Esquemas regulares para la gravitación con estructura teleparalela

Fiorini, Franco Luis

2010

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

ESQUEMAS REGULARES PARA LA GRAVITACION CON ESTRUCTURA TELEPARALELA

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor de

la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

Franco Luis Fiorini

Director de Tesis: Dr. Rafael Ferraro

Consejero de estudios: Dr. César Moreno

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

Buenos Aires, 2010

ESQUEMAS REGULARES PARA LA GRAVITACION CON ESTRUCTURA TELEPARALELA

Resumen

En este trabajo se estudian dos teorías regulares de gravedad con estructura teleparalela. La arena geométrica en la cual ellas reposan está dada por el espacio-tiempo de Weitzenböck. En orden de obtener un mecanismo sistemático en lo que concierne a la regularización de las singularidades presentes en la teoría de Einstein (Relatividad General), se procede a emular el programa de Born e Infeld implementado antaño en la electrodinámica. Gracias a la estructura teleparalela, ambas teorías llevan a ecuaciones de movimiento de segundo orden para el ente dinámico, el *vielbein*, y las dos comprenden a la teoría de Einstein como régimen de baja energía. Dentro de estos esquemas, se caracterizan un número de soluciones con comportamiento no singular correspondientes a modelos cosmológicos de tipo Friedmann-Robertson-Walker y a defectos topológicos del Universo temprano, como las cuerdas cósmicas.

Palabras Clave: Gravedad Modificada, Born-Infeld, Cosmología, Cuerdas Cósmicas, Agujeros Negros, Singularidades.

REGULAR GRAVITATIONAL SCHEMES WITH TELEPARALLEL STRUCTURE

Abstract

This work is devoted to the study of two regular theories of gravity with teleparallel structure. The underlying geometrical arena is given by Weitzenböck spacetime. In order to obtain a systematic mechanism for the cure of the singularities present in Einstein's theory (General Relativity), we proceed to emulate the Born-Infeld program used in the past in the context of electrodynamics. By virtue of the teleparallel structure, both theories lead to second order motion equations for the dynamical field, the *vielbein*, and both of them contain General Relativity as the low energy regime. In the context of these schemes, a number of exact non singular solutions corresponding to Friedmann-Robertson-Walker cosmological models and topological defects of the early Universe, such cosmic strings, are thoroughly studied.

Keywords: Modified Gravity, Born-Infeld, Cosmology, Cosmic Strings, Black Holes, Singularities.

Para Alina, Maurice y Don Juan,
por revelar lo inevitable.

Agradecimientos

You have that transient moment on a summit... when you come back to the valley, it goes. It is actually a completely illogical thing to do, it is not justifiable by any rational terms. That is probably why you do it.

Joe Simpson, *The Beckoning Silence*

Y así es, sin más, como esto termina... Me gustaría, mientras veo sus ojos sonrientes, agradecerle a Alina por ser el principio de todo, y por permitirme percibir un nuevo mundo. Y a Ana, por elegirme para compartir una nueva vida. Quisiera expresarle mi gratitud a Rafael, que con su entereza y comprensión, fue el encargado de guiarme a salvo por los desolados páramos de la *razón*. A mi Mamá Elsa, y a mi hermano Fernando por acompañarme todo este tiempo y a Mateo por enseñarme a creer en todo esto. Gracias a Juan, Silvia, María y el Polaco por el soporte constante. A Cieri que, como nadie, me acompaña por los pedreros de la existencia, y a Tassi, el Flaco y el Búo por el deleite de su compañía. A mis amigos Pablo y Maxi, por tantos años de junta, a Alan Garbarz por los lindos momentos vividos cruzando los Andes Australes y a César por sus consejos. A los amigos del IAFE, Carlitos Cardona, Matias Aiello, Martin Ortega y especialmente a Chechu, por participarme en todas sus luchas. Finalmente, a Bachi, Hernancho y Marito por no permitir que me aleje mucho de las montañas.

Índice general

Introducción

Las singularidades inherentes a la teoría de Einstein fueron materia de interés y estudio desde los albores de la Relatividad General. A pesar que el concepto de singularidad encuentra su causa última en la incompletitud geodésica, historicamente hizo su aparición asociado con la divergencia de ciertas propiedades físicas. En este sentido, se podría asegurar que la mayoria de las investigaciones y avances en el área han surgido de examinar dos cuestiones de importancia fundamental. Una de ellas concierne al estadío incial del Universo, mientras que la otra se refiere a la etapa final desarrollada por una estrella sobrellevando un colapso gravitatorio. En la primer cuestión, y dejando de lado aspectos más delicados de carácter ontológico, ciertas cantidades físicas como la densidad de energía y la presión de los campos de materia se tornan infinitas en el Big Bang. En la segunda, el destino del desafortunado observador que atraviese el horizonte de eventos que da origen a un agujero negro, es experimentar fuerzas tidales infinitas a medida que se aproxima al centro de simetría. En ambas cuestiones, el agente encargado de catalizar el desmedido crecimiento de los observables físicos radica en el propio espacio-tiempo, y en sus propiedades geométricas.

Las dificultades que enfrenta la teoría de Einstein en relación con las singularidades del espacio-tiempo, no concluyen en los ejemplos recién mencionados. Existen muchos casos de singularidades que emergen como aspectos nocivos de ciertas soluciones de las ecuaciones de la Relatividad General. Entre ellas, las que han adquirido una creciente popularidad en desarrollos más actuales, son las llamadas *cuasirregulares*. Estas singularidades son de carácter topólogico, por lo que no consiguen manifestarse a través de divergencias en los entes geométricos, como la curvatura. No obstante, su presencia priva de carácter predictivo a la teoría, ya que un observador moviéndose hacia una de estas singularidades, es incapaz de saber por método alguno que su línea de mundo terminará repentinamente; si se trata de un observador geodésico, no hay medición posible que permita predecir la incompletitud geodésica que el mismo sufrirá en un futuro inminente. Por otro lado, la manifestación de estos comportamientos singulares suele venir emparentada con anhomalías en la estructura causal del espacio-tiempo. Por ejemplo, la métrica correspondiente a una cuerda cósmica de longitud infinita, no sólo posee

una singularidad cónica en el origen de coordenadas, la cual es cuasirregular, sino también favorece la existencia de curvas temporales cerradas en ciertas regiones del espacio. Un observador que viaje por una de estas curvas es capaz de partir a un determinado tiempo desde una cierta posición del espacio, y luego de recorrer un camino cerrado, llegar a la misma posición para presenciar que aún no ha partido. Si bien las cuerdas cósmicas no comparten la popularidad de los modelos cosmológicos y los agujeros negros, su existencia es predicha por la mayoría de las teorías de campo que presenten mecanismos de ruptura espontánea de simetría, como la electrodinámica y cromodinámica cuántica. La métrica generada por este tipo particular de defecto topológico, es una solución de la ecuaciones de Einstein en vacío, tanto como lo es la métrica de Schwarzschild o el espacio-tiempo de Minkowski.

Dentro de la comunidad de física de altas energías existe actualmente un concenso generalizado respecto de la necesidad de incorporar una descripción cuántica del campo gravitatorio que opere en escalas cercanas a la longitud de Planck ℓ_p, siendo la teoría de Einstein una suerte de régimen efectivo correspondiente al límite de baja energía de tal descripción cuántica. Esta misma sugerencia invita a pensar que muchos de los aspectos físicamente indeseables de la Relatividad General podrian ser disueltos en la nueva descripción que emergería al considerar al espacio-tiempo ya no como un contínuo, sino como una estructura provista de algún tipo de granulación que se manifestaría a distancias del orden de ℓ_p. Sin embargo, no sólo la teoría cuántica de la gravedad resiste aún una expresión acabada, sino que los candidatos actualmente disponibles como la teoría de Cuerdas, Loop Quantum Gravity o la gravedad de Hořava, no ofrecen un tratamiento adecuado de las singularidades, exceptuando un pequeño número de casos particulares y aparentemente incidentales.

En este trabajo se intenta enfatizar que la búsqueda de un esquema regular para la gravitación no reside en la características cuánticas del espacio-tiempo, sino más bien, en la transición entre la descripción provista por la gravedad cuántica y aquella dada por la Relatividad General. De hecho, la difusa interface entre los dos regímenes debe estar regida por una deformación ultravioleta de la Relatividad General que, presuntamente, manifieste ciertas propiedades tendientes a la cura de los problemas relativos a las singularidades presentes en la teoría de Einstein. Estudiar esquemas deformados de la gravedad en el régimen de alta energía no sólo puede presentarse como una herramienta útil que sirva como guia para una exploración más concienzuda del correcto marco cuántico de la gravedad, sino que también puede conducirnos a una interpretación más acabada y profunda de las sutilezas presentes en la Relatividad General.

En el proceso de búsqueda y construcción de teorías modificadas que enriquezcan la descripción de la gravedad en el régimen de alta energía, hemos adoptado tres postulados básicos que ofician de principios guiadores. Ellos son:

(a) La teoría debe reducirse a la Relatividad General en el límite de baja energía.

(b) Las ecuaciones de movimiento para el campo responsable de la dinámica del espacio-tiempo, deben ser de segundo orden.

(c) La teoría debe ofrecer un tratamiento adecuado de las singularidades presentes en su contraparte de baja energía.

El requerimiento (a) es necesario para que la teoría no atente contra la evidencia experimental que sostiene a la Relatividad General. El punto (b) es una concesión heredada de la tradición de la física clásica, donde el campo gravitatorio en cualquier instante del tiempo puede ser determinado a partir de las *posiciones* y *momentos* en un determinado tiempo.

Los pasos tendientes a la construcción del Lagrangiano no son inmediatos. El Lagrangiano de Hilbert-Einstein contiene términos en derivadas segundas de la métrica. Este aspecto indeseable no se traduce, sin embargo, en ecuaciones dinámicas de cuarto orden debido a que los términos con derivadas segundas no influyen en la variación de la acción, pues se convierten en contribuciones de superficie. En cambio, si partimos del Lagrangiano de Hilbert-Einstein para construir otro deformado, las derivadas segundas ya no podrían desaparecer por un mecanismo análogo, ya que permanecerían encapsuladas dentro de la función que dé cuenta de la deformación. Esto es lo que sucede con las teorías llamadas $f(R)$, que constituyen deformaciones del Lagrangiano de la Relatividad General dado por el escalar de curvatura R. Adicionalmente, las deformaciones de tipo $f(R)$ que operan en el régimen de alta energía son incapaces de modificar las soluciones de vacío de la Relatividad General. Esencialmente, entonces, las teorías $f(R)$ sólo verifican el requisito (a). Otros esquemas modificados para la gravedad poseen la virtud de ser descriptos por ecuaciones de campo de segundo orden, como es el caso de la gravedad de Lovelock. No obstante esta peculiar propiedad, la teoría de Lovelock sólo difiere de la Relatividad General en dimensiones mayores que cuatro.

En esta Tesis se procede a la construcción de una familia de teorías para el campo gravitatorio que siguen los lineamientos arriba especificados. Para superar las dificultades que supone construir una acción gravitacional que conduzca a ecuaciones de campo de segundo orden para el ente dinámico que caracterize a la geometría del espacio-tiempo, se utiliza como punto de partida a la Relatividad General en su versión de paralelismo absoluto, conocida como Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General. En esta formulación, el campo dinámico es el vielbein e^a en lugar de la métrica, y los grados de libertad del campo gravitatorio están codificados en la torsión $T^a = de^a$, y no en la curvatura proveniente de la conexión de Levi-Civita. El Lagrangiano más general para describir la dinámica

del vielbein puede escribirse como una combinación lineal de tres invariantes asociados a la descomposición de la torsión en componentes irreducibles ante el grupo global de Lorentz. Una de estas combinaciones conduce a una teoría equivalente a la Relatividad General. Notablemente, como el Lagrangiano teleparalelo se construye a partir de una expresión cuadrática en la torsión, la estructura de la teoría está próxima a una teoría de Yang-Mills. En particular, sólo las derivadas primeras del vielbein (además del propio vielbein) entran en el lagrangiano. Esta propiedad reviste mucha importancia por cuanto es la encargada de garantizar una teoría de gravedad modificada que conduzca a ecuaciones de segundo orden para el vielbein, i.e., lo requerido en (b).

Una vez establecida la correcta estructura geométrica, nos enfocaremos en la construcción de esquemas gravitatorios que prometan un tratamiento más ameno de las singularidades. A tal efecto, se propondrán modificaciones del estilo de las usadas antaño por Born e Infeld en el contexto de la electrodinámica no lineal, y se examinarán sus consecuencias en una variedad de soluciones exactas.

Para perseguir esta causa, el trabajo está diagramado según el siguiente esquema. El capítulo 1 versa sobre teleparalelismo. En el apartado 1.1 se introduce al lector en el tópico, exponiendo los conceptos relacionados con el espacio de Weitzenböck, que constituye la estructura geométrica común a todas las teorías teleparalelas. La sección 1.2 es una presentación estándar del tema, con énfasis en la interpretación del campo de tétradas como verdadero protagonista de la interacción gravitatoria. Ahí se introduce la conexión de Weitzenböck y la noción de paralelismo que de ella se deriva. El Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General, un caso particular de teoría teleparalela, se expone en la sección 1.3, enfocándose principalmente en la construcción del lagrangiano que oficiará de semilla para efectuar las distintas modificaciones *à la* Born-Infeld. El capítulo concluye en la sección 1.4, en donde se discuten ciertos aspectos adicionales de la torsión.

En el capítulo 2 se expone la primera propuesta de tipo Born-Infeld. La deformación se presenta como un caso particular de las así llamadas teorías $f(T)$, de las cuales esta Tesis es precursora. Las ideas relacionadas con el esquema electrodinámico de Born-Infeld, y que dan lugar a las modificaciones propuestas, son relegadas al apéndice 1. En el apartado 2.1 se introducen los conceptos fundamentales y luego, en la sección 2.2, se expone el Lagrangiano deformado. Las consecuencias cosmológicas de esta teoría son discutidas con todo detalle en la sección 2.3, para terminar en el apartado 2.4 con una examinación de los aspectos más notables de la gravedad en tres dimensiones a la luz de la deformación de tipo Born-Infeld.

El capítulo 3 está enteramente dedicado a la segunda propuesta de gravedad regular. En este caso se trata de la teoría determinantal de Born-Infeld, que se introduce en 3.1. La rica estructura de la teoría se manifiesta en la variedad de

contextos cosmológicos regulares que emergen de ella, discutidos en 3.2. En la sección 3.3 se discute la regularización de la singularidad cónica de la cuerda cósmica, que no tiene análogo en la teoría discutida en el capítulo anterior. Finalmente, en 3.4, se tratan algunas soluciones de agujero negro en el contexto simplificado provisto por la gravedad en tres dimensiones.

Capítulo 1

Espacios con estructura teleparalela

1.1. Introducción

La interacción gravitatoria presenta una peculiar propiedad: partículas con diferentes masas y composiciones responden a esta interacción de tal forma que adquieren la misma aceleración y, dadas las mismas condiciones iniciales, recorren la misma trayectoria en el espacio-tiempo. Esta "universalidad de la caída libre" es sin duda la característica más notable de la gravitación, y está ausente en las otras interacciones fundamentales de la Naturaleza. La universalidad de los efectos inerciales condujo a Einstein hacia su teoría de la Relatividad General (GR), donde se introduce el concepto de campo como agente mediador de la interacción gravitatoria. Dicho campo debe ser, debido a las consideraciones precedentes, un campo universal, cuya influencia sea experimentada por todas las partículas de manera análoga. Esto sugiere interpretar a la gravitación como una interacción cuyo efecto es modificar la estructura misma del espacio-tiempo a través de la modificación del campo tensorial más fundamental existente en dicho espacio-tiempo, a saber, el tensor métrico. Así, la manera natural de modificar la estructura espacio-temporal, es modificar la métrica, reconociendo que en ausencia de gravedad, dicho ente debería reducirse al tensor de Minkowski que caracteriza el espacio pseudo-euclídeo de la Relatividad Especial. Un punto crucial en esta descripción de la gravedad, que está basada fundamentalmente en la universalidad de la caída libre, es que no hace uso del concepto de fuerza. De hecho, según la Relatividad General, en vez de actuar a través de una fuerza, la presencia de la gravitación se delata en una deformación de la estructura espacio-temporal, más precisamente en la aparición de curvatura no nula, que induce a las partículas libres y sin spin a seguir geodésicas de la variedad diferencial subyacente. Es

importante notar que no existe en este contexto otro tipo de deformación estructural más que la antes mencionada. Por ejemplo la torsión, que se constituye como otro ente natural de cualquier variedad diferencial, y que podría inducir una deformación en la estructura de la misma, es supuesta nula desde el principio debido a la simetría de la conexión de Levi-Civita ${}^{\{\}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$. Este es el camino seguido por la Relatividad General, en donde la geometría reemplaza al concepto de fuerza gravitacional, y en la cual las trayectorias no están determinadas por ecuaciones de fuerza, sino por geodésicas.

Por otro lado, al igual que las otras interacciones fundamentales de la naturaleza, la gravitación es suceptible de ser descripta dentro del contexto de las teorías de gauge. De hecho, el Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (ETRG), que aquí por brevedad llamaramos en más de una oportunidad, *teleparalelismo*, puede ser interpretado como una teoría de gauge para el grupo traslacional [1]. En esta teoría, la variedad diferencial presenta curvatura nula, y los efectos gravitatorios son atribuídos a la presencia de torsión en dicho espacio, llamado espacio de Weitzenböck [2]. A pesar de las diferencias de carácter fundamental en la estructura de la variedad diferencial subyacente, ambas teorías son equivalentes a la hora de describir la interacción gravitatoria. Sin embargo, mientras que en relatividad general la curvatura es usada para geometrizar el espacio-tiempo, en teleparalelismo la torsión actúa como una *fuerza*, de forma tal que en el espacio de Weitzenböck, la partícula libremente gravitante no sigue las autoparalelas de la conexión de Weitzenböck, sino que responde a la influencia ejercida por una fuerza cuya naturaleza radica en la torsión.

Es interesante remarcar que fue el propio Einstein uno de los pioneros en considerar estructuras geométricas más amplias [3]. En efecto, el teleparalelismo einsteniano, (o *paralelismo absoluto*) propuesto a vistas de unificar la gravitación y el electromagnetismo bajo una misma estructura geométrica, introdujo el campo de tétradas, cuatro campos cuadrivectoriales autoparalelos en el espacio de Weitzenböck. A pesar de que el propósito original de Einstein no fue alcanzado, sus ideas motivaron a Møller [4] y, posteriormente, Pellegrini y Plebanski [5] desarrollaron la formulación Lagrangiana del paralelismo absoluto. Esta noción de paralelismo absoluto fue tratada posteriormente por Hayashi et al. en términos de una teoría de gauge para el grupo traslacional [6]-[9]. Por otro lado, recientemente, estas estructuras teleparalelas han sido consideradas para el tratamiento del problema de la energía gravitatoria, puesto que parecen conducir a una corriente automáticamente conservada en forma natural [10].

El propósito de las siguientes secciones es describir detalladamente la geometría del espacio de Weitzenböck, que es la estructura común subyacente a todas las teorías teleparalelas, y repasar la construcción del lagrangiano del equivalente teleparalelo de la relatividad general. El capítulo concluye con algunos comentarios sobre el significado geométrico de la torsión y su vinculación con el

experimento.

1.2. El espacio de Weitzenböck

Para describir la geometría subyacente en teleparalelismo, consideremos una variedad diferencial de Hausdorff M, compacta y C^∞, equipada con una métrica localmente Lorentziana $\mathbf{g} \equiv g_{\mu\nu}$. En cada punto p $\in M$, existe un entorno U donde definiremos coordenadas locales dadas por $x = \{x^\mu\}$, y la respectiva base coordenada, que en p luce como $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_\mu\} = \{(\partial/\partial x^\mu)\}_p$, donde $\mu = 0, 1, 2, 3$. En el mismo punto la base dual es $\mathbf{E}^* = \{\mathbf{E}^\mu\} = \{(dx^\mu)\}_p$, siendo $\langle \mathbf{E}^\mu, \mathbf{E}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$. Así, cualquier vector $\mathbf{V} \in T_pM$ se escribe $\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{E}_\mu$, y cualquier 1-forma $\mathbf{F} \in T^*_pM$ se escribe $\mathbf{F} = F_\mu \mathbf{E}^\mu$. En particular el tensor métrico $\mathbf{g}$ se escribe como

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \mathbf{E}^\mu \otimes \mathbf{E}^\nu, \tag{1.1}$$

donde las componentes de la métrica son los productos internos de los vectores de la base coordenada,

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu) = \mathbf{g}(\mathbf{E}_\nu, \mathbf{E}_\mu). \tag{1.2}$$

Por otro lado, en cada punto p de la variedad es posible definir una base ortonormal $\mathbf{e}(p) = \{\mathbf{e}_a(p)\}$ en el espacio tangente T_pM, es decir que sus productos escalares referidos a la métrica $\mathbf{g}$ resultan iguales a las componentes del tensor de Minkowski,

$$\eta_{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \mathbf{g}(\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_a). \tag{1.3}$$

Los campos $\mathbf{e}(p) = \{\mathbf{e}_a(p)\}$ pueden ser expresados en la base coordenada como

$$\mathbf{e}_a = e_a^{\ \mu}\ \mathbf{E}_\mu, \tag{1.4}$$

por lo tanto la ec. (1.3) significa

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu}\, e_a^{\ \mu}\, e_b^{\ \nu}. \tag{1.5}$$

Aceptando que la matriz $e_a^{\ \mu}$ posee inversa, utilizaremos los símbolos $e^a_{\ \mu}$ para indicar las componentes de la misma:

$$e_a^{\ \mu} e^a_{\ \nu} = \delta^\mu_\nu \qquad e_a^{\ \mu} e^b_{\ \mu} = \delta^b_a. \tag{1.6}$$

La segunda de estas relaciones implica que las cantidades $e^a_{\ \mu}$ no son más que las componentes de las 1-formas que constituyen la base dual $\mathbf{e}^* = \{\mathbf{e}^a(p)\}$ en T^*_pM: $\langle \mathbf{e}^a, \mathbf{e}_b \rangle = \delta^a_b$. Es decir,

$$\mathbf{e}^a = e^a_{\ \mu}\ \mathbf{E}^\mu. \tag{1.7}$$

Por medio de la ec. (1.6) podemos invertir las relaciones anteriores:

$$\mathbf{E}_\mu = e^a_{\ \mu}\, \mathbf{e}_a \qquad \mathbf{E}^\mu = e_a^{\ \mu}\, \mathbf{e}^a. \tag{1.8}$$

$$e^a_{\ \mu}\, e^b_{\ \nu}\, \eta_{ab} = g_{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

Las ecs. (1.5) y (1.9) muestran el papel jugado por las cantidades $e_a^{\ \mu}$: ellas ofician de nexo entre la variedad curva cuya geometría es expresada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y el espacio *plano* tangente T_pM donde está definida la métrica de Minkowski $\eta_{ab} = diag(1, -1, -1, -1)$. Para ello los símbolos $e_a^{\ \mu}$ portan dos tipos de índices: mientras los índices latinos $a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3$ se refieren al espacio tangente T_pM, los índices griegos $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ hacen referencia a coordenadas en la variedad M. Así mientras los índices latinos conllevan un carácter tensorial lorentziano, pues la ec. (1.5) define la tétrada a menos de transformaciones del grupo de Lorentz, en cambio los índices griegos se relacionan con los cambios generales de coordenadas en la variedad M. Las componentes de las tétradas pueden ser vistas como herramientas para convertir índices griegos en índices latinos y viceversa. Por ejemplo, según la ec. (1.8), un vector cualquiera $\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{E}_\mu$ es reescrito como $\mathbf{V} = V^a \mathbf{e}_a$, siendo sus componentes lorentzianas

$$V^a \ = \ e^a_{\ \mu}\, V^\mu. \tag{1.10}$$

Podemos recorrer el camino inverso por medio de la ec. (1.4), para obtener

$$V^\mu \ = \ e_a^{\ \mu}\, V^a. \tag{1.11}$$

Una 1-forma cualquiera $\mathbf{F} = F_\mu\, \mathbf{E}^\mu$ es reescrita como $\mathbf{F} = F_a\, \mathbf{e}^a$, siendo sus componentes lorentzianas

$$F_a = e_a^{\ \mu}\, F_\mu. \tag{1.12}$$

o bien

$$F_\mu \ = \ e^a_\mu\, F_a. \tag{1.13}$$

Estas ecuaciones constituyen la regla de transformación de índices espacio-temporales, en índices de Lorentz (y viceversa). Como sabemos, podemos establecer una biyección entre vectores de T_pM y 1-formas de T_p^*M a través de la métrica. Comúnmente esta operación es denominada "subir y bajar índices". Así, la 1-forma que corresponde al vector de componentes V^μ tiene componentes

$$V_\mu \ = \ g_{\mu\nu}\, V^\nu, \tag{1.14}$$

es decir

$$e^a_{\ \mu}\, V_a = g_{\mu\nu}\, e_b^{\ \nu}\, V^b. \tag{1.15}$$

De acuerdo con las ecs. (1.6) y (1.5) esto no es otra cosa que

$$V_a = \eta_{ab}\, V^b. \tag{1.16}$$

Obviamente los índices se suben mediante las inversas de $g_{\mu\nu}$ y η_{ab} que llamamos, como es habitual, $g^{\mu\nu}$ y η^{ab}. Así tenemos que

$$V^\mu \;=\; g^{\mu\nu}\, V_\nu, \tag{1.17}$$

que podemos escribir también como

$$e_a^{\ \mu}\, V^a \;=\; g^{\mu\nu}\, e^b_{\ \nu}\, V_b. \tag{1.18}$$

Contrayendo ambos miembros con $e^c_{\ \mu}$ llegamos a

$$V^c \;=\; g^{\mu\nu}\, e^c_{\ \mu}\, e^b_{\ \nu}\, V_b, \tag{1.19}$$

lo que nos lleva a concluir que

$$g^{\mu\nu}\, e^c_{\ \mu}\, e^b_{\ \nu} \;=\; \eta^{cb}. \tag{1.20}$$

Invirtiendo este resultado se obtiene que

$$g^{\mu\nu} \;=\; e_a^{\ \mu}\, e_b^{\ \nu}\, \eta^{ab}. \tag{1.21}$$

En particular, se puede bajar y subir índices de la propia tétrada. No es difícil comprobar que

$$e^a_{\ \mu} \;=\; g_{\mu\nu}\, \eta^{ab}\, e_b^{\ \nu}. \tag{1.22}$$

Por supuesto, el producto escalar entre vectores no depende de la base, pudiéndose expresar tanto como contracción de índices griegos o latinos:

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{W} = g_{\mu\nu}\, V^\mu\, W^\nu = \eta_{ab}\, V^a\, W^b = V_\mu W^\mu = V_a W^a \tag{1.23}$$

La regla para transformar índices lorentzianos en índices espacio-temporales (y viceversa) se aplica análogamente a cualquier tensor de rango superior. En este sentido podríamos decir que las ecs. (1.5) y (1.9) conectan las componentes lorentzianas y espacio-temporales de un mismo objeto geométrico.

Las ecs. (1.9) dicen que podemos codificar en la tétrada la información sobre la geometría del espacio-tiempo. Podemos, por ejemplo, describir el campo gravitatorio mediante una acción construida a partir de la tétrada, en lugar de usar la acción de Hilbert-Einstein construida a partir del tensor métrico. Aunque esta elección acerca del protagonismo de uno u otro objeto geométrico puede verse como una mera cuestión de gusto, es necesario mencionar que el formalismo de tétradas es esencial para tratar el acoplamiento de campos espinoriales al campo

gravitorio. En efecto, como no existen representaciones espinoriales del grupo de cambio general de coordenadas, sino que los espinores son objetos asociados al grupo de Lorentz, estos sólo pueden definirse a partir de la estructura lorentziana del espacio tangente [11].

En relatividad general se utiliza la conexión (derivada covariante) de Levi-Civita, que en una base coordenada se expresa mediante los símbolos de Christoffel,

$$ {}^{\{\}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\lambda\rho}\,(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{1.24} $$

Esta conexión se caracteriza por su compatibilidad con la métrica (la derivada covariante de la métrica es nula) y su torsión nula. Por otra parte, las geodésicas se caracterizan por ser curvas autoparalelas de esta conexión.

Con ayuda del campo de tétradas queremos definir una noción distinta de paralelismo (es decir, una conexión distinta), donde un campo $\mathbf{V}$ sea autoparalelo si sus componentes lorentzianas V^a son constantes. Para ello examinemos el objeto $e_a^{\ \mu}\,\partial_\nu V^a$, que tiene carácter tensorial ante cambio general de coordenadas en la variedad y es invariante ante transformaciones (globales) de Lorentz en sus índices asociados al plano tangente:

$$ \begin{aligned} e_a^{\ \mu}\,\partial_\nu V^a \;&=\; e_a^{\ \mu}\,\partial_\nu(e^a_\rho V^\rho) \;=\; e^\mu_a\, e^a_\rho\,\partial_\nu V^\rho \;+\; V^\rho\, e^\mu_a\,\partial_\nu e^a_\rho \\ &=\; \delta^\mu_\rho\,\partial_\nu V^\rho \;+\; V^\rho\, e^\mu_a\,\partial_\nu e^a_\rho. \end{aligned} \tag{1.25} $$

Entonces la derivada covariante que se anula cuando $V^a = cte\ \forall a$ es aquella asociada a la *conexión de Weitzenböck*, cuyas componentes en base coordenada son

$$ {}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} = e_a^{\ \lambda}\,\partial_\nu e_\mu^{\ a} = -e_\mu^{\ a}\,\partial_\nu e_a^{\ \lambda} \tag{1.26} $$

es decir que la derivada de Weitzenböck de un vector cualquiera es

$$ {}^{(\mathbf{w})}D_\nu\, V^\mu \;=\; \partial_\nu V^\mu \;+\; {}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\mu}_{\ \rho\nu}\, V^\rho \;=\; e_a^{\ \mu}\,\partial_\nu V^a. \tag{1.27} $$

En particular la derivada de Weitzenböck de los vectores de la tétrada se anula (compatibilidad con la tétrada), ${}^{(\mathbf{w})}\mathbf{D}\mathbf{e}_a \equiv 0$ (úsese la ec. (1.6)):

$$ {}^{(\mathbf{w})}D_\nu\, e^\lambda_{\ a} = \partial_\nu e^\lambda_{\ a} + {}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\, e^\mu_{\ a} \equiv 0. \tag{1.28} $$

Esta propiedad puede verse como una consecuencia de la ec. (1.6) que dice que las componentes lorentzianas de los vectores $\mathbf{e}_a$ son 1 ó 0.

En general, cuando una conexión no es simétrica en base coordenada se define el tensor de *torsión*,

$$ T^{\lambda}_{\ \mu\nu} \;=\; \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} \;-\; \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\mu}. \tag{1.29} $$

En el caso de la conexión de Weitzenböck resulta

$$ {}^{(\mathbf{w})}T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{\lambda}{}_{a}(\partial_{\nu}e^{a}{}_{\mu} - \partial_{\mu}e^{a}{}_{\nu}), \tag{1.30} $$

La torsión de Weitzenböck, además de comportase como tensor ante cambio general de coordenadas en la variedad, es invariante ante transformaciones (globales) del grupo de Lorentz en el plano tangente.

Por otro lado, toda conexión afín $\{\}^{\rho}{}_{\sigma\mu}$ define un tensor de *curvatura* $R(\{\})$, cuyas componentes en base coordenada son

$$ R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\{\}^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\{\}^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \{\}^{\rho}{}_{\lambda\mu}\{\}^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \{\}^{\rho}{}_{\lambda\nu}\{\}^{\lambda}{}_{\sigma\mu}. \tag{1.31} $$

El tensor de curvatura asociado a la conexión de Weitzenböck ${}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ es nulo:

$$ {}^{(\mathbf{w})}R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\,{}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu} + {}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\rho}{}_{\epsilon\mu}\,{}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\epsilon}{}_{\sigma\nu} - (\mu \Leftrightarrow \nu) \equiv 0, \tag{1.32} $$

donde el paréntesis final indica cambio de μ por ν. Este resultado no debería sorprendernos, puesto que hemos definido ${}^{(\mathbf{w})}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ de modo que la tétrada no sufra modificación alguna al ser transportada paralelamente por *cualquier* camino. En este sentido, el espacio de Weitzenböck $\mathbb{W}$ es un espacio tan plano como el de Minkowski, puesto que su curvatura es nula. Sin embargo, este espacio está caracterizado por un tensor de torsión no nulo, que será la cantidad que dará cuenta del campo gravitatorio. Por otro lado, el espacio de Riemann $\mathbb{R}$ de la relatividad general, es un espacio con curvatura no nula y sin torsión, ya que la conexión de Levi-Civita es simétrica en los índices covariantes. Los espacios antes mencionados constituyen casos particulares de un espacio más general conocido como espacio de *Einstein-Cartan* $\mathbb{EC}$, el cual posee torsión y curvatura ambas no nulas. En general, una conexión $-\breve{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda}$ tal que la derivada covariante de la métrica es nula (en particular, la conexión de Weitzenböck cumple esta condición debido a que se anula la derivada covariante de la tétrada),

$$ D_{\lambda}g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \breve{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\lambda}\,g_{\rho\nu} - \breve{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\lambda}\,g_{\mu\rho} = 0, \tag{1.33} $$

difiere de la conexión de Levi-Civita ${}^{\{\}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ en un tensor $K^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ llamado *contorsión*

$$ \breve{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = {}^{\{\}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - K^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \tag{1.34} $$

$$ K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} - T^{\lambda}{}_{\mu\nu}). \tag{1.35} $$

Las ecs. (1.34) y (1.35) expresan la conexión general de los espacios $\mathbb{R}\bigcup\mathbb{W}$. Claramente, si la torsión es nula, la conexión deviene en la de Levi-Civita, y la teoría resultante se desarrolla en el espacio de Riemann $\mathbb{R}$ (relatividad general).

En principio, si ambos tensores no se anulan, se genera una geometría en un espacio de Einstein-Cartan $\mathbb{EC}$, dando lugar a una estructura geométrica más amplia. En teleparalelismo se utiliza la conexión de Weitzenböck (1.26), siendo el tensor de curvatura nulo pero la torsión no nula. Según la ec. (1.34), la ecuación de movimiento de una partícula libremente gravitante, se escribe también así:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + {}^{(\mathbf{w})}\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\, U^\nu\, U^\rho = -K^\mu{}_{\nu\rho}\, U^\nu\, U^\rho, \tag{1.36}$$

lo que significa que la parte simétrica de la contorsión es vista como una fuerza gravitatoria en el espacio de Weitzenböck.

