

Tesis Doctoral

# Teorías de gravedad, propiedades termodinámicas e irreversibilidad

Aiello, Matías

2010

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Aiello, Matías. (2010). Teorías de gravedad, propiedades termodinámicas e irreversibilidad. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Aiello, Matías. "Teorías de gravedad, propiedades termodinámicas e irreversibilidad". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2010.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

TEORÍAS DE GRAVEDAD, PROPIEDADES TERMODINÁMICAS  
E IRREVERSIBILIDAD

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de la  
Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

por **Matías Aiello**

Director de Tesis: Mario Castagnino

Consejero de Estudios: Rafael Ferraro

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

Diciembre 2010



## Resumen

### TEORÍAS DE GRAVEDAD, PROPIEDADES TERMODINÁMICAS E IRREVERSIBILIDAD

En este trabajo estudiamos la termodinámica de las soluciones de agujero negro de la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet, la cual incluye potencias de segundo orden en la curvatura, en los casos de vacío y en el caso de acoplamiento con cargas de teorías electromagnéticas no lineales, como las de Hoffmann-Infeld y Born-Infeld. Las soluciones que hemos obtenido presentan características diferentes a las soluciones ya conocidas de relatividad general. Analizamos el calor específico de las soluciones, mostrando que su comportamiento indica la existencia de un punto de transición en las soluciones de vacío. Discutimos también la similitud que existe entre la geometría en 5 dimensiones en Gauss-Bonnet con la solución en tres dimensiones del agujero negro BTZ. Al igual que estos, la solución de agujero negro en Gauss-Bonnet tiene un tiempo de vida infinito. En el caso cargado obtenemos un perfil de temperaturas con dos máximos, lo cual lleva a la existencia de un *plateau* en el tiempo de evaporación que indica una región de inestabilidad en una escala intermedia. Esta escala viene dada por el parámetro de Gauss-Bonnet y por el acoplamiento con la carga no-lineal. Verificamos también que los resultados para la termodinámica son consistentes con las leyes generalizadas de la termodinámica de agujeros negros en teorías covariantes de gravedad, como lo es la gravedad de Gauss-Bonnet. En particular, obtenemos la corrección a la fórmula de la entropía de la relatividad general que afirma que la misma es un cuarto del área del horizonte de eventos. Por otro lado, como estas teorías de gravedad son invariantes ante inversión temporal, contienen soluciones que son simétricas temporalmente una de la otra, formando parte de una larga lista de ejemplos donde esto ocurre. Especulamos sobre una manera de seleccionar a una de estas soluciones, de manera de tener una dirección de la flecha del tiempo definida en base a la propia teoría y a sus propiedades globales.

Palabras Claves: Gravedad en más dimensiones, Gauss-Bonnet, Teoría de Lovelock, Termodinámica, Agujeros Negros, Entropía, Flecha del Tiempo.



## Abstract

### GRAVITY THEORIES, THERMODYNAMIC PROPERTIES AND IRREVERSIBILITY

In this work we study the thermodynamical properties of the black hole solutions to Gauss-Bonnet gravity, which includes quadratic terms in the curvature, for the vacuum case and in the coupled case to Non-linear electrodynamics theories, such as Hoffmann-Infeld and Born-Infeld. The obtained solutions have different characteristics to the solutions of general relativity. We show that the behavior of the specific heat indicates the existence of a transition point in the vacuum solutions. We also discuss the similarities existing between this five-dimensional geometry and the three-dimensional black hole. Like BTZ black hole, the Gauss-Bonnet black hole has an infinite lifetime. In the charged case, some of these solutions present a double peak behavior. This behavior leads to the existence of a *plateau* in the evaporation rate, which implies that black holes of intermediate scales turn out to be unstable. The scale is given by the Gauss-Bonnet parameters and the non-linear coupling to electrodynamics. We verify that the obtained thermodynamical results are consistent with the generalized laws of black hole thermodynamics for any covariant theory of gravity, such as Gauss-Bonnet. In particular, we obtain the correction to the black hole entropy formula of general relativity that states that the entropy is a quarter of the event horizon area. On the other hand, because these theories are time reversal invariant, they contain time symmetric solutions, forming part of a long list of examples where this occurs. We speculate on a way to select one of these solutions, in order to have a time arrow direction defined on the basis of the theory itself and its global properties.

Key Words: Higher Dimensional Gravity, Gauss-Bonnet, Lovelock Theory, Thermodynamics, Black Holes, Entropy, Arrow of Time.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Gravedad de Lovelock y Gauss-Bonnet</b>	<b>9</b>
2.1. La acción de la Teoría de Lovelock . . . . .	10
2.2. Agujeros Negros de Gauss-Bonnet en vacío . . . . .	13
2.3. Agujeros Negros con cargas no lineales . . . . .	18
2.3.1. Soluciones con carga de Born-Infeld . . . . .	19
2.3.2. Soluciones con carga de Hoffmann-Infeld . . . . .	25
2.4. Otras soluciones de la teoría de Gauss-Bonnet . . . . .	29
2.4.1. Agujeros Negros topológicos . . . . .	29
2.4.2. Agujeros de gusano . . . . .	30
<b>3. Termodinámica de agujeros negros</b>	<b>33</b>
3.1. Entropía de Bekenstein . . . . .	34
3.1.1. Analogía con la primera ley . . . . .	35
3.1.2. Teoría de la información y entropía . . . . .	36
3.1.3. Propuesta de Bekenstein para la entropía de un agujero negro . . . . .	38
3.1.4. Generalización de la segunda ley . . . . .	39
3.2. Las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros en Relatividad General . . . . .	40
3.2.1. Gravedad Superficial . . . . .	41
3.2.2. Ley cero . . . . .	44
3.2.3. Primera Ley . . . . .	44
3.2.4. Segunda Ley . . . . .	46



3.2.5. Tercera Ley . . . . .	47
3.3. Leyes de la mecánica de agujeros negros en teorías más gen- erales de gravedad . . . . .	49
3.3.1. Extensión de la ley cero . . . . .	49
3.3.2. Corrientes y cargas de Noether en teorías de gravedad covariantes . . . . .	50
3.3.3. Primera ley y entropía generalizada . . . . .	52
3.4. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet en vacío	55
3.5. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet cargados	62
3.6. Radiación de Hawking y su relación con la termodinámica . .	67
3.7. Entropía de un agujero negro en teoría de cuerdas . . . . .	69
<b>4. Irreversibilidad y Flecha del Tiempo</b>	<b>75</b>
4.1. Conceptos Básicos . . . . .	75
4.1.1. Inversión Temporal . . . . .	75
4.1.2. Irreversibilidad . . . . .	78
4.1.3. Flecha del Tiempo . . . . .	82
4.2. El problema de la flecha del tiempo: enfoque no-entrópico y global . . . . .	84
4.2.1. Por qué global y no-entrópico . . . . .	84
4.2.2. Condiciones para una flecha del tiempo global . . . . .	86
4.2.3. Definición de la flecha global no-entrópica . . . . .	88
4.2.4. Transfiriendo la flecha del tiempo global a contextos locales . . . . .	91
4.3. Ejemplos en Teorías Fundamentales de la Física . . . . .	94
4.3.1. Mecánica Cuántica . . . . .	94
4.3.2. Teoría Cuántica de Campos . . . . .	97
4.4. Ejemplos en Teorías Fenomenológicas . . . . .	101
4.4.1. Oscilador Armónico Amortiguado . . . . .	101
4.4.2. Ley de Fourier . . . . .	101
4.4.3. Teoría de Campos en FRW . . . . .	102
4.4.4. Viscosidad y Conductividad Térmica . . . . .	102
4.4.5. Termodinámica y Entropía Fenomenológica . . . . .	104
4.5. Entropía de un fluido en Relatividad General . . . . .	107
4.6. Soluciones de Gravedad T-simétricas . . . . .	109
4.6.1. El problema de los Agujeros Blancos y su termodinámica	110
4.7. El estatus de la Segunda Ley . . . . .	113

<b>5. Conclusiones</b>	<b>115</b>
<b>A. Teorías Electromagnéticas no lineales</b>	<b>119</b>
A.1. Electrodinámica de Born-Infeld . . . . .	119
A.2. Electrodinámica de Hoffmann-Infeld . . . . .	121
<b>B. Cálculo explícito de la gravedad superficial</b>	<b>125</b>



## Introducción

Muchas teorías han sido propuestas como correcciones o alternativas a la relatividad general. A pesar de su gran poder predictivo, la teoría de la relatividad general tiene incompatibilidades con la teoría cuántica de campos. Es por esto que uno esperaría encontrar correcciones en escalas pequeñas de longitudes, del orden de la escala de Planck. Actualmente el candidato más serio para una teoría de gravedad cuántica es la teoría de cuerdas. En esta teoría aparecen en el límite de bajas energías, correcciones a la acción de Einstein-Hilbert [65, 28, 97] del orden de la escala típica de la teoría  $l = \sqrt{\alpha}$ , donde  $\alpha$  es la tensión en la cuerda. Estas correcciones consisten en términos polinómicos de mayor orden en la curvatura [38], que modifican a la relatividad general en el régimen ultravioleta. Es decir que la inconsistencia que surge a pequeñas escalas es conceptual, a diferencia de lo que ocurre a grandes distancias: en este último caso la falla de la teoría se evidencia al contrastarla con la observación, lo cual lleva al agregado de materia y energía oscura a la teoría de la relatividad general.

Una de las teorías que es estudiada como una corrección a la relatividad general a distancias cortas, es la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet, que es un caso particular de la teoría de Lovelock, la cual introduce correcciones de ordenes más altos en la curvatura. El tensor de Lovelock contiene derivadas de la métrica de orden no superiores a dos, debido a esto la teoría de Lovelock linearizada es libre de fantasmas, y por este motivo estos términos aparecen en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas. En particular los términos cuadráticos de este tensor son los llamados términos de Gauss-Bonnet que fueron estudiados en [132], los cúbicos en [99] y los términos cuárticos

fueron analizados en [44, 72]. La teoría de Lovelock fue discutida también en los trabajos [53, 42, 84, 100, 43, 8].

Recientemente también se ha estudiado la teoría de Gauss-Bonnet en el contexto de la holografía hidrodinámica proveniente de la correspondencia AdS/CFT [40, 71].

Asimismo el estudio de las propiedades termodinámicas de las distintas teorías de gravedad iniciado por Bekenstein [26], permite definir una entropía y una temperatura de las soluciones de agujeros negros. En este contexto termodinámico mucho se ha discutido sobre la segunda ley de la termodinámica aplicada a las soluciones de agujeros negros. La entropía de un agujero negro en relatividad general, como también su temperatura, queda definida en función de conceptos geométricos del horizonte de eventos. La misma entropía y temperatura también es obtenida a través del conteo de microestados cuánticos en el horizonte de eventos de un agujero negro [119] y a través del proceso de radiación de Hawking [75]. En este punto es donde confluyen los cálculos provenientes de la relatividad general y los de la física cuántica. Este es el motivo por el cual se vuelve tan interesante el estudio de la termodinámica de agujeros negros.

Dado que la gravedad de Gauss-Bonnet presenta correcciones a la relatividad general, y la termodinámica de agujeros negros ha logrado explicar en términos de leyes geométricas sencillas el comportamiento de estos objetos (consistentes con los resultados de teorías semiclásicas), se vuelve imprescindible estudiar la termodinámica asociada a esta teoría de gravedad. Veremos en los próximos capítulos como se modifican estas leyes termodinámicas y las características notables que se presentan en la temperatura y tiempos de evaporación de las soluciones a la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet.

Por otro lado, cuando se discute sobre la segunda ley de la termodinámica, es natural preguntarse por la justificación teórica de por qué se observan los procesos en los cuales la entropía es creciente hacia el futuro. La respuesta no es trivial, dado que las distintas teorías fundamentales de la física son invariantes ante inversión temporal, permitiendo también procesos invertidos temporalmente en los cuales la entropía es decreciente. Esto no solo se observa en las soluciones de agujeros negros en teorías covariantes de la gravedad, sino en soluciones de toda teoría fundamental, como la física cuántica, el electromagnetismo, la teoría cuántica de campos y teorías fenomenológicas.

El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades termodinámicas de las soluciones a la teoría de Gauss-Bonnet, comparándolas con las de la

---

relatividad general, y presentar una discusión sobre la simetría temporal de las soluciones, en particular sobre la segunda ley, en teorías invariantes ante inversión temporal.

En el capítulo dos presentamos la teoría de Lovelock, profundizando en la teoría de Gauss-Bonnet, y mostramos soluciones a la misma en los casos de vacío y en la presencia de cargas no lineales provenientes del electromagnetismo de Born-Infeld y Hoffmann-Infeld. La inclusión de estas teorías electromagnéticas no lineales se debe a que estas teorías juegan también un rol esencial en el límite de bajas energías en modelos inspirados en teorías de cuerdas. Originalmente se propuso el modelo de Hoffmann-Infeld para evitar ciertas características patológicas de la teoría de Born-Infeld, como por ejemplo la singularidad cónica que surge en la geometría con simetría esférica. De hecho, la modificación de la teoría de Born-Infeld presentada en [79] muestra que la solución correspondiente a una partícula puntual posee una métrica que es regular en todo punto.

En el capítulo tres discutimos la analogía existente entre las leyes de la mecánica de agujero negro y las correspondientes leyes de la termodinámica, para luego mostrar el formalismo geométrico que define a los conceptos termodinámicos de teorías de gravedad, en particular en la teoría de Gauss-Bonnet. Mostramos de manera explícita la aplicación del formalismo para las soluciones de Gauss-Bonnet, obteniendo las distintas magnitudes termodinámicas como la entropía, la temperatura y el tiempo de evaporación de las soluciones de agujeros negros que hemos estudiado. Finalmente repasamos el cálculo de la temperatura de radiación de un agujero negro, el cual es el ingrediente esencial que transforma estas leyes mecánicas de agujero negro en leyes para su termodinámica. Comentamos también el conteo de microestados en una teoría de cuerdas que da lugar a la entropía del agujero negro.

Para dar lugar a la discusión de la flecha del tiempo en teorías covariantes de gravedad, y en general en toda teoría fundamental, en el capítulo cuatro definiremos de manera precisa los conceptos que siempre aparecen involucrados en este tipo de discusiones: los conceptos de la flecha del tiempo, irreversibilidad, simetría temporal, y soluciones temporalmente simétricas. Una vez definidos, mostraremos distintos ejemplos de la aplicación de estos conceptos en teorías fundamentales de la física, para luego dar una interpretación de la flecha del tiempo. En particular mostraremos las soluciones temporalmente simétricas a los agujeros negros, los llamados agujeros blancos, y discutiremos sobre la versión revertida en el tiempo de la segunda ley.



## Capítulo 2

# Gravedad de Lovelock y Gauss-Bonnet

Los candidatos para el lagrangiano gravitatorio deben ser cantidades invariantes, es decir escalares, construidos a partir de la métrica. Esta propiedad de invariancia combinada con el carácter simétrico del tensor métrico garantizan que el tensor de Einstein sea simétrico y tenga divergencia nula. En relatividad general el lagrangiano es proporcional al escalar de curvatura:

$$L = \frac{1}{16\pi}[R - 2\Lambda] \quad (2.1)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura que se obtiene a partir del tensor de Riemann  $R^\mu{}_{\nu\rho\gamma}$  contrayendo todos los índices:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

$$R_{\nu\gamma} = R^\mu{}_{\nu\mu\gamma} \quad (2.3)$$

y  $\Lambda$  es una constante conocida como constante cosmológica.

Variando al lagrangiano con respecto a la métrica se obtiene el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

El tensor de Einstein es el único tensor simétrico con divergencia nula que depende de la métrica y sus derivadas, con las siguientes condiciones:

- No aparecen derivadas de la métrica de orden mayor a dos.
- El tensor es lineal en las segundas derivadas de la métrica.



Dejando de lado la última condición, es decir permitiendo que en el tensor resultante aparezcan potencias mayores a uno de las derivadas segundas, se obtiene el llamado tensor de Lovelock [92]. Este tensor no es lineal en el tensor de Riemann y difiere del tensor de Einstein solo si el espacio tiempo tiene dimensiones mayores a 4.

Otra teoría más general sería considerar una combinación lineal de términos cuadráticos con parámetros arbitrarios:

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + A_1 R^2 + A_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + A_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) \quad (2.5)$$

sin embargo esta acción no satisface la primer condición para valores arbitrarios  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , ya que conduce a ecuaciones de campo con derivadas de cuarto orden en la métrica.

En conclusión la teoría de Lovelock es la extensión más natural de la relatividad general en espacio-tiempos de más dimensiones. Asimismo La teoría de Lovelock para una elección particular de los coeficientes de la acción puede ser pensada como el análogo gravitacional de la electrodinámica de Born-Infeld [20].

## 2.1. La acción de la Teoría de Lovelock

La densidad Lagrangiana en  $D$  dimensiones es [92, 58]

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda^{2(k-1)} \mathcal{L}_k \quad (2.6)$$

donde  $N = \frac{D}{2} - 1$  (para  $D$  par) y  $N = \frac{D-1}{2}$  (para  $D$  impar). En (2.6),  $\alpha_k$  y  $\lambda$  son constantes que representan el acoplamiento de los términos en el Lagrangiano y dan las dimensiones correctas al mismo. Si comparamos este Lagrangiano con el Lagrangiano cuadrático (2.5), podemos observar que las tres constantes  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  son independientes, sin embargo en la teoría de Lovelock estas constantes no son arbitrarias, sino que están vinculadas de una manera única y dejando solo un parámetro libre  $\alpha_2$ . Este vínculo no solo ocurre en los términos cuadráticos sino que ocurre en cada uno de los términos  $k$ -ésimos del Lagrangiano. Ese vínculo entre las constantes es el que garantiza que las derivadas de la métrica de orden más alto a dos se agrupen en el Lagrangiano como una derivada total, y consecuentemente las

ecuaciones de movimiento no contengan derivadas de tercer orden o mayores [93].

En (2.6)  $\mathcal{L}_k$  es

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{j_1 \dots j_{2k}}^{i_1 \dots i_{2k}} R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \dots R_{i_{2k-1} i_{2k}}^{j_{2k-1} j_{2k}} \quad (2.7)$$

donde  $R^\mu{}_{\nu\rho\gamma}$  es el tensor de Riemann en  $D$  dimensiones,  $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = g^{\nu\delta} R^\mu{}_{\delta\rho\sigma}$ ,  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y  $\delta_{j_1 \dots j_{2k}}^{i_1 \dots i_{2k}}$  es la delta de Kronecker generalizada de orden  $2k$  [98].

Los Lagrangianos hasta segundo orden son [58, 87, 86]

$$\mathcal{L}_0 = \sqrt{-g} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \sqrt{-g} R \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \delta_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{i_1 i_2 i_3 i_4} R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} R_{i_3 i_4}^{j_3 j_4} = \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) \quad (2.10)$$

donde enseguida reconocemos el Lagrangiano usual correspondiente al término cosmológico, el Lagrangiano de Einstein-Hilbert y el Lagrangiano de Lanczos-Gauss-Bonnet [87, 86] respectivamente.

Para dimensiones  $D = 5$  y  $D = 6$  el Lagrangiano de Lovelock es una combinación lineal de los Lagrangianos de Einstein-Hilbert y del de Lanczos-Gauss-Bonnet. Las variedades de dimensiones  $D = 7$  y  $D = 8$  incluyen el Lagrangiano  $\mathcal{L}_3$ , que fue obtenido por primera vez por Müller-Hoissen [99]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & \frac{1}{8} \sqrt{-g} \delta_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6}^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} R_{i_3 i_4}^{j_3 j_4} R_{i_5 i_6}^{j_5 j_6} = \\ & \sqrt{-g} (R^3 + 3RR^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} - 12RR^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 24R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\mu} R_{\sigma\nu} + 16R^{\mu\nu} R_{\nu\rho} R_{\mu}^{\rho} \\ & + 24R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\alpha} R_{\mu}^{\alpha} + 8R_{\alpha\rho}^{\mu\nu} R_{\nu\sigma}^{\alpha\beta} R_{\mu\beta}^{\rho\sigma} + 2R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

En general, si la dimensión es par y la variedad es compacta con métrica definida positiva, entonces  $\mathcal{L}_{D/2}$  es el generador de la característica de Euler [106]

$$\int_{\mathcal{U}} d^{2n}x \mathcal{L}_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2+n} \pi^n n!}{(2n)!} \chi(\mathcal{U})$$

donde  $\chi(\mathcal{U})$  son los invariantes topológicos de Euler-Poincaré, los cuales se anulan en dimensiones impares.

Por lo tanto, la acción geométrica se escribe de la siguiente manera:

$$S = \int d^D x \mathcal{L} \quad (2.12)$$

Usando el principio variacional obtenemos el tensor de Lovelock ( $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ ),

$$\delta S = \int d^D x \delta \mathcal{L} = \int d^D x \mathcal{G}_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

donde la expresión general de  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  es [92, 94]

$$\mathcal{G}^{\mu}_{\nu}(k) = -\frac{1}{2^{k+1}} \delta^{\mu}_{\nu} \delta^{i_1 i_2 \dots i_{2k}}_{j_1 j_2 \dots j_{2k}} R^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} \dots R^{j_{2k-1} j_{2k}}_{i_{2k-1} i_{2k}} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda^{2(k-1)} \mathcal{G}_{\mu\nu}(k) \quad (2.15)$$

donde  $N = \frac{D}{2} - 1$  para  $D$  par o  $N = \frac{D-1}{2}$  para  $D$  impar. En el caso en el que la dimensión es  $D = 4$ ,  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  coincide con el tensor de Einstein. Los tensores de Lovelock para  $k = 0$  y  $k = 1$  son

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(0) &= g_{\mu\nu} \\ \mathcal{G}_{\mu\nu}(1) &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \end{aligned}$$

En cinco dimensiones el Lagrangiano es una combinación lineal de los Lagrangianos de Einstein-Hilbert y Lanczos, y el tensor de Lovelock resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \alpha \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{\rho\delta\gamma\lambda} R^{\rho\delta\gamma\lambda} - 4 R_{\rho\delta} R^{\rho\delta} + R^2) - \right. \\ \left. 2 R R_{\mu\nu} + 4 R_{\mu\rho} R^{\rho}_{\nu} + 4 R_{\rho\delta} R^{\rho\delta}_{\mu\nu} - 2 R_{\mu\rho\delta\gamma} R^{\rho\delta\gamma}_{\nu} \right] \quad (2.16) \end{aligned}$$

Para ser precisos, debemos notar que en el tercer término de la (2.16) estamos abusando con la notación al incluir explícitamente la constante cosmológica. Lo escribimos así con la intención de indicar claramente la naturaleza de cada uno de los términos, a pesar de que la constante  $\Lambda$  está relacionada con las constantes de acoplamiento  $\alpha_0$  y  $\lambda$  en (2.15) por la relación  $\Lambda = -\frac{\alpha_0}{2\lambda^2}$ . La constante de Gauss-Bonnet  $\alpha = \alpha_2 \lambda^2$  nos permitirá rastrear los cambios en las ecuaciones, cuando comparemos con las correspondientes ecuaciones y soluciones de la relatividad general. La constante de acoplamiento  $\alpha$  introduce una escala de longitudes  $l_\alpha = \sqrt{4\alpha}$  en la teoría, que representa físicamente el rango de pequeñas distancias en el que la gravedad de Einstein resulta corregida por los términos de Gauss-Bonnet.

## 2.2. Agujeros Negros de Gauss-Bonnet en vacío

Las ecuaciones de movimiento para la teoría de Gauss-Bonnet en vacío están dadas por las expresiones:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (2.17)$$

que aceptan soluciones con simetría esférica en 5 dimensiones, que en términos de un ansatz tipo Schwarzschild, puede escribirse como

$$ds^2 = -f_\alpha(r)dt^2 + \frac{1}{f_\alpha(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\chi^2 + r^2\sin^2\theta\sin^2\chi d\varphi^2 \quad (2.18)$$

que reemplazando en las ecuaciones de campo lleva a la siguiente ecuación:

$$-\frac{3}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2(1 - f_\alpha(r)) + 2\alpha(1 - f_\alpha(r))^2) + 2\Lambda = 16\pi T_0^0 = 0 \quad (2.19)$$

donde estamos teniendo en cuenta la posibilidad de que haya materia debido al término  $T_0^0$  cuando busquemos soluciones de no vacío. Entonces es inmediato probar que la siguiente relación funcional se satisface [5]

$$f_\alpha(r) - f_0(r) = \frac{2\alpha}{r^2}(1 - f_\alpha(r))^2 \quad (2.20)$$

siendo  $f_0(r)$  la solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo con  $\alpha = 0$ , la cual es determinada resolviendo las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones. El significado de (2.20) puede ser entendido intuitivamente con el siguiente argumento heurístico: consideremos el potencial gravitatorio  $\phi_\alpha(r)$  definido como  $f_\alpha(r) = 1 - 2\phi_\alpha(r)$ ; entonces, de acuerdo a la relación anterior, el potencial puede ser escrito como  $\phi_\alpha(r) = \phi_0(r) + \frac{m_g(r)}{r^2}$  donde la masa  $m_g$  aparece debido al potencial gravitatorio y viene dada por  $m_g = -(l_\alpha\phi_\alpha(r))^2$ .

En este caso, la solución de las ecuaciones (2.17) es

$$f_\alpha^\pm(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \pm \sqrt{1 + \frac{M}{6\alpha} + \frac{r^4}{16\alpha^2} + \frac{\Lambda}{12\alpha} r^4} \quad (2.21)$$

donde  $M$  es una constante de integración.

Para relacionar  $M$  con la masa  $m$  ADM del agujero negro, debemos analizar el comportamiento asintótico de la solución. En la región de campo débil, es decir en el límite  $r \rightarrow \infty$ , debemos obtener la solución de

Schwarzschild para el caso  $\Lambda = 0$ . Recordemos que en  $D$  dimensiones la solución de Schwarzschild es [91]:

$$f_D = 1 - \frac{w}{r^{D-3}} \quad (2.22)$$

con  $m = (D-2)wS_{D-3}/(16\pi)$ , siendo  $S_{D-3}$  la superficie de una  $(D-3)$ -esfera. Para  $D = 5$  se obtiene  $w = 16\pi m/(3S_3) = 8m/(3\pi)$ , y comparando con el comportamiento asintótico de (2.55) resulta que la masa ADM es  $m = \frac{\pi}{8}M + \frac{3}{4}\pi\alpha$  con  $\alpha > 0$  para  $f_\alpha^-$  y  $\alpha < 0$  para  $f_\alpha^+$ . Entonces

$$f_\alpha(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} - \frac{r^2}{4\alpha} \sqrt{1 + \frac{64m\alpha}{3\pi r^4} + \frac{4\alpha\Lambda}{3}} \quad (2.23)$$

Asintóticamente esta solución tiende a la de la relatividad general (2.22) en 5 dimensiones cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , como era de esperar:

$$f_{GR}(r) = 1 - \frac{8m}{3\pi r^2} - \frac{\Lambda}{6} r^2 \quad (2.24)$$

Debemos notar que en el caso que la constante cosmológica no sea nula, además de tener el término dominante en (2.24), encontramos correcciones finitas debidas a  $\alpha$  en los parámetros del agujero negro [4]. Es decir

$$f_\alpha(r) = 1 - \frac{8m_d}{3\pi r^2} - \frac{\Lambda_d}{6} r^2 + \mathcal{O}(\alpha r^{-6}) \quad (2.25)$$

donde los parámetros *vestidos*  $m_d$  y  $\Lambda_d$  vienen dados por

$$\begin{aligned} \Lambda_d &= \Lambda \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \mu^{n-1} \right) \\ m_d &= m \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n \mu^{n-1} \right) \end{aligned}$$

siendo

$$c_n = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}n!}, \quad \mu = -\frac{4}{3}\Lambda\alpha.$$

Además en el caso de la solución cargada que discutiremos en la próxima sección, el parámetro de carga  $Q$  recibe correcciones similares debido a estos efectos finitos provenientes de  $\alpha$ , resultando

$$Q_d^2 = Q^2 \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n \mu^{n-1} \right)$$

Observemos que el parámetro  $\mu$  controla el *revestimiento* del conjunto completo de los parámetros del agujero negro. La expansión mencionada anteriormente converge para valores tales que  $\mu < 1$ . Por otro lado, en el caso  $\mu > 1$  encontramos una expansión diferente, que deviene en el siguiente *revestimiento* de los parámetros en el sector  $r \rightarrow \infty$

$$m_d = \frac{m}{\sqrt{|\mu|}} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n \mu^{1-n} \right)$$

Podemos ver que el término Newtoniano  $\sim m_d r^{-2}$  se anula en el límite  $|\Lambda\alpha| \rightarrow \infty$ . El caso particular  $\mu = 1$  lo discutimos más abajo. Además es posible ver que si se considera el caso  $\alpha\Lambda > 0$ , la constante cosmológica efectiva en el límite de  $\mu$  grande resulta ser

$$\Lambda_d = \sqrt{\frac{3\Lambda}{\alpha}} - \frac{3}{2\alpha} + \mathcal{O}(1/\sqrt{|\mu|}) .$$

Por otro lado, para el caso de constante cosmológica nula ( $\Lambda = 0$ ), la solución (2.23) tiene un horizonte de eventos localizado en

$$r_h = \sqrt{\frac{8m}{3\pi} - 2\alpha} \quad (2.26)$$

cuando  $m \geq \pi\alpha$ . Por lo tanto, el horizonte puede alcanzar el punto  $r = 0$  para un objeto masivo con  $m = \pi\alpha$ ; en este caso  $r = 0$  es una singularidad desnuda. Si  $m < \pi\alpha$  no hay horizonte.

Una de las diferencias más relevantes entre las soluciones de agujero negro de la relatividad general y la de la teoría de Lovelock es el hecho que  $f_\alpha(r)$  no es singular en el origen. Por el contrario, la métrica es regular en todo el espacio-tiempo. De la Ec. (2.23) obtenemos

$$f_\alpha(r=0) = 1 - \sqrt{\frac{4m}{3\pi\alpha}}$$

y, de hecho encontraremos algo similar para el caso de la solución cargada de Lovelock-Born-Infeld.

Si, el objeto no tiene masa ( $m = 0$ ), se obtienen la soluciones de de Sitter ( $\omega < 0 \Rightarrow \Lambda > 0$ ) y Anti de Sitter (AdS) ( $\omega > 0 \Rightarrow \Lambda < 0$ ) como casos particulares:

$$f_{(A)dS}(r) = 1 + \omega r^2$$

$$\text{donde } \omega = \frac{1}{4\alpha} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4}{3} \Lambda \alpha} \right)$$

Otra geometría interesante surge en el caso particular  $\alpha\Lambda = -\frac{3}{4}$ . En este punto del espacio de parámetros la solución resulta

$$f_{BTZ}(r) = \frac{r^2}{4\alpha} - \mathcal{M} \quad (2.27)$$

donde hemos considerado  $\Lambda < 0$ , e introducimos la notación  $\mathcal{M} + 1 = \sqrt{\frac{m}{\pi\alpha}}$ . Ciertamente, podemos referirnos a esta solución particular de la teoría de Lovelock como la *rama BTZ*, debido a que nos remite a la solución de agujero negro BTZ [21, 19, 52, 51]; este es un aspecto que ya ha sido mencionada en las referencias [18, 22]. De hecho, la solución (2.27) comparte muchas de las propiedades del agujero negro en 3 dimensiones, como por ejemplo las propiedades termodinámicas que mencionaremos en el capítulo 3. El parámetro  $\mathcal{M}$  en la Ec. (2.27) juega el rol de la masa  $M_{BTZ}$  en la solución BTZ. Cabe destacar que así como el espacio-tiempo  $AdS_3$  es obtenido como un caso particular de la geometría BTZ ajustando la masa a un valor negativo  $M_{BTZ} = -1$ , también la solución en 5 dimensiones Anti-de Sitter es obtenida ajustando al mismo valor de masa  $\mathcal{M} = -1$ .

Por otro lado, notemos que si tomamos el límite de  $\alpha$  grande mientras mantenemos la condición  $\Lambda\alpha = -\frac{3}{4}$  encontramos que la solución corresponde a la métrica que representa el borde de  $AdS_5$ , como ocurre con el agujero negro BTZ *no masivo* ( $M_{BTZ} = 0$ ) que es obtenido haciendo que el agujero negro tridimensional desaparezca. Por lo tanto el paralelismo con las soluciones en  $D = 3$  resultan ser exactas, ya que la métrica en cinco dimensiones obtenida al quedarnos con los términos dominantes en el límite de borde cercano de  $AdS_5$  corresponde también a  $\mathcal{M} = 0$  en (2.27), la cual es precisamente la solución de agujero negro de Lovelock (2.55) con masa *minimal*  $m = \pi\alpha$ . Además, una singularidad cónica se presenta en el rango  $0 < m < \pi\alpha$  (correspondiente a  $-1 < \mathcal{M} < 0$ ) obteniendo así una analogía completa.

Con el objetivo de tener un panorama más general de este tipo de soluciones, describiremos brevemente ciertas teorías de gravedad que son casos muy particulares de la teoría de Lovelock cuando la dimensión es impar. Estas teorías, que han sido largamente estudiadas, son las llamadas teorías de

Chern-Simons, y son teorías cuyo lagrangiano de Lovelock admite una formulación en términos de una acción de Chern-Simons. Asimismo las teorías de Chern-Simons pueden interpretarse como generalizaciones a más dimensiones de la gravedad de Einstein en tres dimensiones [130]. La acción de la teoría se escribe en función de la tétrada  $e_a^\mu$ , quedando la métrica definida como  $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b$ , donde los índices griegos se refieren al espacio-tiempo y los índices latinos al espacio tangente. Asimismo debemos definir la 1-forma asociada a la tétrada  $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ , la conexión de spin  $w^{ab} = w_\mu^{ab} dx^\mu$  con  $w_\mu^{ab} = e_\nu^a (\partial_\mu e^{\nu b} + e^{\lambda b} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu)$  y la 2-forma de curvatura  $R^{ab} = dw^{ab} + w_c^a \wedge w^{cb}$ . El tensor de Riemann, la condición de torsión nula, la condición de invariancia local de Lorentz y otras propiedades se expresan también en función de la 1-forma de spin, ver para esto las referencias [131, 68, 23, 54]. La acción de la teoría es

$$S_k = \kappa \int \sum_{p=0}^k c_p^k L^{(p)} \quad (2.28)$$

donde

$$L^{(p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge e^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_d} \quad (2.29)$$

y  $c_p^k = \frac{l^{2(p-k)}}{d-2p} \binom{k}{p}$  con  $1 \leq k \leq \frac{d-1}{2}$ , siendo  $d$  la dimensión del espacio-tiempo.

Para cada valor de  $k$  obtenemos distintas teorías, pero todas ellas involucran únicamente a dos constantes fundamentales  $\kappa$  y  $l$  que están relacionadas con la constante de gravitación  $G_k$  y la constante cosmológica  $\Lambda$  [54].

El caso  $k = 2$  es la llamada teoría de Chern-Simons, conteniendo solo un parámetro libre  $l$ , y se corresponde con el ajuste  $\Lambda\alpha = -\frac{3}{4}$  en las soluciones obtenidas previamente de la teoría de Gauss-Bonnet (recordemos que en la teoría de Gauss-Bonnet los parámetros libres eran dos:  $\Lambda$  y  $\alpha$ ). Estos valores de  $\alpha$  y  $\Lambda$  proveen a la teoría de diferentes escalas de longitudes en las cuales los términos de Gauss-Bonnet predominan sobre los de Einstein-Hilbert (corrección ultravioleta dada por  $l_\alpha \sim \sqrt{\alpha}$ ), y el rango donde el término de constante cosmológica domina a los de Einstein-Hilbert (corrección infraroja dada por  $l_\Lambda \sim 1/\sqrt{\Lambda}$ ). Para el caso particular de la teoría de Chern-Simons ( $\alpha\Lambda = -\frac{3}{4}$ ) ambas escalas de longitudes (las provenientes de  $l_\alpha$  y  $l_\Lambda$ ) son iguales.

Por lo tanto hemos visto que las diferentes regiones en el espacio  $(\Lambda, \alpha)$  de parámetros, llevan a distintos comportamientos cualitativos de la teoría, y



consecuentemente de sus soluciones. En la tabla 2.1 resumimos lo analizado previamente.

$m \neq 0$		$m = 0$		
$\Lambda, \alpha$ arbitrarios	$\Lambda\alpha = -\frac{3}{4}$	$\omega > 0$	$\omega < 0$	$\omega = 0$
Boulware-Deser	Chern-Simons	Anti de Sitter	de Sitter	Minkowski

Tabla 2.1: Soluciones de la teoría para diferentes regiones en el espacio de parámetros.

