

Tesis Doctoral

Teoría de campos fuera de equilibrio y condensados de Bose-Einstein

Moreno, Gustavo Ariel

2011

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Moreno, Gustavo Ariel. (2011). Teoría de campos fuera de equilibrio y condensados de Bose-Einstein. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Moreno, Gustavo Ariel. "Teoría de campos fuera de equilibrio y condensados de Bose-Einstein". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2011.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

**TEORÍA DE CAMPOS FUERA DE
EQUILIBRIO Y CONDENSADOS DE
BOSE-EINSTEIN**

Trabajo de Tesis para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

Por: **Gustavo Ariel Moreno**

Director: Esteban Calzetta

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCEyN, UBA

2 de marzo de 2011

a María...

Resumen

En este trabajo se estudian condensados de Bose-Einstein generados en sistemas de átomos alcalinos ultrafríos. Entre algunas de sus múltiples aplicaciones, los sistemas de gases ultrafríos resultan de gran interés por su potencial uso para la medición de la interacción entre átomos y superficies. Dicha interacción, conocida como efecto Casimir-Polder, ha sido detectada exitosamente en este contexto utilizando al condensado como un detector local en el caso en que la geometría de la superficie es plana. Nuevos avances en la descripción de este efecto han permitido considerar, desde el punto de vista teórico, el caso de superficies más generales en que la geometría juega un papel no trivial. En estos casos, además de la componente normal del potencial de Casimir-Polder, existe un término lateral. Esto motiva la implementación de nuevos esquemas que permitan transducir el efecto de la interacción lateral sobre alguno de los observables del sistema atómico. Con este propósito aquí se estudian los efectos de una superficie periódica sobre el espectro de excitaciones de un condensado unidimensional. Para describir el sistema, en el régimen de interacciones débiles, se utiliza la teoría de campo medio, la cual permite escribir la dinámica del condensado en términos de una función que satisface una ecuación autoconsistente (Gross-Pitaevskii). El espectro del sistema, modificado por la interacción con la superficie, presenta *gaps* y a partir de los mismos podría determinarse el valor de los coeficientes de Fourier del potencial de Casimir-Polder lateral, ya que el espectro puede medirse por medio de espectroscopia de Bragg.

Motivados por los cambios cualitativos presentes en las configuraciones unidimensionales estudiadas en el régimen de campo medio, se buscó también comprender el efecto de un potencial externo sobre un condensado unidimensional cuando las interacciones son fuertes. Este sistema, que también es accesible experimentalmente, puede ser tratado analíticamente a través de una biyección con un sistema de fermiones no interactuantes. Utilizando esta herramienta se consiguió caracterizar la distribución de impulsos del gas en el límite de impulsos grandes, encontrando que ésta presenta una ley universal de decaimiento algebraico. El resultado que desarrollaremos aquí generaliza trabajos anteriores en los que éste comportamiento fue observado sólo en casos particulares. Otro caso aún más complejo que el de una superficie periódica es el de una superficie con perfil de rugosidad estocástico, para el cual también es posible el cálculo del término lateral de la interacción de Casimir-Polder. Motivados por la posibilidad de explotar la naturaleza cuántica del condensado para detectar el efecto de la interacción con la superficie, estudiamos la expansión de un condensado unidimensional en presencia de un potencial aleatorio. En relación con el problema de localización de Anderson en 1D, se plantea un modelo perturbativo para describir el perfil de densidad de los átomos localizados debido a la interacción con la superficie que genera el potencial estocástico. Dicho modelo nos permitió comprender el comportamiento del sistema y las predicciones derivadas de éste se corroboraron con simulaciones numéricas exactas de la ecuación de Gross-Pitaevskii. Con todo esto, se estableció un marco posible para la detección del efecto de localización inducida por la interacción con la superficie estocástica.

Palabras claves: Condensados de Bose-Einstein, Efecto Casimir-Polder, Ecuación de Gross-Pitaevskii, Gas de Tonks-Girardeau.

Title: Non-equilibrium quantum field theory and Bose-Einstein Condensates

Abstract:

In this Thesis we studied Bose-Einstein Condensates (BECs) in ultra-cold alkali gases. Among their potential applications, ultra-cold gases are unique probes to study the interaction between atoms and surfaces. This interaction, known as Casimir-Polder effect, has been successfully detected using a BEC as a local probe near a plane surface. Advances in the theoretical description of this effect do now include more general surfaces where geometry plays a non-trivial role. In such cases, not only the normal component of the Casimir-Polder potential is present, but there is also a lateral term which motivates the implementation of new schemes to test this effect using BECs. With this propose, here we study the effect of a periodic surface on the excitation spectrum of a one-dimensional condensate. Using Mean Field theory we have described this system in the limit of weak interactions, where the dynamics is governed by a non-linear self-consistent (Gross-Pitaevskii) equation. The perturbation due to the proximity of the surface induces gaps in the spectrum and those gaps, which can be measure via Bragg spectroscopy, contain all the information that is necessary to calculate the Fourier coefficients of the lateral Casimir-Polder potential.

The qualitative changes of this system under the effect of the external potential motivated further investigation, considering the limit of strong interactions. This case, which can be achieved experimentally, can be treated analytically mapping the strongly interacting bosonic system onto a free fermion one. Using this mapping we have characterized the momentum distribution of the gas in the limit of high momentum, finding that it can be described by an universal algebraic decay law. Our result generalizes previous studies where only particular cases were considered.

A case which goes beyond a periodic surface is that of a stochastic roughness profile. The lateral Casimir-Polder interaction can also be calculated in such case, and this fact motivated our research of a possible configuration that takes advantage of the condensate's quantum nature to detect the interaction of it with the stochastic surface. To achieve this goal we studied the expansion of a one-dimensional condensate in an disordered potential. By means of a perturbative model, which takes into account the relation of this problem with 1D Anderson localization, we calculated the localized density profile due to the interaction with the stochastic surface. This model allowed us to understand the interplay of the parameters defining the system and the predictions of it were compared with numerical simulations. Using these results a possible framework for the detection of the effect is established.

Keywords: Bose-Einstein Condensates, Casimir-Polder Effect, Gross-Pitaevskii equation, Tonks-Girardeau gas.

Índice general

Resumen	I
Title/Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. El sistema a estudiar	2
1.2. Interacción de átomos con superficies	6
1.3. Resultados de este trabajo	7
2. Descripción del sistema	9
2.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii	10
2.1.1. El gas homogéneo	11
2.1.2. Caso no homogéneo	14
2.2. Gas de Tonks-Girardeau	19
3. Condensados en 1D e interacción con superficies periódicas	23
3.1. Dinámica unidimensional del gas	24
3.1.1. Ecuación de campo medio efectiva en 1D	25
3.1.2. Espectro en presencia de un potencial periódico débil	31
3.2. Espectroscopía del condensado	34
3.3. Efecto Casimir-Polder lateral en el gas 1D	40
4. Distribución de impulsos en el límite Tonks-Girardeau	45

4.1. Matriz densidad reducida	47
4.2. Aproximación para impulsos grandes	50
4.3. Comportamiento asintótico de $n(k)$	54
5. Expansión del BEC en presencia de superficies estocásticas	61
5.1. Formulación del problema	63
5.2. Solución perturbativa	65
5.2.1. Expansión del condensado interactuante	67
5.2.2. Expansión no interactuante en el potencial desordenado .	70
5.2.3. Análisis del modelo perturbativo	74
5.3. Potencial de Casimir-Polder y Longitud de localización	78
5.4. Cálculo numérico y comparación con el modelo perturbativo . .	84
6. Conclusiones	93
A. Cálculo del exponente $\gamma(k)$	95
Bibliografía	99
Trabajos publicados	107

Capítulo 1

Introducción

La condensación de Bose-Einstein en gases bosónicos fue predicha por Einstein en 1925, sin embargo, no fue hasta 1995 cuando los primeros experimentos tuvieron éxito en alcanzar la condensación de un sistema de muchas partículas en el laboratorio. Dicho experimento requirió de la combinación de métodos de enfriado láser, que se fueron desarrollando para átomos alcalinos desde mediados de 1970, con técnicas de enfriado evaporativo, logrando así alcanzar las temperaturas necesarias para la condensación de estos sistemas diluidos [CorWie02, AEMWC95]. Desde ese momento las técnicas de enfriado y confinamiento han avanzado al punto tal de hacer rutinarios experimentos con sistemas de unos 10^6 átomos y con posibilidad de repetirlos en minutos. Debido al alto grado de control sobre el sistema de átomos, estos experimentos han abierto la puerta a la implementación de sistemas cuánticos en los cuales los parámetros que definen la dinámica del sistema pueden ser controlados de manera prácticamente arbitraria. En esta tesis estudiaremos desde un punto de vista teórico diferentes modelos para la descripción de tales sistemas, haciendo particular énfasis en los cambios cualitativos frente a las perturbaciones externas.

1.1. El sistema a estudiar

Típicamente los sistemas de interés práctico consisten en un conjunto de N átomos alcalinos con $N \leq 10^7$, atrapados por una trampa magnética u óptica [PetSmi08]. La idea básica del confinamiento radica en utilizar el cambio de energía de un estado atómico debido al efecto Zeeman en un campo magnético externo inhomogéneo. Dado que las escalas temporales en las que el átomo se mueve son mucho mayores a los tiempos típicos de transición atómica, la variación en el espacio del campo externo induce una variación en los niveles de energía del átomo que está bien definida en cada punto del espacio. Este efecto puede calcularse en teoría de perturbaciones asumiendo que el campo no varía en una escala típica del orden de v/Ω , donde v es la velocidad del átomo y Ω la frecuencia de transición no perturbada. Si bien las variaciones del campo en dicha escala de distancias es despreciable, el efecto de la velocidad v es importante a la hora de calcular el corrimiento Doppler. La perturbación en los niveles de energía es equivalente a un potencial externo actuando sobre el átomo como un todo y por lo tanto puede ser utilizada para confinar la partícula si las variaciones del campo externo están correctamente diseñadas. Más específicamente, puede demostrarse que sólo los estados que aumentan su energía cuando el módulo del campo magnético $|\mathbf{B}|$ aumenta pueden ser confinados (en ausencia de fuentes para los campos). Existe una gran variedad de estrategias para generar potenciales confinantes, entre las cuales se encuentran aquellas en las que el campo es estático (trampas cuadrupolares, Ioffe–Pritchard, etc.) o dinámico [PetSmi08]. En este último caso se utilizan campos variables con una frecuencia mucho menor a la transición atómica (ejemplo aquellas conocidas como TOP), de manera tal que el potencial efectivo actuando sobre el átomo será proporcional al promedio temporal de $|\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|$, que a su vez puede diseñarse para generar un mínimo en un punto del espacio. Por otro lado, dado que los átomos neutros se polarizan en un campo eléctrico, pueden generarse potenciales externos que actúen sobre ellos a través

de láseres. Este efecto permite crear potenciales periódicos sobre la nube de átomos en los que no sólo se puede variar de manera arbitraria la profundidad de los pozos de potencial sino que además la periodicidad puede sintonizarse de manera externa.

Las técnicas de enfriado láser también están relacionadas con efectos de transiciones atómicas entre los niveles internos de los átomos. En particular, el mecanismo Doppler está basado en sintonizar la frecuencia de dos láseres contrapropagantes cerca de una transición atómica donde la probabilidad de absorción de fotones se vuelve importante. Entonces, dado que la probabilidad de absorción depende del estado de movimiento del átomo (justamente por corrimiento Doppler), puede generarse la situación en la que los átomos moviéndose hacia la derecha absorban con mayor probabilidad fotones con impulso hacia la izquierda y viceversa, generando así un término de tipo viscoso sobre el movimiento clásico del átomo. Con ésta técnica de enfriamiento pueden alcanzarse temperaturas finales de cientos de μK . Dicha temperatura puede disminuirse aún más hasta llegar al μK utilizando enfriado láser pero a través de un mecanismo sub-Doppler un poco más complejo conocido como enfriamiento de Sísifo [DalCoh89, MetStr02], en el que se utiliza la inhomogeneidad del campo para generar transiciones entre diferentes niveles de energía de manera selectiva. Finalmente, para lograr la condensación es necesaria también una etapa de enfriamiento evaporativo [Hess86, PrHeMa89] en la que a través de radiación en frecuencia de radio se puede disminuir progresivamente la altura de la trampa permitiendo que los átomos más energéticos escapen, mientras que los átomos con menor velocidad rethermalizan por colisiones.

De esta manera es posible lograr sistemas de átomos fríos en diferentes tipos de potenciales externos. Los casos más comunes en los experimentos son potenciales de tipo parabólico con eventualmente algún potencial superpuesto. Otro caso de gran interés es aquel en el que se superpone una red óptica consistente en dos (o más) pares de láseres cruzados. Esto permite imprimir un potencial externo periódico en el que tanto el parámetro de red como la altura de los po-

zos de potencial pueden ser seleccionados de manera arbitraria. De esta forma es posible acceder a sistemas de interés en materia condensada, como aquellos descritos por modelos de tipo *tight binding*, con la ventaja de poder controlar con gran precisión los parámetros que definen el sistema [BlDaZw08, JakZol05]. Actualmente estos casos, entre los que se encontraban los primeros escenarios experimentales, han sido generalizados, existiendo ahora la posibilidad de implementar potenciales de forma arbitraria e incluso dinámicos [HRMCB09]. Hasta este punto hemos comentado cómo los sistemas de átomos fríos pueden ser confinados, sin embargo aún no hemos contemplado el problema de la interacción de los átomos entre sí. Para definir más precisamente este problema, llamemos $\hat{\psi}^\dagger(x, t)$ al operador de creación de partículas en el punto x . Entonces tendremos que el hamiltoniano típico de un sistema de átomos bosónicos será

$$\mathcal{H} = \left(\int -\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \right) d^3x + \mathcal{H}_{\text{int}} \quad , \quad (1.1)$$

donde el término cuadrático en los operadores de campo puede ser controlado experimentalmente (a través del potencial externo $V(\mathbf{x}, t)$) y \mathcal{H}_{int} representa el término de interacción entre los átomos. Dicho término típicamente resultará ser una suma sobre potenciales interatómicos de la forma $V_{\text{int}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = V_{\text{int}}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, donde en principio se podrá tener una dependencia complicada en la distancia interatómica $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Sin embargo, en el límite de baja energía la caracterización de esta interacción puede simplificarse considerablemente ya que las colisiones están dominadas por la contribución de onda s [Saku94], la cual queda unívocamente definida a través de un único parámetro, la longitud de scattering a . Este parámetro puede calcularse en teoría de perturbaciones (aproximación de Born), y al orden más bajo se obtiene:

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int V_{\text{int}}(\mathbf{x}) d^3x \quad . \quad (1.2)$$

Puede demostrarse [Castin01] que la interacción entre los átomos para colisiones de baja energía se puede reemplazar por la interacción de contacto efectiva:

$$V_{\text{int}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad . \quad (1.3)$$

Entonces, en este mismo límite, será posible escribir el hamiltoniano de interacción en términos de los operadores de segunda cuantificación [Ballen98] en la forma local:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int \psi^{\dagger 2}(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^2(\mathbf{x}, t) d^3x \quad , \quad (1.4)$$

donde $g = 4\pi\hbar^2 a/m$. En principio el valor de a estaría fijo una vez fijada la especie atómica que se fuera a utilizar. Sin embargo, afortunadamente, existe otro fenómeno notable que permite controlar también este parámetro externamente a través de un campo magnético [TiVeSt93]. Dicho efecto se basa en la resonancia de Feshbach [CCRCW00], y permite no sólo variar el valor del parámetro de scattering sino además cambiar su signo. Con ello no sólo se han podido explorar condensados con interacciones repulsivas, sino que al tener acceso a sistemas en que las interacciones son atractivas se han podido generar configuraciones inestables en las que el condensado colapsa [Pitaev96, RCCDCW01, DCCRCW01, UedSai03, Calzet08]. Con ésto queda en evidencia que los sistemas de átomos ultrafríos abren oportunidades únicas para explorar sistemas cuánticos en los cuales todos los parámetros de interés en el problema se pueden controlar en los experimentos.

Además del acceso a los parámetros que intervienen en la dinámica de estos sistemas, también es mucho lo que se ha logrado en la posterior medición del mismo [KeDuSt99]. Dado que el sistema sólo está compuesto por una pequeña cantidad de átomos, es obviamente imposible utilizar una sonda macroscópica para la medición. Por este motivo cualquier información proveniente del sistema se obtiene por medios ópticos, haciendo interactuar débilmente a los átomos con luz [KeDuSt99]. Cuando el condensado es muy diluido pueden tomarse imágenes de absorción iluminándolo y registrando la sombra sobre una cámara CCD. En el caso de un objeto transparente el procedimiento es

similar pero la información debe obtenerse de los corrimientos de fase. Estos métodos de absorción o dispersión tienen la ventaja de ser no destructivos. Por otro lado, otra técnica que suele utilizarse es la toma de imágenes midiendo tiempo de vuelo, caso en el cual la muestra se destruye ya que se permite su expansión balística por un tiempo fijo, y a partir de una imagen del estado final se puede inferir la distribución de impulsos iniciales. La ventaja de este último caso es que ciertas cantidades, como la cantidad de átomos en el condensado, pueden medirse con mayor resolución. A partir de la información provista por estas técnicas pueden obtenerse distribuciones espaciales de partículas o de sus impulsos en las diferentes etapas de la evolución del sistema.

1.2. Interacción de átomos con superficies

En esta tesis estudiaremos sistemas de átomos fríos en diferentes regímenes, según lo descrito anteriormente. Será de especial interés en lo que sigue el efecto del potencial externo sobre el sistema de átomos, en particular porque a partir de mediciones sobre el sistema es posible inferir las características del potencial. En particular buscaremos establecer bajo qué condiciones tales sistemas podrían ser implementados para la medición de la interacción entre átomos y superficies, conocida como interacción de Casimir-Polder [CasPol48]. El cálculo original de Casimir y Polder predice que un átomo neutro frente a una superficie, a distancia z , experimentará un potencial atractivo $U_{\text{CP}}(z)$ que decaerá como:

$$U_{\text{CP}}(z) \propto -\frac{1}{z^\nu} \quad , \quad (1.5)$$

donde $\nu = 3$ cuando $z \ll \lambda$, y λ es la longitud de onda para la transición atómica. Cuando $z \gg \lambda$ los efectos de retardamiento en la propagación de las perturbaciones en el campo electromagnético hacen que el efecto disminuya, siendo el exponente en este caso $\nu = 4$. Si bien el efecto es muy pequeño, sistemas de átomos fríos han sido utilizados de manera exitosa en este contex-

to, habiéndose logrado medir la interacción entre un átomo y una superficie plana a temperatura cero [HOMGC05], y posteriormente a temperatura finita [OWAPSC07]. Ambos experimentos se basaron en determinar el cambio en la frecuencia de oscilación del centro de masa de un condensado atrapado cuando la superficie es traída a su proximidad, es decir, se utilizó el gas como un detector local clásico, sin explotar los efectos de coherencia del sistema cuántico. En esta tesis buscaremos entonces alternativas para la descripción de sistemas de gases ultrafríos en los cuales se puedan explotar los efectos intrínsecamente cuánticos del sistema para llegar a abarcar incluso el caso en el cual las superficies puedan ser de forma arbitraria.

1.3. Resultados de este trabajo

En los próximos capítulos describiremos los resultados principales que hemos obtenido en el contexto de este trabajo de investigación. En el capítulo 2 daremos una breve reseña del marco teórico en el que se encuadra la descripción de los sistemas de átomos fríos. En el capítulo 3 mostraremos cómo un condensado unidimensional puede interactuar con una superficie rugosa y cómo el efecto de dicha interacción puede, en principio, revelarse a través de métodos espectroscópicos para obtener una medida de la interacción de Casimir-Polder entre el sistema coherente de átomos y la superficie. En el capítulo 4 buscaremos estudiar un caso límite del sistema unidimensional, conocido como gas de Tonks-Girardeau, en el cual los átomos interactúan fuertemente. En este caso es posible encontrar una solución exacta para la función de onda del problema de muchas partículas, lo cual nos ha permitido avanzar desde el punto de vista analítico. En particular hemos podido demostrar que la forma funcional de la distribución de impulsos del gas, para valores grandes del momento, resulta independiente del potencial confinante y por lo tanto no presenta cambios cualitativos frente a las perturbaciones externas. En el capítulo 5 trataremos el problema de la expansión de un condensado en la proximidad de una super-

ficie estocástica. Esto nos llevará a estudiar la conexión entre localización de Anderson en 1D y la ausencia de transporte para este sistema interactuante. En este último caso hemos podido avanzar analíticamente sobre el modelo perturbativo, mientras que la descripción del sistema en todo el rango de interés práctico tuvo que abordarse por medio de simulaciones numéricas. Finalmente en el capítulo 6 exhibiremos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Descripción del sistema

En el presente capítulo exhibiremos algunos de los formalismos básicos utilizados para la descripción de un gas interactuante de átomos ultrafríos. Existen diferentes maneras de representar el sistema dependiendo de los observables que uno busque caracterizar. Básicamente el problema de encontrar qué objetos darán una descripción adecuada es el mismo que se presenta en cualquier sistema de muchas partículas: la descripción exacta estará dada por una jerarquía de ecuaciones que deberá truncarse de alguna manera para obtener un sistema cerrado (y tratable) que represente al sistema de interés. En la primer sección consideraremos la teoría de campo medio, la cual es la teoría más sencilla que permite describir a un sistema de átomos ultrafríos interactuantes. Esta teoría funciona con muy buena precisión en 3D debido a que el parámetro que controla la expansión perturbativa es la densidad del gas por el volumen asociado al parámetro de scattering na^3 que, típicamente, es muy pequeño en los sistemas de interés. Esta descripción aproximada se dará entonces a través de una función compleja $\psi(x, t)$, la cual permite el cálculo de cualquier observable. La evolución dinámica de dicha función estará determinada por una ecuación de Schrödinger no lineal, conocida como ecuación de Gross-Pitaevskii [Pitaev61].

En la segunda sección, contemplaremos otro caso límite en el cual las interacciones pueden hacerse muy grandes y, por lo tanto, la descripción anterior, la cual parte con un orden cero dado por el campo medio, resulta inadecuada. Si el gas presenta interacciones de contacto y se encuentra restringido a moverse en una única dimensión espacial existe la posibilidad de avanzar sobre la solución exacta del problema interactuante tanto cuando las interacciones son finitas como cuando tienden a infinito (más adelante describiremos precisamente que queremos decir con esto). Ambos casos, conocidos como gas de Lieb-Liniger [LieLin63, Lieb63] y gas de Tonks-Girardeau [Girard60], pueden ser descritos de manera más conveniente en términos de la función de onda para el sistema de muchas partículas. En particular aquí estudiaremos en detalle el caso límite del gas de Tonks-Girardeau, para el cual es posible escribir soluciones analíticas para las autofunciones del problema por medio de una biyección a un sistema de fermiones no interactuantes.

2.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii

La ecuación de Gross-Pitaevskii es una aproximación de campo medio al problema de bosones interactuantes a $T = 0\text{K}$. Como veremos a continuación dicha aproximación resulta válida en el caso de sistemas débilmente interactuantes, condición que se cumplirá en 3D cuando el gas sea diluido. Si bien la ecuación es muy simple, esta teoría es capaz de reproducir correctamente las propiedades exhibidas en los experimentos, como propagación de excitaciones colectivas o efectos de interferencia. Esto la ha convertido en el punto de partida para analizar muchos de los experimentos sobre condensados de Bose-Einstein [DGPS99].

A continuación mostraremos cómo surge la ecuación comenzando por el caso más sencillo de un gas *homogéneo* de partículas débilmente interactuantes, para luego considerar el caso no homogéneo y algunas soluciones de interés que se derivan de él.

2.1.1. El gas homogéneo

Comencemos entonces con el caso más sencillo posible, por ejemplo un gas de partículas interactuantes en el que el término de interacción se aproxima por la ecuación (1.3) y considerando además que éste se encuentra confinado en una caja tridimensional de volumen V , en la que imponemos condiciones periódicas de contorno. De esta forma el hamiltoniano del sistema resulta:

$$\mathcal{H} = \int -\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) d^3x + \frac{g}{2} \int \hat{\psi}^\dagger{}^2(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}^2(\mathbf{x}, t) d^3x \quad , \quad (2.1)$$

donde $g = 4\pi\hbar^2 a/m$. Para aprovechar la simetría de translación del sistema es conveniente realizar un cambio de base para los operadores de segunda cuantificación a una base de estados de una partícula tipo onda planas [Ballen98], es decir:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \quad . \quad (2.2)$$

Si ahora escribimos el hamiltoniano en términos de los operadores de creación-aniquilación en la base de ondas planas obtenemos:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2-\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \quad . \quad (2.3)$$

Obviamente si el término no cuadrático estuviera ausente podríamos entender perfectamente al sistema de N bosones en términos del operador anterior ya que cualquier estado se podría escribir en términos de combinaciones lineales de estados con números de ocupación bien definidos, siendo cada uno de estos últimos un autoestado de \mathcal{H} . Es más, aquí el concepto de condensación resulta evidente pues para éste caso el estado fundamental sería proporcional a $|\psi\rangle \propto (\hat{a}_{\mathbf{0}}^\dagger)^n |0\rangle$. Sin embargo, las interacciones distorsionarán esta imagen haciendo que, incluso en el estado fundamental del sistema, estén poblados estados de una partícula con $\mathbf{p} \neq 0$. En el caso en que las interacciones son débiles el estado fundamental de una partícula con $\mathbf{p} = 0$ aún se encontrará macroscópicamente poblado y esto entonces nos permitirá realizar una aproximación para calcular

el efecto de las interacciones sobre el sistema. Recordando que los operadores de aniquilación-creación actúan sobre un autoestado con N_0 partículas en el fundamental como:

$$\hat{a}_0^\dagger |N_0\rangle = \sqrt{N_0 + 1} |N_0 + 1\rangle \quad \hat{a}_0 |N_0\rangle = \sqrt{N_0} |N_0 - 1\rangle \quad , \quad (2.4)$$

resulta plausible pensar que cuando la ocupación del estado 0 es macroscópica el operador \hat{a}_0 se comporta como un número complejo, es decir $\hat{a}_0 \approx \sqrt{N_0}$. Esta prescripción fue introducida por primera vez por Bogoliubov [Bogoli47] y será la que nos permitirá calcular el espectro de excitaciones elementales llevando el hamiltoniano a uno que sea cuadrático en los operadores de creación y destrucción. Para ello separemos los términos por su contenido de \hat{a}_0 y nos quedamos a orden cuadrático en los operadores $a_{\mathbf{p} \neq 0}$:

$$\mathcal{H} = \frac{N_0^2 g}{2V} + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + 2 \frac{N_0 g}{V} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{N_0 g}{2V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}}) \quad . \quad (2.5)$$

Para proceder nos restringiremos a considerar estados con un número de partículas totales N fijo (notar que esto es consistente con el hamiltoniano original que conserva la cantidad de partículas totales en el sistema). Sobre este subespacio, el operador de número será:

$$\hat{N} = N = N_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} \quad , \quad (2.6)$$

por lo tanto tendremos:

$$\mathcal{H} = \frac{N^2 g}{2V} + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{N_0 g}{V} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{N_0 g}{2V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}}) \quad . \quad (2.7)$$

Cuando el sistema tiene $N_0 \approx N$ obtenemos un hamiltoniano cuadrático (al orden más bajo) en los $\hat{a}_{\mathbf{p} \neq 0}$. Dicho hamiltoniano cuadrático puede ser diagonalizado por una transformación de Bogoliubov. No daremos aquí los detalles de la deducción pues pueden encontrarse en la bibliografía estándar del tema [PitStr03, PetSmi08], pero el resultado es:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{-\mathbf{p}}^* \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = u_{\mathbf{p}}^* \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger + v_{-\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}} \quad , \quad (2.8)$$

donde $[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ y :

$$u_{\mathbf{p}} = \text{Cosh}(\alpha_{\mathbf{p}}) \quad v_{-\mathbf{p}} = \text{Sinh}(\alpha_{\mathbf{p}}) \quad , \quad (2.9)$$

donde

$$\text{Coth}(\alpha_{\mathbf{p}}) = -\frac{p^2/2m + gn}{gn} \quad . \quad (2.10)$$

Aquí hemos tomado $n = N/V$ ya que a este orden de aproximación podemos usar $N_0 \approx N$. El hamiltoniano del sistema expresado en términos de los operadores de creación y destrucción de excitaciones sobre el fundamental resulta:

$$\mathcal{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} E_{\text{B}}(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} \quad , \quad (2.11)$$

donde E_{B} es el espectro de excitaciones de Bogoluibov:

$$E_{\text{B}}(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + 2gn \left(\frac{p^2}{2m}\right)} \quad . \quad (2.12)$$

Cuando $p^2/2m \gg gn$ se recupera el espectro de partícula libre, mientras que para impulsos pequeños domina el segundo término y el espectro se vuelve lineal $E_{\text{B}} \approx cp$ con $c = \sqrt{gn/m}$.