Hasta aquí hemos definido una forma de transporte paralelo asociado a la existencia de un campo de tétradas sobre la variedad. Un vector es transportado paralelamente cuando sus proyecciones sobre la tétrada no cambian. En particular, la propia tétrada es autoparalela. Esta noción de paralelismo sólo permite transformaciones globales de la tétrada (una transformación local supondría el reemplazo de una noción de paralelismo por otra). Como las tétradas son, por definición, ortonormales, entonces las transformaciones globales son las del grupo de Lorentz. Por otro lado, si la tétrada contendrá la información acerca del campo gravitatorio, necesitamos un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden que definan la tétrada en función de la distribución de energía-materia. Estas ecuaciones no definirán completamente la tétrada, no sólo debido a la libre elección de las coordenadas usadas en la variedad, sino porque las ecuaciones han de ser invariantes ante transformaciones globales del grupo de Lorentz: si una tétrada es solución de las ecuaciones entonces también ha de serlo la tétrada que resulte de aplicar una transformación global de Lorentz a la anterior.

Estas observaciones son apropiadas para mencionar aquí que en relatividad general el objeto de estudio son las componentes del tensor métrico. La relación entre estas y la tétrada es, según la ec. (1.6), invariante ante transformaciones *locales* del grupo de Lorentz. Esto es así porque las componentes de la métrica no son sensibles a los índices lorentzianos en el espacio tangente. Por lo tanto a la relatividad general no le interesa cómo es la orientación de la tétrada en cada espacio tangente $T_p^\star M$. En cambio en el espacio de Weitzenböck es precisamente la orientación de la tétrada en cada espacio tangente la que determina si un campo vectorial puede ser declarado paralelo o no. Esto significa que no deberíamos esperar que la teoría de tétradas en el espacio de Weitzenböck sea una teoría con invariancia local de Lorentz, y está bien que así sea. La distribución de energía-materia tiene que ser capaz de "organizar", a través de las ecuaciones dinámicas, la orientación relativa de la tétrada en cada punto de la variedad. Esta orientación global dará por resultado una matriz $e_a^{\ \mu}(p)$ que se verá más simple o más complicada según sea el sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ utilizado en la variedad. Naturalmente, cuando la fuente posea determinada simetría, entonces una

elección oportuna de las coordenadas permitirá ver a la matriz $e_a{}^\mu(p)$ en su forma más simple.

En el espacio de Weitzenböck las ecuaciones para las tétradas en ausencia de fuentes deberían admitir soluciones con torsión nula. Esto significa que si elegimos apropiadamente el sistema de coordenadas conseguiremos que la tétrada sea constante. Esto, sumado a la condición de ortogonalidad, conduce a $e_a{}^\mu = \delta_a{}^\mu$ en todo el espacio. Obtendríamos así el espacio de Minkowski, en donde las tétradas igualmente orientadas definen las rectas (autoparalelas) de esta geometría. El sistema de coordenadas más apto para enfatizar este aspecto es el de coordenadas cartesianas. Dicho sea de paso, el espacio de Minkowski admite otras bases ortonormales en cada punto (cilíndricas, esféricas, etc.), pero no están orientadas a lo largo de las curvas autoparalelas como sí lo está la tétrada. Por otra parte, el espacio de Minkowski admite otros sistemas de coordenadas al cual referir la tétrada autoparalela, pero en estas coordenadas la matriz $e_a{}^\mu$ no sería diagonal en general.[1] Una teoría para las tétradas del espacio de Weitzenböck debería conducir a ecuaciones que sean invariantes frente a transformaciones globales del grupo de Lorentz.

1.3. Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General

Nuestro propósito ahora es recrear la formulación lagrangiana de ETRG. Parece ser claro que una teoría de tétradas es, en términos generales, más amplia que relatividad general, al menos a juzgar por la cantidad de parámetros a determinar en ambos enfoques; teleparalelismo dispone de 16 cantidades (las componentes de las tétradas), mientras que relatividad general posee, en virtud de la simetría del tensor métrico, sólo 10 cantidades a determinar. Es claro, entonces, que si una teoría teleparalela resulta ser equivalente a la relatividad general, deberá poseer simetrías entre las distintas tétradas que construyen una misma métrica. Es decir que las ecuaciones deberían ser invariantes ante el grupo local de Lorentz.

Un Lagrangiano general en el espacio de Weitzenböck construído cuadráticamente con la torsión $T^a = de^a$ tiene el aspecto

$$L_{||} \propto \eta_{ab}\, de^a \wedge H^b.$$

A primera vista, en similitud con la construcción de Yang-Mills, podría pensarse que una elección apropiada para H^b sería seleccionar $H^b \propto {}^*de^b \equiv \tilde{T}^b$, de modo tal

[1] Nótese que la tétrada señala las curvas autoparalelas de la conexión de Weitzenböck. Estas curvas sólo coinciden con las geodésicas de la métrica cuando la parte simétrica de la contorsión es nula (véase la ec.(1.36))

que el Lagrangiano sería de la forma[2] $L \propto T^a \wedge \tilde{T}^a$. Sin embargo, un Lagrangiano de este tipo es incapaz de conducir a una teoría equivalente a la Relatividad General, porque sólo es invariante ante transformaciones globales de Lorentz. Para solucionar este percance, se propone una combinación lineal cuadrática de las componentes irreducibles de la torsión frente al grupo de Lorentz $SO(1,3)$, de tal forma que la densidad Lagrangiana se remite a [1], [14]

$$L_{||} \propto de^a \wedge H_a = e^a \wedge {}^*(a_1\, {}^{(1)}T^a + a_2\, {}^{(2)}T^a + a_3\, {}^{(3)}T^a). \tag{1.37}$$

La expresión geométrica de cada parte irreducible de la torsión, junto con su nombre y número de componentes, se da en el cuadro (1.3).

	Expresión	Nombre, calidad y ♯ de componentes
${}^{(2)}T^a$	$\frac{1}{3}\, e^a \wedge (e_b \rfloor T^b)$	TRATOR, vector (4)
${}^{(3)}T^a$	$-\frac{1}{3}{}^*(\, e^a \wedge {}^*(T^b \wedge\, e_b))$	AXITOR, pseudo vector (4)
${}^{(1)}T^a$	$T^a -\, {}^{(2)}T^a -\, {}^{(3)}T^a$	TENTOR, tensor (16)

Cuadro 1.1: Descomposición irreducible del tensor de torsión $T^a = {}^{(1)}T^a + {}^{(2)}T^a + {}^{(3)}T^a$ respecto del grupo de Lorentz $SO(1,3)$

Por otro lado, las componentes de cada una de las 2-formas constituyentes están dadas por

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}T_{\ \mu} &= T^{\lambda}{}_{\lambda\mu}, \\
{}^{(3)}T_{\ \mu} &= \frac{1}{6}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\nu\rho\sigma}, \\
{}^{(1)}T_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu}) + \frac{1}{6}(g_{\nu\lambda}\, {}^{(2)}T_{\ \mu} + g_{\nu\mu}\, {}^{(2)}T_{\ \lambda}) - \frac{1}{3} g_{\lambda\mu}\, {}^{(2)}T_{\ \nu}.
\end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que ${}^{(1)}T_{\ \lambda\mu\nu}$ es un tensor simétrico en los primeros dos índices

$${}^{(1)}T_{\ \lambda\mu\nu} = {}^{(1)}\, T_{\ \mu\lambda\nu},$$

[2]De ahora en más, expresiones del estilo $\eta_{ab}\, de^a \wedge H^b$ se abreviarán $de^a \wedge H_a$, en donde se sobreentiende la presencia del tensor de Minkowski η_{ab}

cuya traza es nula

$$g^{\mu\nu}\,{}^{(1)}T_{\lambda\mu\nu} = 0 = g^{\lambda\mu}\,{}^{(1)}T_{\lambda\mu\nu},$$

y que satisface

$${}^{(1)}T_{\lambda\mu\nu} + {}^{(1)}T_{\mu\nu\lambda} + {}^{(1)}T_{\nu\lambda\mu} = 0.$$

A partir de sus componentes irreducibles, la torsión puede ser reconstruida como

$$T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}({}^{(1)}T_{\lambda\mu\nu} - {}^{(1)}T_{\lambda\nu\mu}) + \frac{1}{3}(g_{\lambda\mu}\,{}^{(2)}T_{\nu} - g^{(2)}_{\lambda\nu}T_{\mu}) + \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,{}^{(3)}T^{\rho}.$$

El Lagrangiano así construído, Ec. (1.37), no es en general invariante local de Lorentz. Sin embargo, pueden elegirse adecuadamente los couplings reales a_i en orden de reestablecer la invariancia local. El argumento discurre de la siguiente manera.

Una transformación de Lorentz infinitesimal para la tétrada está caracterizada por $e^a = \Lambda^a_{\ b}\, e^b$, en donde $\Lambda^a_{\ b}$ es una matriz antisimétrica del grupo de Lorentz. Por otro lado, una variación arbitraria $\delta L_{||}$ del Lagrangiano teleparalelo (1.37) lleva a

$$\delta L_{||} = \Big(\frac{\partial L_{||}}{\partial e^a} - d\frac{\partial L_{||}}{\partial de^a}\Big) \wedge \delta e^a + d\Big(\frac{\partial L_{||}}{\partial de^a} \wedge \delta e^a\Big). \tag{1.38}$$

Para transformaciones globales, (i.e. la matriz $\Lambda^a_{\ b}$ tiene componentes constantes), tenemos que $\delta L_{||} = 0$. En cambio para transformaciones locales, en donde las componentes de la matriz de Lorentz son funciones dependientes de las coordenadas espacio-temporales, $\Lambda^a_{\ b} = \Lambda^a_{\ b}(x)$, se tiene que la variación (1.3) arroja el término

$$\delta_{(local)} L_{||} = d\Lambda^a_{\ b} \wedge \frac{\partial L_{||}}{\partial de^a} \wedge e^b.$$

Si se pretende preservar la invariancia local, este término debe ser cancelado a menos de una derivada total. Usando la regla de Leibniz, se tiene

$$d\Lambda^a_{\ b} \wedge \frac{\partial L_{||}}{\partial de^a} \wedge e^b = \Lambda^a_{\ b}\, d\Big(\frac{\partial L_{||}}{\partial e^a} \wedge e^b\Big) - d\Big(\Lambda^a_{\ b}\, \frac{\partial L_{||}}{\partial e^a} \wedge e^b\Big),$$

en donde el segundo término del miembro derecho es, de hecho, un término de borde. A su vez, del primer término obtenemos que la cantidad

$$\frac{\partial L_{||}}{\partial de}{}_{[a} \wedge e^b{}_{]}$$

debe ser una 1-forma exacta. Introduciendo la expresión explícita (1.37) en esta ultima condición, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{||}}{\partial de}{}_{[a}\wedge e^{b}{}_{]} &= (a_1/3-a_3/3)d\eta_{ab}-(2a_3/3+a_1/3)de{}_{[a}\wedge e^{b}{}_{]}+\\ &+ (a_1/6+a_2/6-a_3/3)(e_c\rfloor de^c)\eta_{ab}.\end{aligned}$$

Es claro de esta expresión que los últimos dos términos pueden ser llevados a cero con tal que se exija que

$$a_2=-2a_1, \quad a_3=-a_1/2. \tag{1.39}$$

Se tiene entonces que

$$\frac{\partial L_{||}}{\partial de}{}_{[a}\wedge e_{b}{}_{]}=\frac{a_1}{2}d\eta_{ab}.$$

Por último, la constante arbitraria a_1 puede ser setteada a 1 sin pérdida de generalidad. El resultado final es, entonces, que el unico Lagrangiano teleparalelo construído cuadráticamente con las partes irreducibles del tensor de torsión, y que posee invariancia ante el grupo local de Lorentz, es[3]

$$\mathcal{L}_{\mathbf{T}}(e^a(x))=\frac{1}{16\pi G}\Big(de^a\wedge {}^*(-{}^{(1)}T^a+2\,{}^{(2)}T^a+\frac{1}{2}\,{}^{(3)}T^a)-2\Lambda\Big), \tag{1.40}$$

en donde se introdujo el término "cosmológico" Λ, y la constante de Newton G. En vistas a su uso en las secciones subsiguientes, escribiremos el Lagrangiano teleparalelo en componentes. Luego de una serie de manipulaciones algebraicas, puede verse que la expresión (1.40) se escribe como [15]

$$\mathcal{L}_{\mathbf{T}}(e^a(x))=\frac{e}{16\pi G}\,(\mathbb{T}-2\Lambda), \tag{1.41}$$

en donde hemos puesto $\mathbb{T}\doteq S_\rho{}^{\mu\nu}\,T^\rho{}_{\mu\nu}$, con el tensor $S_\rho{}^{\mu\nu}$ definido según

$$S_\rho{}^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}\,(T^{\mu\nu}{}_\rho-T^{\nu\mu}{}_\rho-T_\rho{}^{\mu\nu})+\frac{1}{2}\delta^\mu_\rho\,T^{\theta\nu}{}_\theta-\frac{1}{2}\delta^\nu_\rho\,T^{\theta\mu}{}_\theta, \tag{1.42}$$

y e es el determinante de la matriz $e^a{}_\mu$ (esto es, $e=\sqrt{|-g|}$). Las ecuaciones de movimiento se obtienen variando la acción total respecto de las componentes del vielbein $e^a{}_\mu$. En cuatro dimensiones, dicha acción es

$$I_{\mathbf{T}}=\frac{1}{16\pi G}\int e\,(\mathbb{T}-2\Lambda+\mathcal{L}_{mat})\,d^4x, \tag{1.43}$$

[3]El cambio abrupto de nomenclatura en las densidades Lagrangianas $L_{||}\to\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ no es en vano. En efecto, de todas las teorías con estructura teleparalela representadas por un Lagrangiano $L_{||}$, aquella descripta por la densidad $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ es la que se obtiene fijando los couplings de la manera específica dada en la Ec. (1.39).

siendo $\mathcal{L}_{mat}$ el Lagrangiano que da cuenta de la contribución de los campos de materia. De este modo, las ecuaciones de campo se reducen a

$$\partial_\sigma(e\, e_a^\lambda\, S_\lambda{}^{\nu\sigma}) - e\, e_a^\lambda\, S_\eta{}^{\mu\nu}\, T^\eta{}_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}\, e\, e_a^\nu\, (\mathbb{T} - 2\Lambda) = 4\pi G\, e\, e_a^\lambda\, \mathcal{T}_\lambda{}^\nu, \qquad (1.44)$$

en donde $\mathcal{T}_\lambda{}^\nu$ es el tensor energía-momento de la materia. En lo que resta de este apartado, mostraremos que las ecuaciones (1.44) son equivalentes a las ecuaciones de Einstein en tanto y en cuanto se considere materia sin spin. Para aclarar este punto, consideremos las ecuaciones de movimiento (1.44) en lenguaje geométrico. La variación de la acción construída con $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ dado en la Ec. (1.40), conduce a

$$dH_a - E_a = \mathcal{T}_a, \qquad (1.45)$$

siendo, como antes, $\mathcal{T}_a = \delta\mathcal{L}_{mat}/de^a$, y

$$E_a = (e_a\rfloor de^b) \wedge H_b - \frac{1}{2} e_a\rfloor(de^b \wedge H_b) = \frac{1}{2}\Big[(e_a\rfloor de^b) \wedge H_b - de^b \wedge (e_a\rfloor H_b)\Big].$$

Si la expresión explícita de H_a (ver Ec. (1.37)) se sustituye en las ecuaciones de campo (1.45), puede verse que la parte antisimétrica del miembro izquierdo de esta ecuación se anula. i.e.

$$e_{[b} \wedge dH^a{}_{]} - e_{[b} \wedge E^a{}_{]} = 0.$$

Debido a esto, el miembro derecho de (1.45) debe también ser simétrico, lo que implica que en este contexto las fuentes permitidas están constituidas por campos escalares o campos de gauge, como el campo electromagnético. En la teoría descripta por las ecuaciones de campo (1.45) vemos, entonces, que el acople de materia con spin resulta inherentemente inconsistente. Como debería quedar claro de estos comentarios, las teorías de gravitación de tipo teleparalela con relevancia física no presuponen materia con spin como fuente de la torsión [4].

Luego de estas palabras, establezcamos el vínculo entre la teoría (1.40) (o bien (1.41)) y la Relatividad General. Para esto, recordemos que la conexión de Levi-Civita ${}^{\{\}}\Gamma_{ab}$ para la métrica $g = \eta_{ab}e^a e^b$ está dada por la Ec. (1.24), o bien, en lenguaje geométrico, por

$${}^{\{\}}\Gamma_{ab} = \frac{1}{2}\Big(e_a\rfloor de_b - e_b\rfloor de_a - (e_a\rfloor e_b\rfloor de_c) \wedge e^c\Big). \qquad (1.46)$$

El correspondiente tensor de curvatura (ver Ec. (1.31)), queda definido por

$${}^{\{\}}R_{ab} = d\,{}^{\{\}}\Gamma_{ab} - {}^{\{\}}\Gamma_{ac} \wedge {}^{\{\}}\Gamma^c{}_b. \qquad (1.47)$$

[4] Este hecho ha sido mal interpretado varias veces en la literatura. Ver e.g. la Ref. [16]

Esta información nos permite relacionar la curvatura con el vielbein. De hecho, combinando las ecuaciones (1.46) y (1.47) se prueba que

$$\frac{1}{2}\,{}^{\{\}}R^{ab} \wedge \eta_{ab} = \mathcal{L}_{\mathbf{T}} + d(e^a \wedge {}^*de_a). \tag{1.48}$$

La ecuación anterior es muy importante, y materializa la esencia de la equivalencia entre RG y su análogo teleparalelo. En efecto, el lagrangiano cinético (1.40), a menos de una derivada total, es igual al escalar de curvatura conducente a la acción de Hilbert-Einstein. Esto implica que al reemplazar la igualdad (1.48) en la acción teleparalela, Ec. (1.43), y luego variar respecto del frame e^a, se obtienen las ecuaciones de Einstein

$${}^{\{\}}G_a \doteq \frac{1}{2}\eta_{abc} \wedge {}^{\{\}}R^{bc} \propto \mathcal{T}_a.$$

Sin embargo, es preciso recordar que la equivalencia total entre los dos esquemas se da sólo al considerar un tensor energía momento simétrico (de otra manera, las Ecs. (1.45) se tornan inconsistentes), es decir, al ignorar la constribución del spin de la materia en escalas propias de la interacción gravitatoria.

1.4. Comentarios sobre la torsión

En esta sección discutiremos brevemente algunos aspectos geométricos que atañen a la torsión en teorías de un carácter más general que TERG, como así también ciertas implicancias observacionales asociadas a su existencia.

El tensor de torsión representa una suerte de *gap* traslacional. La torsión mide la no-conmutatividad del desplazamiento de puntos, en analogía con la curvatura, que mide la no-conmutatividad del desplazamiento de vectores. Esta cuestión está esquematizada en la Figura (1.1). Sea P un punto en la variedad M y v_P, u_P dos vectores linealmente independientes en T_PM, los cuales deben ser considerados infinitesimales. Automáticamente, ellos definen dos puntos R y Q en M [5]. Dicho de otra forma, el vector v_P *desplaza* P infinitesimalmente hasta R, y el vector u_P *desplaza* P infinitesimalmente hasta Q. Por otro lado, la receta para efectual dos desplazamientos sucesivos v, u consiste primero en desplazar P hasta R por medio de v_P y luego transportar paralelamente u_P hasta $v^{||}_R$ y desplazar el punto R mediante el vector $v^{||}_R$. La Figura (1.1) esquematiza el hecho de que, en general, el conmutador entre dos desplazamientos sucesivos no será nulo, sino que será, por definición, una medida de la torsión. En la Fig. (1.1) también puede verse que esta definición es consistente con la usual, esto es

[5] Esta operación puede ser definida en términos rigurosos a través del mapeo exponencial $\exp_P : T_PM \to M$, $\exp_P(v) = R$, $\exp_P(u) = Q$. Ver e.g., el Capítulo 5 de la Ref. [17].

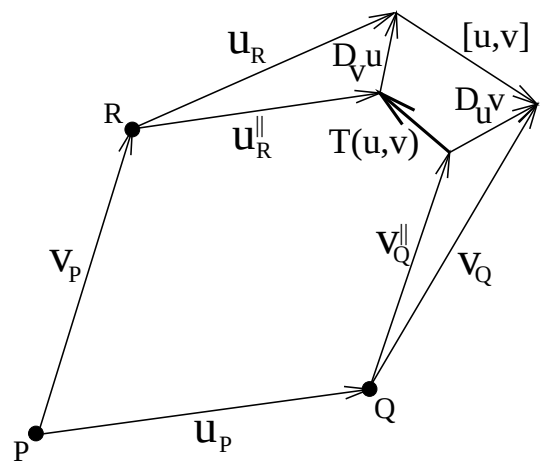

Figura 1.1: Interpretación geométrica de la Torsión.

$$T(u,v) = D_u v - D_v u - [u,v]. \tag{1.49}$$

Reparemos en el hecho que si evaluamos las componentes de la torsión en un frame arbitrario e_a, tenemos

$$\begin{aligned} T(e_b, e_c) &= D_{e_b} e_c - D_{e_c} e_b - [e_b, e_c] \\ &= \Gamma_{bc}{}^a\, e_a - \Gamma_{cb}{}^a\, e_a + C_{bc}{}^a\, e_a \\ &= T_{bc}{}^a\, e_a. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Entonces

$$T_{bc}{}^a = C_{bc}{}^a + \Gamma_{bc}{}^a - \Gamma_{cb}{}^a,$$

o bien, usando el objeto de anholonomía

$$C^a \doteq de^a = \frac{1}{2} C_{bc}{}^a\, e^b \wedge e^c,$$

finalmente llegamos a

$$T^a = de^a + \Gamma_b{}^a \wedge e^b. \tag{1.51}$$

La definición de la torsión de Weitzenböck dada en la Ec. (1.30) es un caso particular de (1.51); en efecto, si se impone el vínculo adicional de curvatura nula, siempre puede elegirse un frame holónomo de tal manera de anular la conexión de spin $\Gamma_b{}^a$ en todo el espacio. Este fijado de gauge permite escribir la conexión de Weitzenböck simplemente como $T^a = de^a$, o sea, como acusa la Ec. (1.30).

En teorías que possen ambos campos no nulos (curvatura y torsión), las magnitudes de los mismos vienen interrelacionadas. Debido a que la curvatura de una dada conexión viene dada por

$$R^a{}_b = d\Gamma_a{}^b + \Gamma_a{}^c \wedge \Gamma_c{}^d, \tag{1.52}$$

tenemos, en virtud de (1.51), que ambos campos se mezclan. En la mayoria de estas teorías con ambos campos no nulos, generalmente se tiene que la fuente de la curvatura está dada por la densidad de energía-momento, mientras que el origen de la torsión está relacionado con el spin de la materia[6]. Esto plantea el interrogante de cómo se acopla la materia a la torsión, y cómo sería posible medir las consecuencias de dicho acoplamiento. En lo que sigue, comentaremos brevemente ciertos aspectos observacionales generales relacionados con teorías que presentan torsión. Empero, es muy importante remarcar que las conclusiones obtenidas no competen a las teorías con estructura teleparalela, como las tratadas en esta Tesis[7]

En la Ref. [19] se ha sugerido que ciertos vínculos para la torsión pueden ser inferidos de violaciones de la invariancia local de Lorentz. El punto clave aquí es que la presencia de torsión en una cierta región del espacio-tiempo establecería un frame preferencial para los observadores inerciales debido al acoplamiento no trivial con los campos fermiónicos.

Debido a que la torsión es un fenómeno geométrico, es razonable suponer que no se acoplará con la carga de sabor. Por simplicidad, consideremos la interacción entre un campo fermiónico y la torsión en acoplamiento mínimo[8]. Además, en vistas a su conexión con el experimento, importa considerar la aproximación de torsión constante, en donde los acoplamientos otrora arbitrarios pueden ser reemplazados por soluciones de las ecuaciones dinámicas para el background tomadas como constantes al leading order. En este caso particular, los fermiones sólo se acoplarán via la acción de la parte axial-vectorial de la torsion ${}^{(3)}T_\mu = \frac{1}{6}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\nu\rho\sigma}$ con un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{min} = \frac{3}{4}\ {}^{(3)}T_\mu \overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi. \tag{1.53}$$

[6]Una excepción lo constituye la teoría de Lovelock, ver Ref. [18]

[7]Esto es debido a que en un espacio-tiempo de Riemann-Cartan, el tensor de curvatura generalizado $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ puede ser expresado como la suma de dos términos de naturaleza distinta. Uno de ellos es la curvatura usual de Riemann $\tilde{R}^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ utilizada en el contexto de la RG, y el otro proviene del tensor de torsión. Todas las teorías teleparalelas conducen a $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0$, y los experimentos que se mencionarán a continuación desprecian los efectos gravitacionales en el laboratorio, con lo cual $\tilde{R}^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0$. La validez de los constraints experimentales alcanzan a teorías con $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \neq 0$, y para las cuales esta curvatura tiene su origen en la torsión.

[8]En el lagrangiano de interacción general intervienen las tres partes irreducibles de la torsión. El lector interesado puede consultar los detalles en la Ref. [19]

En mediciones relacionadas con la violación de la invariancia local de Lorentz suele utilizarse un marco de referencia ecuatorial centrado en el sol. En este frame es habitual utilizar coordenadas (T, X, Y, Z), de tal forma que el eje Z es paralelo al eje de rotación terreste, y el eje X apunta en la dirección del *equinoccio vernal*. Las mediciones relativas a la invariancia local de Lorentz se efectúan fundamentalmente por dos métodos independientes. En uno se analizan las modulaciones de una señal de *maser* asociadas con la rotación de la Tierra y su revolución en torno al Sol [20]. En el otro, se sondean posibles violaciones de la invariancia local utilizando un péndulo de torsión con electrones spin-polarizados [21]. Ambos experimentos son coincidentes a la hora de acotar las componentes constantes de la parte axial-vectorial de la torsión que aparecen en el acople fermiónico mínimo (1.53). En particular, se tiene

$$\begin{aligned}
|^{(3)}T_T| &< 2{,}9 \times 10^{-27}\ GeV \simeq 1{,}5 \times 10^{-11}\ m^{-1}, \\
|^{(3)}T_X| &< 2{,}1 \times 10^{-31}\ GeV \simeq 1{,}1 \times 10^{-15}\ m^{-1}, \\
|^{(3)}T_Y| &< 2{,}5 \times 10^{-31}\ GeV \simeq 1{,}3 \times 10^{-15}\ m^{-1}, \\
|^{(3)}T_Z| &< 1{,}0 \times 10^{-29}\ GeV \simeq 5{,}3 \times 10^{-13}\ m^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

En el caso general en el cual los fermiones se acoplan a las tres partes irreducibles de la torsión, los autores de la Ref. [19] concluyen que 19 de las 24 componentes del tensor de torsión (en cuatro dimensiones), pueden ser acotadas por métodos similares.

Las mediciones relacionadas con la polarización de la radiación cósmica de fondo también permiten imponer constraints para los valores absolutos de algunas de las componentes del tensor de torsión. En este caso, el análisis tiene en cuenta el acople de la torsión con el campo electromagnético. En la Ref. [22] se consideró el Lagrangiano de interacción dado por

$$\mathcal{L}_{int} = T^{\mu\lambda}{}_{\rho} F_{\mu\nu} \left(\xi_1 \widetilde{F}^{\rho\nu} + \xi_2 F^{\rho\nu} \right)_{,\lambda} , \tag{1.55}$$

en donde $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ es el tensor de campo electromagnético, y $\widetilde{F}^{\mu\nu}$, su dual. El efecto del acoplamiento se traduce en una birrefringencia de las ondas electromagnéticas, y esta, a su vez, conduce a la aparición de un modo magnético (B-mode) en la radiación cósmica de fondo. Mientras el término con constante de acoplamiento ξ_2 conlleva una propagación con ausencia de birrefringencia, los datos provenientes de WMAP y BOOMERanG permiten acotar los efectos de polarización inducidos por el término signado por la constante de acople ξ_1. En efecto, se concluye que

$$|\xi_1 T_1| \leq 6 \times 10^{-22}\, GeV^{-1} \simeq 1,2 \times 10^{-11}\, m\ , \tag{1.56}$$

en donde $T_1 = T^{tz}{}_t - T^{zz}{}_t$, y la coordenada z indica la dirección de propagación.

Capítulo 2

Gravedad de tipo Born-Infeld

2.1. Correcciones ultravioletas a la Relatividad General

En la ultima década ha sido estudiada una amplia gama de teorías de gravedad modificada con el objeto de resolver algunos de los aspectos inquietantes de la gravedad y cosmología convencionales, como la presencia de singularidades, horizontes de partícula y más recientemente, la aceleración cósmica. Muchas de esas teorías modificadas consisten meramente en la deformación de la RG. Un proceso de este estilo consiste en partir desde un Lagrangiano conocido $\mathcal{L} = e\,L$, en donde L es un escalar y e transforma como una densidad frente a cambios generales de coordenadas, y luego reemplazarlo por algún otro Lagrangiano $\mathcal{L}_D = e\,f(L)$. La idea es que efectuando una elección adecuada de la función f uno pueda obtener una nueva teoría que no comparta los efectos indeseados de la original. Para entender la metodología, reparemos un instante en esta construcción.

Consideremos un Lagrangiano invariante $L = L(\phi^a, \phi^a_{,\mu}\ , \phi^a_{,\mu\nu}\ , ..., x^\mu)$ y una densidad e que no depende de las derivadas de los campos ϕ^a, es decir, $e = e(\phi^a, x^\mu)$. Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano deformado $\mathcal{L}_D = e\,f(L)$ serán

$$\begin{aligned} 0 &= ... - \partial_\mu\,\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \phi^a_{,\mu\nu}}\right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \phi^a} \\ &= ... - \partial_\mu\,\partial_\nu \left(f\,'(L)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{,\mu\nu}}\right) + \partial_\mu \left(f\,'(L)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a_{,\mu}}\right) - f\,'(L)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} + \\ &\quad + (L\,f\,'(L) - f(L))\,\frac{\partial e}{\partial \phi^a}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si la intención es modificar sólo el régimen de alta energía ($L >> 1$), entonces f

deberá satisfacer

$$f(L) \simeq L + O(L^2), \tag{2.2}$$

i.e.,

$$f(0) = 0, \qquad\qquad f\,'(0) = 1. \tag{2.3}$$

En general, las ecuaciones (2.1) tendrán soluciones diferentes a las de la teoría original representada por $\mathcal{L} = e\,L$. Sin embargo, es importante notar que no todas las soluciones de la teoría original resultarán deformadas con este procedimiento. De hecho, consideremos soluciones de la teoría de partida, tales que $L = 0$. Si reemplazamos esta condición en (2.1) y usamos (2.4), vemos que el último término se anula idénticamente. Adicionalmente, en virtud que $f\,'(0) = 1$, estas soluciones de la teoría original que poseen $L = 0$, también resuelven las ecuaciones de campo para el Lagrangiano deformado $\mathcal{L}_D$.

En particular, si consideramos a la Relatividad General, el Lagrangiano L está dado por la curvatura escalar R asociada con la conexión de Levi-Civita, el cual es nulo para todas las soluciones de vacío de la teoría, como así también, para aquellas cuyas fuentes posean un tensor energía-momento con traza nula. De esta forma, podríamos decir que la RG es una teoría muy rígida, en el sentido de que sus soluciones de vacío (y aquellas con $T^{\mu}_{\mu} = 0$), permanecen como soluciones de teorías deformadas del estilo $\mathcal{L}_D \propto \sqrt{-g}\,f(R)$, con f satisfaciendo (2.4). Este es un aspecto muy singular de la teoría de Einstein, no compartido por otras teorías de campo. Por ejemplo, en la electrodinámica de Maxwell se tiene que $L \propto E^2 - B^2$, y sólo algunas pocas soluciones de vacío -esencialmente ondas planas- llevan a un Lagrangiano de Maxwell nulo.

En contraste con otras teorías, el lagrangiano de Hilbert-Einstein $L \propto R$ contiene derivadas segundas del objeto dinámico, representado por la métrica. A pesar de este hecho, las ecuaciones de Einstein resultan ser de segundo orden porque los términos de cuarto orden en las ecuaciones de Euler-Lagrange se cancelan mutuamente, o en otras palabras, las segundas derivadas presentes en R aparecen contribuyendo sólo en un término de superficie en la acción. Esta propiedad se pierde una vez que uno considera la teoría deformada $\mathcal{L}_D \propto \sqrt{-g}\,f(R)$ cuyas ecuaciones son ahora de cuarto orden, como es claro en (2.1). Este punto desagradable es usualmente sobrellevado considerando una nueva métrica

$$g \to \widetilde{g} = e^{\phi(x)} g, \tag{2.4}$$

que depende conformemente de la usual vía el campo escalar $\phi(x)$; el campo $\phi(x)$ deviene constante cuando se recupera la RG, esto es, cuando $f\,' = 1$. Este procedimiento permite reformular una dada teoría tipo $f(R)$ como una teoría escalar-tensorial del estilo Brans-Dicke con $\omega = 0$ (formalismo métrico [23]-[27]), o bien con $\omega = -3/2$ (formalismo de Palatini [28]-[30]). De esta forma la nueva métrica $\widetilde{g}$ resulta estar gobernada por ecuaciones de campo de segundo orden,

a expensas de enmascarar los grados de libertad adicionales en la dinámica del campo escalar $\phi(x)$ regido también por ecuaciones de segundo orden. No obstante este artilugio, la reformulación escalar-tensorial de las teorías $f(R)$ resulta en violaciones del Principio de Equivalencia Débil, puesto que la materia y la gravedad se acoplan no sólo vía la (nueva) métrica, sino también a través del campo escalar $\phi(x)$ [31, 32].

Incidentalmente, también podemos mencionar que no todas las $f(R)$'s que aparecen en la literatura verifican las condiciones (2.4); por ejemplo, podemos citar la $f(R)$ usada para construir la solución esféricamente simétrica de la Ref. [33], o la propuesta en las Refs. [29, 34] tendientes a explicar la aceleración del universo como un efecto de gravedad modificada en el régimen de curvaturas pequeñas [1].