### 2.3. Agujeros Negros con cargas no lineales

Aquí presentaremos las soluciones de agujero negro de la teoría de Lovelock para cargas puntuales de dos teorías electromagnéticas no lineales. En el Apéndice A presentamos el lagrangiano, sus propiedades y otras aplicaciones de ambas teorías electromagnéticas, la de Born-Infeld y la teoría de Hoffmann-Infeld. Las ecuaciones de movimiento quedan:

$$8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \alpha \left( \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_{\rho\delta\gamma\lambda}R^{\rho\delta\gamma\lambda} - 4R_{\rho\delta}R^{\rho\delta} + R^2) - 2RR_{\mu\nu} + 4R_{\mu\rho}R_{\nu}^{\rho} + 4R_{\rho\delta}R^{\rho\delta}_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho\delta\gamma}R_{\nu}^{\rho\delta\gamma} \right)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-impulso que representa la distribución de materia.

Reemplazando en el ansatz

$$ds^2 = -g_{\alpha}(r)dt^2 + g_{\alpha}^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\chi^2 + r^2\sin^2\theta\sin^2\chi d\varphi^2 \quad (2.30)$$

obtenemos las relaciones mencionadas en la sección anterior

$$-\frac{3}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^2(1-g_{\alpha}(r)) + 2\alpha(1-g_{\alpha}(r))^2\right) + 2\Lambda = 16\pi T_0^0 \quad (2.31)$$

$$g_{\alpha}(r) - g_0(r) = \frac{2\alpha}{r^2}(1-g_{\alpha}(r))^2 \quad (2.32)$$

siendo  $g_0$  la solución correspondiente a  $\alpha = 0$ , que se obtiene resolviendo las ecuaciones de Einstein. Cuando la energía total de la fuente es finita resulta

$$g_0(r) = 1 + \frac{16\pi}{3r^2} \int_0^r ds s^3 T_0^0(s) - \frac{\Lambda}{6}r^2 \quad (2.33)$$

Como la energía total es finita se garantiza el correcto comportamiento Newtoniano en el infinito.

Las teorías electromagnéticas no lineales con energía total finita son caracterizadas por una escala de campo  $b$  que define una escala típica de longitudes  $l_b = (e/b)^{1/3}$ , siendo  $e$  la carga del objeto. Consideremos el tensor de energía-momento para una carga puntual localizada en el origen, que tiene la siguiente forma genérica en cinco dimensiones:

$$T_0^0(r) = -\frac{b^2}{4\pi r^3} h_b(r) \quad (2.34)$$

Además, en el caso general impondremos la siguiente condición de convergencia:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r ds \, h_b(s) = \delta < \infty, \quad \int_0^\infty ds \, h_b(s) = \gamma < \infty \quad (2.35)$$

Destaquemos primero que estas condiciones no se satisfacen en la electrodinámica de Maxwell. La primer condición en (2.35) corresponde a pedir que la métrica sea finita cuando consideramos una solución de la gravedad de Einstein en el caso que tengamos como fuente a una partícula puntual. Por otro lado, la segunda condición equivale a pedir que la energía total de la partícula sea finita.

Una carga de Born-Infeld satisface ambas condiciones (Hoffmann estudió una solución de agujero negro en cuatro dimensiones en el contexto de la gravedad de Einstein [77]). De todos modos, una carga de Born-Infeld conduce a  $\delta \neq 0$ , lo que significa que la métrica presenta una singularidad cónica. Hoffmann e Infeld removieron esta singularidad cónica modificando la electrodinámica de Born-Infeld para obtener  $\delta = 0$  [79, 78, 115].

La función radial  $h_b(r)$  define al tipo de teoría electromagnética que estamos analizando. Estudiaremos por separado las soluciones de agujero negro teniendo en cuenta dos teorías diferentes y sus correspondientes límites Maxwellianos.

### 2.3.1. Soluciones con carga de Born-Infeld

El campo eléctrico de una carga puntual en cinco dimensiones en la teoría de Born-Infeld resulta [4]:

$$E(r) = \frac{Q}{\sqrt{r^6 + l_b^6}} ; \quad l_b = \left(\frac{Q}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.36)$$

Una característica fundamental de esta teoría es el carácter finito que tiene este campo en el origen  $E(r = 0) = b$  que resulta ser el máximo valor para el campo  $E(r)$ . En este caso la función involucrada en (2.34) es

$$h_b(r) = \sqrt{r^6 + l_b^6} - r^3 \quad (2.37)$$

Como mencionamos previamente la energía de este campo es finita en contraste con lo que le ocurre al campo Maxwelliano:

$$U = 2\pi^2 \int_0^\infty T_0^0 r^3 dr = \frac{-b^2 L^4 \sqrt{\pi}}{12} \Gamma\left(-\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \quad (2.38)$$

Reemplazando (2.34) en (2.33) y (2.32) obtenemos la solución a las ecuaciones de movimiento (2.30) [4]:

$$g_\alpha(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \epsilon \left( 1 + \frac{M}{6\alpha} + \left( \frac{1}{4\alpha} - \frac{4b^2 - 2\Lambda}{6} \right) \frac{r^4}{4\alpha} + \frac{2b^2}{3\alpha} \int_0^r ds \sqrt{s^6 + l_b^6} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

donde  $M$  es una constante de integración y  $\epsilon = \pm 1$ . La integral dentro de la raíz cuadrada es una integral elíptica incompleta de primera especie  $F(a, b)$  [66], es decir

$$\int_0^r ds \sqrt{s^6 + l_b^6} = \frac{1}{4} r \sqrt{r^6 + l_b^6} + \frac{3}{4} l_b^4 \int_0^{\frac{r}{l_b}} \frac{ds}{\sqrt{1 + s^6}} \quad (2.40)$$

$$\text{donde } \int_0^{\frac{r}{l_b}} \frac{ds}{\sqrt{1 + s^6}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{\frac{1}{4}}} F\left( \arccos \left[ \frac{l_b^2 + (1 - \sqrt{3}) r^2}{l_b^2 + (1 + \sqrt{3}) r^2} \right], \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \right)$$

Obtenemos entonces, dos soluciones para la métrica, pero el signo de  $\alpha$  queda determinado al imponer que en el límite  $r \rightarrow \infty$  se debe recuperar el potencial Newtoniano en cinco dimensiones

$$\Phi = \frac{4m}{3\pi r^2} \quad (2.41)$$

obteniendo así  $\alpha > 0$  para  $\epsilon = -1$  y  $\alpha < 0$  para  $\epsilon = +1$ . En ese límite la solución es

$$g_\alpha(r) = 1 - \frac{8m}{3\pi r^2} \quad (2.42)$$

con  $m = \frac{\pi}{8}M + \frac{3}{4}\pi\alpha + \frac{\pi}{2}l_b^4 b^2 \gamma$  y

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^6}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{7}{6})}{\sqrt{\pi}} \approx 1,40218 \quad (2.43)$$

En términos de las masa ADM  $m$ ,  $g_\alpha(r)$  queda

$$g_\alpha(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} - \frac{r^2}{4\alpha} \left( 1 + \frac{64m\alpha}{3\pi r^4} - \frac{2}{3}\alpha(4b^2 - 2\Lambda) + \frac{8b^2\alpha}{3r^3} \sqrt{r^6 + l_b^6} - \frac{8b^2 l_b^6 \alpha}{r^4} \int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^6 + l_b^6}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

Esta clase de soluciones fueron también estudiadas en la referencia [129].

En el límite  $\alpha \rightarrow 0$  la solución tiende a

$$g_0(r) \approx 1 - \frac{\frac{8}{\pi}m - 2l_b^4 b^2 \gamma}{3r^2} - \frac{\Lambda}{6} r^2 - \frac{4b^2}{3r^2} \int_0^r dr \left( \sqrt{r^6 + l_b^6} - r^3 \right) \quad (2.45)$$

En este límite recuperamos la solución mencionada previamente de la solución en cuatro dimensiones de Hoffmann [77] con una singularidad cónica en el origen del agujero negro. Por lo tanto, tomando el límite  $b \rightarrow \infty$  en la Ec. (2.45) obtenemos la solución en 5 dimensiones de Reissner-Nordström con constante cosmológica,

$$g_{RN}(r) = 1 - \frac{8m}{3\pi r^2} + \frac{Q^2}{3r^4} - \frac{\Lambda}{6} r^2$$

Por otro lado, tomando el límite  $b \rightarrow \infty$  in (2.44), también recuperamos la solución de Lovelock-Maxwell encontrada por Wiltshire en [128]; es decir

$$g_W(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} - \frac{r^2}{4\alpha} \left[ 1 + \frac{64m\alpha}{3\pi r^4} - \frac{8Q^2\alpha}{3r^6} + \frac{4\Lambda\alpha}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.46)$$

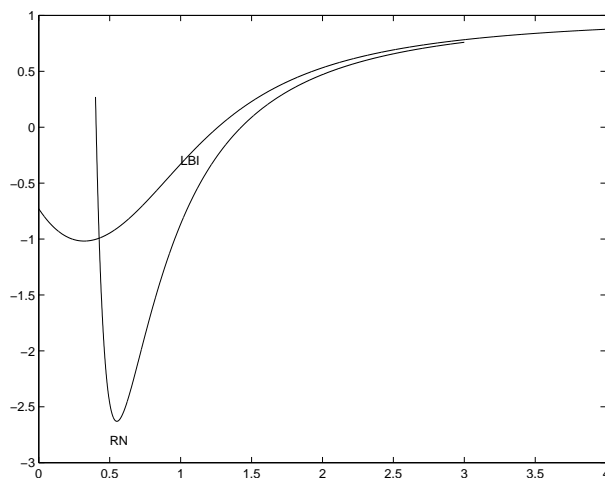


Figura 2.1: Comparación entre la solución de Reissner-Nordström (RN) y  $g_\alpha(r)$  (LBI) [ $\alpha = 0,1$ ,  $Q = 1$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $b = 1$ ,  $m = \pi$ ].

Observemos que debido al teorema de Birkhoff (ver el Apéndice A en la Ref. [91] y referencias allí citadas), este límite no es solo un argumento heurístico para testear la solución (2.44), sino que representa una condición necesaria que debe ser probada. Notemos también que la solución sin carga (2.23) también es recuperada en el límite  $b \rightarrow 0$ .

Volviendo a la solución general (2.44), podemos ver que, al contrario de lo que ocurre con las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström, la métrica no posee singularidades (Fig. 2.1):

$$g_\alpha(r=0) = 1 - \left( \frac{4m}{3\pi\alpha} - \frac{b^2 l_b^4 \gamma}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

Dependiendo de los valores de los parámetros del agujero negro (carga  $Q$ , masa  $m$ , constante de Born-Infeld  $b$  y constante de Gauss-Bonnet  $\alpha$ ) la raíz cuadrada podría ser imaginaria. Si  $\alpha > 0$  y  $m \geq \frac{3\pi}{8} b^2 l_b^4 \gamma = m_c$  la solución es válida en todo el rango  $r \geq 0$ .

En el caso en que  $m > m_c$  resulta  $g_\alpha(0) \neq 1$ , y la métrica presenta una singularidad cónica en el origen: mientras que el ecuador mide  $2\pi r$ , el radio

en el ecuador es

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{g_\alpha(r)}} \quad (2.48)$$

En el caso crítico  $m = m_c$  se encuentra que  $g_\alpha(0) = 1$ , desapareciendo la singularidad cónica de la métrica ya que en este caso se verifica

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{g_\alpha(r)}} \approx r \quad (2.49)$$

cuando  $r \approx 0$ .

A la inversa, se puede pensar en el valor crítico  $m_c$  de la siguiente manera: podemos definir un valor crítico

$$Q_c^2 = b^{-1} \left( \frac{8m}{3\pi\gamma} \right)^{3/2} \quad (2.50)$$

que representa una cota superior a la carga  $Q$  para que la métrica (2.46) esté bien definida en todo el espacio-tiempo. De esta manera, un valor crítico para la carga del agujero negro aparece en este contexto como una consecuencia directa de los efectos finitos debidos a  $b$ . El rol que juega  $b$  es ajustar el valor crítico  $Q_c \rightarrow 0$  en el régimen Maxwelliano  $b \rightarrow \infty$ , lo cual es consistente con el hecho que la geometría del agujero negro de Lovelock-Maxwell no es regular si  $m \neq 0$ .

Además, los efectos finitos de la constante  $b$  actúan en (2.44) como una especie de constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{eff}(r) = \Lambda + 2b^2(1 - e^{u_b(r)})$ , con  $u_0 = 0$  y  $\lim_{r \rightarrow \infty} u_b(r) = 0$ . Por este motivo se podría inferir que el *revestimiento* de los parámetros del agujero negro discutido en la sección anterior podría llegar a recibir contribuciones debido a la presencia de  $b$ . Sin embargo no es este el caso, como puede verificarse observando que no aparecen términos cuadráticos que dependan de  $b$  cuando se expande el lado derecho de la ecuación (2.44).

En esta geometría la posición del horizonte de eventos  $r_h$  queda determinada por  $g_\alpha(r_h) = 0$ , obteniendo de esta manera

$$r_h^2 = \frac{8m}{3\pi} - 2\alpha - \frac{r_h^4}{12}(4b^2 - 2\Lambda) + \frac{b^2}{3} r_h \sqrt{r_h^6 + l_b^6} - b^2 l_b^4 \int_{r_h/L}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^6}} \quad (2.51)$$

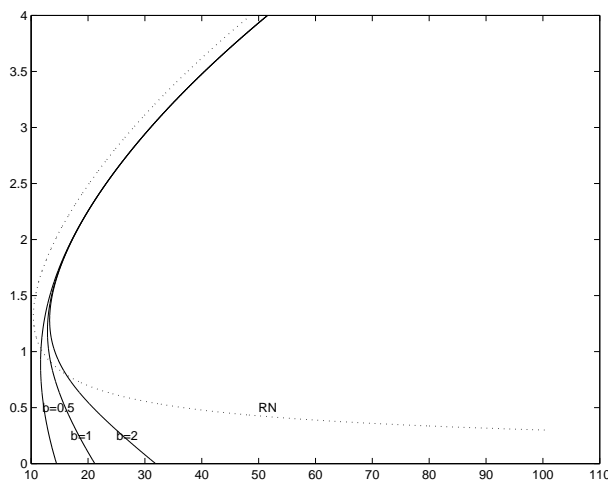


Figura 2.2: Posición del horizonte de eventos (eje vertical) en función de la masa del agujero negro (eje horizontal) para diferentes valores de  $b$  y en el caso de Reissner-Nordström (RN) [ $\alpha = 0,5$ ,  $Q = 3$ ,  $\Lambda = 0$ ].

y por lo tanto para  $\Lambda = 0$  y  $m > m_c + \pi \alpha$  solo existe un horizonte. Si  $m \leq m_c + \pi \alpha$  la solución es similar a la de Reissner-Nordström, en el sentido que puede haber dos horizontes. Cuando se satisface la igualdad uno de los horizontes se encuentra localizado en el origen (ver Ec. (2.47)). La figura 2.2 muestra la posición del horizonte ( $r_h$ ) como una función de la masa  $m$  para los casos de los agujeros negros de Lovelock-Born-Infeld y Reissner-Nordström ( $b \rightarrow \infty$ ).

Estos gráficos exhiben la diferencia crucial que existe entre el agujero negro de Lovelock-Born-Infeld y el de Reissner-Nordström; a saber, el hecho que para una carga  $Q$  dada existe un valor finito para la masa  $m$  del agujero negro tal que la geometría del mismo presenta únicamente un horizonte, debido a que el horizonte *interno* alcanza el origen. Esta mejora de la región bordeada por el horizonte interno y por el externo, depende del parámetro  $b$  y representa una de las principales distinciones de las geometrías de agujero negro en ambas teorías. Además la figura 2.2 muestra que la configuración extremal  $r_+ = r_-$ , que se traduce en una complicada expresión en términos de los parámetros  $m, Q, \alpha$  y  $b$ , experimenta un desplazamiento para valores finitos de  $b$  con respecto a la configuración de Reissner-Nordström  $m^2 = \frac{\pi^2}{3} Q^2$ . En la figura 2.3 se muestran diferentes comportamientos de la solución

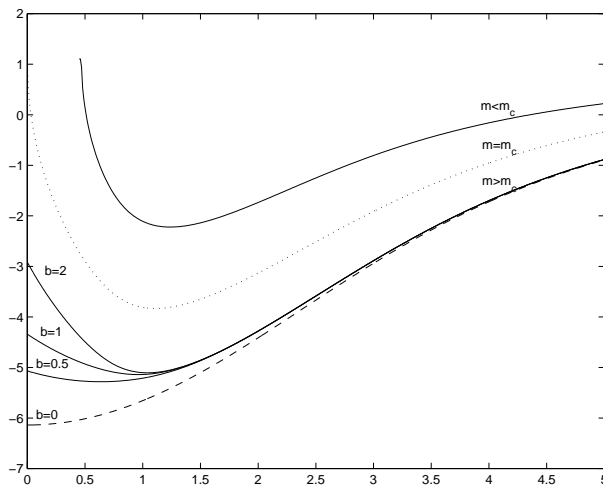


Figura 2.3: Gráficos de  $g_\alpha(r)$  para diferentes valores de  $b$ , para  $m < m_c$ : [ $m = 2$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $Q = 1$ ,  $b = 2$ ,  $\Lambda = 0$ ], para  $m = m_c$  [ $m = 3,49$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $Q = 1$ ,  $b = 2$ ,  $\Lambda = 0$ ] y en el caso  $m > m_c$  [ $m = 5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $Q = 1$ ,  $\Lambda = 0$ ].

$g_\alpha(r)$  para distintos valores de  $b$ . Este parámetro controla el comportamiento cualitativo cercano al origen. La métrica para el caso subcrítico ( $m < m_c$ ) no está bien definida en todo el espacio-tiempo.

### 2.3.2. Soluciones con carga de Hoffmann-Infeld

Como se menciona en el Apéndice A el campo de una carga de Hoffmann-Infeld es:

$$E(r) = \frac{Qr^3}{r^6 + l_b^6} \quad (2.52)$$

Para esta teoría la función  $h_b(r)$  de (2.34) resulta ser

$$h_b(r) = \frac{1}{2}r^3 \log(1 + l_b^6 r^{-6}) , \quad (2.53)$$

Podemos ver que en este caso el valor  $\gamma$  de las condiciones de convergencia (2.35) es

$$\gamma = \frac{\pi l_b^4}{4\sqrt{3}} \quad (2.54)$$



Reemplazando en la expresión general (2.33) y (2.32) obtenemos la solución a las ecuaciones de movimiento:

$$g_\alpha(r) = 1 + \frac{r^2}{l_\alpha^2} + \epsilon \frac{r^2}{l_\alpha^2} \left[ 1 + \frac{4b^2 l_\alpha^2}{3r^4} \int_0^r ds s^3 \log(1 + l_b^6 s^{-6}) + \frac{l_\alpha^2}{l_\Lambda^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.55)$$

donde  $\epsilon = \pm 1$ ,  $l_\alpha^2 = 4\alpha$  y  $l_\Lambda^2 = 3/\Lambda$ . Por lo tanto obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_\alpha(r) = 1 \quad (2.56)$$

para cualquier valor finito  $\delta$ . Observemos que este es el agujero negro de Deser-Boulware [36, 128] pero con carga de Hoffmann-Infeld.

Además en el límite  $r/l_\alpha$  grande se obtiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$g_\alpha(r) = 1 + \lambda_\epsilon r^2 + \frac{4\epsilon e^2}{3l_b^6 r^2} \int_0^r ds \frac{1}{2} s^3 \log(1 + l_b^6 s^{-6}) + \dots \quad (2.57)$$

con  $\lambda_\epsilon = (1 + \epsilon)/l_\alpha^2 + \epsilon/2l_\Lambda^2$  y los puntos se refieren a órdenes mayores en  $l_\alpha/r$  (como así también a órdenes subsiguiente en  $l_\alpha/l_\Lambda$ ). Es más, si se toma el límite para valores grandes de  $r/l_b$  de la métrica, encontramos

$$g_\alpha(r) = 1 + \lambda_\epsilon r^2 - \frac{2m_\epsilon}{\pi r^2} + \dots \quad (2.58)$$

una vez que la masa es identificada como  $m_\epsilon = -\epsilon \frac{2\pi^2 e^2 \gamma}{3l_b^6}$ . A la inversa, si primero tomamos el límite  $b \rightarrow \infty$  (es decir  $l_b/r \rightarrow 0$ ) y luego exploramos el comportamiento asintótico, la geometría resultante es:

$$g_\alpha(r) = 1 + \lambda_\epsilon r^2 - \epsilon \frac{e^2}{3r^4} + \dots \quad (2.59)$$

que por ejemplo, en el caso  $\epsilon = +1$  corresponde a un agujero negro donde el término de constante cosmológica es el dominante  $\lambda \sim l_\alpha^{-2}$  y un término de Reissner-Nordström  $\sim -e^2/r^4$  con el *signo incorrecto*. Esta característica imita a un agujero negro cargado sin masa con *carga eléctrica imaginaria*; aunque debemos enfatizar que el mecanismo que lleva a obtener esta métrica es substancialmente diferente del que lleva a obtener agujeros negros con un término análogo correspondiente a una *carga tidal*, ver [56].

Es relativamente simple verificar que si consideramos efectos de órdenes subsiguientes en potencias de  $l_\alpha/l_\Lambda$ , la masa de (2.55) viene dada por

$$m = \frac{2\pi b^2 \gamma}{3} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!} (-l_\alpha^2/l_\Lambda^2)^{n-1} \right) \quad (2.60)$$

con  $l_\alpha < l_\Lambda$  y donde aparece manifiestamente el *revestimiento* del término Newtoniano debido a la presencia de la constante cosmológica  $\Lambda$  [4].

Este efecto de revestimiento es caracterizado por la expansión en potencias del parámetro adimensional  $l_\alpha^2/l_\Lambda^2$ . Además, el valor específico del primer término de la expansión es el requerido para que la métrica sea regular en  $r = 0$ .

Por otro lado, para el valor específico  $l_\alpha^2 = -l_\Lambda^2 \Rightarrow \alpha\Lambda = -\frac{3}{4}$  ( $\alpha > 0$ ,  $\Lambda < 0$ ), la solución tiene un comportamiento diferente, siendo su expresión:

$$g_\alpha(r) = 1 + \frac{r^2}{l_\alpha^2} + c(r) \quad (2.61)$$

donde la función  $c(r)$  es

$$c^2(r) = \frac{8b^2}{3l_\alpha^2} \int_0^r ds \frac{1}{2} s^3 \log(1 + l_b^6 s^{-6}) \quad (2.62)$$

Esta métrica corresponde a un espacio-tiempo asintóticamente Anti-de Sitter en cinco dimensiones. Esto se debe al valor finito

$$c^2(\infty) = \frac{8b^2 \gamma}{3l_\alpha^2} \quad (2.63)$$

en infinito. Las geometrías (2.62) presentan horizonte de eventos y están íntimamente relacionadas con las soluciones de agujeros negros de la gravedad de Chern-Simons.

La solución cargada de Hoffmann-Infeld (2.55) comparte varias propiedades con la del modelo de Born-Infeld, por ejemplo la existencia de agujeros negros cargados con un único horizonte. Sin embargo la estructura de los horizontes en ambas teorías ciertamente es diferente (ver Fig. 2.4 y la solución análoga presentada en [129]), es decir el hecho que el radio interno  $r_-$  disminuye a medida que la masa  $m$  aumenta (para un valor fijo de la carga  $e$ ) es mucho más evidente para el agujero negro de Hoffmann-Infeld. Asimismo si se

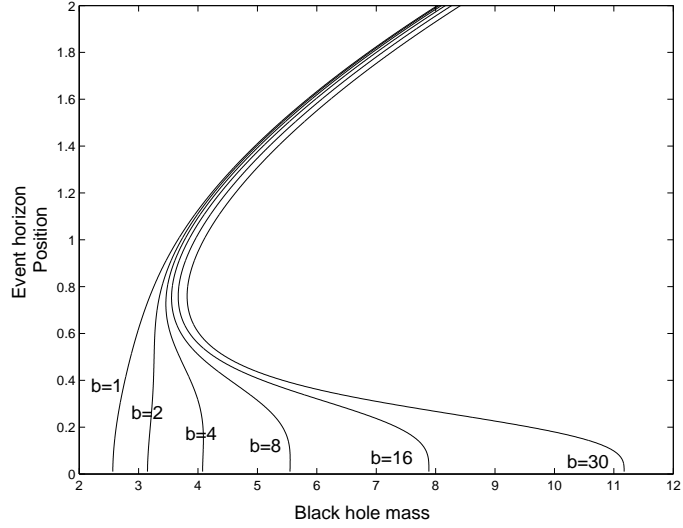


Figura 2.4: Posición del horizonte de eventos en función de la masa del agujero negro para diferentes valores del parámetro  $b$  [  $\alpha = 0,5$ ,  $e = 1$ ,  $\Lambda = 0$  ].

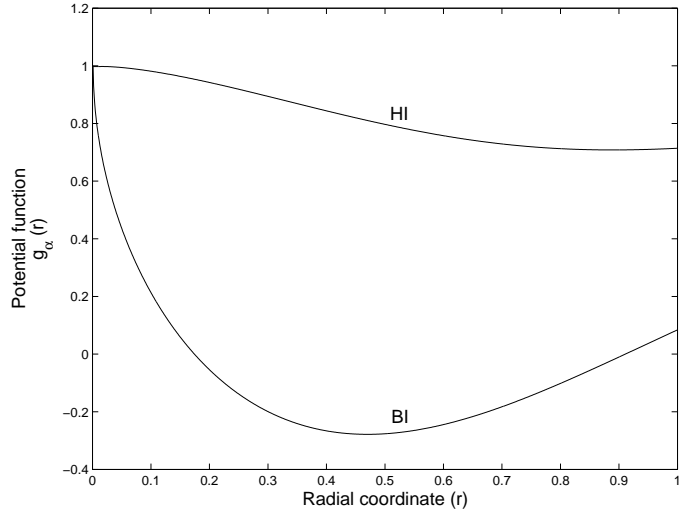


Figura 2.5: Función  $g_\alpha(r)$  para ambos casos, Hoffmann-Infeld (HI) y Born-Infeld (BI) [  $\alpha = 0,1$ ,  $e = 1$ ,  $\Lambda = 0$  ].

compara la solución (2.55) y la correspondiente al agujero negro de Lovelock-Born-Infeld, es factible verificar que en ambas teorías  $g_\alpha(r)$  puede ajustarse a 1 en el origen  $r = 0$ . No obstante en el caso de las soluciones de Lovelock-Hoffmann-Infeld encontramos que  $dg_\alpha(r)/dr$  se anula cuando  $r \rightarrow 0$ , a diferencia del caso Lovelock-Born-Infeld en el que tiende a  $-\infty$  (en la figura 2.5 se manifiesta esta diferencia entre ambas soluciones en el origen). Esto se debe a que las correcciones a distancias cortas a la teoría de Maxwell involucradas en el modelo de Hoffmann-Infeld son, en algún sentido, más fuertes que las correspondientes correcciones del caso de Born-Infeld.

## 2.4. Otras soluciones de la teoría de Gauss-Bonnet

En esta sección mostraremos a modo de ejemplo otras soluciones a la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet que no han sido estudiadas en este trabajo. Es interesante mencionar estas soluciones para mostrar la riqueza subyacente en el espectro de soluciones de la teoría de Lovelock.

### 2.4.1. Agujeros Negros topológicos

La acción (2.13) admite otro tipo de soluciones a las estudiadas previamente. Para esto consideremos un ansatz más general que el considerado en la secciones 2.2 y 2.3 en  $d$  dimensiones. Asumamos que la métrica es:

$$ds^2 = -f_k^2(r)dt^2 + f_k^{-2}(r)dr^2 + r^2 d\Sigma_{d-2}^2 \quad (2.64)$$

donde  $d\Sigma_{d-2}^2$  corresponde a una variedad de dimensión  $d - 2$  con curvatura  $R = (d - 2)(d - 3)k$  y de volumen  $\Sigma_k$ . Notemos que este cambio corresponde a modificar en (3.67) la variedad base que correspondía a una esfera de dimensión  $d - 2$  por esta nueva variedad base  $d\Sigma_{d-2}^2$  con curvatura constante pero no necesariamente positiva, dependiendo su signo del signo de  $k$ .

Consideremos ahora el caso de la teoría de Gauss-Bonnet en cinco dimensiones. Notemos que en este caso  $\frac{\partial}{\partial t}$  es un vector de Killing temporal, ortogonal a las variedades 4-dimensionales que se obtienen como el producto entre  $\mathbb{R}$  y la variedad base  $\Sigma_3$ . Planteando las ecuaciones de campo y resolviéndolas obtenemos que [41]:

$$f_k^2(r) = k + \frac{r^2}{4\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{128\pi\alpha M}{3\Sigma_k r^4} + \frac{4}{3}\alpha\Lambda} \right) \quad (2.65)$$

siendo  $\alpha$  la constante de Gauss-Bonnet,  $\Lambda$  la constante cosmológica y  $M$  la masa de la solución. La solución con  $k = 1$  (simetría esférica)  $f_1^2(r)$  fue mencionada en las secciones anteriores y corresponde a la de Boulware-Deser [36]. En los casos  $k = 0$  y  $k = -1$  se obtienen los llamados agujeros negros topológicos.

En [59] se analizan en detalle estas geometrías en cinco dimensiones sin asumir ninguna condición a-priori sobre el ansatz (2.64). Allí muestran que para ciertos valores de  $\alpha$ , la variedad base debe tener curvatura constante. Asimismo en [122] se estudian estos agujeros negros topológicos en el caso en el que tengan una carga de Maxwell.

Otras geometrías con interesantes características surgen al estudiar estos agujeros negros topológicos en  $n$  dimensiones, en un espacio-tiempo  $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{H}^{n-4}$ , siendo  $\mathcal{M}^4$  una variedad tetradimensional y  $\mathcal{H}^{n-4}$  una variedad de dimensión  $n - 4$  con curvatura constante. Esta solución de agujero negro  $n$ -dimensional, con  $n - 4$  dimensiones compactas es el llamado agujero negro de Kaluza-Klein [95]. La solución encontrada en [95] tiene dos parámetros libres y se aproxima asintóticamente a la de un agujero negro cargado, en un espacio-tiempo de Anti de Sitter, con la peculiaridad que para distancias grandes el término de Gauss-Bonnet actúa como una fuente puntual de Maxwell.

### 2.4.2. Agujeros de gusano

La teoría de Gauss-Bonnet admite también como soluciones los llamados agujeros de gusano. Estas geometrías poseen la particularidad de conectar dos regiones del espacio-tiempo desconectadas asintóticamente. Si bien estas soluciones existen en relatividad general, se precisa de materia cuyo tensor de energía-momento viola las condiciones de energía en la garganta del agujero de gusano, es decir en la región donde se conectan ambas soluciones. Sin embargo la teoría de Lovelock permite que existan estas soluciones aún sin materia. En la referencia [70] probaron que era posible construir estas geometrías en la teoría de Gauss-Bonnet sin tener que violar las condiciones de energía, asimismo obtuvieron las condiciones de juntura en la garganta del agujero de gusano para la teoría de Lovelock, condiciones que vienen a reemplazar las condiciones de Israel de la relatividad general [82].

En [69] se estudian estas soluciones de agujeros de gusano en vacío, que conectan dos espacios asintóticamente Anti de Sitter. Es decir que el tensor de energía-momento inducido en la garganta del agujero de gusano se anula.

Se proponen soluciones estáticas con simetría esférica, y con condiciones de contorno que respeten también esta simetría para cada una de las dos regiones  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  separadas por una hipersuperficie temporal  $\Sigma$  localizada en  $r = a(\tau)$ . Las métricas en cada una de las regiones son:

$$ds_{1,2}^2 = -f_{k_{1,2}}^2(r)dt^2 + f_{k_{1,2}}^{-2}(r)dr^2 + r^2d\Sigma_3^2 \quad (2.66)$$

donde  $f_{k_1}^2$  y  $f_{k_2}^2$  están dadas por (2.65). La métrica inducida en  $\Sigma$  resulta:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)d\Sigma_3^2 \quad (2.67)$$

De las condiciones de juntura se obtiene el radio de la garganta del agujero de gusano y su masa, teniendo así una solución estática en vacío.

Existen otras soluciones con geometrías de agujeros de gusano dentro del marco de la teoría de Lovelock. Por ejemplo en [59] encuentran una nueva clase de agujeros de gusano que conectan una variedad asintóticamente Anti de Sitter de un lado de la garganta, con otro espacio-tiempo no trivial con curvatura no nula.

Recientemente [7] se han utilizado estas soluciones en el contexto de la correspondencia AdS-CFT [96]: la idea del trabajo citado es estudiar el comportamiento de cuerdas abiertas con sus dos extremos localizados en uno de los espacios asintóticos AdS del agujero de gusano o con cada extremo localizados en cada una de las dos variedades AdS opuestas que están conectadas por el agujero de gusano. En ambos casos analizan las soluciones con las cuerdas enteramente contenidas en una de las regiones  $\mathcal{M}_1$  y con cuerdas que cruzan la garganta del agujero de gusano. Utilizando la correspondencia es posible caracterizar a las teorías cuánticas de campos duales a las soluciones de cuerdas abiertas que habitan en estas geometrías de agujeros de gusanos con dos variedades asintóticamente AdS. En particular, haciendo uso de que ambas regiones asintóticas de los espacios AdS están conectadas por una cuerda abierta, se obtiene la forma de la interacción de las dos teorías de campos duales en el espacio  $\mathbb{R} \times \Sigma_3$ : la simetría conforme de ambas teorías se rompe en la escala de longitudes asociada a  $\Sigma_3$  ( $l_{\Sigma_3} \approx \sqrt{k}$ ). Del cálculo del valor de expectación del tensor de energía-momento en el borde, se infiere como afecta la masa del agujero de gusano en el valor de expectación del mismo tensor de ambas teorías de gauge interactuantes.

Como hemos visto, la teoría de Lovelock propone una variedad amplia de soluciones con nuevas características propias de la teoría, incorporando

además las generalizaciones a más dimensiones de las soluciones de la relatividad general. Con respecto a esto existe una excepción, y se trata de la solución rotante, ya que aún no se ha encontrado el análogo a la geometría de Kerr en la teoría de Lovelock. Existen ciertas evidencias de que este tipo de soluciones deberían existir, como muestran en el trabajo [9], aunque la solución presentada allí no corresponde a un agujero negro ya que no presenta ningún horizonte de eventos. Por otro lado, si el propósito es que la teoría de Lovelock sea una teoría de Gravedad alternativa a la relatividad general en más dimensiones, uno esperaría que existan soluciones de agujeros negros rotantes para completar el catálogo de geometrías posibles.

En el próximo capítulo presentaremos un repaso histórico de las analogías de las leyes de agujeros negros con la termodinámica, como así también mostraremos el formalismo geométrico que define a los conceptos termodinámicos de teorías de gravedad, en particular la teoría de Lovelock, y analizaremos las propiedades termodinámicas de las soluciones de agujeros negros que hemos estudiado.

# Capítulo 3

## Termodinámica de agujeros negros

A lo largo de los últimos 40 años de estudios en el tema de agujeros negros dentro del marco de la relatividad general se ha ido aprendiendo que existe una relación profunda y fundamental entre la gravedad, la termodinámica y la teoría cuántica. El punto donde estas tres ramas de la física confluyen es en la termodinámica de agujeros negros, donde ciertas leyes de la mecánica de agujeros negros son de hecho las leyes ordinarias de la termodinámica aplicadas a un sistema que contiene un agujero negro. Por otro lado, clásicamente los agujeros negros son objetos que no emiten nada, sin embargo dentro del marco de una teoría cuántica emiten radiación con un espectro térmico.

Comenzaremos mostrando los argumentos heurísticos de Bekenstein [26, 27] para definir las magnitudes termodinámicas de agujeros negros y la posterior comparación entre las leyes de la termodinámica y la leyes de la mecánica de agujeros negros. Repasaremos también los conceptos introducidos por Bardeen, Carter y Hawking [25] que profundizan esta analogía presentándola de una manera sistemática. Luego describiremos el desarrollo geométrico que formaliza los conceptos termodinámicos en teorías covariantes de gravedad, y en particular en la teoría de Lovelock. Aplicando estos resultados calcularemos estas magnitudes termodinámicas para las soluciones obtenidas en el capítulo anterior, haciendo hincapié en las diferencias sustanciales que surgen en la teoría de Lovelock, sobre todo en lo que respecta al tiempo de evaporación de un agujero negro. Finalmente mostraremos la relación entre estos conceptos y la radiación cuántica de un agujero negro.



### 3.1. Entropía de Bekenstein

En los trabajos [26, 27] Bekenstein inicia el estudio de la termodinámica de agujeros negros, utilizando diversos argumentos heurísticos basados en ciertos teoremas sobre la mecánica de agujeros negros de Floyd, Penrose, Christoulou y Hawking. Asimismo se basa en la teoría de la información como describiremos mas adelante.

En la década del 70 se sabía que los agujeros negros tenían una tendencia a aumentar la superficie del área del horizonte de eventos bajo ciertas transformaciones, como por ejemplo en el proceso de Penrose [109] en el cual se extrae energía de un agujero negro de Kerr. Asimismo en [49, 50] se muestra que ningún proceso en el cual el estado final es la captura de una partícula por un agujero negro de Kerr puede devenir en una disminución de la masa del mismo, implicando entonces que en la mayoría de los procesos el área debe aumentar.