Esta descripción aproximada entonces nos dice que, a muy baja temperatura, el sistema puede pensarse en términos de un estado fundamental modificado en el cual el estado de una partícula con $p = 0$ está muy poblado y los estados con $p \neq 0$ poco poblados. Las excitaciones sobre dicho estado fundamental interactuante tienen la relación de dispersión dada por (2.12). Más aún, esta imagen y la consistencia del argumento se pueden verificar calculando la población de los modos con $p \neq 0$, N_{exi} , en el vacío de excitaciones del problema interactuante, $|0\rangle / b_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$, a partir de la definición (2.9). El resultado de éste cálculo es:

$$\frac{N_{\text{exi}}}{N} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (na^3)^{1/2} \quad . \quad (2.13)$$

Es decir que, en el estado fundamental, la cantidad de partículas que están poblando estados de impulso no nulo es pequeña cuando la densidad del gas

es baja. Esto al mismo tiempo nos da el parámetro pequeño correcto para las expansiones de este gas en 3D: na^3 . Debido a que una gran parte de los experimentos se realizan con gases diluídos tridimensionales, la teoría de campo medio resulta muy exitosa para entender al sistema. En el capítulo 4 consideraremos en detalle el caso opuesto en el que las interacciones dejan de ser una perturbación débil, y veremos cómo en dicha situación la población de los estados de una partícula con $p \neq 0$ se vuelve importante.

2.1.2. Caso no homogéneo

En este caso procederemos basados en los argumentos de plausibilidad de la sección anterior. Decimos plausibilidad porque, si bien estas aproximaciones nos llevan a una teoría que está en perfecto acuerdo con el experimento, el problema de demostrar rigurosamente la validez de tales aproximaciones es de vieja data [Ginib68] y sólo recientemente ha sido esclarecida con toda generalidad [LiSeYn05].

En el caso no homogéneo, y bajo la aproximación de Born, la evolución del operador de campo $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ estará dada por la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \hat{\psi}(\mathbf{x}, t)] \quad , \quad (2.14)$$

con \mathcal{H} dado por (2.1). Entonces, en este caso el análogo a la prescripción de Bogoliubov será reemplazar el operador de campo $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ por su valor clásico $\psi(\mathbf{x}, t)$ y éste último tendrá como ecuación de movimiento:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}, t) + g|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (2.15)$$

que es la ecuación de Gross-Pitaevskii [PitStr03]. De más está decir que $\psi(\mathbf{x}, t)$ no es la función de onda del sistema de muchos cuerpos, pero nos permitirá evaluar los observables asociados al condensado.

A continuación haremos uso de la ecuación (2.15) para calcular algunas cantidades que de interés en los capítulos posteriores. Como primer aplicación

buscaremos el estado estacionario ($V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$) de mínima energía, es decir buscaremos una solución de la forma $\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}}$, la cual va a satisfacer la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo:

$$\mu\varphi(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + g|\varphi(\mathbf{x})|^2 \right) \varphi(\mathbf{x}) . \quad (2.16)$$

El parámetro μ es el potencial químico, el cual está asociado al cambio de energía al variar la cantidad de átomos del sistema. Bajo la aproximación de campo medio la densidad de partículas $n(\mathbf{x})$ se obtiene como

$$n(\mathbf{x}) = |\varphi(\mathbf{x})|^2 . \quad (2.17)$$

La función $\varphi(\mathbf{x})$, la cual puede asumirse real ($\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$), resulta de un cálculo autoconsistente en el que las interacciones generan un potencial dependiente de la densidad $g|\varphi(\mathbf{x})|^2$. Éste término puede ser positivo o negativo según las interacciones entre los átomos sean repulsivas o atractivas. Típicamente la ecuación (2.16) tendrá que ser resuelta numéricamente, sin embargo bajo ciertas condiciones es posible encontrar soluciones aproximadas. Por ejemplo, si $\varphi(\mathbf{x})$ varía lentamente el término cinético puede despreciarse dando lugar a la aproximación conocida como Thomas-Fermi, la cual nos dice:

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{g}(\mu - V(\mathbf{x})) , \quad (2.18)$$

donde μ queda determinado por la condición de normalización $\int n_{\text{TF}}(\mathbf{x}) d^3x = N$. Es decir que cuando la densidad sea relativamente alta el perfil de densidad del gas copiará la trampa. Esta aproximación puede verificarse comparando el peso relativo de los términos $-\hbar^2\nabla^2/2m$ y $g|\varphi(\mathbf{x})|^2$ para la solución (2.18). Es decir que si la escala típica de variación de la solución (2.18) es L_{TF} , basta comparar $-\hbar^2/2mL_{\text{TF}}^2$ con $g|\varphi(\mathbf{x})|^2$ para verificar la validez. Es fácil ver que justamente los puntos para los cuales $n = 0$ la aproximación dejará de valer, por lo que no se espera que el perfil de Thomas-Fermi funcione cerca de los bordes. Este punto será importante en el capítulo 5, donde compararemos en detalle la solución exacta de la ecuación (2.16) con el perfil aproximado (2.18).

Un caso típico de interés es el de confinamiento parabólico. Si tomamos por ejemplo la ecuación (2.16) en 1D y $V(x) = m\omega_x^2 x^2/2$, la condición $n = 0$ nos permite definir la longitud de Thomas-Fermi L_{TF} como

$$\mu = \frac{1}{2} m\omega_x^2 L_{TF}^2 \quad . \quad (2.19)$$

Es decir que, en este caso particular, el perfil toma aproximadamente la forma

$$n_{TF}(x) = \frac{\mu}{g} (1 - (x/L_{TF})^2) \quad . \quad (2.20)$$

Finalmente la relación entre L_{TF} y la cantidad de partículas del sistema queda determinada por la condición de normalización

$$\int_{-L_{TF}}^{L_{TF}} n_{TF}(x) dx = N \quad , \quad (2.21)$$

lo cual nos da

$$L_{TF} = \left(\frac{3gN}{2m\omega_x^2} \right)^{1/3} \quad . \quad (2.22)$$

Usando esta ecuación es fácil traducir la condición de validez de la aproximación en $\hbar\omega_x \ll (gN/\hbar)^2$, lo cual nos dice ésta será una buena aproximación para trampas suaves o sistemas con muchas partículas.

Otra solución de interés que permite entender cualitativamente el comportamiento del condensado puede deducirse calculando cuál sería el perfil de densidad en el caso en que se imponga una condición de nulidad en la densidad para un punto específico del espacio. Es decir, nos gustaría saber cuál es la escala espacial típica ξ en la cual el condensado se recupera de dicha perturbación. Es fácil ver que en estas condiciones el teorema Pi sólo nos deja como escala de distancia la cantidad: $\xi^2 = 2mgn_\infty/\hbar^2$. Para tener también el detalle de la forma funcional de la solución consideremos como ejemplo el caso en que $V(\mathbf{x}) = 0$ y $\varphi(\mathbf{x} = 0) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, imponiendo $n(\mathbf{x}) \rightarrow n_\infty$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Es decir, debemos resolver el problema:

$$\begin{aligned} \mu\varphi(\mathbf{x}) &= \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + g|\varphi(\mathbf{x})|^2 \right) \varphi(\mathbf{x}) \\ \varphi(0) &= 0, \quad \varphi(\infty) = \sqrt{n_\infty} \end{aligned} \quad . \quad (2.23)$$

Dado que en infinito la condición de contorno es libre, estamos forzados a imponer $\mu = gn_\infty$, entonces definiendo f tal que $\varphi(\mathbf{x}) = \sqrt{n_\infty} f(\mathbf{x})$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2mgn_\infty} + f(\mathbf{x})^2 \right) f(\mathbf{x}) \\ f(0) &= 0, \quad f(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pero entonces si además redefinimos las escalas espaciales a $x_i = \xi y_i$ eligiendo $\xi^2 = \hbar^2/2mgn_\infty$, obtenemos:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{y}) &= \left(-\nabla_y^2 + h(\mathbf{y})^2 \right) h(\mathbf{y}) \\ h(0) &= 0, \quad h(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Es decir que siendo $\varphi(\mathbf{x}) = \sqrt{n_\infty} h(\mathbf{x}/\xi)$, y teniendo $h(\mathbf{y})$ una escala típica de variación del orden de la unidad, claramente la escala típica en la cual el condensado se recupera de una perturbación en el perfil de densidad es:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2mgn_\infty} \quad (2.26)$$

Esta relación es independiente de si la ecuación de Gross-Pitaevskii esté planteada en una, dos o tres dimensiones espaciales. La ecuación (2.25) puede resolverse en general numéricamente. En particular, si fijamos $d = 1$ como un ejemplo concreto, y haciendo una analogía con el movimiento de una partícula en un potencial cuártico, la solución se puede encontrar fácilmente. El resultado se muestra en la Figura (2.1), confirmando una escala de variación del orden de la unidad. De esta forma vemos que ξ nos da la escala de recuperación del condensado y jugará un rol importante en los cálculos en los que la aproximación de campo medio esté involucrada. En particular la condición de aplicabilidad más general de la aproximación de campo medio se traduce en requerir que la distancia típica entre los átomos d (la cual depende de la densidad y dimensionalidad del gas) sea *menor* que ξ [PitStr03], es decir que la teoría de campo medio será válida si:

$$d \ll \xi \quad (2.27)$$

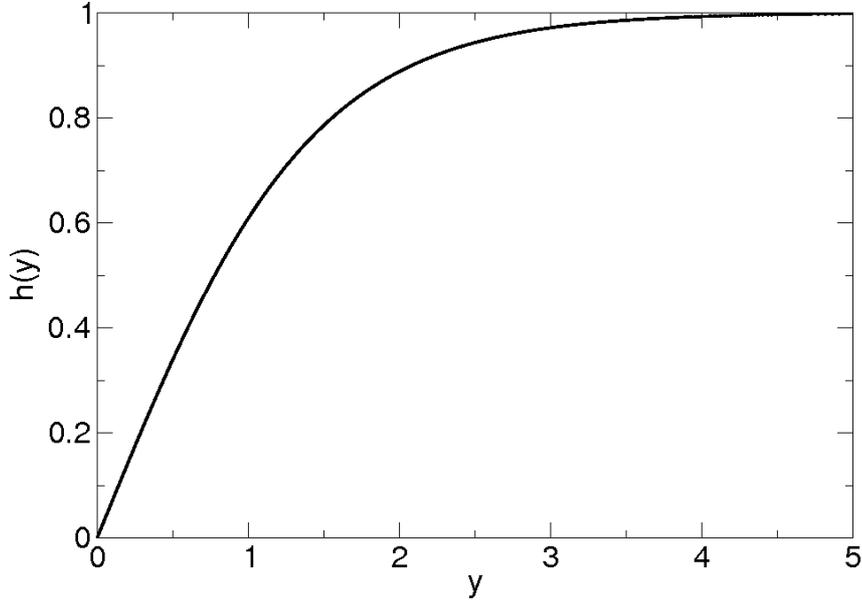


Figura 2.1: Función $h(y)$ según ecuación (2.25) que da la forma funcional para la solución asociada al perfil de densidad en una dimensión cuando se fija por condición de contorno $h(0) = 0$ y $h(\infty) = 1$.

Finalmente podemos notar además que la longitud de recuperación ξ también está relacionada con el espectro de excitaciones elementales, ya que \hbar/ξ define la escala de impulso que determina la transición entre el régimen cuadrático y lineal en el espectro de Bogoliubov (2.12).

Cuando la aproximación de campo medio no es suficiente para describir al sistema las desviaciones respecto de esta primer aproximación pueden calcularse de manera sistemática a través del formalismo de integrales de camino temporal cerrado [CalHu08]. El mismo permite obtener una jeraquía de ecuaciones para el campo medio y los propagadores la cual, al ser truncada, genera los diferentes esquemas de aproximación que son utilizados más comunmente (Hartree-Fock-Bogoliubov, Popov, etc.).

2.2. Gas de Tonks-Girardeau

En esta sección consideraremos un caso particular en el que es más conveniente retomar una descripción en términos de funciones de onda, es decir, describiremos el problema por medio de la función de onda para el sistema de muchos cuerpos. Por gas de Tonks-Girardeau entenderemos un gas de átomos unidimensionales que interactúan entre ellos con un potencial de contacto tipo $\lambda\delta(x-x')$, en el límite en que $\lambda \rightarrow \infty$. Por lo tanto la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el sistema de N bosones es:

$$E \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left(\sum_{i=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V_{\text{ext}}(x_i) \right) \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad . \quad (2.28)$$

Aquí la condición $\lambda \rightarrow \infty$ se impone como una restricción en la solución:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad \text{si } \exists i, j / x_i = x_j \quad . \quad (2.29)$$

Obviamente también existe una restricción sobre la simetría de la función de onda para el sistema, esto es:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \quad , \quad (2.30)$$

donde σ es cualquier elemento del grupo de permutaciones de N objetos, $\sigma \in \mathbb{S}_N$.

Es notable que el sistema anterior de ecuaciones se puede resolver exactamente notando la similitud que existe con un sistema de fermiones *no interactuantes*. Si sólo se tuviera que considerar las ecuaciones (2.28) y (2.29) es fácil ver que el determinante de Slater formado con N autofunciones diferentes del hamiltoniano de una partícula:

$$E_i^{1p} \phi_i(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} + V_{\text{ext}}(x) \phi_i(x) \quad , \quad (2.31)$$

resolvería el problema, ya que ésta función de onda para el sistema de fermiones libres ψ_F resuelve tanto (2.28) como (2.29). Sin embargo, aún debe tenerse en

cuenta la restricción esencial (2.30), que para el caso de la función construída como un determinante de Slater contiene un cambio de signo por cada permutación entre dos partículas. No obstante, en una dimensión, es posible corregir el signo sin modificar la ecuación que estamos resolviendo ya que podemos construir una función totalmente antisimétrica de módulo 1 en las regiones donde $x_i \neq x_j$. Es fácil comprobar que tal función es:

$$A(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i < j} \text{sgn}(x_i - x_j) \quad , \quad (2.32)$$

donde sgn es la función signo. Entonces

$$|A(x_1, \dots, x_N)| = 1 \quad , \quad (2.33)$$

y

$$A(x_1, \dots, x_N) = -A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \quad (2.34)$$

si σ es cualquier permutación de dos objetos. Esta observación le fue suficiente a M. Girardeau para probar [Girard60] que la solución de la ecuación (2.28) puede mapearse de manera biunívoca sobre un problema de fermiones libres ya que, por las propiedades indicadas anteriormente, queda claro que la solución del problema bosónico se escribe como:

$$\psi_B = A \psi_F \quad , \quad (2.35)$$

y viceversa ($A^2 = 1$). Por lo tanto, a cada una de las autofunciones del problema de bosones *interactuantes* le corresponde una única solución del problema de fermiones *no interactuantes* dada por la relación (2.35), ambas soluciones tienen la misma energía. El determinante de Slater se construye resolviendo un problema aún más simple, ya que para construirlo sólo debemos calcular las autofunciones del problema de una partícula (2.31).

Más explícitamente entonces podemos afirmar que las soluciones del problema de bosones fuertemente interactuantes en 1D es:

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} A(x_1, \dots, x_N) \det [\phi_{\alpha_i}(x_j)] \quad , \quad (2.36)$$

donde el conjunto de autofunciones $\{\phi_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ de la ecuación (2.31) determina el nivel de energía

$$E = E_{\alpha_1}^{1p} + \dots + E_{\alpha_N}^{1p} . \quad (2.37)$$

Veamos algunas de la características que pueden inferirse a partir de lo dicho anteriormente. Supongamos que queremos considerar el estado fundamental del sistema de bosones interactuantes. Entonces debemos considerar las primeras N autofunciones de la ecuación (2.31) y construir (2.36). Dado que $|A| = 1$ se tendrá $|\psi_B| = |\psi_F|$, es decir que las propiedades *locales* del problema de bosones interactuantes, como por ejemplo la densidad de partículas en un punto, serán exactamente las mismas que las propiedades locales del problema de fermiones no interactuantes. Sin embargo, las propiedades no locales de ambos sistemas diferirán fuertemente debido a la presencia de la función A en (2.36). Por ejemplo consideremos los números de ocupación de los estados de una partícula para alguna base de funciones $\{\chi_i\}_{i \geq 1}$. Si se elige dicha base como base de autoestados del hamiltoniano, entonces es claro que los números de ocupación para el problema fermiónico serán $n_F(k) = 1$ si $k \leq k_F$, mientras que $n_F(k) = 0$ si $k \geq k_F$, con k_F el nivel de Fermi. Sin embargo, en el caso bosónico tendremos que hacer una integral no trivial. Recordemos primero que ciertas propiedades no locales, como los números de ocupación de los estados de una partícula, pueden ser calculados a partir de la matriz densidad reducida $n(x, y)$:

$$n(x, y) = N \int \psi^*(x, x_2, \dots, x_N) \psi(y, x_2, \dots, x_N) dx_2, \dots, dx_N . \quad (2.38)$$

Entonces, a partir de esta cantidad es fácil ver que los números de ocupación se obtienen como

$$\langle \hat{n}_k \rangle = n(k) = \int \chi_k^*(x) n(x, y) \chi_k(y) dx dy . \quad (2.39)$$

En la ecuación que define a $n(x, y)$, a diferencia del caso fermiónico, no todas las funciones signo provenientes de A pueden cancelarse. Esto hace que la población de los estados de una partícula difiera notablemente en ambos casos.

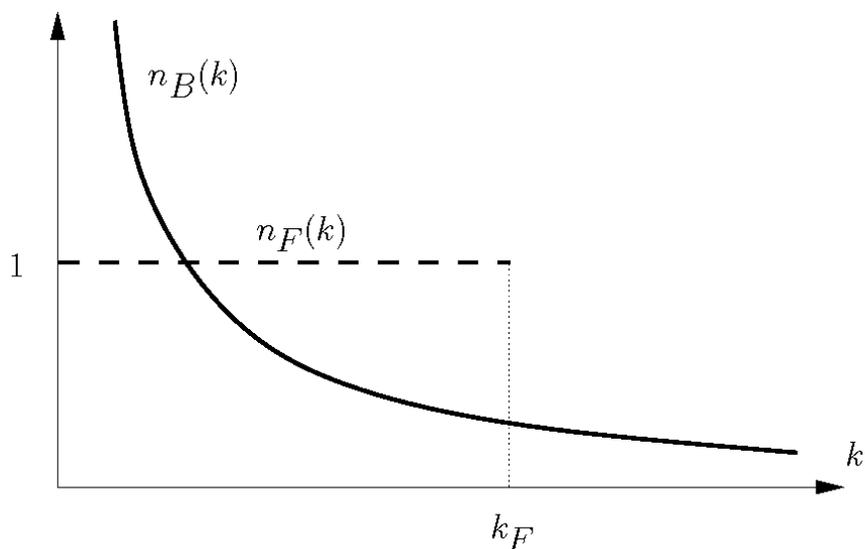


Figura 2.2: Números de ocupación para el estado fundamental de un sistema de $N \gg 1$ fermiones no interactuantes $n_F(k)$ y N bosones fuertemente interactuantes $n_B(k)$ en una caja (condiciones de contorno nula en los extremos). Los autoestados se indexan con un natural $k \in \mathbb{N}$ que rotula los autoestados del hamiltoniano de una partícula $\{\sin(\frac{k\pi x}{L})\}_{k \leq 1}$.

En la Figura (2.2) se muestran los números de ocupación asociados al estado fundamental para ambos sistemas cuando $N \gg 1$ y las partículas se encuentran confinadas en una caja (condiciones de contorno nula en los extremos). En el capítulo 4 volveremos a tratar este problema en más detalle para terminar caracterizando la distribución de impulsos en el caso de k grande.

Capítulo 3

Condensados en 1D e interacción con superficies periódicas

El alto grado de control en los experimentos con sistemas de gases ultrafríos ha abierto la posibilidad de utilizarlos como detectores locales de la interacción entre átomos y superficies [AnPiSt04, CPSMI05, DPRL08, DJPA08]. Motivados por los recientes experimentos en los que se implementaron exitosamente condensados de Bose-Einstein para medir la interacción de Casimir-Polder entre un átomo y una superficie plana [HOMGC05, OWAPSC07], en este capítulo estudiaremos cuál es el efecto de una superficie corrugada sobre el espectro de excitaciones de un condensado unidimensional y cómo a partir de éste se podría obtener información respecto de la interacción entre los átomos y la superficie. De esta forma buscamos proponer una alternativa en la que se explote la coherencia del condensado para resolver el problema de una geometría más compleja estableciendo bajo qué condiciones experimentales se podrían revelar los efectos no triviales de la geometría en dicha interacción. En particular enfocaremos nuestro análisis sobre el término lateral de la interacción de Casimir-Polder [DJPA08].

Para ello, en las primeras secciones de este capítulo, estudiaremos el efecto

de un potencial periódico sobre un gas débilmente interactuante cuando la dinámica del mismo está restringida a una dimensión espacial. Luego consideraremos la interacción de este gas con luz láser para explorar el mecanismo de espectroscopía comunmente utilizado en las mediciones del espectro de excitaciones del condensado [SOKD02, SKODTD03]. En dichos experimentos se transmite impulso lineal al gas de manera resonante cuando los láseres utilizados se combinan de manera de satisfacer la relación de dispersión de las excitaciones colectivas del mismo. Finalmente utilizaremos todos estos resultados para estimar perturbativamente el efecto de una superficie corrugada sobre un condensado, calculando el potencial de Casimir-Polder que actúa sobre el mismo y su efecto sobre el espectro de excitaciones. Con ello se podría tener una medida indirecta de la interacción condensado-superficie a través del impulso transferido en el experimento espectroscópico.

3.1. Dinámica unidimensional del gas

En esta sección buscaremos estudiar el espectro de un gas cuya dinámica está restringida a una dimensión espacial. En lo que sigue aplicaremos la teoría de campo medio para describir esta situación, pero al hacer ésto se deben tener en cuenta las restricciones bajo las cuales esta teoría es aplicable. En particular hemos visto que, para que la teoría funcione correctamente, la escala de recuperación ξ debe ser mayor que la distancia típica entre los átomos del gas d . El cociente entre ambas escalas tiene una dependencia no trivial con la dimensionalidad del gas, ya que si estamos en presencia de un gas tridimensional se tendrá que

$$\xi/d \propto n^{-1/6} \quad , \quad (3.1)$$

lo cual nos dice, quizá como es de esperar intuitivamente, que a medida que la densidad $n \rightarrow 0$ mejor será la aproximación dada por la teoría de campo medio. Sin embargo, si las partículas son confinadas radialmente a un tamaño

del orden o menor que la distancia típica entre ellas la ley de escala de la variable d con n será $d \propto n^{-1}$ (en lugar de $d \propto n^{-1/3}$ como en 3D) pero, dado que ξ seguirá siendo proporcional a $n^{-1/2}$ (como lo muestra la ecuación (2.26)), tendremos:

$$\xi/d \propto n^{1/2} . \quad (3.2)$$

Es decir que cuando la sección transversal del gas se hace menor a la distancia típica entre átomos el comportamiento con la densidad se invierte, y la teoría de campo medio deja de valer para gases extremadamente diluidos. En efecto en este límite el gas se vuelve fuertemente interactuante [PitStr03]. En este capítulo entonces estudiaremos el caso de un gas cuya dinámica se restringe a una dimensión pero en el rango de parámetros en los que la aproximación de campo medio sigue siendo válida. En el próximo capítulo consideraremos en detalle el caso complementario de un gas unidimensional fuertemente interactuante utilizando el formalismo de Girardeau.

3.1.1. Ecuación de campo medio efectiva en 1D

En esta subsección veremos cómo la dinámica del gas en la aproximación de campo medio da una ecuación de Gross-Pitaevskii efectiva en una dimensión. Buscaremos calcular el espectro de excitaciones de un condensado atrapado en la proximidad de una superficie como se esquematiza en la Figura 3.1. Para ello la idea básicamente será proyectar la ecuación tridimensional sobre el estado fundamental de la componente que proviene del término radial. Esta situación límite en que la dinámica está restringida a 1D se puede alcanzar cuando el confinamiento radial es muy intenso. A fin de poder aplicar de manera directa los resultados obtenidos en esta sección al caso de interés de un condensado en la proximidad de la superficie, escribiremos la ecuación de Gross-Pitaevskii en la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + g|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{x}, t) , \quad (3.3)$$

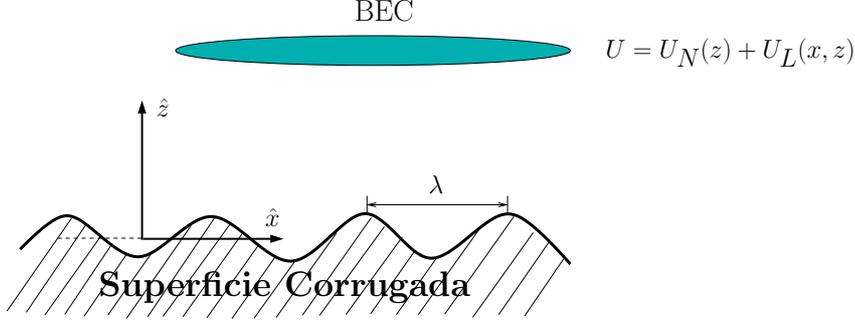


Figura 3.1: Condensado en la proximidad de una superficie corrugada. Aquí $U = U_N(z) + U_L(x, z)$ representa el potencial de Casimir-Polder actuando sobre el condensado.

donde el término de potencial externo V será

$$V(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}m(\omega_z^2(z - z_1)^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_x^2 x^2)}_{\text{Trampa}} + \underbrace{U_N(z) + U_L(x, z)}_{\text{Casimir-Polder}}, \quad (3.4)$$

aquí los tres primeros términos provienen de la trampa que confina al gas en la dirección radial (en el plano y, z) y axial (con frecuencia ω_x), mientras que los dos últimos representarán la interacción de los átomos con la superficie (notar que el cero de las coordenadas se va a medir respecto de ésta). El término $U_N(z)$ representa la componente normal de la interacción, mientras que $U_L(x, z)$ es el término lateral [DPRL08] que se busca estudiar. En lo que sigue consideraremos la situación en que el confinamiento radial es intenso y el potencial debido a la superficie sólo actúa como una perturbación. Por ello haremos una expansión del potencial alrededor del punto z_0 elegido de forma que:

$$m\omega_z^2(z_0 - z_1) + \left. \frac{\partial U_N(z)}{\partial z} \right|_{z=z_0} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Esto nos da la siguiente expansión en serie de Taylor:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m (\omega_z^2(z_0 - z_1)^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_x^2 x^2) + U_N(z_0) + U_L(x, z_0) + \\
& \frac{\partial U_L(x, z_0)}{\partial z} (z - z_0) + \\
& \frac{1}{2}m\omega^2(z - z_0)^2 + \mathcal{O}(\partial_z^2 U_L(z, x)(z - z_0)^2) + \\
& \mathcal{O}(\partial_z^3 U_N(z)(z - z_0)^3) + \mathcal{O}(\partial_z^3 U_L(z, x)(z - z_0)^3) + \\
& \mathcal{O}(\partial_z^4 U_N(z)(z - z_0)^4) + \mathcal{O}(\partial_z^4 U_L(z, x)(z - z_0)^4) + \dots \quad , \quad (3.6)
\end{aligned}$$

donde:

$$\omega^2 = \omega_z^2 + \frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 U_N(z)}{\partial z^2} \right|_{z=z_0} . \quad (3.7)$$

En lo que sigue fijaremos $\omega = \omega_y$. Notar que la componente normal de la interacción de Casimir-Polder renormaliza la frecuencia del oscilador en la dirección ortogonal a la superficie como se muestra en la Figura (3.2).