Para evitar los contratiempos típicos de las teorías $f(R)$, haremos uso de la maquinaria teleparalela tratada extensamente en el capítulo 1. Como allí fue explicado, el Lagrangiano del equivalente teleparalelo de la teoría de Einstein (Ecs. (1.40) y (1.41)), está construído cuadráticamente con el tensor de torsión. Esto implica que el Lagrangiano contiene sólo derivadas primeras del vielbein e^a por lo que las ecuaciones de movimiento serán siempre de segundo orden en las derivadas del vielbein. Remarcablemente, este hecho es cierto aun cuando se consideran deformaciones del Lagrangiano de TERG. En efecto, consideremos una teoría del estilo

$$\mathcal{I} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{e}(f(\mathbb{T}) + \mathcal{L}_{mat})d^4x, \tag{2.5}$$

en donde $f(\mathbb{T})$ es una función arbitraria del invariante de Weitzenböck $\mathbb{T} \doteq S_\rho{}^{\mu\nu}\, T^\rho{}_{\mu\nu}$. Variando respecto de las componentes del frame, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\mathrm{e}^{-1}\partial_\mu(\mathrm{e}S_a{}^{\mu\nu})\, f' + e_a{}^\lambda S_\rho{}^{\nu\mu}T^\rho{}_{\mu\lambda}\, f' + S_a{}^{\mu\nu}\,\partial_\mu(\mathbb{T})\, f'' + \frac{1}{4}e_a{}^\nu\, f = 4\pi G\,\mathcal{T}_a{}^\nu, \tag{2.6}$$

en donde las primas denotan diferenciación respecto de $\mathbb{T}$. Por supuesto, las ecuaciones de Einstein en su versión teleparalela (ver Ec. (1.44)) están contenidas en el sistema (2.6). Sólo basta escoger $f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, es decir, fijar $f = 1$. Esquemas del estilo (2.5) han sido bautizados muy recientemente como *teorías* $f(T)$, en alusión a la torsión, y en clara analogía con las teorías $f(R)$. El punto más importante en esta construcción reside en que las ecuaciones de movimiento (2.6) siguen siendo de segundo orden en las derivadas del frame. Esto, frente a los esquemas

[1] que, pensadas como teorías de tipo Brans-Dicke, pueden ser desacreditadas en base a bien conocidos constraints post-Newtonianos [27, 30, 35]; adicionalmente, el límite Newtoniano en el formalismo de Palatini tampoco es recuperado [36].

de tipo $f(R)$ representa una genuina ventaja, sobre todo a la hora de caracterizar soluciones.

En la sección siguiente reuniremos los detalles relativos a las primeras investigaciones concernientes a la acción (2.5), basadas fundamentalmente en una deformación del estilo Born-Infeld tendiente a la eliminación de las singularidades presentes en la teoría de Einstein [37]-[39]. Luego de estos trabajos otras deformaciones fueron consideradas, especialmente en conexión con el problema de la aceleración cósmica [40]-[50][2].

Discutamos ahora la siguiente cuestión. Supongamos que para una dada función f y un determinado tensor energía momento $\mathcal{T}_a{}^{\nu}$, tenemos una solución de las ecuaciones de campo (2.6), digamos $e^a(x)$. Esto significa que la teoría f, de acuerdo a la distribución local de materia,"organiza"la orientación relativa (local) de la base $e^a(x)$, de tal forma que los campos $e^a(x)$, localmente, señalan curvas autoparalelas de la variedad. Esta organización local de la tétrada, vía la relación (1.9), trae aparejada una determinada métrica. Ahora, supongamos que efectuamos una transformación local de Lorentz a nuestra solución, $e^a(x) \rightarrow e^b(x)' = \Lambda^b_a(x)e^a(x)$, la cual no afecta a la métrica. No obstante, el efecto que tiene esta transformación sobre el invariante de Weitzenböck $\mathbb{T}$, es producir una derivada total,

$$\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}' = \mathbb{T} + \textit{derivada total}.$$

Esta ultima relación no dice otra cosa sino que la teoría (2.5) no es invariante local de Lorentz, puesto que el término de borde queda encapsulado dentro de la función f. Por supuesto, cuando $f = 1$ la derivada total no participa en las ecuaciones dinámicas y la invariancia local es restituída. Este es el caso de la RG.

La carencia de invariancia local del esquema general (2.5) no debe ser vista, en modo alguno, como un impedimento físico que atente en contra de la viabilidad de las teorías $f(T)$, ni como un aspecto oscuro de las mismas. La unica debilidad proveniente de la falta de invariancia local reside en cuestiones prácticas, puesto que cada par de tétradas conectadas por una transformación local del grupo de Lorentz (i.e., conducentes a la *misma* métrica), resultan ser *inequivalentes* a los ojos de la teoría. Por ejemplo, mientras que el frame $e^a(x)$ recién mencionado satisface las ecuaciones de movimiento, su compañero $e^b(x)'$, conectado con el anterior vía una rotación o boost local, no constituye en general una solución de las ecuaciones de campo.

En las siguientes secciones tendremos la oportunidad de reincidir en esta discusión en el contexto de los frames no triviales que aparecerán oportunamente.

[2]Luego de una serie de argumentos expuestos a los autores de los artículos [49] y [50] en una comunicación personal, se ha concluído que el campo de tétradas utilizado para el analisis perturbativo efectuado en esos trabajos es incorrecto. Si bien parte de las conclusiones allí obtenidas pueden ser correctas, se advierte al lector interesado sobre posibles inconsistencias.

2.2. Un esquema de tipo Born-Infeld para la gravedad

La gravedad no es la única interacción que alberga divergencia de cantidades físicas. El electromagnetismo de Maxwell exhibe también propiedades divergentes, como la autoenergía de la carga puntual. Atendiendo a esta falencia de la electrodinámica Maxwelliana, Born e Infeld formularon en 1934 una extensión no lineal de la teoría de Maxwell sin efectos divergentes (ver una exposición sinóptica en el Apéndice 1). Luego de algunos años, y con el advenimiento de la electrodinámica cuántica, la teoría de Born-Infeld quedó en el olvido, sobre todo porque la nueva versión cuántica del esquema de Maxwell resultó ser renormalizable. Varias décadas después, la electrodinámica de Born-Infeld experimentó un renovado interés debido a su conexión inherente con desarrollos más recientes, como la teoría de cuerdas. La naturaleza de esta conexión reside en el hecho que la acción de BI es la encargada de regir el comportamiento del campo electromagnético en las D-branas [51]-[54].

El éxito del esquema electromagnético de BI, en especial en lo que concierne al control de las singularidades presentes en la teoría de Maxwell, invita a la búsqueda de análogos gravitatorios que presenten la misma estructura. Este tópico ha recibido cierta atención en el pasado, en donde varias deformaciones de tipo BI en un contexto Riemanniano fueron exploradas [55]-[61]. Más recientemente, ciertos aspectos cosmológicos en el contexto de deformaciones de tipo BI, fueron cuidadosamente analizados por medio de técnicas de sistemas dinámicos [62]. Sin embargo, todas estas construcciones -por estar arraigadas al espacio de Riemann- conducen a complicadas ecuaciones no lineales de cuarto orden para la métrica. Por esta razón la caracterización de soluciones resulta un proceso sumamente esquivo; de hecho, en ninguno de estos esquemas se han encontrado soluciones exactas, ni siquiera en los contextos más simples. A pesar de esto, la importancia de acciones del estilo BI para el campo gravitatorio fue revisada muy recientemente en conexión con el problema de la gravedad cuántica [63, 64]. Finalmente, y en una dirección diferente, acciones de este tipo fueron también estudiadas usando el formalismo de Palatini, en donde la métrica y la conexión son considerados entes independientes [65]-[67].

Nuestra aproximación al problema toma un derrotero diferente. Haciendo uso de la maquinaria teleparalela expuesta en el capítulo 1, podemos formular deformaciones arbitrarias de la teoría de Einstein sin sacrificar el orden de las ecuaciones de campo. En esta línea, estudiaremos en este capítulo la primera estructura de tipo Born-Infeld para la gravedad (que llamaremos de aquí en adelante *Born-Infeld cero*, o bien **BI0**), cuya densidad Lagrangiana está descripta por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{BI0}}[e^a_\mu(x)] = \frac{\lambda\, e}{16\pi G}\left[\sqrt{|1+2(\mathbb{T}-2\Lambda)/\lambda|}-1\right]. \tag{2.7}$$

En esta ecuación, la constante λ es una nueva escala que controla el apartamiento respecto del régimen de baja energía dado por la teoría de Einstein. En particular, la acción de Hilbert-Einstein teleparalela con constante cosmológica, Ec. (1.41) es recuperada de (2.7) cuando $\lambda \to \infty$.

La teoría resultante del Lagrangiano (2.7) se ubica dentro del espacio de teorías $f(\mathbb{T})$. En efecto, en este caso se tiene que la función f posee la estructura

$$f_{\mathbf{BI}}(x) = \lambda\left[\sqrt{|\,1+2\lambda^{-1}x\,|}-1\right], \tag{2.8}$$

que emula la forma del Lagrangiano de Born-Infeld cuando está presente sólo uno de los campos, $\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}$, Ec. (A.1).

Las ecuaciones de movimiento se obtienen variando la acción respecto de las componentes de la tétrada e^a_μ, y devienen en

$$\begin{aligned}
&\partial_\sigma\left[|\,1+2\,\lambda^{-1}(\mathbb{T}-2\Lambda)\,|^{-1/2}\;\; e\;\, e^\lambda_a\; S_\lambda{}^{\nu\sigma}\right] - \frac{e\; e^\lambda_a\;\; S_\eta{}^{\mu\nu}\, T^\eta{}_{\mu\lambda}}{|\,1+2\,\lambda^{-1}(\mathbb{T}-2\Lambda)\,|^{1/2}} \\
&+\frac{\lambda}{4}\; e\; e^\nu_a\;\; \left[|\,1+2\,\lambda^{-1}(\mathbb{T}-2\Lambda)\,|^{1/2}-1\right] \\
=\;\; & 4\pi G\; e\, e^\lambda_a\; \mathcal{T}_\lambda{}^\nu,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

y son consecuencia del reemplazo de la forma específica (2.8) en las ecuaciones generales (2.6).

En lo que resta del capítulo, estudiaremos en detalle estas ecuaciones y caracterizaremos la teoría (2.7) en distintas situaciones con relevancia física.

2.3. Cosmologías de tipo Friedmann-Robertson-Walker

La incapacidad del Lagrangiano de Hilbert-Einstein para permitir deformaciones en el régimen de alta energía no sólo compete a soluciones en vacío, sino también a cualquier solución de RG (con $\Lambda = 0$), que satisfaga $R = 0$. Esta aseveración es válida aún cuando se consideran fuentes. Por ejemplo, las soluciones cosmológicas de tipo Friedmann-Robertson-Walker (**FRW**) en presencia de un fluido de radiación, no pueden ser continuamente deformadas porque el tensor energía momento posee traza nula en este caso, con lo cual se tiene $R = 0$. En contraste, el Lagrangiano teleparalelo (1.41) no es idénticamente nulo en esta situación, dejando abierta así la posibilidad de obtener un régimen deformado. En esta sección se mostrará que de hecho, eso es exactamente lo que sucede.

2.3.1. Universos espacialmente planos

Consideremos entonces primero la deformación (2.7) en el contexto de una geometría tipo **FRW** espacialmente plana en presencia de un fluido isótropo y homogéneo. Las fuentes estarán representadas entonces por un tensor energía momento del tipo $T^{\mu}{}_{\nu} = diag(\rho(t), -p(t), -p(t), ...)$ en el sistema comóvil. Las ecuaciones de campo en n dimensiones serán resueltas considerando el vielbein

$$e^a_\mu = diag(1,\, a(t),\, a(t),\, ...), \qquad e = a^{n-1}, \tag{2.10}$$

que conduce a la métrica

$$g_{\mu\nu} = diag(1, -a(t)^2, -a(t)^2, ...). \tag{2.11}$$

En este caso las unicas componentes no nulas de $S_{\rho\mu\nu}$ y $T_{\rho\mu\nu}$ son

$$S_{\alpha 0\alpha} = -S_{\alpha\alpha 0} = -\frac{1}{2}(n-2)\; a(t)\; \dot{a}(t),$$

$$T_{\alpha 0\alpha} = -T_{\alpha\alpha 0} = a(t)\; \dot{a}(t), \qquad \alpha \neq 0. \tag{2.12}$$

De esta forma, el invariante de Weitzenböck resulta[3]

$$\mathbb{T} = -(n-1)(n-2)\; H^2,$$

en donde se ha introducido el *parámetro de Hubble*

$$H = \dot{a}(t)/a(t),$$

el cual no es nulo ni constante en presencia de fuentes. El primer término en la ecuación (2.9) para los índices $a = 0 = \nu$ es nulo; entonces la ecuación de *valores iniciales* para la cosmología modificada de **FRW** resulta

$$\frac{1-\epsilon}{\left(1-\epsilon-2(n-1)(n-2)\,\frac{H^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\;\rho, \qquad \epsilon = \frac{4\Lambda}{\lambda}. \tag{2.13}$$

[3]Nótese que la Ec. (2.12) indica que en $n = 2$ la cosmología se torna trivial. En el caso de un espacio-tiempo bidimensional general, la *díada* posee la estructura

$$e^a_\mu(t,x) = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix},$$

en donde f, g, h, i son funciones arbitrarias de las coordenadas (t, x). Si bien existen dos componentes no nulas de la torsión ($T^t{}_{t\,x}$ y $T^x{}_{t\,x}$), el tensor $S_{\rho\mu\nu}$ es idénticamente nulo. Así, las teorías de tipo $f(\mathbb{T})$, resultan estériles en dos dimensiones espacio-temporales.

Por otro lado, la isotropía de la solución propuesta hace que las ecuaciones (2.9) para los índices espaciales $a = \nu$ sean iguales; ellas resultan ser

$$(1-\epsilon)\left(2(n-2)\,q\,\frac{H^2}{\lambda} + 2n(n-2)\,\frac{H^2}{\lambda} - 1 + \epsilon\right)$$
$$\times\left(1-\epsilon-2(n-1)(n-2)\,\frac{H^2}{\lambda}\right)^{-\frac{3}{2}} + 1 \;=\; \frac{16\pi G}{\lambda}\;p \tag{2.14}$$

En esta ultima expresión se ha introducido el *parámetro de desaceleración*, dado por

$$q = -a\dot{a}^{-2}\ddot{a} = -(1+\dot{H}\;H^{-2}).$$

Las Ecs. (2.13) y (2.14) conducen tácitamente a la conservación de la energía-momento. De hecho, derivando temporalmente la ecuación (2.13) y combinando este resultado con la ecuación espacial (2.14), uno obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\;a^{n-1}\right) = -p\;\frac{d}{dt}a^{n-1},$$

o bien

$$\dot{\rho} + (n-1)\;(\rho+p)\;H = 0. \tag{2.15}$$

Para un fluido barotrópico cuya ecuación de estado satisface $p = \omega(n)\rho$, la ley de conservación (2.15) conduce al comportamiento

$$\rho(t) = \rho_o\;\left(\frac{a_o}{a(t)}\right)^{(n-1)(1+\omega)}, \tag{2.16}$$

en donde los subíndices aluden a valores actuales (constantes) de las cantidades respectivas. En vacío (i.e. $\rho = p = 0$), las ecuaciones (2.13)-(2.14) tienen la solución

$$H^2 = \widetilde{H}^2 \equiv \frac{2\Lambda(1-\epsilon)}{[(n-1)(n-2)]}, \quad q = -1.$$

En este caso, el resultado es la métrica de de Sitter con la constante cosmológica efectiva dada por

$$\widetilde{\Lambda} = \Lambda\;(1-\epsilon). \tag{2.17}$$

En cambio, si la fuente está constituida por un fluido barotrópico, el sistema (2.13), (2.16) puede ser reescrito usando la nueva variable

$$y = \ln\left[(\frac{a}{a_o})^{(n-1)(1+\omega)}\right] \;\Rightarrow\; \dot{y} = (n-1)(1+\omega)\,H. \tag{2.18}$$

De este modo, la dinámica del universo espacialmente plano de tipo **FRW** en la gravedad de Born-Infeld bajo consideración, está codificada en la ecuación

$$\frac{2(n-2)}{(n-1)(1+\omega)^2}\,\dot{y}^2 + \frac{\lambda\,(1-\epsilon)^2}{(1+16\pi G\rho_o\lambda^{-1}\exp(-y))^2} = (1-\epsilon)\,\lambda, \tag{2.19}$$

cuyo límite de baja energía (i.e. $\lambda \to \infty$, el dominio de la Relatividad General) es

$$\frac{2(n-2)}{(n-1)(1+\omega)^2}\,\dot{y}^2 - 32\pi G\rho_o\exp(-y) = 4\,\Lambda. \tag{2.20}$$

La variable y es monótona creciente con el factor de escala $a(t)$. Así, el comportamiento del factor de escala puede ser leído directamente en las ecuaciones de "conservación de la energía"(2.19) y (2.20). Como es sabido, el potencial efectivo para un universo de **FRW** espacialmente plano, induce una expansión eterna del factor de escala $a(t)$ si $\Lambda > 0$, y a un recolapso del mismo si $\Lambda < 0$. Por otro lado, el potencial de Born-Infeld para $\lambda > 0$ es una función creciente que tiende a cero cuando $y \to -\infty$ ($a \to 0$) y va a $\lambda(1-\epsilon)^2$ cuando $y \to \infty$. Ya que el nivel de energía en la Ec. (2.19) es $\lambda(1-\epsilon)$, se tiene que el universo recolapsa si $1-\epsilon > 1$ (i.e. $\Lambda < 0$), o bien se expande por siempre si $0 < 1-\epsilon < 1$ (i.e. $0 < \Lambda < \lambda/4$). A pesar que este comportamiento parecería no diferir considerablemente respecto de su análogo relativista, debemos enfatizar que la principal (y radical) diferencia consiste en la respuesta del parámetro de Hubble cuando $y \to -\infty$: mientras que H diverge en RG, en la gravedad de Born-Infeld tiende al valor constante

$$H^2 \to H^2_{max} = \frac{(1-\epsilon)\,\lambda}{2(n-1)(n-2)} = \frac{\lambda - 4\Lambda}{2(n-1)(n-2)}. \tag{2.21}$$

Para $\lambda < 0$ y $\epsilon \neq 1$ el potencial efectivo deviene en una barrera infinita. Esto claramente representa una situación exenta de realidad física, pues conduciría a la divergencia de H para $16\pi G\rho = |\lambda|$ (ver Ec. (2.13)). Por esto, en lo que respecta a este capítulo, consideraremos sólo el caso $\lambda > 0$.

La dependencia temporal del factor de escala puede ser obtenida desde la ecuación (2.13) o, equivalentemente, desde (2.19). Resulta conveniente efectuar nuevamente un cambio de variable según

$$\mathrm{y} = \frac{\lambda}{16\,\pi\,G\,\rho_o}\,\left(\frac{a(t)}{a_o}\right)^{(n-1)(1+\omega)}. \tag{2.22}$$

De esta forma, la ecuación de valores iniciales adquiere el aspecto

$$\dot{\mathrm{y}} = \pm\mathcal{A}\,\frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}}\,\sqrt{1+2\,\mathrm{y}+\epsilon\,\mathrm{y}^2}, \tag{2.23}$$

con la constante no nula $\mathcal{A}$ dada por

$$\mathcal{A} = (1+\omega)\sqrt{\frac{\lambda(1-\epsilon)(n-1)}{2(n-2)}}.$$

La solución de (2.23) se obtiene en forma exacta (aunque implícita) por integración directa, y depende del signo y rango del parámetro ϵ. Concretamente, tenemos tres tipos de soluciones:

- *Tipo I:* $\epsilon < 0$ ($\Lambda < 0$) (el Universo recolapsa)

$$\pm\mathcal{A}\,t \pm c = \mathcal{F}(\mathrm{y}) - \frac{1}{(-\epsilon)^{1/2}} \arcsin\Big[\frac{1+\epsilon\,\mathrm{y}}{\sqrt{1-\epsilon}}\Big]. \tag{2.24}$$

- *Tipo II:* $0 < \epsilon < 1$ ($\Lambda > 0$) (el Universo se expande por siempre)

$$\mathcal{A}\,t + c = \mathcal{F}(\mathrm{y}) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \ln\Big[\frac{1+\epsilon\,\mathrm{y}}{\sqrt{\epsilon}} + \sqrt{1+2\,\mathrm{y}+\epsilon\,\mathrm{y}^2}\Big], \tag{2.25}$$

- *Tipo III:* $\epsilon = 0$ ($\Lambda = 0$) (el Universo se expande por siempre)

$$\mathcal{A}\,t + c = \sqrt{1+2\mathrm{y}} + \ln\Big[\frac{-1+\sqrt{1+2\mathrm{y}}}{1+\sqrt{1+2\mathrm{y}}}\Big], \tag{2.26}$$

en donde la función $\mathcal{F}(\mathrm{y})$ que aparece en (2.24) y (2.25) está dada por

$$\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \ln\Big[\frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}+\sqrt{1+2\,\mathrm{y}+\epsilon\,\mathrm{y}^2}}\Big]. \tag{2.27}$$

En la Ec. (2.24) el signo $\pm$ corresponde a las ramas expansiva y contractiva respectivamente. Ambas ramas pueden ser pegadas en $t = 0$ eligiendo convenientemente la constante de integración arbitraria c de modo de igualar con el miembro derecho de la ecuación en el máximo factor de escala. De acuerdo con la Ec. (2.23), el máximo factor de escala ($\dot{\mathrm{y}} = 0$) es

$$\mathrm{y}_{max} = \frac{1+\sqrt{1-\epsilon}}{-\epsilon},$$

así que

$$c = -\ln\Big[1 - \frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon}}\Big] + \frac{\pi/2}{(-\epsilon)^{1/2}}.$$

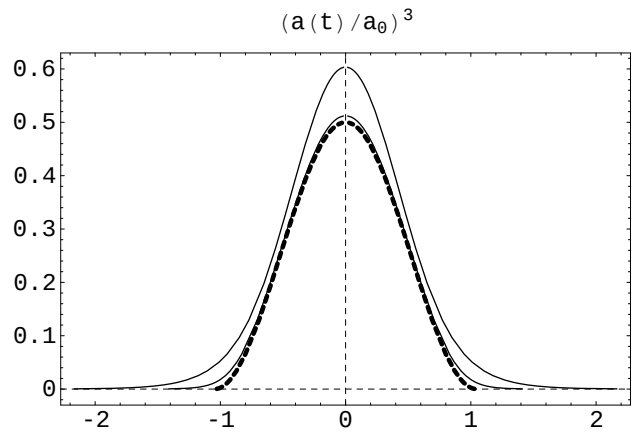

Figura 2.1: Comportamiento del factor de escala adimensional $(a(t)/a_0)^3$ según lo acusa la Ec. (2.24) para $\omega = 1/2$, $\Lambda = -1$ en $n = 3$ dimensiones. La curva superior tiene $\epsilon = -1$, la media $\epsilon = -0{,}1$ y la punteada corresponde a la RG.

La figura (2.1) muestra el caso recolapsante del *Tipo I*. El factor de escala como función del tiempo es graficado para un fluido de radiación en tres dimensiones, i.e. $\omega = 1/2$ y $n = 3$. Además se ha escogido $16\,\pi\,G\,\rho_o = 1$ y $\Lambda = -1$. Las curvas superior, media e inferior (punteada) corresponden a $\epsilon = -1$ ($\lambda = 4$), $\epsilon = -0{,}1$ ($\lambda = 40$), y RG ($\lambda \to \infty$) respectivamente. Se aprecia notoriamente que para el caso de la relatividad general el factor de escala existe sólo en el rango $-1 \leq t \leq 1$, mientras que en la teoría deformada existe para todo tiempo.

En cuatro dimensiones el caso físicamente más relevante es el *Tipo II*, en donde la constante cosmológica es positiva. En esta situación la Eq. (2.25) revela que el comportamiento tardío ($\mathtt{y} \to \infty$) del factor de escala va como

$$a(t) \propto \exp[\sqrt{\frac{2\Lambda(1-\epsilon)}{(n-1)(n-2)}}\ t],$$

mientras que la etapa inicial está descripta por (ver Ec. (2.21))

$$a(t) \propto \exp[\sqrt{\frac{\lambda(1-\epsilon)}{2(n-1)(n-2)}}\ t].$$

De esta forma el universo evoluciona desde una etapa inflacionaria dirigida por la energía de vacío $\lambda(1-\epsilon)$, hacia otra etapa exponencial tardía dominada por la energía $\Lambda(1-\epsilon)$ (un evolución similar de Sitter-de Sitter fue obtenida en un contexto cosmológico totalmente distinto en la Ref. [68]). Como el parámetro ϵ

debe ser extremadamente pequeño para que la teoría no difiera apreciablemente de GR para el grueso de la historia del universo (ver más abajo una cota inferior para λ), podemos concluir entonces que en cuatro dimensiones el factor de escala evoluciona con el tiempo de acuerdo a

$$a(t \to -\infty) \propto e^{\sqrt{\frac{\lambda}{12}}\,t} \quad \rightsquigarrow \quad a(t \to \infty) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t}. \tag{2.28}$$

Por ultimo, como se desprende de la Ec. (2.19), debemos mencionar que el caso límite encarnado en la condición $\epsilon = 1$, corresponde a un universo estático con factor de escala constante.

El enfoque tipo Born-Infeld cristalizado en la teoría (2.7) genera soluciones regulares. En el caso cosmológico esto es así no sólo porque el factor de escala es siempre distinto de cero, sino porque los invariantes geométricos (tanto en el espacio de Riemann como en el de Weitzenböck), están acotados para cualquier valor finito del tiempo propio. De hecho, todo invariante en el espacio de Weitzenböck que se construya cuadráticamente con el tensor de torsión, resulta ser proporcional a H^2 en el frame (2.10) (ver Ec. (2.12)). Por otro lado, los invariantes en el espacio de Riemann construidos con la métrica $g_{\mu\nu} = diag(1, -a(t)^2, -a(t)^2, ...)$ (y sus derivadas hasta orden 2), pueden siempre escribirse en la forma polinómica $\mathcal{P}(H, \dot{H})$. Por ejemplo, en cuatro dimensiones, el escalar de curvatura R, el escalar cuadrático de Ricci $R^2_{\mu\nu} = R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, y el invariante de Kretschmann $K = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}R_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}$ estan dados por

$$\begin{aligned} R &= 6(2H^2 + \dot{H}), \\ R^2_{\mu\nu} &= 12(3H^4 + 3H^2\dot{H} + \dot{H}^2), \\ K &= 12(2H^4 + 2H^2\dot{H} + \dot{H}^2). \end{aligned}$$

Todos estos invariantes son bien comportados debido al valor de saturación alcanzado por el parámetro de Hubble cuando $a(t) \to 0$ (ver Ec. (2.21)). En alusión a esto último, la derivada temporal de la Ec. (2.23) combinada con la definición de la variable $\mathtt{y}$ dada en la Ec. (3.2.1), muestra que

$$\dot{H} = -\xi \frac{\mathtt{y}^2}{(1+\mathtt{y})^3}, \tag{2.29}$$

en donde $\xi = \lambda(1+\omega)(1-\epsilon)^2/2(n-2)$ es una constante no nula. Fijando $n = 4$, $\omega = 1/3$ y $\epsilon = 0$ (i.e. una cosmología en cuatro dimensiones con contenido de radiación y sin constante cosmológica), se encuentra la siguiente expresión para los invariantes

$$
\begin{aligned}
R &= \lambda\Big[\frac{1+3\mathtt{y}}{(1+\mathtt{y})^3}\Big], \\
R^2_{\mu\nu} &= \frac{\lambda^2}{12}\Big[\frac{3+18\mathtt{y}+27\mathtt{y}^2+4\mathtt{y}^4}{(1+\mathtt{y})^6}\Big], \\
K &= \frac{\lambda^2}{6}\Big[\frac{1+6\mathtt{y}+9\mathtt{y}^2+4\mathtt{y}^4}{(1+\mathtt{y})^6}\Big].
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Estas relaciones son particularmente interesantes puesto que muestran que el parámetro de BI oficia como cota para los invariantes geométricos. De hecho, recordando la definición dada en la Ec. (3.2.1), se tiene que $\mathtt{y} \to 0$ cuando el factor de escala tiende a cero. Debido al valor máximo del parámetro de Hubble en la etapa inflacionaria, dado por $H^2_{max} = \lambda/12$, los invariantes saturan en sus valores máximos $R_{max} = \lambda$, $R^2_{\mu\nu\, max} = \lambda^2/4$, y $K_{max} = \lambda^2/6$.

Dediquemos ahora algunas líneas a la etapa inflacionaria natural que emerge como consecuencia del proceso de regularización. Para eso enfoquémosnos en $n = 4$ y $\epsilon = 0$, esto es, en ausencia de constante cosmológica. Combinando las Ecs. (2.13) y (2.14) podemos obtener una expresión para el parámetro de desaceleración como función de la densidad de energía. Dicha expresión es

$$
1 + q = \frac{3}{2}\frac{(1+\omega)}{\left(1+\frac{16\pi G}{\lambda}\rho\right)\left(1+\frac{8\pi G}{\lambda}\rho\right)}. \tag{2.31}
$$

Al considerar el régimen de baja energía descripto por la Relatividad General ($\lambda \to \infty$), notamos que una expansión acelerada del factor de escala sólo es posible cuando $\omega < -1/3$, lo cuál implicaría una presión negativa. Por otro lado, la expresión (2.31) enseña que una etapa inflacionaria no requiere $\omega < -1/3$ sino que es posible siempre y cuando la densidad de energía sea mayor que la densidad crítica de inflación ρ_{ci}

$$
\rho > \rho_{ci} = \frac{\lambda}{32\pi G}(-3+\sqrt{13+12\,\omega}). \tag{2.32}
$$

De hecho, para $\rho \to \infty$ en la Ec. (2.31), se tiene $q \to -1$ y la expansión deviene acelerada. En cambio, la cosmología de BI pregona que la etapa inflacionaria, al expandirse el universo, tiene su culminación cuando $\rho = \rho_{ci}$.

La figura (2.2) muestra el comportamiento del factor de escala adimensional $a(t)/a_0$ como función del tiempo cosmológico $H_0 t$ para varios valores de la constante $\alpha = H_{max}/H_0$. El gráfico se refiere a un universo sin constante cosmológica ($\epsilon = 0$), con un contenido de radiación ($\omega = 1/3$), y en 4 dimensiones. Se incluye

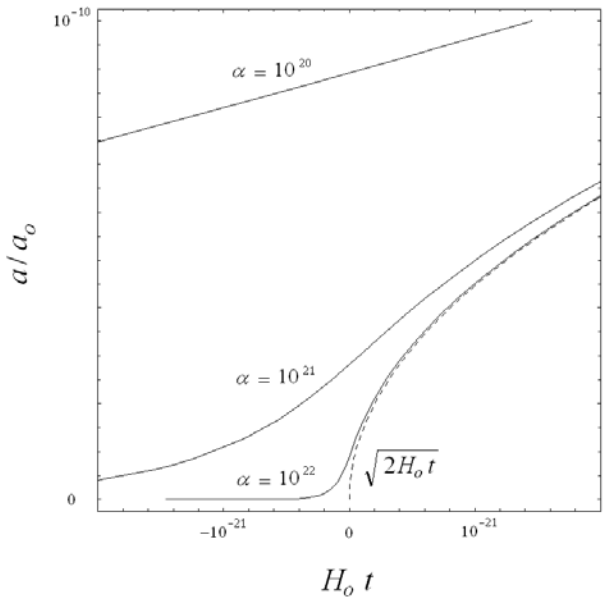

Figura 2.2: Factor de escala como función del tiempo cosmológico para $\omega = 1/3$ y diferentes valores de $\alpha = H_{max}/H_0$. La curva punteada representa el comportamiento de la RG.

en trazo punteado, y a modo de referencia, la curva correspondiente a la RG, cuyo comportamiento sigue la ley $a/a_0 = \sqrt{2H_0 t}$. La cosmología de BI reemplaza la singularidad del Big Bang por una etapa inflacionaria regida por una constante de Hubble igual a H_{max}.

Para concluir esta sección, procedamos a obtener una cota para el parámetro de Born-Infeld λ. Para eso debemos tener en cuenta que la cosmología estándar ofrece una explicación satisfactoria en lo que concierne a la abundancia de los elementos livianos, como el Hidrógeno y el Helio. Esto implica que cualquier teoría que pretenda modificar la dinámica cosmológica en el régimen de altas energías, no debe apartarse significativamente de la evolución predicha por RG, al menos desde la epoca de la nucleosíntesis. En particular, se sigue de esto que la constante de Hubble H_z para corrimientos al rojo del orden de $z_{nuc} \sim 10^9 - 10^{10}$ no debe diferir sensiblemente del valor provisto por la teoría de Einstein. La fig. (2.3) muestra el factor de Hubble adimensionalizado H/H_0 como función del corrimiento al rojo cosmológico $1 + z = a_0/a_t$ en las mismas condiciones que las de la figura (2.2).