Desde otro punto de vista Hawking dió una prueba más general de que el área de un agujero negro no puede disminuir en proceso alguno [74]. Para un sistema de varios agujeros negros el teorema de Hawking implica que si este conjunto de agujeros negros colapsa y se forma un único agujero negro, el área del agujero negro resultante no puede ser menor o igual que la suma de las áreas iniciales:

$$A_{final} > \sum_{i=1}^n A_i \quad (3.1)$$

siendo  $A_i = \frac{1}{8\pi} m_i (m_i + \sqrt{m_i^2 - a_i^2})$  el área del horizonte de eventos de un agujero negro de masa  $m_i$  e impulso angular  $a_i$ .

Es decir que los cambios producidos en un agujero negro o en un sistema de ellos se producen en la dirección en la cual el área del horizonte aumenta. Este es el mismo comportamiento que se da en un sistema termodinámico cerrado en el cual las transformaciones se dan en la dirección en la cual crece la entropía del sistema. Esta es una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica, que como veremos en el capítulo siguiente, da lugar a la llamada flecha del tiempo termodinámica. Todo esto sugería que podría resultar útil para el estudio de la mecánica de agujeros negros considerar el punto de vista termodinámico. Esta fue la idea que dió lugar a los trabajos de Bekenstein [26, 27] que resumiremos en los párrafos siguientes.

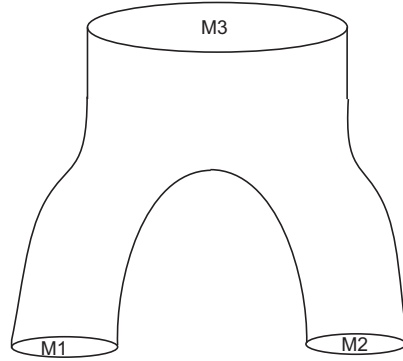


Figura 3.1: Representación de la inecuación (3.1) de la formación de un agujero negro  $M3$  a partir de dos agujeros negros de masas  $M1$  y  $M2$ .

### 3.1.1. Analogía con la primera ley

La primera ley de la termodinámica afirma que

$$dE = TdS - PdV \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta una de las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de Einstein, la solución de Kerr-Newman, el área del horizonte de eventos resulta:

$$A = 4\pi(2Mr_+ - Q^2) \quad (3.3)$$

siendo  $M$  la masa,  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$  la posición del horizonte de eventos externo,  $a = J/M$ ,  $J$  el impulso angular y  $Q$  la carga. Diferenciando (3.3) y despejando  $dM$  se obtiene

$$dM = \frac{\Theta}{4\pi}dA + \Omega_i dJ_i + \Phi dQ \quad (3.4)$$

con  $\Theta = \pi(r_+ - r_-)/A$ ,  $\Omega_i = 4\pi a_i/A$  y  $\Phi = 4\pi Q r_+/A$ . La expresión (3.4) es la análoga a la expresión (3.2). Los términos  $\Omega_i dJ_i$  y  $\Phi dQ$  representan el trabajo hecho sobre el agujero negro por agentes externos que aumentan el impulso angular y la carga en un factor  $dJ_i$  y  $dQ$  respectivamente. La suma de estos dos términos  $\Omega_i dJ_i + \Phi dQ$  es el análogo de  $-PdV$ , es decir el

trabajo hecho sobre el sistema termodinámico. Las cantidades  $\Omega$  y  $\Phi$  juegan el rol de la velocidad angular y el potencial electrostático del agujero negro respectivamente [26]. La cantidad  $A/4\pi$  se asemeja a la entropía en (3.2). Para cualquier cambio en el agujero negro  $dA > 0$  mientras que para cualquier cambio en un sistema termodinámico cerrado  $dS > 0$ . Además es claro de la definición de  $\Theta$  que es una cantidad siempre positiva, siendo el análogo de la temperatura  $T$ . Por supuesto que hasta ahora es solo una analogía, y esto es evidente del hecho de que las dimensiones de la entropía y del área son diferentes. Bekenstein utilizó como argumento heurístico la teoría de la información, para encontrar así una expresión que al menos tuviera las mismas dimensiones que la entropía.

### 3.1.2. Teoría de la información y entropía

La entropía en la teoría de la información da una medida de la falta de información acerca de la configuración interna en la cual se encuentra cierto sistema. Si  $p_n$  es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $\psi_n$ , la entropía asociada con el sistema viene dada por la fórmula de Shannon:

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n \quad (3.5)$$

Cabe notar que la entropía de Shannon es adimensional, esto significa que estamos midiendo la temperatura en unidades de energía, y por lo tanto la constante de Boltzmann resulta adimensional. Si con el transcurso del tiempo se obtiene nueva información sobre el sistema, esta actualización se traduce en restricciones para los valores de  $p_n$ . Estas restricciones derivan siempre en una disminución de la entropía (3.5). Si  $\Delta I$  es la nueva información adquirida que se corresponde con una disminución  $\Delta S$  en la incerteza sobre el estado interno del sistema, entonces se verifica [39]

$$\Delta I = -\Delta S \quad (3.6)$$

Un ejemplo típico de esta situación es un gas ideal en un recipiente que es comprimido isotérmicamente (Fig. 3.2). La entropía en este proceso disminuye,  $S_2 < S_1$ , y la información sobre la localización del gas es mayor luego de la compresión, es decir hay mayor precisión en la ubicación de las moléculas del gas al final del proceso,  $\Delta X_2 < \Delta X_1$ .

En el contexto de la teoría de la información la segunda ley se traduce en que la entropía de un sistema termodinámico fuera del equilibrio aumenta

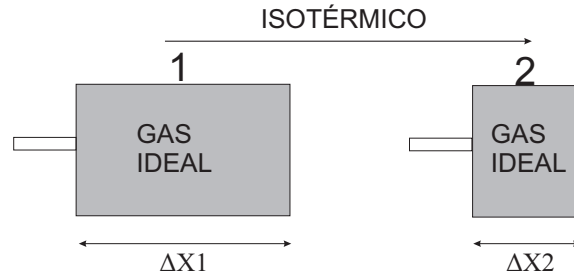


Figura 3.2: Proceso en el cual un gas es comprimido isotérmicamente.

porque la información acerca de la configuración interna del sistema se pierde en la evolución, esto es debido a que se diluyen los efectos de las condiciones iniciales del sistema. Es posible que un agente externo produzca una disminución en la entropía del sistema al adquirir información acerca del estado interno. El ejemplo típico es el llamado demonio de Maxwell [39]. Pero inevitablemente al adquirir cierta información  $\Delta I$  acerca del sistema, el agente externo provoca un aumento en la entropía del resto del universo que excede  $\Delta I$ .

Hemos estado hablando de la cantidad  $\Delta I$  en los párrafos anteriores; para esto necesitamos una manera precisa de cuantificar la información. En la teoría de la información se define como unidad de información al bit: es la información que se tiene cuando se conoce con precisión la respuesta a una pregunta por si o por no (entropía nula). De acuerdo a (3.6) un bit corresponde a la máxima entropía asociada con una pregunta por si o por no, es decir el valor de la entropía cuando no existe información disponible para responder la pregunta. En el ejemplo de la pregunta por si o por no, la expresión (3.5) es una combinación lineal de dos términos,  $-(p_{si} \ln p_{si} + p_{no} \ln p_{no})$  donde  $p_{si}$  y  $p_{no}$  son las probabilidades que las respuestas sean si y no respectivamente. El máximo de (3.5) se obtiene cuando  $p_{si} = p_{no} = \frac{1}{2}$ , así que un bit corresponde a  $\ln 2$  de información de acuerdo a la definición de Shannon.

### 3.1.3. Propuesta de Bekenstein para la entropía de un agujero negro

La descripción macroscópica de un sistema termodinámico en equilibrio es caracterizada por ciertos parámetros termodinámicos (temperatura, presión, etc.). Un agujero negro es descrito de la misma manera que un sistema termodinámico, por ejemplo para el de Kerr-Newmann un observador externo precisa solo de tres parámetros: la carga, la masa y el impulso angular. Pero el hecho que dos agujeros negros posean los mismos valores en los tres parámetros no significa que posean la misma configuración interna, uno de ellos puede haberse formado debido al colapso de una estrella común y el otro de una estrella de neutrones por ejemplo. En esta línea de razonamiento es donde encaja la entropía comentada en la sección anterior: podemos introducir entonces el concepto de entropía de un agujero negro como una medida de la falta de información que un observador externo tiene sobre la configuración interna del mismo. Esta entropía se refiere entonces a una clase de equivalencia de todos los agujeros negros que tienen la misma masa, carga e impulso angular. En la Sección 3.1.1 habíamos visto de la analogía, que la cantidad  $A/(4\pi)$  jugaba el rol de la entropía. Para ser más general Bekenstein supuso que la entropía  $S$  es una función lineal creciente de esa cantidad:

$$S = \gamma A/4\pi \tag{3.7}$$

El argumento que utilizó para justificar esta elección es que si uno tiene dos agujeros negros distantes, la entropía es la suma de las de cada uno, pero si estos colapsan para formar uno la entropía final es mayor. Si en vez de elegir (3.7) escogiéramos por ejemplo  $S = (A/4\pi)^{\frac{1}{2}}$  la consecuencia en el caso de Schwarzschild sería que la masa final excedería a la inicial, y esto contradeciría el hecho de que la masa final disminuye debido a la radiación gravitatoria.

La constante  $\gamma$  tiene unidades de  $(longitud)^{-2}$ . Como en relatividad general no existe una constante con tales unidades, Bekenstein apeló a la cuántica tomando  $\gamma = \eta \hbar^{-1}$  donde  $\eta$  es una constante adimensional y  $\hbar$  es la longitud de Planck al cuadrado. El argumento para encontrar el valor de  $\eta$  es el siguiente: consideremos una partícula de radio  $b$  y masa  $\mu$  que cae en un agujero negro de Kerr. Durante este proceso la variación mínima en el área del horizonte es [26]:

$$\Delta A_{min} = 8\pi\mu b \tag{3.8}$$

Acotando el radio de la partícula con la longitud de Compton  $\hbar\mu^{-1}$  y con el radio gravitatorio  $2\mu$ , se obtiene una cota inferior para el valor de la variación mínima del área (3.8) igual a

$$\Delta A_{min} = 8\pi\hbar \quad (3.9)$$

Por otro lado el mínimo de información que puede perderse en este proceso es la respuesta a la pregunta: ¿existe la partícula?. Antes de caer en el horizonte la respuesta es si, mientras que una vez dentro la respuesta a la pregunta es no se sabe, dado que el estado interno es desconocido. Es decir que según la teoría de la información se pierde un bit de información, es decir una variación mínima en la entropía de Shannon de  $\ln 2$ . Insertando el valor mínimo (3.9) en (3.7) e igualando a  $\ln 2$  se obtiene  $\eta = \frac{1}{2} \ln 2$  y consecuentemente

$$S = \frac{1}{8\pi} \ln 2 \hbar A \quad (3.10)$$

Como mencionaremos más adelante el valor correcto de  $\eta$  no es el obtenido arriba. En el trabajo original de Bekenstein el se percató de esto aclarando que se debería hacer el cálculo completo desde el punto de vista cuántico, como veremos en la Sección 3.5. De todos modos es sorprendente que con estos argumentos heurísticos se llegue a una expresión tan cercana a la entropía de un agujero negro.

### 3.1.4. Generalización de la segunda ley

Si tenemos cierto sistema con algún valor de entropía  $S$  que traspasa el horizonte de eventos de un agujero negro, la entropía asociada con el universo visible disminuiría. Sin embargo el crecimiento del área del agujero negro compensa la entropía perdida debido a la desaparición del sistema, de una manera irreversible. Bekenstein conjeturó que la segunda ley debiera ser generalizada, incluyendo la entropía de la región externa: la entropía total, es decir la del agujero negro más la de la región externa, nunca disminuye. La interpretación es la siguiente: la entropía  $S$  del sistema que entra en la región interna se debe a la incerteza debido a la falta de conocimiento que se tiene de su configuración interna. Cuando el sistema se encuentra fuera del agujero negro se tiene la opción de eliminar esta incerteza haciendo alguna medición sobre el sistema hasta obtener una cantidad de información que sea igual a  $S$ . Sin embargo cuando el sistema traspasó el horizonte de eventos esto

ya no es posible, y la información acerca de la configuración del sistema ha pasado a ser inaccesible. Por esto se espera que la entropía del agujero negro aumente en esta cantidad  $S$ . Incluso el aumento puede ser mayor debido a que cualquier información disponible de antemano se pierde también una vez que el sistema cae en el agujero negro.

La segunda ley generalizada podría ser expresada de la siguiente manera:

$$\Delta S_{AN} + \Delta S_{EX} = \Delta(S_{AN} + S_{EX}) > 0 \quad (3.11)$$

siendo  $S_{AN}$  y  $S_{EX}$  la entropía del agujero negro y la de la región externa respectivamente. En el trabajo [26] se muestran dos ejemplos donde se calculan explícitamente estas entropías para dos sistemas diferentes: un oscilador armónico y un rayo de luz que traspasan el horizonte de eventos de un agujero negro de Kerr.

En un trabajo posterior [27] Bekenstein continua estudiando la segunda ley generalizada pero desde un punto de vista más general y no para un agujero negro de Kerr únicamente, obteniendo una cota inferior para la variación de la entropía asociada con un agujero negro.

Poco tiempo después, Bardeen, Carter y Hawking [25] mostraron de una manera sistemática la analogía propuesta por Bekenstein entre ciertas leyes de la física de agujeros negros en relatividad general y las leyes de la termodinámica. En la sección siguiente repasaremos los conceptos fundamentales introducidos en [25] como paso previo para definir las propiedades termodinámicas en teorías mas generales de gravedad.

## 3.2. Las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros en Relatividad General

La mecánica de agujeros negros está gobernada por cuatro leyes simples que relacionan ciertas cantidades significativas. Tres de estas cantidades resultan ser familiares en relatividad general, y corresponden a la masa, la carga y el impulso angular. La cuarta cantidad es un concepto geométrico y es el área del horizonte de eventos. La quinta no es tan familiar y es la llamada gravedad superficial, que discutiremos en la sección siguiente. Con estos cinco parámetros es posible dar una descripción completa de un agujero negro estacionario y, como veremos, la descripción resultará más sencilla que si utilizáramos el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Einstein.

### 3.2.1. Gravedad Superficial

Es muy común decir que un agujero negro es una región del espacio-tiempo donde la gravedad es tan fuerte que nada puede escapar de él. Para esto es necesario que exista cierta región del espacio-tiempo en la cual se pueda contemplar tal escape. En el caso de un espacio-tiempo asintóticamente plano, tal zona es la región asintótica cerca del infinito. La región correspondiente al agujero negro  $\mathcal{B}$  de un espacio-tiempo asintóticamente plano  $(M, g_{ab})$  se define como [125]:

$$\mathcal{B} = M - I^-(\mathcal{I}^+) \quad (3.12)$$

donde  $\mathcal{I}^+$  es el infinito futuro nulo e  $I^-$  es el pasado cronológico. Es decir que el término  $I^-(\mathcal{I}^+)$  corresponde al pasado de todos los eventos que ocurren en el borde del espacio-tiempo, a distancias y tiempos infinitos. Esta definición captura la característica esencial de un agujero negro, esto es, que es una región completamente separada causalmente del resto del universo de la cual ni materia, ni energía pueden escapar.

El horizonte de eventos  $\mathcal{H}$  es el borde de  $\mathcal{B}$ , que representa la frontera a partir de la cual el futuro de todos los observadores dentro de esta zona queda contenido en la misma zona. Para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones corresponde a una superficie de dos dimensiones que encierra cierto volumen en cada instante de tiempo.

Suponiendo ahora que un espacio-tiempo  $(M, g_{ab})$  asintóticamente plano contiene un agujero negro  $\mathcal{B}$ , se dice que el mismo es estacionario si existe un grupo de isometrías de un parámetro generadas por un campo de Killing<sup>1</sup>  $\xi^a$  que es asintóticamente de tipo temporal. Si además de ser estacionario, se verifica que  $\xi^a$  es ortogonal a una hipersuperficie, se dice que el agujero negro es estático. En este caso existe una isometría de reflexión temporal a lo largo de cada una de las hipersuperficies ortogonales a  $\xi^a$ .

Otro caso de interés para lo que veremos más adelante es cuando existe un grupo de isometrías de un parámetro generadas por un vector de Killing rotacional  $\phi^a$  que corresponden a rotaciones en infinito; en este caso se dice que el agujero negro es axisimétrico. Un agujero negro que sea estático o estacionario y axisimétrico, posee un vector de Killing

$$\chi^a = \xi^a + \Omega\phi^a \quad (3.13)$$

---

<sup>1</sup>Recordemos que un campo de Killing satisface la ecuación  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$ , dejando a la métrica invariante a lo largo de la dirección dada por el vector de Killing.



que es normal al horizonte de eventos  $\mathcal{H}$  [45]. La constante  $\Omega$  es la llamada velocidad angular del horizonte (en el caso de ser estático  $\Omega = 0$ ).

Otro concepto que precisaremos es el de horizonte de Killing  $\mathcal{K}$ : un horizonte es de Killing si es una superficie nula cuyos generadores coinciden con las órbitas del grupo de isometrías de un parámetro. Ahora bien, dado que el horizonte de eventos  $\mathcal{H}$  es una hipersuperficie nula, y  $\chi^a$  es normal al horizonte en los casos mencionados antes, entonces  $\chi^a\chi_a = 0$ , y por lo tanto en ambos casos (agujero negro estático o bien axisimétrico y estacionario) el horizonte de eventos es un horizonte de Killing. En el contexto de la relatividad general, la condición de que sea axisimétrico puede ser descartada y basta con que el agujero negro sea estacionario para que su horizonte de eventos sea de Killing [73]. De esto se deduce que un agujero negro estacionario en relatividad general es no-rotante o bien axisimétrico.

Habíamos visto que  $\chi^a\chi_a = 0$  en el horizonte, en particular  $\chi^a\chi_a$  es constante en el mismo, lo cual significa que la derivada covariante  $(\chi^b\chi_b)^{;a}$  no puede tener una dirección tangente, siendo así normal al horizonte y por lo tanto paralela a  $\chi^a$ . Es así que en el horizonte existe una función  $\kappa$  tal que:

$$(\chi^b\chi_b)^{;a} = -2\kappa\chi^a \quad (3.14)$$

donde  $\kappa$  es la llamada gravedad superficial. Es posible despejar de esta ecuación la gravedad superficial [125] obteniendo:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\chi^{b;a}\chi_{b;a} \quad (3.15)$$

El valor de  $\kappa$  fue calculado en [25] para la solución de Kerr, y en general para un agujero negro de Kerr cargado se obtiene:

$$\kappa = \frac{[M^2 - a^2 - Q^2]^{\frac{1}{2}}}{2M[M + (M^2 - a^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}] - Q^2} \quad (3.16)$$

La expresión (3.15) se puede escribir a través del límite de cierta cantidad a medida que se tiende al horizonte [125]:

$$\kappa = \lim(aV) \quad (3.17)$$

siendo  $V = (-\chi^d\chi_d)^{\frac{1}{2}}$ ,  $a = (a^c a_c)^{\frac{1}{2}}$  con

$$a^c = -\frac{\chi^b\chi_{;b}^c}{\chi^d\chi_d} \quad (3.18)$$

Estas dos últimas expresiones, (3.17) y (3.18), nos llevan a un significado físico muy claro de la gravedad superficial, al menos para el caso de un agujero negro estático, es decir, con un vector de Killing temporal  $\xi^a$  únicamente. Para ver esto recordemos que si una partícula se mueve en un marco de referencia local de tal manera que la métrica localmente no cambia podemos decir que la partícula está quieta en tal marco de referencia. Ahora bien, por definición, las traslaciones en el espacio-tiempo que dejan a la métrica invariante se dan a lo largo de las órbitas de los vectores de Killing. Por otro lado una partícula que se mueve con cierta aceleración  $a^c$  está sometida a una fuerza  $f^c = ma^c$ . Si planteamos el caso particular en el cual la velocidad de la partícula  $u^a$  corresponde a que esté quieta, entonces  $u^a$  es el vector de Killing temporal normalizado  $u^a = \xi^a / (\xi^b \xi_b)^{\frac{1}{2}}$  con la correspondiente aceleración

$$a^b = \frac{\xi^a \xi_{;a}^b}{\xi^a \xi_a} = -\frac{\xi^a \xi^b}{V^2} \quad (3.19)$$

Por lo tanto la fuerza necesaria para mantener a la partícula quieta es:

$$-ma^b = -m \frac{\xi^a \xi_{;a}^b}{V^2} = m \frac{1}{V} \left[ (\xi^a \xi_a)^{\frac{1}{2}} \right]^{;b} = m \frac{1}{V} V^{;b} \quad (3.20)$$

Si suponemos que la partícula está cerca del horizonte, pero mantenida por una cuerda sujeta por un observador situado muy lejos del agujero negro, este observador mediría una energía  $E = m(-\partial_t)^a u_a = -m \xi^a \xi_a / V = mV$  de la partícula. La fuerza que debería hacer este observador lejano para mantenerla sería

$$F_\infty = [(-E^{;a})(-E_{;a})]^{\frac{1}{2}} = m[V^{;a}V_{;a}]^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

Por otro lado la fuerza que mediría en el sistema de la partícula sería:

$$F = m(a^b a_b)^{\frac{1}{2}} = m \frac{1}{V} [V^{;a}V_{;a}]^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

Comparando (3.21) con (3.22) vemos que la fuerza en infinito requerida para mantener a la partícula quieta, es en un factor  $V$  menor comparada con la fuerza medida en el sistema de la partícula a medida que se acerca al horizonte:

$$F_\infty = VF = mVa \quad (3.23)$$

Es decir que la gravedad superficial  $\kappa = \lim(aV)$  es igual a  $F_\infty/m$ . Él significado físico de la gravedad superficial es entonces la fuerza por unidad de

masa requerida por un observador distante para mantener a la partícula en su lugar a medida que se acerca al horizonte.

Habiendo definido la gravedad superficial, estamos en condiciones de formular una de las leyes de la mecánica de agujeros negros.

### 3.2.2. Ley cero

En relatividad general esta ley contiene menos hipótesis que en cualquier teoría covariante de gravedad como veremos en la sección siguiente, y puede formularse por intermedio del siguiente teorema demostrado en [25]:

Si se satisfacen las ecuaciones de Einstein y el tensor de energía-momento cumple con la condición de energía dominante, entonces la gravedad superficial  $\kappa$  es constante en cualquier horizonte de Killing.

Cabe recordar que si el agujero negro es estacionario, el horizonte de Killing coincide con el horizonte de eventos  $\mathcal{H}$ , siendo entonces  $\kappa$  constante en  $\mathcal{H}$ .

Esta ley de la mecánica de agujeros negros es la análoga a la ley cero de la termodinámica que afirma que la temperatura de un sistema termodinámico en equilibrio térmico es constante en todo el sistema. Como veremos en la sección 3.6 la analogía deja de serlo cuando se introducen efectos cuánticos y se calcula la temperatura  $T$  de radiación del agujero negro que resulta ser proporcional a la gravedad superficial, obteniéndose  $T = \kappa/2\pi$ .

### 3.2.3. Primera Ley

La definición de la masa  $M$  de un espacio-tiempo estacionario y asintóticamente plano fue dada por primera vez por Komar [85] y se basa en la analogía entre la ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$  que se satisface para el potencial Newtoniano  $\phi$  en la región externa de vacío y la ecuación de la relatividad general, también válida en la región de vacío,  $\mathbf{d}\alpha = 0$ , siendo  $\alpha$  una 2-forma con componentes  $\alpha_{ab} = \varepsilon_{abcd}\xi^{d;c}$ , donde  $\varepsilon_{abcd}$  es el elemento de volumen del espacio-tiempo y  $\xi^d$  es el vector de Killing temporal. La fórmula que define la masa es:

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} \alpha \tag{3.24}$$

donde  $S^2$  es una 2-esfera arbitraria contenida en la región de vacío.

Haciendo uso de esta definición es posible obtener ahora la masa de un espacio-tiempo axisimétrico y estacionario que contiene un agujero negro. Supongamos que  $\Sigma$  es una hipersuperficie espacial asintóticamente plana que intersecta al horizonte de eventos  $\mathcal{H}$  en una 2-esfera  $S^2$  que es la frontera de  $\Sigma$ . Aplicando la definición de Komar a este espacio-tiempo se obtiene que [25]:

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})n^a\xi^b dV - \frac{1}{8\pi} \int_{S^2} \epsilon_{abcd}\xi^{d;c} \quad (3.25)$$

donde  $T_{ab}$  es el tensor de energía-momento,  $T$  su traza,  $g_{ab}$  la métrica del espacio-tiempo y  $n^a$  es el vector normal unitario a  $\Sigma$ . La segunda integral es un término de borde que puede ser expresada (utilizando (3.13)) en función de la velocidad angular  $\Omega_H$  y el impulso angular  $J_H \equiv 1/16\pi \int_{S^2} \epsilon_{abcd}\phi^{d;c}$  :

$$\int_{S^2} \epsilon_{abcd}\xi^{d;c} = \int_{S^2} \epsilon_{abcd}\chi^{d;c} - 16\pi\Omega_H J_H \quad (3.26)$$

Asimismo la integral del miembro izquierdo de (3.26) queda expresada en función de la gravedad superficial:

$$\int_{S^2} \epsilon_{abcd}\chi^{d;c} = -2\kappa A \quad (3.27)$$

donde  $A = \int_{S^2} \epsilon_{ab}$  es el área del horizonte de eventos. Reemplazando (3.27) en (3.26) y luego en (3.25) obtenemos la siguiente expresión para  $M$ :

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})n^a\xi^b dV + \frac{1}{4\pi}\kappa A + 2\Omega_H J_H \quad (3.28)$$

Luego de un largo procedimiento se obtiene la variación de la integral de (3.28) resultando:

$$-\delta M - \frac{1}{4\pi}A\delta\kappa - 2J_H\delta\Omega_H + 2\delta \int_{\Sigma} T_{ab}n^a\xi^b dV \quad (3.29)$$

Plateando el caso de vacío<sup>2</sup> llegamos a:

$$\delta M = -\delta M - \frac{1}{4\pi}A\delta\kappa - 2J_H\delta\Omega_H + \frac{1}{4\pi}(A\delta\kappa + \kappa\delta A) + 2(J_H\delta\Omega_H + \Omega_H\delta J_H) \quad (3.30)$$

Despejando  $\delta M$  de (3.30) obtenemos la expresión para la primera ley:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A + \Omega_H\delta J_H \quad (3.31)$$

La primera ley es por lo tanto una identidad que relaciona los cambios en la masa  $M$ , el área  $A$  y el impulso angular  $J_H$  de un agujero negro estacionario cuando es perturbado.

La expresión obtenida (3.31) coincide con la expresión encontrada por Bekenstein (3.4); sin embargo el procedimiento para llegar a (3.31) es puramente geométrico, en el sentido que relaciona la geometría de los horizontes de Killing con las definiciones geométricas de masa e impulso angular. Cabe destacar que en su derivación no se hace ninguna hipótesis sobre la topología particular del horizonte. Como vimos en la sección 3.1.1, la derivación de Bekenstein hace uso explícito de la forma de la solución de Kerr-Newmann y no contiene el concepto de gravedad superficial.

Rememorando la primera ley de la termodinámica  $\delta E = T\delta S - P\delta V$ , la fórmula (3.31) aporta nuevos elementos para hacer una correspondencia entre el área del horizonte de eventos y la entropía y entre la gravedad superficial y la temperatura.

### 3.2.4. Segunda Ley

Como mencionamos en la sección 3.1, la segunda ley es el teorema del área de la relatividad general demostrado por primera vez por Hawking [74] que afirma que en cualquier proceso físico, el área del horizonte de eventos de cada agujero negro no decrece en el tiempo, es decir:

$$\delta A \geq 0 \quad (3.32)$$

La validez de este teorema es consecuencia de ciertas hipótesis acerca de la materia y de propiedades globales del espacio-tiempo. Estas hipótesis son:

---

<sup>2</sup>En el trabajo de Bardeen, Carter y Hawking [25] hacen el cálculo suponiendo la presencia de un fluido ideal en órbita circular en torno del agujero negro. Luego el cálculo fue generalizado para el caso que existan campos electromagnéticos de Maxwell y en teorías de Yang-Mills [67].

- El tensor de energía-momento debe satisfacer la condición de energía nula, esto es

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0 \quad (3.33)$$

siendo  $k^a$  un vector nulo.

- El espacio-tiempo  $(M, g_{ab})$  debe ser *fuertemente predecible asintóticamente*, lo cual significa que existe una subvariedad en  $M$  globalmente hiperbólica<sup>3</sup> que contiene a la región externa y al horizonte.

Una consecuencia directa de este teorema es que un agujero negro no puede bifurcarse en otros dos. Si consideramos un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M_3$  que diera lugar a otros dos de masas  $M_1$  y  $M_2$ , de acuerdo a la ley del área se verificaría que  $A_1 + A_2 \geq A_3 \Rightarrow M_3 \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \leq M_1 + M_2$ , pero por la conservación de la energía debería cumplirse que  $M_3 \geq M_1 + M_2$ , llegando de esta manera, a una contradicción.

### 3.2.5. Tercera Ley

La tercera ley no tiene el mismo status que las anteriores, en el sentido que no existe una demostración matemática de ella. Únicamente puede ser demostrada en el caso de un agujero negro de Kerr. La tercera ley afirma lo siguiente:

No es posible por intermedio de procedimiento alguno, reducir el valor de la gravedad superficial a cero, es decir que se verifica que  $\kappa > 0$ .

Existen razones para pensar que esta ley es válida. Del significado visto en la sección 3.2.1 para la gravedad superficial es obvio que no puede ser nula ni negativa, dado que para un observador distante el agujero negro no produciría atracción o bien actuaría como una fuente repulsiva. Otro argumento a favor es que si se pudiera ir reduciendo  $\kappa$  a cero por una secuencia finita de operaciones, entonces presumiblemente podría continuarse con este proceso hasta obtener una singularidad desnuda, violando entonces el carácter globalmente hiperbólico del espacio-tiempo [25].

---

<sup>3</sup>El significado de globalmente hiperbólico es que dadas ciertas condiciones iniciales en una superficie de Cauchy, es posible predecir cualquier evento futuro o pasado del espacio-tiempo.

La ley termodinámica que se corresponde con la tercera ley, afirma que la temperatura de un sistema termodinámico es siempre mayor que el cero absoluto.

A modo de resumen en la tabla 3.1 comparamos las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros con las correspondientes leyes de la termodinámica.

LEY	TERMODINÁMICA	AGUJEROS NEGROS
Cero	$T$ constante en equilibrio térmico	$\kappa$ constante en el horizonte
Primera	$dE = TdS - PdV$	$dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Omega_H dJ_H$
Segunda	$\delta S \geq 0$ en todo proceso	$\delta A \geq 0$ en todo proceso
Tercera	$T > 0$ en todo proceso	$\kappa > 0$ en todo proceso

Tabla 3.1: Comparación entre las leyes de la termodinámica y la leyes de la mecánica de agujeros negros.

Existe por lo tanto una correspondencia entre las magnitudes termodinámicas y las magnitudes que caracterizan a un agujero negro. Si a esto le agregamos el cálculo cuántico que nos permite obtener la temperatura de un agujero negro  $T = \kappa/2\pi$  que comentaremos en la sección 3.6, la primera ley  $\delta M = \kappa/2\pi\delta(A/4) + \Omega_H\delta J_H$  nos lleva a concluir que la entropía de un agujero negro en relatividad general es

$$S = \frac{A}{4} \tag{3.34}$$

En las sección 3.7 describiremos el mecanismo por el cual en cierta teoría de supercuerdas se obtiene la ley del área para la entropía, a través del conteo de estados microscópicos. En las secciones siguientes nos dedicaremos a generalizar el concepto de entropía en teorías más generales de gravedad. En particular en las secciones 3.4 y 3.5 calculamos la gravedad superficial de agujeros negros en la teoría de Gauss-Bonnet, que junto con la expresión para la masa nos permitirá mostrar que la expresión (3.34) para la entropía

no se verifica si uno asume como válida la expresión para la primera ley. Esto no debiera sorprender ya que al derivar las leyes de la mecánica de agujeros negros hemos usado argumentos que provienen de la relatividad general. Consiguientemente en la próxima sección delinearemos la forma de la primera ley y la manera de definir la entropía en otras teorías de gravedad, que nos proveerá el marco adecuado para justificar el cálculo explícito de la entropía que hemos obtenido para las soluciones estudiadas en el primer capítulo.

### 3.3. Leyes de la mecánica de agujeros negros en teorías más generales de gravedad

Cuando se pretende extender la leyes de la mecánica de agujeros negros a otras teorías covariantes de gravedad uno debe lidiar con los conceptos introducidos previamente, esto son gravedad superficial, horizonte de Killing y área del horizonte de eventos. Sin embargo para definir la masa e impulso angular es necesario introducir nuevos conceptos que están relacionados con la geometría y con el teorema de Noether: las cargas y corrientes de Noether asociadas permitirán relacionar la masa, el impulso angular, la gravedad superficial y la entropía para dar lugar a una expresión corregida para la primera ley.

Siguiendo el mismo orden que el de la sección previa, veremos primero que la ley cero no es sustancialmente modificada.

#### 3.3.1. Extensión de la ley cero

En el contexto de una teoría de gravedad métrica arbitraria el enunciado del teorema que corresponde a la ley cero es el siguiente [45, 113]:

Para cualquier agujero negro que sea estático o bien estacionario y axisimétrico, la gravedad superficial  $\kappa$  es constante sobre el horizonte de eventos.

Es decir que comparada con la ley cero en relatividad general, aquí se agrega la hipótesis que el agujero negro sea axisimétrico. Esta condición está relacionada con una simetría extra que posee la teoría. Se dice que un agujero negro estacionario y axisimétrico en un espacio-tiempo de dimensión



$n$  tiene la *propiedad de ortogonalidad  $t - \phi$* , si los planos generados por  $\xi^a$  y por el campo de Killing rotacional  $\phi^a$  (ver (3.13)) son ortogonales a una familia de superficies  $\Sigma_{n-2}$  de  $(n - 2)$  dimensiones. En este caso existe una simetría discreta de reflexión con respecto a estas superficies  $\Sigma_{n-2}$ .

En este punto debemos introducir un nuevo concepto que aparecerá repetidas veces en el contexto de otras teorías de gravedad. Un *horizonte de Killing bifurcado* es un par de superficies nulas  $\mathcal{K}_a$  y  $\mathcal{K}_b$  que se intersectan en una superficie de dimensión  $(n - 2)$  de tipo espacial  $\mathcal{C}$  (llamada la *superficie de bifurcación*), de tal manera que  $\mathcal{K}_a$  y  $\mathcal{K}_b$  son horizontes de Killing con respecto al mismo campo de Killing  $\xi^a$ . De esto se deduce que entonces  $\xi^a$  se anula en  $\mathcal{C}$ . La inversa también es válida: si un campo de Killing  $\xi^a$  se anula en una superficie de dos dimensiones de tipo espacial  $\mathcal{C}$ , entonces  $\mathcal{C}$  es la superficie de bifurcación de un horizonte de Killing bifurcado asociado con  $\xi^a$  [126].

Una consecuencia de la ley cero demostrada en [113] es que si  $\kappa \neq 0$ , entonces en la extensión maximal de un espacio-tiempo que representa a un agujero negro, el horizonte de eventos consta de una rama que es un horizonte de Killing bifurcado. De ahora en más supondremos entonces que  $\kappa \neq 0$ , y si apostamos a la validez de la tercera ley se cumpliría que  $\kappa > 0$ , y por lo tanto los agujeros negros que analicemos tendrán horizontes de Killing bifurcados.

### 3.3.2. Corrientes y cargas de Noether en teorías de gravedad covariantes

Definamos antes que todo, el tipo de teorías en el cual será válida esta ley. Consideraremos teorías Lagrangianas definidas en una variedad orientada  $M$  de dimensión  $n$ , cuyo lagrangiano es función de cierta métrica  $g_{ab}$  (con signatura Lorentziana), de otros campos de materia  $\psi$ , y de sus derivadas. Indistintamente notaremos como  $\phi$  a  $(g_{ab}, \psi)$ . Llamaremos teorías de gravedad covariantes a aquellas teorías que son invariantes ante difeomorfismos, es decir que supondremos que el Lagrangiano verificará la siguiente fórmula:

$$\mathbf{L}(f^*(\phi)) = f^*\mathbf{L}(\phi) \quad (3.35)$$

siendo  $f^*$  la acción inducida en los campos  $\phi$  debida a un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ .

Se puede demostrar [83] que el Lagrangiano más general que verifique (3.35) es una  $n$ -forma que depende de los siguientes términos:

$$g_{ab}, R_{bcde}, R_{bcde;a_1}, \dots, R_{bcde;a_1\dots a_m}, \psi, \psi_{;a_1}, \dots, \psi_{;a_1\dots a_l} \quad (3.36)$$

### 3.3. Leyes de la mecánica de agujeros negros en teorías más generales de gravedad

---

donde el símbolo “ ; ” denota la derivada covariante asociada con  $g_{ab}$  y  $R_{bcde}$  es la curvatura de  $g_{ab}$ . Por lo tanto un número arbitrario pero finito de las derivadas de  $R_{bcde}$  y de  $\psi$  están permitidas para la validez de (3.35).

Dos ejemplos conocidos de estas teorías son los correspondientes Lagrangianos de relatividad general y de Gauss-Bonnet. En el primer caso el Lagrangiano es una 4-forma  $\mathbf{L}_4$  y una 5-forma  $\mathbf{L}_5$  en el caso de Gauss-Bonnet:

$$\mathbf{L}_4 = \frac{1}{16\pi} \epsilon_4 R \quad (3.37)$$

$$\mathbf{L}_5 = \epsilon_5 \left[ \frac{1}{16\pi} R + \alpha (R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2) \right] \quad (3.38)$$

donde  $\epsilon_4$  y  $\epsilon_5$  son la 4-forma y la 5-forma de volumen respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento  $\mathbf{E} = 0$ , se obtienen de la variación del Lagrangiano:

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{E}(\phi) \delta \phi + d\Theta(\phi, \delta \phi) \quad (3.39)$$

Usualmente las manipulaciones de (3.39) se hacen con la integral correspondiente que tiene la acción de la teoría, y el segundo término que contiene a la  $(n-1)$ -forma  $\Theta$  es un término de superficie que no influye en las ecuaciones de movimiento. En los siguientes párrafos mostraremos esquemáticamente como este término lleva a la primera ley.

Definamos primero la  $(n-1)$ -forma  $\Omega$  en base a dos variaciones arbitrarias en los campos  $\phi$ :

$$\Omega(\phi, \delta_1 \phi, \delta_2 \phi) = \delta_2 \Theta(\phi, \delta_1 \phi) - \delta_1 \Theta(\phi, \delta_2 \phi) \quad (3.40)$$

Por otro lado la invariancia ante difeomorfismo de  $\mathbf{L}$  implica que:

$$\mathcal{L}_\chi \mathbf{L} = d(\chi \cdot \mathbf{L}) \quad (3.41)$$

siendo  $\chi$  el campo de Killing y el punto “  $\cdot$  ” denota la contracción del índice del vector  $\chi$  con el primer índice de la  $n$ -forma diferencial  $\mathbf{L}$ . A cada  $\chi$  es posible asignarle una  $(n-1)$ -forma  $\mathbf{j}$  (corriente de Noether) definida por:

$$\mathbf{j} = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\chi \phi) - \chi \cdot \mathbf{L} \quad (3.42)$$

de tal manera que  $\mathbf{j}$  está construida localmente por los campos que aparecen en  $\mathbf{L}$  y por  $\chi$ . Esta corriente satisface que [89]

$$d\mathbf{j} = -\mathbf{E} \mathcal{L}_\chi \phi \quad (3.43)$$

es decir que  $\mathbf{j}$  es cerrada cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento:

$$\mathbf{j} = d\mathbf{Q} \quad (3.44)$$

$\mathbf{Q}$  es la llamada carga de Noether correspondiente a  $\chi$ , siendo  $\mathbf{Q}$  una  $(n-2)$ -forma. Variando la expresión (3.42) para  $\mathbf{j}$ , manteniendo fijo a  $\chi$ , se obtiene:

$$\delta\mathbf{j} = \delta[\Theta(\phi, \mathcal{L}\phi)] - \chi \cdot \delta\mathbf{L} \quad (3.45)$$

Haciendo uso de (3.39) y suponiendo que se satisfacen las ecuaciones de movimiento  $\mathbf{E} = 0$ , la expresión (3.45) es:

$$\delta\mathbf{j} = \delta[\Theta(\phi, \mathcal{L}\phi)] - \mathcal{L}_\chi[\Theta(\phi, \delta\phi)] + d(\chi \cdot \Theta) = \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.46)$$

donde hemos usado (3.40) para llegar a la última igualdad de (3.46).

A modo de ejemplo mostraremos como son las expresiones de la corriente de Noether  $\mathbf{j}$  y la carga de Noether  $\mathbf{Q}$  para la relatividad general y para la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet. Reemplazando los Lagrangianos  $\mathbf{L}_4$  (3.37) y  $\mathbf{L}_5$  (3.38) en (3.39) y luego en (3.42), obtenemos las componentes  $j_{abc}$  de la 3-forma  $\mathbf{j}_3$  (relatividad general) y las componentes  $j_{abcd}$  de la 4-forma  $\mathbf{j}_4$  (Gauss-Bonnet):

$$j_{abc} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{dabc} (\chi^{[d;e]})_{;e} \quad (3.47)$$

$$j_{abcd} = \epsilon_{abcd} \left( \left( \frac{1}{8\pi} + 4\alpha R \right) \chi^{[e;f]} + 16\alpha \chi^f_{;g} R^{e]g} + 4\alpha R^{fegh} \chi_{h;g} \right)_{;f} \quad (3.48)$$

Luego reemplazando en (3.44) e integrando, obtenemos las componentes  $Q_{ab}$  de la 2-forma  $\mathbf{Q}_2$  (relatividad general) y las componentes  $Q_{abc}$  de la 3-forma  $\mathbf{Q}_3$  (Gauss-Bonnet):

$$Q_{ab} = -\frac{1}{16\pi} \epsilon_{abcd} \chi^{d;c} \quad (3.49)$$

$$Q_{abc} = -\epsilon_{deabc} \left( \frac{1}{8\pi} \chi^{e;d} + 2\alpha (R \chi^{e;d} + 4\chi^{[d;f]} R^e_f + R^{defh} \chi_{h;f}) \right) \quad (3.50)$$

### 3.3.3. Primera ley y entropía generalizada

La expresión (3.46) para  $\delta\mathbf{j}$  es uno de los ingredientes fundamentales para demostrar la primera ley. El otro ingrediente proviene del hecho de que la

forma  $\Omega$  provee la estructura para definir al Hamiltoniano  $H$ , que ante una variación en los campos  $\phi$ , la variación del Hamiltoniano esta dada por [89]:

$$\delta H = \int_{\Sigma} \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_{\chi}\phi) = \int_{\Sigma} [\delta\mathbf{j} - d(\chi \cdot \Theta)] \quad (3.51)$$

siendo  $\Sigma$  una superficie de Cauchy. En la última igualdad hemos usado la expresión (3.46) para  $\Omega$ . Usando la fórmula (3.44), la variación del Hamiltoniano queda expresada como un término de superficie, siempre que se satisfagan las ecuaciones de movimiento:

$$\delta H = \int_{\Sigma} d[\delta\mathbf{Q} - \chi \cdot \Theta] \quad (3.52)$$

Recordando que  $\mathbf{j} = d\mathbf{Q}$ , la expresión (3.52) muestra que a menos del término de superficie  $d(\chi \cdot \Theta)$ , la corriente de Noether  $\mathbf{j}$  juega el rol de una densidad Hamiltoniana. Si ahora suponemos la existencia de un horizonte de Killing bifurcado  $\mathcal{C}$ , con  $\chi$  normal al horizonte de eventos, e integramos la expresión anterior en la superficie  $\Sigma$ , extendida desde  $\mathcal{C}$  hasta infinito, obtenemos:

$$\delta H_{\infty} = \delta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{Q} \quad (3.53)$$

donde hemos usado que el vector de Killing  $\chi$  se anula en  $\mathcal{C}$ . La magnitud  $H_{\infty}$  es la energía canónica conjugada asociada a  $\chi$  cuando el espacio-tiempo es asintóticamente plano. Si el vector de Killing es de la forma (3.13), la variación corresponde a  $\delta H_{\infty} = \delta M - \Omega_H \delta J_H$ , donde  $M$  y  $J_H$  representan la energía y el impulso angular del agujero negro respectivamente:

$$\delta M = \int_{\infty} (\delta\mathbf{Q}(\xi) - \xi \cdot \Theta) \quad (3.54)$$

$$\delta J_H = - \int_{\infty} \delta\mathbf{Q}(\phi) \quad (3.55)$$

donde  $\xi$  y  $\phi$  corresponden al vector de Killing (3.13)  $\chi = \xi + \Omega\phi$ . Obtenemos entonces, la expresión para la primera ley:

$$\delta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{Q} = \delta M - \Omega_H \delta J_H \quad (3.56)$$

Si bien  $\mathbf{Q}$  puede ser calculada explícitamente si uno tiene el lagrangiano  $L$ , es posible encontrar una expresión más general para la carga de Noether. No es nuestra intención mostrar el desarrollo que da lugar a esa expresión, pero remitimos al lector al trabajo [83] para ver los detalles del cálculo. El resultado es:

$$\delta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{Q} = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S \quad (3.57)$$

donde  $\kappa$  es la gravedad superficial y  $S$  es la entropía generalizada:

$$S \equiv -2\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{\delta L}{\delta R_{abcd}} n_{ab} n_{cd} \quad (3.58)$$

En la última expresión  $n_{ab}$  es el vector binormal a  $\mathcal{C}$  (normalizado de tal manera que  $n_{ab}n^{ab} = -2$ ),  $L$  es el Lagrangiano visto ahora como una densidad escalar y no como una  $n$ -forma, y la derivada se calcula tomando al tensor de Riemann como un campo independiente de la métrica. De esta manera la primera ley queda expresada de la manera usual:

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S - \Omega_H \delta J_H \quad (3.59)$$

En el caso de la relatividad general  $L_4 = 1/(16\pi)R = 1/(16\pi)g^{ef}g^{hi}R_{ahfi}$  se obtiene:

$$\frac{\delta L_4}{\delta R_{abcd}} = \frac{1}{16\pi} g^{ab} g^{cd} \quad (3.60)$$

y para la entropía la expresión ya conocida:

$$S \equiv -2\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{\delta L_4}{\delta R_{abcd}} n_{ab} n_{cd} = -\frac{1}{8} \int_{\mathcal{C}} g^{ab} g^{cd} n_{ab} n_{cd} = \frac{A}{4} \quad (3.61)$$

Para la teoría de Gauss-Bonnet el Lagrangiano es

$$L_5 = 1/(16\pi)R + \alpha(R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}) \quad (3.62)$$

y su derivada es:

$$\frac{\delta L_5}{\delta R_{abcd}} = \frac{1}{16\pi} g^{ab} g^{cd} + 2\alpha(Rg^{ab}g^{cd} + R^{abcd} - 4g^{bd}R_e{}^a{}_{c}{}^e) \quad (3.63)$$

La entropía resultante es

$$S \equiv \frac{A}{4} + 8\pi\alpha \int_{\mathcal{C}} \mathcal{R}_3 \quad (3.64)$$

con

$$\mathcal{R}_3 = \frac{1}{2}n_{ab}(4R_e{}^{ce}n_c{}^b - R n^{ab} - R^{abcd}n_{cd}) \quad (3.65)$$

Es posible identificar  $\mathcal{R}_3$  con el escalar de curvatura de la superficie de bifurcación  $\mathcal{C}$  [125].

No ha sido demostrada la segunda ley en estas teorías mas generales de gravedad. Sin embargo hay indicios que en ciertas teorías podría seguir siendo válida. La expresión (3.57) conduce a que la variación de entropía es proporcional al flujo de la corriente de Noether  $\mathbf{j}$ :

$$\Delta S = 2\pi \int_{\mathcal{H}} \mathbf{j}[\xi^a] \quad (3.66)$$

siendo  $\xi^a$  un campo vectorial que coincide con el campo de killing normal a  $\mathcal{H}$ . En el caso que sea la corriente de Noether conjugada a una traslación temporal, puede ser interpretada como una densidad de energía-momento y en teorías que tengan un flujo de energía positivo, la segunda ley seguiría siendo válida, es decir  $\Delta S \geq 0$ . En la teoría de Gauss-Bonnet la segunda ley sigue siendo válida, como lo veremos del cálculo explícito de la entropía.

En las dos secciones siguientes mostraremos los resultados termodinámicos obtenidos para la teoría de Gauss-Bonnet en vacío y Gauss-Bonnet acoplada con cargas de Born-Infeld [4] y de Hofmann-Infeld [5]. En particular veremos explícitamente como es la temperatura de estos agujeros negros y su tiempo de evaporación.

### 3.4. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet en vacío

Recordemos que las ecuaciones de movimiento en la teoría en Gauss-Bonnet se satisfacen escogiendo un ansatz del tipo

$$ds^2 = -f_\alpha(r)dt^2 + \frac{1}{f_\alpha(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\chi^2 + r^2 \sin^2\theta \sin^2\chi d\varphi^2 \quad (3.67)$$

En este caso la gravedad superficial es

$$\kappa = \frac{1}{2} |g_{00,r}|_{r=r_H} \quad (3.68)$$

como se muestra en el Apéndice B. Y por lo tanto la temperatura es:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} |g_{00,r}|_{r=r_H} = \frac{1}{4\pi} |f_\alpha(r),r|_{r=r_H} \quad (3.69)$$

De la solución de Gauss-Bonnet en vacío (2.23) con  $\Lambda = 0$  obtenemos  $r_h = (\frac{8m}{3\pi} - 2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ . Y por lo tanto la gravedad superficial de esta geometría resulta

$$\kappa = \frac{(\frac{8m}{3\pi} - 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha(1 + \frac{4m}{3\pi\alpha})} = \frac{r_h}{4\alpha + r_h^2}$$

y la temperatura de Hawking esta dada por

$$T = \frac{r_h}{2\pi(4\alpha + r_h^2)} \quad (3.70)$$

Cabe notar que la temperatura de agujeros negros más grandes ( $r_h \rightarrow \infty$ ) tiende a cero. Este comportamiento es el mismo que ocurre para un agujero negro de Schwarzschild. Un resultado destacable es que a diferencia del caso de Schwarzschild, para agujeros negros pequeños ( $r_h \rightarrow 0$  or  $m \rightarrow m_c$ ) la temperatura también tiende a cero y no habría radiación de Hawking en este caso (Fig. 3.3). Por otro lado, cuando  $\alpha \rightarrow 0$  en la ecuación (3.70) recuperamos el resultado de relatividad general, dado que en este caso la temperatura es proporcional a la inversa del radio.

Pasemos ahora a analizar la estabilidad termodinámica de las soluciones. La magnitud que permite clasificar la estabilidad es el calor específico, que viene dado por:

$$c = \frac{\partial m}{\partial r_h} \left( \frac{\partial T}{\partial r_h} \right)^{-1} \quad (3.71)$$

Para relacionar el calor específico con la estabilidad del agujero negro pensemos en el siguiente experimento pensado: consideremos un agujero negro rodeado por una fuente infinita de radiación de cuerpo negro a la misma temperatura que el agujero negro. Supongamos entonces que debido a una fluctuación estadística el agujero negro absorbe más energía que la que emite por radiación en cierto instante. Esto aumentará la tasa de absorción y en

### 3.4. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet en vacío

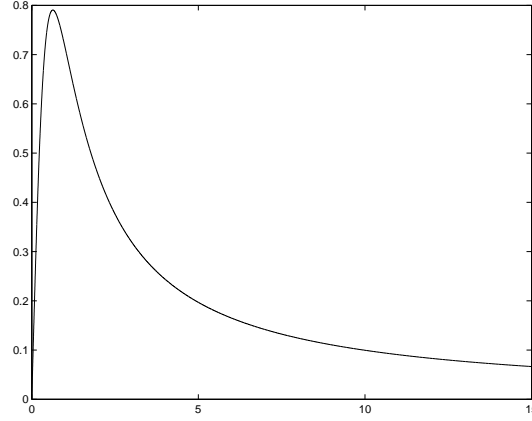


Figura 3.3: Temperatura de Hawking en función del radio del horizonte [ $\alpha = 0,1, \Lambda = 0$ ].

el caso que el calor específico sea negativo, la temperatura del agujero negro disminuirá, disminuyendo entonces la tasa de emisión de radiación. Si el reservorio de radiación de cuerpo negro se mantiene a temperatura constante, el agujero negro crecerá indefinidamente. El caso opuesto al anterior se da cuando debido a una fluctuación estadística, el agujero negro emite un poco más por radiación que lo que absorbe en un instante dado. En esta situación la temperatura continuará aumentando y consiguientemente la tasa de radiación, hasta que finalmente el agujero negro se evapore. En este sentido es que decimos que el agujero negro es inestable. Todo lo contrario ocurre cuando el calor específico es positivo: en tal caso un cambio en la absorción se ve compensado por un cambio en la tasa de radiación, y el agujero negro es estable.

Para las soluciones de agujero negro de Gauss-Bonnet el calor específico resultante es:

$$c = \frac{\partial m}{\partial r_h} \left( \frac{\partial T}{\partial r_h} \right)^{-1} = \frac{3\pi^2 r_h (4\alpha + r_h^2)^2}{2(4\alpha - r_h^2)} \quad (3.72)$$

De esta ecuación observamos que la posición  $r_0 = \sqrt{4\alpha}$  ( $m = 3\pi\alpha$ ), donde el calor específico cambia de signo (Fig. 3.4), representa un punto de transición (en la figura 3.3 este punto corresponde al máximo). Cuando  $r_h < r_0$  el calor específico es positivo y el agujero negro es estable; mientras que en el rango  $r_h > r_0$  el calor específico es negativo y el agujero negro es, en este sentido,



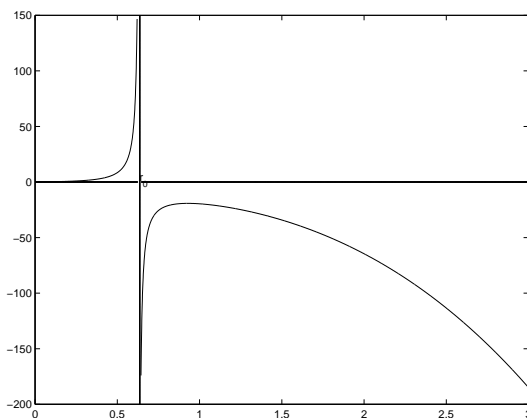


Figura 3.4: Calor específico del agujero negro en función del radio del horizonte [ $\alpha = 0,1$ ,  $\Lambda = 0$ ].

inestable. La temperatura del punto de transición es

$$T_0 = \frac{1}{8\pi\sqrt{\alpha}} \quad (3.73)$$

Aquí surge una diferencia notable con respecto al calor específico de una solución de agujero negro de relatividad general, esto es, que el calor específico  $c_{RG}$  en la gravedad de Einstein es siempre negativo  $c_{RG} = -3\pi^2 r_H^3/2$  y por lo tanto los agujeros negros de Schwarzschild son inestables. Observemos que el valor del punto de transición ( $\sqrt{4\alpha}$ ) es la escala en la cual las correcciones que introduce Gauss-Bonnet a la relatividad general son relevantes.

En lo que respecta a la entropía de esta solución de agujero negro, la misma puede ser calculada con la expresión (3.59) obtenida para la primera ley de un agujero negro no-rotante

$$T \delta S = \delta m \quad (3.74)$$

donde  $\delta m = 3\pi/4 r_h \delta r_h$ . Obteniendo entonces para la entropía

$$S = \frac{\pi^2}{2} r_h^3 + 6\pi^2 \alpha r_h \quad (3.75)$$

En el límite  $\alpha \rightarrow 0$  la entropía es proporcional al área del horizonte de eventos, coincidiendo con la expresión (3.61), dado que el área del horizonte

### 3.4. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet en vacío

de eventos es en este caso el área de una 3-esfera  $S_3 = 2\pi^2 R^3$ . Por otro lado, el segundo término de la ecuación (3.75) es una consecuencia del término de Gauss-Bonnet. Este término se obtiene de la integración directa en las variables angulares  $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\chi$  del escalar de curvatura  $\mathcal{R}_3$  para la solución de agujero negro, sobre el horizonte de eventos, como vimos en la sección anterior. Este ejemplo concreto muestra entonces la validez de (3.64) para el caso de la teoría de Gauss-Bonnet. También es posible ver que la variación de esta entropía verifica la segunda ley. Si tomamos la derivada de la entropía a lo largo de la dirección del vector de Killing  $\xi$ , obtenemos:

$$\mathcal{L}_\xi S = \left( \frac{\pi^2}{2} r_h^3 + 6\pi^2 \alpha r_h \right) \theta_{-} \xi^u \quad (3.76)$$

donde  $\theta_{-} = 3r_{,u}/r|_{r_h}$  es una geodésica radial nula hacia el futuro, y  $u$  es una de las coordenadas nulas dirigida hacia el futuro. De la expresión (3.76) observamos que en la dirección futura saliente del horizonte  $\theta_{-} \leq 0$  y  $\xi^u \leq 0$  se verifica  $\mathcal{L}_\xi S \geq 0$ , resultando que la entropía es una función no-decreciente [104]. La versión revertida temporalmente es que en la dirección futura entrante del horizonte la entropía es una función no-creciente.

Además, haciendo uso de la ley de Stefan-Boltzmann en cinco dimensiones para calcular el flujo de la radiación térmica, obtenemos aproximadamente el tiempo  $\Delta t$  de evaporación del agujero negro; a saber

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{3\pi}{4} r_h \frac{dr_h}{d\tau} \propto T^5 r_h^3 \quad (3.77)$$

Haciendo uso de la expresión de la temperatura de Hawking (3.70), de la relación  $m = 3\pi/8(r_H^2 + 2\alpha)$  e integrando (3.77) encontramos que el tiempo de evaporación de los agujeros negros de Gauss-Bonnet es infinito. La expresión para  $\tau$  es:

$$\tau(r_H) \sim \int_{r_H}^{r_0} ds \frac{(4\alpha + s^2)^5}{s^7} \quad (3.78)$$

siendo  $r_0$  el tamaño inicial del agujero negro. La divergencia para  $\tau$  proviene directamente de la dependencia lineal entre la temperatura y el radio del horizonte para agujeros negros pequeños. Por lo tanto, los agujeros negros de Gauss-Bonnet son eternos (Fig. 3.5). Esta característica es la diferencia sustancial con respecto a la relatividad general, ya que en este caso el tiempo de evaporación es finito. En la expresión (3.78) si hacemos tender  $\alpha$  a cero, obtenemos el resultado de relatividad general  $\tau_{RG} \sim r_0^4 - r_H^4$  (ver figura 3.6).

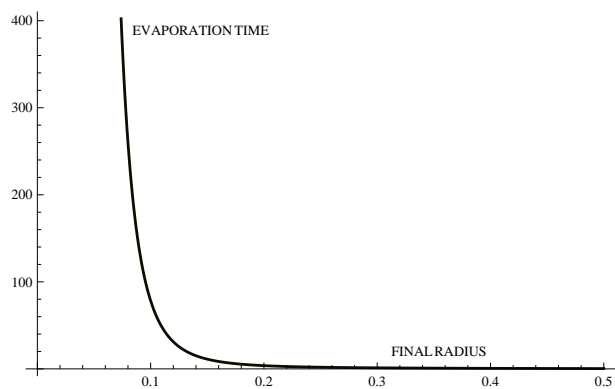


Figura 3.5: Tiempo de evaporación de un agujero negro de Gauss-Bonnet en función de su radio final  $r_H$  [ $\alpha = 0,1$ ,  $r_0 = 1$ ].

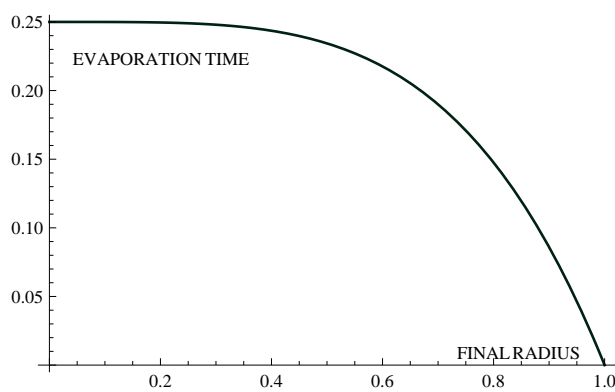


Figura 3.6: Tiempo de evaporación de un agujero negro de Schwarzschild en función de su radio final  $r_H$  [ $r_0 = 1$ ].

### 3.4. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet en vacío

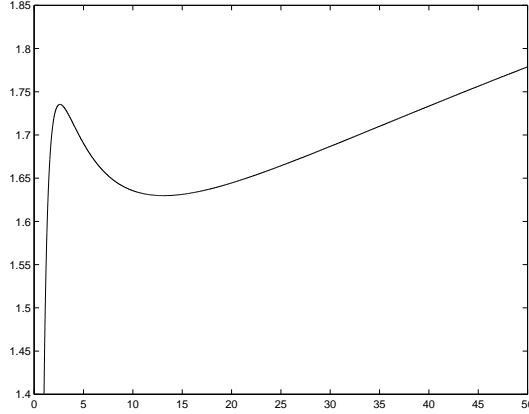


Figura 3.7: Temperatura de Hawking para el caso de constante cosmológica en función de la masa [ $\alpha = 0,1$ ,  $\Lambda = -0,6$ ].

Asimismo encontramos que la termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet en presencia de una constante cosmológica negativa es consistente con los resultados conocidos de las soluciones de la teoría de la gravedad de Einstein en el rango apropiado. Ciertamente, el Lagrangiano de Lanczos-Gauss-Bonnet representa correcciones a pequeña escala a la relatividad general, que empiezan a ser relevantes a escalas comparables con  $l_\alpha = \sqrt{4\alpha}$ , las cuales podemos denominar como *escala de Lanczos-Gauss-Bonnet*. A la inversa, el valor de la constante cosmológica  $\Lambda$  introduce otra escala, dada por  $l_\Lambda \sim \Lambda^{-2}$ , que define la escala donde los términos de constante cosmológica empiezan a ser dominantes. Por lo tanto, podemos identificar la región limitada por el máximo y el mínimo de la figura 3.7 como la escala donde los resultados provenientes de la relatividad general concuerdan con el comportamiento termodinámico de la solución de Gauss-Bonnet. Consecuentemente, para grandes escalas (agujeros negros grandes), el comportamiento se aproxima bien con la solución del agujero negro AdS-Schwarzschild, mientras que las correcciones a pequeña escala dominan en el rango  $l_\alpha$ .

Dentro de este contexto, podemos hacer notar que las propiedades termodinámicas de la geometría de agujero negro que aparece en el caso  $\Lambda\alpha = -\frac{3}{4}$  (con  $\Lambda < 0$ ) exhibe características particulares. De hecho, como mencionamos en el capítulo 2, este caso es el análogo al del agujero negro tridimensional BTZ, dado que el diagrama de fase que involucra la temperatura y la masa, es una función monótona (ver Fig. 3.8), describiendo una fase tal

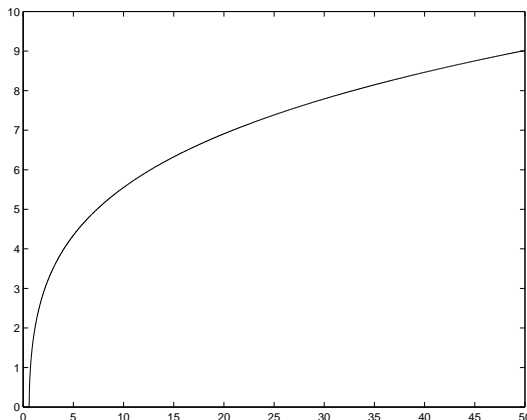


Figura 3.8: Temperatura de Hawking para el caso  $\Lambda\alpha = -\frac{3}{4}$  en función de la masa [ $\alpha = 0,1$ ,  $\Lambda = -7,5$ ].

que el calor específico es siempre positivo. En cierto sentido, este caso puede ser considerado como una transición y por lo tanto puede ser interesante estudiar su estabilidad. La temperatura de estos agujeros negros está dada por

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{r_h}{4\alpha} \quad (3.79)$$

La misma tiende a cero para valores grandes de  $\alpha$  y se anula idénticamente para la masa crítica  $m = \pi\alpha$ .

### 3.5. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet cargados

Para las soluciones (2.44) y (2.55) encontradas en el capítulo 2 correspondientes a agujeros negros cargados, la expresión (B.10) para la temperatura, en el caso de constante cosmológica nula, puede ser escrita como:

$$T = \frac{1}{4\pi} |g_{\alpha}(r),r|_{r=r_+} = \frac{r_+ - \frac{2b^2}{3} h_b(r_+)}{2\pi(l_{\alpha}^2 + r_+^2)} \quad (3.80)$$

La expresión (3.80) corresponde a la temperatura de las soluciones de agujero negro cargado, con  $\epsilon = -1$  y  $\Lambda = 0$  como habíamos mencionado; esta solución

### 3.5. Termodinámica de los agujeros negros de Gauss-Bonnet cargados

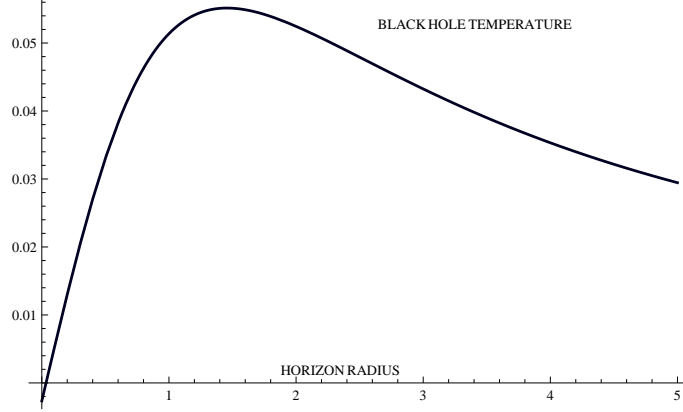


Figura 3.9: Temperatura del agujero negro de Born-Infeld en función del radio del horizonte [  $\alpha = 0,5$ ,  $e = 1$  ]; representando la curva calórica.

es asintóticamente plana, como puede ser verificado por las expansiones (2.42) y (2.58). De hecho, el régimen de relatividad general se recupera en el límite  $l_\alpha/r_+ \rightarrow 0$ , donde la expresión para la temperatura adquiere la forma  $T \sim 1/r_+$ . Recordemos que las soluciones con cargas de Born-Infeld, corresponden a la función  $h_b(r) = \sqrt{r^6 + l_b^6} - r^3$ , y que en el caso de Hoffmann-Infeld es  $h_b(r) = \frac{1}{2}r^3 \log(1 + l_b^6 r^{-6})$ . El comportamiento típico de la temperatura en estos casos se muestra en las figuras 3.9, 3.10 y 3.11.

Los efectos más interesantes ocurren en los agujeros negros con carga de Hoffmann-Infeld como se puede ver en la figuras. El calor específico cambia de signo debido a las correcciones a distancias cortas impuestas por los modelos de Lovelock y de Hoffmann-Infeld. El signo del calor específico nos permite inferir cuales son las regiones de estabilidad termodinámica (donde el agujero negro puede estar en equilibrio térmico con el ambiente). La tasa de evaporación de estas soluciones cargadas se obtiene de (3.80), integrando el flujo de energía como vimos en la sección anterior. Usando nuevamente la ley de Stefan-Boltzmann en cinco dimensiones, obtenemos que el tiempo de evaporación es:

$$\tau(r_+) \sim \int_{r_+}^{r_0} ds \frac{(l_\alpha^2 + s^2)^5}{s^3 (s - \frac{2}{3}b^2 h_b(s))^4} \quad (3.81)$$

Este tiempo corresponde al tiempo necesario para que el agujero negro se evapore, empezando con un radio inicial  $r_0$  y terminando con un tamaño  $r_+$ .

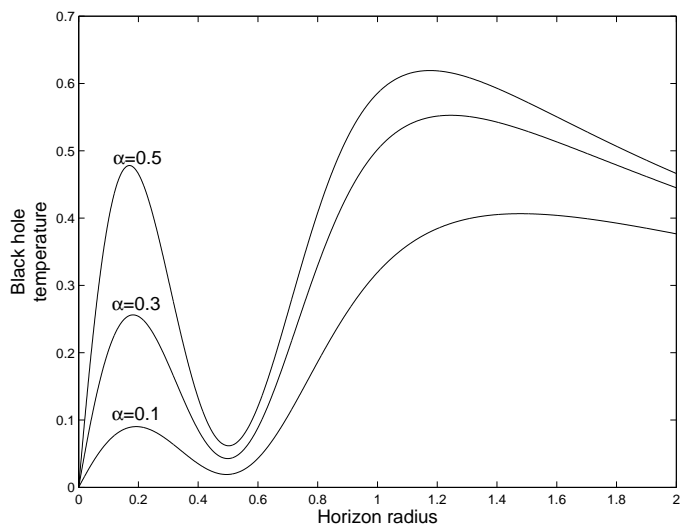


Figura 3.10: Temperatura del agujero negro de Hoffmann-Infeld en función del radio del horizonte [  $b = 2, e = 1$  ]; representando la curva calórica.

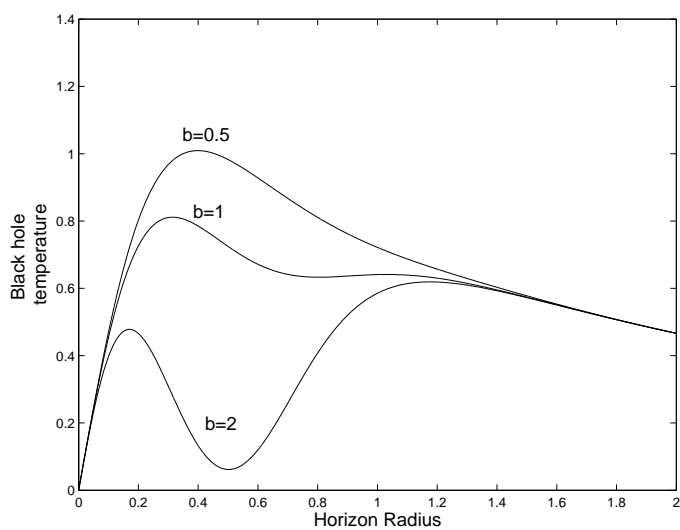


Figura 3.11: Temperatura del agujero negro de Hoffmann-Infeld en función del radio del horizonte [  $\alpha = 0,05, e = 1, B = 1$  ]; representando la curva calórica.

Cabe destacar que  $r_+$  es una función monótona de la masa (energía)  $m$ . El símbolo  $\sim$  da cuenta de la presencia en la fórmula (3.81) de factores positivos que dependen de la constante de Stefan-Boltzmann en cinco dimensiones.

Este resultado lleva a la existencia de un *plateau* como se observa en la figura 3.12, mostrando una transición rápida entre las dos escalas dadas por la ubicación del primer máximo y del mínimo en la figura 3.10<sup>4</sup>. El tiempo de evaporación es usualmente estudiado a través del análisis de la cantidad  $dm/d\tau$ ; cabe destacar que la figura 3.12 (que muestra el tiempo  $\tau$  requerido para alcanzar el radio  $r_+$ ) da básicamente la misma información: esto es debido a que el *plateau* de dicho gráfico corresponde a aquellas escalas en las cuales la transición es abrupta y por lo tanto la cantidad  $dm/d\tau$  presentaría un extremo localizado en tal región. Además, como estamos interesados en estudiar las escalas en las cuales ocurre esta transición, la figura 3.12 nos resulta conveniente, ya que muestra explícitamente el lugar en el cual ocurren estos drásticos efectos.

Un interesante análisis de la termodinámica en teorías de gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet y en teorías de Chern-Simons fue realizado en las referencias [11, 12, 13, 54]. Para hacer contacto con los resultados de la gravedad de Chern-Simons, consideremos nuevamente el caso  $l_\alpha^2 = -l_\Lambda^2$ . En esta situación la fórmula de la temperatura en función del radio del horizonte  $r_+$  adquiere un término lineal dominante en  $r_+$ :

$$T = \frac{r_+}{2\pi l_\alpha^2} - \frac{b^2 h_b(r_+)}{3\pi(l_\alpha^2 + r_+^2)} \quad (3.82)$$

En el caso de vacío la expresión anterior coincide con el conocido resultado de Chern-Simons  $T = r_+/(2\pi l_\alpha^2)$  mencionado en la sección anterior.

En resumen, la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet en dimensiones mayores a cuatro, introduce correcciones a la relatividad general. Los términos de Gauss-Bonnet son tales que los efectos a menores escalas en la distancia implican diferencias substanciales con respecto a la relatividad general.

---

<sup>4</sup>Notemos la analogía existente entre la curva calórica de los agujeros negros de Lovelock-Hoffmann-Infeld y aquellas correspondientes a los modelos de materia condensada con términos de interacción de largo rango. De hecho, es bien conocido que ciertos estados cuasi-estacionarios de estos modelos, exhiben un cambio similar en el signo del calor específico de una manera cualitativamente parecida al perfil mostrado en la figura 3.11 (por ejemplo, ver [10, 81] y los trabajos citados en el).