Para obtener la ecuación que da la dinámica efectiva en 1D expandiremos al campo medio $\psi(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n f_n(r) \varphi_n(x, t) \quad , \quad (3.8)$$

donde las funciones $\{f_n(r)\}$ son autofunciones del operador

$$-(\hbar^2/2m)\Delta_r + m\omega^2 r^2/2 \quad , \quad (3.9)$$

y $r = \sqrt{y^2 + (z - z_0)^2}$ (dado que consideraremos condiciones iniciales con simetría de rotación podemos omitir la dependencia angular). La dinámica efectiva en 1D entonces se obtiene cuando proyectamos la ecuación (3.3) sobre $f_0(r)$, la autofunción correspondiente al estado fundamental del operador radial. La dinámica del coeficiente $\varphi_0(x, t)$ se desacopla de los $\{\varphi_j(x, t)\}_{j \geq 1}$ cuando $\mu \ll \hbar\omega$, y por lo tanto bajo esta condición tendremos

$$\psi(\mathbf{x}, t) \approx f_0(r) \varphi_0(x, t) \quad . \quad (3.10)$$

Para ver esto comencemos con la ecuación tridimensional en la que el potencial armónico, con simetría de rotación, es el término dominante como potencial

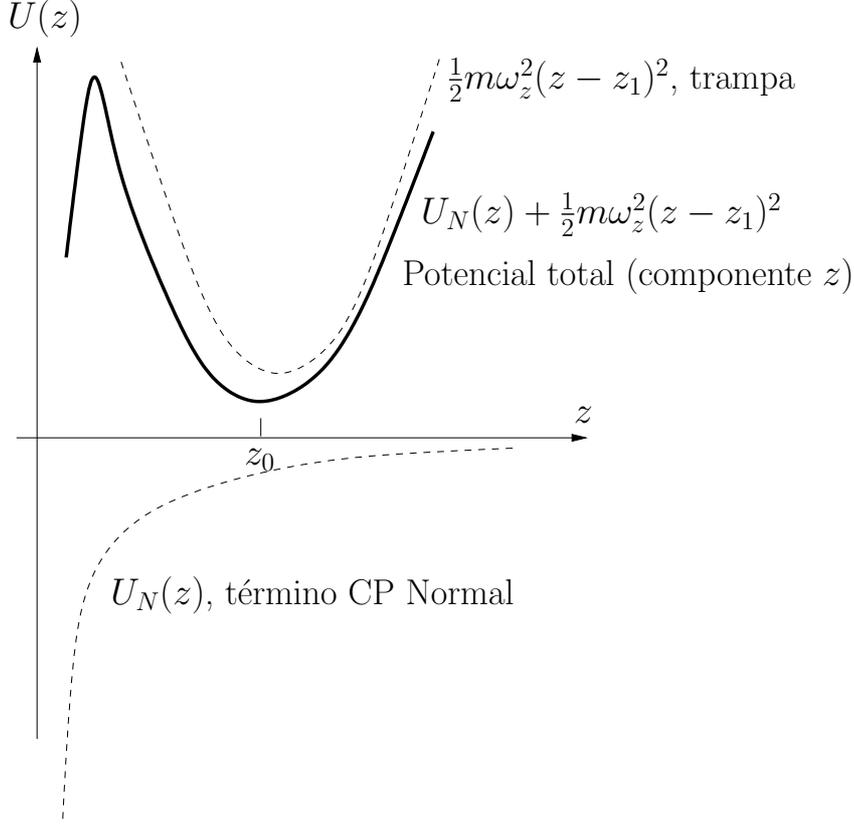


Figura 3.2: Componente del potencial total actuando en la dirección normal a la superficie.

externo. El término adicional, que representa todos los términos no armónicos en (3.6) lo denotaremos por $v(x, z)$ (notar que $v(x, z) \ll \hbar\omega$)

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + \omega_x^2 x^2)\psi + g|\psi|^2\psi + v(x, z)\psi \quad . \quad (3.11)$$

Expandamos ψ en la base que diagonaliza la parte radial: $\{f_n(r)\}_{n \geq 0}$, autofunciones de $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r + \frac{m}{2}\omega_r^2 r^2$ (recordar que omitiremos la dependencia angular por la simetría que supondremos para la condición inicial, de todas formas el mismo análisis se puede generalizar fácilmente al caso en que no existe tal simetría repitiendo el argumento a continuación en coordenadas cartesianas). Entonces, dado que consideraremos sólo pequeñas perturbaciones del estado

base del problema podemos buscar la condición de desacople sobre una solución de la forma $\psi = \sum_n f_n(r)\varphi_n(x)e^{-i\mu_0 t/\hbar}$. Usando esta expansión y proyectando la ecuación sobre la k -ésima autofunción radial f_k :

$$\begin{aligned} \mu\varphi_k &= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi_k + v(x, z)\varphi_k + k\hbar\omega\varphi_k + \frac{m}{2}\omega_x^2x^2\varphi_k \\ &+ g \sum_{n_1, n_2, n_3} (f_k, f_{n_1}f_{n_2}f_{n_3})\varphi_{n_1}^*\varphi_{n_2}\varphi_{n_3}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $(,)$ indica producto interno con función de peso r y $\mu = \mu_0 - \hbar\omega$ se redefinió absorbiendo la energía de punto cero $\hbar\omega$ (notar que obviamente los términos correspondientes a un potencial constante siempre se pueden absorber como un cambio de fase global). Entonces, lo que buscamos mostrar aquí es que la ecuación 1D efectiva es

$$\mu\varphi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi_0 + v(x, z)\varphi_0 + \frac{m}{2}\omega_x^2x^2\varphi_0 + g(f_0, f_0^3)\varphi_0^*\varphi_0 \quad . \quad (3.13)$$

Para ver bajo qué condiciones ésto es así estimemos el error que se genera por despreciar los términos de acoplamiento a modos con $k \neq 0$ que no estamos incluyendo en esta ecuación. Cuando los modos con $k \neq 0$ tengan amplitudes pequeñas podremos aproximarlos al orden más bajo por:

$$\begin{aligned} \mu\varphi_k &= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\varphi_k + v(x, z)\varphi_k + k\hbar\omega\varphi_k + \frac{m}{2}\omega_x^2x^2\varphi_k \\ &+ g(f_k, f_0^3)\varphi_0^*\varphi_0 \quad , \end{aligned} \quad (3.14)$$

entonces, usando la aproximación de Thomas-Fermi podemos despejar φ_k y ver de qué orden es el término que este modo induce sobre la ecuación para φ_0 , es más dado que sólo buscamos estimar el orden de magnitud podemos omitir los términos de potencial $m\omega_x^2x^2/2$ y $v(x, z)$. Entonces, la ecuación aproximada para ϕ_k es:

$$\varphi_k \approx \frac{g(f_k, f_0^3)|\varphi_0|^2\varphi_0}{\mu - k\hbar\omega} \quad . \quad (3.15)$$

Ahora veamos cuál es el efecto de este aproximante para φ_k en el término no lineal $\varphi_k\varphi_0^*\varphi_0$ (que será el término de acople más importante en estas condiciones) que estaríamos despreciando en la ecuación aproximada (3.13) para φ_0 .

Luego, de lo anterior, tenemos que el término que estamos despreciando es:

$$g(f_0, f_0^2 f_k) |\varphi_0|^2 \varphi_k = g(f_0, f_0^2 f_k) |\varphi_0|^2 \frac{g(f_k, f_0^3) |\varphi_0|^2 \varphi_0}{\mu - k \hbar \omega} . \quad (3.16)$$

Entonces pedimos que el término no lineal que *sí* estamos teniendo en cuenta

$$g(f_0, f_0^3) |\varphi_0|^2 \varphi_0 , \quad (3.17)$$

sea mucho mayor al que estamos despreciando. Ésta condición se transforma en:

$$(f_0, f_0^3)^2 \gg \left| \frac{\mu}{\mu - k \hbar \omega} \right| (f_k, f_0^3)^2 . \quad (3.18)$$

Por otro lado, el primer valor de $k \neq 0$ correspondiente a una autofunción sin dependencia angular es $k = 2$ [CTDL06], por lo tanto usando que $(f_0, f_0^3) = 1/2\pi$ y $|(f_2, f_0^3)| = 1/4\pi$ encontramos que la condición para que la dinámica radial permanezca congelada en el estado base f_0 y desacoplada de los demás modos es:

$$\mu \ll \frac{8}{5} \hbar \omega . \quad (3.19)$$

Finalmente utilizamos éste cálculo en nuestro caso específico. Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.6), podemos realizar la proyección sobre el modo f_0 que nos provee de la siguiente ecuación de Gross-Pitaevskii efectiva para $\varphi_0(x, t)$:

$$i \hbar \partial_t \varphi_0(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}(x, t) + U_L(x, z_0) \varphi_0(x, t) + \frac{m}{2} \omega_x^2 x^2 \varphi_0(x, t) + g_{\text{ef}} |\varphi_0(x, t)|^2 \varphi_0(x, t) , \quad (3.20)$$

donde la constante de acoplamiento efectiva es

$$g_{\text{ef}} = g/2\pi\sigma^2. \quad (3.21)$$

Aquí σ representa el ancho típico del perfil gaussiano $\sigma^2 = \hbar/m\omega$. Dado que el potencial de Casimir-Polder decae aproximadamente como una ley de potencias

[DJPA08], los términos en (3.20) que estamos despreciando son de orden

$$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sigma}{z_0}\right)^2 U_L(x, z_0)\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\sigma}{z_0}\right)^4 U_N(z_0)\right) . \quad (3.22)$$

Esto quiere decir que la dinámica unidimensional efectiva del condensado (3.20) nos permitirá estudiar el término lateral $U_L(x, z_0)$ cuando $\sigma/z_0 \ll 1$, o sea cuando el ancho típico del condensado sea menor a la distancia media del condensado a la superficie. La ecuación (3.20) es el resultado principal de ésta sección y será la que utilizaremos para estudiar el gas unidimensional en el régimen de campo medio. A continuación calcularemos el espectro de excitaciones cuando $U_L(x, z_0) = U_{L, k_c} \cos(k_c x)$.

3.1.2. Espectro en presencia de un potencial periódico débil

Dado que en el caso de interés práctico que buscamos estudiar la escala típica de variación del potencial de Casimir-Polder es mucho menor a la escala típica de variación de la trampa axial que confina al gas, en esta sección calcularemos el espectro de (3.20) con $\omega_x = 0$. En la próxima sección veremos cómo incluir el efecto de la trampa en el observable del experimento. Por lo tanto resolveremos:

$$i\hbar\partial_t\varphi_0(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}(x, t) + U_L(x, z_0)\varphi_0(x, t) + g_{\text{ef}}|\varphi_0(x, t)|^2\varphi_0(x, t) , \quad (3.23)$$

donde el potencial de Casimir-Polder se asumirá de la forma

$$U_L(x, z_0) = U_{L, k_c} \cos(k_c x) , \quad (3.24)$$

aquí el número de onda $k_c = 2\pi/\lambda$ con λ la longitud de onda de la corrugación en el perfil de alturas de la superficie. Dado que este potencial será débil buscaremos el efecto al orden más bajo, el caso de un potencial periódico

genérico (que se obtiene obviamente como suma de términos de frecuencias nk_c) se sigue fácilmente repitiendo el argumento que daremos a continuación. El espectro de excitaciones puede calcularse linealizando sobre una solución para el estado fundamental obtenida bajo la aproximación de Thomas-Fermi. Para esto escribimos

$$\varphi_0(x, t) = e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}} [\varphi_{\text{TF}}(x) + \delta\varphi(x, t)] \quad , \quad (3.25)$$

donde la solución de Thomas-Fermi se calcula como en el capítulo 2:

$$\varphi_{\text{TF}}(x) = \left(\frac{\mu - U_L(x, z_0)}{g_{\text{ef}}} \right)^{1/2} \quad . \quad (3.26)$$

Para encontrar el espectro de excitaciones expandimos $\delta\varphi$

$$\delta\varphi(x, t) = u(x) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} + v(x) e^{i\frac{Et}{\hbar}} \quad . \quad (3.27)$$

Insertando las ecuaciones (3.26) y (3.27) en la ecuación (3.23) obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} E u &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + (\mu - U_L(x, z_{\text{cm}}))(u + v^*) \quad , \\ -E v &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 v}{dx^2} + (\mu - U_L(x, z_{\text{cm}}))(u^* + v) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para resolver estas ecuaciones al orden más bajo en U_L (que es la perturbación pequeña) haremos una expansión en teoría de perturbaciones para la energía

$$E(q) = E^{(0)}(q) + E^{(1)}(q) + \dots \quad . \quad (3.29)$$

Aquí las autofunciones que corresponden al orden cero $E^{(0)}(q)$ obviamente son ondas planas (de allí la indexación con el número de onda q), por lo que a orden cero la solución tiene la forma

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x) &= \sum_q u_q^{(0)} \exp(iqx) \quad , \\ v^{(0)}(x) &= \sum_q v_q^{(0)} \exp(iqx) \quad , \end{aligned} \quad (3.30)$$

y el espectro $E_q^{(0)}$ es igual al espectro de Bogoliubov $E_B(q)$

$$E_q^{(0)} = E_B(q) = \sqrt{T_q(T_q + 2\mu)} \quad , \quad (3.31)$$

donde

$$T_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \quad . \quad (3.32)$$

Para encontrar la solución a primer orden ahora hacemos una expansión sobre esta base de autofunciones de orden cero. Como ocurre en el caso de partículas no interactuantes [AshMer76] los estados sin perturbar se acoplan debido a U_L y, a primer orden en el potencial periódico, se abren gaps en los bordes de la primer zona de Brillouin, es decir, cuando $q = \pm k_c/2$. Notar que para el potencial elegido (3.24) sólo tenemos dos coeficientes de Fourier no nulos en $\pm k_c$ y de valor $U_{L,k_c}/2$. Diagonalizando el problema para los estados degenerados en un entorno de $k_c/2$ y $-k_c/2$ obtenemos un espectro como el que se muestra en la Figura (3.3). Allí indicamos las dos ramas del espectro por E^\pm y la posición del gap en el valor $q = k_c/2$. A diferencia con el caso de partículas no interactuantes en este caso la magnitud del gap no es el coeficiente de Fourier $|U_{L,k_c}|$ del potencial en serie de cosenos sino

$$\Delta E_{k_c/2} = |U_{L,k_c}| \times F(k_c/2) \quad , \quad (3.33)$$

donde la función $F(q)$ viene dada por:

$$F(q) = T_q/E_q^{(0)} \quad . \quad (3.34)$$

En la Figura (3.4) se muestra una gráfica de esta función en la que se ha fijado como escala típica de impulsos k_μ proveniente de la escala de energía $\mu = \hbar^2 k_\mu^2/2m$. En el régimen en que las excitaciones corresponden a partículas no interactuantes, $q/k_\mu \gg 1$ se tiene que $F(q) \rightarrow 1$, como uno podría esperar intuitivamente. En el caso opuesto la supresión es lineal, y en general $F(q) < 1 \forall q$. Esto puede entenderse en el contexto de la aproximación de Thomas-Fermi, dado que la densidad en el estado fundamental será mayor en los pozos de potencial y por lo tanto allí también se tendrá un mayor

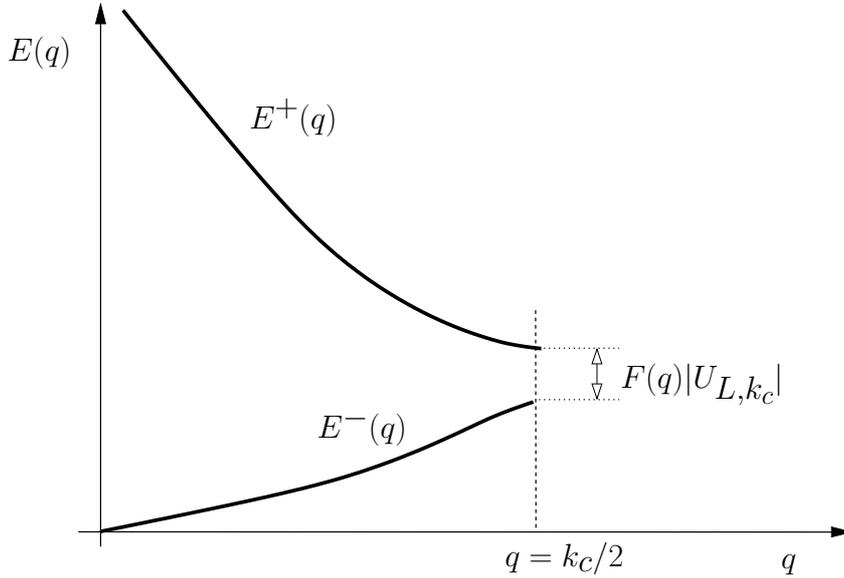


Figura 3.3: Espectro de excitaciones de un condensado sometido a un potencial periódico débil. Se muestran las dos ramas del espectro E^\pm y la posición del gap en el borde de la primera zona $q = k_c/2$.

efecto de repulsión debido al término de interacción entre los átomos $g_{\text{ef}}|\varphi|^2$ (que asumiremos siempre positivo). De ésta forma el efecto siempre resulta ser un apantallamiento parcial del potencial periódico impuesto. Cabe notar además que en el caso límite de excitaciones de baja energía nuestro cálculo está en acuerdo con estudios previos de condensados en potenciales periódicos [BeSoMo98].

3.2. Espectroscopía del condensado

En esta sección veremos como se puede utilizar la interacción del condensado con luz para revelar el espectro de excitaciones. Primeramente consideraremos un ejemplo aún más sencillo que el de la sección anterior para exhibir la idea básica de la técnica. Luego veremos cómo se puede tratar el caso más general de espectroscopía [PitStr03, ToDa03, BlaBal00, BlBaGa02], que será

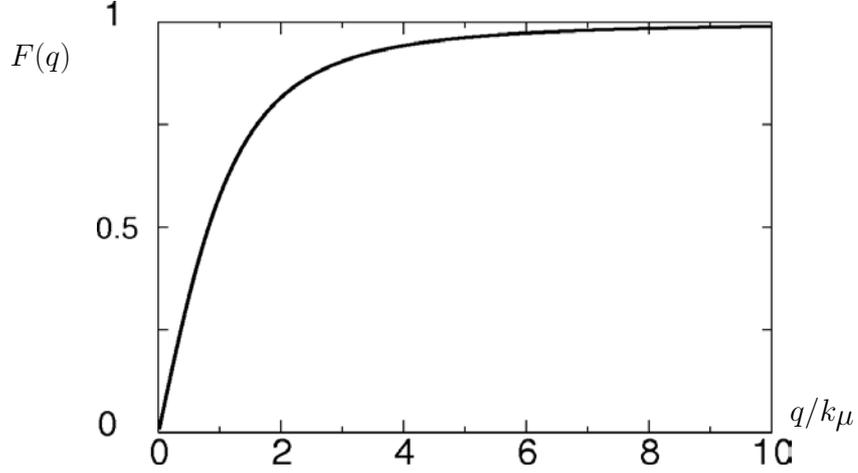


Figura 3.4: Función F que modula la amplitud del gap en términos de la variable adimensional q/k_μ .

de interés en conexión con la interacción de Casimir-Polder.

Lo que consideraremos en primera instancia será la tasa de impulso transferido a un condensado *homogéneo* por la interacción de los átomos con el campo electromagnético aplicado a través de un láser. El impulso transferido al gas puede ser medido por tiempo de vuelo, y por lo tanto a partir de esta cantidad podremos extraer información del sistema.

Como hemos comentado en la introducción, el potencial que afecta a los átomos en presencia de un campo eléctrico es proporcional al cuadrado del campo. Usando esta interacción puede demostrarse [BlaBal00] que a partir de dos láseres con número de onda \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 y con frecuencias ω_1 y ω_2 es posible generar un potencial sobre el condensado de la forma:

$$V_L \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad , \quad (3.35)$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ y $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Dicho potencial genera un término de interacción con el láser de la forma

$$\mathcal{H}_{\text{int}}^{\text{las}} = \int \hat{\psi}^\dagger(x, t) \hat{\psi}(x, t) V_L \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad , \quad (3.36)$$

Dado que estamos interesados en el caso unidimensional escribiremos $\mathbf{q} = q\hat{x}$, entonces tendremos que la tasa de impulso transferida al gas debido a la perturbación inducida por el láser es

$$\langle \dot{\mathbf{P}} \rangle_{\text{laser}} = V_L \int_x q \sin(qx - \omega t) \langle \hat{\psi}^\dagger(x, t) \hat{\psi}(x, t) \rangle . \quad (3.37)$$

Para calcular el valor medio de la función de dos puntos adoptaremos la aproximación de campo medio. Para ello supondremos además que el gas está en el estado fundamental y que el láser es una pequeña perturbación que se aplica a partir de $t = 0$. Luego, tenemos que resolver al orden más bajo

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g|\psi|^2\psi + \Theta(t) V_L \cos(qx - \omega t) \psi , \quad (3.38)$$

donde Θ es la función escalón de Heaviside. Dado que para $t < 0$ el láser está apagado, en ése intervalo basta escribir $\psi_0 = \phi e^{-i\mu t}$. Al prender el láser, queremos capturar una perturbación de esta solución a primer orden en V_L . Escribiendo la perturbación $\xi(x, t)$ como:

$$\psi = (\phi + \xi)e^{-i\mu t/\hbar} , \quad (3.39)$$

y quedándonos al orden más bajo en la amplitud del láser, $\xi(x, t)$ verifica la ecuación:

$$i\hbar\dot{\xi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mu (\xi + \xi^*) + V_L \phi \cos(qx - \omega t) , \quad (3.40)$$

donde $\phi = \sqrt{N/V}$ siendo V el volumen (aquí en 1D). Ahora bien, definamos u, v tales que

$$\xi(x, t) = u(x, t) + iv(x, t) . \quad (3.41)$$

Entonces estas dos funciones reales verifican:

$$\begin{aligned} -\hbar\dot{v} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu u + V_L \phi \cos(qx - \omega t) \\ \hbar\dot{u} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

La condición inicial del problema es $\xi(x, 0) = 0$. Entonces lo que debemos hacer es buscar una solución particular, todas las soluciones del homogéneo, sumarlas, y finalmente fijar los coeficientes de manera tal que $\xi(x, 0) = 0$. Es fácil ver que la solución general del homogéneo es:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h = \sum_k \alpha_k \sin(\Omega_k t - kx + \theta_{\alpha k}) + \beta_k \sin(\Omega_k t + kx + \theta_{\beta k}) \\ v_h = \sum_k \frac{\alpha_k \Omega_k}{T_k} \cos(\Omega_k t - kx + \theta_{\alpha k}) + \frac{\beta_k \Omega_k}{T_k} \cos(\Omega_k t + kx + \theta_{\beta k}) \\ \hbar^2 \Omega_k^2 = T_k^2 + 2\mu T_k \quad T_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

También es trivial encontrar una solución particular, como por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_p = A \cos(qx - \omega t) \quad A = \frac{\phi V_L T_q}{\hbar^2(\omega^2 - \Omega_q^2)} \\ v_p = B \sin(qx - \omega t) \quad B = \frac{\phi V_L \omega}{\hbar(\omega^2 - \Omega_q^2)} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Imponiendo la condición inicial se obtiene $\theta_{\alpha q} = \theta_{\beta q} = \pi/2$, $\alpha_q = -\frac{1}{2}A \left(1 + \frac{\omega}{\Omega_q}\right)$ y $\beta_q = \frac{1}{2}A \left(\frac{\omega}{\Omega_q} - 1\right)$. Los coeficientes con $k \neq q$ se anulan. Entonces, usando estos resultados en la ecuación para el impulso transferido (3.37):

$$\langle \dot{\mathbf{P}} \rangle_{\text{laser}} = V_L \int q \sin(qx - \omega t) 2\phi u(x, t) dx, \quad (3.45)$$

que con la fórmula explícita de u nos conduce a

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{P}} \rangle_{\text{laser}} &= 2qV_L\phi\alpha_q \int \sin(\Omega_q t - qx + \pi/2) \sin(qx - \omega t) dx = \\ &= -qV_L\phi\alpha_q [\text{Volumen}] \sin((\Omega_q - \omega)t). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Usando el valor α_q obtenemos

$$\langle \dot{\mathbf{P}} \rangle_{\text{laser}} = -\frac{1}{2}N V_L^2 q \frac{T_q}{\hbar\Omega_q} \left[\frac{\sin((\Omega_q - \omega)t)}{\hbar(\Omega_q - \omega)} \right]. \quad (3.47)$$