Se observa que al crecer el corrimiento al rojo $1 + z$, las curvas de la teoría modificada tienden al valor constante $log(H_{max}/H_0)$, apartándose del comporta-

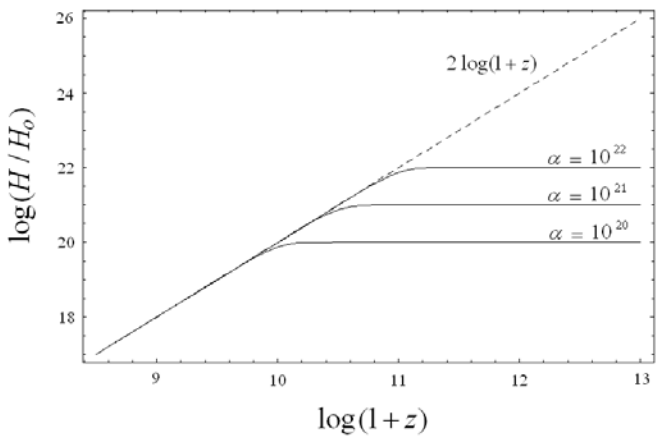

Figura 2.3: El parámetro de Hubble como función del corrimiento al rojo para $\omega = 1/3$ y diferentes valores de $\alpha = H_{max}/H_0$. La curva punteada representa el comportamiento de la RG.

miento seguido por la RG (en línea punteada), dado por

$$log(H/H_0) = \frac{3}{2}(1+\omega)log(1+z).$$

Si se define el corrimiento al rojo de transición entre los dos regímenes $1+z_t$ como la intersección entre la recta característica de RG y la correspondiente al valor asintótico dado por la teoría deformada, se sigue que

$$(1+z_t)^{3(1+\omega)/2} = H_{max}/H_0.$$

La condición $z_t >> z_{nuc}$ impone una cota inferior para H_{max}, i.e., para el parámetro de Born Infeld λ. Para un Universo dominado por la radiación, se tiene la cota

$$H_{max} >> 10^{18} H_0 \approx 2{,}5\, s^{-1} \approx 2{,}5 \times 10^{-15} eV \approx 10^{10}\, cm\,,$$

en donde se han utilizado unidades tales que $c = \hbar = 1$ (aquí, $H_0 \approx 10^{-33}$ eV). Dado que la interacción gravitatoria se ha testeado al orden de la décima parte del milímetro, podemos ver que la cota para λ proveniente de nucleosíntesis es extremadamente pobre. Por otro lado, argumento basados en posibles efectos cuánticos de la gravedad en escalas cercanas a la era de Planck, nos permiten obtener una cota inferior para λ mucho más eficiente, aunque puramente teórica. En efecto, los modelos inflacionarios coinciden en que el valor de la constante de Hubble durante el proceso inflacionario debe estar acotado por $H_{inf}^{-1} << 10^{-5}\, E_{pl}$,

en donde $E_{pl} \approx 10^{21}$ GeV, es la energía de Planck. Debido a que $H_{inf} = H_{max}$, obtenemos

$$H_{max} >> 10^{-16}\, GeV \approx 10^{-30}\, cm\,.$$

El valor de H_{max} así obtenido, aunque proveniente de un argumento teórico, sería una medida de la escala característica para la cual la gravedad de BI sufre un apartamiento significativo de la teoría de Einstein. Asimismo, puede considerarse que H_{max} es un indicador de la energía a la cual la invariancia local de Lorentz es quebrantada.

2.3.2. Universos espacialmente curvos

La caracterización de los modelos cosmológicos compatibles con la homogeneidad e isotropía del universo no sería exhaustiva si se omitieran los modelos espacialmente curvos compatibles con dicha simetría. En esta sección trataremos los aspectos fundamentales de estos modelos a la luz de la deformación de tipo BI en cuestión.

El prestar atención a estos modelos cumple con un propósito doble. En primer lugar, como hemos recién mencionado, la métrica más general compatible con la isotropía y homogeneidad atribuida al Universo es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta)d\phi^2\Big], \tag{2.33}$$

en donde se han empleado coordenadas usuales (t, r, θ, ϕ). Como es sabido, la constante K rige el comportamiento geométrico de la parte espacial del intervalo. Las hipersuperficies $t = constante$ representan planos, esferas o hiperboloides según sea K igual 0, 1 ó -1 respectivamente. Cualquiera sea el caso, el factor de escala $a(t)$ actúa como un factor conforme dependiente del tiempo, y entonces modifica las distancias espaciales sin por ello alterar las simetrías del espacio.

En segundo lugar, el estudio de estos modelos permite enfrentar el problema de la obtención del *frame* de tétradas adecuado que sirve como *ansatz* para la resolución de las ecuaciones de campo de la teoría deformada. Como ya hemos tenido oportunidad de discutir al comienzo de este capítulo, cualquier deformación de la teoría de Einstein en un contexto de paralelismo absoluto perderá la invariancia local de Lorentz. Esto significa que si el campo dinámico $e^a(x^\mu)$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, un nuevo vielbein obtenido a partir de este último mediante una transformación de Lorentz

$$e^a(x^\mu) \to e^b(x^\mu)' = \Lambda^b_a(x^\mu)e^a(x^\mu), \tag{2.34}$$

no será solución de las ecuaciones, salvo cuando $\Lambda^b_a(x^\mu) = \Lambda^b_a$, i.e., cuando la transformación de Lorentz es *global*. Por supuesto, como la métrica se obtiene de

la tétrada en la forma

$$g = \eta_{ab}\, e^a\, e^b,$$

su expresión queda invariante ante transformaciones del tipo (2.34). Los frames no triviales seleccionados por la teoría son evasivos a una interpretación física *a priori*. En principio no existe una prescripción general que permita, dada una determinada geometría para la métrica, obtener la tétrada correcta para esa misma geometría. En lo que sigue, desplegaremos los argumentos geométricos que nos permiten obtener el frame correcto para el espacio-tiempo de **FRW** con $K = 1$. El caso hiperbólico caracterizado por $K = -1$ es materia de investigación en curso.

La busqueda del campo de tétradas que describa la geometría de **FRW** con $K \neq 0$ no es trivial. Recordemos que en el caso $K = 0$, el vielbein correcto resultó ser simplemente la "raíz cuadrada"de la métrica diagonal, esto es

$$e^a_\mu = diag(1, a(t), ..., a(t)), \;\; \Leftrightarrow \;\; g_{\mu\nu} = diag(1, -a^2(t), ..., -a^2(t)).$$

La aptitud del vielbein diagonal en espacios de **FRW** con sección espacial plana no es difícil de rastrear. La parte espacial de la métrica describe un espacio euclideano tridimensional con un factor conforme dependiente del tiempo. Por otro lado, las curvas autoparalelas de esta $n-1$-variedad están constituídas por líneas rectas, visualizadas como las líneas coordenadas $\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_{n-1}}$ o bien como sus 1-formas duales $dx_1, ..., dx_{n-1}$. Es por eso que el frame adecuado para la descripción de ese espacio-tiempo no es sino

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^1 &= a(t)dx_1, \\ ... & \quad ..., \\ ... & \quad ..., \\ e^{n-1} &= a(t)dx_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Notemos que el carácter geométrico impreso en este vielbein sólo es invariante ante transformaciones *globales* del grupo de Lorentz: las líneas rectas (autoparalelas), seguirán siéndolo aun luego de boost o rotaciones globales.

Para el caso del universo con $K = -1, 1$, el campo de tétradas no es simplemente la raíz cuadrada de la métrica (2.33), o de ninguna otra métrica diagonal que se obtenga a partir de ésta mediante un cambio de coordenadas. Esto puede verificarse imponiendo ese ansatz en las ecuaciones de movimiento, y comprobando que ellas resultan inconsistentes. El síntoma de la inconsistencia se manifiesta en una dependencia radial del invariante de Weitzenböck, situación que entra en conflicto con la hipótesis de isotropía y homogeneidad del espacio-tiempo.

Por ejemplo, si consideramos como tétrada a la raiz cuadrada de la métrica diagonal (2.33), i.e.

$$e^a_\mu = diag\Big(1, \frac{a(t)}{\sqrt{1-Kr^2}}, a(t)\, r, a(t)\, r\, sin\theta\Big), \tag{2.36}$$

el invariante $\mathbb{T} = S_\rho{}^{\mu\nu}\, T^\rho{}_{\mu\nu}$ presenta la forma

$$\mathbb{T} = \frac{2(1-Kr^2)}{a^2 r^2} - 6H^2. \tag{2.37}$$

En un espacio-tiempo isótropo y homogéneo, todos los puntos son equivalentes, y los invariantes geométricos sólo pueden ser funciones del tiempo propio. La presencia explícita de la coordenada radial en $\mathbb{T}$ es una clara señal de la inaptitud del ansatz (2.36). Nótese que este problema en (2.37) persiste aún cuando $K = 0$. Como hemos tenido ya oportunidad de discutir, la tétrada correcta en ese caso es la dada en (2.35).

Universos cerrados

En el caso del universo cerrado, la parte espacial de la métrica de **FRW** es conforme a la 3-esfera. Por ello resulta adecuado adoptar nuevas coordenadas en donde la simetría se exhiba más claramente. Para ello efectuemos los cambios

$$\begin{aligned} X &= \sin\psi\, \sin\theta\, \cos\phi, \\ Y &= \sin\psi\, \sin\theta\, \sin\phi, \\ Z &= \sin\psi\, \cos\theta, \\ W &= \cos\psi, \end{aligned} \tag{2.38}$$

en donde, además de los ángulos esféricos usuales $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, se ha introducido el ángulo $0 \leq \psi \leq \pi$ en orden de hacer efectiva la parametrización de la 3-esfera. Podemos verificar que

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 1, \tag{2.39}$$

de donde se sigue que la parametrización (2.38) describe una 3-esfera de radio unidad inmersa en el espacio euclideano 4-dimensional con coordenadas (X, Y, Z, W). Con estas consideraciones es fácil ver que la métrica (2.33) con $N(t) = 1$ queda en la forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\psi^2 + sen^2\psi(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)]. \tag{2.40}$$

En esta ecuación la parte espacial de la métrica queda expresada en forma manifiestamente esférica.

El *frame* correcto para la cosmología cerrada se obtiene recordando que la 3-esfera es *paralelizable*. Una variedad diferencial n-dimensional $\mathcal{M}$ se dice *paralelizable*, si para todo punto $p \in \mathcal{M}$ existe un conjunto de n campos vectoriales $\mathcal{C}^\infty$, ortonormales y no nulos $\in T_p\mathcal{M}$. Dicho conjunto es denominado *frame*. Una definición análoga rige también para campos de 1-formas $\in T_p^*\mathcal{M}$, el espacio cotangente a $\mathcal{M}$ en el punto p. Intuitivamente, una variedad será paralelizable si existe un *frame* global en ella. Tomando las coordenadas definidas en (2.38), se puede construir un frame de 1-formas para cada punto (X, Y, Z, W) de $\mathcal{S}^3$, según

$$\begin{aligned} E^1 &= -Y\ dX + X\ dY + W\ dZ - Z\ dW, \\ E^2 &= -Z\ dX - W\ dY + X\ dZ + Y\ dW, \\ E^3 &= -W\ dX + Z\ dY - Y\ dZ + X\ dW, \\ E^4 &= X\ dX + Y\ dY + Z\ dZ + W\ dW. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Es fácil comprobar que $\langle \tilde{E}_i, \tilde{E}_j \rangle = \delta_{ij}$, en donde $\tilde{E}_i$ son los vectores duales a las 1-formas E^i, esto es $\tilde{E}_i E^j = \delta_{ij}$. Por otro lado, también es fácil ver que cada $\tilde{E}_i$, con $i : 1, 2, 3$, es ortogonal al radio vector que va del origen a cualquier punto de $\mathcal{S}^3$, es decir, los tres $\tilde{E}_i$ son tangentes a la 3-esfera. Todo esto implica que el conjunto de los E^i es, en efecto, un frame global de 1-formas que paraleliza la 3-esfera.

El frame (2.41) posee un significado geométrico muy preciso; consideremos la tétrada canónica heredada del espacio euclidiano 4-dimensional que alberga a la 3-esfera, esto es, $\{dX^a\}$, en donde X^a se refiere a las coordenadas cartesianas (X, Y, Z, W). Ahora, afectemos con una rotación local a este frame canónico, de tal forma que uno de los covecotores resultantes devenga normal a la 3-esfera. Esta operación naturalemente hará que los tres restantes covectores sean tangentes a la 3-esfera. La matriz de rotación $R^a_{\ b}$ que vincula el frame $\left\{dX^b\right\}$ con el campo de 1-formas E^a sobre S^3, i.e.,

$$E^a = R^a_{\ b}\ dX^b, \tag{2.42}$$

debe ser encontrada teniendo en cuenta que $R^a_{\ b}$ es tal que $\det R = 1$, y $R^T = R^{-1}$ sobre S^3. Con esta información no es difícil ver que la matriz R ha de ser

$$R = \begin{pmatrix} -Y & X & W & -Z \\ -Z & -W & X & Y \\ -W & Z & -Y & X \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

que lleva a los campos (2.41). Estos campos se obtienen, entonces, de manera única a menos de rotaciones globales. Como puede apreciarse en la matriz (2.43), el covector E^4 es normal a la esfera S^3, así que enfocaremos la atención de ahora en más, en la parte tangente del coframe $\{E^1,\ E^2,\ E^3\}$.

Podemos ahora desarrollar la tríada $\{E^1,\ E^2,\ E^3\}$ en la base coordenada $\{d\psi,\ d\theta,\ d\phi\}$, y obtener

$$
\begin{aligned}
E^1 &= -\,c(\theta)\,d\psi - s(\psi)s(\theta)c(\psi)\,d\theta - s^2(\psi)s^2(\theta)\,d\phi, \\
E^2 &= -s(\theta)c(\phi)\,d\psi - s(\psi)[s(\psi)s(\phi) + c(\psi)c(\theta)c(\phi)]\,d\theta - \\
&\quad -s(\psi)s(\theta)[-c(\psi)s(\phi) + s(\psi)c(\theta)c(\phi)]\,d\phi, \\
E^3 &= -s(\theta)s(\phi)\,d\psi + s(\psi)[s(\psi)c(\phi) - c(\psi)c(\theta)s(\phi)]\ d\theta - \\
&\quad -s(\psi)s(\theta)[c(\psi)c(\phi) + s(\psi)c(\theta)s(\phi)]\,d\phi,
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

en donde $s \equiv sen$, y $c \equiv cos$. Propongamos ahora como tétrada para la métrica cerrada de **FRW**, Eq. (2.40), a los siguientes campos

$$
\begin{aligned}
e^0 &= dt, \\
e^1 &= a(t)\ E^1, \\
e^2 &= a(t)\ E^2, \\
e^3 &= a(t)\ E^3.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

A modo de presentación, quizás sea mejor visualizar matricialmente a los campos e^a_μ como la componente μ de las 1-formas e^a ubicados en la matriz $[e]^a_\mu$ definida como

$$
[e]^a_\mu = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathrm{E} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \tag{2.46}
$$

siendo la submatriz $E = [E]^i_j$

$$
\frac{[E]^i_j}{a(t)} = \left(\begin{array}{ccc} c(\theta) & -s(\psi)c(\psi)s(\theta) & -s^2(\psi)s^2(\theta) \\ s(\theta)c(\phi) & s(\psi)\,[s(\psi)s(\phi) + c(\psi)c(\theta)c(\phi)] & s(\psi)s(\theta)\,[s(\psi)c(\theta)c(\phi) - c(\psi)s(\phi)] \\ s(\theta)s(\phi) & s(\psi)\,[c(\psi)c(\theta)s(\phi) - s(\psi)c(\phi)] & s(\psi)s(\theta)\,[c(\psi)c(\phi) + s(\psi)c(\theta)s(\phi)] \end{array}\right).
$$

En efecto, es un ejercicio tedioso aunque rutinario verificar que la tétrada (2.45)-(2.46) lleva a la métrica correcta dada en la Ec. (2.40). En la figura (2.4), con un propósito heurístico, se grafican los campos vectoriales $\widetilde{E}^1, \widetilde{E}^2, \widetilde{E}^3$ duales a las 1-formas (2.44), para un valor del ángulo ψ igual a $\pi/2$. Esto implica, en virtud de (2.38), que $W = 0$, lo cual constituye el hyper-ecuador de la 3-esfera.

La tétrada apta para la geometría en cuestión, dada por los campos e^a de la Ec. (2.45), puede ser interpretada como una rotación local de la tétrada "ingenua"

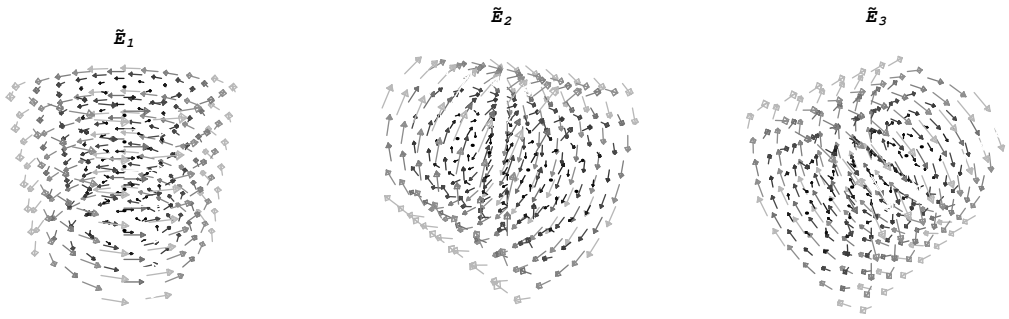

Figura 2.4: Los campos duales a las 1-formas (2.44), sobre el hyper-ecuador de la 3-esfera.

$e^{a'}$ obtenida de la raiz cuadrada de la métrica diagonal (2.40), esto es

$$\begin{aligned} e^{0'} &= dt, \\ e^{1'} &= a(t)\, d\psi \\ e^{2'} &= a(t)\,\mathrm{sen}(\psi)\, d\theta, \\ e^{3'} &= a(t)\,\mathrm{sen}(\psi)\, sen(\theta)\, d\phi. \end{aligned}$$

Efectivamente, se verifica en forma directa que

$$e^a = \mathcal{R}^a_{a'}\, e^{a'},$$

en donde la matriz de rotación $\mathcal{R}$ corresponde a la acción de los tres generadores de las rotaciones asociados a los ángulos de Euler ψ, θ, ϕ, i.e.,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

El efecto de la paralelización escogida por el frame e^a, es rotar localmente la tétrada diagonal (coordenada) via la acción de la matriz de Euler.

La tétrada (2.46) resulta ser la adecuada para describir la dinámica de los modelos de tipo **FRW** cerrados, no sólo para la modificación de tipo BI bajo consideración (Ec. (2.8)), sino para toda función $f(\mathbb{T})$. En efecto, debemos verificar que las ecuaciones de movimiento (2.6) poseen una estructura consistente para este ansatz. A tal efecto, calculemos primero el invariante de Weitzenböck para la tétrada (2.46). No es difícil ver que su expresión es

$$\mathbb{T} = 6(a^{-2} - H^2), \tag{2.47}$$

el cual es función solamente del tiempo cosmológico t, en contraste con el invariante proveniente de la tétrada ilegítima dado en la Ec. (2.37). La ecuación de Friedmann modificada se obtiene reemplazando la tétrada (2.46) en la componente $a = \nu = 0$ de las ecuaciones (2.6), obteniendose así

$$12H^2 f' + f = 16\pi G\rho. \tag{2.48}$$

Nótese que esta ecuación es de primer orden en las derivadas de la tétrada, independientemente de la forma funcional de f.

Las ecuaciones restantes provienen de insertar (2.46) en (2.6) para los índices $a = \nu = 1, 2, 3$. Luego de un cálculo tedioso pero completamente estándar, se puede ver que todas las ecuaciones del sector espacial son iguales, y se remiten a

$$(a^{-2} + \dot{H})(12H^2 f'' + f') - f'(2\dot{H} + 3H^2) - \frac{f}{4} = 4\pi G p. \tag{2.49}$$

Por supuesto, dado que (2.48) y (2.49) son dos ecuaciones diferenciales para una sóla variable, $a(t)$, debe verificarse que no son independientes[4]. La manera de ver que este es el caso, es derivando la Ec. (2.48) y combinarla con la derivada temporal de la densidad de energía, i.e. $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$, y así obtener (2.49). Dicho con otras palabras, la conservación de la energía en el fluído, descripta por la Ec. (2.15), es una consecuencia de la consistencia del sistema (2.48)-(2.49).

Luego de este bagaje, retornemos a la caracterización de las soluciones cosmológicas para la teoría **BI0** en 4 dimensiones y sin constante cosmológica ($0 = \epsilon = 4\Lambda/\lambda$). Las ecuaciones de movimiento se obtienen reemplazando el ansatz para la tétrada dado en la Ec. (2.46), en las ecuaciones de campo provenientes de la acción de BI, Ecs. (2.9). Como hemos recién mencionado, de las dieciséis ecuaciones originales, sólo sobreviven dos; esto es un vestigio de la alta simetría presente en el problema. La ecuación de valores iniciales proveniente de la variación respecto de la componente e^0_0 de la tétrada, toma ahora la forma

$$\frac{1 + \frac{1}{\lambda a^2}}{\mid 1 + \frac{1}{\lambda a^2} - \frac{12H^2}{\lambda} \mid^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\ \rho, \tag{2.50}$$

[4]En principio, las ecs. de campo constituyen 16 ecuaciones diferenciales para el factor de escala $a(t)$, la densidad $\rho(t)$, y la presión $p(t)$. Por supuesto, en virtud de las simetrías impuestas, y de introducir una ecuación de estado del estilo $p = \omega\rho$, este número se ve en gran medida reducido. No obstante, otro de los síntomas de una incorrecta elección del frame, suele presentarse como una sobredeterminación en el sistema de ecuaciones de campo. Esto se traduce finalmente en que un factor de escala $a(t)$ que soluciona algunas de las ecuaciones, no hace lo propio con las restantes.

mientras que la ecuación proveniente del sector espacial ha resultado ser

$$\frac{\frac{4H^2}{\lambda}(q+4)+\frac{4H^2}{\lambda^2 a^2}(q+2)-\frac{1}{3\lambda a^2}(5+\frac{2}{\lambda a^2})-1}{\mid 1+\frac{1}{\lambda a^2}-\frac{12H^2}{\lambda}\mid^{3/2}}+1=\frac{16\pi G}{\lambda}\,p, \tag{2.51}$$

y, efectivamente, puede ser obtenida derivando (2.50) respecto al tiempo y usando la conservación de la energía en el elemento de fluido.

Notemos que las Ecs. (2.50)-(2.51) tienden a las respectivas del caso $K=0$, Ecs. (2.13)-(2.14) con $\epsilon=0$ y $n=4$, cuando la cantidad $(\lambda a^2(t))^{-1} << 1$. Por otro lado, a primer orden en λ^{-1}, las Ecs. (2.50)-(2.51) se reducen a

$$\begin{aligned} H^2+\frac{1}{a^2}&=\frac{8}{3}\pi G\,\rho \\ H^2(2q-1)-\frac{1}{a^2}&=8\pi G\,p, \end{aligned} \tag{2.52}$$

que son las ecuaciones correspondientes al modelo de **FRW** con $K=1$.

La principal motivación al estudiar soluciones cosmológicas de la teoría de BI encarnada en el Lagrangiano (2.7), es caracterizar el comportamiento temprano del universo, el régimen de alta energía en donde los parámeros físicos relevantes, como la presión y la densidad de energía, se vuelven lo suficientemente intensos como para ameritar un apartamiento respecto de la descripción estándar provista por la RG. Por eso, más que una solución exacta de las ecuaciones para todo tiempo, estamos interesados ahora en el comportamiento para los estadíos primitivos del universo o, equivalentemente, para un factor de escala en el régimen $a^2(t)\approx\lambda^{-1}$.

Después de algunas manipulaciones sobre la Ec. (2.50) es posible obtener una ecuación de tipo conservativo para el factor de escala adimensionalizado. Si se considera un único fluido barotrópico del tipo $p=\omega\rho$, la Ec. (2.50) se convierte en

$$\dot{y}^2+V(y)=0 \quad y=\frac{a}{a_0}, \tag{2.53}$$

en donde el potencial efectivo $V(y)$ está dado por

$$V(y)=-\frac{\lambda}{12}y^2\Big[1+k_0\,y^{-2}-\Big(\frac{1+k_0\,y^{-2}}{1+\beta_0\,y^{-3(1+\omega)}}\Big)^2\Big], \tag{2.54}$$

siendo $k_0=1/\lambda a_0^2$ y $\beta_0=16\pi G\rho_0/\lambda$ dos constantes positivas. Para tener una visión más clara, escribamos la ecuación de Friedmann original (2.52) en función de la variable $y=a/a_0$, y de las constantes k_0 y β_0. Esto nos lleva a una ecuación del tipo (2.53) con un potencial dado por

$$V_{RG}(y)=-\frac{\lambda}{12}y^2\Big[2\beta_0\,y^{-3(1+\omega)}-k_0\,y^{-2}\Big]. \tag{2.55}$$

A pesar de las aparición de las constantes k_0 y β_0, el potencial relativista es independiente, como debe ser el caso, de la constante λ.

La figura (2.5) muestra el comportamiento del potencial efectivo (2.54) para un Universo cubierto con un fluido de radiación ($\omega = 1/3$), en donde se ha fijado $a_0^{-2} = 16\pi G\rho_0 = 1$, y para tres valores de la constante de BI, a saber, $\lambda = 1 \times 10^2$ (superior), $\lambda = 0.5 \times 10^3$ (media) y $\lambda = 1 \times 10^3$ (inferior). Por claridad, se ha incluido también la curva relativista en trazos punteados, según emerge de la Ec. (2.55). Naturalmente, ambas teorías predicen un recolapso del factor de escala en la región de baja energía, puesto que ambas son coincidentes en este límite. En la figura, el recolapso sucede en donde se encuentra la raíz de los gráficos, pues ahí el potencial se anula y la Ec. (2.53) acusa $\dot{y} = 0$. Esto es debido a que el "nivel de energía" en la ecuación es cero. Por otro lado, el apartamiento de la teoría de BI respecto de la RG se produce en el régimen de alta energía, i.e. $y \to 0$. Mientras que la Relatividad General posee un potencial divergente en ese límite, la deformación conduce a un valor constante y positivo del potencial, dependiente sólo de la constante de integración a_0. En efecto, tenemos que

$$V(y) \to -\frac{1}{12a_0^2} \quad si \quad y \to 0.$$

De momento, enfoquémosnos en el régimen de alta energía. Esto supone estudiar

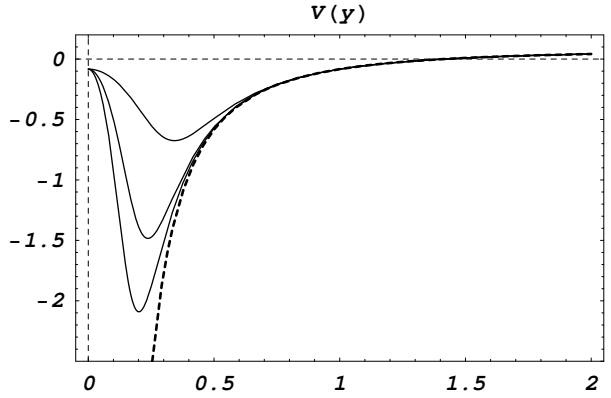

Figura 2.5: Potenciales que gobiernan la evolución del factor de escala para un Universo cerrado con $\omega = 1/3$, y tres valores de la constante λ de BI. Las curvas inferior, media y superior corresponden a $\lambda = 1 \times 10^3$, $\lambda = 0.5 \times 10^3$ y $\lambda = 1 \times 10^2$ respectivamente. La linea punteada describe el comportamiento relativista.

la ecuación de campo (2.53) en situaciones en donde $y << 1$, lo cual significa un factor de escala mucho más pequeño que el que caracteriza el régimen acual. Una expansión en la variable y indica que la Ec. (2.53) se comporta como

$$\dot{y}^2 = \frac{\lambda}{12}y^2 + a_0^{-2} + \mathcal{O}(y^4), \tag{2.56}$$

independientemente del índice barotrópico ω que caracteriza al fluido ideal. La resolución de esta ecuación es directa y lleva al factor de escala

$$a^2(t) \approx 12\lambda^{-1} Senh^2\Big(\sqrt{\frac{\lambda}{12}}\, t\Big) \quad si \quad a(t) \to 0\,. \tag{2.57}$$

Esta ecuación denota que el universo cerrado, más allá de la calidad del fluido que lo cubre homogénea e isotrópicamente, comienza en un Big Bang en donde la densidad de energía y la presión se tornan infinitas. Lo mismo sucede con el parámetro de Hubble, que sigue la ley

$$H^2(t) \approx \frac{\lambda}{12}\, Coth^2\Big(\sqrt{\frac{\lambda}{12}}\, t\Big) \quad si \quad a(t) \to 0$$

en la etapa de alta energía.

A pesar de no ofrecer una remoción de la singularidad inicial, el esquema de BI para el universo cerrado, provee una etapa inicial acelerada de carácter geométrico. En efecto, el comportamiento acelerado del factor de escala (Ec. 2.57), ha sido obtenido sólo con una fuente dada por un fluido ideal barotrópico, sin invocar al inflatón. Esto proviene del hecho que el potencial comienza siendo una función decreciente de la coordenada y, lo cual implica a su vez que el universo se expande aceleradamente en esa fase, ya que $\ddot{y} > 0$. Por otro lado, tomemos nota que el régimen de alta energía $y << 1$ no sólo alude a la etapa inicial de universo, sino también a la final; de hecho, luego de recolapsar, el factor de escala se contrae nuevamente hacia la singularidad (Big Crunch). Así, el régimen de alta energía debe ser visto como una etapa de expansión con $a(t) \approx Sinh[\sqrt{\lambda/12}\, t]$, seguida, luego de todo el régimen de baja energía, por una etapa de contracción, en donde el factor de escala decrece en forma simétrica. Este universo es entonces monocíclico y de duración finita.

Universos abiertos

El campo de tétradas apto para la descripción del espacio-tiempo hiperbólico de **FRW** puede obtenerse a partir de las tétradas autoparalelas (2.44) mediante la sustitución $\psi \to i\,\psi$. Esta operación transforma las 1-formas (2.44) en

$$\begin{aligned}
E^1 &= -\,c(\theta)\, d\psi - sh(\psi)s(\theta)ch(\psi)\, d\theta - i\, sh^2(\psi)s^2(\theta)\, d\phi, \\[2ex]
E^2 &= -s(\theta)c(\phi)\, d\psi - sh(\psi)[i\, sh(\psi)s(\phi) + ch(\psi)c(\theta)c(\phi)]\, d\theta - \\
&\quad -sh(\psi)s(\theta)[-ch(\psi)s(\phi) + i\, sh(\psi)c(\theta)c(\phi)]\, d\phi, \\[2ex]
E^3 &= -s(\theta)s(\phi)\, d\psi + sh(\psi)[i\, sh(\psi)c(\phi) - ch(\psi)c(\theta)s(\phi)]\; d\theta - \\
&\quad -sh(\psi)s(\theta)[ch(\psi)c(\phi) + i\, sh(\psi)c(\theta)s(\phi)]\, d\phi,
\end{aligned} \tag{2.58}$$

en donde hemos abreviado $sh \equiv senh$ y $ch \equiv cosh$. La aparición de la unidad imaginaria i en los campos (2.58) se debe esencialmente a que $cos(i\psi) = cosh(\psi)$ y $sen(i\psi) = i\, senh(\psi)$. En analogía con lo efectuado en la Ec. (2.45), construyamos el campo de tétradas según

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^1 &= a(t)\ E^1, \\ e^2 &= a(t)\ E^2, \\ e^3 &= a(t)\ E^3. \end{aligned} \tag{2.59}$$

No es difícil ver que la métrica $g = \eta_{ab}\, e^a\, e^b$ que proviene de los campos (2.59) es la correspondiente al intervalo de **FRW** con $K = -1$, i.e,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\psi^2 + senh^2\psi(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)]. \tag{2.60}$$

Las ecuaciones de movimiento (2.6) provenientes de la acción de tipo $f(\mathbb{T})$ encarnada en (2.5) se dividen nuevamente en dos grupos. La ecuación de Friedmann modificada (2.48)

$$12H^2 f' + f = 16\pi G\rho,$$

y las proveniente del sector espacial, dada por

$$(-a^{-2} + \dot{H})(12H^2 f'' + f') - f'(2\dot{H} + 3H^2) - \frac{f}{4} = 4\pi G p, \tag{2.61}$$

que difiere de su homónima en el Universo cerrado, Ec. (2.49), sólo en el signo del término correspondiente a a^{-2}. La semejanza funcional de estas ecuaciones y sus contrapartes cerradas (2.48)-(2.49) es sólo aparente. En efecto, el invariante de Weitzenböck que sirve de argumento a la función f ahora posee la expresión

$$\mathbb{T} = -6(a^{-2} + H^2), \tag{2.62}$$

en contraste con el dado en la ecuación (2.47). Es importante tener en cuenta que el carácter complejo de los campos (2.58) no se filtra en las cantidades físicas relevantes. Las ecuaciones de campo, tanto como el factor de escala que resulta de su resolución, son siempre cantidades reales. Por otro lado, lo mismo sucede con la métrica, que se construye cuadráticamente con la tétrada en la forma usual $g = \eta_{ab}\, e^a\, e^b$.

La dinámica del Universo abierto según la descripción del esquema **BI0** está caracterizada por la ecuación que surge de reemplazar la forma funcional de Born-Infeld (2.8) en la expresión (2.48), esto es

$$\frac{1 - \frac{1}{\lambda a^2}}{|\ 1 - \frac{1}{\lambda a^2} - \frac{12H^2}{\lambda}\ |^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\ \rho, \tag{2.63}$$

que difiere de la correspondiente al caso cerrado, Ec. (2.50), sólo en los términos que involucran a la cantidad a^{-2}, y que aparecen con el signo opuesto en (2.63). Esto es reminiscencia de la transición desde la geometría con $K = 1$ a la propia con $K = -1$. Las ecuaciones provenientes del sector espacial corren con la misma suerte, de forma tal que devienen en

$$\frac{\frac{4H^2}{\lambda}(q+4) - \frac{4H^2}{\lambda^2 a^2}(q+2) + \frac{1}{3\lambda a^2}(5 - \frac{2}{\lambda a^2}) - 1}{\mid 1 - \frac{1}{\lambda a^2} - \frac{12H^2}{\lambda} \mid^{3/2}} + 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\, p. \tag{2.64}$$

Un desarrollo a primer orden en la cantidad pequeña λ^{-1} lleva al sistema (2.63)-(2.64) a las ecuaciones de la Relatividad General para un Universo abierto, dadas por

$$\begin{aligned} H^2 - \frac{1}{a^2} &= \frac{8}{3}\pi G\, \rho \\ H^2(2q-1) + \frac{1}{a^2} &= 8\pi G\, p. \end{aligned} \tag{2.65}$$

La ecuación (2.63) que rige el comportamiento del factor de escala, puede leerse en términos de una ecuación de conservación del tipo (2.53) con el potencial dado por

$$V(y) = -\frac{\lambda}{12} y^2 \Big[1 - k_0\, y^{-2} - \Big(\frac{1 - k_0\, y^{-2}}{1 + \beta_0\, y^{-3(1+\omega)}} \Big)^2 \Big]. \tag{2.66}$$

La forma funcional de $V(y)$ se divisa en la figura (2.6), para la cual se han escogido los mismos valores de las constantes intervinientes ($a_0^{-2} = 16\pi G\rho_0 = 1$), y $\omega = 1/3$. Nuevamente, las distintas curvas representan distintas elecciones del parámetro de Born-Infeld de acuerdo a $\lambda = 1 \times 10^2$ (superior), $\lambda = 0.5 \times 10^3$ (media) y $\lambda = 1 \times 10^3$ (inferior), mientras que la curva de trazos punteados describe el régimen relativista dado por el potencial[5]

$$V_{RG}(y) = -\frac{\lambda}{12} y^2 \Big[2\beta_0\, y^{-3(1+\omega)} + k_0\, y^{-2} \Big]. \tag{2.67}$$

El régimen de baja energía contenido en el potencial (2.66) es coincidente con la descripción relativista, i.e., presenta un Universo que se expande eternamente en forma desacelerada. El comportamiento en el límite de alta energía revela una dinámica radicalmente distinta a la provista por la RG. Mientras que el potencial relativista es divergente cuando $y \to 0$, en la deformación se tiene que

$$V(y) \to \frac{1}{12 a_0^2} \quad si \quad y \to 0,$$

[5]Los potenciales (2.66) y (2.67) difieren de sus contrapartes cerrados dados en las Ecs. (2.54) y (2.55), sólo en el signo de la constante $k_0 = 1/(\lambda a_0^2)$.