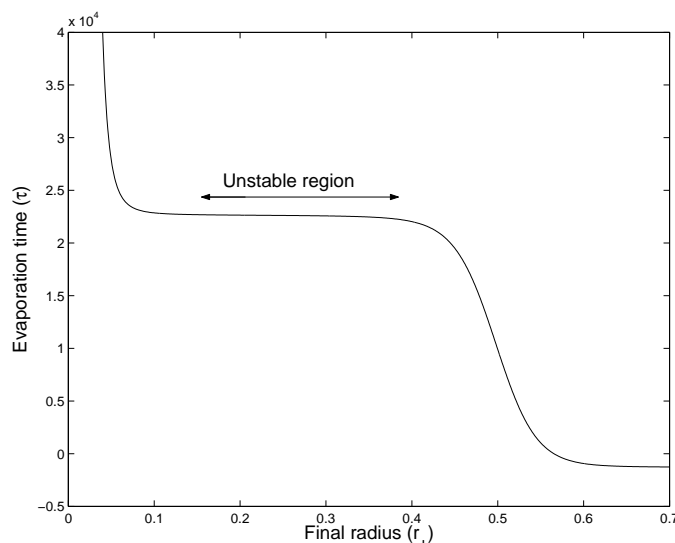


Figura 3.12: Tiempo de evaporación  $\tau$  en función del radio final  $r_+$  [ $\alpha = 0,05$ ,  $e = 1$ ,  $b = 2$ ,  $r_0 = 0,55$ ]. Un *plateau* aparece en la tasa de evaporación.

Asimismo cuando esta teoría es acoplada con teorías electromagnéticas no-lineales, aparecen otras características interesantes para analizar, en particular la existencia del perfil de temperatura con dos máximos que lleva a un efecto particular en la evaporación, esto es, que existen dos regiones en las cuales la solución es estable.

Los resultados presentados en las secciones previas requieren del cálculo de la temperatura de un agujero negro. Una teoría de gravedad clásica no provee esta noción de temperatura: es necesario introducir efectos cuánticos para definirla. Por este motivo mostraremos dos ingredientes vitales que transforman la analogía original de Bekenstein en un real comportamiento termodinámico de los agujeros negros: estos ingredientes son la radiación de Hawking (que permite identificar la gravedad superficial con la temperatura), y el conteo de microestados en el marco de una teoría de supercuerdas (que permite calcular la entropía de ciertos agujeros negros). Ambos resultados provienen al incluir efectos cuánticos en presencia de campos gravitatorios: como una teoría semiclásica en el caso de la radiación de Hawking, o bien como el de una teoría de gravedad cuántica en el caso de la entropía calculada en una teoría de cuerdas. En las dos secciones siguientes discutiremos lo

esencial de estos dos conceptos.

### 3.6. Radiación de Hawking y su relación con la termodinámica

El efecto de radiación de Hawking [75] surge en el contexto de una teoría de *gravedad semiclásica*, en la cual los efectos gravitacionales siguen estando representados por el espacio-tiempo  $(M, g_{ab})$ , pero los campos de materia son tratados como campos cuánticos propagándose en el espacio-tiempo clásico. La complejidad del cálculo que da lugar a la creación de partículas, radica en que se deben definir primero los espacios de Hilbert de entrada y salida de estos campos y hacerlos corresponder con el infinito pasado nulo  $\mathcal{I}^-$  y el infinito futuro nulo  $\mathcal{I}^+$  de la solución de Schwarzschild extendida.

El campo  $\phi$  considerado es un campo escalar que satisface la ecuación de Klein-Gordon en  $(M, g_{ab})$ . De esta manera existe una corriente conservada en función de  $\phi$  y su complejo conjugado  $\bar{\phi}$ :

$$j^a = -i(\bar{\phi}\phi^{;a} - \phi\bar{\phi}^{;a}) \quad (3.83)$$

que es la llamada corriente de número de partícula, que permite definir el *producto interno* “,” de Klein-Gordon:

$$(\alpha, \beta) = i \int_{\Sigma} (\bar{\alpha}\beta_{;a} - \beta\bar{\alpha}_{;a})n^a dV \quad (3.84)$$

donde la integral se calcula sobre una superficie de Cauchy  $\Sigma$  y las itálicas de *producto interno* se refieren a que este producto no es definido positivo. El producto (3.84) permite mapear de manera no-degenerada al espacio  $V \times V$  en números complejos, siendo  $V$  el espacio de vectores usado para construir el espacio de Hilbert asociado a los estados de las partículas de la teoría [125]. Sin embargo en este punto es importante aclarar la diferencia que surge con respecto a una teoría de campos en el espacio-tiempo de Minkowski: en un espacio-tiempo plano la descomposición de las soluciones a la ecuación de Klein-Gordon en una parte de frecuencia positiva y otra parte de frecuencia negativa (es decir en función de los operadores de creación y destrucción), da la estructura necesaria para seleccionar un subespacio de  $V$  para el cual el producto interno (3.84) es definido positivo. Contrariamente, en un espacio-tiempo curvo arbitrario no existe tal descomposición, con lo cual no hay una

manera adecuada de seleccionar el subespacio para el cual el producto interno sea definido positivo. Sin embargo, si el espacio-tiempo es estacionario, existe una manera natural para descomponer los campos en frecuencias negativas y positivas. Esto es consecuencia de que los vectores de Killing proveen una coordenada temporal con respecto a la cual se puede realizar una transformada de Fourier. Por lo tanto en espacio-tiempos estacionarios la noción de partícula está bien definida [14]. Es por esto que el espacio-tiempo sobre el que se realiza el cálculo es de la forma  $M = M_- \cup M_0 \cup M_+$ , donde  $M_-$  y  $M_+$  son dos espacio-tiempos estacionarios definidos para  $t < t_1$  y  $t > t_2$  respectivamente. Mientras que entre  $t_1 < t < t_2$  el espacio-tiempo es  $M_0$  cuya métrica depende del tiempo. Es decir que son estados estacionarios en el pasado y futuro. De esta manera los campos pueden ser escritos en función de operadores de creación y destrucción en  $M_-$  y  $M_+$ , y el operador número de partícula queda bien definido.

Considerando un campo escalar no-masivo que satisface la ecuación de Klein-Gordon y un estado de vacío en  $\mathcal{I}_-$ , se obtiene que los modos salientes de frecuencia positiva en  $\mathcal{I}_+$  para el campo  $\phi$  son (ver A.4 en [123]):

$$\phi_\omega \sim e^{-i\omega u} \quad (3.85)$$

donde  $u$  es la coordenada de Regge-Wheeler  $u = r + 2m \ln(r/(2m) - 1)$ . Conociendo  $\phi_\omega$  y extrapolando la solución hacia el pasado, se calcula el mismo campo cerca del horizonte. Luego se mapea este campo con la solución de Klein-Gordon en  $\mathcal{I}_-$  y con estos ingredientes es posible calcular el número de partículas en  $\mathcal{I}_+$  (para los detalles del cálculo ver [75, 123]):

$$\langle N_i \rangle_{\mathcal{I}_+} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega_i}{\kappa}} - 1} \quad (3.86)$$

La ecuación (3.86) es la distribución Planckiana de radiación de un cuerpo negro a temperatura

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.87)$$

siendo  $\kappa$  la gravedad superficial.

El resultado descrito antes puede ser enunciado de la siguiente manera:

Dado un agujero negro estacionario (en el futuro y en el pasado) y un campo escalar propagándose en esa geometría, entonces a tiempos asintóticamente grandes, las partículas de este campo son radiadas al infinito futuro  $\mathcal{I}_+$  como si el agujero negro fuera un cuerpo negro perfecto a temperatura  $\kappa/(2\pi)$ .

Con este resultado que define la temperatura de un agujero negro, las leyes de la mecánica de agujeros negros analizadas en las secciones anteriores se transforman en leyes termodinámicas para el agujero negro, que permiten identificar a el área  $A/4$  en relatividad general o la expresión (3.64) en Gauss-Bonnet, con la entropía del agujero negro. Lo que resulta interesante ahora es que se tiene una definición basada en conceptos geométricos de la temperatura y de la entropía.

Unos años después del descubrimiento del efecto Hawking, Unruh planteó el problema de analizar como es la densidad de partículas para un observador moviéndose con aceleración constante en un espacio-tiempo de Minkowski como así también en el espacio-tiempo de Schwarzschild [124]. La motivación de tal idea se basa en el principio de equivalencia y en el efecto Hawking, dado que el observador acelerado siente un campo gravitatorio efectivo, siendo el campo gravitatorio uno de los ingredientes para la creación de partículas en presencia de un agujero negro. El resultado es conocido como el efecto Unruh, el cual relaciona el estado de vacío usual de una teoría de campos para observadores inerciales con el estado visto por observadores acelerados. La conclusión es que el observador acelerado se sentiría inmerso en un baño térmico de partículas a temperatura  $T = a/(2\pi)$ , siendo  $a$  su aceleración, mientras que un observador inercial no detectaría partículas. Como mencionamos antes, si bien este efecto está emparentado con el efecto Hawking teniendo en mente el principio de equivalencia, se trata de efectos distintos.

Actualmente se está estudiando la generalización de la termodinámica de agujeros negros a espacio-tiempos que no sean asintóticamente planos, como lo es el caso de de Sitter-Schwarzschild [105].

### 3.7. Entropía de un agujero negro en teoría de cuerdas

Uno de los logros más importantes de ciertas teorías de cuerdas es la obtención de la ley del área para la entropía de un agujero negro a través del conteo de los microestados entre cuerdas abiertas y ciertos objetos propios de una teoría de cuerdas.

El marco en el cual se realiza el cálculo es en una teoría de supercuerdas con supersimetría. Tal teoría de cuerdas es la teoría de supercuerdas tipo II B en 10 dimensiones. Compactificando cinco de sus dimensiones en círculos

se obtiene la teoría de supergravedad II B.

Los ingredientes necesarios para la construcción de un agujero negro dentro de esta teoría son cuerdas abiertas que se extienden entre ciertos objetos  $p$ -dimensionales llamados  $Dp$ -branas. En estas branas es donde se ubican los extremos de las cuerdas y donde se imponen las condiciones de contorno, distinguiendo si son coordenadas tangenciales a la brana (condiciones de contorno de Neumann  $X^{m'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^{m'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = 0$ ) ó coordenadas normales a la brana (condiciones de contorno de Dirichlet  $X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \text{constante}$ ). En el caso de un agujero negro extremal se requieren  $D5$  y  $D1$  branas. La cantidad de estas branas ( $Q_1$   $D1$ -branas y  $Q_2$   $D2$ -branas) son las cargas asociadas al acoplamiento entre las branas y las cuerdas extendidas entre ellas, además del impulso lineal  $N_5$  propagándose en una dirección. Tal acoplamiento proviene de la acción:

$$S = - \int d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_p \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^{\mu_1}}{d\sigma_1} \frac{dX^{\mu_2}}{d\sigma_2} \dots \frac{dX^{\mu_p}}{d\sigma_p} A_{\mu\mu_1\mu_2\dots\mu_p}(X(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)) \quad (3.88)$$

donde  $A_{\mu\mu_1\mu_2\dots\mu_p}(X(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p))$  es un tensor antisimétrico de  $p+1$  índices proveniente de los posibles estados de la teoría de supercuerdas,  $(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$  es la parametrización del volumen de mundo  $p + 1$ -dimensional de la  $Dp$ -brana, y  $X(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$  son las coordenadas de la brana.

La acción (3.88) es la generalización del acoplamiento de Maxwell con una partícula cargada, es decir el acoplamiento entre un tensor de 1 índice con la línea de mundo de una partícula:  $S_{Maxwell} = - \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu$ .

No es la intención aquí reproducir la construcción del agujero negro (se discute en detalle en [111]), sino enumerar los resultados relevantes:

- La métrica del agujero negro obtenido depende de las cargas  $Q_1, Q_5, N_5$ , de la longitud  $l_s$  de la cuerda, de la constante de acoplamiento  $g$  de la cuerda, y de los volúmenes de las coordenadas compactificadas.
- El agujero negro presenta un horizonte de eventos y preserva la supersimetría de la supergravedad II B.
- Un observador en el espacio de menor dimensión, es decir en el espacio normal a las branas, ve a estas branas como puntos luego de la compactificación. El mapeo relaciona branas en el espacio de dimensión  $D$  con puntos en el espacio normal de dimensión  $D - p$ . El centro

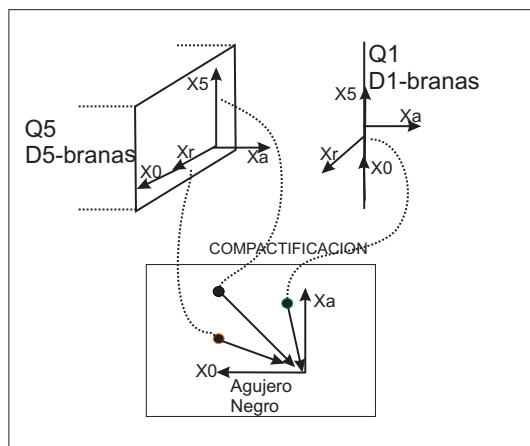


Figura 3.13: Esquema de la construcción del agujero negro: las coordenadas  $X^5$  tangenciales a ambas branas y las  $X^r$  ( $r = 6, 7, 8, 9$ ) tangenciales a la  $D5$ -brana y normales a la  $D1$ -brana se compactifican, obteniendo el espacio normal correspondientes a la coordenada  $X^0$  y a las coordenadas  $X^a$  ( $a = 1, 2, 3, 4$ ).

del agujero negro coincide con la posición de estos puntos, y para esto es necesario que las posiciones de las branas sean coincidentes. En la figura 3.13 se muestra un esquema de la construcción.

- Calculando el área del horizonte de eventos y utilizando la ley del área, se obtiene la entropía de este agujero negro, resultando ser:

$$S = \frac{A}{4\pi G^{(5)}} = 2\pi \sqrt{N_5 Q_1 Q_5} \quad (3.89)$$

Si bien el área depende de la constante de acoplamiento de la cuerda, de su longitud, y de las escalas de compactificación, esta dependencia se cancela con la constante de Newton, y la entropía resultante solo depende de las tres cargas del agujero negro.

Por otro lado para el conteo de estados es necesario utilizar ciertos resultados de la teoría de supercuerdas:

- La cuantización de los estados de cuerdas a contar se realiza con acoplamiento nulo, y por lo tanto debe cumplirse que el mismo conteo siga valiendo

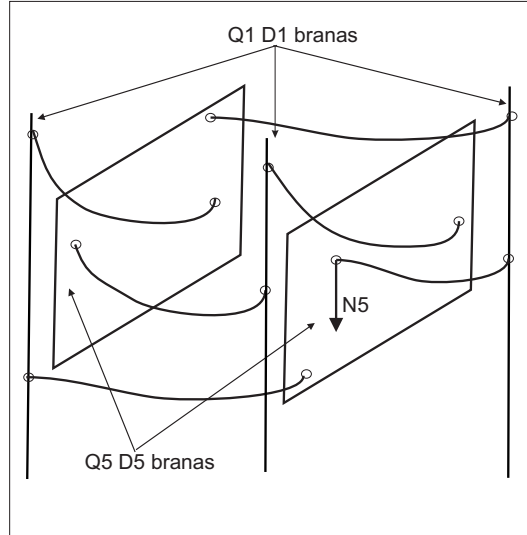


Figura 3.14: Configuraciones posibles para cuerdas abiertas extendidas entre  $Q_1 = 3$   $D1$ -branas y  $Q_5 = 2$   $D5$ -branas.

cuando hay acoplamiento, como es el caso de un agujero negro. Esto se cumple en la teoría de supercuerdas y no en el caso de cuerda bosónica: el motivo esencialmente es la supersimetría de la teoría. El hecho que la entropía (3.89) no dependa de esta constante de acoplamiento es un buen indicio.

- Los estados no masivos que se obtienen al cuantizar una cuerda con sus extremos en una  $D5$  y  $D1$ -brana consisten en cuatro estados bosónicos y cuatro fermiónicos.
- La estadística para un sistema formado por bosones y fermiones provee una expresión para el número total de configuraciones  $\Omega(E)$  para cada nivel con energía  $E$  y la entropía resultante es:

$$S = 2\pi \ln \Omega(E) = 2\pi \sqrt{\frac{N}{6} \left( b + \frac{f}{2} \right)} \quad (3.90)$$

siendo  $N$  el autovalor del operador número,  $b$  y  $f$  el número de estados bosónicos y fermiónicos respectivamente. Dado que hay  $Q_1$   $D1$ -branas

y  $Q_5$   $D5$ -branas, el número de maneras de elegir una configuración en particular bosónica y otra fermiónica es  $4Q_1Q_5$ , es decir  $b = f = 4Q_1Q_5$ .

Reemplazando el número de estados en (3.90) obtenemos la misma expresión para la entropía que la calculada a través de la ley clásica del área. Es decir que la teoría de supercuerdas provee una manera de reproducir la entropía a través del conteo de microestados. Este resultado sorprendente nos enseña que existe una confluencia entre tres ramas de la física como lo son la gravedad, la termodinámica y la mecánica cuántica: el punto en común es la termodinámica de agujeros negros.

Algo que hasta ahora no hemos mencionado pero que será relevante en la discusión del capítulo siguiente, es que como las teorías de gravedad mencionadas antes son invariantes ante inversión temporal, existen soluciones temporalmente simétricas a las de agujero negro, los llamados agujeros blancos. Estas soluciones poseen el mismo espectro de radiación que los agujeros negros y un observador externo no podría distinguir termodinámicamente entre estos dos objetos [76]. Este será uno de los ejemplos del próximo capítulo, que surge en el contexto de teorías que son invariantes ante inversión temporal.

Como es bien sabido, la segunda ley de la termodinámica no es una ley fundamental en el sentido que no tiene una demostración matemática, sino que su aceptación se basa en el hecho que la misma se verifica en todos los sistemas estadísticos conocidos. La fundamentación es puramente fenomenológica. Es más, en sistemas que posean la simetría de reversión temporal es posible obtener una segunda ley revertida temporalmente, y la única justificación para quedarse con una o con otra es que en los sistemas conocidos se observa la segunda ley standard de la termodinámica. A diferencia de esta ley, la segunda ley de la termodinámica agujeros negros es una consecuencia matemática directa de la relatividad general.

Si el objetivo es obtener una fundamentación teórica para la segunda ley de la termodinámica, un camino posible sería tomarse en serio la entropía definida para un agujero negro, que surge únicamente de la relatividad general y de ciertas condiciones sobre la materia y la geometría del espacio-tiempo, y basarse únicamente en estas condiciones para seleccionar uno de los sentidos de la flecha del tiempo.



Como se trata de un problema abierto en la física actual, el objetivo será solamente plantear una especulación acerca de una manera de seleccionar una dirección privilegiada de la flecha del tiempo (que seleccionaría la segunda ley observada fenomenológicamente), basada únicamente en los cimientos que aporta la relatividad general. De esta manera las propiedades globales de la geometría conducirían a la entropía observada localmente en los distintos sistemas termodinámicos.

Como punto de partida, en el capítulo siguiente definiremos de manera precisa los conceptos que siempre aparecen involucrados en este tipo de discusiones, estos son: los conceptos de la flecha del tiempo, irreversibilidad, simetría temporal, y soluciones temporalmente simétricas. Una vez definidos, mostraremos distintos ejemplos de la aplicación de estos conceptos en teorías fundamentales de la física, para luego dar una interpretación de la flecha del tiempo.

## Irreversibilidad y Flecha del Tiempo

La discusión acerca de la flecha del tiempo ha sido y sigue siéndolo hoy en día un tema controversial. Existen tantas posturas como teorías en las cuales se privilegia cierta dirección temporal, desde la termodinámica, pasando por la física cuántica, hasta la cosmología. En cada una de ellas se adoptan distintos enfoques que en líneas generales se dividirían en dos grupos: aquellos basados en la entropía y aquellos que no. En este capítulo mostraremos un planteo no-entrópico y global [3] del problema de la flecha del tiempo.

En toda discusión acerca de este tema aparecen ciertos conceptos básicos que definiremos de manera precisa en la próxima sección. En las secciones siguientes aplicaremos estos conceptos para mostrar el enfoque que hemos propuesto.

### 4.1. Conceptos Básicos

Es sorprendente que luego de tantos años de debates acerca de la irreversibilidad y de la flecha del tiempo, aún no estén del todo claro los significados de los términos usados en la discusión. Por esta razón empezaremos definiendo los conceptos involucrados en el problema.

#### 4.1.1. Inversión Temporal

El concepto de invariancia ante inversión temporal es motivo de controversia entre ciertos autores [6, 61]. Lo definiremos de la siguiente manera:

Definición 1: Una ecuación dinámica es reversible temporalmente si es invariante ante la aplicación del operador de reversión temporal  $\mathcal{T}$ , que realiza la transformación  $t \rightarrow -t$  y revierte todas las variables dinámicas cuyas definiciones en función de  $t$  no son invariantes antes la transformación  $t \rightarrow -t$ .

Teniendo en cuenta esta definición, podemos verificar que las ecuaciones dinámicas de la física fundamental son invariantes ante inversión temporal. Veamos algunos ejemplos:

- Mecánica Clásica:

En mecánica clásica ordinaria, las magnitudes básicas (posición  $\mathbf{x}$ , velocidad  $\mathbf{v}$  y aceleración  $\mathbf{a}$ ) cambian como

$$\mathcal{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathcal{T}\mathbf{v} = -\mathbf{v}, \quad \mathcal{T}\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (4.1)$$

En general, la masa  $m$  y la fuerza  $\mathbf{F}$  son cantidades conservadas, es decir que no son funciones del tiempo:

$$\mathcal{T}m = m, \quad \mathcal{T}\mathbf{F} = \mathbf{F} \quad (4.2)$$

Dado que para fuerzas conservativas, la misma se deriva de un potencial  $V$  ( $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x})$ ), la energía  $H = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{x})$  es invariante ante la acción de  $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{T}H = H \quad (4.3)$$

Análogamente, en mecánica clásica Hamiltoniana, la posición  $\mathbf{q} = (x_1, \dots, x_n)$  y el momento lineal  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  transforman como

$$\mathcal{T}\mathbf{q} = \mathbf{q}, \quad \mathcal{T}\mathbf{p} = -\mathbf{p} \quad (4.4)$$

- Electromagnetismo:

La carga no es una función del tiempo  $t$ , dado que es también una cantidad conservada; entonces,

$$\mathcal{T}q = q \quad (4.5)$$

Por lo tanto, la densidad de carga  $\rho$  y la densidad de corriente  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$  cambian como

$$\mathcal{T}\rho = \rho, \quad \mathcal{T}\mathbf{j} = -\mathbf{j} \quad (4.6)$$

Dado que la fuerza de Lorentz está definida como  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , de las ecuaciones (4.2), (4.5) y (4.6) el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$  transforman como

$$\mathcal{T}\mathbf{E} = \mathbf{E}, \quad \mathcal{T}\mathbf{B} = -\mathbf{B} \quad (4.7)$$

■ Mecánica Cuántica:

Para aplicar el operador de inversión temporal en mecánica cuántica debemos utilizar la representación de configuración:  $x \sim x$ ,  $p \sim -i\hbar\partial/\partial x$ . Dado que se desea obtener  $\mathcal{T}x = x$  y  $\mathcal{T}p = -p$  como en el caso clásico, imponemos que la función de onda cambie como  $\mathcal{T}\phi(x) = \phi(x)^*$ . Sin embargo este requerimiento hace que el operador cuántico de inversión temporal sea *antilineal* y *antiunitario* (en contraste con la linealidad de  $\mathcal{T}$  en mecánica clásica). Para resaltar esta diferencia, denotaremos al operador cuántico como  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}\phi(x) = \phi(x)^* \quad (4.8)$$

De hecho, si  $\omega$  representa los autovalores del Hamiltoniano  $H$ , con el operador lineal  $\mathcal{T}$  obtendríamos  $\mathcal{T}e^{-i\omega t} = e^{i\omega t}$  y, por lo tanto,  $\mathcal{T}\omega = -\omega$ , lo cual llevaría a valores inaceptables de energías negativas. Por el contrario, con el operador antilineal  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{T}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{T}H = H, \quad \mathbf{T}\omega = \omega \quad (4.9)$$

■ Teoría Cuántica de Campos:

En esta disciplina de la física, el operador lineal y unitario  $\mathbf{P}$ , correspondiente a inversión espacial, y el operador antilineal y antiunitario,  $\mathbf{T}$ , correspondiente a inversión temporal, se aplican al cuadri-momento  $P^\mu$  de la siguiente manera (volveremos sobre este punto en la subsección 4.3.2 )

$$\mathbf{P}iP^\nu\mathbf{P}^{-1} = iP_\nu^\nu P^\mu, \quad \mathbf{T}iP^\nu\mathbf{T}^{-1} = iT_\nu^\nu P^\mu \quad (4.10)$$

donde

$$\mathcal{P}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Como consecuencia de la definición de invariancia ante inversión temporal, dada una ecuación invariante ante esta operación, si  $f(t)$  es solución de  $L$ , entonces  $\mathcal{T}f(t)$  también es solución. En un trabajo previo [46], estas soluciones matemáticas fueron apodadas como *gemelos T-simétricos*: son gemelos porque sin presuponer una dirección privilegiada del tiempo, son diferentes solo de manera convencional; y son T-simétricos (temporalmente simétricos) porque uno de ellos es la imagen especular en el tiempo del otro. El ejemplo tradicional de gemelos T-simétricos viene del electromagnetismo, donde las ecuaciones dinámicas tienen soluciones avanzadas y retardadas, relacionadas con los estados entrantes y salientes en un proceso de scattering [88]. Los dos gemelos son idénticos y no pueden ser distinguidos a este nivel, debido a que, hasta ahora, no existe criterio alguno y solamente contamos con la ecuación dinámica de la cual surgen. Convencionalmente podemos darle un nombre a cada solución: avanzada y retardada o entrante y saliente, pero estos son solo etiquetas convencionales que no establecen una diferencia no-convencional entre ambas soluciones.

En general, las ecuaciones dinámicas de teorías *fundamentales* de la física son invariantes ante inversión temporal, por ejemplo las ecuaciones de la mecánica clásica, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, las ecuaciones de campos de una teoría cuántica de campos y las ecuaciones de Einstein de la relatividad general. Sin embargo, no todos los axiomas de estas teorías son invariantes ante inversión temporal; este es el caso del postulado III en una teoría de campos (ver subsección 4.3.2) y el postulado de medición de la mecánica cuántica (ver subsección 4.3.1). Por otro lado, muchas leyes no fundamentales no son invariantes ante inversión temporal, como la segunda ley de la termodinámica (ver subsección 4.4.5). Uno de los objetivos del trabajo [3] es dar cuenta de estas *anomalías* y conjeturar una explicación para ellas.

### 4.1.2. Irreversibilidad

A pesar de que los conceptos de reversibilidad e irreversibilidad han tenido muchas definiciones en la literatura, desde un punto de vista más general la evolución reversible es concebida usualmente como un proceso que puede ocurrir en el orden temporal opuesto, de acuerdo a la ley dinámica que gobierna dicho proceso: la ocurrencia en el orden opuesto no es excluida por la ley. El proceso típicamente irreversible estudiado por la física es el de un decaimiento, es decir, evoluciones temporales que tienden a un estado final

de equilibrio del cual el sistema no puede escapar: la irreversibilidad de tal proceso se basa en el hecho que no es posible cierta evolución que saque al sistema de su estado de equilibrio. Para estos casos, la reversibilidad puede ser definida de la siguiente manera:

**Definición 2:** Una solución  $f(t)$  de una ecuación dinámica es *reversible* si no llega al estado de equilibrio (es decir que no existe el límite de  $f(t)$  para  $t \rightarrow \infty$ ) donde el sistema se mantiene para siempre en ese estado.

Por ejemplo, de acuerdo a esta definición, en mecánica clásica la solución de una ecuación dinámica es reversible si se corresponde con una curva cerrada en el espacio de fases (aún cuando estas curvas se cierran en infinito); si no se corresponde, es entonces irreversible.

Es bastante claro que la invariancia ante inversión temporal e irreversibilidad son conceptos diferentes en la medida que se aplican a entidades matemáticas distintas: la invariancia temporal es una propiedad de las ecuaciones dinámicas y, a la larga, del conjunto de sus soluciones. La reversibilidad es una propiedad de una única solución de la ecuación dinámica. Además, estos conceptos no están ni siquiera correlacionados, dado que ambos pueden combinarse de las cuatro formas posibles [46]. De hecho, además de los casos usuales, invariancia temporal y reversibilidad, y no-invariancia temporal e irreversibilidad, las otras dos combinaciones también son posibles:

- Invariancia temporal e irreversibilidad:

Consideremos un péndulo con el Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2m} p_\theta^2 - \frac{k^2}{2} \cos \theta \quad (4.12)$$

La ecuación dinámica es invariante ante inversión temporal dado que  $\mathcal{T}\theta = \theta$ :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{k^2}{2} \sin \theta \quad (4.13)$$

Por lo tanto, el conjunto de trayectorias en el espacio de fases es simétrico con respecto al eje  $\theta$ . Sin embargo, no todas las soluciones son reversibles. De hecho, cuando  $H = k^2/2$ , la solución es irreversible debido a que tiende a  $\theta = \pi$ ,  $p_\theta = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y tiende a  $\theta = -\pi$ ,  $p_\theta = 0$

cuando  $t \rightarrow -\infty$  [121]: corresponde al péndulo alcanzando el punto de equilibrio inestable para  $t \rightarrow \infty$  y para  $t \rightarrow -\infty$ . En los casos  $H < \frac{k^2}{2}$  (péndulo oscilante) y  $H > \frac{k^2}{2}$  (péndulo rotante), las evoluciones son reversibles.

- No-invariancia temporal y reversibilidad:

Consideremos ahora un oscilador modificado con el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} K(p)^2 q^2 \quad (4.14)$$

donde  $K(p) = K_+$  cuando  $p \geq 0$ ,  $K(p) = K_-$  cuando  $p < 0$ , con  $K_+$  y  $K_-$  constantes. Esto significa que  $\mathcal{T}K_+ = K_-$ . Como consecuencia, si  $K_+ \neq K_-$ , las ecuaciones dinámicas no son invariantes ante inversión temporal ya que, para  $p \geq 0$ ,

$$\dot{p} = -K_+^2 q \quad \mathcal{T}\dot{p} = -\mathcal{T}K_+^2 \mathcal{T}q = -K_-^2 q \neq -K_+^2 q \quad (4.15)$$

y para  $p < 0$ ,

$$\dot{p} = -K_-^2 q \quad \mathcal{T}\dot{p} = -\mathcal{T}K_-^2 \mathcal{T}q = -K_+^2 q \neq -K_-^2 q \quad (4.16)$$

No obstante, las soluciones  $q(t)$  y  $p(t)$  son, para  $p \geq 0$ ,

$$q(t) = C_1 \cos(\omega_+ t + \alpha_{+n}) \quad p(t) = C_1 m \omega_+ \sin(\omega_+ t + \alpha_{+n}) \quad (4.17)$$

y para  $p < 0$ ,

$$q(t) = C_2 \cos(\omega_- t + \alpha_{-n}) \quad p(t) = C_2 m \omega_- \sin(\omega_- t + \alpha_{-n}) \quad (4.18)$$

donde  $\omega_{\pm} = K_{\pm}^2/m$  y las constantes  $\alpha_{\pm n}$  cambian de un ciclo  $n$  al siguiente  $n + 1$  de tal manera que las soluciones son continuas.

En la figura 4.1 mostramos las soluciones  $q(t)$  temporalmente asimétricas para este ejemplo. Es claro que estas soluciones no tienen límite para  $t \rightarrow \pm\infty$ : cada trayectoria es reversible dado que es una curva cerrada en el espacio de fases.

Una vez que ambos conceptos han sido definidos de manera precisa, el problema de la irreversibilidad puede ser enunciado de la siguiente manera: ¿de que manera explicamos evoluciones irreversibles en términos de leyes que son invariantes ante inversión temporal?. Cuando se explica en estos

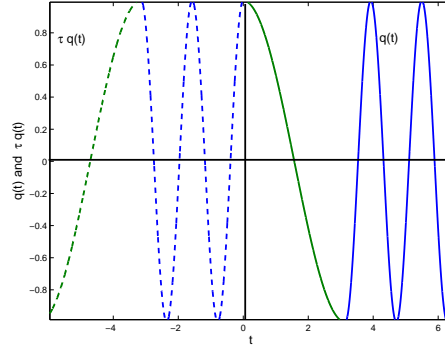


Figura 4.1: Soluciones temporalmente asimétricas  $q(t)$

términos, resulta claro que el problema de la irreversibilidad no es un enigma conceptual: nada prohíbe que una ecuación invariante ante inversión temporal posea soluciones que son irreversibles. No obstante, la solución al problema de la irreversibilidad no provee una adecuada distinción entre las dos direcciones temporales. De hecho, si la evolución del sistema es irreversible y es solución de una ley invariante, entonces siempre existirá el gemelo T-simétrico, es decir, otra solución irreversible que es la imagen temporalmente especular de la otra. Por ejemplo, si existe una solución que lleva al equilibrio en el futuro, necesariamente existe otra solución irreversible que lleva a un equilibrio en el pasado, y no existe un criterio que no sea convencional para seleccionar una de las dos soluciones con evoluciones temporales opuestas como la que tiene relevancia física.

En general, se presupone una dirección privilegiada del tiempo cuando es estudiado cierto proceso irreversible. De hecho, cuando se habla de procesos en los que aumenta la entropía, se supone que el crecimiento de entropía es *hacia el futuro*; o cuando se considera un proceso que va de un estado de no-equilibrio a uno de equilibrio, implícitamente se localiza el equilibrio en el *futuro*. En general, toda evolución que tienda a un atractor es concebida como aproximándose hacia el atractor en el futuro. Esto significa que usualmente la distinción entre pasado y futuro es dada por sentada, y esto oculta la existencia de la segunda solución irreversible del par de gemelos T-simétricos. Sin embargo, cuando la teoría en cuestión es desarrollada sin proyectar nuestras intuiciones de asimetría temporal, el par de gemelos T-simétricos se manifiesta naturalmente.



### 4.1.3. Flecha del Tiempo

El problema de la flecha del tiempo surge de la intuición que tenemos sobre la asimetría entre pasado y futuro. Experimentamos el ordenamiento temporal del mundo como si estuviera orientado: si dos eventos no son simultáneos, uno de ellos es anterior al otro. Más aún, observamos que nuestro acceso al pasado y futuro se da de manera distinta: recordamos eventos pasados, pero no predecimos eventos futuros. Por otro lado, vivimos en un mundo repleto de procesos que no ocurren en la dirección opuesta del tiempo: el café y la leche siempre se mezclan entre ellos, siempre envejecemos, y lamentablemente no observamos los procesos invertidos. Por lo tanto, si concebimos el problema de la flecha del tiempo como la pregunta ¿existe la flecha del tiempo?, entonces legítimamente podemos responderla en base a nuestras experiencias: no existe una diferencia convencional entre ambas direcciones, y la dirección privilegiada, la que llamamos futuro, es la dirección en la cual se dan todos los procesos cotidianos.

Sin embargo, este no es el problema de la flecha del tiempo como fue concebido en la física fundamental desde el nacimiento de la termodinámica. En este contexto, la dificultad consiste en encontrar el *correlato físico* de las diferencias entre las dos direcciones temporales. Si tal asimetría temporal no existiera, no haría falta exigirle una explicación a la física. Es precisamente debido a nuestra experiencia orientada en el tiempo que se pretende dar cuenta de esto en las distintas teorías de la física. En las secciones siguientes nos ocuparemos del problema de la flecha del tiempo dentro de los límites impuestos por la física: no discutiremos acerca de nuestra experiencia acerca del tiempo. La pregunta será: ¿las teorías físicas eligen una dirección privilegiada del tiempo?

La mayor dificultad que se encuentra para responder a la pregunta radica en nuestra perspectiva antropocéntrica: la diferencia entre pasado y futuro está tan arraigada en nuestro lenguaje y pensamientos, que es muy difícil sacudir estas asunciones de asimetría temporal de nuestra mente. De hecho, las discusiones tradicionales acerca del problema de la flecha del tiempo son usualmente subsumidas bajo la etiqueta de el problema de la dirección del tiempo, como si pudiéramos encontrar un criterio físico exclusivo para seleccionar la dirección privilegiada del tiempo, e identificarla con la dirección que llamamos futuro. Pero no hay criterio alguno en las leyes dinámicas de la física que distinga de manera no arbitraria entre pasado y futuro como lo concebimos en nuestra experiencia cotidiana. Alguien podría objetar que la

física asume implícitamente esta distinción con el uso de expresiones asimétricas como, el cono de luz futuro, condiciones iniciales y demás expresiones. Sin embargo este no es el caso, y la razón se basa en la distinción entre convencional y sustancial.

**Definición 3:** Dos objetos son formalmente idénticos cuando existe una permutación que intercambia los objetos pero no cambia las propiedades del sistema al cual pertenecen.

En física es usual trabajar con objetos formalmente idénticos: los dos semiconos del cono de luz, las dos direcciones del espín, etc.