Claramente vemos que el impulso se transmite de manera resonante cuando $\omega = \Omega_q$, es decir cuando los parámetros que definen al potencial del láser q y ω satisfacen la relación de dispersión para las excitaciones colectivas del gas

$$\hbar\omega = \sqrt{T_q^2 + 2\mu T_q}. \quad (3.48)$$

Este es el punto clave de la espectroscopía. El tiempo de aplicación del pulso láser t determina la inversa del ancho en frecuencia, es decir el límite de resolución del método. En el caso de interés que buscamos analizar es más complejo que este ejemplo, ya que el condensado inicialmente no es homogéneo sino que está sometido a un potencial de la forma:

$$\frac{m}{2}\omega_x^2 x^2 + U_L(x, z_0) \quad , \quad (3.49)$$

donde el potencial parabólico confinante varía lentamente respecto de la escala típica λ de variación del potencial periódico pequeño U_L . Si bien la tasa de impulso transferida ha sido estudiada en el caso de un potencial armónico [BDPSZ01, ToDa03] o, por otro lado, para un potencial periódico [MKPS03], aquí estamos en una situación diferente ya que buscamos calcular el efecto combinado de ambos términos bajo las restricciones antes indicadas. En el caso más general es conveniente escribir la tasa de impulso transferida al condensado (debido al láser) en la forma [PitStr03]

$$\langle \dot{\mathbf{P}} \rangle_{\text{laser}} = 2qV_L^2 \int S(q, \omega') \frac{\sin((\omega - \omega')t)}{\omega - \omega'} d\omega' \quad , \quad (3.50)$$

donde $S(q, \omega)$ es el denominado factor de estructura dinámico del condensado [PitStr03], el cual está relacionado con la respuesta del mismo a una perturbación externa y se define de manera general como

$$S(q, \omega) = \frac{1}{Q} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} |\langle n | \mathcal{T}(q) | m \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_{nm}) \quad , \quad (3.51)$$

donde Q es la función de partición, $\beta = 1/k_B T$ con k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura, $\mathcal{T}(q)$ un operador arbitrario, indexado por q , que actúa sobre los estados $|n\rangle$ del sistema y $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$ es la diferencia de energía entre los estados. En el ejemplo explícito que hemos presentado anteriormente, en el cual un condensado uniforme débilmente interactuante y a temperatura cero es afectado por el láser según (3.36), el operador $\mathcal{T}(q)$ toma la forma $\mathcal{T}(q) = \rho_q^\dagger$ donde ρ_q es la transformada de Fourier del operador densidad

($q \neq 0$). Usando la definición (3.51) se puede demostrar que [PitStr03]

$$S(q, \omega) = N \frac{\hbar^2 q^2}{2mE_B(q)} \delta(\hbar\omega - E_B(q)) \quad , \quad (3.52)$$

lo cual nos lleva nuevamente a (3.47). El factor de estructura dinámico para los condensados de gases ultrafríos ha sido extensamente estudiado y existen resultados que permiten su cálculo aproximado en ciertos casos límite [ZPSKS00, PitStr03]. En particular, si la densidad media de los átomos varía lentamente es posible calcular el factor de estructura a través de la aproximación de densidad local [ZPSKS00, PitStr03]. Ahora bien, dado que en nuestro caso de interés tenemos un espectro local, que será el de un condensado en un potencial periódico U_L calculado previamente, y la densidad media asociada a ése espectro local varía lentamente debido al potencial parabólico confinante $m\omega_x^2 x^2/2$, podemos utilizar dicha aproximación de densidad local para el cálculo del factor de estructura. El mismo entonces es obtenido en la forma [ZPSKS00]

$$S(q, \omega) \propto \int n_{\text{TF}}(x) \frac{N\hbar^2 q^2}{2mE(x, q)} \delta(\hbar\omega - E(x, q)) dx \quad , \quad (3.53)$$

donde el espectro $E(x, q)$ depende de la densidad local, que en nuestro caso puede calcularse utilizando la aproximación de Thomas-Fermi a través del perfil parabólico invertido: $n_{\text{TF}}(x) = [1 - (2x/l)^2]$, aquí $l/2 = L_{\text{TF}}$ representa la longitud de Thomas-Fermi como la hemos calculado en la ecuación (2.22) del capítulo 2. Realizando la integral (3.53) se obtiene que

$$S^\pm(q, \omega) \propto \left| \frac{\partial E^\pm(x, q)}{\partial x} \Big|_{x^*} \right|^{-1} \quad , \quad (3.54)$$

donde cada rama $S^\pm(q, \omega)$ está asociada con una rama del espectro de energía $\hbar\omega = E^\pm(x^*, q)$ calculado en presencia del potencial periódico. Esta última ecuación determina implícitamente $x^* = x^*(\omega)$ que debe usarse en (3.54) junto con la versión local del espectro que hemos calculado para el caso de un condensado en presencia de un potencial periódico, el cual en la posición del gap

tiene la forma

$$\begin{aligned}
 E^\pm(x, q) &= E^{(0)}(x, q) \pm \frac{T_q}{2E^{(0)}(x, q)} U_{L, k_c}, \\
 E^{(0)}(x, q) &= \sqrt{T_q^2 + 2T_q\mu \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]}. \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

El resultado, que fue evaluado numéricamente, es una función $S^\pm(q, \omega)$ que resulta divergente cuando $\hbar\omega = E^\pm(0, q)$ (ver Figura 3.6 para el caso particular de la próxima sección), es decir que S crece indefinidamente cuando los parámetros q y ω asociados al láser verifican la relación de dispersión del condensado bajo la acción del potencial periódico (utilizando la densidad media en el origen de coordenadas $x = 0$, donde se tiene el mínimo del potencial parabólico).

Para tiempos grandes (comparados con $\hbar/E_q^{(0)}$ donde $E_q^{(0)}$ es la energía típica) la tasa de impulso transferido debido al láser resulta proporcional al factor de estructura dinámico, ya que bajo esta condición es posible demostrar que las otras variaciones del impulso total del gas, debidas a la trampa parabólica y el potencial periódico débil, resultan despreciables [MoDaCa10, BlBaGa02]. Por lo tanto, dada la respuesta resonante del sistema cuando los parámetros del láser verifican la relación de dispersión del gas, es posible obtener por este medio el espectro del mismo y con ello el valor de los coeficientes de Fourier del potencial. En la siguiente sección utilizaremos los resultados de las secciones anteriores para analizar el caso específico de una superficie perfectamente reflectora.

3.3. Efecto Casimir-Polder lateral en el gas 1D

En esta sección utilizaremos todo lo anterior en el caso concreto de un condensado en la proximidad de una superficie conductora corrugada. Supongamos entonces que un condensado de átomos de ^{87}Rb elongado como el

que se muestra en la Figura (3.5) se encuentra en la proximidad de una superficie con un perfil corrugado uniaxial. Para estimar el orden de magnitud del efecto nos concentraremos en un sólo armónico, pero el análisis puede extenderse fácilmente en el caso más general [MoDaCa10]. Para estimar el orden

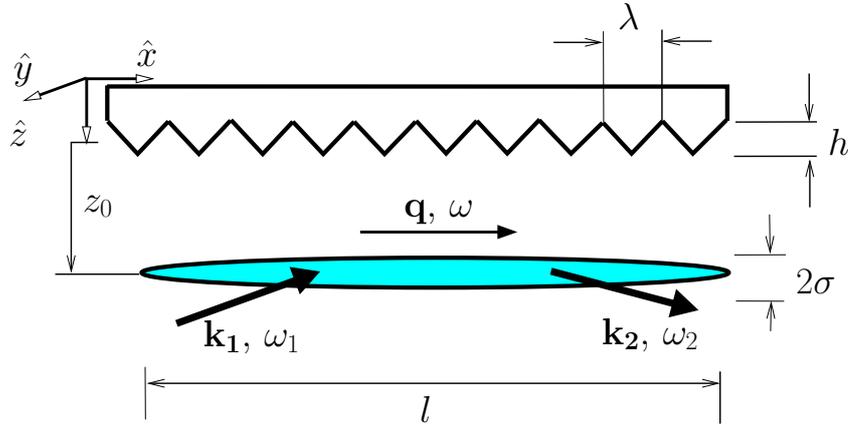


Figura 3.5: Esquema propuesto para la medición de efecto Casimir-Polder lateral a través de espectroscopía del espectro de excitaciones modificado.

de magnitud del gap generado por la interacción de Casimir-Polder tendremos que poder evaluar el coeficiente de Fourier U_{L,k_c} de la ecuación (3.24). Para ello utilizaremos el resultado a primer orden en el perfil de corrugación h [DPRL08, DJPA08] que nos permitirá calcular explícitamente el valor de U_L cuando:

$$h(x) = \sum_j h_j \cos(jk_c x) \quad , \quad (3.56)$$

donde h_j son los coeficientes de Fourier del perfil de alturas y $\lambda = 2\pi/k_c$ es la periodicidad. El resultado es

$$U_L^{(1)}(x, z_0) = -\frac{3\hbar c \alpha(0)}{8\pi^2 \epsilon_0 z_0^5} \sum_{j=0}^{\infty} h_j \cos(jk_c x) g^{(1)}(jk_c, z_0) \quad , \quad (3.57)$$

que contiene una función repuesta $g^{(1)}(jk_c, z_0)$ para cada modo de Fourier. Como es de esperar $g^{(1)} \rightarrow 0$ cuando $z_0/\lambda \rightarrow \infty$. Más explícitamente la función

respuesta se puede calcular en el caso de un conductor perfecto como:

$$g_{\text{perf}}^{(1)}(k, z) = e^{-\mathcal{Z}} (1 + \mathcal{Z} + 16\mathcal{Z}^2/45 + \mathcal{Z}^3/45), \quad (3.58)$$

con $\mathcal{Z} = kz$ y $\alpha(0)/\epsilon_0 = 47,3 \times 10^{-30} \text{m}^3$ la polarizabilidad estática para ^{87}Rb . Notar que, en el caso ideal, esta función sólo depende de la variable adimensional $\mathcal{Z} = kz$.

Supondremos entonces la situación típica en que un condensado de $N = 10^4$ átomos se encuentra a una distancia $z_0 = 3\mu\text{m}$ de una superficie corrugada uni-axial con longitud de onda $\lambda = 2\pi/k_c = 9,75\mu\text{m}$ y amplitud de corrugación $h = 1\mu\text{m}$. consideraremos que los átomos se encuentran atrapados por una trampa parabólica anisotrópica con $\omega_x = 2\pi \times 0,83 \text{ Hz}$ y $\omega = 2\pi \times 2,7 \text{ kHz}$. Para estos valores se encuentra que $\sigma = 0,2\mu\text{m}$. Además, el potencial químico μ y la longitud de Thomas-Fermi $L_{TF} = l/2$ quedan determinados por:

$$N = \int \phi_{0,\text{TF}}^2(x) dx \quad (3.59)$$

y

$$\mu = \frac{1}{2} m \omega_x^2 (l/2)^2, \quad (3.60)$$

donde $\phi_{0,\text{TF}}$ es la solución de Thomas-Fermi para el estado base del problema 1D (es fácil comprobar que para los parámetros propuestos aquí dicha aproximación es válida). Como hemos notado en la ecuación (2.22) del capítulo 2, de estas dos ecuaciones es fácil ver que

$$l/2 = (3g_{\text{ef}} N / 2m\omega_x^2)^{1/3} \quad (3.61)$$

y

$$\mu = (m\omega_x^2/8)^{1/3} (3g_{\text{ef}} N / 2)^{2/3}, \quad (3.62)$$

que para el caso particular propuesto nos da $l/2 = 408\mu\text{m}$ y $\mu = \hbar 3,1 \text{ kHz}$. Para estos valores se verifica (3.19), por lo que estamos en condiciones de aplicar la aproximación en que la dinámica radial está congelada. Finalmente el valor de la energía cinética en el gap es $T_{q=k_c/2} = \hbar 38 \text{ Hz}$ y la energía típica

de las excitaciones colectivas $E_B(q) = E_q^{(0)} = \hbar 485 \text{Hz}$. En estas condiciones el impulso transferido al gas en función de q y ω calculado a partir de las ecuaciones (3.54) y (3.55) será como el que se muestra en la Figura (3.6). Con estos valores puede verse que el coeficiente de Fourier para el caso de

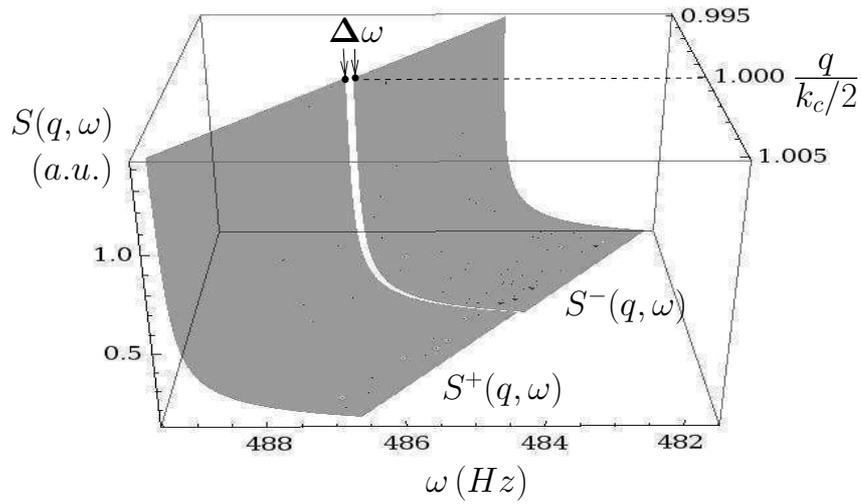


Figura 3.6: Factor de estructura dinámico (proporcional al impulso transferido al gas) en función de q y ω para los parámetros propuestos.

conductor perfecto es $U_{3\mu\text{m}, k_c}^{(1)} = \hbar 1,4 \text{Hz}$ y el factor de supresión asociado a éste $F(k_c/2) = 0,08$. Con ello vemos que en este escenario deberían de poder detectarse variaciones de $\hbar 0,1 \text{Hz}$ centradas en $E_q^{(0)} = \hbar 485 \text{Hz}$ para revelar un efecto del término lateral de la interacción de Casimir-Polder entre la superficie y los átomos. Si bien este tipo de configuraciones son posibles de implementar, aún no existen datos reportados de espectroscopía con esa resolución en frecuencia. Otro escenario posible es considerar distancias a la pared más pequeñas. Escalando los parámetros anteriores al rango en que $z_0 = 0,7 \mu\text{m}$, $\lambda_c = 4 \mu\text{m}$, y $h = 100 \text{nm}$, se encuentra que el gap es de $\hbar 50 \text{Hz}$ y está centrado en una energía de $E = \hbar 1,2 \text{kHz}$. Si bien la resolución espectroscópica que se necesita en estas condiciones ya ha sido alcanzada en

los experimentos [SOKD02, SKODTD03], la distancia mínima a la que un condensado puede acercarse a una superficie en experimentos llevados a cabo hasta el momento es de $2\mu\text{m}$ [Modu09]. Vemos que aún el rango necesario para revelar los efectos del potencial de Casimir-Polder lateral no ha sido alcanzado por los experimentos, no obstante creemos que ésta propuesta, la cual explota la coherencia del sistema para capturar el efecto de la interacción con la superficie, podría superar las limitaciones de otros métodos que han sido diseñados para la medición de la componente normal [HOMGC05] y que para la geometría propuesta aquí se encuentran a dos órdenes de magnitud de la sensibilidad necesaria en tal medición [MoDaCa10].

En este capítulo hemos considerado el gas unidimensional bajo la aproximación de interacciones débiles y hemos caracterizado su espectro en presencia de una superficie periódica. Hemos demostrado que el espectro de excitaciones presenta una diferencia cualitativa en éste caso y también hemos caracterizado posibles escenarios para la medición del efecto. A diferencia de otros métodos en los que se utiliza al condensado como un sensor clásico aquí se explota la coherencia del mismo para obtener el valor del coeficiente de Fourier del término lateral de la interacción a partir del espectro.

En el próximo capítulo consideraremos a un gas unidimensional en el límite de interacciones fuertes y veremos que el principal observable de los experimentos no sufre cambios cualitativos frente a perturbaciones en el potencial externo. Finalmente cabe notar que lo dicho aquí se extiende a una superficie periódica genérica repitiendo lo que hemos hecho para cada armónico. Sin embargo, en el caso de una superficie arbitraria, es decir con una transformada de Fourier continua, el análisis deja de valer. Por lo tanto éste caso tendrá que encararse de una forma completamente diferente a la de éste capítulo. Retomaremos esta discusión en el capítulo 5, donde abordaremos el problema de localización en gases ultrafríos.

Capítulo 4

Distribución de impulsos en el límite Tonks-Girardeau

En el presente capítulo estudiaremos en detalle el caso de un gas unidimensional con interacciones fuertes. Como hemos indicado en la introducción el modelo que buscamos estudiar es el de N bosones interactuantes en 1D con hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V_{\text{ext}}(x_i) \right) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i \neq j} \delta(x_i - x_j) \quad . \quad (4.1)$$

El límite de interacciones fuertes se impone bajo la condición $\lambda \rightarrow \infty$. En particular nos concentraremos en estudiar la distribución de impulsos del gas como observable de interés. Si bien disponemos de la ecuación (2.36) para escribir de manera explícita cada autofunción del problema, las propiedades no locales no se derivan fácilmente de ésta [Girard60]. Algunos trabajos posteriores al aporte de Girardeau buscaron describir la población de estados de impulso pequeño para dilucidar el efecto de las interacciones sobre el fenómeno de condensación que se da en el problema no interactuante [Schulz63, Lenard64]. Sólo dos décadas después se reportaron nuevos resultados analíticos buscando caracterizar el comportamiento asintótico de la distribución de impulsos [VaiTra79]. Sin

embargo, éste problema sólo tuvo interés como un modelo teórico hasta que los rápidos avances logrados a partir de los primeros experimentos exitosos en condensados de Bose-Einstein permitieron dar un marco factible para la realización de un gas unidimensional con interacciones fuertes en el laboratorio [Olshan98]. Ésta propuesta fue exitosa y 2004 se reportaron los dos primeros experimentos en los que se logró alcanzar el límite de interacciones fuertes en un gas unidimensional [PWMMFC04, KiWeWe04]. La inminente posibilidad de acceder experimentalmente a tal sistema despertó nuevamente el interés sobre el problema planteado por Girardeau y existieron nuevos intentos de caracterizar la distribución de impulsos del gas, esta vez teniendo en cuenta el potencial confinante V_{ext} dependiente de la posición necesario para atrapar el gas [LaGiWr02, MiViTo02, FFGW03, RigMur04, RigMur05]. En todos estos trabajos se encontró que la distribución de impulsos del gas, confinado por una trampa parabólica y en el límite de impulsos grandes, presenta una ley de decaimiento asintótica de la forma

$$n(k) \propto k^{-4} \quad k \rightarrow \infty \quad , \quad (4.2)$$

que coincide con la observada en el caso de un potencial constante [VaiTra79]. Es más, simulaciones numéricas [RigMur04, RigMur05] son compatibles con (4.2) para algunos otros potenciales confinantes. En éste capítulo mostraremos que estas observaciones son consecuencia de que tal ley de potencias es válida para todo potencial V_{ext} (lo suficientemente suave), es decir que la distorsión en la distribución de impulsos asintótica se debe enteramente a las interacciones entre las partículas y es robusta frente a cambios en el potencial confinante. En las siguientes secciones encontraremos una expresión para la matriz densidad reducida que luego utilizaremos para derivar una aproximación válida para describir las propiedades del gas en escalas pequeñas. Aplicaremos dicha aproximación a un caso particular para verificar la consistencia del esquema comparándolo con soluciones exactas. Finalmente utilizaremos ésto para explorar el comportamiento asintótico de la distribución de impulsos y demostrar la ley de decaimiento (4.2) en el caso general.

4.1. Matriz densidad reducida

El objeto que buscaremos estudiar es la matriz densidad reducida:

$$n(x, y) = \langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(y) \rangle \quad . \quad (4.3)$$

Por medio de éste objeto podemos calcular los números de ocupación en cualquier base de estados de una partícula $\{\chi_i\}_{i \geq 1}$ (notar que éstos estados no necesariamente corresponden a autoestados del hamiltoniano). Es fácil ver que los números de ocupación $n(k)$ en ésta base son [Ballen98]:

$$n(k) = \langle \hat{n}_k \rangle = \int \chi_k^*(x) n(x, y) \chi_k(y) dx dy \quad , \quad (4.4)$$

donde \hat{n}_k es el operador de número asociado al k -ésimo estado de una partícula. De más está decir que la base discreta $\{\chi_i\}_{i \geq 1}$ puede ser reemplazada por una base continua (como por ejemplo autoestados de la posición) si así se lo desea.

A continuación buscaremos utilizar la solución escrita en términos de funciones de onda como hemos visto en el capítulo 2, por lo que será más conveniente traducir la ecuación (4.3) de segunda cuantificación al lenguaje de funciones de onda. Es fácil expandir el valor de espectación $\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(y) \rangle$ en una base de autoestados de la posición para ver que $n(x, y)$ también se puede calcular como:

$$n(x, y) = N \int \psi^*(x, x_2, \dots, x_N) \psi(y, x_2, \dots, x_N) dx_2, \dots, dx_N \quad ,$$

donde la función de onda ψ del sistema de N partículas está normalizada a la unidad.

Consideremos entonces la solución (2.36) para un autoestado del problema de N bosones (4.1)

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} A(x_1, \dots, x_N) \det [\phi_{\alpha_i}(x_j)] \quad ,$$

aquí las autofunciones $\{\phi_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ pueden ser cualesquiera autofunciones del problema de una partícula (2.31)

$$E_i \phi_i(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} + V_{\text{ext}}(x) \phi_i(x) \quad . \quad (4.5)$$

Para hacer más compacta la notación, a partir de éste punto, cambiaremos la rotulación de los estados escribiendo i para el índice α_i , es decir que denotaremos directamente al conjunto $\{\phi_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ por $\{\phi_i\}_{i=1}^N$. Entonces debe recordarse que a continuación $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ significará un conjunto cualquiera de N autofunciones diferentes de (2.31) y *no* el conjunto de las primeras N autofunciones ordenadas por su energía. Con ésto, la matriz densidad reducida puede escribirse como

$$\begin{aligned} n(x, y) &= \frac{1}{(N-1)!} \int \text{sgn}(x-x_2) \dots \text{sgn}(x-x_N) \text{sgn}(y-x_2) \dots \\ &\times \text{sgn}(y-x_N) \left(\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_N} \text{Sgn}(\sigma) \phi_{\sigma(1)}(x) \phi_{\sigma(2)}(x_2) \dots \phi_{\sigma(N)}(x_N) \right) \\ &\times \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{S}_N} \text{Sgn}(\lambda) \phi_{\lambda(1)}(y) \phi_{\lambda(2)}(x_2) \dots \phi_{\lambda(N)}(x_N) \right) \\ &\times dx_2, \dots, dx_N \quad , \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\text{Sgn}(\sigma)$ denota el signo de la permutación $\sigma \in \mathbb{S}_N$. Asumiendo que $y \geq x$ es fácil ver que

$$\begin{aligned} n(x, y) &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma, \lambda \in \mathbb{S}_N} \phi_{\sigma(1)}(x) \phi_{\lambda(1)}(y) \text{Sgn}(\sigma) \text{Sgn}(\lambda) \\ &\times \prod_{j=2}^N \left(\delta_{\sigma(j), \lambda(j)} - 2 \int_x^y \phi_{\sigma(j)}(z) \phi_{\lambda(j)}(z) dz \right) \quad , \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\delta_{l,s}$ es la delta de Kronecker. Si ahora buscamos remover la condición $y \geq x$, repetimos el mismo cálculo, lo que nos llevará a un resultado análogo.

El caso general se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
n(x, y) &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma, \lambda \in \mathbb{S}_N} \phi_{\sigma(1)}(x) \phi_{\lambda(1)}(y) \text{Sgn}(\sigma) \text{Sgn}(\lambda) \\
&\times \prod_{j=2}^N \left(\delta_{\sigma(j), \lambda(j)} - 2[\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \right) \\
&\times \int_x^y \phi_{\sigma(j)}(z) \phi_{\lambda(j)}(z) dz \quad . \quad (4.8)
\end{aligned}$$

La ecuación (4.8) es el resultado principal de esta sección y nos permite calcular de manera exacta la matriz densidad reducida del problema bosónico interactuante una vez especificadas las funciones de onda ϕ_i para el problema de una partícula. Es interesante en éste punto comparar la diferencia de la matriz densidad reducida (4.8) con la que obtendríamos para el caso del problema de *fermiones no interactuantes* $n_F(x, y)$. Procediendo como en el caso bosónico es fácil ver que la matriz densidad reducida para el sistema de N fermiones no interactuantes es:

$$n_F(x, y) = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma, \lambda \in \mathbb{S}_N} \phi_{\sigma(1)}(x) \phi_{\lambda(1)}(y) \text{Sgn}(\sigma) \text{Sgn}(\lambda) \prod_{j=2}^N \delta_{\sigma(j), \lambda(j)} \quad , \quad (4.9)$$

Esta ecuación es similar a (4.8) pero no contiene el término de prefactor $[\Theta(y-x) - \Theta(x-y)]$ en la productoria. Éste último será entonces el que generará la corrección bosónica respecto de la matriz densidad para el caso fermiónico. Si se consideran las propiedades locales de ambos sistemas, tomando $x = y$ en (4.8) y en (4.9), ambas matrices densidad coinciden, sin embargo para $x \neq y$ se presenta la diferencia antes señalada, que será fundamental como mostraremos a continuación.

La ecuación (4.9) puede reducirse aún más:

$$n_F(x, y) = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_N} \phi_{\sigma(1)}(x) \phi_{\sigma(1)}(y) \quad , \quad (4.10)$$

y por lo tanto

$$n_F(x, y) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \phi_i(y) \quad . \quad (4.11)$$

Es interesante utilizar las ecuaciones (4.11) y (4.8) para comparar los números de ocupación de los estados de una partícula asociados a ambos sistemas. Pongamos entonces por ejemplo el caso de un sistema de $N = 5$ bosones fuertemente interactuantes y 5 fermiones no interactuantes confinados en una caja de longitud $L = 1$. Supongamos que ambos sistemas se encuentran en el estado fundamental. En el cálculo de los números de ocupación utilizaremos como base

$$\left\{ \sqrt{2} \sin(\pi kx) \right\}_{k \geq 1}, \quad (4.12)$$

que es una base de autoestados del hamiltoniano de una partícula. El índice k da una medida del impulso lineal de las partículas. Para hallar los números de ocupación en esta base utilizaremos la ecuación (4.4). El cálculo en el caso fermiónico es trivial, mientras que para el sistema bosónico resulta complejo hallar un resultado analítico compacto. Debido a ésto el cálculo exacto se completó numéricamente. En la Figura (4.1) se muestra el resultado de ambos cálculos. El caso fermiónico, como es de esperar, presenta un escalón ubicado en el nivel de Fermi. En el caso bosónico en cambio el estado de menor energía para el problema de una partícula es el que se encuentra más poblado, como es de esperar para el estado fundamental de un sistema de bosones. Sin embargo, en éste último caso, todos los estados con $k \neq 0$ tienen una población no nula debido a las interacciones. Naturalmente la población de los estados depende de la forma específica que adopte el potencial confinante V_{ext} , no obstante, como mostraremos en las siguientes secciones siempre se tendrá una ley de decaimiento asintótica de la forma $n(k) \propto 1/k^4$ si k indexa los autoestados del momento.