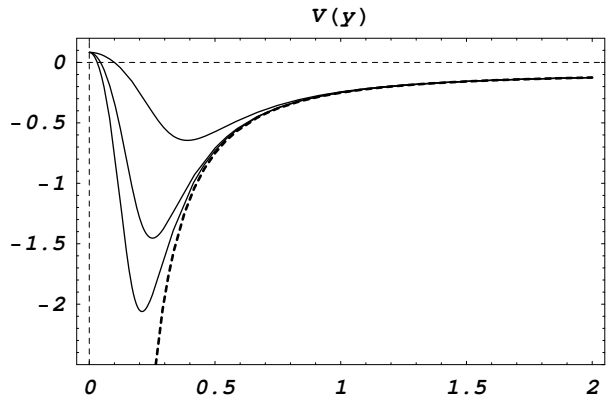

Figura 2.6: Potenciales que gobiernan la evolución del factor de escala para un Universo abierto con $\omega = 1/3$, y tres valores de la constante λ de BI. Las curvas inferior, media y superior corresponden a $\lambda = 1 \times 10^3$, $\lambda = 0.5 \times 10^3$ y $\lambda = 1 \times 10^2$ respectivamente. La linea punteada describe el comportamiento relativista.

lo cual implica que el potencial se anula en algún valor pequeño de la variable y, como resulta claro de la figura (2.6). Una inspección de la expresión (2.66) indica que el potencial tiene su raiz en

$$y_{min} = \sqrt{k_0} \quad i.e. \quad a_{min} = 1/\sqrt{\lambda},$$

con lo cual el parámetro de Hubble se torna nulo para este valor del factor de escala. Debido a la enorme magnitud de la constante λ, el valor del factor de escala mínimo a_{min} es inconmensurablemente pequeño. El comportamiento del factor de escala en las inmediaciones de la raiz del potencial $V(y)$, ubicada en $y_{min} = \sqrt{k_0}$, puede obtenerse expandiendo el potencial (2.66) en torno a este valor. De esta forma la ecuación diferencial (2.53) que rige la evolución temporal del factor de escala a primer orden en la cantidad pequeña $y - \sqrt{k_0}$, se convierte en

$$\dot{y}^2 - \frac{\lambda\sqrt{k_0}}{6}\, y + \frac{\lambda\, k_0}{6} = 0,$$

cuya solución es elemental y de la forma[6]

$$a^2(t) \approx \left(a_{min} + \frac{\sqrt{\lambda}}{24} t^2\right)^2. \tag{2.68}$$

La veracidad de la aproximación (2.68) está asegurada en tanto y en cuanto se consideren tiempos pequeños. En forma más precisa, dado que $y - \sqrt{k_0} << 1$

[6]La integración de esta ecuación involucra una constante arbitraria que puede escogerse nula. Esta elección es equivalente a pedir que $\dot{y}$ sea nulo cuando $t = 0$.

para que la expansión del potencial tenga sentido, se sigue que $\lambda\sqrt{k_0}\,t^2 << 1$, y entonces (2.68) es una buena aproximación si $t << a_0/\sqrt{\lambda}$. Para esta geometría, el factor de escala comienza su expansión acelerada desde un volumen mínimo $a_{min}^3 = \lambda^{-3/2}$ a tiempo nulo, con una densidad máxima

$$\rho_{max} \propto a_{min}^{-3(1+\omega)} = \lambda^{3(1+\omega)/2}.$$

2.4. La gravedad en tres dimensiones y el agujero negro BTZ

La gravedad de Einstein en tres dimensiones espacio-temporales exhibe algunas características inusuales que pueden ser deducidas de ciertas propiedades de las ecuaciones de Einstein y del tensor de curvatura. En cualquier número de dimensiones, las ecuaciones de la Relatividad General son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}, \tag{2.69}$$

o expresadas en términos del tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi G\,(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T^{\rho}_{\rho}). \tag{2.70}$$

En $D = 3$, la constante de Newton G que aparece en (2.69) y (2.70), posee dimensiones de $(masa)^{-1}$ (si tomamos $c = 1$). Por otro lado, un análisis de las simetrías del tensor de curvatura $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ muestra que en tres dimensiones dicho objeto tiene sólo 6 componentes independientes, el mismo número de componentes que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. De hecho, en este caso el tensor de curvatura de Riemann puede escribirse en términos del de Ricci según

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}). \tag{2.71}$$

Usando (2.70) en el miembro derecho de (2.71) se concluye que el tensor de curvatura de Riemann queda completamente determinado por la distribución local de materia y energía $T_{\mu\nu}$, y por la constante cosmológica Λ. En particular, las regiones libres de fuentes (i.e. $T_{\mu\nu} = 0$), son regiones de curvatura constante con tensor de curvatura dado por

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \Lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}), \tag{2.72}$$

y curvatura escalar $R = 6\Lambda$. Esto significa, entre otras cosas, que cualquier efecto en la curvatura producido por la materia no se propaga a través del espacio-tiempo; no hay grados de libertad dinámicos. En regiones libres de materia, el

espacio tiempo es localmente plano ($\Lambda = 0$), de Sitter ($\Lambda > 0$) o anti-de Sitter ($\Lambda < 0$), dependiendo del signo de la constante cosmológica.

Desde luego, la carencia de dinámica en la gravedad de Einstein tridimensional puede ser divisada desde el punto de vista del contaje de grados de libertad. La parte espacial de la métrica en tres dimensiones, y su conjugada, poseen cada una tres componentes independientes. De esas seis componentes, se necesita una para especificar la elección de las hipersuperficies espaciales, mientras dos más son necesarias en orden de especificar coordenadas en esas hipersuperficies bidimensionales. Finalmente, hay tres condiciones de valores iniciales, las cuales determinan completamente las componentes restantes.

A pesar que la curvatura *local* en regiones libres de fuentes permanece inalterada por la materia localizada en el espacio-tiempo, es importante entender que la materia puede producir efectos *globales* no triviales. Por ejemplo, cuando $\Lambda = 0$ la ecuación (2.71) dice que el tensor de curvatura es idénticamente nulo fuera de la región con fuentes, lo cual implica a su vez que pueden encontrarse coordenadas en las cuales $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ fuera de las fuentes. Pero la transformación de coordenadas involucrada, en general, no está bien definida en todo el espacio-tiempo, y la región exterior a la fuentes no puede ser idéntica al espacio-tiempo de Minkowski como un *todo*.

Los efectos geométricos globales no triviales en la teoría tridimensional de Einstein se manifiestan aun en las circunstancias más simples, incluyendo espacio-tiempos que albergan como fuentes de curvatura a una mera masa puntual. Tomando $\Lambda = 0$, un espacio tiempo como el descripto será plano salvo a lo largo de la línea de mundo de la partícula. Si el espacio-tiempo es estático, fácilmente pueden encontrarse coordenadas para las cuales cada una de las secciones espaciales con $t = cte$ son idénticas. Esas secciones espaciales serán planas en todos lados excepto en un punto, que es donde se aloja la partícula; la única superficie bidimensional que satisface esta descripción es el cono. Staruszkiewicz [69], tiempo atrás, fue el primero en exponer estos argumentos geométricos, mostrando así que el espacio-tiempo tridimensional producido por una carga puntual se obtiene removiendo una porción (*wedge*) del espacio de Minkowski e identificando puntos opuestos del *wedge*. Estos argumentos fueron profundizados por Deser, Jackiw y t´Hooft [70], quienes resolvieron explícitamente las ecuaciones de campo en tres dimensiones con $\Lambda = 0$ y un número arbitrario de fuentes puntuales, mostrando que la porción que se remueve en cada partícula, es proporcional a la masa de la misma.

A pesar que estos espacios cónicos tridimensionales son planos excepto a lo largo de la línea de mundo de la partícula, sus propiedades globales son bien distintas a las del espacio de Minkowski. Por ejemplo, existe un análogo del efecto Aharonov-Bohm, en el sentido en que un vector transportado paralelamente a lo largo de un lazo que rodee la fuente, revestirá una rotación no trivial, aun

siendo que el loop siempre estará completamente inmerso en regiones planas del espacio-tiempo [71, 72]. Asimismo, las curvas geodésicas se verán deflectadas en un espacio-tiempo cónico, ya que dos geodésicas que pasen a cada lado de la fuente podrían intersecarse hasta dos veces. Por otro lado, vale la pena remarcar que estas inusuales propiedades también emergen en ciertos contextos de la teoría de Einstein en $D = 4$, específicamente, en lo que concierne a las cuerdas cósmicas [77]-[85].

En la Ref. [70] también se ha tratado la solución de las ecuaciones de Einstein tridimensionales para una partícula puntual dotada de spin intrínseco. Estos resultados fueron extendidos al caso de muchas particulas masivas con spin [88]. Estas soluciones mostraron que el espacio-tiempo de una partícula masiva con spin también está descripto por el espacio de Minkowski con una porción removida, pero ahora, los puntos que se identifican en extremos opuestos del wedge difieren en sus valores temporales por una cantidad proporcional al momento angular de las fuentes. De esta forma, el efecto del spin es conferir al espacio-tiempo una suerte de estructura helicoidal.

Dadas estas consideraciones, no es de extrañar entonces que el descubrimiento de un agujero negro en el vacío tridimensional de la teoría de Einstein haya sido recibido en forma sorpresiva. El agujero negro estudiado por Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ), es una solución de vacío de la teoría de Einstein en 2+1 dimensiones en presencia de constante cosmológica negativa [89, 90][7]. La métrica BTZ presenta dos cargas asociadas al momento angular J y a la masa M, y está representada por el intervalo

$$\begin{aligned} ds^2 = & \Big(- M - \Lambda\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \Big)\, dt^2 \\ & - \Big(- M - \Lambda\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2} \Big)^{-1} dr^2 - r^2 \Big(- \frac{J}{2r^2}\, dt + d\phi \Big)^2 , \end{aligned} \tag{2.73}$$

Cuando se considera una constante cosmológica negativa $\Lambda = -\ell^{-2}$, $M > 0$ y $\mid J \mid \leq M\ell$, la métrica posee la estructura de un agujero negro rotante. El agujero negro BTZ posee los horizontes en

$$r^{\pm} = \ell \left[\frac{M}{2} \pm \frac{M}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2} \right]^{1/2} , \tag{2.74}$$

[7]En el trabajo original sobre el agujero negro BTZ, Ref. [89], se consideró también el acople con el campo de Maxwell. Sin embargo, Carlip mostró que la solución cargada era sólo válida en ausencia de momento angular [91]. No fue sino hasta ocho años después, que la solución correcta fue reportada por los autores originales en la Ref. [92].

y la ergosfera (el lugar en donde g_{tt} se anula), en

$$r^{erg} = \ell\, M^{1/2} > r^+ > r^-. \tag{2.75}$$

El caso extremal $\mid J \mid = M\ell$ corresponde a $r^+ = r^- = r_{erg}/\sqrt{2}$. Si bien describe un espacio de curvatura constante negativa, la métrica BTZ representa un agujero negro debido a la existencia del horizonte de eventos externo r^+.

Las propiedades termodinámicas del agujero negro en tres dimensiones son análogas a las halladas en su contraparte 4-dimensional [93]. En particular, la entropía es dos veces el perímetro del horizonte,

$$S = 4\pi r^+, \tag{2.76}$$

y la temperatura se obtiene de esta en la manera usual,

$$T = \Big(\frac{\partial S}{\partial M}\Big)^{-1} = \frac{(r^+)^2 - (r^-)^2}{2\pi r^+}. \tag{2.77}$$

Notemos que cuando el horizonte desaparece -esto sucede cuando $M \to 0$ (entonces también J tiende a cero)- la temperatura tiende a cero, en contraste con el caso 4-dimensional. Por otro lado, el agujero negro extremal $\mid J \mid = M\ell$ tiene temperatura nula y entropía no nula, como su análogo en cuatro dimensiones.

Ahora investigaremos cómo la solución BTZ resulta deformada al considerar el esquema de tipo BI delineado en este capítulo. Podemos comenzar exhibiendo el campo de tríadas que lleva al intervalo BTZ. Una inspección directa muestra que el campo de 1-formas

$$\begin{aligned} e^0 &= \Big(-M - \Lambda\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\Big)^{1/2} dt \\ e^1 &= \Big(-M - \Lambda\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\Big)^{-1/2} dr \\ e^2 &= -\frac{J}{2r}\, dt + r\, d\phi, \end{aligned} \tag{2.78}$$

cumple el trabajo. Esta tríada satisface las ecuaciones de Einstein tridimensionales en su versión teleparalela (Ecs. (1.44)), en presencia de un tensor energía-momento nulo. Por otro lado, la combinación $\eta_{ab}\, e^a\, e^b$ reproduce el intervalo (2.73).

Veamos cómo esta solución se ve afectada por la deformación de Born-Infeld (2.7). Para comprender los cambios que debe sufrir el campo (2.78) en vistas a satisfacer las ecuaciones deformadas (2.9), notemos que el invariante $\mathbb{T}$ resulta ser constante para el dreibein (2.78): su valor es -2Λ. A pesar que $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ no es cero,

una solución de vacío como (2.78) que resulta en un $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ =*constante*, no es muy distinta de una solución de vacío de la teoría deformada. De hecho, busquemos una modificación de la solución (2.78) reemplazando la constante cosmológica Λ por una nueva constante, digamos $\widetilde{\Lambda}$. De esta forma tenemos que $\mathbb{T} = -2\ \widetilde{\Lambda}$, así que la Ec. (2.9) resulta ser

$$
\begin{aligned}
0 = \partial_\sigma \left(e\ e_a^\lambda\ S_\lambda{}^{\nu\sigma}\right) - e\ e_a^\lambda\ \ S_\eta{}^{\mu\nu}\, T^\eta{}_{\mu\lambda} + \\
+\frac{1}{4}\ e\ e_a^\nu\ \left[\mathbb{T} - 2\ (2\ \Lambda + \widetilde{\Lambda}) + \lambda - \lambda \left(1 - 4\,\lambda^{-1}\,(\Lambda + \widetilde{\Lambda})\right)^{1/2}\right]. \quad (2.79)
\end{aligned}
$$

Como la solución que estamos considerando resuelve las ecuaciones teleparalelas en vacío (1.44) para $\Lambda = \widetilde{\Lambda}$, entonces resolverá las deformadas (2.79) si la nueva constante $\widetilde{\Lambda}$ es elegida con tal de verificar

$$
-2\ (2\ \Lambda + \widetilde{\Lambda}) + \lambda - \lambda \left(1 - 4\,\lambda^{-1}\,(\Lambda + \widetilde{\Lambda})\right)^{1/2} = -2\ \widetilde{\Lambda}, \quad (2.80)
$$

i.e.,

$$
\widetilde{\Lambda} = \Lambda\ (1 - \epsilon)\ , \qquad \epsilon = 4\Lambda/\lambda. \quad (2.81)
$$

Esta solución representa un agujero negro si la constante cosmológica efectiva $\widetilde{\Lambda}$ es negativa. En suma, la tríada BTZ para la teoría deformada descripta por el lagrangiano (2.7) resulta ser

$$
\begin{aligned}
e^0 &= \left(-M - \Lambda(1-\epsilon)\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\right)^{1/2} dt \\
e^1 &= \left(-M - \Lambda(1-\epsilon)\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\right)^{-1/2} dr \qquad (2.82) \\
e^2 &= -\frac{J}{2r}\, dt + r\, d\phi,
\end{aligned}
$$

y la consiguiente métrica

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \left(-M - \Lambda\ (1-\epsilon)\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\right)\, dt^2 - \left(-M - \Lambda\ (1-\epsilon)\, r^2 + \frac{J^2}{4r^2}\right)^{-1} dr^2 - \\
-r^2 \left(-\frac{J}{2r^2}\ dt + d\phi\right)^2. \quad (2.83)
\end{aligned}
$$

El dreibein (2.82) o la métrica (2.83) difieren en forma genuina de (2.78) y (2.73), puesto que sendos objetos no están conectados mediante un cambio de coordenadas. De hecho, tanto el invariante $\mathbb{T}$ como el análogo Riemanniano R son diferentes en ambos contextos.

Para valores negativos de la constante cosmológica efectiva $\widetilde{\Lambda} = -\widetilde{\ell}^{-2}$ la solución es un agujero negro rotante. Así, aún para valores positivos de Λ, el lagrangiano **BI0** (2.7) permite la existencia de agujeros negros tipo BTZ; específicamente, la métrica (2.83) es un agujero negro rotante para $\Lambda < 0$ y $\epsilon < 1$, pero también lo es para $\Lambda > 0$ and $\epsilon > 1$. Los horizontes están ubicados en

$$r_{BI}^{\pm} = \frac{r_{BI}^{erg}}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \Lambda\,(1-\epsilon)\left(\frac{J}{M}\right)^2}\right]^{1/2},$$
$$r_{BI}^{erg} = \sqrt{\frac{M}{-\Lambda\,(1-\epsilon)}}. \tag{2.84}$$

Resulta apropiado comparar la posición de los horizontes para las soluciones (2.73) y (2.82) correspondientes a valores fijos de Λ, M y J. Como los horizontes son círculos, conviene estudiar el cociente $r_{BI}^{\pm}/r^{\pm}$. Para $\widetilde{\Lambda} < 0$, tres rangos del parámetro ϵ son los relevantes en la comparación:

- *Tipo I:* $\epsilon < 0$ $(\Lambda < 0, \lambda > 0)$. Aquí resulta $r_{BI}^{erg}/r^{erg} < 1$, $r_{BI}^{+}/r^{+} < 1$ y $r_{BI}^{-}/r^{-} > 1$; como consecuencia de la deformación los horizontes se acercan mútuamente. Esto implica que, tanto la entropía como la temperatura del agujero negro descienden respecto de la de su análogo relativista.

- *Tipo II:* $\epsilon > 1$ $(\Lambda > 0)$. La comparación no es pertinente puesto que no existe análogo en la RG. Este caso es patrimonio exclusivo de la deformación.

- *Tipo III:* $0 < \epsilon < 1$ $(\Lambda < 0, \lambda < 0)$. Resulta $r_{BI}^{erg}/r^{erg} > 1$, $r_{BI}^{+}/r^{+} > 1$ y $r_{BI}^{-}/r^{-} < 1$; en este caso los horizontes se separarían mútuamente, razón por la cual la entropía y la temperatura aumentarían como consecuancia de la deformación. Sin embargo el caso $\lambda < 0$ ha sido descartado en la sección precedente puesto que lleva a soluciones inaceptables desde el punto de vista físico (ver comentarios en el párrafo siguiente a la Ec. (2.21)).

En la figura (2.7) se esquematizan las regiones $I - III$ en el espacio de parámetros $\Lambda - \lambda$. Los ejes $\Lambda = 0$ y $\lambda = 0$ están excluidos, como así también la recta $\epsilon = 1$.

Este ejemplo muestra la estrategia a seguir para conseguir soluciones deformadas a partir de un Lagrangiano con un término cosmológico como el de la Ec. (1.41), i.e. $\mathcal{L} \propto e\,(L - 2\Lambda)$. Si una dada solución de vacío lleva a que L sea una constante (dependiente de Λ), entonces debe reeplazarse Λ en la solución por

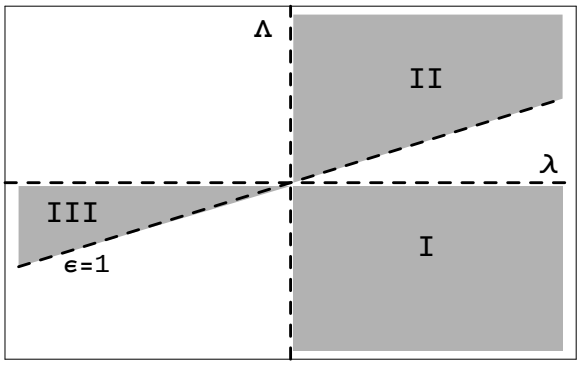

Figura 2.7: Los polígonos sombreados representan las regiones en el espacio de parámetros $\Lambda - \lambda$ en donde existen agujeros negros. Las fronteras, en líneas punteadas, están excluidas.

una nueva constante $\widetilde{\Lambda}$ e introducir la así obtenida solución en las ecuaciones de campo modificadas. Usando que L es una constante, la Ec. (2.1) se convierte en

$$... - \partial_\mu \partial_\nu \left(e \; \frac{\partial L}{\partial \phi^a_{,\mu\nu}} \right) + \partial_\mu \left(e \; \frac{\partial L}{\partial \phi^a_{,\mu}} \right) - \; e \; \frac{\partial L}{\partial \phi^a} + \left(L - \frac{f(L - 2\Lambda)}{f\,'(L - 2\Lambda)} \right) \; \frac{\partial e}{\partial \phi^a} = 0.$$

La solución propuesta resuelve las ecuaciones de Euler-Lagrange sin deformar para la constante cosmológica $\widetilde{\Lambda}$. De esta manera $\widetilde{\Lambda}$ debería ser elegida en forma tal que

$$L(\widetilde{\Lambda}) - \frac{f(L(\widetilde{\Lambda}) - 2\Lambda)}{f'(L(\widetilde{\Lambda}) - 2\Lambda)} = 2 \; \widetilde{\Lambda}, \tag{2.85}$$

en donde $L(\widetilde{\Lambda})$ es el Lagrangiano evaluado en la solución propuesta. Esto significa que la deformación redefine el rol de la constante cosmológica en la solución, reemplazándolo por un nuevo parámetro dependiente también de la escala λ. La gravedad de Born-Infeld considerada aquí (Lagrangiano (2.7)) hace uso de la función f dada en la Ec. (2.8). De este modo, escribiendo la Ec. (2.85) para esta función, uno obtiene la Ec. (2.80) y la solución (2.81).

Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica implican $L = -R = 2\Lambda\, n/(n-2)$ para cualquier solución de vacío en el espacio n dimensional. Soluciones en vacío de teorías del tipo $f(-R - 2\Lambda)$ pueden ser obtenidas en forma directa partiendo de las de RG simplemente considerando un corrimiento en Λ de acuerdo con

$$\frac{2\; n}{n-2} \; \widetilde{\Lambda} \; - \; \frac{f(2\widetilde{\Lambda}[n/(n-2)] - 2\Lambda)}{f'(2\widetilde{\Lambda}[n/(n-2)] - 2\Lambda)} \; = \; 2 \; \widetilde{\Lambda}. \tag{2.86}$$

En contraste con las ecuaciones teleparalelas (1.44), las soluciones de vacío de la RG comparten el mismo valor de $L(\Lambda)$. De esta forma, la constante cosmológica efectiva (2.86) para las teorías modificadas del tipo $f(-R-2\Lambda)$ es la misma para todas las soluciones de vacío.

A modo de comparación con la modificación de tipo BI en el contexto teleparalelo, calculemos la solución de una teoría análoga en el contexto Riemanniano. Si consideramos (2.86) en $n = 3$ dimensiones, el resultado es

$$\widetilde{\Lambda} = \frac{\Lambda}{2}\left[1 \; - \frac{1}{4\,\epsilon}\;\left(1 - \sqrt{1+8\,\epsilon}\right)\right]. \tag{2.87}$$

Así, la deformación de tipo BI está bien definida si $\epsilon > -1/8$, y el corchete en la Ec. (2.87) resulta definido positivo. Esto implica que la constante cosmológica efectiva hereda el signo de Λ. De esta manera, en una deformación de tipo BI en un contexto riemanniano, el agujero negro BTZ existe sólo para valores de $\Lambda < 0$, en contraste con el resultado precedente.

Capítulo 3

Gravedad determinantal de Born-Infeld

En este capítulo procederemos a examinar al segundo esquema de tipo BI para el campo gravitatorio. Esta teoría podría entenderse como una extensión de la tratada en el capítulo precedente, si bien es independiente de la tratada con anterioridad.

3.1. El esquema determinantal

Matemáticamente, por su propia naturaleza, el Lagrangiano L debe ser una densidad escalar de peso uno. En una variedad n-dimensional orientable, L está representado por una n-forma diferencial que asume locálmente la forma

$$\widetilde{L} = L(\phi, \partial^j \phi)\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^n,$$

en donde se asumió que la densidad L depende de ciertos campos ϕ, y de sus derivadas hasta orden j. La construcción de esta densidad se logra con un procedimiento canónico; simplemente deben tomarse combinaciones lineales de raices cuadradas de determinantes (en módulo) de tensores de segundo orden, esto es, podemos decir que

$$L(\phi, \partial\phi) = \alpha_k \sum_k \sqrt{det|L^{(k)}_{\mu\nu}|}. \tag{3.1}$$

Como próximo paso en la construcción, podríamos descomponer cada uno de los tensores $L^{(k)}_{\mu\nu}$, en uno conteniendo sólo los campos ϕ y en otros conteniendo productos de orden superior en derivadas $\partial\phi$, a saber

$$L_{\mu\nu} = \lambda_1 g_{\mu\nu}(\phi) + \lambda_2 F^{(2)}_{\mu\nu}(\phi, \partial\phi) + ... + \lambda_j F^{(j)}_{\mu\nu}(\phi, ..., \partial^j\phi), \tag{3.2}$$

en donde λ_i, $1 \leq i \leq j$ son, en este punto de la construcción, constantes de acoplamiento arbitrarias.

En principio no existe una prescripción general para el número de términos que uno tendría que considerar en (3.2). Sin embargo, si se está interesado en teorías descriptas por ecuaciones de campo de segundo orden, como es suficiente en orden de tener un problema de Cauchy bien comportado, deberemos interrumpir la suma (3.2) en $F^{(2)}_{\mu\nu}$. Esta condición adicionalmente restringe la cantidad de sumandos en (3.1) a un máximo de tres, de lo contrario encontraríamos términos redundantes en el lagrangiano. Los términos que así sobreviven son, entonces

$$L = \alpha_1 \sqrt{|g_{\mu\nu}|} + \alpha_2 \sqrt{|g_{\mu\nu} + 2\lambda^{-1} F_{\mu\nu}|} + \alpha_3 \sqrt{|F_{\mu\nu}|}, \tag{3.3}$$

en donde por conveniencia, hemos llamado $2\lambda^{-1} = \lambda_2/\lambda_1$, y hemos apropiadamente redefinido los $\alpha' s$. Una reducción adicional de la expresión (3.3) asegurará el límite de baja energía adecuado; de hecho, fijando $\alpha_1 = -\alpha_2$ y $\alpha_3 = 0$, el lagrangiano depende sólo de una constante (digamos λ), y la acción finalmente tomará la forma

$$\mathcal{I}_{\mathbf{BIG}} = \lambda \int d^n x \Big[\sqrt{|g_{\mu\nu} + 2\lambda^{-1} F_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \Big]. \tag{3.4}$$

Esencialmente, este es el esquema propuesto por Born e Infeld tendiente a construir una electrodinámica regular, excenta de los infinitos de la teoría de Maxwell [97]-[101]. El límite de baja energía ($\lambda \to \infty$) se obtiene al considerar la expansión de un determinante en términos de la traza. Para eso podemos factorizar $\sqrt{|g_{\mu\nu}|}$, y abreviando $\mathbb{F} = F_\mu{}^\nu$, el desarrollo del determinante en n-dimensiones enseña que

$$\det(\mathbb{I} - \epsilon\, \mathbb{F}) = 1 + p_1\, \epsilon + p_2\, \epsilon^2 + ... + p_{n-1}\, \epsilon^{n-1} + p_n\, \epsilon^n, \tag{3.5}$$

en donde

$$\begin{aligned}
p_1 &= -s_1 \\
p_2 &= -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1) \\
... & \quad ... \\
... & \quad ... \\
p_n &= -\frac{1}{n}(s_n + p_1 s_{n-1} + ... + p_{n-1} s_1) \quad s_i = Tr(\mathbb{F}^i).
\end{aligned}$$

En nuestro caso tenemos $\epsilon = -2\lambda^{-1}$ así que a primer orden la expansión (3.5) es

$$\sqrt{|\mathbb{I} + 2\lambda^{-1}\mathbb{F}|} = 1 + \lambda^{-1} Tr(\mathbb{F}) + \mathcal{O}(\lambda^{-2}).$$

Esto permite concluir que la acción en el límite de baja energía está descripta por

$$\mathcal{I}_{\mathbf{G}} \propto \int d^n x \sqrt{|g_{\mu\nu}|}\, Tr(\mathbb{F}) \equiv \int d^n x \sqrt{|g_{\mu\nu}|}\, R. \tag{3.6}$$

En principio, una acción del tipo (3.6) parecería estar fuera de tono con el espíritu de la Relatividad General, puesto que ningún tensor de segundo rango construído con derivadas primeras de la métrica en un contexto Riemanniano da lugar - a través de su traza - al escalar de curvatura característico de la acción de Hilbert-Einstein. Sin embargo, haciendo uso de la descripción teleparalela desarrollada en el Capítulo 1, podemos circunvalar este callejón sin salida.

Para concluir con la construcción, sólo resta elegir convenientemente el tensor $F_{\mu\nu}$ que aparece en (3.4). Las herramientas desarrolladas en el Capítulo 1 nos permiten postular como candidato a un tensor de segundo rango cuadrático en la torsión de Weitzenböck, y tal que su traza sea el invariante teleparalelo $\mathbb{T}$. Esto permite obtener una teoría de BI del tipo (3.4), cuyo comportamiento de baja energía está regido por la acción del ETRG.

Luego de una inspección directa se sigue que el tensor más general que verifica los recién mencionados requisitos debe escribirse[1]

$$F_{\mu\nu} = A\, S_{\mu\lambda\rho} T_{\nu}{}^{\lambda\rho} + B\, S_{\lambda\mu\rho} T^{\lambda}{}_{\nu}{}^{\rho}, \quad A, B \;\; ctes, \tag{3.7}$$

en donde $T_{\nu}{}^{\lambda\rho}$ es la torsión y $S_{\lambda\mu\rho}$ fue definido oportunamente en la Ec. (1.42). El esquema determinantal propuesto queda así cristalizado en la acción

$$\mathcal{I}_{\mathbf{BIG}} = \frac{\lambda/(A+B)}{16\pi G} \int d^n x \Big[\sqrt{|\, g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda}(A\, S_{\mu\lambda\rho} T_{\nu}{}^{\lambda\rho} + B\, S_{\lambda\mu\rho} T^{\lambda}{}_{\nu}{}^{\rho})|} - \alpha \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \Big], \tag{3.8}$$

Observemos que la acción (3.8) difiere en forma esencial de la considerada en el capítulo anterior, Ec. (2.7). En contraste con el caso electromagnético, el esquema determinantal (3.8) no engloba a la acción **BI0**, puesto que tenemos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{BIG}} = \frac{\lambda/(A+B)}{16\pi G} \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \left[1 + \lambda^{-1} F_{\mu}{}^{\mu} + \lambda^{-2} \left(\frac{1}{2} (F_{\mu}{}^{\mu})^2 - F_{\mu}{}^{\nu} F_{\nu}{}^{\mu} \right) - \alpha \right] + \mathcal{O}(\lambda^{-2}),$$

o bien, más nítidamente

$$\mathcal{L}_{\mathbf{BIG}} = \frac{\sqrt{|g_{\mu\nu}|}}{16\pi G} \left[\mathbb{T} + \frac{A+B}{2\lambda} \mathbb{T}^2 - \frac{1}{\lambda(A+B)} F_{\mu}{}^{\nu} F_{\nu}{}^{\mu} - \frac{\lambda(\alpha-1)}{A+B} \right] + \mathcal{O}(\lambda^{-2}).$$

[1] Otras combinaciones, como $S_{\lambda\rho\mu} T^{\lambda\rho}{}_{\nu}$, resultan redundantes en virtud de la antisimetría de los tensores $S_{\rho\mu\nu}$ y $T_{\rho\mu\nu}$ respecto de sus últimos dos índices.

Por supuesto, al orden más bajo se reobtiene la acción de Hilbert-Einstein con constante cosmológica dada por

$$\Lambda = \frac{\lambda(\alpha - 1)}{2(A + B)}. \tag{3.9}$$

El término siguiente $\lambda^{-1}\,\mathbb{T}^2$ también está presente en la expansión del Lagrangiano (2.7). No obstante, a orden λ^{-1}, la expansión presenta una contribución $F_\mu{}^\nu F_\nu{}^\mu$ ausente en (2.7). Esto muestra que ambas teorías son genuinamente distintas aún a primer orden en λ^{-1}. Por supuesto, eso no implica que para algún espacio de soluciones ambas no puedan coincidir, como se verá en breve.

3.2. Cosmologías de tipo Friedmann-Robertson-Walker

En analogía con el estudio efectuado en el Capítulo (2.3) en el contexto del esquema **BI0**, continuaremos ahora con la caracterización de las soluciones cosmológicas a la luz de la teoría determinantal (3.8).

3.2.1. Universos espacialmente planos

En lo que concierne a los espacios cosmológicos, nos remitiremos a trabajar en cuatro dimensiones y sin la presencia de constante cosmológica. Debido a la Ec. (3.9), esto implica escoger $\alpha = 1$ en la acción (3.8). Al igual que en la teoría **BI0**, la tétrada adecuada para tratar la cosmología con sección espacial plana es $e^a_\mu = diag(1, a(t), a(t), a(t))$.