**Definición 4:** Diremos que establecemos una diferencia convencional entre dos objetos cuando nombramos dos objetos formalmente idénticos con dos nombres diferentes.

Este es el caso cuando asignamos dos signos diferentes a las dos direcciones de espín o usamos nombres diferentes para el semicono futuro y pasado.

**Definición 5:** Diremos que la diferencia entre dos objetos es sustancial cuando asignamos distintos nombres a dos objetos que no son formalmente idénticos. En este caso, aunque el nombre que elijamos usar es convencional, la diferencia es sustancial [108, 116].

Por ejemplo, la diferencia entre los dos polos del modelo teórico de un imán es convencional, dado que ambos polos son formalmente idénticos: por el contrario, la diferencia entre los dos polos de la tierra es sustancial ya que en el polo norte hay un océano y en el polo sur un continente, y la diferencia entre océano y continente es sustancial aún cuando cambiemos convencionalmente los nombres de los polos. En matemática, dado un segmento  $\overline{[A, B]}$ , si llamamos a sus puntos extremos  $A$  y  $B$  (ó  $B$  y  $A$ , dado que los nombres siempre son convencionales), estamos estableciendo una diferencia convencional entre los puntos  $A$  y  $B$  debido a que los puntos son formalmente idénticos; por el contrario, si llamamos a los extremos de una flecha  $\overrightarrow{[A, B]}$   $A$  y  $B$ , estamos expresando una diferencia sustancial, ya que la cola  $A$  de la flecha no es idéntica a su cabeza  $B$ .

Una vez que este punto es aceptado, resulta claro que dada la invariancia temporal de las leyes fundamentales, la física usa las etiquetas de pasado y futuro de manera convencional. Por lo tanto, el problema no puede ser

planteado en términos de identificar la dirección privilegiada del tiempo llamada futuro, como lo concebimos en nuestro lenguaje ordinario: en física, el problema de la flecha del tiempo se traduce en encontrar una diferencia sustancial entre las dos direcciones, basándonos únicamente en teorías físicas. Pero si esta es nuestra pregunta central, entonces no podemos proyectar nuestras experiencias acerca del pasado y futuro para responderla. Cuando pretendemos ocuparnos del problema de la flecha del tiempo desde una perspectiva que no contenga nuestras intuiciones sobre el tiempo, debemos evitar conclusiones derivadas de presupuestos de asimetría temporal. Es necesario situarse en un punto atemporal [112]. Este punto de vista atemporal nos previene de usar expresiones temporalmente asimétricas de manera no-conventional: la asunción acerca de la diferencia entre pasado y futuro ya no es legítima en el contexto del problema de la flecha del tiempo.

Pero entonces, ¿qué significa la flecha del tiempo cuando aceptamos esta restricción?. La tradicional expresión acuñada por Eddington tiene un sentido metafórico: su significado debe ser entendido por analogía. Reconocemos la diferencia entre la cola y la cabeza de una flecha basándonos en sus propiedades intrínsecas; por lo tanto, podemos distinguir sustancialmente ambas direcciones, cola-cabeza y cabeza-cola, independientemente de nuestra perspectiva particular y de nuestras intuiciones. Análogamente, podemos concebir el problema de la flecha del tiempo en términos de la posibilidad de establecer una diferencia sustancial entre ambas direcciones temporales, basándonos exclusivamente en argumentos físicos.

## 4.2. El problema de la flecha del tiempo: enfoque no-entrópico y global

Sobre la base de las definiciones de diferencias sustanciales y convencionales, y de la necesidad de un punto de vista atemporal, se ha propuesto un enfoque global y no-entrópico del problema de la flecha del tiempo [46, 3]. En lo que sigue resumiremos los puntos principales de la argumentación.

### 4.2.1. Por qué global y no-entrópico

Comencemos explicando en que sentido el enfoque se aparta del tradicional enfoque local y entrópico del problema.

### 1. ¿Por qué global?

El enfoque tradicional debe su origen a los intentos para reducir la termodinámica en una teoría de mecánica estadística: en este contexto, la manera usual de resolver el problema de la flecha del tiempo consiste en definir el futuro como la dirección en la cual la entropía aumenta. Sin embargo, en el año 1912 Paul and Tatiana Ehrenfest [62] notaron que cuando la entropía es definida en términos estadísticos sobre la base de la mecánica clásica, ocurre que tal incremento de la entropía en un sistema cerrado, viene acompañado de un aumento similar hacia el pasado. Esta vieja discusión puede ser generalizada a cualquier tipo de evolución que surja de leyes locales que sean invariantes ante inversión temporal. De hecho, como vimos en la sección anterior, cualquier ecuación que sea invariante ante inversión temporal, da lugar a un par de gemelos T-simétricos  $f(t)$  y  $\mathcal{T}f(t)$ , que son diferentes de manera convencional el uno del otro.

Desde luego que la existencia del par de gemelos T-simétricos es el resultado de las propiedades de la ecuación dinámica. Dada una ley dinámica local, las soluciones representan dos evoluciones posibles, pero dado que ambas soluciones son convencionalmente diferentes no proveen una manera de distinguir las dos direcciones temporales. Uno estaría tentado a resolver el problema diciendo que ambas soluciones describen el mismo proceso desde puntos de vista revertidos temporalmente. Sin embargo, el hecho que un mismo proceso sea descrito por  $e(t)$  y  $e(-t)$ , significa que  $t$  y  $-t$  son dos nombres diferentes para el mismo punto de vista temporal. Por lo tanto, los intervalos de tiempo  $[0, \infty)$  y  $(-\infty, 0]$  no serían convencionalmente diferentes sino estrictamente idénticos. Pero entonces el tiempo no tendría la topología de  $\mathbb{R}$ , sino la de  $\mathbb{R}^+$ . Dado que en  $\mathbb{R}^+$  las direcciones  $0 \rightarrow \infty$  y  $\infty \rightarrow 0$  son sustancialmente diferentes, la diferencia sustancial entre las dos direcciones del tiempo serían impuestas a mano, lo cual debería incluir la especificación de un origen de tiempo. Es más, esto rompería la invariancia de Galileo o de Lorentz en esas teorías; en particular esto llevaría a que esas teorías no serían invariantes ante traslación temporal y consecuentemente llevaría a abandonar el principio local de la conservación de la energía.

En resumen, las teorías locales no ofrecen una manera no convencional para distinguir a los gemelos T-simétricos, y por lo tanto entre ambas direcciones temporales.

### 2. ¿Por qué no-entrópico?

Cuando a fines de siglo XIX Boltzmann desarrolló la versión probabilística de su teoría, tuvo que enfrentar un nuevo reto: como explicar el estado tan improbable del mundo actual. Para responder esta pregunta, Boltzmann introdujo el primer enfoque global del problema <sup>1</sup>. Desde aquel trabajo, muchos autores han relacionado la dirección pasado-futuro como el gradiente de la entropía del universo y usualmente se ha asumido que el criterio fundamental para distinguir entre las dos direcciones temporales es la segunda ley de la termodinámica [57, 114] .

El enfoque global y entrópico se basa en dos suposiciones: que es posible definir la entropía en una sección transversal del universo, y que exista un único tiempo para todo el universo. Sin embargo, ambas suposiciones encierran una dificultad. En primer lugar, la definición de entropía en cosmología es hoy en día un tema controversial: no hay consenso acerca de como definir una entropía global para el universo, a menos que exista un horizonte de Killing bifurcado en el espacio-tiempo y que se cumplan ciertas condiciones asintóticas como vimos en el capítulo 2. En segundo lugar, cuando la relatividad general entra en juego, no es posible usar al tiempo como un parámetro del fondo como en las teorías pre-relativistas.

Sin embargo, hay un argumento aún más fuerte para renunciar al enfoque tradicional. Como es bien sabido, la entropía es una propiedad fenomenológica cuyo valor es compatible con muchas configuraciones de un sistema. La pregunta es si existe alguna característica más fundamental del universo que nos permita distinguir entre ambas direcciones temporales. Por otra parte, si la flecha del tiempo refleja una diferencia sustancial entre las dos direcciones del tiempo, entonces es razonable considerar que es una propiedad intrínseca del tiempo, o mejor dicho, del espacio-tiempo, y no es un elemento secundario que depende de cierta propiedad fenomenológica.

#### 4.2.2. Condiciones para una flecha del tiempo global

En relatividad general, el universo es una variedad de cuatro dimensiones, descrita por las propiedades geométricas del espacio-tiempo, que vienen dadas por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , y por la distribución de energía en el espacio-tiempo dada por el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Ambas propiedades están

---

<sup>1</sup>Boltzmann [33] escribió: el universo, o al menos gran parte de el, considerado como un sistema mecánico comenzó en un estado muy improbable y aún hoy está en ese estado. Entonces si elegimos un sistema pequeño de partículas y las aislamos instantáneamente del resto, en principio el sistema evolucionaría hacia estados más probables.

relacionadas por las ecuaciones de campo, de tal manera que el universo puede ser descrito en términos geométricos o en términos de energía y materia. Usaremos el lenguaje geométrico para presentar las condiciones para la flecha del tiempo debido a que la explicación en estos términos es más intuitiva.

Como es bien conocido, existen muchas soluciones consistentes con las ecuaciones de campo. Algunas de ellas no admiten una única coordenada temporal para todo el universo, o incluso no admiten la definición de las dos direcciones de tiempo de manera global. Por lo tanto, para poder definir una flecha del tiempo global es necesario requerir ciertas condiciones: que el espacio-tiempo sea orientable temporalmente y que exista una coordenada temporal definida globalmente.

### 1. Orientabilidad en el tiempo

Un espacio-tiempo  $(M, g_{\mu\nu})$  es orientable temporalmente, si existe un campo vectorial continuo  $\gamma^\mu(x)$  en la variedad  $M$  que es no-espacial [73]. Por intermedio de este campo, el conjunto de todos los semiconos de luz de la variedad pueden ser clasificados en dos clases de equivalencia,  $C_+$  (semiconos que contienen los vectores de este campo) y  $C_-$  (semiconos que no contienen a estos vectores). Está claro que los nombres  $C_+$  y  $C_-$  son convencionales y pueden ser intercambiados como se quiera: el único hecho relevante es que para todos los semiconos, cada uno de ellos pertenece solamente a una de las clases de equivalencia. Por el contrario, en un espacio-tiempo no orientable temporalmente, es posible transformar un vector de tipo temporal en otro que apunta en la dirección contraria por intermedio de una transformación continua; por lo tanto, las clases de equivalencia  $C_+$  y  $C_-$  no pueden ser definidas de una manera unívoca.

### 2. Tiempo global

La propiedad de orientabilidad en el tiempo no garantiza que se pueda hablar aún de una coordenada temporal para todo el universo: el espacio-tiempo puede no ser globalmente separado en hipersuperficies espaciales en las cuales todos los eventos sean simultáneos en ella. La condición de causalidad estable da cuenta de la existencia de un tiempo global en el espacio-tiempo [73], es decir una función  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo gradiente es de tipo temporal en todos lados. Esta condición garantiza el hecho que el espacio-tiempo puede ser foliado en hipersuperficies de simultaneidad ( $t = \text{constante}$ ), que pueden ser ordenadas de acuerdo al valor de  $t$  [117].

### 4.2.3. Definición de la flecha global no-entrópica

#### 1. Asimetría temporal

El carácter opuesto de ambas direcciones del tiempo global, e incluso las dos clases de equivalencia de los semiconos, no proveen un criterio no-convencional para distinguir las dos direcciones temporales. Tal criterio viene dado por la asimetría temporal del espacio-tiempo. Un espacio-tiempo orientable  $(M, g_{\mu\nu})$  con tiempo global  $t$  es temporalmente simétrico con respecto a cierta hipersuperficie espacial  $t = \alpha$ , si existe un difeomorfismo  $d$  de  $M$  en si mismo, que verifica que: (i) revierte la orientación temporal, (ii) preserva a la métrica  $g_{\mu\nu}$ , y (iii) deja invariante a la hipersuperficie  $t = \alpha$ . Intuitivamente esto significa que la hipersuperficie espacial  $t = \alpha$  divide al espacio-tiempo en dos mitades, siendo cada mitad la imagen especular en el tiempo de la otra. Contrariamente, en un espacio-tiempo asimétrico temporalmente, no existe tal hipersuperficie con respecto a la cual el espacio-tiempo se vea igual en ambas direcciones. Las características en una dirección son diferentes que en la dirección contraria, y esto se evidencia en la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Pero de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, esto lleva a que la distribución de materia y energía en el universo sea también asimétrica a lo largo del tiempo global. Entonces no importa que hipersuperficie sea usada para dividir en dos mitades a un espacio-tiempo asimétrico, que siempre ocurrirá que las propiedades de las dos mitades son sustancialmente diferentes, y tales diferencias establecen una distinción sustancial entre las dos direcciones del tiempo.

Ahora podemos asignar distintos nombres a las dos direcciones de tiempo sustancialmente diferentes. Por ejemplo, podemos llamar a uno de las direcciones como positiva y los semiconos orientados hacia esta dirección positiva como  $C_+$ , y la otra dirección de tiempo negativa con sus correspondientes semiconos  $C_-$ . Por supuesto que los nombres son convencionales, lo relevante es que ambas direcciones son sustancialmente distintas la una a la otra y los diferentes nombres usados para referirnos a ellas expresan tal diferencia sustancial.

#### 2. El significado de la invariancia ante inversión temporal en teorías covariantes de gravedad

La métrica  $g_{\mu\nu}$  y el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  de un espacio-tiempo particular, son soluciones de las ecuaciones de movimiento de la teoría considerada, la cual es invariante ante inversión temporal. Existe por lo tanto

otra solución dada por  $\mathcal{T} g_{\mu\nu}$  y  $\mathcal{T} T_{\mu\nu}$ , es decir los gemelos T-simétricos de las soluciones anteriores. Entonces pareciera que el fantasma de la simetría amenaza nuevamente: es como si estuviéramos obligados a imponer un criterio no convencional para seleccionar una u otra solución, siendo los candidatos imágenes especulares en el tiempo uno del otro. Sin embargo, en este caso la amenaza no es tan seria como parece.

Como es sabido, la inversión temporal es una transformación de simetría. Bajo la interpretación activa, una transformación de simetría corresponde a un cambio en el sistema; bajo la interpretación pasiva, una transformación de simetría consiste en cambiar el punto de vista desde el cual se describe al sistema. El enfoque tradicional de simetrías asume que en el caso de transformaciones discretas como la inversión temporal o reflexión espacial, solo tiene sentido la interpretación activa: un observador ideal puede rotarse a si mismo en el espacio, pero es imposible que *rote* en el tiempo [118]. Claro esta que esto es cierto cuando el observador está inmerso en el mismo espacio-tiempo que el sistema observado. Pero cuando el sistema es el universo como un todo, no podemos cambiar nuestra perspectiva espacial con respecto al universo: es igual de imposible rotar en el espacio como lo es rotar en el tiempo. Sin embargo, esto no significa que la interpretación activa sea la correcta: la idea de dos universos idénticos, uno trasladado en el espacio y otro en el tiempo con respecto al otro, no tiene sentido. Esto muestra que cuando ambas interpretaciones son aplicadas al universo como un todo, devienen en un sin sentido [47].

De hecho, en cosmología, a las transformaciones de simetría no se les da una interpretación activa ni pasiva. Dos espacio-tiempos  $(M, g_{\mu\nu})$  y  $(M', g'_{\mu\nu})$  son equivalentes si son isométricos, es decir que existe un difeomorfismo  $\theta : M \rightarrow M'$  que lleva a la métrica  $g_{\mu\nu}$  a  $g'_{\mu\nu}$  [73]. Debido a que las transformaciones de simetría son isomorfismos (en particular la reversión temporal), dos modelos relacionados por una transformación de simetría son considerados como descripciones equivalentes del mismo espacio-tiempo.

Por lo tanto, en contraste con las teorías locales, cuando el objeto a describir es el universo como un todo, no es necesario imponer un criterio no-convencional para seleccionar una solución del par de gemelos T-simétricos. Esta diferencia fundamental entre teorías de gravedad con soluciones definidas globalmente y las teorías locales, es lo que permite el enfoque global del problema de la flecha del tiempo.

### 3. El carácter genérico de la flecha global y no-entrópica



Como hemos visto, el enfoque global entrópico explica la flecha del tiempo en términos de una función de entropía creciente del universo. Como consecuencia, este enfoque debe lidiar con un estado inicial de baja entropía. Entonces, el problema de la flecha del tiempo se traduce en preguntarse por qué el estado inicial del universo tiene baja entropía. El problema es que un estado inicial con tan baja entropía es extraordinariamente improbable. Por lo tanto, el enfoque entrópico global está obligado a responder sobre tal improbable condición inicial (ver, por ejemplo, los argumentos de la flecha global entrópica en [57, 107] y las críticas en [112]).

En el enfoque no-entrópico no existen condiciones iniciales improbables que tengan que ser tenidas en cuenta. Por el contrario, el subconjunto de espacio-tiempos simétricos tiene medida nula dentro del conjunto de todos los posibles espacio-tiempos admitidos por cierta teoría covariante de la gravedad. Esto puede ser entendido intuitivamente sobre la base que la simetría es una propiedad específica, cuando la asimetría es general. De la colección de todos los posibles espacio-tiempos, aquellos dotados con una flecha del tiempo global y no-entrópica son altamente probables: la no existencia de una flecha del tiempo es lo que requeriría una sintonía fina entre los parámetros del universo.

Estos argumentos, basados en resultados teóricos, son relevantes cuando se busca encontrar una diferencia sustancial entre las dos direcciones temporales. Claro está que las distintas teorías no quedan determinadas por la evidencia experimental, y esto se da fuertemente en cosmología, donde la observabilidad de los horizontes introduce límites a nuestra accesibilidad de datos empíricos. Podría ser el caso que el universo fuera simétrico temporalmente, o que no tuviera un tiempo definido globalmente, incluso que no fuera orientable. Sin embargo, esto no socava la baja improbabilidad de que posea simetría temporal. Pero como tal baja probabilidad no implica imposibilidad, no podemos excluir la posibilidad de que sea simétrico temporalmente. En este caso, el enfoque global y no-entrópico de la flecha del tiempo no existiría, y la explicación de las asimetrías temporales locales que daremos en las próximas secciones no sería aplicable. Es por lo tanto bastante claro que este caso no puede ser excluido, ni por razones lógicas, como tampoco por argumentos teóricos. Por otro lado, es difícil encontrar argumentos teóricos ó empíricos que puedan ser usados para justificar que nuestro universo no posee una flecha del tiempo global; al contrario, los modelos cosmológicos que se estudian hoy en día son aceptados como las mejores representaciones del universo actual y son temporalmente asimétricos. Como

siempre, en física, y en toda ciencia en general, no existen explicaciones irrefutables. No obstante, podemos decidir aceptar una explicación particular sobre la base de su riqueza para dar cuenta de la evidencia empírica y su consistencia con el conocimiento disponible.

#### 4.2.4. Transfiriendo la flecha del tiempo global a contextos locales

Como hemos visto, la asimetría temporal establece una diferencia sustancial entre las dos direcciones del tiempo. Esta asimetría temporal es una propiedad física del espacio-tiempo, que puede ser expresada de manera equivalente en términos geométricos  $g_{\mu\nu}$  o en términos de la distribución de materia y energía  $T_{\mu\nu}$ . Sin embargo, ninguna de las dos descripciones puede ser introducida en teorías locales que, en principio, no contienen los conceptos de métrica o el tensor de energía-momento. Por esta razón, si se quiere transferir la flecha global a contextos locales, debemos trasladar la asimetría temporal embebida en  $g_{\mu\nu}$  y  $T_{\mu\nu}$  en cierta característica que pueda ser expresada con los conceptos de teorías locales. Esto puede ser realizado expresando el tensor de energía-momento en términos de un flujo de energía.

La componente  $T_{00}$  del tensor de energía-momento representa la densidad de materia y energía, mientras que las componentes  $T_{0i}$  representan el flujo de energía espacial. Entonces,  $T_{0\alpha}$  puede ser visto como el flujo de energía y materia espacio-temporal, que contiene no solo el flujo en el espacio sino también en el tiempo; lo llamaremos flujo de energía para abreviar. A su vez  $T_{\mu\nu}$  satisface la condición de energía dominante, es decir que en toda base ortonormal se cumple  $T_{00} \geq |T_{\alpha\beta}|$ , para cada  $\alpha, \beta$ . Esta es una condición débil, en el sentido que casi todas las distribuciones de materia y energía satisfacen esta condición [73]. El significado de la condición de energía dominante es que para cualquier observador local, la densidad de energía  $T_{00}$  no es negativa y el flujo de energía  $T_{0\alpha}$  no es de tipo espacial. Esto significa que  $T_{00}$  apunta en la misma dirección temporal y, debido a que da la dirección temporal de  $T_{0\alpha}$ , entonces el flujo de energía está dotado de la misma característica.

El primer punto a destacar es que la condición de energía es inmune a los efectos del operador de inversión temporal:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} T_{00} &= T_{00} & \mathcal{T} T_{i0} &= -T_{i0} \\ \mathcal{T} T_{0i} &= -T_{0i} & \mathcal{T} T_{ij} &= T_{ij} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por lo tanto, la inversión temporal no cambia el signo de  $T_{00}$  y como consecuencia, si la condición es satisfecha por  $T_{\mu\nu}$ , también es satisfecha por  $\mathcal{T} T_{\mu\nu}$ .

El segundo punto a enfatizar es que sin haber establecido una diferencia sustancial entre ambas direcciones temporales, el término positivo aplicado a  $T_{00}$  por la condición de energía dominante es meramente convencional. El contenido relevante de la condición es que el flujo de energía  $T_{0\alpha}$  no es espacial (es decir que el flujo de energía no se mueve más rápido que la velocidad de la luz), y que apunta en la misma dirección temporal en los puntos donde la condición se satisface. Por lo tanto, podemos elegir cualquier dirección como positiva, y la condición preserva su significado conceptual.

El tercer punto que merece ser destacado es la aplicación de la condición a espacio-tiempos tales que  $T_{00}$  apunta en la dirección temporal “opuesta” que la del espacio-tiempo original. Consideremos dos espacio-tiempos con  $T'_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$  y  $T''_{\mu\nu} = -\mathcal{T} T_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} T'_{00} &= -T_{00} & T''_{00} &= -T_{00} \\ T'_{0i} &= -T_{0i} & T''_{0i} &= T_{0i} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si la condición de energía dominante es satisfecha por  $T_{\mu\nu}$ , también es satisfecha por  $T'_{\mu\nu}$  y  $T''_{\mu\nu}$ , con el único cambio en la desición convencional acerca de la dirección temporal positiva. Esto no es sorprendente debido a que los modelos con  $T_{\mu\nu}$ ,  $T'_{\mu\nu}$  y  $T''_{\mu\nu}$  son isométricos y por lo tanto son descripciones equivalentes del mismo universo: decir entonces que uno de ellos tiene la dirección temporal “opuesta” al otro no tiene sentido.

Una vez que estos delicados puntos son entendidos, resulta claro que el contenido no-convencional de la condición de energía dominante, no es la identificación sustancial de una dirección temporal como la dirección del flujo de energía, sino la coordinación de la dirección temporal de tal flujo en todos los puntos del espacio-tiempo donde se satisface la condición. En otras palabras, si  $T_{\mu\nu}$  satisface la condición en todos los puntos del espacio-tiempo, se puede garantizar que el flujo de energía siempre está contenido en los semi-conos pertenecientes a una de las dos clases,  $C_+$  ó  $C_-$ , surgidos de la partición dada por la orientabilidad temporal. En este punto, alguien podría suponer que si esta condición es satisfecha, ya resolvería el problema de la flecha del tiempo: si el flujo de energía apunta en la misma dirección en todo punto del espacio-tiempo, entonces definamos esa dirección como el futuro, sin necesitar de asimetría temporal. Sin embargo esta conclusión no tendría en cuenta

la elección convencional de la dirección positiva en el flujo de energía. De hecho, aún en el caso en que el flujo de energía esté siempre contenido en, por ejemplo, los semiconos  $C_+$ , en un espacio-tiempo temporalmente simétrico, las diferencias entre  $C_+$  y  $C_-$  son convencionales. Solo en el caso en que podamos distinguir sustancialmente entre las dos direcciones temporales en términos de la asimetría temporal, es que podemos usar el flujo de energía, cuya dirección es siempre la misma en todo el espacio-tiempo, para expresar tal diferencia sustancial. En resumen, la flecha del tiempo es definida por la asimetría del espacio-tiempo, y es expresada por el flujo de energía.

Hasta ahora no hemos utilizado los términos pasado y futuro. Dado que son solo etiquetas, su aplicación es convencional. Ahora podemos introducir la convención usual en física, que consiste en llamar futuro a la dirección dada por  $T_{00}$  y, también a la del flujo de energía  $T_{0\alpha}$ . Es decir que bajo la condición de energía dominante,  $T_{0\alpha}$  queda siempre contenido en los semiconos que pertenecen a las clases  $C_+$ . Con esta convención podemos decir que el flujo de energía está dirigido hacia el futuro para un observador localizado en cualquier punto del espacio-tiempo<sup>2</sup>.

Como hemos visto en las secciones anteriores, toda ecuación que es invariante ante inversión temporal, conduce a la existencia de un par de gemelos T-simétricos. Desde el punto de vista de una teoría local, la diferencia entre ellos es convencional. El argumento tradicional para descartar una de las soluciones es invocar a nociones temporalmente asimétricas no justificadas por la misma teoría. Este tipo de argumentación no es legítima en el contexto del problema de la flecha del tiempo, en la medida que introduce la flecha a mano, presuponiendo a-priori la diferencia entre las dos direcciones del tiempo. En otras palabras, violan el requerimiento del punto de vista atemporal. Por lo tanto, desde un punto de vista atemporal, el reto consiste en proveer un criterio no-convencional, basado en argumentos teóricos, para distinguir entre los dos miembros del par de gemelos. El criterio deseado, que no puede ser provisto por la teoría local o por nuestras experiencias temporalmente asimétricas, puede estar basado en consideraciones globales.

Si adoptamos la convención usual, tal que el futuro es la dirección temporal del flujo de energía y  $C_+(x)$  denota a los semiconos futuros, entonces el flujo de energía queda contenido en el semicono futuro para todo punto

---

<sup>2</sup>Si pudiéramos calcular la entropía global del universo, con esta convención diríamos que la entropía aumenta hacia el futuro. Pero esto requeriría resolver las dificultades técnicas para definir tal entropía (ver subsección ).

del espacio-tiempo. Por otro lado, en todo par de gemelos T-simétricos los miembros del par involucran a flujos de energía apuntando en direcciones temporales opuestas, sin tener un criterio no-convencional para distinguirlos. Pero una vez que se ha establecido una diferencia sustancial entre pasado y futuro y que se ha decidido que el flujo esté dirigido hacia el futuro, existe un criterio sustancial para descartar a uno de los dos gemelos, y quedarse con la solución relevante de la teoría. Por ejemplo, en el caso del electromagnetismo solo las soluciones retardadas son las seleccionadas, dado que describen estados que llevan energía hacia el futuro.

Otro ejemplo es la creación y el decaimiento de estados inestables. Desde un estado de equilibrio  $\rho_*$ , es creado un estado de no-equilibrio  $\rho(t = 0)$  por intermedio de un proceso antidisipativo, con el factor de evolución  $e^{\gamma t}$  y  $\gamma < 0$ . Este estado de desequilibrio  $\rho(t = 0)$  decae hacia el equilibrio  $\rho_*$  a través de un proceso disipativo con factor  $e^{-\gamma t}$  y  $\gamma > 0$ . Cuando se lo ve localmente, el par de gemelos (antidisipativo  $\gamma < 0$  y disipativo  $\gamma > 0$ ) son convencionalmente diferentes. Sin embargo, dado que el pasado es sustancialmente diferente del futuro, y, de acuerdo a la convención usual (energía fluyendo de pasado a futuro), los estados inestables son siempre creados por intermedio de energía ganada del flujo de energía proveniente del pasado, mientras que los estados inestables devuelven la energía al flujo dirigido hacia el futuro. Por lo tanto, el flujo de energía introduce una diferencia sustancial entre los dos miembros del par.

En las secciones siguientes, analizaremos la rotura de la simetría que introduce el flujo de energía en distintas leyes locales, provenientes de teorías fundamentales y fenomenológicas; en este último caso, lo primero será identificar al segundo gemelo que usualmente queda oculto en el formalismo.

## 4.3. Ejemplos en Teorías Fundamentales de la Física

### 4.3.1. Mecánica Cuántica

La irreversibilidad en mecánica cuántica está basada en el uso del espacio de Hilbert equipado, debido a la habilidad de este formalismo para modelar procesos irreversibles, como por ejemplo el decaimiento exponencial o procesos de scattering [31]. La estrategia consiste en introducir dos subespacios,  $\Phi_-$  y  $\Phi_+$ , del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Estos subespacios llevan a dos espacios

de Hilbert equipados:

$$\Phi_- \subset \mathcal{H} \subset \Phi_-^\times \quad \Phi_+ \subset \mathcal{H} \subset \Phi_+^\times \quad (4.21)$$

donde  $\Phi_-^\times$  y  $\Phi_+^\times$  son los espacios anti-duales de  $\Phi_-$  y  $\Phi_+$  respectivamente.

Esta estrategia permite obtener las dos estructuras temporalmente simétricas de una teoría invariante ante inversión temporal. De hecho, la mecánica cuántica formulada en el espacio de Hilbert es invariante dado que:

$$\mathbf{T} \mathcal{H} = \mathcal{H} \quad (4.22)$$

donde  $\mathbf{T}$  es el operador antilineal y antiunitario de inversión temporal. Pero si la mecánica cuántica se formula en los espacios  $\Phi_\pm$ , resulta no ser invariante ante inversión temporal, debido a que:

$$\mathbf{T} \Phi_\pm = \Phi_\mp \quad (4.23)$$

Además, en la continuación analítica del espectro de energía del sistema Hamiltoniano, existen al menos un par de polos complejos conjugados, uno en el semiplano inferior y el otro en el semiplano superior del plano complejo. Este par corresponde a un par de vectores de Gamov:

$$|\Psi_G^-\rangle \in \Phi_-^\times \quad |\Psi_G^+\rangle \in \Phi_+^\times \quad (4.24)$$

Estos vectores son propuestos para describir procesos irreversibles. Pero la posición simétrica de los polos con respecto al eje real en el plano complejo, indican que los vectores de Gamov son gemelos T-simétricos.

En su detallada descripción de un proceso de scattering, Bohm rompe la simetría entre los gemelos apelando a la llamada *flecha del tiempo de preparación-registro* [30]. La idea central de su propuesta es que las propiedades observables de un estado no pueden ser medidas hasta que el estado que actúa como portador de estas propiedades sea preparado.

Por ejemplo, en un proceso de scattering, no tiene sentido medir el ángulo de scattering hasta que cierto estado sea preparado en el acelerador. Sobre esta base, Bohm propuso el siguiente postulado de interpretación: los vectores  $|\varphi\rangle \in \Phi_-$  representan los estados del sistema y los vectores  $|\psi\rangle \in \Phi_+$  representan los observables del sistema, en el sentido que los observables son obtenidos como  $O = |\psi\rangle\langle\psi|$ . El instante  $t = 0$  es considerado el instante en el cual la preparación termina y comienza la detección. La flecha de preparación-registro impone el requerimiento que la distribución de energía producida por

el acelerador, representada por  $\langle \omega | \varphi \rangle$ , sea cero para  $t > 0$ , y la energía del estado detectado, representada por  $\langle \omega | \psi \rangle$ , sea cero para  $t < 0$ :

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &\in \Phi_- & \langle \omega | \varphi \rangle &= 0 \quad \text{for } t > 0 \\ |\psi\rangle &\in \Phi_+ & \langle \omega | \psi \rangle &= 0 \quad \text{for } t < 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

La evolución temporal, tradicionalmente representada por el grupo  $U_t$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , es representada en este caso por dos semigrupos  $U_t^-$  y  $U_t^+$ : (i)  $U_t^-$  es  $U_t$  restringido a  $\Phi_-$  y, entonces, es válido sólo para  $t > 0$ , y (ii)  $U_t^+$  es  $U_t$  restringido a  $\Phi_+$  y, entonces, es válido sólo para  $t < 0$

$$\begin{aligned} U_t^- &: \Phi_- \rightarrow \Phi_- & |\varphi(t)\rangle &= U_t^- |\varphi_0\rangle \quad \text{for } t > 0 \\ U_t^+ &: \Phi_+ \rightarrow \Phi_+ & |\psi(t)\rangle &= U_t^+ |\psi_0\rangle \quad \text{for } t < 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como consecuencia, los dos vectores de Gamov  $|\Psi_G^-\rangle \in \Phi_-^\times$  y  $|\Psi_G^+\rangle \in \Phi_+^\times$  resultan ser representaciones de creación y decaimiento, respectivamente: la evolución del vector de Gamov de creación  $|\Psi_G^-\rangle$  puede ser definido para  $t < 0$ , y la evolución del vector de decaimiento  $|\Psi_G^+\rangle$  para  $t > 0$ .

Como vemos, el enfoque de Bohm rompe la simetría entre los gemelos T-simétricos, por intermedio del postulado de la flecha de preparación-registro. Esta estrategia suministra una solución al problema de la irreversibilidad en la medida que permite la representación de procesos irreversibles de creación y decaimiento. Sin embargo, no ofrece una solución teórica al problema de la flecha del tiempo, dado que la flecha de preparación-registro es introducida como un postulado de la teoría. De hecho, tal flecha presupone la distinción entre pasado y futuro desde el principio: en el pasado se prepara al sistema, y en el futuro el sistema es medido. Está claro que tal postulado esta basado en asunciones intuitivas, como el hecho de que la preparación sea previa a la medición. Desde un punto de vista atemporal, podríamos revertir tal postulado considerando que  $\Phi_+$  es el espacio de estados, y  $\Phi_-$  es el espacio de vectores por medio del cual se obtienen los observables; en este caso obtendríamos la imagen especular en el tiempo de la teoría original, donde  $|\Psi_G^+\rangle$  y  $|\Psi_G^-\rangle$  representan estados de creación y decaimiento respectivamente, ambos evolucionando hacia atrás en el tiempo.

No obstante, es posible encontrar una justificación teórica para la flecha de preparación-registro, y por consiguiente seleccionar la versión del postulado orientado hacia el futuro. La rotura de la simetría entre ambos gemelos es suministrado por el flujo de energía representado por  $T_{0\alpha}$ . La preparación

de los estados  $|\varphi\rangle \in \Phi_-$  requiere energía proveniente de otros procesos. El vector de creación de Gamov  $|\Psi_G^-\rangle$  representa los estados creados para  $t < 0$ , los cuales absorben energía del pasado. Por otro lado, el registro de las propiedades de los observables  $|\psi\rangle \in \Phi_+$  provee energía a otros procesos. Nuevamente, dado que el flujo de energía va del pasado al futuro, la medición de los observables emite energía hacia el futuro. Resumiendo, el flujo de energía suministra un criterio para seleccionar la versión orientada hacia el futuro del postulado de Bohm.

### 4.3.2. Teoría Cuántica de Campos

Habíamos comentado que las dos clases de semiconos de luz  $C_+$  y  $C_-$  es un par de gemelos T-simétricos. En cualquiera de sus versiones, la teoría cuántica de campos (TCC) axiomática incluye un postulado no-invariante ante inversión temporal [29], el llamado postulado III, que establece que el espectro del operador de energía-momento  $P^\mu$  está confinado en los semiconos futuros, es decir, que sus autovalores  $p^\mu$  satisfacen:

$$p^2 \geq 0 \quad p^0 \geq 0 \quad (4.27)$$

Este postulado afirma que cuando medimos el observable  $P^\mu$ , obtenemos un vector no-espacial contenido en el semicono futuro, es decir, un semicono que pertenece a  $C_+$ .

Es claro que la condición  $p^0 \geq 0$  selecciona uno de los elementos del par de gemelos T-simétricos  $C_+$  y  $C_-$  o, en otras palabras, del par  $p^0 \geq 0$  y  $p^0 \leq 0$  que surgiría de la teoría en la ausencia del postulado que rompe la invariancia temporal. Por medio de este postulado, una TCC se convierte en una teoría no-invariante ante inversión temporal. El reto es entonces, justificar tal postulado por medio de argumentos teóricos.

Recordemos que en el tensor de energía-momento,  $T_{0\alpha}$  representa el flujo espacio-temporal de energía y materia y  $T_{\alpha 0}$  representa la densidad de impulso lineal. Dado que  $T_{\mu\nu}$  es un tensor simétrico,  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  y entonces,  $T_{0\alpha} = T_{\alpha 0}$ ; en otras palabras, el flujo de materia y energía es igual a la densidad de impulso. Esto significa que si  $T_{0\alpha}$  puede ser usado para expresar la flecha del tiempo global bajo la condición de energía dominante, también es el caso para la densidad de impulso. Pero  $T_{\alpha 0}$  es precisamente la magnitud que corresponde al vector  $p^\mu$  clásico en TCC. En cada punto  $x$  del espacio-tiempo,  $T_{\alpha 0}(x) \in C_+(x) \implies p^\mu \sim T_{\alpha 0}(x) \in C_+(x)$ . El hecho que  $p^\mu$  esté contenido en



$C_+(x)$ , en cada punto y para cada partícula clásica, resulta ser consecuencia de la asimetría temporal del espacio-tiempo cuando la condición de energía dominante se satisface en todo punto. Por lo tanto, el postulado III de TCC puede ser justificado con argumentos globales en lugar de ser impuesto desde el principio.