4.2. Aproximación para impulsos grandes

La comparación de las ecuaciones (4.8) y (4.9) sugiere que, para el caso de impulsos grandes o lo que es equivalente para distancias cortas, la corrección bosónica a la población de los estados podría calcularse sólo teniendo

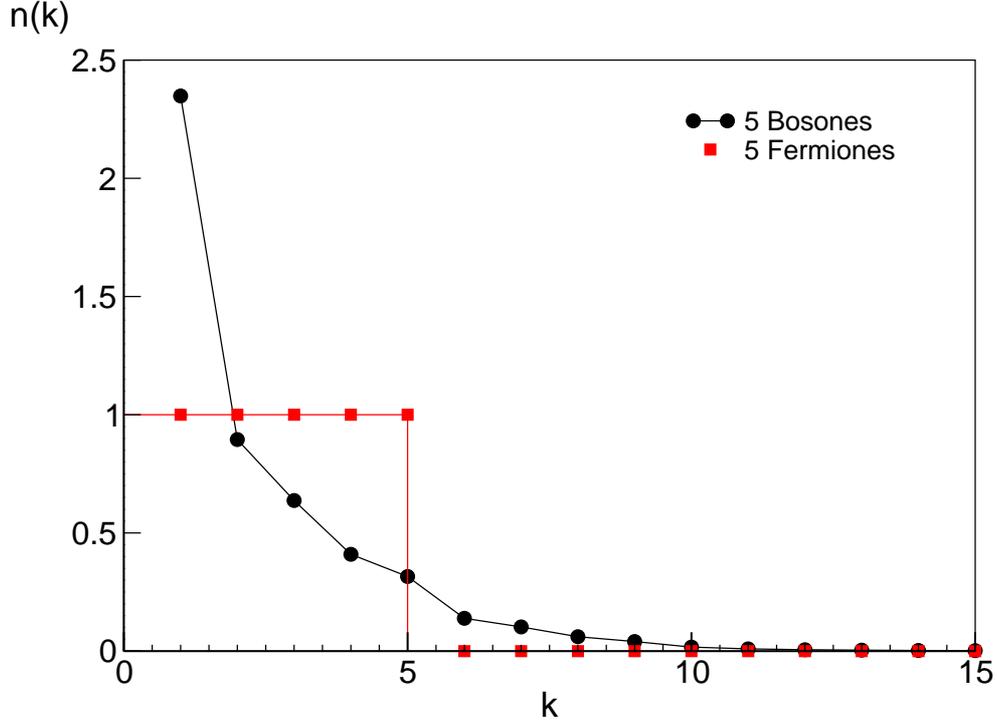


Figura 4.1: Números de ocupación $n(k)$ para la base de autoestados de una partícula $\{\sqrt{2} \sin(\pi kx)\}_{k \geq 1}$, en el estado fundamental de un sistema de $N = 5$ fermiones (cuadrados rojos) no interactuantes y $N = 5$ bosones (puntos negros) fuertemente interactuantes. Las poligonales sólo se exhiben por claridad, $n(k)$ es una función con dominio \mathbb{N} .

en cuenta al orden más bajo posible los términos correctivos de la forma: $-2[\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \int_x^y \phi_{\sigma(j)}(z) \phi_{\lambda(j)}(z) dz$. Esto resulta evidente del hecho de que las escalas pequeñas se harán importantes cuando $|x-y|$ sea pequeño, y justamente en éste caso, siendo el integrando regular, resultará que el factor $-2[\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \int_x^y \phi_{\sigma(j)}(z) \phi_{\lambda(j)}(z) dz$ está acotado por un número del orden de la longitud del intervalo $|x-y|$. Éste razonamiento heurístico, que justificaremos en detalle en la próxima sección, nos conducirá a una expresión

aproximada para la matriz densidad reducida que será válida para describir las propiedades de ésta cantidad en escalas pequeñas.

Por lo tanto, consideraremos como punto de partida la ecuación (4.8) y expandimos el producto quedándonos sólo con los términos al orden más bajo en \int_x^y . Luego de un poco de álgebra se encuentra que la forma aproximada para la matriz densidad reducida n_{ep} es:

$$n_{\text{ep}}(x, y) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\phi_i(y) + [\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \mathcal{N}(x, y) \quad , \quad (4.13)$$

donde la función $\mathcal{N}(x, y)$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, y) = & - 2 \sum_{i,j} \int_x^y \phi_i(x)\phi_i(y)\phi_j(z)\phi_j(z)dz \\ & + 2 \sum_{i,j} \int_x^y \phi_i(x)\phi_j(y)\phi_i(z)\phi_j(z)dz \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Obviamente el primer término de la ecuación (4.13) es $n_F(x, y)$, mientras que el segundo da la primer contribución no trivial. Además $\mathcal{N}(x, y)$ es una función suave muy simple de calcular dado que la suma en (4.14) ya no contiene permutaciones, por lo que ésta ecuación presenta grandes ventajas a la hora de calcular las propiedades en escalas pequeñas. Cabe notar que en [PezBul07] se deduce una ecuación equivalente pero en forma matricial, sin embargo allí no se demuestra la validez de la misma en el régimen de impulsos grandes, hecho que, como veremos, no es trivial. Otro punto que requiere mayor definición es cuál es la escala típica de transición que nos permite decir que las escalas espaciales son pequeñas. Es fácil identificar a tal escala como la escala más pequeña que esté presente en el conjunto de las autofunciones $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ (nuevamente éste razonamiento heurístico será justificado en detalle más adelante). Entonces, por ejemplo, si el potencial es suave la escala más pequeña quedará determinada por la cantidad de nodos de la autofunción (recordar que estamos en 1D), es decir, por el nivel de energía. Analicemos entonces nuevamente el ejemplo del sistema de bosones fuertemente interactuantes en una caja de longitud

$L = 1$. Si consideramos el estado fundamental de éste sistema interactuante tendremos que tomar las primeras N autofunciones del conjunto (4.12) y, por lo tanto, la escala de transición hacia el régimen asintótico será justamente N , ya que la N -ésima autofunción tendrá N nodos. A fin de comparar n_{ep} con la solución exacta calcularemos los números de ocupación en la base (4.12) para $k \gg N$ utilizando la expresión (4.13). Para esto tenemos que proyectar la ecuación (4.13) según (4.4). Éste cálculo sólo involucra la integración de productos de funciones trigonométricas y puede ser realizado analíticamente para N arbitrario. El resultado es

$$n(k) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{2k^2i^2 - k^2j^2 - i^2j^2}{(k^2 - i^2)^2(k^2 - j^2)} \quad k \gg N \quad . \quad (4.15)$$

Ésta relación se grafica en la Figura (4.2) junto con el cálculo exacto según la ecuación (4.8). Vemos que ambos están en perfecto acuerdo cuando $k \gg N$, como habíamos anticipado. Es más, éste caso particular que estamos exhibiendo aquí a modo de ejemplo ha sido estudiado en [FFGW03] por medio de otras técnicas, el resultado encontrado allí también coincide con (4.15) luego de tomar el límite termodinámico $N \gg 1$, en el que la expresión (4.15) toma la forma:

$$n(k) = \frac{4}{3\pi^2} \left(\frac{N}{k} \right)^4 \quad k \gg N \quad . \quad (4.16)$$

Debe recordarse que, siendo que estamos considerando el estado fundamental del sistema y utilizando las autofunciones de la base (4.12), el nivel de Fermi es $k_F = N$.

Finalmente notemos que del cálculo explícito (4.15) se obtiene una distribución de impulsos que decae como:

$$n(k) \propto \frac{1}{k^4} \quad , \quad (4.17)$$

donde la primer corrección a la misma es de orden $\mathcal{O}(k^{-6})$. En la próxima sección veremos que (4.17) es válida para todo potencial que sea lo suficientemente suave y discutiremos en mayor detalle la validez de (4.13).

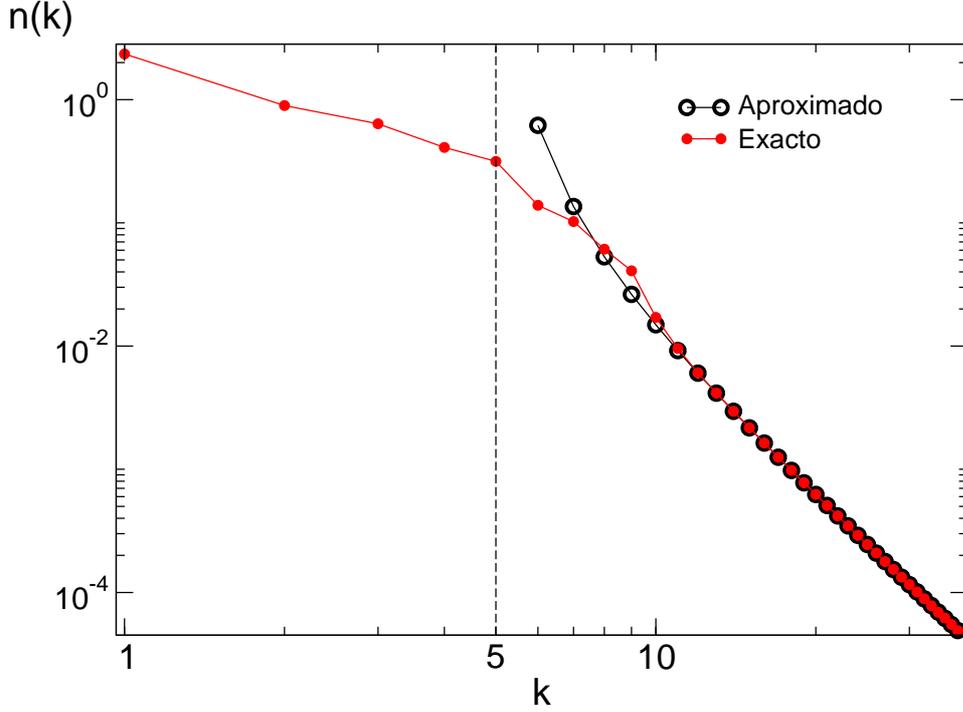


Figura 4.2: Números de ocupación $n(k)$ para la base de autoestados de una partícula $\{\sqrt{2} \sin(\pi kx)\}_{k \geq 1}$ en el estado fundamental de un sistema de $N = 5$ bosones fuertemente interactuantes. Resultado exacto (puntos llenos rojos) y cálculo aproximado (puntos huecos negros) según ecuación (4.15) que proviene de nuestra aproximación (4.13) para describir las propiedades en escalas pequeñas. Las poligonales sólo se exhiben por claridad, $n(k)$ es una función con dominio \mathbb{N} .

4.3. Comportamiento asintótico de $n(k)$

En esta sección mostraremos que la ley de potencias (4.17) es general para potenciales suaves. Nuestro punto de partida será la ecuación (4.13)

$$n_{\text{ep}}(x, y) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \phi_i(y) + [\Theta(y - x) - \Theta(x - y)] \mathcal{N}(x, y) ,$$

donde las funciones ϕ_i serán las autofunciones para un potencial confinante arbitrario (y suave). Para realizar la integral (4.4) tomaremos una base de ondas planas normalizadas en un segmento de longitud L :

$$\chi_k = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \quad . \quad (4.18)$$

A fin de discutir cada contribución por separado definimos el término fermiónico

$$\begin{aligned} n^A(x, y) &= \sum_{i=1}^N \phi_i(x)\phi_i(y) \\ n^A(k) &= \int \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} n^A(x, y) \frac{e^{iky}}{\sqrt{L}} dx dy \quad , \end{aligned} \quad (4.19)$$

y la corrección bosónica

$$\begin{aligned} n^B(x, y) &= [\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \mathcal{N}(x, y) \\ n^B(k) &= \int \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} n^B(x, y) \frac{e^{iky}}{\sqrt{L}} dx dy \quad . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Demostremos entonces que el primer término, n^A , no contribuye apreciablemente en el límite $k \rightarrow \infty$ cuando el potencial confinante es suave. Esto es evidente en el caso en que las autofunciones del hamiltoniano sean ondas planas, es decir si el potencial confinante es constante, ya que al ser el primer término el correspondiente al sistema de fermiones no interactuantes la proyección que determina la ocupación será nula si $|k| > k_{\max}$, donde $k_{\max} = k_F$ en el caso de que se estudie el estado fundamental o será eventualmente mayor para una autofunción genérica. Si el potencial no es plano esto no es trivial ya que la ocupación de estados de onda plana puede ser no nula para todo valor de k . Sin embargo, si el potencial confinante V_{ext} tiene todas sus derivadas continuas hasta la α -ésima, donde fuere sólo continuo a trozos (denotemos esta propiedad por \mathcal{C}^α), puede demostrarse que las autofunciones que resuelven la ecuación diferencial (4.5) son $\mathcal{C}^{\alpha+2}$ [Wolans07]. Teniendo en cuenta que si una función real f es de clase \mathcal{C}^q su coeficiente de Fourier $\int f(x) e^{ikx} dx$ decae como $1/k^{q+1}$,

podemos afirmar que el primer término de (4.13) decae como $1/k^{2(\alpha+3)}$. Por lo tanto, si el potencial confinante es lo suficientemente suave (por ejemplo un potencial con un escalón en una región cualquiera corresponde a tener $\alpha = 0$), la contribución del primer término $n^A(k)$ quedará acotada por

$$n^A(k) \leq \frac{1}{k^6} . \quad (4.21)$$

Como veremos a continuación la contribución del segundo término $n^B(k)$ siempre supera a ésta última. Para ello calculamos dicha contribución a los números de ocupación cuando $k \rightarrow \infty$, es decir tenemos que calcular la cantidad

$$\int \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} [\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \mathcal{N}(x,y) \frac{e^{iky}}{\sqrt{L}} dx dy .$$

Para realizar ésta integral cambiamos variables a X, r definidas por

$$x = X, \quad y = X + r , \quad (4.22)$$

con lo que obtenemos

$$n^B(k) = \frac{1}{L} \int e^{ikr} \mathcal{N}(X,r) [\Theta(r) - \Theta(-r)] dX dr , \quad (4.23)$$

es decir que la contribución del segundo término $n^B(k)$ a la distribución de impulsos $n(k)$ es

$$n^B(k) = \int e^{ikr} \left(\frac{1}{L} \int \mathcal{N}(X,r) dX \right) [\Theta(r) - \Theta(-r)] dr . \quad (4.24)$$

Entonces, claramente, surge de aquí que el decaimiento algebraico de la distribución de impulsos proviene de la singularidad del integrando en el entorno de $r = 0$. Ésta singularidad a su vez se encuentra modulada por el comportamiento de \mathcal{N} cerca del origen. Luego, podremos obtener la ley de potencias realizando una expansión de \mathcal{N} en un entorno de $r = 0$. Utilizando la definición

(4.14) y luego de un poco de álgebra se puede verificar que $\mathcal{N}(X, r)$ satisface:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(X, 0) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r}(X, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial r^2}(X, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^3 \mathcal{N}}{\partial r^3}(X, 0) &\neq 0 ,\end{aligned}\tag{4.25}$$

que surge como consecuencia de las simetrías de ésta función. Teniendo en cuenta las condiciones (4.25) obtenemos que, al orden más bajo en r ,

$$\begin{aligned}n^B(k) &\propto \int e^{ikr} r^3 [\Theta(r) - \Theta(-r)] dr \\ &= \frac{1}{i^3} \frac{\partial^3}{\partial k^3} \int e^{ikr} [\Theta(r) - \Theta(-r)] dr .\end{aligned}\tag{4.26}$$

Por lo tanto, ésto muestra que $n^B(k)$ contribuye a n_{ep} como

$$n^B(k) \propto \frac{1}{k^4} ,\tag{4.27}$$

por lo cual, si el potencial confinante es lo suficientemente suave, tendremos que

$$n(k) \propto \frac{1}{k^4} .\tag{4.28}$$

Notar que del cálculo se desprende que, para que sea correcto quedarnos con los primeros términos de la serie de Taylor de \mathcal{N} , el valor de r debe de ser menor que la escala más pequeña que aparezcan en las autofunciones del problema de una partícula ϕ_i , que definen la autofunción del problema interactuante. Es decir que la inversa de ésta escala fija el valor de k a partir del cual la aproximación $n(x, y) \approx n_{\text{ep}}(x, y)$ comienza a valer.

Debe notarse que aún debemos mostrar que la aproximación (4.13) es válida, más allá de nuestro razonamiento heurístico. Visto que el término n^B

contribuye como $1/k^4$, lo que deberíamos hacer es verificar que los términos en (4.8) que estamos despreciando en nuestra versión aproximada (4.13) contribuyen en menos de ésta cantidad. Es fácil ver que los únicos términos que podrían generar una contribución no trivial, es decir de orden r^3 , son solamente aquellos con dos o tres integrales \int_x^y . Veamos entonces que éstos términos no contribuyen apreciablemente. Primero debe notarse que todos los términos cuyo prefactor contiene dos integrales son regulares ya que los factores singulares se cancelan ($[\Theta(y-x) - \Theta(x-y)]^2 = 1$) y, por lo tanto, pueden despreciarse como ya hemos argumentado en el caso de n^A . Por otra parte, los términos en que aparecen tres integrales son de la forma:

$$\sum_{\sigma, \lambda \in \mathbb{S}_N} \phi_{\sigma(1)}(x) \phi_{\lambda(1)}(y) [\Theta(y-x) - \Theta(x-y)] \text{Sgn}(\sigma) \text{Sgn}(\lambda) \times \\ \left(\int_x^y \phi_{\sigma(a)}(z) \phi_{\lambda(a)}(z) dz \right) \left(\int_x^y \phi_{\sigma(b)}(z) \phi_{\lambda(b)}(z) dz \right) \times \\ \left(\int_x^y \phi_{\sigma(c)}(z) \phi_{\lambda(c)}(z) dz \right) \prod_{j=2, j \neq a, b, c}^N \delta_{\sigma(j), \lambda(j)} \quad , \quad (4.29)$$

donde el término completo de éste orden se obtiene sumando sobre todas las elecciones posibles de los índices a, b y c . Para una elección cualquiera de ellos, la contribución al orden r^3 se encuentra reemplazando las integrales por su aproximación a primer orden en r , es decir que el prefactor tiene la forma

$$\sum_{\sigma, \lambda \in \mathbb{S}_N} \text{Sgn}(\sigma) \text{Sgn}(\lambda) \phi_{\sigma(1)}(X) \phi_{\lambda(1)}(X) \times \\ \phi_{\sigma(a)}(X) \phi_{\lambda(a)}(X) \phi_{\sigma(b)}(X) \phi_{\lambda(b)}(X) \phi_{\sigma(c)}(X) \phi_{\lambda(c)}(X) \quad , \quad (4.30)$$

pero éste se cancela idénticamente al sumar sobre todas las permutaciones. Por lo tanto, sólo el término de primer orden en \int_x^y contribuye a orden r^3 y todos los demás contribuyen a órdenes superiores, generando así correcciones menores a $1/k^4$ en la ley de decaimiento. Esto completa nuestro argumento para garantizar la validez de (4.13).

De ésta manera vemos que la distribución de impulsos del gas en éste límite está dominada por las interacciones y su forma es robusta frente a variaciones en el potencial confinante. Hemos demostrado que para potenciales suaves siempre se obtiene un decaimiento algebraico con exponente independiente del potencial, resultado que generaliza lo ya observado en casos particulares [LaGiWr02, MiViTo02, FFGW03, RigMur04, RigMur05]. Además, la expresión aproximada para la matriz densidad reducida (4.13) converge rápidamente a su valor asintótico, como puede verse de la comparación con el caso exacto (Figura 4.2).

En conexión con el problema estudiado en el capítulo anterior, donde la presencia de una superficie periódica inducía un cambio cualitativo en el sistema, vemos que un sistema como éste no sería adecuado para intentar detectar las pequeñas perturbaciones sobre el condensado debido al potencial de Casimir-Polder lateral debido al rol dominante que juegan las interacciones.

Capítulo 5

Expansión del BEC en presencia de superficies estocásticas

La dinámica de una partícula cuántica en presencia de un potencial aleatorio débil posee características que la distinguen notablemente de su análogo clásico. En particular aquí estudiaremos el fenómeno de localización, en el que la envolvente de la función de onda que describe los estados de una partícula decrece de manera exponencial debido a la interacción con el potencial estocástico [LiGrPa88]. Éste efecto puede entenderse teniendo en cuenta las múltiples reflexiones de una onda plana debido al potencial, dado que los cambios de fase no serán todos idénticos, como ocurriría en un potencial periódico, y por lo tanto estos generarán una supresión en la probabilidad de propagación de la partícula cuando el efecto de interferencia se acumule. Desde el primer trabajo de P. W. Anderson [Ander58] en el que establecieron las primeras estimaciones (en ciertos casos particulares) de la magnitud del potencial aleatorio necesario para la ausencia de transporte, se han realizado avances significativos en éste campo [KraMaK93]. En 3D la localización sólo se da para los estados con una energía menor a un valor umbral, por lo que se habla de la existencia de un borde de movilidad. Sin embargo, si tomamos por caso una grilla

unidimensional en la que el ruido está descorrelacionado entre los diferentes sitios, todos los estados de ese sistema se encuentran exponencialmente localizados, incluso en el límite de un potencial aleatorio débil [Ishii73] *. En éste caso la escala espacial típica de decaimiento de la función de onda, conocida como longitud de localización, divergerá cuando el potencial tienda a cero, sin embargo para cualquier valor finito los autoestados del hamiltoniano estarán exponencialmente localizados, lo cual se contrapone al caso clásico en el que, para energías lo suficientemente grandes, uno debería esperar sólo una pequeña perturbación en la propagación.

Desde el punto de vista experimental los sistemas de gases ultrafríos han abierto la posibilidad para poner a prueba estos modelos [Modug10, SaPaLe10] con un control sin precedentes sobre los parámetros que definen el sistema. No sólo se ha logrado controlar el potencial desordenado presente [BJZBHL08], sino también, simultáneamente, eliminar las interacciones entre los átomos [RDEFFF08]. De ésta forma, actualmente se tiene acceso no sólo al caso del problema lineal de una partícula no interactuante en un potencial desordenado, sino que además se puede estudiar experimentalmente la complejidad introducida por la no linealidad en el sistema interactuante. Este último caso puede presentar marcadas diferencias: de hecho, si las interacciones repulsivas son lo suficientemente intensas, el efecto de localización puede perderse [PikShe08, GarShe09].

En este capítulo estudiaremos la dinámica de un condensado de Bose-Einstein expandiéndose en presencia de una superficie con un perfil rugoso estocástico, lo cual es de interés práctico como una posible configuración en la que se ponga de manifiesto la interacción de Casimir-Polder lateral en una geometría no trivial. El efecto de la superficie estocástica será inducir un potencial, también aleatorio, sobre el condensado y por lo tanto a partir de la dinámica del mismo se podrá obtener información sobre la interacción átomo-superficie. En

*No obstante, en el caso en que existen correlaciones entre los sitios de la grilla serán posibles también estados extendidos [IzrKro99]

éste contexto nuestro aporte será caracterizar el perfil de densidad asintótico de un condensado que se expande en presencia de la superficie. Consideraremos tanto el caso perturbativo de distancias relativamente grandes, donde es posible avanzar sobre la solución analítica, como también en el caso no perturbativo, donde hemos implementado un método pseudo-espectral para resolver numéricamente la ecuación de Gross-Pitaevskii en las configuraciones de interés. De esta forma estableceremos un posible marco en el cual la interacción de Casimir-Polder lateral debida a una superficie con un perfil estocástico se pone de manifiesto.

A fin de modelar el sistema utilizaremos la ecuación de Gross-Pitaevskii efectiva en 1D que ha sido discutida en el Capítulo 3. En la primer sección definiremos con exactitud qué tipo de configuraciones buscaremos explorar y qué parámetros son los relevantes en este problema. En las siguientes secciones generalizaremos la solución de un modelo perturbativo para la expansión del BEC [SPCLBS07, SPCLBA08]. Este modelo, que ya ha sido aplicado a casos similares, nos permitirá predecir de manera aproximada el comportamiento del sistema y establecer los valores típicos en los cuales se podría observar el efecto. Finalmente compararemos el modelo perturbativo con la solución numérica de las ecuaciones y además utilizaremos éstas últimas para explorar posibilidades fuera del régimen perturbativo.

5.1. Formulación del problema

Consideraremos un condensado unidimensional en el régimen de interacciones débiles, el cual se podrá describir por una ecuación de Gross-Pitaevskii efectiva en 1D como hemos discutido detalladamente en el capítulo 3. Buscaremos estudiar el perfil de densidad del mismo cuando el condensado se expande en presencia de una superficie estocástica como la que se muestra en la Figura 5.1. Si bien en esta discusión consideraremos el caso en que existe simetría de traslación en la dirección \hat{y} , esta restricción no será importante cuando el radio

típico del condensado, σ , sea mucho menor a la distancia media a la superficie, z_0 (ver Figura). Esto es así porque, como se ha indicado anteriormente (ver sección 3.3), existe una supresión exponencial de los modos que componen U_L proporcional a $e^{-2\pi z_0/\lambda_i}$, donde λ_i es la longitud de onda del modo. Por lo tanto, siendo que estamos considerando el caso $\sigma \ll z_0$ sólo será relevante una variación en la dirección \hat{y} si la longitud de onda típica λ_i verifica $\lambda_i < \sigma$, pero entonces tendremos $\lambda_i < \sigma \ll z_0$, lo que nos dice que las variaciones en esa dirección se vuelven irrelevantes por estar exponencialmente suprimidas con un factor $z_0/\lambda_i \gg 1$.

Más específicamente, buscaremos calcular el perfil de densidad $n(x, t)$ cuando

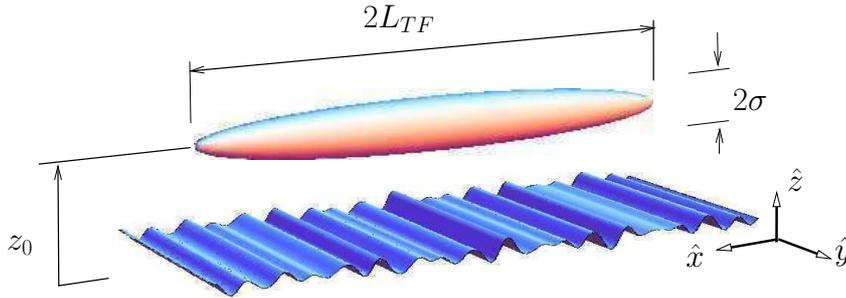


Figura 5.1: Condensado de ancho típico σ y longitud de Thomas-Fermi L_{TF} en la cercanía de una superficie estocástica.

este se promedia sobre infinitas realizaciones de la superficie estocástica. Denotaremos los promedios sobre las variables aleatorias por $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$, por lo tanto nuestro objetivo será caracterizar la función $\langle\langle n(x, t) \rangle\rangle$ y su relación con los parámetros que definen la superficie. El resultado básico que buscamos establecer es que, luego de la expansión del condensado a través del potencial ruidoso, parte de los átomos permanecerán atrapados desarrollando un perfil de densidad estacionario. Dicho perfil dependerá obviamente del potencial aleatorio y de esta forma la interacción del condensado con la superficie dejará una huella en él. Naturalmente gran parte del análisis a continuación no hará uso explícito de la situación concreta que acabamos de describir, sino que buscaremos

establecer el comportamiento de $\langle\langle n(x, t) \rangle\rangle$ en el caso de un potencial aleatorio genérico, para luego especializarlo en el de una superficie.