La ecuación de Friedmann modificada que proviene de la variación de la acción respecto de la componente e^0_0 de la tétrada resulta

$$\frac{\left[1 - \frac{2(2A+B)H^2}{\lambda}\right]^{1/2}\left[1 + \frac{4(2A+B)H^2}{\lambda} - \frac{36B(2A+B)H^4}{\lambda^2}\right]}{\left[1 - \frac{6BH^2}{\lambda}\right]^{1/2}} - 1 = \frac{16\pi G(A+B)}{\lambda}\rho, \tag{3.10}$$

para todo valor de los parámetros adimensionales A y B. Esta ecuación contiene el comportamiento de RG como límite de baja energía, puesto que un desarrollo a primer orden en la cantidad pequeña H^2/λ lleva a la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho.$$

La cosmología estandard de **FRW** emerge entonces cuando el parámetro de Hubble es mucho menor que la constante fundamental λ. Una inspección de la Ec. (3.10) revela ciertos casos de particular interes. A primera vista, parecería que la elección de las constantes dada por $2A + B = 0$, proporcionaría una reducción significativa de términos en la ecuación de campo (3.10). Comencemos, entonces, analizando esa situación en el espacio de parámetros (A, B).

Caso $2A + B = 0$**.** Luego de redefinir la constante de BI en la forma $\lambda \rightsquigarrow -A^{-1}\lambda$, la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{12H^2}{\lambda}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\ \rho. \tag{3.11}$$

Esta ecuación no es otra sino (2.13)[2]. Esto implica que a nivel de la cosmología plana, la teoría determinantal con $2A + B = 0$ no se distingue del esquema **BI0**. Esta equivalencia puede rastrearse al nivel de la acción, es decir, en la expansión del determinante, Ec. (3.5); en efecto, el ansatz $e^a_\mu = diag(1, a, a, ...)$ conduce a sólo un invariante no trivial, a saber,

$$Tr(\mathbb{F}) = \mathbb{T} = -6H^2.$$

Los invariantes de orden superior de tipo $Tr(\mathbb{F}^i)$, resultan ser todos nulos para ese frame.

Caso $A = B$**.** Caracterizar la teoría para distintas configuraciones del espacio de parámetros nos permite categorizar ciertos subespacios y descartar otros que lleven a situaciones físicamente inadmisibles. Conocer posibles configuraciones en donde la teoría esté mal comportada es mandatorio para futuras investigaciones. Entre estos estados, el caso $A = B$ reviste cierta importancia debido a que es suceptible a ser tratado analíticamente.

Redefiniendo $\lambda \rightsquigarrow (2A)^{-1}\lambda$, la ecuación (3.10) queda en este caso

$$6H^2\Big(1 - \frac{9H^2}{2\lambda}\Big) = 16\pi G\ \rho.$$

De aquí es posible despejar el parámetro de Hubble, quedando

$$H^2 = \frac{\lambda}{9}\Big(1 \pm \sqrt{1 - 3\mathtt{y}}\Big), \tag{3.12}$$

con la variable $\mathtt{y}$ definida ahora como

$$\mathtt{y} = \frac{16\,\pi\,G\,\rho_o}{\lambda}\ \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{3(1+\omega)}.$$

[2]Para que (3.11) coincida con (2.13), debe fijarse en esta ultima $\epsilon = 0$ y $n = 4$.

La ecuación para la evolución del parámetro de Hubble ofrece varias lecturas. Si se considera la rama positiva, entonces no se respeta el límite de baja energía, puesto que la expresión conduce a un máximo parámetro de Hubble cuando la densidad tiende a cero. Por eso, esta configuración debe ser excluída del espacio de soluciones físicamente admisibles. En cambio, si $\lambda > 0$, la rama negativa de esta ecuación muestra que el parámetro de Hubble alcanza un valor máximo dado por $H^2_{max} = \lambda/9$. Por otro lado, la ecuación permite también considerar $\lambda < 0$ puesto que la rama negativa asegura que H^2 sea positivo.

Cualquiera sea el indice barotrópico del fluído (excepto $\omega = -1$), la variable $\mathtt{y}$ permite integrar la ecuación (3.12) en forma exacta. En efecto, teniendo en cuenta la definición de la variable $\mathtt{y}$, tenemos que

$$\dot{\mathtt{y}} = -3(1+\omega)H\,\mathtt{y}. \tag{3.13}$$

Esta relación nos permite concluir, junto con la Ec. (3.12), que

$$\pm(1+\omega)\sqrt{\mid\lambda\mid}\,dt = \frac{d\mathtt{y}}{\mathtt{y}\sqrt{1-\sqrt{1\pm 3\mathtt{y}}}}.$$

Es necesario mencionar que los signos que preceden el miembro izquierdo emergen debido a haber tomado una raiz cuadrada en la expresión. Por otro lado, los que están encapsulados en la raiz cuadrada del miembro derecho corresponden al signo de la constante de BI: si $\lambda < 0$ corresponde el signo $(+)$, mientras que si $\lambda > 0$ corresponde el $(-)$. La integración de (3.12) es directa y depende del signo de λ. Para $\lambda < 0$ tenemos

$$\pm(1+\omega)\sqrt{\mid\lambda\mid}\,t\pm c = \frac{2}{\sqrt{-1+\sqrt{1+3\mathtt{y}}}} + \sqrt{2}\,ArcTan\Big[\frac{\sqrt{-1+\sqrt{1+3\mathtt{y}}}}{\sqrt{2}}\Big]. \tag{3.14}$$

mientras que para $\lambda > 0$ se sigue que

$$\pm(1+\omega)\sqrt{\mid\lambda\mid}\,t\pm c = \frac{2}{\sqrt{1-\sqrt{1-3\mathtt{y}}}} + \sqrt{2}\,ArcTanh\Big[\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-3\mathtt{y}}}}{\sqrt{2}}\Big]. \tag{3.15}$$

Cuando $\lambda < 0$ no hay un aporte significativo de información respecto de la RG. De hecho, para $\mathtt{y} \to \infty$ $(a(t) \to 0)$, el factor de escala dado implícitamente en la Ec. (3.14) se comporta según

$$\frac{a(t)}{a_0} \propto \sqrt{H_0\,t}, \quad si \quad a(t) \to 0,$$

cuando se trata de un Universo dominado por la radiación. Este es exactamente el comportamiento predicho por la Relatividad General en las mismas circunstancias. Este caso no resulta interesante puesto que trae aparejado la existencia de un Big Bang al igual que en la cosmología ordinaria.

En total contraste, el caso con constante de Born-infeld positiva presenta un comportamiento muy particular. Para revisar esta cuestión se ha graficado el factor de escala adimensional $a(t)/a_0$ como función del tiempo propio t. Como corresponde al régimen de alta energía, se ha utilizado $\omega = 1/3$ y, por comodidad, se ha fijado la constante $\beta_0 = 16\pi G\rho_0$ igual a la unidad, en completa analogía con lo efectuado en el análisis del potencial efectivo de la sección (2.3.2). La curva punteada describe la evolución del factor de escala prevista por RG. En el gráfico se han incluído tres curvas correspondientes a $\lambda = 10^3$ (inferior), $\lambda = 10$ (media) y $\lambda = 1$ (superior). En la teoría de Einstein, nada impide que el factor

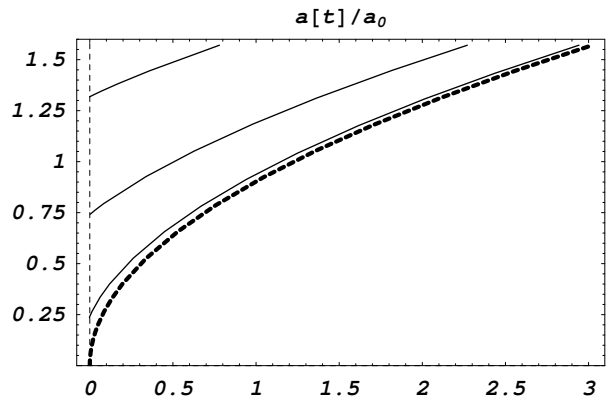

Figura 3.1: Factor de escala adimensional como función del tiempo propio para $\omega = 1/3$ y tres valores de la constante de BI. Las curvas superior, media e inferior corresponden a $\lambda = 1$, $\lambda = 10$ y $\lambda = 10^3$ respectivamente, mientras que la línea punteada describe el régimen relativista.

de escala provenga desde un valor nulo en el Big Bang, y así, que las cantidades físicas como la densidad de energía y presión, hayan sido infinitas en ese evento. El régimen deformado, por otro lado, conduce a un mínimo factor de escala en donde el universo posee un volumen dado por

$$\left(\frac{a_{min}}{a_0}\right)^3 = \left(\frac{48\pi G\rho_0}{\lambda}\right)^{1/(1+\omega)}. \tag{3.16}$$

Este volumen mínimo conlleva una cota superior para la densidad de energía y presión del fluído que constituye el Universo. Efectívamente, podemos verificar que los valores máximos para estas cantidades son

$$\rho_{max} = \frac{\lambda}{48\pi G}, \quad p_{max} = \omega\, \rho_{max}, \tag{3.17}$$

de modo que la densidad de energía máxima es independiente del índice barotrópico ω.

La aparición de una cota inferior para el factor de escala rememora el Big Bounce proveniente de las cosmologías cuánticas. En ese contexto, el volumen mínimo se interpreta como un fenómeno emergente debido a los efectos cuánticos repulsivos existentes en el Universo temprano. Sin embargo, la analogía entre ambos esquemas es parcial. En efecto, la densidad máxima (3.17) se condice con una constante de Hubble máxima dada por $H^2_{max} = \lambda/9$, mientras que en el Big Bounce el parámetro de Hubble es nulo. Por otro lado, la no derivabilidad del factor de escala en $t = 0$ que acusa la solución (3.2.1), pone de manifiesto una cuestión inquietante. Al examinar con más detalle la situación, observamos que la divergencia de la derivada del parámetro de Hubble cuando el factor de escala tiende a su mínimo valor, implica la divergencia de los invariantes geométricos. En efecto, derivando temporalmente la Ec. (3.12) y recordando la relación (3.13) podemos obtener la siguiente expresión para la curvatura escalar $R = 6(2H^2+\dot{H})$,

$$R = \frac{4\lambda}{3}\Big[1 - \frac{1 - \frac{3}{2}(1-\omega)\mathtt{y}}{\sqrt{1-3\mathtt{y}}}\Big].$$

Dado que hemos supuesto desde el principio que $\omega = -1$, esta expresión diverge cuando $\mathtt{y} \to 1/3$ (i.e., cuando $\rho = \rho_{max}$). Los otros invariantes geométricos cuadráticos, como $R^2_{\mu\nu}$ y K, corren con la misma suerte. De esta forma, a pesar que la densidad de energía está acotada debido al factor de escala mínimo a_{min}, el espacio-tiempo posee curvaturas infinitas en el volumen mínimo a^3_{min}.

Epistemológicamente hablando, y en tono más especulativo, aunque singular en $t = 0$, la solución presenta una ventaja respecto de la aportada por la teoría de Einstein. Si bien el caso en consideración predice su propia extinción en el Big Bang a raiz de la divergencia de la curvatura, también parece sugerir la necesidad de un tratamiento cuántico de la gravedad a escalas propias del orden de ρ_{max}. En efecto, la no existencia de H cuando $a(t) = a_{min}$ podría interpretarse como el colapso de la descripción basada en la clasicidad del espacio-tiempo. Dicho de otro modo, la solución parecería definir *per se*, y en forma precisa, el ámbito de validez de la teoría determinantal como esquema clásico para la gravitación. Ciértamente, este es un punto ausente en la teoría de Einstein; en nuestro dias existe un concenso prácticamente unánime respeco de la necesidad de describir la gravitación en la época de Planck dentro del contexto de la mecánica cuántica. Sin embargo, la RG no muestra ningún indicio interno que delate su carencia inherente en este sentido. Las singularidades cosmológicas se suceden en el Big Bang mismo, y la escala de Planck no emerge como un elemento discordante en la teoría.

Si uno persiste en interpretar la solución (3.12) según la visión expuesta en el párrafo anterior, la comparación con los resultados provenientes de las cosmologías cuánticas resulta casi inevitable. Por ejemplo, en el contexto de Loop

Quantum Gravity (LQG) [73], [74], la Ec. de Friedmann de la Relatividad General es reemplazada por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{crit}}\right).$$

Cuando $\rho = \rho_{crit}$, entonces $H = 0$ y se produce el Big Bounce del factor de escala. La densidad crítica a la que sucede el Bounce está dada por

$$\rho_{crit} = \sqrt{3}\,(32\pi^2\gamma^3 G^2\hbar)^{-1},$$

en donde γ es una constante conocida como el parámetro de *Barbero-Immirzi*, que se estima en $\gamma \sim 0{,}24$ por cálculo de entropía de agujeros negros en la teoría [75]. Comparando ρ_{crit} en esta expresión con ρ_{max} dada en (3.17), se tiene que la magnitud de la constante de Born-Infeld es

$$\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi G\gamma^3\hbar}.$$

La contrastación entre la solución cosmológica con $A = B$, $\lambda > 0$ y el comportamiento repulsivo de la gravitación en el régimen cuántico provisto por LQG, se ha convertido en la única fuente de estimación de la constante de Born-Infeld.

3.2.2. Universos espacialmente curvos

Universos cerrados

En correspondencia con el análisis efectuado en la sección (2.3.2), dirigiremos la atención a las cosmologías de tipo **FRW** con sección espacial curva, empezando por el caso cerrado. Para esto, haremos uso de la tétrada oportunamente construida, es decir

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^1 &= a(t)\ E^1, \\ e^2 &= a(t)\ E^2, \\ e^3 &= a(t)\ E^3, \end{aligned}$$

con los campos E^1, E^1 y E^1 definidos en (2.44).

Por simplicidad, enfoquémosnos en el caso $2A + B = 0$, para el cual las ecuaciones de movimiento se ven notablemente simplificadas. En efecto, podemos comprobar que la Ec. de Friedmann deformada proveniente de la acción (3.8), luego de la redefinición $\lambda \rightsquigarrow (2B)^{-1}\lambda$ toma el aspecto

$$\frac{(1+\frac{1}{\lambda a^2})^{3/2}}{\sqrt{1-\frac{12H^2}{\lambda}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\,\rho. \tag{3.18}$$

Nótese que esta ecuación difiere de la correspondiente a $K = 0$ (ver Ec. (3.11)), por la aparición del término $1/\lambda a^2$ en el numerador del miembro izquierdo. Nuevamente podemos interpretar a la ecuación de movimiento como una de tipo conservativo con la forma

$$\dot{y}^2 + V(y) = 0 \quad y = \frac{a}{a_0}, \tag{3.19}$$

en donde ahora el potencial efectivo $V(y)$ dependiente de las constantes $\beta_0 = 16\pi G\rho_0/\lambda$ y $k_0 = 1/\lambda a_0^2$ se escribe

$$V(y) = -\frac{\lambda}{12}y^2\Big[1 - \frac{(1+k_0\,y^{-2})^3}{(1+\beta_0\,y^{-3(1+\omega)})^2}\Big]. \tag{3.20}$$

El comportamiento del potencial $V(y)$ se aprecia en la figura (3.2). Como ya es usual, se fijó $a_0 = 16\pi G\rho_0 = 1$, y $\omega = 1/3$. En trazo punteado se divisa el régimen relativista, y las tres curvas llenas corresponden a una constante de Born-Infeld $\lambda = 1\times 10^3$ (superior), $\lambda = 0.5\times 10^4$ (media) y $\lambda = 1\times 10^4$ (inferior). La figura se asemeja a la del potencial efectivo de la cosmología cerrada en la teoría **BI0** (ver fig. (2.5)), aunque posee un razgo distintivo fundamental; el potencial tiende a cero con derivada nula cuando el factor de escala hace lo propio o, equivalentemente, cuando $y \to 0$.

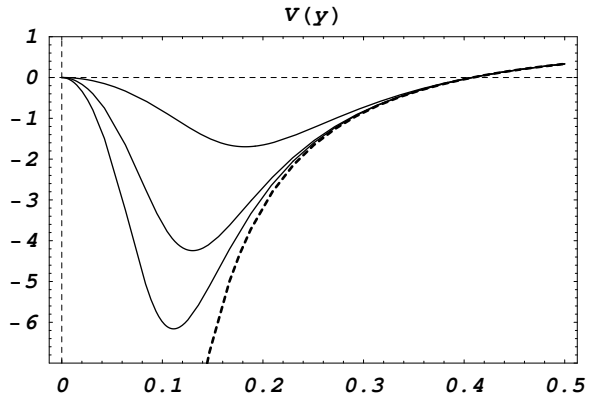

Figura 3.2: Potenciales que gobiernan la evolución del factor de escala para el Universo cerrado con $\omega = 1/3$, y tres valores de la constante λ de BI. Las curvas inferior, media y superior corresponden a $\lambda = 1\times 10^4$, $\lambda = 0.5\times 10^4$ y $\lambda = 1\times 10^3$ respectivamente. La linea punteada describe el comportamiento relativista.

Esta diferencia es crucial en lo que respecta al comportamiento del factor de escala en ese límite. En efecto, desarrollando la Ec. (3.20) en la cantidad pequeña y, se tiene que la ecuación de conservación (3.19) se comporta de acuerdo a

$$\dot{y}^2 = \frac{\lambda}{12} y^2 + \mathcal{O}(y^4),$$

sin importar el valor del índice barotrópico ω. Aquí, a diferencia de la Ec. (2.56) en donde aparece el término constante a_0^{-2}, se tiene que la solución sigue la ley

$$a(t) \propto Exp\Big[\sqrt{\frac{\lambda}{12}}\, t\Big], \quad si \quad a(t) \to 0.$$

Como podemos apreciar, aquí hace su aparición nuevamente la cantidad $H_{max} = \sqrt{\lambda/12}$, con la que ya hemos tenido oportunidad de tratar en la sección (2.3.1). Esto es debido a que la versión plana (i.e., aquella con $K = 0$) del esquema determinantal con $2A + B = 0$, reproduce la solución cosmológica de la teoría **BI0** tratada con detalle en el apartado (2.3.1). Sin embargo, al nivel del espacio-tiempo cosmológico con $K = 1$, la teoría determinantal ofrece una remoción de la singularidad inicial, en contraste con la teoría **BI0**.

La raiz positiva del potencial efectivo denota el final de la etapa expansiva del Universo. En este régimen de baja energía, la teoría determinatal, al igual que el esquema **BI0**, la evolución del Universo sigue los mismos pasos que los dictados por la Relatividad General. No obstante, la dinámica evolutiva del Universo a la luz de la teoría determinantal con $2A + B = 0$ se compone de una expansión exponencial temprana de duración infinita caracterizada por la constante de Hubble H_{max}, seguida de un régimen desacelerado compartido con la RG y conducente a un punto de retorno, y luego una etapa contractiva que finaliza en un estado deflacionario de duración infinita caracterizado nuevamente por la constante H_{max}.

Universos abiertos

El punto de partida del análisis es el campo de tétradas

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^1 &= a(t)\ E^1, \\ e^2 &= a(t)\ E^2, \\ e^3 &= a(t)\ E^3, \end{aligned}$$

con las 1-formas E^1, E^1 y E^1 definidas en (2.58). La tétrada así obtenida conduce a la métrica abierta de **FRW** dada en la Ec. (2.60). La ecuación diferencial de

primer orden para el factor de escala adopta ahora la forma

$$\frac{|\,1-\frac{1}{\lambda a^2}\,|^{3/2}}{\sqrt{1-\frac{12H^2}{\lambda}}}-1=\frac{16\pi G}{\lambda}\,\rho, \tag{3.21}$$

y el potencial que de ella se deriva es

$$V(y)=-\frac{\lambda}{12}y^2\Big[1-\frac{(1-k_0\,y^{-2})^3}{(1+\beta_0\,y^{-3(1+\omega)})^2}\Big], \tag{3.22}$$

cuyo comportamiento para los mismos valores de las constantes adoptados para el caso cerrado, se encuentra representado en la figura (3.3). A diferencia de lo

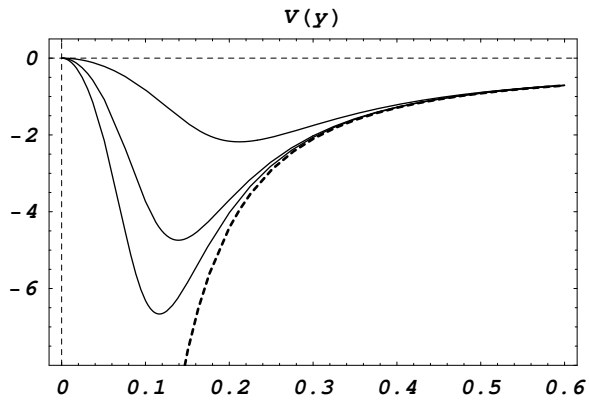

Figura 3.3: Potenciales que gobiernan la evolución del factor de escala para el Universo abierto con $\omega = 1/3$, y tres valores de la constante λ de BI. Las curvas inferior, media y superior corresponden a $\lambda = 1\times 10^4$, $\lambda = 0.5\times 10^4$ y $\lambda = 1\times 10^3$ respectivamente. La linea punteada describe el comportamiento relativista.

ocurrido en la teoría **BI0**, el potencial (3.22) tiene su única raiz en $y = 0$, la que se alcanza con derivada nula. Esto indica que el factor de escala es asintótico a un valor nulo cuando $t \to -\infty$. Por su parte, el parámetro de Hubble tiende asintóticamente a un valor máximo dado por $H_{max} = \sqrt{\lambda/12}$, que se alcanza en el límite cuando el tiempo tiende a menos infinito. Estos valores asintóticos de $a(t)$ y $H(t)$ traen aparejados un crecimiento infinito de la densidad de energía en el mismo límite, como se verifica inmediatamente de la Ec. (3.21). Asimismo, las características del potencial favorecen una etapa temprana exponencialmente acelerada. En efecto, un desarrollo del potencial (3.22), válido cuando $y << 1$, lleva a la solución

$$y(t)\approx Exp\Big[\sqrt{\frac{\lambda}{12}}\,t\Big],$$

a menos de una constante multiplicativa que fija el (arbitrario) origen del tiempo. El modelo de Universo así descripto comienza desde un volumen nulo a $t = -\infty$ y, a través de una expansión inflacionaria de infinita duración, conecta con la dinámica regida por la Relatividad General. El comportamiento asintótico del factor de escala cuando $t \to -\infty$ asegura la regularidad del espacio-tiempo.

3.3. Cuerdas cósmicas

3.3.1. Generalidades

La ruptura de simetría en una teoría de campos puede conducir a la formación de los denominados defectos topológicos [76]: monopolos, cuerdas y paredes cósmicas que, respectivamente, son estructuras de dimensión cero, uno y dos.

De acuerdo a las ideas actuales, las interacciones entre las partículas elementales son descriptas por la denominada teoría de la gran unificación representada por un grupo de gauge G que correspondería a un único grupo de simetrías a altas energías. Si estas teorías de unificación y el paradigma cosmológico son correctos, entonces el universo debería haber sufrido diversas transiciones de fase en las cuales podrían haber surgido estos defectos topológicos que, por ser estructuras aparentemente estables, es posible que perduren aún hoy en día [77, 78].

A bajas energías todas las interacciones parecen ser muy diferentes unas de las otras. Pero a medida que las temperaturas aumentan esta perspectiva cambia. En el contexto del modelo cosmológico del estandard, estas rupturas implican distintas transiciones de fase. Durante el proceso de expansión del universo la temperatura fue disminuyendo produciéndose las distintas rupturas de simetrías, que esquemáticamente evolucionan según

$$\mathrm{G} \to \mathrm{H} \to ... \to \mathrm{SU(3)\ x\ SU(2)\ x\ U(1)} \to \mathrm{SU(2)\ x\ U(1)}.$$

Invérsamente, las simetrías pueden ser restauradas cuando se alcanzan temperaturas suficientemente altas. Las temperaturas críticas a las cuales estas transiciones suceden se corresponden con los factores de escala que indican cuándo las respectivas rupturas de simetría se producen. Desde las altísimas temperaturas de la época de Planck (del orden de 10^{19} GeV), hasta los 3 K$\sim$ 1 meV del estadío actual del universo, se estima que han pasado $1{,}37 \times 10^{10}$ años.

La física de las interacciones de partículas elementales a bajas energías parece estar muy bien descripta por la teoría de gauge asociada al grupo SU(3) x SU(2) x U(1) con constantes de acoplamientos g_1, g_2 y g_3, respectivamente. La transición de fase asociada a las interacciones fuertes parece ocurrir a temperaturas del orden de los 100 MeV. Por encima de esta energía (es decir, más atrás en la edad del universo), se tiene una "sopa" densa de quarks y gluones; por debajo (es

decir, temporalmente más cerca de la actualidad), emergen hadrones individualmente tales como los protones, los neutrones y los piones. Alrededor de los 100 GeV las teorías del electromagnetismo y de la fuerza débil se unifican. Como las teorías de interacciones fundamentales parecen describir correctamente la física de bajas energías es altamente probable que luego de una transición de fase a una temperatura cercana a los 10^{15} GeV todas las interacciones se conviertan en una única teoría unificada. Por encima de esta temperatura, entonces, aparece la simetría restaurada. A partir de estas energías comienza la fase que se denomina de la gran unificación descripta por un único grupo G. En este período la teoría tiene una única constante de acoplamiento: una simetría ha sido restaurada.[3]

Estos fenómenos del universo temprano[4] pudieron haber dado lugar a los defectos topológicos y combinaciones híbridas de ellos [79]. El universo temprano es un escenario favorable para la restauración de simetrías dado que constituye un ámbito en el cual las temperaturas y las densidades son extremas. Las consecuencias cosmológicas de estas estructuras, si es que existen, se pueden resumir de la siguiente manera. Las paredes y los monopolos tienen que evitarse en cualquier modelo cosmológico pues sus presencias presentan grandes discrepancias con la evidencia observacional; los defectos híbridos parecen no dejar rastros al decaer rápidamente. En cambio, la existencia de cuerdas no contradice datos observacionales. Por el contrario, podrían generar fluctuaciones de la densidad que permitirían explicar la formación de galaxias y estructuras de gran escala, entre otras cosas.

Recientemente ha habido renovado interés en estos temas debido al desarrollo de las teorías de supercuerdas: las cuerdas fundamentales podrían desempeñar el papel de las cuerdas cósmicas [80]. Nueva evidencia observacional respecto a su supuesta existencia también ha motivado el estudio actual de estas estructuras [81]-[83]. Si estos defectos lineales existen hoy dentro de nuestro horizonte presente deberían ser observados distintos efectos tales como la deflección de la luz al pasar por las cercanías de las cuerdas cósmicas, generando múltiples imágenes (al funcionar como lentes gravitacionales), la producción de ondas gravitatorias, perturbaciones en la radiación cósmica de fondo, entre otros. Si bien no existe actualmente ningún indicio que muestre la existencia de las cuerdas cósmicas, lejos está la posibilidad de que se abandone su estudio ya que, en ciertos contextos, son fuente de explicaciones concretas de problemas aún abiertos.

Las cuerdas cósmicas son defectos lineales que, a menos que presenten estruc-

[3]Dado que actualmente la física de partículas elementales describe extremadamente bien los procesos a energías ordinarias, no hay ninguna razón para suponer que este comportamiento no se mantenga, al menos, hasta alcanzar la energía de Planck a partir de la cual una teoría cuántica de la gravedad resulta imprescindible.

[4]Los defectos topológicos también pueden ser encontrados en transiciones de fase en sistemas de materia condensada en donde se producen mecanismos similares de ruptura de simetrías.

turas internas tipo *wiggles* o *kinks*[5] o corrientes eléctricas (superconductoras o no), poseen una densidad de energía por unidad de longitud μ igual a la tensión axial. La tensión y la energía por unidad de longitud son ambas del orden de T_c^2, siendo T_c la temperatura crítica a la cual se produce la transición de fase correspondiente. La intensidad de la interacción gravitatoria de las cuerdas cósmicas se relaciona con esta temperatura. Además deben ser estructuras cerradas o infinitas [76]. Las cuerdas cósmicas también pueden ser superconductoras con corriente crítica del orden de T_c y la interacción con los campos magnéticos del universo deberían ser lo suficientemente fuertes como para producir efectos astrofísicos observables. Witten [84] demostró que existen teorías en las cuales este tipo de cuerdas es posible.

Como fue notado ya en la década del 80 por Vilenkin y Gott, las cuerdas cósmicas se revelarían a causa del efecto de lensing gravitatorio que ellas producen. Para entender los razgos fundamentales de este fenómeno, alcanza con considerar cuerdas infinitamente largas y sin estructura interior. En este caso, la métrica exterior a la cuerda está dada por [85]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1-4\mu)^2 r^2 d\theta^2 + dz^2, \tag{3.23}$$

en donde se han usado coordenadas cilíndricas usuales (t, r, θ, z), con $-\infty < t, z < \infty$, $0 < r < \infty$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. El intervalo (3.23) parece ser a primera vista un tanto insulso: de hecho, mediante el cambio de coordenadas $\theta' = (1-4\mu)\theta$ se lo lleva a la forma Minkowskiana, lo cual indica que la métrica (3.23) describe un espacio-tiempo con curvatura de Riemann nula, i.e., geométricamente trivial. Sin embargo, topológicamente hablando, la métrica (3.23) es muy rica; el cambio de coordenadas antes mencionado obliga a la variable angular θ' a describir un rango menor, de hecho ahora tenemos $0 \leq \theta < 2\pi(1-4\mu)$. Esto genera un *déficit* angular que, vía identificaciones adecuadas, transforma al espacio de Minkowski en un cono. Las identificaciones son operaciones de carácter geométricamente ascéptico, con lo cual no son censadas por las ecuaciones de Einstein [6].

El espacio cónico, si bien plano, produce que geodésicas asintóticamente paralelas se curven al pasar cerca del *apex* del cono, donde existe una singularidad cónica (ver el esquema de la izquierda en la fig. (3.4)). De esta manera los fotones provinientes de una fuenta lejana se curvan al circunvalar la cuerda y forman dos imágenes de la fuente a su lado (derecha en la fig. (3.4)).

[5]Estructuras de pequeña escala que se propagan sobre la cuerda. Las cuerdas que presentan estas estructuras tienen un tensor de energía-momento tal que $T^{tt} \neq T^{zz}$.

[6]Básicamente, las identificaciones consisten en relacionar biunívocamente puntos opuestos del *wedge* generado en el espacio de Minkowski debido a la existencia del ángulo de déficit. Estas relaciones son de carácter *global*, con lo cual, pasan inadvertidas frente a las ecuaciones de Einstein, que dan cuenta de la geometría *local* de la variedad.

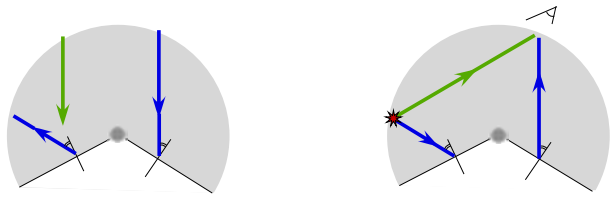

Figura 3.4: A la izquierda se aprecia como dos geodésicas paralelas (rectas) se intersecan debido a la identificación de puntos opuestos en el *wedge*. A la derecha, y debido al mismo motivo, un observador percibe dos imágenes de la misma fuente distante.

Si bien el lensing por cuerdas no ha sido medido aún, se espera que la inminente generación de detectores de alta resolución angular nos posicionen en condiciones de iniciar una búsqueda seria de tales defectos.

En la sección siguiente examinaremos la existencia de cuerdas cósmicas regulares provenientes del esquema determinantal (3.8). La alta simetría de la métrica (3.23) permite una simplificación adicional. En efecto, además de la simetría axial, la métrica (3.23) es invariante ante boosts en la dirección de la cuerda, ya que se trata de un objeto unidimensional de longitud infinita. Esto implica que todas las hipersuperficies $z = constante$ son equivalentes, por lo cual el problema es básicamente dominio de la gravedad en (2+1) dimensiones.

3.3.2. Ausencia de singularidad cónica y eliminación de curvas temporales cerradas en la cuerda cósmica de Born-Infeld

Investigaremos ahora algunas de las propiedades de la acción (3.8) trabajando en el ambiente más accesible característico de la gravedad en tres dimensiones, en particular, estudiaremos soluciones circularmente simétricas. Durante esta sección explicaremos en detalle el material contenido en la Ref. [86]. Este ejemplo de solución es particularmente interesante en tres dimensiones, puesto que lleva (en la teoría de Einstein) a la aparición de singularidades cónicas en el origen. A diferencia de las singularidades geométricas, en donde los invariantes de la geometría se tornan divergentes, las singularidades cónicas poseen naturaleza topológica[7]. La forma circularmente simétrica del dreibein en tres dimensiones es

[7]Estas singularidades son conocidas como *cuasirregulares*. Para una definición rigurosa, remitimos al lector al artículo [87].

$$
\begin{aligned}
e^0 &= N(r)dt, \\
e^1 &= (Y(r)/N(r))dr, \\
e^2 &= r(N^\theta(r)\,dt + d\theta),
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

en donde se han usado coordenadas polares usuales (r, θ) en las hipersuperficies $t = cte.$. La tríada anterior lleva a la métrica

$$
ds^2 = N^2(r)\ dt^2 - \frac{Y^2(r)}{N^2(r)} dr^2 - r^2 \left(N^\theta(r)\ dt + d\theta\right)^2 .
$$

Como es sabido (ver el apartado (2.4)), las solución de vacío de RG ($\lambda \to \infty$) para esta simetría es

$$
N_o^\theta(r) = -\frac{J}{2\,r^2}\ , \quad N_o^2(r) = -M - \Lambda\, r^2 + \frac{J^2}{4\,r^2}\ , \quad Y = 1 \tag{3.25}
$$

que representa el agujero negro rotante BTZ si $\Lambda < 0$.

En lo que resta de esta sección tomaremos $B = 0$ en la acción (3.8). Esta particular elección tiene la bondad de conducirnos a una solución exacta del problema, la cual resulta crucial a la hora de caracterizar el espacio-tiempo en las regiones vecinas a la singularidad.

