R. y Fiorini F., *Phys. Rev.* **D75**, (2007) 084031.

- [133] Ferraro R. y Fiorini F., Phys. Rev **D78**, (2008) 124019.
- [134] Kobayashi S. y Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, (Interscience, New York, 1963).
- [135] Ver por ejemplo: de Sabbata y Gasperini M., *Introduction to Gravitation*, (World Scientific, Singapore, 1985).
- [136] Maluf J. W., J. Math. Phys. **35**, (1994) 335.
- [137] Arcos H. y Pereira J., Int. J. Mod. Phys. **D13**, (2004) 2193.
- [138] Fairbairn M. y Goobar A., Phys. Lett. **B642**, (2006) 432.
- [139] Bengochea G. R. y Ferraro R., Phys. Rev **D79**, (2009) 124019.
- [140] Melchiorri A. et al., Phys. Rev. **D76**, (2007) 041301(R).
- [141] Tsutsui R. et al., *Constraints on w_0 and w_a of Dark Energy from High Redshift Gamma Ray Bursts*, enviado a MNRAS (2008). ArXiv:0807.2911.
- [142] Aldrovandi R., Pereira J. G. y Vu K. H., Gen. Rel. Grav. **36**, (2004) 101