Para describir la expansión del gas modelaremos el sistema a través de la ecuación de Gross-Pitaevskii:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) + U_L(x, z_0)\Theta(t) \varphi(x, t) + \frac{m\omega_x^2 x^2}{2}\Theta(-t) \varphi(x, t) + g_{\text{ef}}|\varphi(x, t)|^2 \varphi(x, t) \quad , \quad (5.1)$$

notar que para $t \leq 0$ el gas sólo se encuentra en presencia del potencial confinante $m\omega_x^2 x^2/2$, mientras que a partir de $t = 0$ la trampa parabólica axial es retirada y el sistema se expone a la presencia de la superficie que genera un potencial $U_L(x, z_0)$. Supondremos que para $t \leq 0$ el sistema se encuentra en el estado fundamental por lo que, luego de apagar la trampa, el término cinético y las interacciones repulsivas tenderán a expandir el gas. El potencial de Casimir-Polder lateral U_L quedará determinado una vez que especifiquemos la estructura de la superficie. Esta última será modelada en la forma

$$h(x) = \sum_{i=1}^{N_{\text{max}}} h_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_i} x + \theta_i\right) \quad , \quad (5.2)$$

donde N_{max} será un parámetro fijo que representa la máxima cantidad de armónicos que se tendrán en cuenta en las simulaciones y los parámetros aleatorios que definen dichos armónicos serán h_i , λ_i y θ_i . Posteriormente utilizaremos un modelo concreto a la hora de definir cuáles son las densidades de probabilidad de los parámetros h_i y λ_i , sin embargo en lo que sigue siempre nos restringiremos al caso en que $\theta_i \in [0, 2\pi]$ con densidad de probabilidad uniforme, lo cuál asegura la simetría de traslación para los correladores de la superficie (y del potencial).

5.2. Solución perturbativa

En esta sección estudiaremos una solución perturbativa al problema anterior que nos permitirá identificar qué rol juega cada uno de los paráme-

tros que definen el problema. Para ello resumiremos brevemente lo conocido para el problema de la expansión de un condensado en un potencial ruidoso [SPCLBS07, SPCLBA08] y luego generalizaremos ese análisis a nuestro caso de interés.

Para calcular el perfil de densidad asintótico $\langle\langle n(x) \rangle\rangle$ dividiremos la evolución del condensado en dos etapas. Inmediatamente después de apagar la trampa parabólica las interacciones serán relativamente importantes debido a la alta densidad y, por lo tanto, en la etapa inicial de la expansión el potencial ruidoso U_L sólo será una pequeña perturbación respecto del término repulsivo debido a las interacciones, por lo que el primero podrá ser despreciado. Ésta primera etapa, que diremos ocurre en un intervalo $(0, t^*)$, será válida en una escala de tiempo típica del orden de $t^* > 1/\omega_x$. A medida que el condensado se expanda la densidad va a disminuir, lo cual hará que las interacciones sean cada vez menos importantes. Entonces, para $\omega_x t \gg 1$, el problema se volverá no interactuante. Luego, en esta última etapa, se podrá calcular la localización del perfil de densidad utilizando los resultados conocidos para el problema de localización de partículas no interactuantes en 1D [LiGrPa88]. Para enlazar ambas etapas de la expansión tendremos que calcular la transformada de Fourier del estado φ luego de la expansión inicial (cuando $\omega_x t \gg 1$) y proyectarla sobre los estados localizados del problema no interactuante. Finalmente lograremos obtener una expresión para el perfil estacionario en términos de la condición inicial del problema y las propiedades del potencial aleatorio.

A continuación utilizamos este razonamiento, desarrollado parcialmente también en [SPCLBA08], para calcular $\langle\langle n(x) \rangle\rangle$. Si bien este modelo unidimensional tendrá sentido matemáticamente para estudiar el perfil de densidad incluso en el caso $|x| \rightarrow \infty$, debe notarse que si la densidad fuese extremadamente baja, de forma que la distancia entre los átomos d sea mucho mayor al valor de la longitud de recuperación ξ , la aproximación de campo medio dejaría de valer. Sin embargo, en los casos particulares que buscaremos estudiar, los cuales contemplarán además el tamaño finito $|x| = L_{\max}$ en que el sistema puede ser

observado, la aproximación de campo medio será válida.

5.2.1. Expansión del condensado interactuante

Consideraremos entonces primero la evolución en el intervalo $(0, t^*)$. El estado inicial del condensado se encuentra resolviendo la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo

$$\mu\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} \varphi(x) + g_{\text{ef}} |\varphi(x)|^2 \varphi(x) . \quad (5.3)$$

Esto se puede hacer bajo la aproximación de Thomas-Fermi descrita en el capítulo 2, la cual nos da como estado inicial

$$\varphi(x, 0) = \sqrt{\frac{\mu}{g_{\text{ef}}}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{L_{TF}}\right)^2} , \quad (5.4)$$

donde $L_{TF} = \sqrt{2\mu/m\omega_x^2}$, y el potencial químico μ se obtiene de la condición de normalización $\mu = (m\omega_x^2/8)^{1/3} (3g_{\text{ef}}N/2)^{2/3}$. Como veremos en la última sección de este capítulo, donde compararemos el modelo con soluciones numéricas exactas, la aproximación anterior es válida en el rango de parámetros en el que estamos interesados. Cuando la aproximación de Thomas-Fermi es válida, la evolución se puede resolver de manera aproximada a través de una solución autosemejante de la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x, t) + g_{\text{ef}} |\varphi(x, t)|^2 \varphi(x, t) . \quad (5.5)$$

Dicha solución tiene la forma [CasDum96]**:

$$\varphi(x, t) = \left(\frac{\varphi(x/b(t), 0)}{\sqrt{b(t)}} \right) e^{imx^2\dot{b}(t)/2\hbar b(t)} , \quad (5.6)$$

donde la función $b(t)$ satisface

$$\ddot{b}(t) = \frac{\omega_x^2}{b^2(t)} , \quad b(0) = 1 , \quad \dot{b}(0) = 0 . \quad (5.7)$$

**Soluciones semejantes en $d > 1$ se discuten en también en [SSCVL11]

Es fácil integrar esta ecuación para obtener $b(t)$ de manera implícita. Dado que estamos interesados en la solución a tiempos grandes $\omega_x t \gg 1$, basta hallar la solución asintótica, la cual resulta $b(t) \simeq \sqrt{2}\omega_x t$. Esto entonces nos da una aproximación para el estado del condensado $\varphi(x, t)$ una vez terminada la expansión inicial debido a las interacciones repulsivas. Para tener los elementos necesarios en la próxima etapa de la evolución definiremos la transformada de φ por:

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{-ikx} dx \quad . \quad (5.8)$$

Utilizando la solución explícita (5.6) obtenemos

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{\varphi(x/b, 0)}{\sqrt{b}} e^{i\frac{mb}{2\hbar}x^2} dx \quad , \quad (5.9)$$

que, haciendo el cambio de variables $x = bL_{TF} \rho$, nos lleva a

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{L_{TF} b^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikL_{TF}b\rho} \varphi(L_{TF} \rho, 0) e^{i\frac{mL_{TF}^2 bb}{2\hbar}\rho^2} d\rho \quad . \quad (5.10)$$

Si aquí tenemos en cuenta la solución (5.4) podemos truncar los límites de integración a

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{L_{TF} b^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ikL_{TF}b\rho} \varphi(L_{TF} \rho, 0) e^{i\frac{mL_{TF}^2 bb}{2\hbar}\rho^2} d\rho \quad . \quad (5.11)$$

Esta integral es de la forma

$$\int_{-1}^1 e^{-iq_2\rho} f(\rho) e^{iq_1\rho^2} d\rho = e^{i\frac{q_2^2}{4q_1}} \int_{-1}^1 e^{iq_1(\rho - q_2/2q_1)^2} f(\rho) d\rho \quad , \quad (5.12)$$

donde

$$q_1 = \frac{m}{2\hbar} bb L_{TF}^2 \quad (5.13)$$

y

$$q_2 = kbL_{TF} \quad . \quad (5.14)$$

Es más, dado que $\omega_x t \gg 1$ tendremos que $b \approx \sqrt{2}\omega_x t$, con lo cual

$$q_1 \approx \frac{m\omega_x L_{TF}^2}{\hbar} \omega_x t \quad . \quad (5.15)$$

Pero, teniendo en cuenta que bajo la aproximación de Thomas-Fermi $\mu \gg \hbar^2/2mL_{TF}^2$ y además que $\mu = m\omega_x^2 L_{TF}^2/2$, se obtiene $m\omega_x L_{TF}^2/\hbar \gg 1$ y, por lo tanto, sólo debemos calcular la integral (5.12) en el límite $q_1 \gg 1$. En dicho límite tendremos una integral Gaussiana que se podrá calcular aproximadamente por el método de fase estacionaria como

$$\int_{-1}^1 e^{-iq_2\rho} f(\rho) e^{iq_1\rho^2} d\rho \approx \sqrt{\frac{i\pi}{q_1}} e^{i\frac{q_2^2}{4q_1}} f(q_2/2q_1) \Theta(1 - |q_2/2q_1|) \quad (q_1 \gg 1) \quad , \quad (5.16)$$

donde

$$\frac{q_2}{2q_1} \approx k \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega_x} L_{TF}} = k \xi \quad . \quad (5.17)$$

Aquí hemos definido la longitud de recuperación ξ por $\xi = \hbar/\sqrt{4m\mu}$ (notar que ésta contiene un factor $1/\sqrt{2}$ adicional respecto de (2.26)). Cuando $|q_2/2q_1| > 1$ la integral (5.12) no es estrictamente nula, pero puede ser estimada haciendo una expansión en torno a $\rho = \pm 1$, encontrando que la misma está acotada por $|f'(\pm 1)|/q_2^2 \ll 1$, y por lo tanto en lo que sigue podremos despreciar esta pequeña contribución. Usando entonces la identidad (5.16) tenemos que

$$\hat{\varphi}(k, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega_x}}} \Theta(1 - |k\xi|) \varphi(L_{TF} k\xi, 0) e^{iw(k, t)} \quad , \quad (5.18)$$

donde la función $w(k, t)$ es una fase irrelevante en lo que sigue. Finalmente, si usamos (5.4) para calcular $\varphi(L_{TF} k\xi, 0)$ es fácil ver que

$$\hat{\varphi}(k, t) = \sqrt{\frac{3N\xi}{4}} (1 - k^2\xi^2) \Theta(1 - |k\xi|) e^{iw(k, t)} \quad . \quad (5.19)$$

Notar entonces que si bien (5.19) depende del tiempo a través de la fase $w(k, t)$, la distribución de impulsos $|\hat{\varphi}(k, t)|^2$ luego de la primer etapa de la expansión se vuelve estacionaria

$$|\hat{\varphi}(k, t)|^2 = \frac{3N\xi}{4} (1 - k^2\xi^2) \Theta(1 - |k\xi|) \quad , \quad \omega_x t \gg 1 \quad . \quad (5.20)$$

Este es el resultado que necesitaremos utilizar en la próxima sección.

5.2.2. Expansión no interactuante en el potencial desordenado

En esta sección buscaremos calcular el perfil de densidad estacionario y promediado sobre las realizaciones del ruido. Una vez que el condensado se ha expandido lo suficiente el término no lineal se volverá despreciable y por lo tanto el problema será aproximadamente no interactuante. Por lo tanto buscaremos proyectar el estado calculado en la sección anterior en los autoestados del problema no interactuante que corresponde a esta nueva etapa de la expansión. Para hacer esto discutiremos brevemente primero las propiedades de dichos estados. En el cálculo a continuación exhibiremos un método para calcular el exponente asociado a la inversa de la longitud de localización, sin embargo no obtendremos de manera explícita la ley de decaimiento exponencial que se observa en las simulaciones numéricas, sino que el cálculo sólo será de utilidad para capturar una expresión analítica del mismo.

Para cada realización del potencial los autoestados del problema no interactuante serán una solución de

$$E\phi_k(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi_k(x)}{dx^2} + U_L(x, z_0) \phi_k(x) \quad , \quad (5.21)$$

donde el potencial aleatorio U_L es una pequeña perturbación. Para calcular la forma en la que éstos decaen es conveniente introducir las variables $\rho_k(x)$ y $\theta_k(x)$ definidas por

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= \rho_k(x) \sin(\theta_k(x)) \\ \phi'_k(x) &= k\rho_k(x) \cos(\theta_k(x)) \quad , \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde $\phi'_k(x) = d\phi_k(x)/dx$. Por lo tanto, el problema de autovalores (5.21) y la condición

$$\underbrace{(\rho_k(x) \sin(\theta_k(x)))'}_{\phi_k(x)} = \underbrace{k\rho_k(x) \cos(\theta_k(x))}_{\phi'_k(x)} \quad , \quad (5.23)$$

nos dan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
k\rho_k(x) \cos(\theta_k(x)) &= \rho'_k(x) \sin(\theta_k(x)) + \rho_k(x) \theta'_k(x) \cos(\theta_k(x)) \\
k\rho_k(x) \sin(\theta_k(x)) &= -\rho'_k(x) \cos(\theta_k(x)) + \rho_k(x) \theta'_k(x) \sin(\theta_k(x)) + \\
&+ \frac{2mU_L(x, z)}{k} \rho_k(x) \sin(\theta_k(x)) \quad . \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Notar que de esta forma transformamos la ecuación de segundo orden para ϕ_k en dos ecuaciones de primer orden. Éstas pueden ser desacopladas fácilmente, multiplicando por sin y cos y tomando la diferencia o multiplicando por cos y sin y tomando la suma, lo que nos lleva a

$$\begin{aligned}
\theta'_k(x) &= k - \frac{2m}{\hbar^2 k} U_L(x, z) \sin^2(\theta_k(x)) \\
\frac{\rho'_k(x)}{\rho_k(x)} &= \frac{m}{\hbar^2 k} U_L(x, z) \sin(2\theta_k(x)) \quad . \quad (5.25)
\end{aligned}$$

La primer ecuación sólo involucra a la función $\theta_k(x)$ mientras que, una vez resuelta ésta, la segunda se puede calcular por integración directa. En el caso de un potencial débil podemos resolverlas de manera perturbativa. La solución de la primer ecuación al orden más bajo no trivial es

$$\theta_k(x) = \theta_0 + kx - \frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^x U_L(s, z) \sin^2(\theta_0 + ks) ds \quad . \quad (5.26)$$

Por otro lado la solución al orden más bajo para ρ_k es

$$\rho_k(x) = \rho_k(0) e^{\int_0^x \frac{m}{\hbar^2 k} U_L(\xi, z) \sin[2(\theta_0 + k\xi)] d\xi} \quad . \quad (5.27)$$

A partir de esta ecuación podemos calcular la envolvente del perfil asintótico de $\langle\langle |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle$ cuando el ruido es gaussiano. Recordando que, a partir del teorema de Wick [Zinn02], para una variable gaussiana A se tiene que:

$$\langle\langle e^A \rangle\rangle = e^{\langle\langle A^2 \rangle\rangle/2} \quad , \quad (5.28)$$

tenemos que

$$\langle\langle \rho_k^2(x) \rangle\rangle = \rho_k^2(0) e^{\int_0^x \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2 k}\right)^2 \langle\langle U_L(\xi, z) U_L(\xi', z) \rangle\rangle \sin[2(\theta_0 + k\xi)] \sin[2(\theta_0 + k\xi')] d\xi d\xi'} \quad . \quad (5.29)$$

Cambiando variables a $(\xi + \xi')/2$ y $\xi - \xi'$ es fácil ver que esta expresión, cuando $x \rightarrow \infty$, se comporta como

$$\langle \langle \rho_k^2(x) \rangle \rangle \propto e^{2\gamma(k)x} , \quad x \rightarrow \infty , \quad (5.30)$$

donde el exponente $\gamma(k)$ queda determinado por:

$$\gamma(k) = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} \int_{-\infty}^{\infty} C(x) \text{Cos}(2kx) dx = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} \hat{C}(2k) , \quad (5.31)$$

aquí $C(x)$ es la función de dos puntos del potencial aleatorio

$$C(x) = C(|x|) = \langle \langle U_L(x', z_0) U_L(x + x', z_0) \rangle \rangle . \quad (5.32)$$

Para hacer más compacta la notación omitimos la dependencia de $C(x)$ y $\gamma(k)$ con z_0 . En la ecuación (5.30) se encuentra una envolvente con exponente positivo cuando $x \rightarrow \infty$ lo cual hace que el límite esté mal definido. El problema radica en que la solución de la ecuación es una suma de una exponencial creciente y otra decreciente y, al no estar fijando aquí ninguna condición de contorno, sólo se obtiene la contribución de la componente divergente cuando $x \rightarrow \infty$. Sin embargo si construyéramos una solución exacta con amplitud finita en un entorno de $x = 0$ e impusiéramos que la misma decrezca cuando $|x| \rightarrow \infty$ obtendríamos una envolvente de la forma $\propto e^{-2\gamma(k)|x|}$ [LiGrPa88, SPCLBA08]. La distancia característica $1/2\gamma(k)$ es la longitud de localización y como muestra la fórmula (5.31) está determinada por la transformada de la función de dos puntos del potencial estocástico. Dado que los estados no perturbados son ondas planas la condición de consistencia para poder utilizar la expansión perturbativa en el potencial al orden más bajo resulta $\gamma(k) \ll k$, de forma que la longitud de localización típica de un modo sea mucho mayor a la longitud de onda característica.

Sin embargo debe notarse que este formalismo solamente es de utilidad para obtener una expresión analítica del exponente $\gamma(k)$ y nada dice del prefactor asociado a las autofunciones promediadas. Es más, el caracter exponencial encontrado ocurre bajo la condición $\gamma(k) \geq \epsilon > 0$, ya que en el caso contrario,

donde no es posible tomar el límite $\gamma(k)|x| \rightarrow \infty$, las desviaciones respecto del decaimiento exponencial pueden ser importantes. En un cálculo más complejo se puede demostrar que la forma del prefactor y las desviaciones respecto del carácter exponencial quedan incluidas en la fórmula integral [Gogoli76, GoMeRa76, Berezi74]:

$$\langle\langle |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle = \frac{\pi^2 \gamma(k)}{2} \int_0^\infty u \operatorname{Sinh}(\pi u) \left(\frac{1+u^2}{1+\operatorname{Cosh}(\pi u)} \right)^2 e^{-2(1+u^2)\gamma(k)|x|} du \quad . \quad (5.33)$$

Si volvemos al caso en que $\gamma(k) \neq 0$ y se considera el límite $\gamma(k)|x| \gg 1$, podemos aproximar el integrando de la ecuación anterior por:

$$\begin{aligned} & u \operatorname{Sinh}(\pi u) \left(\frac{1+u^2}{1+\operatorname{Cosh}(\pi u)} \right)^2 e^{-2u^2\gamma(k)|x|} \approx \\ & \approx \frac{\pi u^2}{4} e^{-2u^2\gamma(k)|x|} \quad , \end{aligned} \quad (5.34)$$

con lo que se tiene fácilmente

$$\langle\langle |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle = \frac{\gamma(k)\pi^{7/2}}{64\sqrt{2}} \frac{e^{-2\gamma(k)|x|}}{(\gamma(k)|x|)^{3/2}} \quad . \quad (5.35)$$

De aquí resulta claro que la primer corrección a la ley de decaimiento exponencial es algebraica. En lo que sigue utilizaremos el resultado (5.33) para estudiar el problema de la expansión.

Conocido el comportamiento de las funciones de onda de una partícula podemos proceder para obtener la evolución de $\langle\langle n(x,t) \rangle\rangle$ a todo tiempo $t > t^*$. Para ello, para cada realización del potencial, obtenemos la evolución ulterior del sistema proyectando el estado según:

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_k, \varphi(x,t^*)) \phi_k(x) e^{-iE_k(t-t^*)} dk \quad . \quad (5.36)$$

Luego, el perfil de densidad se podrá obtener a partir de

$$|\varphi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_k, \varphi(x,t^*)) (\phi_{k'}, \varphi(x,t^*))^* \phi_k(x) \phi_{k'}(x) e^{-i(E_k - E_{k'})(t-t^*)} dk dk' \quad . \quad (5.37)$$

En este punto debemos tomar el valor de espectación sobre las realizaciones del potencial U_L . Cuando el perfil de densidad se vuelve estacionario se puede ver que los términos en (5.37) con $k \neq k'$ no contribuyen apreciablemente [SPCLBA08], con lo cual obtenemos

$$\langle\langle |\varphi(x, t)|^2 \rangle\rangle \approx \int \langle\langle |(\phi_k, \varphi(x, t^*))|^2 |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle dk . \quad (5.38)$$

Finalmente, si la longitud de localización es mayor al tamaño típico inicial del condensado, las funciones ϕ_k serán prácticamente ondas planas en el rango en que $\varphi(x, t^*) \neq 0$, luego

$$\langle\langle |\varphi(x, t^*)|^2 \rangle\rangle \approx \int |\hat{\varphi}(k, t)|^2 \langle\langle |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle dk . \quad (5.39)$$

Vemos entonces que el perfil de densidad asintótico está determinado aproximadamente por la transformada de Fourier (5.20), la cual es independiente del tiempo, y el promedio sobre el ruido de las autofunciones del problema no interactuante (5.33). Este es el resultado principal de esta sección.

Más explícitamente podemos decir que la solución estacionaria deberá satisfacer:

$$\langle\langle n(x) \rangle\rangle = \frac{3N\xi}{4} \int (1 - k^2\xi^2) \Theta(1 - |k\xi|) \langle\langle |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle dk , \quad (5.40)$$

que junto con las fórmulas (5.33) y (5.31) que permiten calcular $\langle\langle |\phi_k|^2 \rangle\rangle$ y $\gamma(k)$ dan un sistema cerrado para calcular el perfil de densidad promediado. Dependiendo del comportamiento del exponente $\gamma(k)$ se obtendrán diferentes situaciones para la función $\langle\langle n(x) \rangle\rangle$. A continuación procederemos a analizar el resultado de este modelo perturbativo, en función de las características del potencial definidas a través de la función $\gamma(k)$ y posteriormente utilizaremos esos resultados para estudiar el caso específico de una superficie.

5.2.3. Análisis del modelo perturbativo

Supongamos como primer caso que la transformada de la función de dos puntos del potencial $\hat{C}(2k)$ no se anula en el rango $(0, 1/\xi)$ asociado al intervalo

de integración en (5.40), entonces según la ecuación (5.31) se tendrá también que $\gamma(k) = (m/4\hbar^2 E_k) \hat{C}(2k) \neq 0 \forall k \in (0, 1/\xi)$, como representamos en la Figura 5.2. En estas condiciones el perfil de densidad localizado se compone de

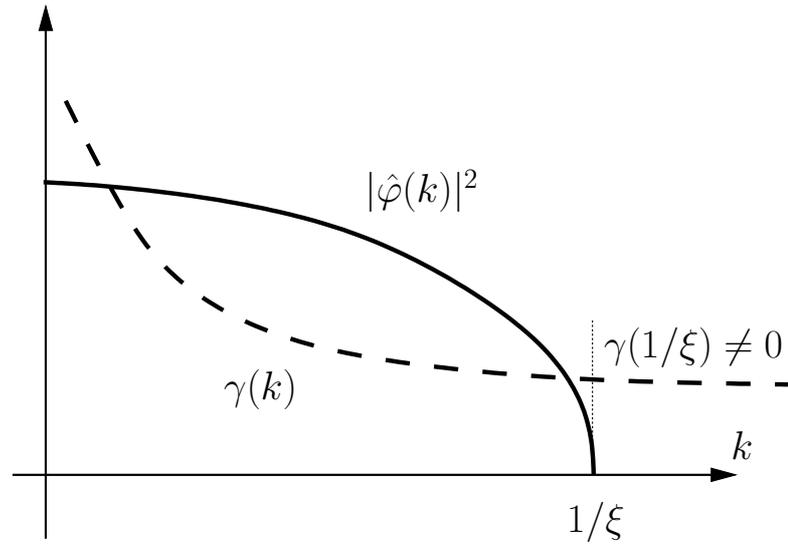


Figura 5.2: Transformada de Fourier del estado y función $\gamma(k)$ que determinan el perfil $\langle\langle n(x) \rangle\rangle$ según la ecuación (5.40). Dado que $\gamma(k) \neq 0 \forall k \in (0, 1/\xi)$ el perfil de densidad se encuentra exponencialmente localizado con una longitud de localización dada por $1/2\gamma(1/\xi)$.

una suma de funciones exponencialmente localizadas y por lo tanto la envolvente de tal perfil decaerá con una longitud característica igual a la máxima longitud de decaimiento de las exponenciales que componen el perfil. Si $\gamma(k)$ es una función monótona decreciente (como generalmente será el caso) la longitud máxima corresponde al menor valor de $\gamma(k)$ presente en las funciones que componen el perfil, es decir a $\gamma(1/\xi)$. Por lo tanto, bajo estas condiciones, se observará un perfil exponencialmente localizado con una longitud de localización $1/2\gamma(1/\xi)$.