Las ecuaciones de movimiento para el ansatz (3.24) adquieren un aspecto más diáfano cuando se consideran las variables naturales dadas por

$$
X = -\frac{(N^2)'}{\lambda\, r\, Y^2}\ , \qquad Z = \frac{r^2 (N^{\theta\,\prime})^2}{2\lambda\, Y^2}. \tag{3.26}
$$

En términos de estas variables, las ecuaciones de campo provenientes de (3.8) con $B = 0$ se reducen a

$$
\frac{1 - X + Z/2}{\sqrt{\mathcal{U}(X,Z)}} = k\, Y, \tag{3.27}
$$

$$
\frac{\sqrt{2\lambda\, Z}(1 - X/2)}{\sqrt{\mathcal{U}(X,Z)}} = \frac{J}{r^2}, \tag{3.28}
$$

$$
(1 + 2\,\Lambda/\lambda)\,\sqrt{\mathcal{U}(X,Z)} = 1 - X^2 + X\,Z, \tag{3.29}
$$

con

$$
\mathcal{U}(X,Z) = 1 - 2X + X^2 + 2Z - ZX, \tag{3.30}
$$

en donde k y J son dos constantes de integración. De hecho, la constante k es espúrea, puesto que puede ser reabsorbida en la función Y redefiniendo las

funciones N y N^θ y la coordenada t, todo esto sin afectar la identidad de las variables X y Z; por eso, de ahora en más, usaremos $k = 1$. Las ecuaciones (3.27)-(3.29) son tres ecuaciones algebraicas acopladas para las variables X, Y y Z, que a pesar de su aspecto inofensivo, resisten un tratamiento analítico cuando son consideradas en toda su generalidad.

Ahora concentrémosnos en estudiar las ecuaciones de campo en el caso particular $\Lambda = 0$, cuyo análogo relativista está descripto por la solución cónica de Deser, Jackiw y t'Hooft [70]. En este importante caso no es difícil encontrar una solución exacta del sistema (3.27)-(3.29). Notemos que para la solución de RG (3.25) se satisface $X = Z$, lo cual implica que $\mathcal{U}(X = Z, Z) = 1$. Si $\Lambda = 0$ entonces λ no aparece explícitamente en la Ec. (3.29), así que la relación $X = Z$ permanece inalterada y resuelve la Ec. (3.29). Por otro lado las ecuaciones restantes quedan en la forma

$$1 - \frac{Z}{2} = Y, \tag{3.31}$$

$$Z\,Y^2 = \frac{J^2}{2\lambda\, r^4} \doteq 2\Delta. \tag{3.32}$$

De la ecuación (3.32), las definiciones (3.26) para X, Z y la relación $X = Z$, se obtiene directamente que

$$N^\theta(r) = -\frac{J}{2\,r^2}\,, \qquad N^2(r) = M^2 + \frac{J^2}{4\,r^2}, \tag{3.33}$$

en donde M^2 es una constante de integración [8]. Así el intervalo toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(J^2/(4\,r^2) + M^2\right)\, dt^2 - \left(\frac{Y(r)^2}{J^2/(4\,r^2) + M^2}\right) dr^2 - r^2 \left(-\frac{J}{2\,r^2}\, dt + d\theta\right)^2 \\ &= \left[d(M\ t + J\ \theta/(2M))\right]^2 - \left(\frac{Y(r)^2}{J^2/(4\,r^2) + M^2}\right) dr^2 - \\ &\quad -\frac{r^2}{M^2}(J^2/(4r^2) + M^2)\, d\theta^2, \end{aligned} \tag{3.34}$$

en donde la función $Y(r)$ se determinará unas líneas más abajo. Antes de proseguir con la caracterización de la solución, resulta adecuado efectuar el cambio de

[8] Si bien el sistema (3.27)-(3.29) es algebraico en las variables X, Y y Z, no olvidemos que finalmente es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineal para las funciones Y, N y N^θ. La constante de integración M proviene de la integración de dicho sistema.

variables

$$r \;\rightarrow\; \rho = M^{-2}(J^2/4 + M^2 r^2)^{1/2}, \tag{3.35}$$

$$t \;\rightarrow\; T = M\, t + J\, \theta/(2M), \tag{3.36}$$

luego del cual el intervalo (3.34) adquiere el aspecto

$$ds^2 = dT^2 - Y(\rho)^2\, d\rho^2 - M^2\rho^2 d\theta^2. \tag{3.37}$$

Notemos que en el límite de RG ($\lambda \to \infty$), tenemos que $\Delta \equiv J^2/(4\lambda\, r^4) \to 0$. En este caso tenemos $Z \to 0$ e $Y \to 1$ en las Ecs. (3.31)-(3.32), y así el espacio-tiempo plano se recupera localmente (puesto que en este caso la constante M puede ser reabsorbida redefiniendo θ). Desde un punto de vista global, la Ec. (3.37) con $Y = 1$ puede ser vista como representación de una estructura cónica: las hipersuperficies $T = \textit{constante}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \rho < \infty$, son planos a los cuales se les ha removido un *wedge*, y en donde se han identificado puntos opuestos luego de la remoción. El ángulo que define el *wedge*, también conocido como ángulo de déficit es $\beta = 2\pi(1 - M)$, y está directamente relacionado con la masa $\mu = (1 - M)/4$ de la fuente puntual ubicada en el origen.

Reparemos en el hecho que la coordenada ρ no puede tomar el valor $\rho = 0$ en la Ec. (3.35). Sin embargo en RG esto no representa una limitación genuina debido a la coordenada ρ, sino una consecuencia del dreibein elegido. De hecho, como es aparante en la Ec. (3.37) con $Y = 1$, ρ puede ser extendida hasta $\rho = 0$

Debido a la completa equivalencia entre RG y su análogo teleparalelo, este ultimo es invariante ante transformaciones locales del vielbein; por eso, la geometría (3.37) con $Y = 1$ podría haberse derivado no sólo del dreibein (3.24), sino también de la tríada *inercial* dada por

$$E^0 = dT, \quad E^1 = d\rho, \quad E^2 = M\rho\, d\theta. \tag{3.38}$$

Ambas tríadas están conectadas por la transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} e^0 &= \frac{E^0 - J/(2M^2\rho)\, E^2}{\sqrt{1 - J^2/(4M^4\,\rho^2)}}, \\ e^2 &= \frac{E^2 - J/(2M^2\rho)\, E^0}{\sqrt{1 - J^2/(4M^4\,\rho^2)}}, \end{aligned}$$

la cual representa un boost tangente a los círculos $\rho = \textit{constante}$ con velocidad $V = J/(2M^2\,\rho)$. Esto hace más claro el significado físico de la constante de integración J, que está asociada a la rotación del dreibein (3.24) respecto del inercial (3.38). La velocidad del boost aumenta desde infinito hasta alcanzar su

máximo valor en $\rho = J/(2M^2)$, i.e. en $r = 0$ (ver Ec. (3.35)). Sin embargo, como consecuencia de la libertad de gauge, la geometría (3.37) con $Y = 1$ es ascéptica al valor de la constante de integración J. Por eso en la métrica cónica de RG uno puede fijar el gauge seleccionando $J = 0$, lo cual es equivalente a elegir el dreibein inercial que permite así extender el rango de la coordenada ρ desde infinito hasta cero. Debido a la invariancia frente a transformaciones del grupo local de lorentz, el dreibein inercial es tan apto para describir la geometría como cualquier otro relacionado con él mediante un boost o rotación local.

Contrariamente a lo recién mencionado, cualquier acción modificada con estructura teleparalela sólo será invariante ante transformaciones *globales* del vielbein, lo cual preanuncia un rol diferente para J en este tipo de teorías, y un significado geomérico más rico para la cota $\rho > J/(2M^2)$. De hecho, mientras que una transformación local de Lorentz del vielbein genera sólo un término de superficie en el invariante teleparalelo $\mathbb{T}$ -que carece de relevancia física en la acción-, tal término es crucial en las acciones deformadas (2.7) y (3.8). Esta pérdida de libertad de gauge significa sólamente que las deformaciones del tipo teleparalelo goviernan más grados de libertad dinámicos que el equivalente teleparalelo de la teoría de Einstein. Esto se traduce en que los parámetros que caracterizan la pérdida de invariancia de gauge, devienen constantes de integración asociados con los grados de libertad recuperados. Por este motivo, la familia de métricas que resuelven las ecuaciones de campo resulta ser más amplia. De este modo la constante de integración J cumple una función muy distinta en las deformaciones en ámbitos teleparalelos; como dreibeins con distintos valores de J no están conectados por la acción de elementos del grupo $SO(1,2)$, entonces ellos representan soluciones de la teoría genuinamente diferentes. En la métrica (3.37), J entra en escena produciendo una función Y dependiente de la variable radial, rotulando así distintos miembros de una familia de soluciones curvas. De hecho, de acuerdo a las ecuaciones (3.31)-(3.32), la función $Y(r)$ se obtiene de la ecuación cúbica

$$Y^2 - Y^3 = \frac{J^2}{4\,\lambda\, r^4} = \Delta. \tag{3.39}$$

En el régimen fuertemente deformado (i.e., para valores finitos de λ), la solución plana $Y = 1$ sólo puede ser obtenida cuando $J = 0$, de otra forma el espacio-tiempo es curvo. La fuente de curvatura radica, entonces, en la constante de integración J. En acuerdo con la Ec. (3.39), $J/\sqrt{|\lambda|}$ es la escala de longitud al cuadrado típica representativa de la deformación. Alternativamente, la curvatura espacial puede ser pensada como proveniente de un ángulo de déficit variable (sólo basta considerar el cambio de coordenadas $d\xi = Y(\rho)\, d\rho$ en (3.37)).

A modo sinóptico, entonces, podemos decir que la acción determinantal (3.8) no sólo contiene a la tríada de RG entre su espacio de soluciones, sino también una familia de espacio-tiempos curvos parametrizados por la constante J. Como

mostraremos en breve, el carácter curvo de las soluciones con $J \neq 0$ lleva a una remoción de la singularidad cónica y a su reemplazo por un círculo mínimo inalcanzable de radio $\rho = \rho_0 = J/(2M^2)$.

De las tres soluciones de la Ec. (3.39), nos quedaremos sólo con aquella que tienda a 1 cuando $\Delta \to 0$, puesto que es la que contiene el límite de RG y el correcto comportamiento en infinito. Los cálculos muestran que la solución es

$$\begin{aligned} 3\,Y &= 1 + \left(1 - \frac{27}{2}\,\Delta - \frac{3}{2}\sqrt{3\Delta\,(27\Delta - 4)}\right)^{-1/3} + \\ &+ \left(1 - \frac{27}{2}\,\Delta - \frac{3}{2}\sqrt{3\Delta\,(27\Delta - 4)}\right)^{1/3}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Si $\lambda < 0$ entonces $\Delta < 0$ y la función Y está definida para $0 < r < \infty$ (i.e., $J/(2M^2) < \rho < \infty$), así que nos concentraremos en el caso $\lambda < 0$ de ahora en más. Para caracterizar mejor a la geometría (3.37) es util tomar contacto con los invariantes geométricos

$$\begin{aligned} R &= \frac{2Y(\rho)'}{\rho Y(\rho)^3} = \frac{2Y(r)'}{rY(r)^3}, \\ (R)^2 &\equiv R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,R^2, \\ K &\equiv R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\,R_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta} = R^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Por supuesto, los invariantes tienden a cero cuando r o ρ van a infinito, puesto que el comportamiento asintótico de la teoría no es otro sino el de la RG. Notablemente los invariantes tienden a cero también cuando $r \to 0$ (o bien $\rho \to J/(2M^2)$). Esto es fácilmente comprobable a partir de la Ec. (3.39), que muestra que la función Y se comporta como $(-\Delta)^{1/3}$ para $\Delta \to \infty$, lo cual a su vez implica que

$$R \sim -\frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{2}\,|\lambda|\,r}{J^2}\right)^{2/3}, \quad si \quad r \to 0. \tag{3.42}$$

Así, la geometría (3.37) es asintóticamente (localmente) plana en ambos extremos del rango cubierto por la coordenada radial. En efecto, el espacio-tiempo en $\rho = \rho_0$, luego del cambio de coordenadas $d\xi = Y(\rho)\,d\rho$ en (3.37), puede verse como un cilindro. Esto es así puesto que el ángulo de déficit en $\rho = \rho_0$ es 2π, y el *wedge* abarca todo el espacio-tiempo. Luego de hacer las identificaciones, se tiene entonces un cilindro y ya no un cono.

La Figura (3.5) muestra el aspecto del escalar de curvatura $R(\rho)$, para $J/M = 1$ y distintos valores del parámetro de Born-Infeld $-\lambda = 15, 10, 5, 3, 1$ (desde abajo hacia arriba). La mínima curvatura es alcanzada en una posición ρ_{min} sólo dependiente de la combinación $\mathtt{J} = J/\sqrt{|\lambda|}$. En el régimen de alta energía $\mathtt{J} \approx 1$ los efectos de la curvatura pueden ser experimentados aun en zonas distantes del origen. En cambio, en tanto el régimen de baja energía es restituido ($\mathtt{J} << 1$), los efectos quedan confinados en un entorno de $\rho_0 = J/2M^2$ (i.e. $r = 0$). Finalmente, en el límite de RG $\lambda \to \infty$ (o equivalentemente $Y = 1$), no hay efectos en absoluto, puesto que el espacio-tiempo resulta plano.

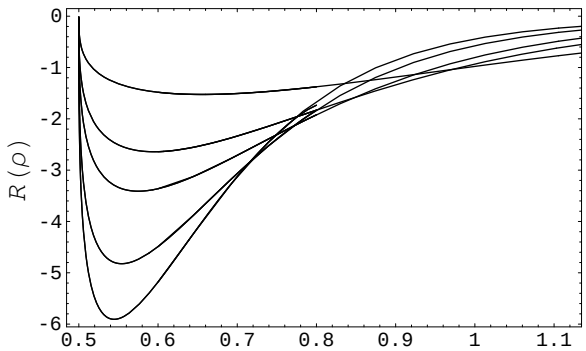

Figura 3.5: Curvatura escalar R como función de la coordenada radial ρ, para $J/M = 1$. De abajo a arriba: $-\lambda = 15, 10, 5, 3, 1$. Notar que el mínimo valor de la coordenada radial es en este caso $\rho_{min} = 1/2$

El valor límite de la coordenada radial indica que el espacio-tiempo termina en un círculo mínimo cuya longitud es $2\pi\, M\, \rho_0 = \pi\, J/M$. Sin embargo, esta frontera le requeriría a un observador un tiempo infinito para se alcanzada, lo cuál implica que la singularidad cónica existente en el límite de baja energía no está presente en la deformación; la singularidad cónica ha sido eliminada naturalmente. De hecho, los rayos de luz radiales satisfacen $dT = Y d\rho$, así que el tiempo coordenado T diverge cuando un rayo de luz se aproxima al círculo mínimo (porque la función Y hace lo propio). Por otro lado, como las componentes de la métrica (3.37) no dependen de T, se tiene que $p_T = g_{TT}\, p^T = p^T \propto dT/d\tau$ se conserva para las geodésicas. Esto significa que el tiempo propio τ de una partícula libremente gavitante es proporcional al tiempo coordenado T. Como las geodésicas temporales se encuentran siempre dentro de los conos de luz, entonces una partícula necesitará un tiempo propio infinito en alcanzar el círculo mínimo. De esta manera se muestra que la métrica (3.37) describe un espacio-tiempo geodésicamente completo, libre de singularidades.

En la Figura (3.6) hemos esquematizado el espacio-tiempo (3.37) con $T =$ *constante*, embebido en el espacio euclídeo tridimensional provisto de coordena-

das (ρ, θ, z). La estructura tipo *embudo* que aparece en la figura proviene de la función $z(\rho)$, que no es otra sino

$$z = \int \sqrt{Y^2(\rho) - 1}\ d\rho. \tag{3.43}$$

De esta manera, el intervalo Euclídeo sobre la curva que caracteriza al embudo es $ds^2 = dz^2 + d\rho^2 = Y^2 d\rho^2$. En la región asintótica (dominio de la RG), tenemos que $Y \to 1$ y entonces z se comporta en forma constante (en la figura hemos elegido $z = 0$ para esta región).

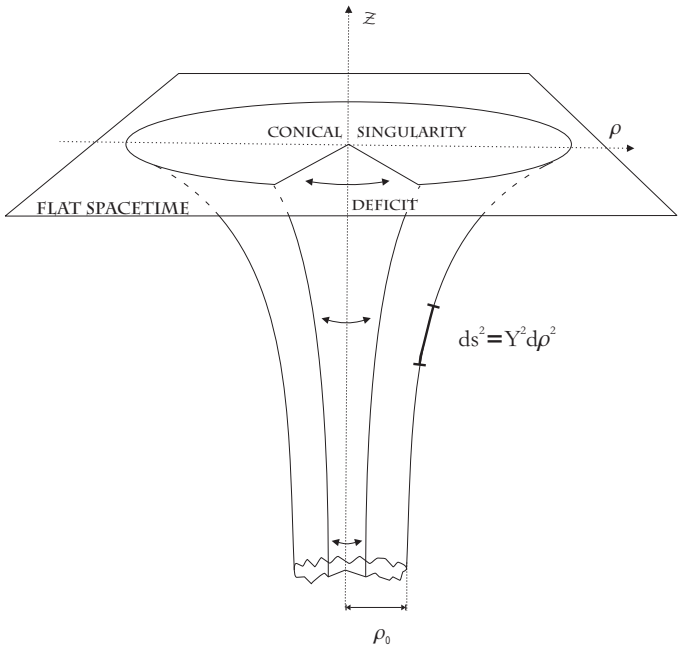

Figura 3.6: Representación esquemática del espacio-tiempo descripto por la métrica (3.37), visto inmerso en el espacio Euclídeo tridimensional.

La geometría recién descripta posee virtudes adicionales. No sólo es exitosa en lo concerniente a la suavización de la singularidad cónica de RG ($Y = 1$), sino que también resuelve otro aspecto inquietante de la teoría de Einstein en $D = 2 + 1$ que fue ya indicado en los trabajos pioneros en el tema [70], [94]; nos estamos refiriendo a la existencia de curvas temporales cerradas.

Las CTC's constituyen indicadores fidedignos de violaciones causales. En un espacio-tiempo provisto de CTC's un observador puede emprender a tiempo t_0 un viaje por el espacio, y retornar al punto de partida a un tiempo $t_1 < t_0$, es decir, encontrarse con el mismo antes de la partida. En la teoría de Einstein existen varios ejemplos de este tipo de comportamiento, basta mencionar el espacio tiempo

de Gödel [95] y la solución de Gott para dos cuerdas cósmicas en movimiento relativo [96].

En el caso concreto de la RG en tres dimensiones, las CTC's emergen cuando la coordenada t es considerada continua en vez de T. Esta condición fuerza un salto de $\Delta T = J\pi/M$ a lo largo del círculo ($\Delta\theta = 2\pi$). Mientras que una discontinuidad en θ (i.e., el ángulo de déficit) está relacionada con la masa m de la partícula puntual, un salto en la coordenada T dota a la solución con momento angular. Este es un hecho peculiar de la gravedad en tres dimensiones, sin análogo en su contraparte cuatridimensional; la partícula puntual posee momento angular, el cual debe ser visto como una suerte de *spin* o momento intrínseco. Sin embargo no está de más recalcar que esto no proviene de ningún efecto cuántico. Esto puede verse reemplazando la solución (3.37) con $Y = 1$ en las ecuaciones de Einstein tridimensionales. De ello resulta que la solución es consistente con un tensor energía-momento de la forma

$$T^{tt} \propto m\,\delta^2(\mathbf{r}), \quad T^{ti} \propto J\,\varepsilon^{ij}\,\partial_j\delta^2(\mathbf{r}),$$

esto es, el correspondiente a una partícula puntual masiva de masa m y momento angular J ubicada en el origen [70]. Con esto en mente, consideremos la curva cerrada con (t, ρ) constantes en el intervalo (3.34) con el cambio de coordenadas dado en (3.35). El intervalo queda

$$ds^2 = \left[\left(\frac{J}{2M^2}\right)^2 - \rho^2\right] M^2\, d\theta^2. \tag{3.44}$$

La hipersuperficie $\rho = J/(2M^2)$ constituye un horizonte cronológico u horizonte de Cauchy: para valores de ρ menores que $J/(2M^2)$, existen curvas temporales cerradas. De hecho, la Ec. (3.44) muestra que la curva cerrada en θ será una CTC si esto sucede. La RG permite esto puesto que $Y = 1$ y no existe una cota inferior para la coordenada ρ.

En la teoría determinantal de tipo BI, la existencia de un círculo mínimo prohíbe la formación de CTC's. Esto es así puesto que la posición del círculo mínimo ρ_0, inalcanzable para cualquier observador, coincide con la del horizonte cronológico de la teoría de Einstein. De esta forma vemos, entonces, que el mismo mecanismo responsable de la suavización de la singularidad cónica, provee una protección cronológica natural.

Antes de finalizar, destaquemos algunas propiedades adicionales de la métrica (3.45), o bien de la correspondiente a la cuerda cósmica dada por

$$ds^2 = dT^2 - Y(\rho)^2\, d\rho^2 - M^2\rho^2 d\theta^2 - dz^2. \tag{3.45}$$

La existencia del círculo mínimo $\rho = \rho_0$ impide un empaquetamiento de energía infinito. En una caracterización completa, la solución de vacío (3.45) debería

ser empalmada con una métrica interior representativa de la estructura de la cuerda. Sin embargo, este empalme debe suceder en valores de la coordenada radial mayores a ρ_0, lo que implica que la densidad de energía de la cuerda satura en un valor máximo. Esta propiedad no es compartida con la RG. En efecto, en la teoría de Einstein, la métrica interior de una cuerda infinita está dada por

$$ds^2 = dT^2 - {r_0}^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) - dz^2, \tag{3.46}$$

en donde la estructura interna de la cuerda está canalizada en el tensor energía momento cuyas únicas componentes no nulas son ${T_t}^t = {T_z}^z = -(1/8\pi {r_0}^2)$ [85]. Esto corresponde a una densidad de energía constante dada por $\varepsilon = (1/8\pi {r_0}^2)$ y una presión negativa en la dirección de la cuerda $p = -\varepsilon$. Notemos que a T y z constantes la métrica (3.46) representa un casquete esférico de radio r_0 que empalma para cualquier valor de r_0 con la métrica cónica (3.45) con $Y = 1$. De resultas, el radio de juntura puede tomar valores arbitrariamente pequeños, razón por la cual la energía compactada en la cuerda puede crecer indefinidamente. Independientemente de la forma específica de la métrica interior que pueda emerger por el proceso de deformación de Born-Infeld, la juntura entre las dos métricas está recluída a efectuarse en valores de la coordenada radial superiores a los del círculo mínimo.

3.3.3. Agujeros negros en tres dimensiones

Concluiremos este capítulo investigando ciertas propiedades adicionales que se desprenden de las ecuaciones de movimiento (3.27)-(3.29). Como fue discutido en la sección anterior, la teoría determinantal contiene a la RG como un caso especial cuando la carga asociada al momento angular, J, es nula. Sin embargo, ahora mostraremos que este hecho ya no es válido cuando se considera constante cosmológica. Para discutir este punto, notemos que la elección $X = 2$ en la Ec. (3.28) conduce a $J = 0$ aún cuando Z es distinta de cero. Esto es muy notable puesto que la elección lleva a una función N^θ no trivial a pesar que la constante de integración J sea nula. Es muy importante enfatizar que esta elección no respeta el límite de baja energía conducente a la RG personalizado en la métrica BTZ dada en la Ec. (3.25). En efecto, la variable $X = -(N^2)'/\lambda r Y^2$ para la métrica BTZ conduce a la cantidad

$$X = -\frac{2\Delta}{\lambda} - \frac{J^2}{2\lambda r^4},$$

que tiende a cero cuando $\lambda \to \infty$. La elección $X = 2$ se presenta entonces como una rama intrínseca de alta energía propia de la deformación determinantal.

Al escoger $X = 2$ las ecuaciones de campo (3.27)-(3.29) resultan

$$\begin{aligned} 4\,k\,Y &= \alpha - 1, \\ 2\,Z &= \alpha + 3, \end{aligned} \tag{3.47}$$

en donde se manifiesta la necesidad de tener una constante cosmológica no nula (i.e., $\alpha \neq 1$) para que la función Y no se anule. La constante de integración k puede ser escogida para que la función Y sea igual a la unidad; en este caso, la solución del sistema (3.47) nos lleva a las funciones

$$\begin{aligned} N(r)^2 &= \ell^{-2}\,r^2 - M, \\ N^\theta(r) &= \xi\,Log(r/r_0), \end{aligned} \tag{3.48}$$

siendo M y r_0 dos constantes de integración, y $\ell^{-2} = -\lambda$. Por otro lado, la constante ξ que hace su aparición en (3.48), está definida según

$$\xi = (-\ell^{-2}(\alpha + 3))^{1/2}.$$

De esta forma, arribamos a la métrica

$$ds^2 = \Big(\ell^{-2}\,r^2 - M\Big)\;dt^2 - \frac{dr^2}{\Big(\ell^{-2}\,r^2 - M\Big)} - r^2\Big(\xi\,Log(r/r_0)\;dt + d\theta\Big)^2. \tag{3.49}$$

Para una constante de BI negativa $\lambda = -\ell^{-2}$, la métrica (3.49) describe un agujero negro rotante si es que se verifica $\alpha + 3 < 0$. El agujero negro posee un sólo horizonte localizado en $r_{hor} = \ell\,M^{1/2}$, el cual constituye una hipersuperficie de Killing nula con un vector de Killing normal dado por

$$\overrightarrow{n} \propto \partial_t - N^\theta(r_{hor})\,\partial_\theta.$$

El efecto de la rotación queda impreso en la posición de la ergosfera, en donde $g_{tt} = N^2 - r^2(N^\theta)^2$ se anula. Para ser más preciso, la región en la cual la partícula puede moverse en ambas direcciones de la coordenada angular θ, es aquella en donde $g_{tt} > 0$. En el caso de la métrica (3.49) esto se traduce en la condición $\beta\,\log^2(\tilde{r}) < 1 - (\tilde{r}_{hor}/\tilde{r})^2$, en donde hemos definido $\beta = -(\alpha + 3) > 0$ y se ha introducido la coordenada radial adimensional $\tilde{r} = r/r_0$. La posición de la ergosfera cumple entonces la ecuación trascendente

$$\beta\log^2(\tilde{r}_{erg}) = 1 - \frac{(\tilde{r}_{hor})^2}{\tilde{r}^2_{erg}}. \tag{3.50}$$

Esta ecuación puede tener ninguna, una, o dos soluciones dependiendo de los parámetros involucrados. Analizaremos ahora el caso más importante, dado cuando

la constante de integración r_0 coincide con la posición del horizonte de eventos. En este caso puede verificarse que existe una solución de la Ec. (3.50) que coincide con la posición del horizonte; aquí se tiene entonces que $r_{erg} = r_{hor}$, lo cual implica que el agujero negro es extremal. También hay otra solución r^+_{erg} que tiende a infinito cuando $\beta \to 0$, y se aproxima a r_{hor} cuando $\beta \to \infty$. Estas características indican que existe una región "normal" –i.e., sin efectos de arrastre máximo– en $r_{hor} < r < r^+_{erg}$. Para $r > r^+_{erg}$ todo observador sucumbe a los efectos de la rotación, y no existe energía capaz de mantenerlo en una posición con θ constante.

La elección $r_0 = r_{hor}$ no es en modo alguno fortuita. De hecho es necesaria, además de los requerimientos ya mencionados, en orden que la métrica (3.49) sea, en efecto, un agujero negro. Esta afirmación se torna más clara cuando analizamos el movimiento de una partícula libremente gravitante en el contexto de la geometría descripta por el intervalo (3.49). Como p_t y p_θ son cantidades conservadas debido a que no hay dependencia explícita de estas variables en la métrica, entonces uno obtiene que para un movimiento inicialmente radial[9] (i.e. $p_\theta = 0$), la ecuación de la trayectoria es

$$\frac{d\,\theta}{d\,r} = \frac{E\,\xi\,Log(r/r_0)}{\ell^{-2}\,r^2 - M}\Big[M + E^2 - \ell^{-2}\,r^2\Big]^{-1/2},$$

en donde E es p_t dividido la masa de la partícula. Esta ecuación muestra con claridad que si se tiene $r_0 \neq r_{hor}$, la partícula efectuará infinitas vueltas a medida que se acerca al horizontes de eventos, y nunca lo alcanzará. Entonces la condición $r_0 = r_{hor}$ es necesaria para que las geodésicas puedan extenderse más allá del horizonte y definir así un agujero negro. Si este es el caso, tenemos que $(d\,\theta/d\,r)|_{r_{hor}} = \xi/(2M)$, relación que exhibe el rol interpretado por la constante de Born-Infeld λ a través de la cantidad ξ.

Para terminar con este punto, podemos calcular los invariantes asociados a la métrica (3.49). Una inspección directa nos muestra que el agujero negro es un espacio de curvatura no constante cuyos invariantes están dados por

$$\begin{aligned} R &= \frac{\ell^{-2}}{2}(\alpha + 15), \\ R^2_{\mu\nu} &= \frac{-3(3+\alpha)}{\ell^2\,r^2} + \frac{123 + 34\alpha + 3\alpha^2}{4\ell^4}, \\ K &= \frac{-18(3+\alpha)}{\ell^2\,r^2} + \frac{267 + 106\alpha + 11\alpha^2}{4\ell^4}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Es importante notar que, nuevamente, los efectos no triviales en la curvatura provienen de la presencia de momento angular, codificado ahora en la constante

[9]Para que el movimiento pueda ser sólo radial, se debe verificar $r_{inic} < r_{erg}$.

ξ. De hecho, al tomar $\alpha = -3$, los invariantes acusan un espacio de curvatura constante. Sin embargo, $\alpha = -3$ implica $\xi = 0$, lo cual elimina la componente fuera de la diagonal representativa de la rotación en la métrica (3.49). La métrica que así se obtiene es simplemente el agujero negro BTZ no rotante con constante cosmológica dada por $\lambda = -\ell^{-2}$. Exceptuando este caso, las Ecs. (3.51) muestran que el horizonte de eventos esconde una singularidad geométrica en $r = 0$. Cabe mencionar que para que la singularidad no sea desnuda, el parámetro de Born-Infeld debe ser negativo, como se ha asumido en toda la sección (3.3.2).

En vistas a concluir con este capítulo, mostremos que la solución general del sistema (3.27)-(3.29) para $J = 0$ con el correcto límite da baja energía y en presencia de constante cosmológica, está dada por el agujero negro BTZ no rotante. Como $J = 0$ implica $Z = 0$ en la Ec. (3.29) ($J = 0$ también se cumple para $X = 2$, pero ese caso fue tratado en los párrafos precedentes), entonces se cumple que $\mathcal{U}(X, Z) = (1 - X)^2$. De esta forma, la solución del sistema está dada por

$$\begin{aligned} Y &= 1 \\ X &= \{1,\ \mp\frac{2\Lambda}{\lambda}\} = \{1,\ -1 \mp \alpha\}, \end{aligned}$$

la cual conduce a la métrica

$$ds^2 = (\ell^{-2}r^2 - M)dt^2 - \frac{dr^2}{(\ell^{-2}r^2 - M)} - r^2 d\theta^2, \tag{3.52}$$

con las constantes cosmológicas efectivas dadas por

$$\begin{aligned} \ell^{-2} &= -\lambda/2 \\ \ell_{\pm}^{-2} &= (1 \pm \alpha)\lambda/2. \end{aligned}$$

Si ℓ^{-2} y M son positivas, entonces la métrica (3.52) corresponde al agujero negro BTZ sin rotación. La rama proveniente de la constante cosmológica $\ell^{-2} = -\lambda/2$ es la misma que emerge de la métrica (3.49) con $\xi = 0$, la cual pertenece a la familia de geometrías desconectadas del límite de baja energía dado por la RG.

Observaciones conclusivas

En este trabajo se han estudiado dos tipos de teorías de gravedad con estructura teleparalela con el objeto de ofrecer un tratamiento más adecuado de las singularidades presentes en la teoría de Einstein. Ambas teorías toman como punto de partida la versión teleparalela de la RG. Este enfoque tiene la particular ventaja de proveer marcos teóricos representados por acciones construídas con derivadas primeras del vielbein e^a a través de combinaciones cuadráticas del tensor de torsión $T^a = de^a$. De esta propiedad se sigue que cualquier deformación de la gravedad de Einstein en este contexto conducirá a ecuaciones dinámicas de segundo orden en las derivadas del vielbein. Esta virtud es muy importante a la hora de buscar soluciones exactas de las ecuaciones de campo que permitan esclarecer el significado físico de las cantidades geométricas involucradas. Por otro lado, el precio a pagar por esta bondad es la pérdida de invariancia local de Lorentz. Por cierto, al efectuar una rotación o boost local a una determinada solución de las ecuaciones de campo, se obtiene otro vielbein que ya no verifica las ecuaciones dinámicas. Esto es debido a que la teoría escoge frames preferenciales que constituyen las curvas autoparalelas de la variedad en cuestión. La ambiguedad con que las teorías efectúan esta elección alcanza sólo a transformaciones globales de Lorentz, que son aquellas que dejan invariante la noción de paralelismo establecida por la base e^a. La pérdida de invariancia local de Lorentz y la consiguiente elección de frames preferenciales no deben ser vistos como un punto débil de las teorías aquí expuestas. Si bien el entendimiento de la dinámica del campo gravitatorio en las escalas cercanas a la longitud de Planck pertenece al dominio de la física del futuro, es presumible que la morfología del espacio-tiempo en la era de Planck se delate en una suerte de granulación. La existencia de esta estructura granular determinaría por sí misma un sistema de referencia preferencial, en donde ℓ_p oficiaría de distancia típica entre los gránulos isotrópicamente distribuídos. En las deformaciones ultravioletas de tipo Born-Infeld tratadas en los capítulos precedentes, la ruptura de invariancia local se produce en longitudes del orden de $\lambda^{-1/2}$. Si bien el valor de la constante de Born-Infeld no es una predicción de la teoría, su valor ha de ser enorme para que los esquemas deformados no modifiquen los bien establecidos datos provenientes de la cosmología observa-

cional. Esto induce a pensar que la ruptura de la invariancia local provista por la nueva constante λ resulta natural, sobre todo si consideramos que la materia no fermiónica es incapaz de censar los efectos provenientes de la ruptura de dicha simetría, puesto que su acople en la teoría se efectúa vía la métrica (i.e., por medio de la combinación cuadrática $\eta_{ab}\, e^a\, e^b$) y no mediante la tétrada e^a solamente.