En la versión ordinaria de TCC, la clasificación de los estados de una partícula de acuerdo a las transformaciones bajo el grupo de Lorentz, lleva a seis clases de cuadri-momentos. De estas clases se considera que solo tres tienen significado físico: estas son precisamente los casos que concuerdan con el postulado de no-invariancia temporal de la versión axiomática de TCC. En otras palabras, el grupo de simetrías de TCC es el grupo ortocronal [120], donde se incluye la reversión espacial  $\mathcal{P}$  pero no la temporal  $\mathcal{T}$ . Esta es otra manera de expresar la no-invariancia temporal de TCC. En este caso, la no-invariancia temporal es introducida no en función de un postulado, sino sobre la base de argumentos empíricos que descarta cierta clase de cuadri-momentos por no tener significado físico alguno.

Sin embargo, en la medida que la relatividad especial y la mecánica cuántica son teorías con invariancia temporal, estos argumentos no dan una justificación teórica para tal rotura de la simetría.

Veamos este punto en términos diferentes. Los correlatos cuánticos de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{T}$ , están definidos como:

$$\mathbf{P}iP^\nu\mathbf{P}^{-1} = iP_\mu^\nu P^\mu \quad \mathbf{T}iP^\nu\mathbf{T}^{-1} = iT_\mu^\nu P^\mu \quad (4.28)$$

donde  $\mathbf{P}$  es un operador lineal unitario y  $\mathbf{T}$  es antilineal no unitario. De hecho, si  $\mathbf{T}$  fuera lineal y unitario, podríamos cancelar las  $i$ 's y entonces de (4.28),  $\mathbf{T}P^0\mathbf{T}^{-1} = -P^0$ : la acción de  $\mathbf{T}$  sobre  $P^0$  invertiría el signo de  $P^0$ , con la consecuencia que el espectro del operador de energía-momento invertido estaría contenido en el semicono de luz pasado. Precisamente, para  $\nu = 0$ ,  $P^0 = H$ , donde  $H$  es el operador de energía; entonces, si  $\mathbf{T}$  fuera lineal y unitario,  $\mathbf{T}H\mathbf{T}^{-1} = -H$ , con la consecuencia que para cada cualquier estado con energía  $E$  existiría otro estado con energía  $-E$ . La antilinealidad y antiunitariedad evita esta situación anómala, consistente con las condiciones impuestas por el postulado de no-invariancia. Nuevamente hay buenas razones empíricas para que sea antilineal y antiunitario, pero no una justificación teórica.

Resumiendo, en TCC ordinaria siempre es necesario decidir sobre la dirección temporal del operador  $P^\mu$ . El punto que queremos remarcar aquí es

que tanto en el caso del postulado de la versión axiomática de TCC, o en la versión usual de TCC, la desición de tal elección puede ser justificada en base a consideraciones globales.

Otro ejemplo de soluciones simétricas temporalmente es el de los gráficos de Feynman (ver figura 4.2), donde la dirección horizontal corresponde idealmente al eje de tiempos, el vertical el eje espacial,  $|\Phi_2\rangle$  es un estado de dos partículas y  $|\Phi_n\rangle$  de  $n$  partículas.

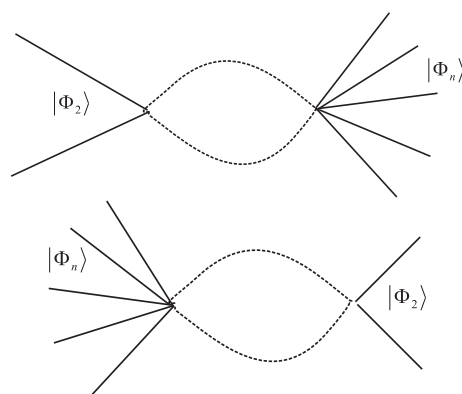


Figura 4.2: Gemelos T-simétricos de los gráficos de Feynman

Como discutimos en las secciones previas, en esta etapa no existe ningún criterio sustancial para seleccionar la dirección pasado-futuro en el eje temporal. Entonces, ni siquiera podemos considerar movimientos (convergencia al vértice o divergencia) a lo largo de las líneas del gráfico porque ambos gráficos son idénticos: uno es la imagen especular en el tiempo del otro. Es más, las probabilidades de ambos son iguales:

$$p_1 = |\langle \Phi_2 | \Phi_n \rangle|^2 = |\langle \Phi_n | \Phi_2 \rangle|^2 = p_2 \quad (4.29)$$

Las probabilidades no son afectadas por la dirección del tiempo. La simetría temporal de ambos gráficos es consecuencia de la invariancia temporal de las leyes físicas sobre las cuales se basan los gráficos de Feynman. Si queremos distinguirlos, deberíamos decir que en uno de los gráficos el estado  $|\Phi_2\rangle$  está a la izquierda (en el pasado) de  $|\Phi_n\rangle$ , y en el segundo gráfico  $|\Phi_2\rangle$  está a la derecha (en el futuro) de  $|\Phi_n\rangle$ . Pero este argumento precisa de un argumento teórico para distinguir entre izquierda y derecha en el gráfico. Al considerar el flujo de energía a lo largo del proceso, la diferencia entre los

gráficos es sustancial. Agregando a los gráficos la dirección dada por este flujo (izquierda-derecha en ambos gráficos) vemos que en el primero dos flechas convergen a un blanco y  $n$  flechas divergen de él. La imagen especular en el tiempo de uno de ellos no es el otro gráfico: ambos gráficos no son idénticos, debido a que el flujo de energía introduce una diferencia sustancial entre ellos. En base a esta diferencia, podemos definir el primero como el proceso típico de un scattering cuántico y nombrar a  $|\Phi_2\rangle$  como el estado preparado y  $|\Phi_n\rangle$  el estado detectado. En este contexto podemos decir que la flecha del tiempo va de la preparación a la detección en un proceso de scattering.

Finalmente, vale la pena reflexionar sobre el rol de las interacciones débiles en el problema de la flecha del tiempo. El teorema CPT afirma que **CPT** es la única combinación de conjugación de carga **C**, reflexión de paridad **P** e inversión temporal **T**, que es una simetría de TCC. De hecho, es bien sabido que las interacciones débiles rompen la simetría **T** del teorema CPT. De acuerdo a opiniones comunes, es precisamente el hecho empírico la clave para la solución del problema de la flecha del tiempo: dado que la simetría **T** es violada en interacciones débiles, estas introducirían una manera no-conventional para distinguir ambas direcciones temporales. La pregunta sería: ¿Es la rotura de la simetría **T** en las interacciones débiles lo que distingue entre ambas direcciones de tiempo en TCC?. Como hemos visto, el operador **T** fue diseñado para evitar cierta clase de cuadri-momentos. La acción de este operador sobre el operador  $P^\mu$  preserva la dirección temporal de  $P^\mu$  y, por lo tanto, sus autovalores. Es este hecho fundamental que hace que TCC sea temporalmente no-invariante, y no la violación de **T** en interacciones débiles. Es decir, aún en el caso que no existieran las interacciones débiles, TCC seguiría siendo una teoría no-invariante temporalmente, que distinguiría ambas direcciones temporales<sup>3</sup>. El problema real es justificar el carácter no-invariante de la teoría que es presentada como una síntesis de dos teorías invariantes ante inversión temporal, como la relatividad y la mecánica cuántica. Pero este problema es independiente de la existencia de interacciones débiles. Resumiendo, las interacciones débiles no juegan un rol relevante en el problema de la flecha del tiempo como fue supuesto inicialmente.

---

<sup>3</sup>Ciertamente esto lleva a un problema diferente: explicar por qué de todas las interacciones fundamentales, sólo las débiles rompen la invariancia temporal. Ha sido sugerido que las interacciones débiles definen la flecha del tiempo, pero no está nada claro de que manera este fenómeno microscópico puede romper la simetría temporal que surge en los gemelos macroscópicos.

## 4.4. Ejemplos en Teorías Fenomenológicas

Las teorías fenomenológicas son usualmente no-invariantes ante inversión temporal; por lo tanto, la solución físicamente relevante es la que está dirigida hacia el futuro. Sin embargo, en estas teorías, la complejidad de los modelos fundamentales es escondida en ciertos coeficientes fenomenológicos que son asumidos positivos; pero si estos coeficientes son deducidos de las leyes subyacentes de la teoría, es posible descubrir la contraparte negativa. Esto significa que cuando una teoría fenomenológica es explicada en términos fundamentales, la invariancia temporal oculta se manifiesta, y el correspondiente par de gemelos puede ser identificado. Veremos algunos ejemplos.

### 4.4.1. Oscilador Armónico Amortiguado

Este es el ejemplo paradigmático. Consideremos la ecuación del oscilador armónico amortiguado:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{\zeta}{m} \dot{x} = 0 \quad (4.30)$$

donde  $-\zeta \dot{x}$  es el término viscoso, que se opone al movimiento en el fondo de viscosidad  $\zeta \geq 0$ . Si proponemos  $x = e^{at}$ , obtenemos la solución:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm i\tilde{\omega}t} x(0) \quad (4.31)$$

donde  $\gamma = \frac{\zeta}{m} \geq 0$  y  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$  (consideramos el caso  $\omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \geq 0$ ). Como consecuencia, la evolución temporal resultante es un oscilador tendiendo al equilibrio: para  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ . La energía del proceso es disipada hacia el futuro en forma de calor. Esta solución corresponde a uno de los gemelos fenomenológicos. El segundo gemelo es la versión revertida temporalmente de (4.31), donde  $\zeta$  y  $\gamma$  son negativos. Esto parece extraño a primera vista, pero la existencia de esta solución antidisipativa es una consecuencia necesaria de la invariancia temporal de las leyes fundamentales subyacentes en este proceso. Si el primer gemelo disipa energía hacia el futuro, el segundo adquiere la energía del pasado para amplificar sus oscilaciones.

### 4.4.2. Ley de Fourier

La ley de Fourier en termodinámica nos dice que el calor es transportado de una región de mayor temperatura a otra de menor temperatura:

$$\mathbf{J} = -K \nabla T \quad (4.32)$$

Si esta ecuación es deducida de una teoría fundamental, resultaría ser invariante ante inversión temporal. A su vez, se sabe que la temperatura  $T$  y su gradiente  $\nabla$  no cambia de signo ante inversión temporal, y que para el flujo,  $\mathcal{T}\mathbf{J} = -\mathbf{J}$ . Entonces, si la expresión (4.32) tiene que resultar invariante, se tiene que  $\mathcal{T}K = -K$ : el coeficiente negativo  $K$  llevaría al segundo de los gemelos T-simétricos.

### 4.4.3. Teoría de Campos en FRW

Un ejemplo de un capítulo completamente distinto de la física proviene de una teoría de campos en espacios curvos. Si bien no es una teoría fenomenológica, tendremos en cuenta su aplicación a soluciones cosmológicas, las cuales tienen una extensa comprobación observacional. Consideremos la solución de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y un campo escalar  $\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\frac{\mathbf{k}}{a}\cdot\mathbf{x}}\varphi(t)$ , donde  $a$  es el factor de escala del universo,  $\mathbf{k}$  es el momento lineal y  $\varphi(t)$  es el factor de evolución temporal que satisface:

$$\ddot{\varphi}(t) + 3H\dot{\varphi}(t) + \left[ m^2 + \left( \frac{\mathbf{k}}{a} \right)^2 \right] \varphi(t) = 0 \quad (4.33)$$

donde  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es el coeficiente de Hubble y  $m$  es la masa del campo escalar. La ecuación (4.33) es similar a (4.30) si hacemos la analogía  $\zeta = 3mH$ . Cuando  $H > 0$ , el universo describe una evolución disipativa de tal forma que  $\varphi(t)$  se anula para  $t \rightarrow \infty$  [48]. Pero incluso si  $H > 0$  en un universo en expansión, entonces es  $H < 0$  en un universo en contracción. Esto muestra que la invariancia temporal de la ecuaciones de la relatividad general no excluye un coeficiente de viscosidad negativa que lleva a encontrar al segundo gemelo T-simétrico.

### 4.4.4. Viscosidad y Conductividad Térmica

En esta subsección veremos como surge el par de gemelos en el caso de un fluido viscoso cuando las ecuaciones son deducidas de las leyes de la mecánica clásica. Las ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u_j = F_j - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \quad (4.34)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $u_i$  es la velocidad,  $P_{ij}$  es un potencial,  $F_j$  las fuerzas externas, y  $G_j = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}$  son las fuerzas internas, es decir las fuerzas debidas a los volúmenes vecinos del fluido. Considerando el caso irrotacional, obtenemos la siguiente expresión para  $P_{ij}$ :

$$P_{ij} = \delta_{ij}p - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (4.35)$$

donde  $p$  es la presión y  $\mu$  la viscosidad.

Dado que la ecuación (4.35) fue obtenida en base a la mecánica clásica, es necesariamente invariante ante inversión temporal. Podemos entonces inferir el comportamiento de la viscosidad  $\mu$  ante la aplicación del operador de inversión temporal. Del miembro izquierdo de (4.35),

$$\mathcal{T}P_{ij} = P_{ij} \quad (4.36)$$

ya que  $P_{ij}$  es un potencial que satisface  $G_j = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}$ . Por otro lado, del primer término del miembro derecho de (4.35),

$$\mathcal{T}\delta_{ij}p = \delta_{ij}p \quad (4.37)$$

dado que  $p$  es la presión, es decir fuerza por unidad de área. Y para el segundo término,

$$\mathcal{T} \left( -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right) = -\mathcal{T}(\mu) \left( -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (4.38)$$

De las ecuaciones (4.36) y (4.37), se deduce que el segundo término debe ser invariante ante la aplicación de  $\mathcal{T}$ . Por lo tanto, la viscosidad cambia como  $\mathcal{T}\mu = -\mu$ . Esto muestra que las leyes fundamentales invariantes ante inversión temporal, subyacentes en las ecuaciones fenomenológicas, admiten valores positivos ó negativos para  $\mu$ . En la formulación usual, sólo los valores positivos son tomados en cuenta, sin embargo cuando la ecuación es derivada de las leyes fundamentales, el segundo gemelo lleva a que el proceso antidisipativo se manifieste. Podemos ir mas allá y rastrear el origen del valor negativo a nivel microscópico. Si tenemos en cuenta la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$f = \frac{n}{(2\pi m\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m}{2\theta}(v-V)^2} \quad (4.39)$$

donde  $\theta = kT$  y  $V$ , es el valor de velocidad más probable de las moléculas de un gas, que coincide con el máximo de  $f$ ,  $f_{\text{máx}} = v^2 f(v)$ . Esta distribución es

válida si el gas está en equilibrio. El método standard para estudiar un gas cerca del equilibrio consiste en considerar una familia de estas distribuciones en la vecindad de cualquier punto del gas y resolver las ecuaciones a diferentes órdenes correctivos en la función de Maxwell-Boltzmann. Luego, usando las ecuaciones de transporte para un gas con  $n$  moléculas por unidad de volumen, y aproximando a primer orden la ecuación (4.39), se llega a una expresión estadística para la viscosidad  $\mu$  y para la conductividad térmica  $K$ :

$$\mu = \frac{n\theta\lambda}{V} \quad K = \frac{5n\theta\lambda}{2V} \quad (4.40)$$

donde  $\lambda$  es el camino libre medio. Pero, nuevamente, si aplicamos el operador de inversión temporal a  $f_{\text{máx}}$ , obtenemos  $\mathcal{T}f_{\text{máx}} = v^2 f(-v)$ ; ahora, la velocidad más probable es  $-V$ . Dado que  $\theta = kT = \frac{2}{3}\epsilon$ , donde  $\epsilon$  es la energía cinética de las partículas del gas y

$$\epsilon = \frac{\int_0^\infty d^3p : \frac{p^2}{2m} f(p)}{\int_0^\infty d^3p : f(p)} \quad (4.41)$$

verificándose,  $\mathcal{T}\epsilon = \epsilon$ , y consecuentemente,  $\mathcal{T}\theta = \theta$ . No obstante de las ecuaciones (4.40) podemos ver que  $\mathcal{T}K = -K$  y  $\mathcal{T}\mu = -\mu$ : ambos  $\mu$  y  $K$  cambian de signo bajo la aplicación del operador de reversión temporal, lo cual desenmascara al segundo gemelo del par temporalmente simétrico.

#### 4.4.5. Termodinámica y Entropía Fenomenológica

Si la entropía fenomenológica es derivada de leyes fundamentales, la ecuación que hace que crezca hacia el futuro (segunda ley) tiene que ser un elemento del par de gemelos T-simétricos: como señaló Eherenfest hace muchos años, debe existir el gemelo revertido temporalmente que hace que la entropía crezca hacia el pasado. El problema consiste en descubrir esta solución apelando a las definiciones fundamentales subyacentes en el enfoque fenomenológico.

El balance de entropía es:

$$\frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_S = \sigma \quad (4.42)$$

donde  $\rho_S$  es la entropía por unidad de volumen,  $\mathbf{J}_S$  es el flujo de entropía y  $\sigma$  es la producción de entropía por unidad de volumen. Si  $X^A$  son las fuerzas

termodinámicas o afinidades, tales que  $X^A = \nabla\gamma^A$ , donde  $\gamma^A$  son las variables termodinámicas (es decir las coordenadas en el espacio termodinámico,  $A, B, \dots = 1, \dots, n$ , siendo  $n$  el número de variables<sup>4</sup>), y  $J_A$  son los flujos, entonces,  $\sigma$  resulta:

$$\sigma = \sum_A J_A X^A \quad (4.43)$$

Entonces, las relaciones de Onsanger-Casimir cerca del equilibrio son [48]

$$J_A = \sum_B M_{AB} X^B \quad (4.44)$$

donde  $M_{AB}$  es una matrix que contiene a los coeficientes fenomenológicos, tales como el coeficiente  $\gamma$  de (4.31), o la viscosidad  $\zeta$ , la viscosidad de corte  $\eta$ , la conductividad térmica  $\chi$  y todos los coeficientes restantes de las subsecciones previas. La matriz  $M_{AB}$  verifica:

$$M_{AB} = L_{AB} + f_{AB}, \quad L_{AB} = L_{BA}, \quad f_{AB} = -f_{BA} \quad (4.45)$$

Y la producción de entropía resulta:

$$\sigma = \sum_{AB} M_{AB} X^A X^B = \sum_{AB} L_{AB} X^A X^B \quad (4.46)$$

La segunda ley afirma que

$$\sigma \geq 0 \quad (4.47)$$

Como consecuencia,  $L_{AB}$  es una matriz definida positiva, es decir que todos los coeficientes fenomenológicos ( $\gamma, \zeta, \eta, \chi, \mu, K$ ) son positivos. Esto significa que la segunda ley describe procesos disipativos correspondiente al gemelo futuro del par de soluciones T-simétricas.

Los correspondientes gemelos antidisipativos se obtienen cambiando los signos. Sin embargo, su existencia también puede ser probada considerando la definición original de la entropía:

$$dS = \frac{dH}{T} \quad (4.48)$$

En esta definición,  $\mathcal{T}H = H$  (eq. (4.3)) y, dado que  $T \geq 0$ ,  $\mathcal{T}T = T$ , resulta  $\mathcal{T}S = S$ . Además,  $S = \rho_S V$  y, entonces,  $\mathcal{T}\rho_S = \rho_S$ . Debido a que  $\mathbf{J}_S = \rho_S \mathbf{v}$ , entonces  $\mathcal{T}\mathbf{J}_S = -\mathbf{J}_S$ . Aplicando estos resultados a (4.42), concluimos que:

$$\mathcal{T}\sigma = -\sigma \quad (4.49)$$

<sup>4</sup>Consideramos por simplicidad un espacio de una dimensión.



Esto significa que cuando la termodinámica es expresada en términos de definiciones fundamentales, surge el gemelo T-simétrico de la segunda ley. La solución correspondiente al primer gemelo pertenece al reino de la termodinámica fenomenológica, pero cuando ambos son considerados estamos en el contexto de la termodinámica fundamental. Sin embargo, sólo observamos procesos disipativos, y por lo tanto algo debe romper la simetría de ambas soluciones.

### 1. Rotura de la simetría con la segunda ley

Consideremos un oscilador inicialmente en movimiento dentro de un gas en reposo. El oscilador va perdiendo gradualmente su energía hasta que se detiene, mientras que las partículas inicialmente quietas del gas se ponen en movimiento. Este es un proceso disipativo paradigmático con el factor  $e^{-\gamma t}$  y  $\sigma > 0$ . El proceso opuesto también es posible de acuerdo a las leyes dinámicas. Si inicialmente el oscilador estuviera en reposo pero las moléculas estuvieran en el estado de movimiento opuesto que tenían al final del proceso anterior, la evolución sería antidisipativa con el factor  $e^{\gamma t}$  y  $\sigma < 0$ . Es evidente que los procesos disipativos son mucho más frecuentes que los antidisipativos, ya que los últimos son producidos por *conspiraciones* infrecuentes. Sin embargo, esto no es consecuencia de la teoría, sino de las condiciones iniciales. Podríamos decir que las condiciones iniciales no-conspirativas son fáciles de producir, pero las condiciones conspirativas son muy difíciles de obtener. No obstante, se trata de un problema práctico: siendo objetos macroscópicos es sencillo mover un oscilador, pero no es sencillo mover una gran cantidad de moléculas con las *conspiraciones* precisas. Es decir que la limitación es práctica y no resulta de alguna ley física. De hecho, algunas veces estas limitaciones pueden superarse, y obtener la inversión de velocidades, como se da en el caso de los experimentos de spin-eco [24, 90].

Algunos autores basan la definición de la flecha del tiempo en la segunda ley por razones prácticas, es decir, por la ausencia de *conspiraciones*. Sin embargo, tal posición los lleva a enfrentar una larga lista de críticas. De hecho, dado que los procesos antidisipativos no están descartados por leyes fundamentales de la física, una violación de la irreversibilidad no está prohibida por primeros principios sino por su gran improbabilidad [24]. Resumiendo, el hecho de apelar a limitaciones prácticas no es consecuencia de argumentos teóricos, incluso no es una manera objetiva de romper la simetría del par de gemelos fenomenológicos.

### 2. Rotura de la simetría con el flujo de energía

El flujo de energía dirigido hacia el futuro, que expresa la asimetría global en el tiempo, suministra un fundamento teórico para romper la simetría de los gemelos T-simétricos.

Comencemos con la ley de Fourier. Como hemos visto el coeficiente negativo  $K$  lleva a la existencia del segundo gemelo. Si el flujo de energía está dirigido hacia el futuro en todo punto del espacio-tiempo, en cada punto  $x$  el cuadvectores  $\mathbf{J}$ , que representa el flujo de calor, se encuentra contenido en el semicono  $C_+(x)$ . En el caso de la termodinámica, el límite clásico  $v/c \rightarrow 0$  debe ser aplicado; como consecuencia, el semicono  $C_+(x)$  se transforma en un semiplano futuro  $P_+(x)$ , pero este límite no afecta la orientación de  $\mathbf{J}$ . Entonces, aunque la ley dinámica fundamental lleve a la aparición de ambos gemelos correspondientes a las dos orientaciones posibles de  $\mathbf{J}$ , el flujo de energía rompe esta simetría al seleccionar el cuadvectores  $\mathbf{J}$  correspondiente a  $P_+(x)$ . Esto explica el valor positivo del coeficiente  $K$ , y consiguientemente explica la segunda ley.

Desde un punto de vista más general, hemos visto que el gemelo T-simétrico de la segunda ley  $\sigma \geq 0$  es  $\sigma \leq 0$ : cuando  $\sigma > 0$ , el proceso produce energía, y cuando  $\sigma < 0$  el proceso absorbe energía del pasado. Notemos nuevamente que si no tuviéramos un criterio para definir la dirección pasado-futuro, las afirmaciones previas carecerían de sentido. Por el contrario, con el flujo de energía apuntando en la misma dirección en todo punto del espacio-tiempo, legítimamente podemos decir que  $\sigma > 0$  corresponde a un decaimiento disipativo evolucionando de un estado de no-equilibrio a otro de equilibrio con el factor  $e^{-\gamma t}$ , y  $\sigma < 0$  corresponde a un proceso de crecimiento antidisipativo evolucionando del equilibrio al no-equilibrio con el factor  $e^{\gamma t}$ . Los dos procesos que en principio son convencionalmente diferentes, resultan ser sustancialmente diferentes debido al flujo de energía futuro, que localmente expresa la asimetría temporal del universo.

## 4.5. Entropía de un fluido en Relatividad General

Habíamos mencionado en el capítulo 2 que en el cálculo de Hawking para la entropía de un agujero negro, se había tenido en cuenta el caso en el que un fluido estuviera en movimiento circular en torno del agujero negro. Veamos ahora como para la entropía del fluido relativista surge también

su correspondiente solución temporalmente simétrica. El tensor de energía-momento correspondiente a un fluido imperfecto es:

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu + \Delta T^{\mu\nu} \quad (4.50)$$

donde  $p$  es la presión,  $g^{\mu\nu}$  es la inversa de la métrica,  $\rho$  es la densidad de materia y energía,  $U^\mu$  es la velocidad del fluido, y  $\Delta T^{\mu\nu}$  es un término que tiene en cuenta que el fluido es imperfecto. En un marco de referencia de caída libre,  $U^0 = 1$ ,  $U^i = 0$ ,  $\Delta T^{00} = 0$ , y las ecuaciones (4.43) resultan:

$$\sigma = - \left( \frac{1}{T} \dot{U}_i + \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \Delta T^{i0} - \frac{1}{T} \frac{\partial U_i}{\partial x^j} \Delta T^{ij} \quad (4.51)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta del fluido, e  $i, j, \dots = 1, 2, 3$  son los índices espaciales. De esta ecuación pretendemos obtener  $\Delta T^{i0}$  y  $\Delta T^{ij}$ . En este punto no apelaremos al argumento tradicional de la segunda ley [127]. Por el contrario, usaremos las leyes fundamentales (4.43), que nos llevarán a dar a luz al segundo elemento del par de gemelos T-simétricos.

Definamos,

$$\Delta T_0^{ij} = \delta^{ij} \Delta T_k^k, \quad \Delta T_1^{ij} = \Delta T^{ij} - \Delta T_0^{ij} \quad (4.52)$$

$\Delta T_0^{ij}$  y  $\Delta T_1^{ij}$  son las dos componentes irreducibles del tensor simétrico  $\Delta T^{ij}$  bajo el grupo de rotación espacial  $SO(3)$ , mientras que  $\Delta T^{i0}$  es un vector irreducible bajo el mismo grupo. El espacio-tiempo es localmente plano, luego, dado que la teoría debe ser invariante ante una rotación de  $SO(3)$ , la matriz  $M_{AB} = M_{(\mu\nu)(\kappa\lambda)}$  debe ser esféricamente simétrica para cada componente, y la ecuación (4.46) resulta:

$$\sigma = M_{(\mu\nu)(\kappa\lambda)} \Delta T^{\mu\nu} \Delta T^{\kappa\lambda} = \chi \Delta T^{i0} \Delta T_{i0} + \mu \Delta T_0^{ij} \Delta T_{ij0} + \eta \Delta T_1^{ij} \Delta T_{ij1} \quad (4.53)$$

donde hemos denotado como  $\chi$ ,  $\mu$ , y  $\eta$  a cada componente escalar. Esta ecuación debe ser satisfecha para valores arbitrarios de  $\chi$ ,  $\mu$ , y  $\eta$ ; entonces, de la expresión (4.51) obtenemos:

$$\Delta T^{i0} = -\chi \left( T \dot{U}_i + \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) \quad (4.54)$$

$$\Delta T^{ij} = -\eta \left( \frac{\partial U_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \bar{\nabla} \cdot \bar{U} \delta_{ij} \right) - \mu \bar{\nabla} \cdot \bar{U} \delta_{ij} \quad (4.55)$$

Habiendo obtenido  $\Delta T^{i0}$  y  $\Delta T^{ij}$  sin apelar a la segunda ley  $\sigma \geq 0$ , estamos en condiciones de escribir la expresión para  $\sigma$  de (4.51) y (4.55):

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{\chi}{T^2} \left( \bar{\nabla} T + T \dot{\bar{U}} \right)^2 + \frac{\eta}{2T} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \bar{\nabla} \cdot \bar{U} \delta_{ij} \right) \\ & \left( \frac{\partial U^i}{\partial x_j} + \frac{\partial U^j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \bar{\nabla} \cdot \bar{U} \delta^{ij} \right) + \frac{\mu}{T} (\bar{\nabla} \cdot \bar{U})^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Hasta este momento no hemos asumido ningún valor para los coeficientes  $\chi$ ,  $\mu$  y  $\eta$ , pudiendo ser tanto positivos, llevando a  $\sigma > 0$ , como negativos, llevando a  $\sigma < 0$ : ambas situaciones son posibles de acuerdo a las leyes fundamentales subyacentes.

También en este caso la rotura de la simetría es consecuencia del flujo de energía:

- Para procesos disipativos,  $\chi > 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\eta > 0$ , y dado que los factores entre paréntesis en (4.56) son todos no-negativos, se cumple que  $\sigma > 0$  (segunda ley).
- Para procesos antidisipativos,  $\chi < 0$ ,  $\mu < 0$  y  $\eta < 0$ , es  $\sigma < 0$ . En las regiones del universo donde esta condición valga, la segunda ley no sería localmente válida.

Por lo tanto la solución simétrica en el tiempo para la producción de entropía en un fluido, cambiaría la segunda ley de la termodinámica para un agujero negro con un fluido rotando en torno a él. Claro que para esto deberíamos revertir también la solución de agujero negro y considerar la reversión temporal del conjunto completo, es decir de la geometría de agujero negro y del fluido. En la sección siguiente discutiremos sobre las soluciones temporalmente simétricas de las soluciones de agujero negro con las cuales trabajamos en el capítulo 2 y su termodinámica.

## 4.6. Soluciones de Gravedad T-simétricas

Como mostramos en las secciones anteriores la aparición de soluciones T-simétricas surge en diversas teorías fundamentales de la física. Naturalmente, esto se da también en teorías covariantes de gravedad como las estudiadas

en los capítulos 1 y 2. El ejemplo paradigmático en este caso son las soluciones analizadas previamente correspondientes a agujeros negros y las leyes termodinámicas asociadas a estas soluciones.

#### 4.6.1. El problema de los Agujeros Blancos y su termodinámica

Analicemos la extensión del espacio-tiempo de Schwarzschild. Esta extensión se basa en el uso de las coordenadas de Kruskal, las cuales eliminan la aparente singularidad en el horizonte de eventos, evidenciando que no se trata de una verdadera singularidad, sino una falla del sistema de coordenadas elegido. Por el contrario, se mantiene la verdadera singularidad en el origen. El espacio-tiempo extendido se divide en cuatro regiones (ver figura 4.3). Las regiones I y II corresponden a la región externa e interna del agujero negro respectivamente, con las propiedades ya conocidas de la solución de agujero negro: si un observador en la región I cae radialmente hacia el horizonte de eventos y lo traspasa entrando a la región II, no es posible que escape de ella e inevitablemente alcanzará la singularidad  $x = \tau$  en un tiempo propio finito. Por otro lado, la región III tiene las propiedades invertidas temporalmente de la región II, y es el llamado agujero blanco: cualquier observador presente en esta región debe haberse originado en la singularidad  $x = -\tau$ , y en un tiempo propio finito saldría de esta la región. La región IV tiene propiedades idénticas a la región I, es decir que representa otro espacio-tiempo asintóticamente plano. Sin embargo, un observador en la región I no puede comunicarse con otro de la región IV: cualquier señal enviada desde I inevitablemente terminaría en la singularidad.

Nuevamente obtenemos un par de soluciones T-simétricas provenientes en este caso de la relatividad general. En otras teorías de gravedad, como Gauss-Bonnet, también aparecen este par de soluciones de agujero negro y agujero blanco al extender las soluciones [104], y esto se debe a la invariancia ante inversión temporal de la teoría considerada. Usualmente se dice que las regiones III y IV no tienen relevancia física, y se selecciona a las regiones I y II como las regiones del espacio-tiempo obtenidas luego del colapso gravitatorio de un objeto esférico [125].

Si consideramos un agujero negro emitiendo radiación de cuerpo negro y absorbiendo con la misma tasa, el proceso invertido temporalmente correspondería a un agujero blanco emitiendo y absorbiendo de la misma manera

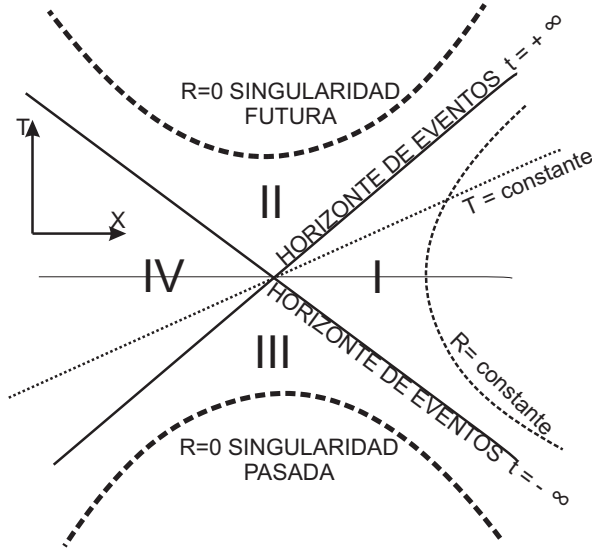


Figura 4.3: Extensión de Kruskal del espacio-tiempo de Schwarzschild

[76]. Es decir la tasa de emisión de un agujero blanco es la misma que la de un agujero negro con la misma masa, carga e impulso angular. La temperatura de emisión de cuerpo negro es la misma en ambos casos, dado que el agujero blanco posee la misma geometría:  $\mathcal{T}T = \mathcal{T}\kappa/(2\pi) = \kappa/(2\pi)$ . Es decir que si en un agujero negro las partículas caen dentro de él hacia la singularidad y se crean partículas en el horizonte a temperatura  $T$ , en un agujero blanco las partículas que caen hacia el horizonte serían aniquiladas por el campo gravitatorio, mientras que las partículas emitidas a temperatura  $T$  provendrían de la singularidad pasada. Es decir que ambas soluciones son indistinguibles, siendo cada una de ellas la imagen especular en el tiempo la una de la otra. Sin embargo hay consenso en descartar la solución de agujero blanco diciendo que carece de sentido físico: el principio de censura cósmica afirma que ningún estado no-singular puede evolucionar para dar lugar a una singularidad desnuda, es decir una singularidad que no esté protegida de un horizonte de eventos para un observador ubicado en la región externa. Este principio prohíbe la formación de un agujero blanco, dado que durante el proceso de formación la singularidad pasada no estaría protegida por el horizonte.

Si volvemos al ejemplo dado en el capítulo 2 del colapso de dos agujeros negros en uno, el proceso invertido temporalmente correspondería a un agujero negro de masa  $M_3$  que da lugar a otros de masas  $M_1$  y  $M_2$  de tal manera que la variación de energía sería  $M_3 \geq M_1 + M_2 \Rightarrow M_3^2 \geq (M_1 + M_2)^2 \geq M_1^2 + M_2^2$ , es decir que para las áreas se verifica que  $A_3 \geq A_1 + A_2$ , y consiguientemente para el cambio de entropía  $S_3 \geq S_1 + S_2 \Rightarrow \Delta S \leq 0$ , obteniendo así la variación de entropía negativa para el proceso T-simétrico.

El problema de los agujeros blancos es que el criterio mencionado en las secciones anteriores basado en la selección de una solución con la utilización del tensor de energía-momento, no permite explicar por qué no se observan agujeros blancos en la naturaleza. De acuerdo a esto la explicación de por qué no se observan agujeros blancos en el universo debería surgir en el proceso de formación de un agujero blanco, observando si durante este proceso es posible aplicar el criterio que selecciona a una de las soluciones del par. Por otro lado, dado que la base de la argumentación presentada en las secciones previas sobre la flecha del tiempo es la asimetría que surge al considerar una solución de un universo en expansión, sería interesante analizar el problema de los agujeros negros y blancos sobre la geometría de Friedman-Robertson-Walker (FRW), cuya métrica es:

$$ds_{FRW}^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (4.57)$$

Si se considera un universo en expansión, no existe ninguna solución que sea asintóticamente plana, y por lo tanto las soluciones deberían tender asintóticamente a la solución de FRW. Estas soluciones de la relatividad general son conocidas desde hace tiempo y son los llamados agujeros negros cosmológicos. Una de las soluciones de agujeros negros cosmológicos es el agujero negro de Einstein-Straus [63, 64, 60], el cual se obtiene empalmando la solución de Schwarzschild con la de FRW dada por (4.57). Sin embargo no es tan claro si existen soluciones de agujeros blancos cosmológicos. El estudio de los mismos podría ser un punto de partida para clarificar el problema de los agujeros blancos dentro del contexto del problema de la flecha del tiempo presentada en este capítulo.