Supongamos ahora el caso contrario, en el que existe un valor de k , digamos k_c , tal que $k_c < 1/\xi$ y $\gamma(k_c) = 0$, como se muestra en la Figura 5.3. En este

caso los modos con $k \in (k_c, 1/\xi)$ continuarán expandiéndose y eventualmente a tiempos lo suficientemente grandes no contribuirán al perfil de densidad. Por otro lado, la longitud de localización de los modos con $k \rightarrow k_c^-$ divergerá y por lo tanto estos resultarán efectivamente deslocalizados. Formalmente

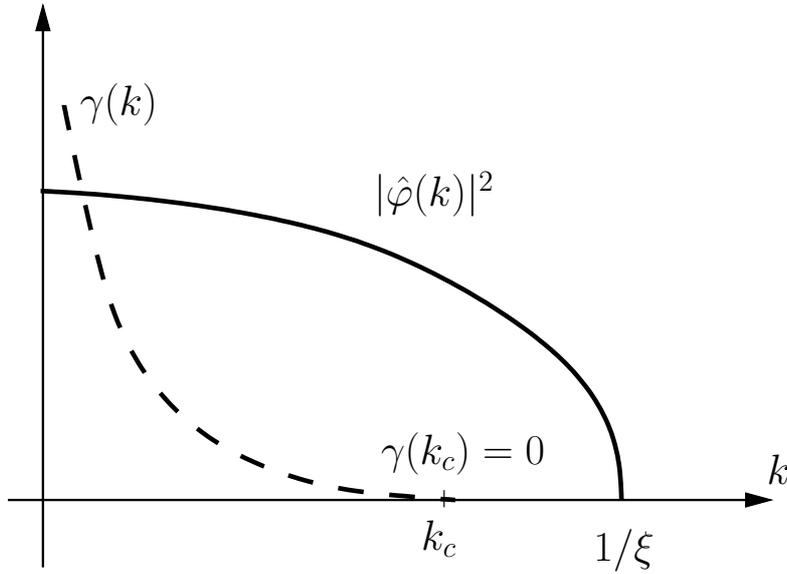


Figura 5.3: Transformada de Fourier del estado y función $\gamma(k)$ que determinan el perfil $\langle\langle n(x) \rangle\rangle$ según la ecuación (5.40). Aquí se tiene que $\gamma(k_c) = 0$, lo que inducirá un perfil localizado algebraicamente.

uno debería de conocer la solución exacta para poder afirmar que la contribución exponencial se cancela cuando $\gamma \rightarrow 0$, sin embargo dado que el sistema sólo puede medirse hasta un tamaño máximo L_{\max} finito, basta con que los modos tengan una longitud de localización mayor a L_{\max} para que se vean como efectivamente deslocalizados (volveremos sobre esta idea, que resultará fundamental, en la próxima sección). Por lo tanto, ya no se generará un perfil exponencialmente localizado, dado que la envolvente quedará determinada por los modos con $k \rightarrow k_c^-$ y la longitud de localización de estos modos está divergiendo. Para calcular la envolvente del perfil tendremos que calcular sólomente cual es la influencia de los modos con $k \rightarrow k_c^-$, dado que los modos con

$\gamma(k) \geq \epsilon$ son fuertemente suprimidos en el perfil de densidad si $|x| > 1/\epsilon$ y por lo tanto podrán ser despreciados. Por ello, nos será de utilidad escribir la siguiente expansión de Taylor para $\gamma(k)$ válida cuando $k \rightarrow k_c^-$

$$\gamma(k) = \frac{1}{n!} \gamma^{(n)}(k_c) (k - k_c)^n + \dots \quad (k < k_c) \quad . \quad (5.41)$$

Obviamente aquí $n \geq 1$. Para utilizar esta expansión en la ecuación (5.40) primero notamos que cuando $x > 0$ la ecuación (5.33) se puede escribir en la forma

$$\langle\langle |\phi_k(x)|^2 \rangle\rangle = -\frac{\pi^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u \operatorname{Sinh}(\pi u) \frac{1+u^2}{(1+\operatorname{Cosh}(\pi u))^2} e^{-2(1+u^2)\gamma(k)x} du \quad . \quad (5.42)$$

Naturalmente el mismo razonamiento se puede aplicar cuando $x \leq 0$. Entonces si ahora insertamos la expansión de Taylor para $\gamma(k)$ cerca de k_c obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle\langle n(x) \rangle\rangle &\propto \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^\infty u \operatorname{Sinh}(\pi u) \frac{1+u^2}{(1+\operatorname{Cosh}(\pi u))^2} \\ &\times \left(\int_0^{k_c} (1 - k^2 \xi^2) e^{-2(1+u^2) \frac{1}{n!} \gamma^{(n)}(k_c) (k-k_c)^n x} dk \right) du \quad . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Como hemos indicado, en las condiciones anteriores sólo los modos con $k \rightarrow k_c^-$ contribuyen apreciablemente, con lo que haciendo el cambio de variables $\theta = k_c - k$ tenemos:

$$\begin{aligned} \langle\langle n(x) \rangle\rangle &\propto \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^\infty u \operatorname{Sinh}(\pi u) \frac{1+u^2}{(1+\operatorname{Cosh}(\pi u))^2} \\ &\times \left((1 - k_c^2 \xi^2) \int_0^\infty e^{-2(1+u^2) \frac{1}{n!} |\gamma^{(n)}(k_c)| \theta^n x} d\theta \right) du \quad . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Aquí hemos usado explícitamente el hecho de que $\gamma(k)$ es decreciente. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \langle\langle n(x) \rangle\rangle &\propto \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1 - k_c^2 \xi^2}{(|\gamma^{(n)}(k_c)| x)^{1/n}} \right) \\ &\times \int_0^\infty u \operatorname{Sinh}(\pi u) \frac{(1+u^2)^{1-1/n}}{(1+\operatorname{Cosh}(\pi u))^2} du \quad . \end{aligned} \quad (5.45)$$

Lo cual quiere decir que la ley de decaimiento del perfil de densidad estacionario es

$$\langle\langle n(x) \rangle\rangle \propto \frac{1}{x^{1+1/n}} . \quad (5.46)$$

Entonces, el perfil decae algebraicamente con un exponente que depende de cuan suavemente se anula la función $\gamma(k)$ en un entorno de k_c . El caso particular de $n = 1$, correspondiente a un corte lineal, nos da una ley de la forma $1/|x|^\nu$ con $\nu = 2$. Dicho caso ha sido estudiado en [SPCLBS07], sin embargo entendemos que aquí se reporta por primera vez la relación (5.46) en el caso general, la cual puede contener exponentes en el rango $(1, 2]$ ***. En lo siguiente utilizaremos estos resultados para estudiar el caso particular del potencial generado por la superficie estocástica.

5.3. Potencial de Casimir-Polder y Longitud de localización

A fin de aplicar el modelo perturbativo al caso concreto de una superficie, en esta sección daremos los elementos necesarios para el cálculo del término lateral de la interacción de Casimir-Polder. Además exhibiremos la función $\gamma(k)$ asociada al perfil de alturas (5.2):

$$h(x) = \sum_{i=1}^{N_{\max}} h_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_i} x + \theta_i\right) .$$

El perfil de altura determina el valor del potencial de Casimir-Polder lateral y puede calcularse perturbativamente en $h(x)$ cuando esta es la escala espacial más pequeña en el problema ($\sqrt{\langle\langle h^2 \rangle\rangle} \ll \lambda_i, z_0$). El cálculo hasta segundo orden en $h(x)$ puede escribirse como

$$U_L(x, z) = U_L^{(1)}(x, z) + U_L^{(2)}(x, z) , \quad (5.47)$$

*** Si bien éste análisis fue necesario en [MMDLMR10] no fue posible, debido al espacio disponible, extender allí el desarrollo del modelo perturbativo de [SPCLBS07].

donde el primer orden se calcula como hemos indicado la ecuación (3.57) del capítulo 3 [DPRL08, DJPA08]

$$U_L^{(1)}(x, z) = -\frac{3\hbar c\alpha(0)}{8\pi^2\epsilon_0 z^5} \sum_{i=1}^{\infty} h_i g^{(1)}(k_i z) \cos(k_i x + \theta_i) \quad , \quad (5.48)$$

y el segundo orden [Mess11]

$$\begin{aligned} U_L^{(2)}(x, z) &= -\frac{15\hbar c\alpha(0)}{32\pi^2\epsilon_0 z^6} \sum_{i,j=1}^{\infty} h_i h_j \\ &\times [\cos((k_i + k_j)x + \theta_i + \theta_j) g^{(2)}(k_i z, k_j z) \\ &\quad + \cos((k_i - k_j)x + \theta_i - \theta_j) g^{(2)}(k_i z, -k_j z)] \quad . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Aquí las funciones respuesta adimensionales $g^{(1)}$ y $g^{(2)}$ dependen en principio de las propiedades ópticas de la superficie. Como hemos considerado en el capítulo 3, para hacer las estimaciones del orden de magnitud del efecto, estudiaremos la situación ideal de una superficie perfectamente reflectora, en cuyo caso ambas son funciones de las variables adimensionales $\mathcal{Z}_i = k_i z$. Como hemos indicado en (3.58), en dicha situación el núcleo $g^{(1)}$ toma la forma

$$g^{(1)}(\mathcal{Z}) = e^{-\mathcal{Z}} \left(1 + \mathcal{Z} + \frac{16\mathcal{Z}^2}{45} + \frac{\mathcal{Z}^3}{45} \right) \quad .$$

Una gráfica de este núcleo adimensional se muestra en la Figura 5.4.

El núcleo $g^{(2)}$ sólo admite una representación integral que no reproduciremos aquí. En la Figura 5.5 graficamos su comportamiento en función de variables adimensionales. Notar que sobre la dirección $(1, -1)$ el núcleo crece, lo cual podría resultar en principio en una inconsistencia con la teoría perturbaciones. Sin embargo debe notarse que la restricción $\sqrt{\langle\langle h^2 \rangle\rangle} \ll \lambda_i, z_0$ impone un valor máximo para \mathcal{Z} dado aproximadamente por $\mathcal{Z}_{\max} = 2\pi z_0/h$, donde $h = \sqrt{\langle\langle h^2 \rangle\rangle}$ es la altura típica del perfil. Si uno usa además el hecho de que el crecimiento de $g^{(2)}(\mathcal{Z}, -\mathcal{Z})$ es lineal con $|\mathcal{Z}|$ [Mess11], resulta fácil demostrar que el desarrollo perturbativo es consistente en el sentido de que $|U_L^{(1)}(x, z)| \geq |U_L^{(2)}(x, z)|$ en todo el rango de interés.

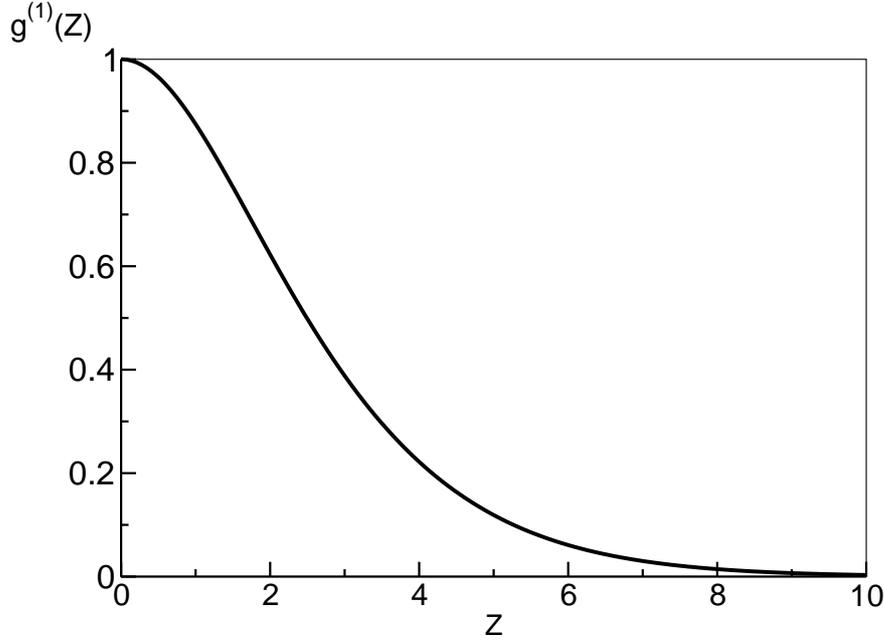


Figura 5.4: Función respuesta adimensional $g^{(1)}(\mathcal{Z})$ para el cálculo a primer orden del potencial de Casimir-Polder lateral para una superficie perfectamente reflectora.

El resultado a segundo orden será de importancia para las soluciones numéricas en las que buscaremos también estudiar configuraciones más allá del modelo perturbativo. Sin embargo, en el caso en que $h \ll z_0$ podremos quedarnos sólo con el orden más bajo, $U_L^{(1)}$, para el cálculo del correlador (5.32) ya que la contribución dominante es

$$C(x) = \left\langle \left\langle U_L^{(1)}(x', z_0) U_L^{(1)}(x + x', z_0) \right\rangle \right\rangle . \quad (5.50)$$

En el apéndice A se demuestra que si usamos la expresión (3.57) para calcular $U_L^{(1)}$ y suponemos que las variables estocásticas son independientes y tienen una distribución uniforme en los intervalos $h_i \in [0, h_{\max}]$, $\theta_i \in [0, 2\pi]$ y $\lambda_i \in$

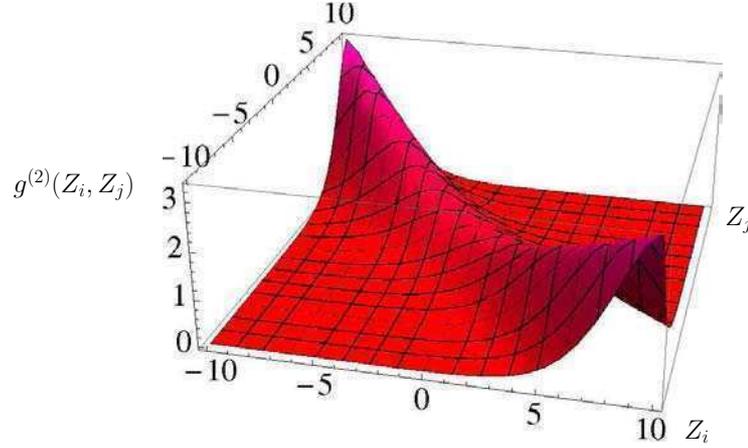


Figura 5.5: Función respuesta adimensional $g^{(2)}$ para el cálculo a segundo orden del potencial de Casimir-Polder lateral para una superficie perfectamente reflectora.

$[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, se tiene

$$\gamma(k) = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} F^2(z) N_{\max} \frac{h_{\max}^2}{3} (g^{(1)}(2kz))^2 \frac{\pi^2}{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})(2k)^2} \quad , \quad (5.51)$$

donde $F(z) = 3\hbar c\alpha(0)/8\pi^2\epsilon_0 z^5$. En la Figura (5.6) se muestra un caso típico de una superficie perfectamente reflectora en la que la distancia a la superficie es $z = 1,5\mu\text{m}$. En dicha gráfica la escala espacial se adimensionaliza con ξ , que es el parámetro relevante para determinar qué modos están presentes en la transformada de Fourier del condensado (a fin de comparar luego con las simulaciones numéricas aquí se tomará $\xi = 0,85\mu\text{m}$). Como se deduce de la forma explícita de $g^{(1)}$ y de γ , existe una fuerte supresión exponencial con $k\xi$. Por lo tanto, como es de esperar, la longitud de localización será eventualmente pequeña sólo cuando se considere el caso de un condensado muy próximo a la superficie. En relación con la sección anterior vemos que los modos con k grande pueden tener longitudes de localización extremadamente grandes. Por ejemplo, si graficamos la misma situación pero en escala Log-Lin, tendremos un caso como el que se muestra en la Figura 5.7. Notar que cuando $k\xi \rightarrow 1$ la longitud de localización puede ascender hasta 10cm, lo cuál es demasiado

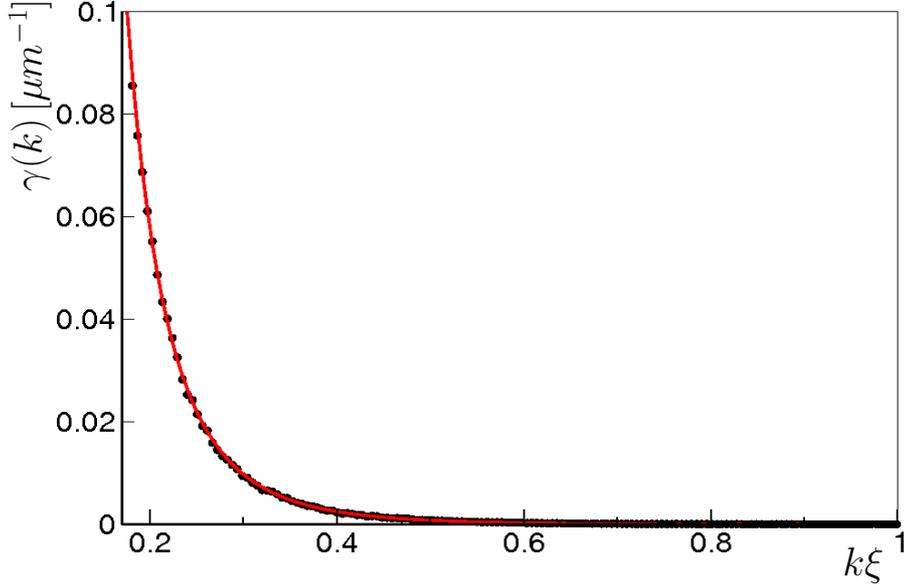


Figura 5.6: Función $\gamma(k)$ asociada a una distancia de $z = 1,5\mu\text{m}$, $N_{\text{max}} = 25$, $\lambda \in [1, 20]\mu\text{m}$ y $h_i \in [0, 200]\text{nm}$. En línea llena se muestra el resultado analítico (5.51) y en puntos la verificación numérica por sampleo.

grande para cualquier sistema de gases ultrafríos. Por lo tanto aquí resulta fundamental tener en cuenta la escala máxima L_{max} que se puede medir en el experimento. En el caso en que $L_{\text{max}} \rightarrow \infty$ tendremos obviamente un perfil exponencialmente localizado ya que $\gamma(k) \neq 0 \forall k \in [0, 1/\xi]$. Sin embargo, para un valor finito de L_{max} (por ejemplo para el caso anterior hemos considerado $L_{\text{max}} = 1\text{mm}$), existirá un valor de k dado por $k^* = \gamma^{-1}(1/L_{\text{max}})$ para el cual los modos con $k \gtrsim k^*$ estarán efectivamente deslocalizados, mientras que aquellos con $k \lesssim k^*$ están exponencialmente localizados. Por lo tanto, estaremos en un caso similar al desarrollado anteriormente cuando se encontraba un perfil con localización algebraica. La diferencia aquí es que el valor de k^* no clasifica perfectamente los modos entre localizados y deslocalizados como ocurría con k_c , sino que aquí la transición será suave y por lo tanto se podrán tener un continuo de exponentes en el rango $\nu \in (1, 2)$. Por otro lado, en esta situación no es posible realizar un cálculo explícito de las integrales involucradas en (5.40),

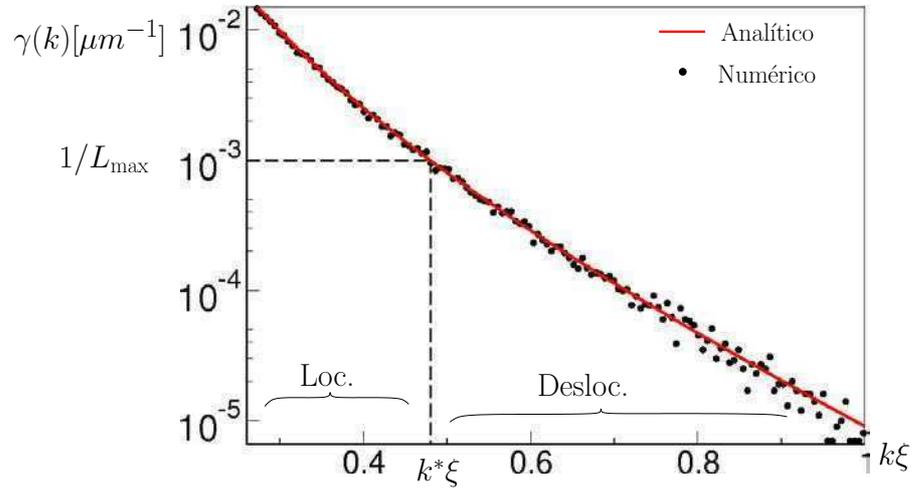


Figura 5.7: Función $\gamma(k)$ asociada a una distancia de $z = 1,5\mu\text{m}$, $N_{\text{max}} = 25$, $\lambda \in [1, 20]\mu\text{m}$ y $h_i \in [0, 200]\text{nm}$. En línea llena se muestra el resultado analítico (5.51) y en puntos la verificación numérica por sampleo. Se muestra el valor de $k = k^*$ que separa los modos efectivamente localizados (Loc.) de aquellos efectivamente deslocalizados (Desloc.), según la escala máxima que es posible medir en el problema L_{max} .

por lo que incluso en el régimen del modelo perturbativo es necesario evaluar ciertas cantidades numéricamente.

Por lo tanto, en el contexto de localización inducida por la interacción con una superficie, donde exponente asociado a la inversa de la longitud de localización está exponencialmente suprimido, se esperará siempre un perfil algebraicamente localizado, con un exponente en el rango (1, 2). En la siguiente sección compararemos los resultados del modelo perturbativo desarrollado aquí y éstas observaciones cualitativas con la solución numérica de la ecuación de Gross-Pitaevskii.

5.4. Cálculo numérico y comparación con el modelo perturbativo

En esta sección compararemos el análisis perturbativo de la sección anterior con la solución exacta del problema obtenida evolucionando numéricamente el estado según la ecuación de Gross-Pitaevskii incluyendo el potencial aleatorio debido a la interacción de Casimir-Polder. Cada una de las evoluciones es utilizada para luego calcular los promedios sobre el ruido de los perfiles de densidad $n(x, t)$ según el modelo de ruido que hemos indicado. A fin de comparar una situación concreta en vistas de establecer un posible escenario en el cual dicho efecto sea apreciable, consideraremos un condensado de átomos de ^{87}Rb confinados fuertemente en la dirección radial, con un ancho típico de $\sigma = 0,25\mu\text{m}$ y un tamaño axial típico (según la aproximación de Thomas-Fermi) de $35\mu\text{m}$. Si se asumen $N = 10^2$ átomos en el condensado se tiene que la longitud de recuperación es $\xi = 0,85\mu\text{m}$.

Para calcular de manera exacta la evolución del sistema, comenzamos con el cómputo numérico del estado inicial del condensado. Para obtener este último se realizó una evolución en tiempo imaginario implementando un esquema de Crank-Nicolson [MurAdh09]. El resultado de este cálculo se muestra en la Figura 5.8 junto con la aproximación dada por el perfil de Thomas-Fermi que se utiliza en el modelo perturbativo. Vemos que, para el sistema que buscamos estudiar, la aproximación utilizada explícitamente en el modelo perturbativo reproduce correctamente el perfil salvo por las singularidades en la derivada que se encuentran en los bordes $x = \pm L_{TF}$.

Para evolucionar el estado inicial se implementó un método *time-splitting* [PTVF97] pseudo-espectral de cuarto orden que resuelve la ecuación de Gross-Pitaevskii dinámica. Este método puede encontrarse desarrollado detalladamente en [BaJaMa03, BaoLiu07] y, en particular, el integrador temporal de cuarto orden (y otras aproximaciones de orden superior) se encuentran desarrolladas en [Yoshi90]. La transformada rápida necesaria para el método

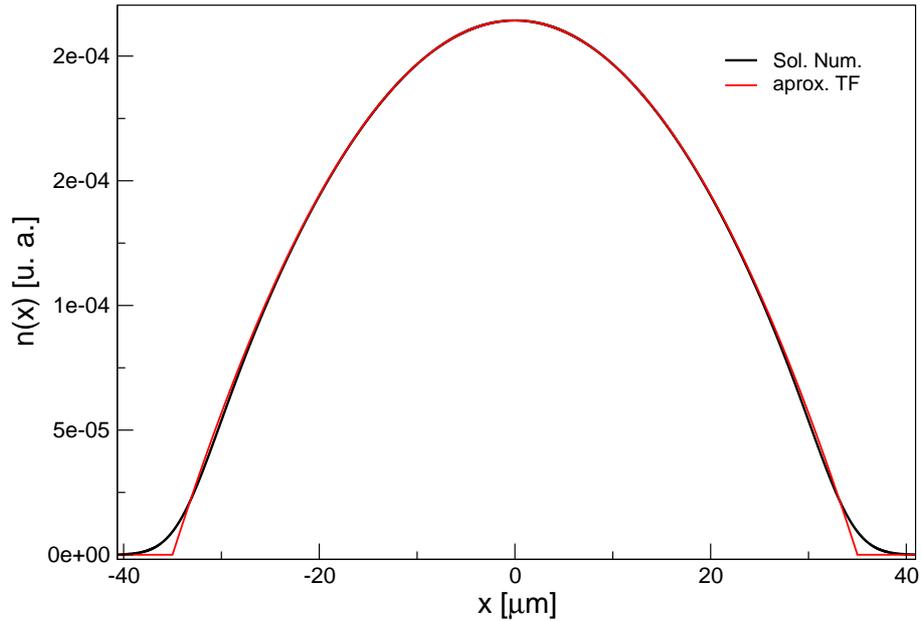


Figura 5.8: Condición inicial calculada bajo la aproximación de Thomas-Fermi (línea roja) y numéricamente evolucionando en tiempo imaginario (línea negra). Densidad (unidades arbitrarias) vs. posición (μm).

pseudo-espectral se calculó mediante el paquete FFTW [FFTW]. En el código se tomó el estado inicial exacto calculado por el método de evolución en tiempo imaginario y se lo evolucionó hasta un tiempo fijo para cada una de las realizaciones de la superficie. Luego se tomó el promedio de la densidad sobre estas iteraciones, que típicamente fueron 40, para obtener el perfil de densidad promediado. Es importante resaltar que el código pseudo-espectral fue validado implementando de manera independiente un método de Crank-Nicolson para evolucionar el estado en tiempo real. Naturalmente éste último método resulta mucho menos eficiente que el pseudo-espectral, sin embargo fue de utilidad para la validación, que se realizó calculando evoluciones a tiempos

relativamente cortos (aproximadamente $1/5$ del tiempo total que se buscaba alcanzar) y comparando entre ambos resultados. Para evoluciones de mayor duración sólo se utilizó el método pseudoespectral y para corroborar la convergencia en esta nueva escala, además de utilizar las acotaciones establecidas en [BaoLiu07], también se duplicó la cantidad de puntos de grilla para verificar que los resultados tengan un error despreciable.