El primer esquema de tipo Born-Infeld fue expuesto en detalle en el capítulo 2. Esta teoría se presenta como un caso particular dentro del conjunto de teorías conocidas como $f(T)$, a las que esta Tesis dio origen. Las teorías $f(T)$ poseen varias ventajas respecto a las análogas en el espacio de Riemann, llamadas $f(R)$. Además de la ya mencionada propiedad respecto del orden de las ecuaciones de campo, las teorías $f(T)$ permiten modificar soluciones de las ecuaciones de Einstein caracterizadas por fuentes con un tensor energía-momento sin traza, como las cosmologías de Friedmann-Robertson-Walker dominadas por un fluido de radiación. Mientras que los esquemas ultravioletas de tipo $f(R)$ son incapaces de modificar las soluciones de RG que lleven a un escalar de Ricci nulo, sus contrapartes en el espacio de Weitzenböck son exitosas en esta empresa. El ejemplo de la teoría **BI0** es contundente en ese sentido, puesto que exhibe explícitamente una solución exacta de las ecuaciones particularizadas a un espacio-tiempo isótropo y homogéneo de sección espacial plana, apto para la descripción del Universo a gran escala. La solución, a diferencia de la dada en RG, es libre de la singularidad del Big Bang, ya que el parámetro de Hubble satura para corrimientos al rojo crecientes. Esta saturación proviene del hecho que el factor de escala se comporta en forma exponencial para tiempos remotos, ofreciendo así un ámbito propicio para una etapa inflacionaria de carácter púramente geométrico. El esquema **BI0** es capaz de ofrecer un escenario cosmológico con $K = 0$ libre de singularidades y con un comportamiento inflacionario natural.

La solución cosmológica para Universos de FRW cerrados también fue objeto de estudio en el capítulo 2. La caracterización de este tipo de solución resultó muy importante pues motivó el estudio de los frames no triviales que emergen como producto de la carencia de invariancia local de Lorentz. En la sección 2.3.2 se ha mostrado que la solución comienza con una singularidad a tiempo nulo, aunque el comportamiento inicial del factor de escala difiere sensiblemente del de la RG. En efecto, la solución acusa nuevamente una etapa inicial acelerada de carácter geométrico que está ausente en la RG. El caso hiperbólico (i.e., $K = -1$) deviene en una solución físicamente inadmisible debido a la presencia del factor de escala mínimo dado por $a_{min} = \lambda^{-1/2}$, a partir del cual el Universo comenzó su expansión. Sin embargo, este estado inicial sucedió en un tiempo pasado finito.

En el contexto de la gravedad en tres dimensiones, se ha obtenido la versión deformada del agujero negro BTZ. El único efecto de la deformación es simplemente introducir un corrimiento en la constante cosmológica, en la manera $\Lambda \to \widetilde{\Lambda} = \Lambda(1 - 4\Lambda/\lambda)$. Esto sucede porque el invariante de Weitzenböck es

constante para esta geometría, e igual a -2Λ. De esta forma, el rol jugado por el parámetro de Born-Infeld es sólo participar en la redefinición de la constante cosmológica. En vacío, y sin constante cosmológica, el invariate es nulo, y no hay deformación alguna respecto de la RG. Esto es lo que sucede con la cuerda cósmica en la teoría **BI0**. Debido a que la métrica exterior es una solución de vacío y con $\Lambda = 0$, la singularidad cónica y las curvas temporales cerradas siguen estando presentes en el esquema **BI0**.

Siguiendo estas líneas, sería justo indagar sobre el destino de la solución esféricamente simétrica en vacío proveniente de la teoría **BI0**, en dimensión 4. Cálculos preliminares no informados en esta Tesis, permiten asegurar que, en efecto, la singularidad en $r = 0$ no sólo no es removida de la teoría **BI0**, sino que la solución está dada por la métrica de Schwarzschild. De hecho, esta es una característica general compartida por todas las teorías $f(T)$ que modifiquen a la RG en el límite de alta energía, i.e., cuando se verifica $f(0) = 0$, y $f'(0) = 1$. El argumento que permite concluir esto se basa en encontrar una transformación de Lorentz local particular, que aplicada a la tétrada diagonal de Schwarzschild, conduzca a un valor nulo del invariante de Weitzenböck, con lo cual la métrica resultante es la misma que la de la teoría sin deformar. Sin embargo, el argumento es válido sólo cuando se consideran deformaciones ultravioletas, y nada se puede asegurar para otro tipo de funciones f. Esto deja el camino abierto para tentar modificaciones de la RG que operen en el régimen de baja energía, y que puedan describir la presencia de nueva física a escalas del sistema solar. Estos aspectos serán tratados con detalle en una publicación venidera.

Finalmente, hemos discutido en el capítulo 3 la segunda propuesta tendiente a la eliminación de singularidades. En este caso se ha construído una acción determinantal en el espacio de Weitzenböck cuya estructura semeja más a la construcción original de Born-Infeld. Esta teoría no se encuentra dentro del marco conceptual de los esquemas de tipo $f(T)$, y difiere radicalmente de **BI0** aun al orden λ^{-1} en la expansión de los correspondientes Lagrangianos. Debido a la estructura determinantal, esta teoría es mucho más rica y efectiva en la curación de los efectos singulares de la teoría de Einstein, como se pudo concluir de los ejemplos tratados. En primer lugar, estrictamente hablando, la acción determinantal incluye una familia de teorías parametrizadas por las constantes adimensionales A y B intervinientes en la acción (3.8), cuyos comportamientos se presentan bien disímiles. En el ámbito cosmológico con $K = 0$, la teoría proveniente de la condición $2A + B = 0$ es exactamente la misma que la tratada en el contexto dado por **BI0**. Sin embargo, la equivalencia se da sólo a ese nivel, puesto que al considerar $K = -1, 1$ las soluciones difieren considerablemente. En particular, la teoría determinantal ofrece una remoción de la singularidad inicial también para los Universos curvos, por lo que sale victoriosa en donde el esquema **BI0** resultó fútil. Un análisis más acabado de la dinámica de los modelos cosmológi-

cos en la teoría determinantal constituirá el material para una publicación futura [105].

Otros estados cosmológicos provenientes de distintas elecciones de los parámetros, como $A = B$, no poseen una interpretación física tan clara y deben ser sometidos a un análisis más profundo. Sin embargo, como fue establecido en el apartado (3.2.1), la teoría parece censar el colapso de la descripción clásica imponiendo un mínimo factor de escala (dado en la Ec. (3.16)) en donde la densidad de energía alcanza su valor máximo dado por $\rho_{max} = \lambda/48\pi G$, independientemente de la calidad de fluido que llena el Universo. No obstante, los invariantes geométricos devienen infinitos cuando $a(t) = a_{min}$, por lo que no puede considerarse que el factor de escala efectúe un *bounce* en a_{min}. De hecho, como muestra la ecuación general (3.10), no hay ningún valor no nulo de la densidad que conduzca a un *bounce* del factor de escala.

A diferencia de la teoría **BI0**, el esquema determinantal es exitoso en la regularización de singularidades de vacío. La solución esféricamente simétrica, y la posible ausencia de singularidad que la teoría (3.8) promete en ese contexto, será estudiada detalladamente [10].

Los efectos de regularización en vacío fueron ilustrados en relación con la solución de cuerda cósmica tratada en el apartado (3.3.2), correspondiente a la elección $B = 0$ en la acción (3.8). El efecto proveniente de la estructura determinantal propició una métrica deformada que dio lugar a un espacio-tiempo de curvatura no constante dependiente del momento angular J. Curiosamente, el espacio-tiempo termina en un círculo mínimo ubicado en un valor de la coordenada radial dado por $\rho_0 = J/2M^2$. A menos que J sea cero, la solución está libre de la singularidad cónica característica de la gravedad de Einstein en tres dimensiones. El círculo mínimo coincide con el horizonte cronológico de la solución de Deser, Jackiw y t´Hooft [70], atravesado el cual existen curvas temporales cerradas. Sin embargo, en la solución regular, el círculo mínimo no sólo no puede ser atravesado, sino que tampoco puede ser alcanzado en un tiempo propio finito. De esta forma, la cronología queda protegida por el mismo mecanismo que elimina la singularidad cónica. Finalmente, es importante mencionar que la solución, a pesar de poseer curvatura no constante, es asintóticamente plana en ambos extremos de la coordenada radial. Cuando $\rho \to \infty$ la solución es indistinguible de la geometría cónica propia de la RG, y cuando $\rho \to \rho_0$ la métrica se convierte en la de un cilindro, puesto que el ángulo de déficit se aproxima a 2π en ese límite. En este contexto sería interesante explorar métricas de este tipo para otra elección de las constantes A y B, por ejemplo para la combinación $2A+B = 0$, que ha conducido a las soluciones cosmológicas regulares. Asimismo, sería muy conveniente tratar

[10] De hecho, la teoría (3.8) parece ser, al presente, la unica teoría capaz de conducir a una solución de agujero negro regular en *vacío*.

de caracterizar cómo se vería modificada la métrica BTZ rotante en el contexto de la teoría determinantal. Esto será materia de investigaciones futuras.

La teoría determinantal posee soluciones de agujero negro en el vacío tridimensional, como lo atestigua la métrica (3.49). Es necesario enfatizar que el agujero negro existe sólo si $\alpha \leq -3$, y conduce a la métrica BTZ sin rotación y con constante cosmológica $\ell_+^{-2} = -\lambda$ cuando $\alpha = -3$. Sin embargo, exceptuando este caso límite, la métrica (3.49) pertenece a una rama aislada de soluciones en el espacio de parámetros M, J, λ. Por ejemplo, tomemos nota que el campo (3.49) no puede ser obtenido de (3.34) simplemente anulando la carga J. Esto es así puesto que la primer solución presupone $X = -2$ y $Z \neq -X$ (esto es, $\alpha \neq -1$), mientras que la segunda, contrariamente, requiere $Z = -X$ (i.e. $\alpha = -1$), como es claro de las ecuaciones (3.47) y (3.32) respectivamente. Adicionalmente, la métrica (3.49) no posee límite de baja energía, en el sentido que $\lambda \to \infty$ carece de significado; pertenece a una rama que es intrínsecamente de alta energía, desconectada de otros estados. Por otro lado, la métrica (3.49) describe un agujero negro sólo si la constante de integración r_0 es escogida según $r_0 = r^0 = \ell M^{1/2}$, pues las geodésicas pueden extenderse más allá del horizonte si se efectúa esta elección. Los efectos de la rotación no estan codificados en la carga J, que es nula, sino en la constante $\xi = \ell^{-1}\beta^{1/2}$, lo cual muestra el doble rol interpretado por el parámetro de BI, oficiando de constante cosmológica ℓ_+^{-2} y de momento angular efectivo proporcional a ℓ^{-1}. Seguramente tendremos oportunidad de reincidir en la profundización de este tipo de soluciones.

Apéndice A

La electrodinámica de Born-Infeld

Los trabajos de Born e Infeld datan de la década del 30. La motivación subyacente a tales ideas reposa en la erradicación de la autoenergía infinita que posee la partícula puntual cargada en la teoría de Maxwell, situación poco satisfactoria desde el punto de vista físico. Sin embargo, la electrodinámica Maxwelliana constituye probablemente el cuerpo conceptual más consistente y exitoso de toda la física. Estaba claro, pues, que ulteriores modificaciones de dicha teoría debían descansar sobre sólidos cimientos.

Una de las pistas hacia la electrodinámica no lineal de Born-Infeld fue la relatividad especial, que por aquel entonces ya gozaba de la solidez necesaria. En efecto, si sustituimos el lagrangiano clásico $L_C = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ por el relativista $L_{RE} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}}$, nos abrimos camino al vasto mundo relativista donde la velocidad de la partícula permanece acotada superiormente por el valor de la constante c. Este hecho sugirió a Born e Infeld una manera de modificar el lagrangiano de Maxwell $L_{Max} \propto (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \equiv 2s$ en orden de obtener una suerte de *campo máximo* que impidiera la divergencia de la autoenergía de la partícula. Para eso consideraron la modificación [97, 98]

$$L_{Max} \to L_{BI0} = -b^2\Big[\sqrt{1-\frac{2s}{b^2}} - 1\Big], \tag{A.1}$$

en donde se introdujo una nueva constante universal b que jugará el rol de cutoff ultravioleta, puesto que en una situación puramente electrostática se tiene siempre que $\mathbf{E} \leq b$. Por supuesto, el límite de campo débil del Lagrangiano (A.1) está dado por la teoría de Maxwell, ya que

$$L_{BI0} \approx -b^2[1-\frac{s}{b^2}] + b^2 + \mathcal{O}(s^2) = s + \mathcal{O}(s^2).$$

Una versión extendida del lagrangiano (A.1) fue considerada luego por los mismos autores en las Refs. [99, 100, 101]. En esta expresión interviene también el pseudo invariante de campo $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y la densidad Lagrangiana para el campo electromagnético luce

$$L_{BIE} = -b^2 \Big[\sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} - 1 \Big]. \tag{A.2}$$

Para campos débiles, en donde s y p son comparables y mucho más chicos que b^2, el límite de baja energía permanece inalterado e igual a la teoría de Maxwell. Adicionalmente, es claro que ambos Lagrangianos, Eqs. (A.1) y (A.2), son coincidentes en problemas en donde sólo uno de los dos campos sea no nulo, o bien cuando ambos invariantes sean nulos, como en el caso de las ondas planas, en donde $s = p = 0$. En otro orden de cosas, los Lagrangianos de Maxwell y Born-Infeld, han probado ser los únicos lagrangianos para campos no masivos de spin 1 que conducen a una propagación causal. Asimismo, entre todas las teorías no lineales del campo electromagnético, la de Born-Infeld es la única en la cual la velocidad de la luz no depende del estado de polarización (ausencia de birrefringencia), compartiendo esta propiedad con la teoría de Maxwell.

La expresión (A.2) puede ser escrita en forma más compacta y de una manera más elegante. El Lagrangiano de Born-Infeld adopta la forma *determinantal*

$$L_{BIE} = -b^2 \Big[\sqrt{-det\Big(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\Big)} - 1 \Big], \tag{A.3}$$

en donde se ha introducido el tensor de campo electromagnético de Maxwel, cuyas componentes están dadas de la forma usual por $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. En términos de este tensor, los invariantes de campo quedan expresados según $s = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4$ y $p = -\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4$, en donde se ha utilizado el tensor *dual* definido por $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2$. Amén de sus bondades estéticas, la forma (A.3) del Lagrangiano de BI permite extender la teoría a dimensiones arbitrarias y además ofrece los simientos necesarios para sustentar la teoría, epistemológicamente hablando. En efecto, como fue discutido en el capítulo (3.1), las raices cuadradas de determinates de tensores de segundo rango encarnan el procedimiento canónico para la construcción de densidades tensoriales.

Las ecuaciones de campo provenientes del Lagrangiano de BI (A.3) son

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu}, \quad \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{A.4}$$

en donde el tensor $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ está definido por

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\nu} - \frac{p}{b^2}\tilde{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{1 - 2s/b^2 - p^2/b^4}}.$$

Como fue ya mencionado, la presencia de la constante b impone un valor máximo para el campo eléctrico, lo que a su vez signa el destino de la autoenergía de la carga puntual, la cual permanece acotada. En lo que sigue mostraremos explícitamente esta propiedad. Para eso, tomemos $\mathbf{B} = 0$ (i.e. $p = 0$) en (A.2), lo que nos lleva a la densidad

$$L_{BI0} = -b^2\Big[\sqrt{1 - \mathbf{E}^2/b^2} - 1\Big]. \tag{A.5}$$

Como primer paso calculemos el vector de desplazamiento eléctrico $\mathbf{D} = \partial L_{BI0}/\partial \mathbf{E}$, cuya expresión es

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - \mathbf{E}^2/b^2}}.$$

De esta ecuación queda claro que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ son paralelos. Invirtiendo esta ecuación es fácil ver que

$$\mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{D}^2}{1 + \mathbf{D}^2/b^2}, \tag{A.6}$$

relación que enseña que el campo eléctrico está acotado tanto por el parámetro de BI, como por la magnitud del campo $\mathbf{D}$, esto es

$$|\mathbf{E}| \leq b, \quad |\mathbf{E}| \leq |\mathbf{D}|.$$

Nótese, sin embargo, que el campo $\mathbf{D}$ no está acotado en lo absoluto; de hecho, se requiere $|\mathbf{D}| \to \infty$ para que $|\mathbf{E}| \to b$.

De la ecuación (A.6) es posible despejar la relación $\mathbf{E}(\mathbf{D})$, la cual, en virtud del paralelismo entre ambos campos, no es otra sino

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{1 + \mathbf{D}^2/b^2}}. \tag{A.7}$$

Como ingrediente final para el cálculo, necesitamos la expresión del lagrangiano en términos del campo $\mathbf{D}$. Haciendo uso de las expresiones (A.5) y (A.7), un cómputo directo nos lleva a

$$L_{BI0} = \frac{-b^2}{\sqrt{1 + \mathbf{D}^2/b^2}} + b^2.$$

El Hamiltoniano del sistema es, entonces

$$\mathcal{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - L_{BI0} = b^2\sqrt{1 + \mathbf{D}^2/b^2} - b^2, \tag{A.8}$$

y representa la densidad de energía del sistema cuando $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$. Procedamos ahora a hacer el cálculo explícito de la autoenergía de una carga puntual en

el espacio-tiempo cuatridimensional de Minkowski. Recordemos que en la teoría de Maxwell la divergencia de la autoenergía de la carga puntual proviene del hecho que la densidad de energía es proporcional a $\mathbf{E}^2$, y el campo eléctrico va como r^{-2}, en donde r es la distancia a la carga. Como resultado, tenemos que $\int dx^3\,\mathbf{E}^2 \sim \int dr/r^2$, y esta cantidad deviene divergente para pequeños valores de la coordenada radial. En la teoría de Born-Infeld, también encontramos que $|\mathbf{D}| \sim r^{-2}$, pero para grandes valores de $|\mathbf{D}|$, la densidad de energía (A.8) se comporta como

$$\mathcal{H} = b\,|\mathbf{D}| \equiv E_{crit}|\mathbf{D}|, \quad |\mathbf{D}| \to \infty.$$

De esta forma, la energía de BI crece linealmente con $|\mathbf{D}|$, cuando $|\mathbf{D}| \to \infty$. Esto implica que $\int d^3x\, E_{crit}|\mathbf{D}| \sim \int d^3x\, r^{-2} \sim \int dr$, la cual es convergente. Debido a la naturaleza electroestática del problema, las ecuaciones de movimiento (A.4) no son otras sino

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Si consideramos un carga Q, la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ puede ser integrada sobre un volumen acotado por una esfera de radio r, y dado que el campo $\mathbf{D}$ es radial debido a la simetría esférica, tenemos

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r},$$

y además se verifica trivialmente la irrotacionalidad del campo $\mathbf{E}$. Esta ultima ecuación, junto con (A.8), nos permite evaluar la energía de la carga puntual Q, a saber

$$U_Q = \int d^3x\,\mathcal{H} = 4\pi b \int_0^\infty dr\,\Big(\sqrt{r^4 + (Q/4\pi b)^2} - r^2\Big).$$

Luego del cambio de variable $r = x\sqrt{Q/4\pi b}$ la integral se lleva a la forma

$$U_Q = \int_0^\infty dx\,(\sqrt{1+x^4} - x^2),$$

la cual es convergente. De hecho, tenemos

$$\int_0^\infty dx\,(\sqrt{1+x^4} - x^2) = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{6\sqrt{\pi}} \simeq 1{,}236,$$

en donde la función gama se define según

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, exp[-t]\, t^{x-1}, \quad x > 0.$$

De este modo, la expresión final para la energía se remite a

$$U_Q \simeq \frac{1}{4\pi}(4{,}382)b^{1/2}Q^{3/2}.$$

Es menester mencionar que las soluciones de tipo onda plana propias de la teoría de Maxwell no son deformadas por el procedimiento de BI. Esto es así puesto que ambos invariantes, s y p, son nulos, con lo cual el parámetro de BI entra en el Lagrangiano de manera efímera. Sin embargo, la no linealidad característica de la teoría lleva a interacciones no triviales entre ondas planas [102], o entre ondas y campos estáticos [103], [104].

Bibliografía

[1] Para un resumen de las teorías de gauge gravitatorias, en particular las que conciernen al grupo traslacional, ver F. Gronwald and F. Hehl, *On the gauge aspects of gravity*, Proc. of the 14th Course of Cosmology and Gravitation, P.G Bergmann, V. de Sabatta and H.J. Treder eds, (Word Scientific, Singapore, 1996).

[2] R. Weitzenböck, *Invarianten Theorie*, (Nordhoff, Groningen, 1923).

[3] A. Einstein, *Riemannian Geometry with Maintaining the Notion of Distant Parallelism.* (1928); *Unified Field Theory based on Riemannian Metrics and distant Parallelism.* (1930). Traducción del alemán disponible en $www.lrz-muenchen.de/aunzicker/ae1930.html$.

[4] C. Møller, K. Dan. Videsk. Selsk. Mat. Fys. Skr. **1**, 10 (1961).

[5] C. Pellegrini y J. Plebanski, K. Dan. Videsk. Selsk. Mat. Fys. Skr. **2**, 4 (1962).

[6] K. Hayashi y T. Nakano, *Extended Translation Invariance and Associated Gauge Fields*, Prog. Theor. Phys. **38**, 491 (1967);

[7] K. Hayashi, *Minimal and nonminimal gravitational interactions, and the asymmetric energy momentum tensor*, Gen. Rel. Grav. **4**, 1 (1973).

[8] K. Hayashi, *Gravitational interaction of the proton and electron: the possible existence of a massless scalar particle*, Nuovo Cimento **A16**, 639 (1973).

[9] K. Hayashi, *The gauge theory of the translational group and underlying geometry*, Phys. Lett. **B69**, (1977) 441.

[10] J.G. Pereira, T. Vargas y C.M. Zhang, *Axial-vector torsion and the teleparallel Kerr spacetime*, Class. Quant. Grav. **18**, (2001) 833.

[11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, 1972).

[12] K. Hayashi y T. Shirafuji, *New General Relativity*, Phys. Rev. **D19**, (1979) 3524.

[13] J.W. Maluf, J.F. da Rocha-Neto, T.M.L. Toribio y K.H. Castello-Branco, *Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry*, Phys. Rev. **D65**, (2002) 124001.

[14] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke y Y. Ne´eman, *Metric-Affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors and breaking of dilaton invariance*, Phys. Rep. **258**, (1995) 1.

[15] J.W. Maluf y J.F. da Rocha-Neto, *Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry*, Phys. Rev. **D64**, (2001) 084014.

[16] W. Kopczyński, *Problems with metric-teleparallel theories of gravitation*, J. Phys. **A15** (1982) 493.

[17] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature*, (Springer, 1997).

[18] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and Its Generalizations*, J. Math. Phys. **12** (1971) 498.

[19] V. A. Kostelecký, N. Russel and J. D. Tasson, *Constraints on torsion from Lorentz violations*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 111102.

[20] F. Canè, D. Bear, D. F. Phillips, M. S. Rosen, C. L. Smallwood, R. E. Stoner y R. L. Walsworth, *Bound on Lorentz and CPT violating boost effects for the neutron*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 230801.

[21] B. R. Heckel, C. E. Cramer, T.S. Cook, E. G. Adelberger, S. Schlamminger y U. Schmidt, *New CP-violation and preferred-frame tests with polarized electrons*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 021603.

[22] M. Das, S. Mohanty y A. R. Prasanna, *Constraints on background torsion from birefringence of CMB polarization*, [arXiv:0908.6629 (astro-ph)].

[23] P. Teyssandier y Ph. Tourrenc, *The Cauchy problem for the $R+R^2$ theories of gravity without torsion*, J. Math. Phys. **24** (1983) 2793.

[24] B. Whitt, *Fourth order gravity as General Relativity plus matter*, Phys. Lett. **B145** (1984) 176.

[25] J.D. Barrow y S. Cotsakis, *Inflation and the conformal structure of higher-order gravity theories*, Phys. Lett. **B214** (1988) 515.

[26] K. Maeda, *Towards the Einstein-Hilbert action via conformal transformation*, Phys. Rev. **D39** (1989) 3159.

[27] T. Chiba, $1/R$ *gravity and the scalar-tensor gravity*, Phys. Lett. **B575** (2003) 1.

[28] V.H. Hamity y D.E. Barraco, *First order formalism of $f(R)$ gravity*, Gen. Rel. Grav. **25** (1993) 461.

[29] D.N. Vollick, $1/R$ *curvature corrections as the source of the cosmological acceleration*, Phys. Rev. **D68** (2003) 063510.

[30] G.J. Olmo, *Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism*, Phys. Rev. **D72** (2005) 083505.

[31] C.H. Brans, *The roots of scalar-tensor theory: an approximate history* [arXiv:gr-qc/0506063].

[32] G.J. Olmo, *Violation of the Equivalence Principle in modified theories of gravity*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 061101.

[33] T. Clifton, *Spherically symmetric solutions to fourth-order theories of gravity*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 7445.

[34] S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden y M.S. Turner, *Is cosmic speed up due to new gravitational physics?*, Phys. Rev. **D70** (2004) 043528.

[35] G.J. Olmo, *The gravity Lagrangian according to solar system experiments*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 261102.

[36] A.E. Domínguez y D.E. Barraco, *Newtonian limit of the singular $f(R)$ gravity in the Palatini formalism*, Phys. Rev. **D70** (2004) 043505.

[37] R. Ferraro y F. Fiorini, *Modified teleparallel gravity: inflation without an inflaton*, Phys. Rev. **D75** (2007) 084031.

[38] R. Ferraro y F. Fiorini, *Born-Infeld gravity in Weitzenböck spacetime*, Phys. Rev. **D78** (2008) 124019.

[39] F. Fiorini y R. Ferraro, *A type of Born-Infeld regular gravity and its cosmological consequences*, Int. J. Mod. Phys. **A24** (2009) 1686.

[40] G. Bengochea y R. Ferraro, *Dark torsion as the cosmic speed up*, Phys. Rev. **D79** (2009) 124019.

[41] E. V. Linder, *Einstein's Other Gravity and the Acceleration of the Universe*, Phys. Rev. **D81** (2010) 127301.

[42] P. Wu y H. Yu, *The dynamical behavior of $f(T)$ theory*, Phys. Lett. **B692** (2010) 176.

[43] P. Wu y H. Yu, *$f(T)$ models with phantom divide line crossing*, [arXiv:1008.3669].

[44] P. Wu y H. Yu, *Observational constraints on $f(T)$ theory*, Phys. Lett. **B693** (2010) 415.

[45] K. K. Kerzhavov, S. R. Myrzakul, I. I. Kulnazarov y R. Myrzakulov, *Accelerating cosmology in $F(T)$ gravity with scalar field*, [arXiv:1006.3879].

[46] B. Li, T. P. Sotiriou and J. D. Barrow, *$f(T)$ gravity and local Lorentz invariance*, [arXiv:1010.1041].

[47] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, *Generalizations of teleparallel gravity and local Lorentz symmetry*, [arXiv:1012.4039].

[48] G. Bengochea, *Observational information for $f(T)$ theories and Dark Torsion*, Phys. Lett. **B695** (2011) 405.

[49] J. B. Dent, S. Dutta y E. Saridakis, *$f(T)$ gravity mimicking dynamical dark energy. Background and perturbation analysis*, [arXiv:1010.2215]. Aceptado en JCAP (2011).

[50] J. B. Dent, S. Dutta y E. Saridakis, *Cosmological perturbatons in $f(T)$ gravity*, Phys. Rev. **D83** (2011) 023508.

[51] A.A. Tseytlin, *Born-Infeld action, supersymmetry and string theory*, [arXiv:hep-th/9908105].

[52] E. S. Fradkin y A. A. Tseytlin, *Non linear electrodynamics from quantized strings*, Phys. Lett. **B163** (1985) 123.

[53] R. R. Metsaev, M. A. Rakhmanov y A. A. Tseytlin, *The Born-Infeld action as the effective action in the open superstring theory*, Phys. Lett. **B193** (1987) 207.

[54] G. W. Gibbons, *Aspects of Born-Infeld theory and string/M-theory*, Rev. Mex. Fis. **49S1** (2003) 19.

[55] S. Deser y G.W. Gibbons, *Born-Infeld-Einstein actions?*, Class. Quant. Grav. **15** (1998) 35.

[56] J. A. Feingenbaum, *Born-regulated gravity in four dimensions*, Phys. Rev. **D58** (1998) 124023.

[57] J. A. Feingenbaum, P.O. Freund y M. Pigli, *Gravitational analogues of non-linear Born electrodynamics*, Phys. Rev. **D57** (1998) 4738.

[58] D. Comelli, *Born-Infeld type gravity*, Phys. Rev. **D72** (2005) 064018.

[59] D. Comelli y A. Dolgov, *Determinant-Gravity: cosmological implications*, JHEP **0411** (2004) 062.

[60] J. A. Nieto, *Born-Infeld gravity in any dimensions*, Phys. Rev. **D70** (2004) 044042.

[61] M. Wohlfarth, *Gravity a la Born-Infeld*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 1927; ibid, *Corrigendum*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 5297.

[62] R. García-Salcedo, T. Gonzalez, C. Moreno, Y. Napoles, Y. Leyva e I. Quiros, *Asymmtotic properties of a supposedly regular (Dirac-Born-Infeld) modification of General Relativity*, JCAP 1002:027 (2010).

[63] I. Gullu, T. Cagri Sisman y B. Tekin, *Born-Infeld extension of new massive gravity*, Class. Quant. Grav. **27** (2010) 162001.

[64] I. Gullu, T. Cagri Sisman y B. Tekin, *Born-Infeld-Horava gravity*, Phys. Rev. **D81** (2010) 104018.

[65] D. N. Vollick, *Born-Infeld-Einstein theory with matter*, Phys. Rev. **D72** (2005) 084026.

[66] M. Bañados, *Eddington-Born-Infeld action for dark energy and dark matter*, Phys. Rev. **D77** (2008) 123534.

[67] M. Bañados y P. G. Ferreira *Eddington's theory of gravity and its progeny*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 011101.

[68] S. Carneiro, *Non-singular inflation with vacuum decay*, J. Phys. **A40** (2007) 6841.

[69] A. Staruszkiewicz, *Gravitation theory in three-dimensional space*, Acta Phys. Polon. **24** (1963) 734.

[70] S. Deser, R. Jackiw y G. 't Hooft, *Three dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space*, Ann. Phys. **152** (1984) 220.

[71] C. J. C. Burges, *Gravitational Aharonov-Bohm effect in three dimensions*, Phys. Rev. **D32** (1985) 504.

[72] V. B. Bezerra, *Gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect in four and three dimensions*, Phys. Rev. **D35** (1987) 2031.

[73] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology*, Liv. Rev. Rel. **8** (2005) 11.

[74] A. Ashtekar, *Loop quantum cosmology: an overview*, Gen. Rel. Grav. **41** (2009) 707.

[75] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, *Robustness of predictions of loop quantum cosmology*, Phys. Rev. **D77** (2008) 024046.

[76] A. Vilenkin y E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[77] A. Vilenkin, *Cosmic strings and domains walls*, Phys. Rept. **121** (1985) 263.

[78] M. B. Hindmarsh y T. W. B. Kibble, *Cosmic strings*, Rept. Prog. Phys. **58** (1995) 477.

[79] T. W. B. Kibble, *Some implications of a cosmological phase transition*, Phys. Rep. **67**, 184 (1980).

[80] E. J. Copeland and T. W. B. Kibble, *Cosmic Strings and Superstrings*, Proc. R. Soc. **A466**, 623 (2010).

[81] A. Vilenkin, *Cosmic String: progress and problems*, [hep-th/0508135].

[82] D. B. Thomas, C. R. Contaldi y J. Magueijo, *Rotation of galaxies as a signature of cosmic strings in weak lensing surveys*, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 181301.

[83] T. Vachaspati, *Cosmic sparks from superconducting strings*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 141301.

[84] E. Witten, *Superconducting Strings*, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).

[85] J.R. Gott, *Gravitational lensing effects of vacuum strings: exact solutions*, Astrophys. J. **288** (1985) 422.

[86] R. Ferraro y F. Fiorini, *Born-Infeld determinantal gravity and the taming of the conical singularity in 3-dimensional spacetime*, Phys. Lett. **B692** (2010) 206.

[87] G. F. R. Ellis y B. G. Schmidt, *Singular space-times*, Gen. Rel. Grav. **8** (1977) 915.

[88] G Clément, *Stationary solutions in three-dimensional general relativity*, Int. J. Theor. Phys. **24** (1985) 267.

[89] M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, *The black hole in three dimensional spacetime*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849.

[90] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Geometry of the 2+1 black hole*, Phys. Rev. **D48** (1993) 1506.

[91] S. Carlip, *The (2+1)-Dimensional Black Hole*, Class. Quant. Grav. **12** (1995) 2853.

[92] C. Martínez, C. Teitelboim y J. Zanelli, *Charged Rotating Black Hole in Three Spacetime Dimensions*, Phys. Rev. **D61** (2000) 104013.

[93] G. Gibbons y S. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2752.

[94] S. Giddings, J. Abbot y K. Kuchar, *Einstein's theory in a three-dimensional space-time*, Gen. Rel. Grav. **16** (1984) 751.

[95] K. Gödel, *An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 447.

[96] J. R. Gott, *Closed timelike curves produced by pairs of moving cosmic strings: Exact solutions*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1126.

[97] M. Born, *Modified Field Equations with a Finite Radius of the Electron*, Nature **132** (1933) 282.

[98] M. Born, *On the quantum theory of the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. **A143** (1934) 410.

[99] M. Born y L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Proc. R. Soc. **A144** (1934) 425.

[100] M. Born y L. Infeld, *On the quantization of the new field equations I*, Proc. R. Soc. **147** (1934) 522.

[101] M. Born y L. Infeld, *On the quantization of the new field equations II*, Proc. R. Soc. **150** (1935) 141.

[102] R. Ferraro, *Testing Born-Infeld electrodynamics in waveguides*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 230401.

[103] M. Aiello, G. R. Bengochea y R. Ferraro, *Anisotropic effects of background fields on Born-Infeld electromagnetic waves*, Phys. Lett. **A361** (2007) 9.

[104] R. Ferraro, *Testing non linear Born-Infeld electrodynamics in waveguides: the effect of magnetic fields on the transmitted power*, J. Phys. **A43** (2010) 195202.

[105] R. Ferraro y F. Fiorini, *Non trivial frames for $f(T)$ theories of gravity and beyond*, en preparación.