Hagamos algunos comentarios finales: en el caso de teorías de gravedad más generales, no existe demostración de la segunda ley, sin embargo habíamos visto que la variación de entropía podía ser expresada en función de la corriente de Noether (ecuación (3.66)), al menos cuando había invariancia ante

traslación temporal. Es de esperar que si la teoría de gravedad es además invariante ante inversión temporal, surja también la correspondiente segunda ley revertida temporalmente  $\Delta S \leq 0$ .

En el caso particular de la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet, asumiendo que se verifica la condición de energía nula, la segunda ley de la termodinámica sigue siendo válida, como vimos en el capítulo 2. La entropía obtenida en este caso viene dada por la expresión (3.75), y la variación de entropía venía dada por la expresión (3.76). Nuevamente surge su contraparte simétrica en el tiempo que define al segundo gemelo T-simétrico de la segunda ley, obteniéndose una función de entropía no-creciente para esta solución.

## 4.7. El estatus de la Segunda Ley

Podemos resumir los resultados de este capítulo diciendo que de acuerdo a las leyes fundamentales de la física, ambos procesos, disipativos con  $\sigma > 0$  y disipativos con  $\sigma < 0$  son posibles. La simetría entre ambos es en principio formalmente idéntica, y la rotura de tal simetría es consecuencia del flujo de energía dirigido hacia la misma dirección en todo el universo, lo cual expresa la asimetría global del espacio-tiempo. Como hemos visto, cuando los argumentos se basan exclusivamente en las leyes fundamentales, otra solución temporalmente simétrica surge en las distintas disciplinas de la física. Entonces, la segunda ley de la termodinámica tal cual como la conocemos surge cuando el flujo de energía rompe tal simetría. De la misma manera, este procedimiento se aplica al electromagnetismo, mecánica cuántica y teorías de gravedad. Por lo tanto, de acuerdo al enfoque que hemos presentado, la segunda ley no contiene ningún privilegio con respecto a la flecha del tiempo como se supone usualmente: la flecha termodinámica, como todas las demás, es una consecuencia de la asimetría global del universo, y la segunda ley puede ser justificada en base a consideraciones globales, de la misma manera que las evoluciones irreversibles en mecánica cuántica, o el postulado de no-invariancia en TCC.





# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo analizamos las propiedades termodinámicas de las soluciones a la teoría de Gauss-Bonnet, haciendo notar las diferencias sustanciales que aparecen si uno las compara con las soluciones de la relatividad general. Estas diferencias son consecuencia de las correcciones inducidas por los términos cuadráticos del lagrangiano de Gauss-Bonnet, los cuales corresponden a modificaciones a distancias cortas de la relatividad general, y es por esto que las diferencias relevantes entre ambas teorías aparecen en soluciones con radios pequeños.

Hemos visto que en contraste con la temperatura de la solución de agujero negro de Schwarzschild, la temperatura de las soluciones correspondientes a los agujeros negros de Gauss-Bonnet es finita; en particular mostramos que la temperatura tiende a cero cuando el radio del horizonte se aproxima al origen, y por lo tanto no habría radiación de Hawking en tal situación. Este comportamiento evidenciado en el perfil de temperaturas lleva a que las soluciones de Gauss-Bonnet tienen un tiempo de vida infinito, dado que las correcciones a pequeña escala hace que los agujeros negros pequeños sean estables. La temperatura del punto de transición, donde la corrección es relevante, es

$$T = \frac{\hbar}{\pi k_B} \frac{1}{\sqrt{4\alpha}} \quad (5.1)$$

que corresponde a agujeros negros de un tamaño comparable a la escala de Lovelock-Lanczos  $r = \sqrt{4\alpha}$ .

Obtuvimos también la corrección explícita a la fórmula de la entropía de la relatividad general en términos del parámetro de Gauss-Bonnet  $\alpha$ ,

constatando que el resultado es consistente con el formalismo geométrico de la termodinámica de agujeros negros en distintas teorías covariantes de gravedad.

Discutimos los diferentes límites de las soluciones en términos de la constante de Lanczos  $\alpha$  y el parámetro de acoplamiento de teorías electromagnéticas no-lineales  $b$ , observando que se obtienen las geometrías esperadas. Mostramos como otras soluciones estudiadas en la literatura son incluidas como casos particulares, representado una fase BTZ que surge en el preciso valor  $\Lambda\alpha = -\frac{3}{4}$  del espacio de parámetros.

Además hemos visto que cuando la teoría de Gauss-Bonnet se acopla con la teoría de Hoffmann-Infeld surgen otras características interesantes en la termodinámica, como por ejemplo el perfil de doble máximo en la curva calórica, lo cual lleva a una efecto de evaporación muy particular en el cual existen dos regiones termodinámicamente estables. Los agujeros negros se evaporan drásticamente para ciertos tamaños que están limitados por dos radios críticos; esta región corresponde a la región en la cual el calor específico es negativo. A la larga, el agujero negro alcanza la fase final y se hace eterno. La evaporación es cualitativamente diferente a la solución de agujeros negros de Gauss-Bonnet acoplados a Born-Infeld.

Asimismo, el análisis presentado para las soluciones estáticas con simetría esférica es bastante general, pudiendo adaptarse al caso que se tengan acoplamientos con electrodinámicas más generales. En particular, sería relativamente sencillo extenderlo a los modelos de electrodinámicas que llevan a la existencia de agujeros negros regulares en la gravedad de Einstein [17, 15, 16].

Por último hemos analizado ciertas propiedades provenientes de la invariancia ante inversión temporal. En particular en las soluciones de agujero negro observamos la existencia de ambas soluciones T-simétricas y la contraparte de la segunda ley de la termodinámica de gravedad revertida temporalmente. Mostramos también que estas peculiaridades se dan en las distintas teorías fundamentales de la física. Para esto, hemos definido precisamente los conceptos de invariancia temporal, irreversibilidad y flecha del tiempo, con el objetivo de disipar las confusiones usuales cuando se habla del problema de la flecha del tiempo. Mostramos en detalle, como surgen los diferentes gemelos T-simétricos en mecánica cuántica, electromagnetismo, teoría cuántica de campos, relatividad general y en distintos resultados fenomenológicos. Asimismo especulamos sobre una manera de seleccionar a la solución que se observa fenomenológicamente, haciendo notar que la asimetría global puede ser transferida a los fenómenos locales.

---

La flecha del tiempo sigue siendo hoy en día un tema de controversia y debate, existiendo diversas posturas y enfoques, muchos de ellos basados en distintas interpretaciones que surgen de la fundamentación de la física teórica. Como discusión final de este trabajo, hemos presentado un enfoque global particular que pretende desligarse del uso de la entropía fenomenológica para definir la dirección temporal privilegiada, y por el contrario, basarnos únicamente en conceptos y argumentaciones propios de una teoría de gravedad, respetando siempre el punto de vista atemporal necesario en toda discusión sobre la flecha del tiempo.



## Teorías Electromagnéticas no lineales

### A.1. Electrodinámica de Born-Infeld

En el año 1934 Born e Infeld [34, 35] propusieron una teoría electrodinámica no lineal con el objetivo de obtener un valor finito para la autoenergía de una carga puntual. El Lagrangiano de Born-Infeld conduce a ecuaciones de campo cuyas soluciones estáticas con simetría esférica presentan un comportamiento finito en todo el espacio. La constante  $b$  aparece en el Lagrangiano de Born-Infeld como una nueva constante universal.

Imitando las ideas de Einstein, Born e Infeld consideraron el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y el tensor de campos electromagnéticos  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  como las partes simétricas y antisimétricas de un único campo  $\Xi_{\mu\nu} = b g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$ . Luego postularon la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sqrt{\det \Xi_{\mu\nu}} + \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \quad (\text{A.1})$$

donde el segundo término fue elegido de tal manera que el Lagrangiano de Born-Infeld tienda al de Maxwell cuando  $b \rightarrow \infty$ . En cuatro dimensiones el Lagrangiano resulta ser:

$$\mathcal{L}_{BI} = \sqrt{-g} \frac{b^2}{4\pi} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} \right) \quad (\text{A.2})$$

donde  $S$  y  $P$  son los invariantes escalares y pseudoescalares respectivamente

$$S = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2)$$

$$P = \frac{1}{8} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\gamma} F^{\mu\nu} F^{\rho\gamma} = E \cdot B$$

Una de las características típicas de las teorías electrodinámicas no lineales es la aparición de birrefringencia. Sin embargo el Lagrangiano de Born-Infeld usualmente es mencionado como un Lagrangiano excepcional debido a que tiene la propiedad de ser el único que garantiza las siguientes tres condiciones: 1- La teoría resultante tiene una única superficie característica (ausencia de birrefringencia); 2- Se verifican las condiciones de densidad de energía positiva y el carácter no espacial del impulso electromagnético; 3- Se satisface también el principio de correspondencia fuerte. Como consecuencia de estas condiciones el Lagrangiano posee superficies características nulas o temporales [110].

La solución más sencilla corresponde al campo debido a una fuente puntual localizada en el origen, que justamente es la solución que precisamos para el agujero negro cargado analizado en el capítulo 2.. Para obtener esta solución estática con simetría esférica en cinco dimensiones, reemplazaremos  $F = E(r) dt \wedge dr$  y la métrica (3.67) en el Lagrangiano de Born-Infeld (A.1); luego variaremos la acción (este procedimiento es válido debido a la gran simetría que tiene la solución que estamos buscando).

El Lagrangiano para esta configuración de carga resulta:

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{b^2 \sqrt{-g}}{4 \pi} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{E^2(r)}{b^2}} \right) \quad (\text{A.3})$$

y la ecuación de campo derivada de este Lagrangiano es:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\sqrt{-g} E(r)}{\sqrt{1 - \frac{E^2(r)}{b^2}}} \right] = 0$$

donde  $\sqrt{-g} = r^3 \sin^2 \theta \sin \chi$ .

Entonces el campo de una carga puntual de Born-Infeld en cinco dimensiones resulta:

$$E(r) = \frac{Q}{\sqrt{r^6 + l_b^6}} ; \quad l_b = \left( \frac{Q}{b} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{A.4})$$

El tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_{BI}}{\partial g^{\mu\nu}}$$

que en el caso estático e isotrópico es diagonal:

$$T_0^0 = T_r^r = \frac{b^2}{4\pi} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2(r)}{b^2}}} \right]$$

$$T_\chi^\chi = T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = \frac{b^2}{4\pi} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{E^2(r)}{b^2}} \right] \quad (\text{A.5})$$

Se han estudiado también otro tipo de soluciones a la teoría que conducen a propiedades interesantes que la distinguen del electromagnetismo lineal, como es el caso del análogo a las ondas planas de la teoría de Maxwell. Por ejemplo es un hecho ya establecido que en las teorías electromagnéticas no lineales la presencia de campos de fondo modifican la velocidad de las ondas electromagnéticas [110, 80, 101, 103, 102, 32] como así también se observa que la dirección del rayo no coincide con la dirección de propagación de la onda (como ocurriría en un medio anisótropo) [1]. Algunas condiciones para la existencia de soluciones de ondas planas que sean periódicas y suaves han sido analizadas en [37]. Recientemente también se ha analizado este efecto anisótropo en el contexto de la geometría de Friedman-Robertson-Walker y el tipo de correcciones que surgen en el corrimiento al rojo si se consideran ondas de Born-Infeld en lugar de ondas de Maxwell [2, 55].

## A.2. Electrodinámica de Hoffmann-Infeld

La teoría electromagnética de Hoffmann-Infeld fue propuesta originalmente con el propósito de evitar ciertas características *patológicas* que presenta la teoría de campos de Born-Infeld cuando se estudian soluciones estáticas con simetría esférica, como por ejemplo la singularidad cónica que los Biones presentan en el origen. De hecho la modificación de la teoría de Born-Infeld, estudiada en [79], ha mostrado que conduce a obtener objetos puntuales con simetría esférica cuya métrica asociada es regular en todo el espacio-tiempo, evitando de esta manera la singularidad cónica del caso Einstein-Born-Infeld estudiado en [77]. No obstante, las soluciones de agujero negro de la teoría de campos de Einstein-Hoffmann-Infeld son singulares debido a que la curvatura presenta una divergencia en el origen.



La forma explícita del Lagrangiano de Hoffmann-Infeld fue presentado en [79]. El mismo puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{HI} = -\frac{b^2}{4}\sqrt{-g} (1 - \eta_{(F)} - \log \eta_{(F)}) \quad (\text{A.6})$$

con

$$\eta_{(F)} = \frac{b^{-2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2b^{-2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 1}} \quad (\text{A.7})$$

donde  $b$  representa un campo característico, análogo al que aparece en la teoría de Born-Infeld. De hecho, el modelo de Hoffmann-Infeld corresponde a modificaciones logarítmicas de un Lagrangiano no lineal del tipo de Born-Infeld, y fue diseñado originalmente de tal manera que ciertas *condiciones de regularidad* se satisfacen para los campos gravitatorios y eléctricos cuando se consideran soluciones correspondientes a partículas puntuales. La condición de regularidad en el caso del campo gravitatorio proviene de la elección de una constante de integración que lleva a la identidad entre la masa gravitatoria y la electromagnética.

Minimizando la acción correspondiente al Lagrangiano (A.6) obtenemos la ecuación de campo y su solución. El campo de una carga puntual de Hoffmann-Infeld resulta ser

$$E(r) = \frac{Qr^3}{r^6 + l_b^6} \quad (\text{A.8})$$

Este campo tiene la particularidad que vale cero en el origen, a diferencia del campo de Born-Infeld (A.4) que alcanza su máximo valor  $b$  en ese punto. El hecho de que el campo se anule en el origen logra que la componente  $E_x$  sea continua en todo punto, a diferencia del caso del campo de Born-Infeld cuya componente  $x$  es discontinua en  $x = 0$  [79]. Asimismo el campo (A.8) tiene un máximo en la escala  $r = l_b$  de valor  $E(l_b) = \frac{b}{2}$ . En la figura A.1 comparamos ambos campos eléctricos.

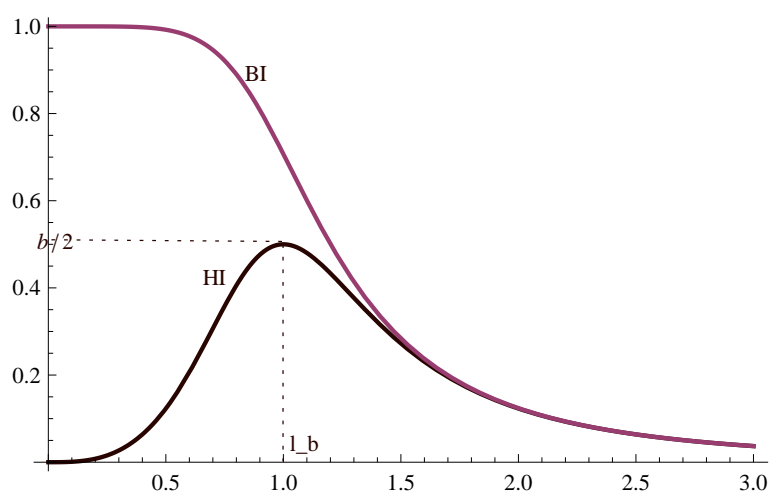


Figura A.1: Campos correspondientes a una carga puntal para la electrodinámica de Born-Infeld (BI) y para la de Hoffmann-Infeld (HI) con  $Q = 1$  y  $l_b = 1$ .



# Apéndice B

## Cálculo explícito de la gravedad superficial

Sea  $\xi^a$  un vector de Killing ( $\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0$ ) y  $g_{ab}$  una métrica tal que no depende de alguna coordenda  $x^p$ , es decir

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^p} = 0 \quad (\text{B.1})$$

El vector de Killing se puede expresar entonces como

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^p} \quad (\text{B.2})$$

es decir que su componente en esta base es  $\xi^a = \delta_p^a$ . Por lo tanto la derivada covariante del vector de Killing es:

$$\xi_{a;b} = g_{ac}\xi_{;b}^c = g_{ac}(\xi_{;b}^c + \Gamma_{bd}^c \xi^d) = g_{ac}\Gamma_{bd}^c \delta_p^d = \Gamma_{abp} = \frac{1}{2}(g_{ap,b} + g_{ab,p} - g_{bp,a}) \quad (\text{B.3})$$

donde  $g_{ab,p} = 0$  por (B.1), quedando

$$\xi_{a;b} = \frac{1}{2}(g_{ap,b} - g_{bp,a}) \quad (\text{B.4})$$

La gravedad superficial es  $\kappa^2 = -\frac{1}{2}\xi^{b;a}\xi_{b;a}$ . Calculemos cada una de estas derivadas haciendo uso de (B.4) y de que el vector de Killing es  $\xi = \partial/\partial t$ :

$$\xi_{b;a} = \frac{1}{2}(g_{a0,b} - g_{b0,a}) \quad (\text{B.5})$$

$$\xi^{b;a} = g^{ac}(g^{bd}\xi_d)_{;c} = g^{ac}g^{bd}\xi_{d;c} = \frac{1}{2}g^{ac}g^{bd}(g_{c0,d} - g_{d0,c}) \quad (\text{B.6})$$

donde hemos usado que tanto  $g^{bd}_{;c}$  y  $g_{bd;c}$  se anulan. Entonces contrayendo (B.5) con (B.6) obtenemos

$$\xi^{b;a}\xi_{b;a} = \frac{1}{4}g^{ac}g^{bd}(g_{c0,d} - g_{d0,c})(g_{a0,b} - g_{b0,a}) \quad (\text{B.7})$$

que para un ansatz diagonal que depende de la coordenada  $r$ ,  $g_{00} = g_{00}(r)$  y  $g_{11} = g_{11}(r)$  queda:

$$\xi^{b;a}\xi_{b;a} = \frac{1}{2}[g_{00,r}]^2 g^{00}g^{11} \quad (\text{B.8})$$

Si además tenemos en cuenta que para el ansatz tipo Schwarzschild (3.67) del capítulo 2, se verifica  $g^{00}g^{11} = -1$ , entonces tenemos

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\xi^{b;a}\xi_{b;a} = \frac{1}{4}[g_{00,r}]^2 \quad (\text{B.9})$$

Despejando de (B.9) y evaluando en la posición del horizonte, obtenemos la gravedad superficial para este tipo particular de ansatz:

$$\kappa = \frac{1}{2}|g_{00,r}|_{r=r_H} \quad (\text{B.10})$$

# Bibliografía

- [1] M. Aiello, G. Bengochea, and R. Ferraro. Anisotropic effects of background fields on Born-Infeld electromagnetic waves. *Phys. Lett.*, A361:9–12, 2007, hep-th/0607072.
- [2] M. Aiello, G. Bengochea, and R. Ferraro. Luminosity distance for Born-Infeld electromagnetic waves propagating in a cosmological magnetic background. *JCAP*, 0806:006, 2008, astro-ph/0601208.
- [3] M. Aiello, M. Castagnino, and O. Lombardi. The arrow of time: from universe time-asymmetry to local irreversible processes. *Found. Phys.*, 38:257–292, 2008, gr-qc/0608099.
- [4] M. Aiello, R. Ferraro, and G. Giribet. Exact solutions of Lovelock-Born-Infeld black holes. *Phys. Rev.*, D70:104014, 2004, gr-qc/0408078.
- [5] M. Aiello, R. Ferraro, and G. Giribet. Hoffmann-Infeld black hole solutions in Lovelock gravity. *Class. Quant. Grav.*, 22:2579–2588, 2005, gr-qc/0502069.
- [6] D. Albert. *Time and Chance*. Harvard University Press, Cambridge, 2001.
- [7] M. Ali, F. Ruiz, C. Saint-Victor, and J. F. Vazquez-Poritz. Strings on AdS Wormholes. *Phys. Rev.*, D80:046002, 2009, 0905.4766.
- [8] G. Allemandi, M. Francaviglia, and M. Raiteri. Charges and energy in Chern-Simons theories and Lovelock gravity. *Class. Quant. Grav.*, 20:5103–5120, 2003, gr-qc/0308019.

- 
- [9] A. Anabalon et al. Kerr-Schild ansatz in Einstein-Gauss-Bonnet gravity: An exact vacuum solution in five dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 26:065002, 2009, 0812.3194.
- [10] M. Antoni, S. Ruffo, and A. Torcini. *Europhys. Lett.*, 66:645, 2004.
- [11] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso, and J. Zanelli. Conserved charges for even dimensional asymptotically AdS gravity theories. *Phys. Rev.*, D62:044002, 2000, hep-th/9912045.
- [12] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso, and J. Zanelli. Conserved charges for gravity with locally AdS asymptotics. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1647–1650, 2000, gr-qc/9909015.
- [13] R. Aros, R. Troncoso, and J. Zanelli. Black holes with topologically nontrivial AdS asymptotics. *Phys. Rev.*, D63:084015, 2001, hep-th/0011097.
- [14] A. Ashtekar and A. Magnon. Quantum Fields in Curved Space-Times. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A346:375–394, 1975.
- [15] E. Ayon-Beato and A. Garcia. New regular black hole solution from nonlinear electrodynamics. *Phys. Lett.*, B464:25, 1999, hep-th/9911174.
- [16] E. Ayon-Beato and A. Garcia. Nonsingular charged black hole solution for nonlinear source. *Gen. Rel. Grav.*, 31:629–633, 1999, gr-qc/9911084.
- [17] E. Ayon-Beato and A. Garcia. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Phys. Lett.*, B493:149–152, 2000, gr-qc/0009077.
- [18] M. Bañados. Black holes in Einstein-Lovelock gravity. 1993, gr-qc/9309011.
- [19] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Geometry of the (2+1) black hole. *Phys. Rev.*, D48:1506–1525, 1993, gr-qc/9302012.
- [20] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. *Lovelock-Born-Infeld Theory of Gravity*. edited by Falomir H., Gamboa R. RE., Leal P. and Schaposnik F., World Scientific, Singapore, 1990.
- [21] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, 69(13):1849–1851, Sep 1992.

- 
- [22] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Dimensionally continued black holes. *Phys. Rev.*, D49:975–986, 1994, gr-qc/9307033.
- [23] M. Bañados, R. Troncoso, and J. Zanelli. Higher dimensional Chern-Simons supergravity. *Phys. Rev.*, D54:2605–2611, 1996, gr-qc/9601003.
- [24] R. Balliant. *From Microphysics to Macrophysics: Methods and Applications of Statistical Physics*. Springer, Heidelberg, 1992.
- [25] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [26] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7(8):2333–2346, Apr 1973.
- [27] J. D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black hole physics. *Phys. Rev.*, D9:3292–3300, 1974.
- [28] E. Bergshoeff, E. Sezgin, C. N. Pope, and P. K. Townsend. The Born-Infeld action from conformal invariance of the open superstring. *Phys. Lett.*, 188B:70, 1987.
- [29] N. Bogoliubov, A. Logunov, and I. Todorov. *Axiomatic Quantum Field Theory*. Benjamin-Cummings, Reading MA, 1975.
- [30] A. Bohm, I. Antoniou, and P. Kielanowski. The Preparation registration arrow of time in quantum mechanics. *Phys. Lett.*, A189:442–448, 1994.
- [31] A. Bohm and M. Gadella. *Dirac Kets, Gamow Vectors, and Gelfand Triplets*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [32] G. Boillat. Nonlinear electrodynamics - lagrangians and equations of motion. *J. Math. Phys.*, 11:941–951, 1970.
- [33] L. Boltzmann. *Annalen der Physik*, 60:392–398, 1897.
- [34] M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Nature*, 132:1004–1004, 1933.
- [35] M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A144:425–451, 1934.



- 
- [36] D. G. Boulware and S. Deser. String Generated Gravity Models. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2656, 1985.
- [37] Y. Brenier. Hydrodynamic Structure of the Augmented Born-Infeld Equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 172:65–91, 2004.
- [38] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, and S. Yaida. Viscosity bound and causality violation. *Physical Review Letters*, 100:191601, 2008.
- [39] L. Brillouin. *Science and Information Theory*. Academic, New York, 1956.
- [40] A. Buchel and R. C. Myers. Causality of Holographic Hydrodynamics. 2009, 0906.2922.
- [41] R.-G. Cai. Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces. *Phys. Rev.*, D65:084014, 2002, hep-th/0109133.
- [42] R.-G. Cai. A note on thermodynamics of black holes in Lovelock gravity. *Phys. Lett.*, B582:237–242, 2004, hep-th/0311240.
- [43] R.-G. Cai and K.-S. Soh. Topological black holes in the dimensionally continued gravity. *Phys. Rev.*, D59:044013, 1999, gr-qc/9808067.
- [44] Y. Cai and C. A. Nunez. Heterotic string covariant amplitudes and low-energy effective action. *Nucl. Phys.*, B287:279, 1987.
- [45] B. Carter. *Black Holes*. C. DeWitt and B.S. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1973.
- [46] M. Castagnino, L. Lara, and O. Lombardi. The cosmological origin of time-asymmetry. *Class. Quant. Grav.*, 20:369–392, 2003, quant-ph/0211162.
- [47] M. Castagnino, O. Lombardi, and O. Lara. The global arrow of time as a geometrical property of the universe. *Found. Phys.*, 33:877–912, 2003.
- [48] M. A. Castagnino, H. Giacomini, and L. Lara. Dynamical properties of the conformally coupled flat FRW model. *Phys. Rev.*, D61:107302, 2000, gr-qc/9912008.

- 
- [49] D. Christodoulou. Reversible and irreversible transformations in black hole physics. *Phys. Rev. Lett.*, 25:1596–1597, 1970.
- [50] D. Christodoulou and R. Ruffini. Reversible transformations of a charged black hole. *Phys. Rev.*, D4:3552–3555, 1971.
- [51] O. Coussaert and M. Henneaux. Supersymmetry of the (2+1) black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 72:183–186, 1994, hep-th/9310194.
- [52] O. Coussaert, M. Henneaux, and P. van Driel. The Asymptotic dynamics of three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 12:2961–2966, 1995, gr-qc/9506019.
- [53] J. Crisostomo, S. del Campo, and J. Saavedra. Hamiltonian treatment of collapsing thin shells in Lanczos-Lovelock’s theories. *Phys. Rev.*, D70:064034, 2004, hep-th/0311259.
- [54] J. Crisostomo, R. Troncoso, and J. Zanelli. Black hole scan. *Phys. Rev.*, D62:084013, 2000, hep-th/0003271.
- [55] H. Cuesta, J. Mosquera, J. M. Salim, and M. Novello. Cosmological redshift and nonlinear electrodynamics propagation of photons from distant sources. 2007, 0710.5188.
- [56] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanía. Black holes on the brane. *Phys. Lett.*, B487:1–6, 2000, hep-th/0003061.
- [57] P. C. Davies. Stirring up trouble. In J. Halliwell, P.-M. J., and Z. W.H., editors, *Physical Origins of Time Asymmetry*, Cambridge, 1994. Cambridge University Press.
- [58] N. Deruelle and L. Farina-Busto. The Lovelock gravitational field equations in cosmology. *Phys. Rev.*, D41:3696, 1990.
- [59] G. Dotti, J. Oliva, and R. Troncoso. Exact solutions for the Einstein-Gauss-Bonnet theory in five dimensions: Black holes, wormholes and spacetime horns. *Phys. Rev.*, D76:064038, 2007, 0706.1830.
- [60] C. C. Dyer and C. Oliwa. The ”Swiss cheese” cosmological model has no extrinsic curvature discontinuity: A comment on the paper by G.A. Baker, Jr. (astro-ph/0003152). 2000, astro-ph/0004090.

- 
- [61] J. Earman. What time reversal invariance is and why it matters. *International Studies in the Philosophy of Science*, 16:245–264, 2002.
- [62] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest. *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*. Cornell University Press, Ithaca, 1959.
- [63] A. Einstein and E. G. Straus. The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. *Rev. Mod. Phys.*, 17:120–124, 1945.
- [64] A. Einstein and E. G. Straus. Corrections and Additional Remarks to our Paper: The Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields Surrounding the Individual Stars. *Rev. Mod. Phys.*, 18:148–149, 1946.
- [65] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin. Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings. *Phys. Lett.*, B163:123, 1985.
- [66] P. Franklin. *Methods of Advanced Calculus*. Mc. Graw Hill, London, 1944.
- [67] S. Gao. The first law of black hole mechanics in Einstein-Maxwell and Einstein-Yang-Mills theories. *Phys. Rev.*, D68:044016, 2003, gr-qc/0304094.
- [68] C. Garraffo and G. Giribet. The Lovelock Black Holes. *Mod. Phys. Lett.*, A23:1801–1818, 2008, 0805.3575.
- [69] C. Garraffo, G. Giribet, E. Gravanis, and S. Willison. Gravitational solitons and  $C^0$  vacuum metrics in five- dimensional Lovelock gravity. *J. Math. Phys.*, 49:042502, 2008, 0711.2992.
- [70] E. Gravanis and S. Willison. ‘Mass without mass’ from thin shells in Gauss-Bonnet gravity. *Phys. Rev.*, D75:084025, 2007, gr-qc/0701152.
- [71] D. Gross and E. Witten. Superstrings modifications of einsteins equations,. *Nucl. Phys. B*, 277:1, 1986.
- [72] D. J. Gross and J. H. Sloan. The Quartic Effective Action for the Heterotic String. *Nucl. Phys.*, B291:41, 1987.

- 
- [73] S. Hawking and G. Ellis. *The Large Scale Structure of Spacetime*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [74] S. W. Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1344–1346, 1971.
- [75] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [76] S. W. Hawking. Black holes and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 13(2):191–197, Jan 1976.
- [77] B. Hoffmann. Gravitational and Electromagnetic Mass in the Born-Infeld Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 47:877–880, 1935.
- [78] B. Hoffmann and L. Infeld. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 32:127, 1936.
- [79] B. Hoffmann and L. Infeld. *Phys. Rev.*, 51:765, 1937.
- [80] H. S. Ibarguen, A. Garcia, and J. Plebanski. Signals in nonlinear electrodynamics invariant under duality rotations. *J. Math. Phys.*, 30:2689–2691, 1989.
- [81] M. Ison, A. Chernomoretz, and C. Dorso. *Physica A*, 341C:389, 2004.
- [82] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cim.*, B44S10:1, 1966.
- [83] V. Iyer and R. M. Wald. Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Phys. Rev.*, D50:846–864, 1994, gr-qc/9403028.
- [84] F. Izaurieta, E. Rodriguez, and P. Salgado. Euler-Chern-Simons gravity from Lovelock-Born-Infeld gravity. *Phys. Lett.*, B586:397–403, 2004, hep-th/0402208.
- [85] A. Komar. Covariant conservation laws in general relativity. *Phys. Rev.*, 113(3):934–936, Feb 1959.
- [86] C. Lanczos. A Remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions. *Annals Math.*, 73:147, 1932.

- 
- [87] C. Lanczos. *Z. Phys.*, 39:842–850, 1938.
- [88] P. Lax and R. Phillips. *Scattering Theory*. Academic Press, New York, 1979.
- [89] J. Lee and R. M. Wald. Local symmetries and constraints. *J. Math. Phys.*, 31:725–743, 1990.
- [90] P. Levstein, G. Usaj, and H. Pastawski. Attenuation of polarization echoes in nuclear magnetic resonance: A study of the emergence of dynamical irreversibility in many-body quantum systems. *J. Chem. Phys.*, 108:2718–2724, 1998.
- [91] J. Louko, J. Z. Simon, and S. N. Winters-Hilt. Hamiltonian thermodynamics of a Lovelock black hole. *Phys. Rev.*, D55:3525–3535, 1997, gr-qc/9610071.
- [92] D. Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12:498–501, 1971.
- [93] D. Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972.
- [94] D. Lovelock. *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*. Wiley-Interscience, New York, first edition, 1975.
- [95] H. Maeda and N. Dadhich. Kaluza-Klein black hole with negatively curved extra dimensions in string generated gravity models. *Phys. Rev.*, D74:021501, 2006, hep-th/0605031.
- [96] J. M. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998, hep-th/9711200.
- [97] R. R. Metsaev, M. Rakhmanov, and A. A. Tseytlin. The Born-Infeld action as the effective action in the open superstring theory. *Phys. Lett.*, B193:207, 1987.
- [98] C. Misner, J. Wheeler, and K. Thorne. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, first edition, 1973.

- 
- [99] F. Mueller-Hoissen. Spontaneous compactification with quadratic and cubic curvature terms. *Phys. Lett.*, B163:106, 1985.
- [100] I. Navarro and J. Santiago. Higher codimension braneworlds from intersecting branes. *JHEP*, 04:062, 2004, hep-th/0402204.
- [101] M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim, and R. Klippert. Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev.*, D61:045001, 2000, gr-qc/9911085.
- [102] M. Novello and S. E. Perez Bergliaffa. Effective Geometry. *AIP Conf. Proc.*, 668:288–300, 2003, gr-qc/0302052.
- [103] M. Novello and J. M. Salim. Effective electromagnetic geometry. *Phys. Rev.*, D63:083511, 2001.
- [104] M. Nozawa and H. Maeda. Dynamical black holes with symmetry in Einstein-Gauss-Bonnet gravity. *Class. Quant. Grav.*, 25:055009, 2008, 0710.2709.
- [105] T. Padmanabhan. Classical and quantum thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 19:5387–5408, 2002, gr-qc/0204019.
- [106] E. Paterson. *J. London Math. Soc.*, 23 (2):349, 1981.
- [107] O. Penrose and I. Percival. The direction of time. *Proc. Phys. Soc.*, 79:605–616, 1962.
- [108] R. Penrose. Singularities and time asymmetry. In S. Hawking and W. Israel, editors, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, Cambridge, 1979. Cambridge University Press.
- [109] R. Penrose and R. M. Floyd. Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature*, 229:177–179, 1971.
- [110] J. Plebanski. *Lectures on non linear electrodynamics*. Nordita Lecture Notes, Copenhagen, 1968.
- [111] J. Polchinski. *String Theory, Vol. 2 : Superstring Theory and Beyond*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

- 
- [112] H. Price. *Times Arrow and Archimedes Point*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [113] I. Racz and R. M. Wald. Global extensions of space-times describing asymptotic final states of black holes. *Class. Quant. Grav.*, 13:539–553, 1996, gr-qc/9507055.
- [114] H. Reichenbach. *The Direction of Time*. University of California Press, Berkeley, 1956.
- [115] N. Rosen. A Field Theory of Elementary Particles. *Phys. Rev.*, 55:94–101, 1939.
- [116] R. Sachs. *The Physics of Time-Reversal*. University of Chicago Press, Chicago, 1987.
- [117] B. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [118] L. Sklar. *Time and Spacetime*. University of California Press, Berkeley, 1974.
- [119] A. Strominger and C. Vafa. Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy. *Phys. Lett.*, B379:99–104, 1996, hep-th/9601029.
- [120] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [121] M. Tabor. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*. John Wiley and Son, New York, 1989.
- [122] T. Torii and H. Maeda. Spacetime structure of static solutions in Gauss-Bonnet gravity: Charged case. *Phys. Rev.*, D72:064007, 2005, hep-th/0504141.
- [123] P. K. Townsend. Black holes. 1997, gr-qc/9707012.
- [124] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14(4):870–892, Aug 1976.
- [125] R. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.

- [126] R. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [127] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [128] D. L. Wiltshire. Spherically symmetric solutions of Einstein-Maxwell theory with a Gauss-Bonnet term. *Phys. Lett.*, B169:36, 1986.
- [129] D. L. Wiltshire. Black holes in string generated gravity models. *Phys. Rev.*, D38:2445, 1988.
- [130] E. Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311:46–78, Dec. 1988.
- [131] J. Zanelli. Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008). 2005, hep-th/0502193.
- [132] B. Zwiebach. Curvature Squared Terms and String Theories. *Phys. Lett.*, B156:315, 1985.





## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Mario Castagnino, con quien fue y seguirá siendo un placer trabajar: su buena predisposición, su entusiasmo y sabiduría en la investigación hacen que sienta admiración hacia su persona.

Agradezco también a Rafael Ferraro y a Gastón Giribet por su guía y apoyo a lo largo de este período, con quienes fui aprendiendo el proceso de estudio e investigación en ciertos temas.

A las personas del Instituto de Astronomía y Física del Espacio por permitirme el uso de las instalaciones, por todas las comodidades que me han brindado, y por el clima de tranquilidad y armonía que hace que investigar allí sea muy agradable.

Agradezco también al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA, especialmente a sus profesores, cuyos cursos disfruté ampliamente.

A mis amigos Leo, Lorena, Mauricio, Carlos, Gabriel y Hernan con quienes compartimos momentos divertidos a lo largo de estos años.

Mi agradecimiento hacia mi familia, mi madre y mi hermano quienes me incentivaron a empezar y terminar el doctorado.

A Mariana quien me soportó durante estos años, y me brindó apoyo en ciertos momentos críticos.