Primeramente examinaremos los resultados del cálculo numérico en una región de parámetros en la que es válido el modelo perturbativo. Como es de esperar, lo que define si estamos en el rango de validez de aquél es la distancia a la superficie z_0 . Como hemos indicado anteriormente, para poder utilizar la aproximación que permite calcular explícitamente $\langle\langle |\phi_k|^2 \rangle\rangle$, la longitud de localización debe ser mayor que las longitudes de onda típicas de los estados de una partícula no perturbados que están involucrados en la transformada de Fourier del estado φ . Es fácil ver que esto ocurrirá cuando la energía típica del potencial aleatorio dada por

$$V_R(z_0) = \sqrt{\langle\langle (U_L(x, z_0) - \langle\langle U_L(x, z_0) \rangle\rangle)^2 \rangle\rangle} \quad (5.52)$$

sea mucho menor al potencial químico μ . Luego, bajo la condición $V_R(z_0) \ll \mu$, que es una restricción sobre z_0 , esperamos que el modelo perturbativo reproduzca la forma de decaimiento del perfil estacionario. En la Figura 5.9 se muestra la evolución del condensado luego de un tiempo $\omega_x t = 28$ para un condensado libre y otro en presencia de una superficie en el régimen perturbativo ($V_R(z_0) = 0,089\mu$). En dicha figura puede verse que parte del condensado en presencia de la superficie continúa su expansión siguiendo al perfil libre, mientras que en un entorno del origen se desarrolla un perfil que permanece atrapado cerca de la condición inicial. El perfil de partículas atrapadas puede compararse con el caso perturbativo discutido en las secciones anteriores, que corresponde a $t \rightarrow \infty$. En la Figura 5.10 se comparan ambos perfiles en escala Log-Log. Vemos que ambos están en buen acuerdo en la región cercana al origen, donde el perfil promediado deja de variar. Además vemos

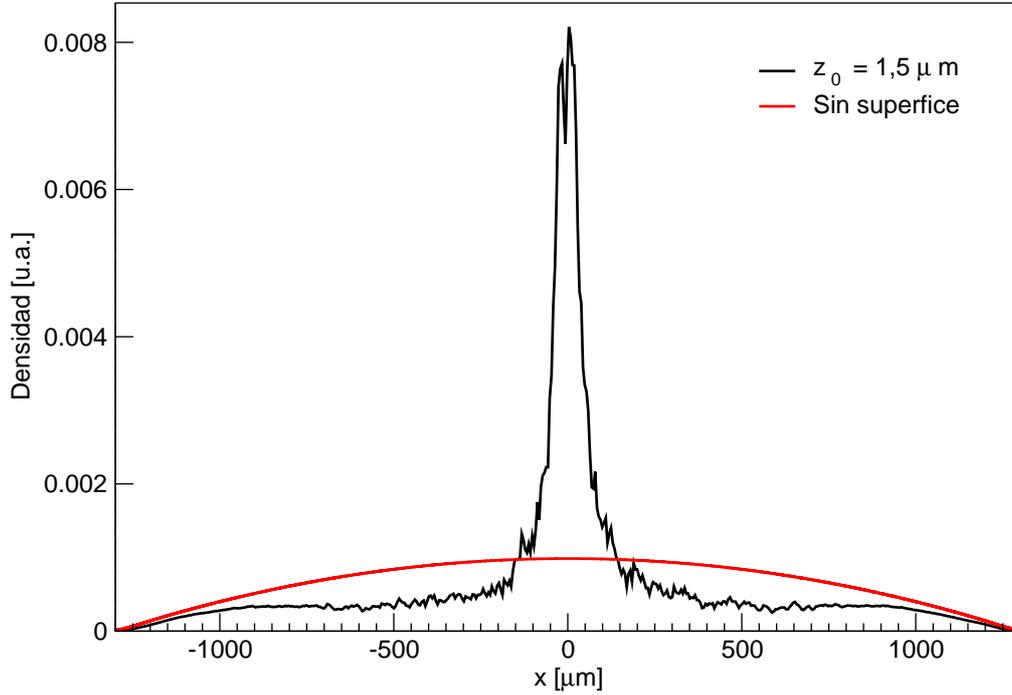


Figura 5.9: Comparación entre la evolución libre y la evolución en presencia de la superficie. Se exhiben $n(x, t)$ y $\langle\langle n(x, t) \rangle\rangle$ a un tiempo $\omega_x t = 28$. El promediado se toma sobre 40 realizaciones del potencial ruidoso a una distancia $z_0 = 1,5\mu\text{m}$. La superficie contiene 25 armónicos con $\lambda_i \in [1, 20]\mu\text{m}$ y $h_i \in [0, 200]\text{nm}$, lo cual corresponde a $V_R(z_0) = 0,089\mu$.

que habiendo fijado una escala máxima, aquí de $L_{\text{max}} = 1\text{mm}$, el decaimiento es compatible con una ley algebraica. En la aproximación dada por el modelo perturbativo encontramos que el perfil de densidad decae con un exponente $\nu = 1,1$ (el ajuste lineal de la gráfica Log-Log tuvo una desviación en la pendiente menor al 1%), lo cual está en buen acuerdo con la solución que

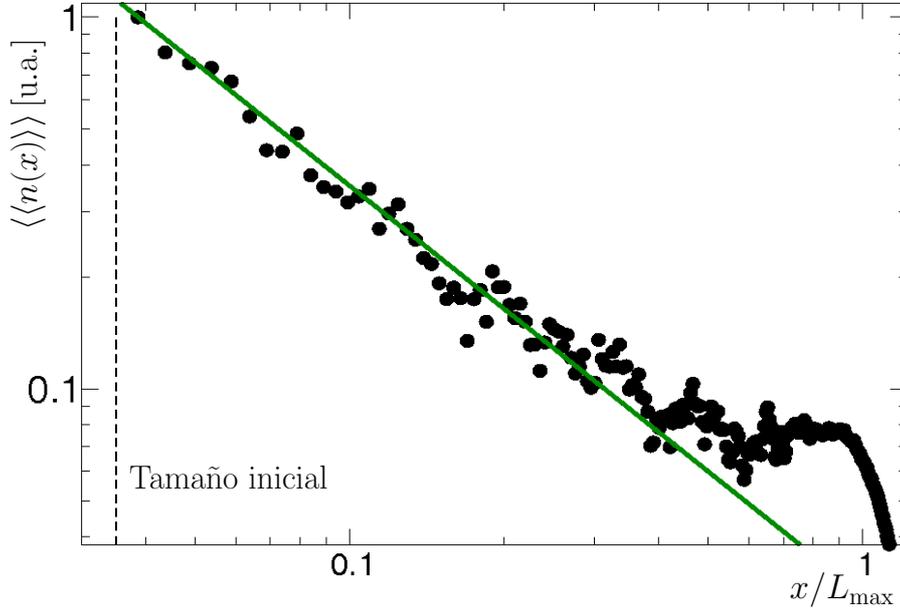


Figura 5.10: Comparación del perfil de densidad asintótico calculado perturbativamente (línea llena verde) y perfil de densidad calculado numéricamente $\langle\langle n(x, t) \rangle\rangle$ (puntos negros) para $\omega_x t = 28$ promediado sobre 40 realizaciones del potencial ruidoso a una distancia $z_0 = 1,5\mu\text{m}$. Aquí se tomó $L_{\max} = 1\text{mm}$.

hemos obtenido de manera íntegramente numérica. Además de coincidir con la solución numérica, el comportamiento cualitativo del perfil está de acuerdo con nuestra discusión en relación con el perfil que hemos calculado en (5.46), donde el cálculo analítico sí fue posible.

Esto nos permite ver que, en el caso perturbativo de distancias relativamente grandes, las aproximaciones que hemos hecho en el modelo resultan consistentes. Por otro lado, a partir del esquema perturbativo y la forma explícita de $\gamma(k)$ dada por la ecuación (5.51) es fácil encontrar una escala típica de distancia a la superficie para la cual resulte posible la detección de átomos localizados debido a la interacción de Casimir-Polder lateral en un contexto relativamente genérico. Para un escenario en el que se busque localización

5.4 Cálculo numérico y comparación con el modelo perturbativo 89

de un condensado unidimensional, tendremos típicamente una longitud de recuperación en el orden de $1\mu\text{m}$. Si además requerimos que al menos el 10% de los átomos tengan una longitud de localización menor o igual a $100\mu\text{m}$ es fácil utilizar la ecuación (5.51) y la Figura 5.7 para encontrar que la distancia típica z_0 es $z_0 = 2,5\mu\text{m}$. Es decir que, por debajo de dicho valor, es esperable tener un marcado efecto de localización sobre el perfil de densidad.

Finalmente es interesante analizar el caso en que el modelo perturbativo deja de valer. La transición se produce rápidamente debido a la fuerte dependencia de γ con z_0 . Si se toma por ejemplo $z_0 = 1\mu\text{m}$ se tiene que $V_R(z_0) = 0,5\mu$ y el término de segundo orden para el cálculo de la interacción de Casimir-Polder debe ser incluido en la simulación numérica. En la Figura 5.11 se muestra el resultado de la evolución promediada sobre 40 realizaciones para un tiempo $\omega_x t = 14$. En este caso, dado que la superficie está más cerca del condensado, el efecto de localización es mucho mayor que en el caso donde es válido el modelo perturbativo, y muy pocas partículas escapan del núcleo principal confinado en un entorno de la condición inicial. Las partículas que desarrollan las alas del perfil $\langle\langle n(x) \rangle\rangle$ se encuentran nuevamente localizadas con un perfil algebraico. En la Figura se muestra un ajuste lineal del gráfico Log-Log, en el que se encuentra que $\langle\langle n(x) \rangle\rangle \propto 1/x^\nu$ con $\nu = 1,85$. Para los parámetros de ésta simulación se llega al límite de validez para la aproximación de campo medio que describe el condensado cuando $x \rightarrow L_{\text{max}}$ debido a la baja densidad del sistema en ése límite inducida por el efecto de localización. Como hemos indicado, en esta expansión deja de ser válido el modelo perturbativo y, en particular, cae la hipótesis de poder desprestigiar el potencial aleatorio en la primer etapa de la expansión donde sólo se tenían en cuenta las interacciones repulsivas. Sin embargo, las partículas de mayor energía son justamente las que escapan del entorno de la condición inicial y éstas típicamente tendrán longitudes de localización mayores a la longitud de onda característica $2\pi/k$. Además para ellas el valor de kz_0 será grande y por

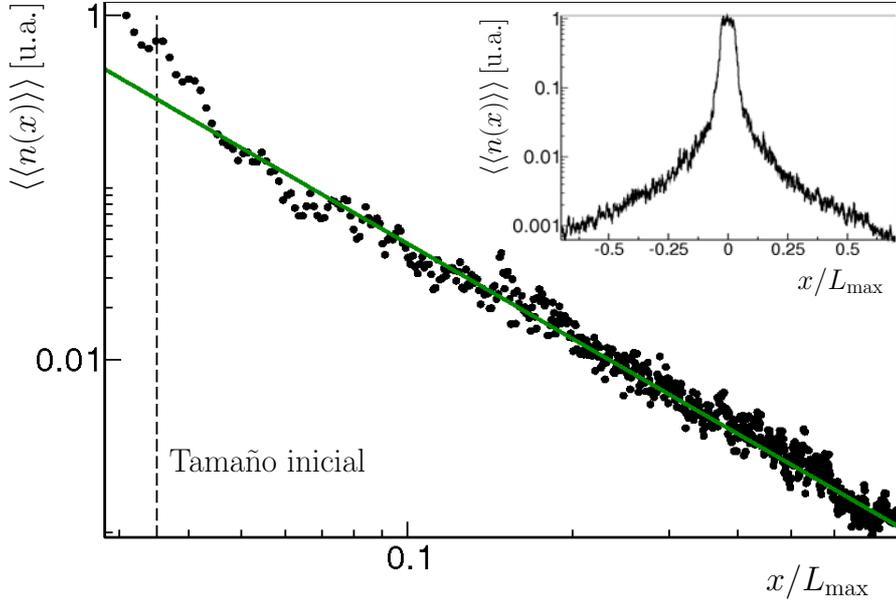


Figura 5.11: $\langle\langle n(x, t) \rangle\rangle$ (puntos negros) para $\omega_x t = 14$ promediado sobre 40 realizaciones del potencial ruidoso a una distancia $z_0 = 1\mu\text{m}$. La línea llena corresponde a un ajuste algebraico de la forma $\langle\langle n(x) \rangle\rangle \propto 1/|x|^\nu$, con $\nu = 1,85$. Se tomó $L_{\max} = 1\text{mm}$.

lo tanto también se podrá obtener $\gamma(k)$ utilizando sólo el primer orden del término lateral (recordar el decaimiento exponencial con kz_0). Por lo tanto, si bien estamos en un régimen donde es necesario el cálculo numérico del perfil de densidad, para los modos más energéticos que componen el condensado, se tendrá un exponente γ que decaerá de manera exponencial lo cual indica que el comportamiento cualitativo de la solución se debería preservar. Esto permite entender porqué aún en este caso donde el modelo de expansión no es aplicable el decaimiento algebraico del perfil se mantiene.

Además de los casos que acabamos de describir también fueron exploradas otras situaciones en las que se varió el contenido espectral de la superficie $h(x)$, sin embargo los resultados obtenidos fueron similares. Esto se debe a que las longitudes de onda muy pequeñas respecto de z_0 están típicamente

5.4 Cálculo numérico y comparación con el modelo perturbativo 91

suprimidas de manera exponencial, mientras que las longitudes de onda muy largas sólo afectan a una cantidad de partículas muy pequeña (aquellas presentes en la transformada de Fourier y con $k \rightarrow 0$).

Además de esto, la forma específica de la densidad de probabilidad de las variables λ_i utilizada para el cálculo de γ tampoco resulta esencial ya que, como puede verse en la ecuación (5.51), el factor dominante en el comportamiento de $\gamma(k)$ es la supresión exponencial debida al núcleo $g^{(1)}$.

En términos de lo analizado aquí, vemos que un posible escenario para poner de manifiesto el efecto Casimir-Polder lateral debido a una superficie estocástica podría ser el de un condensado unidimensional expandiéndose en la proximidad de tal superficie, a distancias típicas de $1 - 2\mu\text{m}$. El modelo perturbativo resulta una buena aproximación para distancias relativamente grandes y permite obtener expresiones explícitas para calcular la longitud de localización de los modos presentes en el condensado. Además da una descripción cuantitativa correcta en el rango de distancias grandes y permite entender cualitativamente los resultados de las simulaciones numéricas que hemos implementado para explorar la región de distancias cortas. Si bien el montaje de un experimento podría contener múltiples dificultades técnicas no consideradas aquí, creemos que, de ser posible la implementación de una configuración como la que hemos estudiado, ésta presentaría la ventaja de estar explotando (a través del efecto de localización) la naturaleza cuántica del condensado a diferencia de otros esquemas en los que se lo utiliza únicamente como un detector local clásico de la interacción.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos considerado la descripción de condensados de Bose-Einstein de átomos alcalinos. En el régimen de campo medio, válido para describir al sistema cuando las interacciones son débiles, hemos contemplado los efectos de potenciales externos periódicos y estocásticos generados por efecto Casimir-Polder de una superficie cercana al condensado. En el caso de un potencial periódico hemos caracterizado el espectro de excitaciones del sistema interactuante y calculado las cantidades necesarias para su observación a través de espectroscopía de Bragg. De esta forma nuestros resultados pueden ser de utilidad en el caso de utilizar un condensado unidimensional como transductor del efecto Casimir-Polder lateral generado por una superficie periódica, ya que los coeficientes de Fourier de la expansión de este último podrían ser calculados a partir del espectro modificado del condensado, explotando así la naturaleza cuántica del sistema en lugar de sólo utilizar observables clásicos.

Un caso que no puede ser contemplado de la misma manera que el caso anterior es aquel de una superficie estocástica. Aquí entonces se buscó otra alternativa para transducir el efecto de la interacción. En particular, se consideró la expansión de un condensado unidimensional en presencia del potencial aleatorio generado por la componente lateral del potencial de Casimir-Polder. A través

de un modelo perturbativo se caracterizó el perfil de densidad asintótico y estacionario de los átomos atrapados debido al potencial ruidoso por efecto de localización. La generalización de los resultados conocidos permitió entender el comportamiento genérico que se podría esperar en el caso de una superficie estocástica. Además del modelo perturbativo, también se realizaron simulaciones numéricas para calcular la evolución exacta del sistema. Estas permitieron no sólo corroborar las predicciones del modelo aproximado, sino también explorar otros posibles escenarios más allá del caso perturbativo. De esta forma se logró establecer un marco posible donde se pone de manifiesto la interacción de la superficie estocástica con el gas ultrafrío a través del efecto de localización. Además del régimen de interacciones débiles descrito por la teoría de campo medio, en esta tesis hemos considerado el caso de un gas unidimensional muy diluído, en el cual las interacciones entre átomos son dominantes. En este caso se estudió la influencia del potencial externo sobre la distribución de impulsos del gas, que es el observable de interés en el sistema. Utilizando como punto de partida la solución analítica para el problema de muchos cuerpos se dedujo una expresión para describir al gas en el límite de impulsos grandes y se encontró que la distribución de impulsos del mismo sigue una ley de decaimiento algebraica independiente del potencial confinante. El exponente de esta ley fue calculado y comparado con soluciones exactas que, junto con los trabajos anteriores en los que se estudia a este sistema sólo en casos particulares, coincidieron con la predicción.

Apéndice A

Cálculo del exponente $\gamma(k)$

En este apéndice calcularemos explícitamente el exponente $\gamma(k)$ utilizando la expansión perturbativa para el término lateral de la interacción de Casimir-Polder. Notemos entonces que, a primer orden en el perfil rugoso, el potencial de Casimir-Polder lateral se puede calcular como

$$U_L^{(1)}(x, z) = -F(z) \sum_{i=1}^{N_{\max}} h_i g^{(1)}(k_i z) \cos(k_i x + \theta_i) . \quad (\text{A.1})$$

Aquí utilizamos N_{\max} para denotar la cantidad de modos que se incluirán al describir la superficie en las simulaciones numéricas. De ser necesario, es fácil generalizar el análisis siguiente al caso continuo. En la ecuación anterior, la función F está definida por

$$F(z) = \frac{3\hbar c \alpha(0)}{8\pi^2 \epsilon_0 z^5} , \quad (\text{A.2})$$

y la función respuesta $g^{(1)}$ puede en principio ser la de un material no ideal. Los parámetros estocásticos de este modelo discreto se tomarán en el rango $h_i \in [0, h_{\max}]$, $\theta_i \in [0, 2\pi]$ y $\lambda_i \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ y serán considerados todos independientes entre sí. Como hemos indicado, para asegurar la simetría de translación, tomaremos las variables θ_i con densidad de probabilidad constante. La densidad de probabilidad de las variables h_i y λ_i será especificada posteriormente.

Entonces comencemos con la definición

$$C(x, x'; z) = \langle U_L(x, z) U_L(x', z) \rangle_{h, \lambda, \theta}. \quad (\text{A.3})$$

Aquí indicamos el promedio sobre el ruido por $\langle \cdot \rangle_{h, \lambda, \theta}$, de forma de hacer explícito sobre qué variable estamos promediando. Entonces al orden más bajo en la perturbación tendremos:

$$\begin{aligned} C(x, x'; z) &= F^2(z) \sum_{i, j=1}^{N_{\max}} \langle h_i h_j g^{(1)}(k_i z) g^{(1)}(k_j z) \\ &\quad \times \cos(k_i x + \theta_i) \cos(k_j x' + \theta_j) \rangle_{h, \lambda, \theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

es decir que

$$\begin{aligned} C(x, x'; z) &= \frac{F^2(z)}{2} \sum_{i, j=1}^{N_{\max}} \langle h_i h_j g^{(1)}(k_i z) g^{(1)}(k_j z) [\cos(k_i x + k_j x' + \theta_j + \theta_i) \\ &\quad + \cos(k_i x - k_j x' + \theta_i - \theta_j)] \rangle_{h, \lambda, \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Que las variables θ_i verifiquen $\theta_i \in [0, 2\pi]$ de manera uniforme nos garantiza:

$$\langle \cos(k_i x + k_j x' + \theta_j + \theta_i) \rangle_{\theta} = 0, \quad (\text{A.6})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} C(x, x'; z) &= \frac{F^2(z)}{2} \sum_{i, j=1}^{N_{\max}} \langle h_i h_j g^{(1)}(k_i z) g^{(1)}(k_j z) \\ &\quad \times \cos(k_i x - k_j x' + \theta_i - \theta_j) \rangle_{h, \lambda, \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por el mismo motivo que es válida (A.6) los términos con $i \neq j$ se cancelan en (A.7), por lo tanto:

$$C(x, x'; z) = \frac{F^2(z)}{2} \sum_{i=1}^{N_{\max}} \langle h_i^2 g^{(1)}(k_i z)^2 \cos(k_i(x - x')) \rangle_{h, \lambda}. \quad (\text{A.8})$$

Entonces tenemos que:

$$C(|x - x'|; z) = \frac{F^2(z)}{2} N_{\max} \langle h_i^2 \rangle_h \langle g^{(1)}(k_i z)^2 \cos(k_i(x - x')) \rangle_{\lambda}. \quad (\text{A.9})$$

La densidad de probabilidad de las variables h_i sólo interviene al tomar el valor medio $\langle h_i^2 \rangle_h$ y por lo tanto resulta irrelevante. Aquí entonces introducimos la definición de la función $\gamma(k)$, ya que sólo estaremos interesados en la transformada-coseno de la ecuación (A.9). Recordar entonces que

$$\gamma(k) = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} \int_{-\infty}^{\infty} C(x) \cos(2kx) dx = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} \hat{C}(2k) \quad ,$$

donde $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m$. Pero además, notando que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(k_i x) \cos(2kx) = \pi \delta(2k - k_i) \quad , \quad (\text{A.10})$$

y utilizando la ecuación (A.9) resulta claro que:

$$\gamma(k) = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} \frac{F^2(z)}{2} N_{\max} \langle h_i^2 \rangle_h g^{(1)}(2kz)^2 \pi \langle \delta(2k - k_i) \rangle_\lambda \quad . \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, para tener el valor explícito de γ sólo nos resta calcular

$$\langle \delta(2k - k_i) \rangle_\lambda \quad . \quad (\text{A.12})$$

Llamemos entonces $P(\lambda)$ a la densidad de probabilidad de cada una de las variables independientes λ_i (obviamente asumimos una única densidad de probabilidad para todas). Luego, por definición

$$\begin{aligned} \langle \delta(2k - k_i) \rangle_\lambda &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} P(\lambda) \delta\left(2k - \frac{2\pi}{\lambda}\right) d\lambda \\ &= \int_{2\pi/\lambda_{\max}}^{2\pi/\lambda_{\min}} P(2\pi/\xi) \delta(2k - \xi) \frac{2\pi}{\xi^2} d\xi \quad , \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

es decir que

$$\langle \delta(2k - k_i) \rangle_\lambda = P(\pi/k) \frac{2\pi}{(2k)^2} \Theta(k - \pi/\lambda_{\max}) \Theta(\pi/\lambda_{\min} - k) \quad . \quad (\text{A.14})$$

Esta cantidad sólo toma valores no nulos en el intervalo $k \in [\pi/\lambda_{\max}, \pi/\lambda_{\min}]$. Por simplicidad asumiremos como modelo aquél en el que las variables λ_i tienen una distribución uniforme (es evidente cómo modificar lo que sigue en

otro caso), por lo tanto podremos calcular $P(\lambda)$ explícitamente como $P(\lambda) = 1/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$. Entonces tenemos que:

$$\langle \delta(2k - k_i) \rangle_\lambda = \frac{2\pi}{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})(2k)^2} \Theta(k - \pi/\lambda_{\max}) \Theta(\pi/\lambda_{\min} - k) \quad . \quad (\text{A.15})$$

Por lo tanto los valores no triviales de γ resultan:

$$\gamma(k) = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} \frac{(F(z))^2}{2} N_{\max} \langle h_i^2 \rangle_h (g^{(1)}(2kz))^2 \frac{2\pi^2}{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})(2k)^2} \quad . \quad (\text{A.16})$$

Por último, consideraremos el caso específico en que las variables h_i también tienen una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $[0, h_{\max}]$, es decir que $\langle h_i^2 \rangle_h = h_{\max}^2/3$. Con lo que finalmente arribamos a

$$\gamma(k) = \frac{m}{4\hbar^2 E_k} F^2(z) N_{\max} \frac{h_{\max}^2}{3} (g^{(1)}(2kz))^2 \frac{\pi^2}{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})(2k)^2} \quad . \quad (\text{A.17})$$

Como se muestra en el capítulo 5 esta ecuación está en perfecto acuerdo con el cálculo obtenido numéricamente utilizando variables aleatorias.

El comportamiento de γ es independiente de la forma de la distribución de probabilidad de las variables h_i . Más aún, si bien la forma específica depende de la distribución $P(\lambda)$, el comportamiento para $k \rightarrow \infty$ típicamente contendrá un decaimiento exponencial dominado por el núcleo $g^{(1)}$.

Bibliografía

- [AEMWC95] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman y E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [Ander58] P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [AnPiSt04] M. Antezza, L. P. Pitaevskii y S. Stringari. *Phys. Rev. A* **70**, 053619 (2004).
- [AshMer76] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin. *Solid State Physics*. 1^{ra} Ed. Brooks Cole (1976).
- [BaJaMa03] W. Bao, D. Jaksch y P.A. Markowich. *Journal of Computational Physics* **187**, 318-342 (2003).
- [Ballen98] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific Publishing Company (1998).
- [BaoLiu07] W. Bao y J. G. Liu. *Dynamics in models of Coarsening, Coagulation, Condensation and Quantization*. World Scientific (2007) 189-192.
- [BDPSZ01] A. Brunello, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, S. Stringari y F. Zambelli. *Phys. Rev. A* **64**, 063614 (2001).
- [Berezi74] V. L. Berezinskii. *Sov. Phys. JETP* **38**, 629 (1974).
- [BeSoMo98] K. Berg-Sorensen y K. Molmer. *Phys. Rev. A* **58**, 1480 (1998).

- [BJZBHL08] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer y A. Aspect. *Nature* **453**, 891 (2008).
- [BlaBal00] P. B. Blakie y R. J. Ballagh. *Journal of Physics B* **33**, 3961 (2000).
- [BlBaGa02] P. B. Blakie, R. J. Ballagh y C. W. Gardiner. *Phys. Rev. A* **65**, 033602 (2002).
- [BlDaZw08] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger. *Rev. Mod. Phys.* **80**, pp. 885-964 (2008).
- [Bogoli47] N. N. Bogoliubov. *J. Phys. (USSR)* **11**, 23 (1947).
- [CalHu08] E. A. Calzetta y B. L. Hu. *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge University Press (2008).
- [Calzet08] E. Calzetta. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41**, 025302 (2008).
- [CasDum96] Y. Castin y R. Dum. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [Castin01] Y. Castin. Publicado en: *Coherent atomic matter waves*, Lecture Notes of Les Houches Summer School. pp. 1-136. Editado por R. Kaiser, C. Westbrook y F. David. EDP Sciences y Springer-Verlag (2001).
- [CasPol48] H. B. G. Casimir y D. Polder, *Phys. Rev.* **73**, 360 (1948).
- [CCRCW00] S.L. Cornish, N.R. Claussen, J.L. Roberts, E.A. Cornell y C.E. Wieman. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1795 (2000).
- [CorWie02] E. A. Cornell y C. E. Wieman. *Rev. Mod. Phys.* **74**, pp. 875-893 (2002).
- [CPSMI05] I. Carusotto, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, G. Modugno y M. Inguscio. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 093202 (2005).

- [CTDL06] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe. *Quantum Mechanics*, Vol I, Wiley (2006).
- [DalCoh89] J. Dalibard y C. Cohen-Tannoudji. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).
- [DCCRCW01] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell y C. E. Wieman. *Nature* **412**, 295 (2001).
- [DGPS99] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P.Pitaevskii, S.Stringari. *Rev. Mod. Phys.* **71**, pp. 463–512 (1999).
- [DJPA08] D. A. R. Dalvit, P. Maia Neto, A. Lambrecht y S. Reynaud. *J. Phys. A: Math. Theo* **41**, 164028 (2008).
- [DPRL08] D. A. R. Dalvit, P. Maia Neto, A. Lambrecht y S. Reynaud. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 040405 (2008).
- [FeyHib65] R. P. Feynman, A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill (1965).
- [FFGW03] P. J. Forrester, N. E. Frankel, T. M. Garoni, y N. S. Witte. *Phys. Rev. A* **67**, 043607 (2003).
- [FFTW] La información sobre el paquete se encuentra disponible en:
www.fftw.org
- [GarShe09] I. García-Mata y D. L. Shepelyansky. *Phys. Rev. E* **79**, 026205 (2009).
- [Ginib68] J. Ginibre. *Comm. Math. Phys.* **8**, Number 1, pp. 26-51 (1968).
- [Girard60] M. Girardeau. *J. Math. Phys.* **1**, 516 (1960).
- [Gogoli76] A. A. Gogolin. *Sov. Phys. JETP* **44**, 1003 (1976).

- [GoMeRa76] A. A. Gogolin, V. A. Mel'nikov y E. I. Rashba. Sov. Phys. JETP **42**, 168 (1976).
- [Hess86] H. F. Hess. Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).
- [HOMGC05] D. M. Harber, J. M. Obrecht, J. M. McGuirk y E. A. Cornell, Phys. Rev. A **72**, 033610 (2005).
- [HRMCB09] K. Henderson, C. Ryu, C. MacCormick y M. G. Boshier. New J. Phys. **11**, 043030 (2009).
- [Ishii73] K. Ishii. Prog. Theor. Pys. Suppl. **53**, 77 (1973).
- [IzrKro99] F. M. Izrailev y A. A. Krokhin. Phys. Rev. Lett. **82**, 4062 (1999).
- [JakZol05] D. Jaksch y P. Zoller. Annals of Physics, **315**, Issue 1, pp. 52-79 (2005).
- [KeDuSt99] W. Ketterle, D.S. Durfee y D.M. Stamper-Kurn. *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*. Publicado en: *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Proceedings of the International School of Physics (Enrico Fermi) Course Cxl : Varenna on Lake Como Villa Monastero 7-17 July 1998, (1999).
- [KiWeWe04] T. Kinoshita, T. Wenger y D. S. Weiss. Science **305**, 1125 (2004).
- [KraMaK93] B. Kramer y A. MacKinnon. Rep. Prog. Phys. **56**, pp. 1469-1564 (1993).
- [LaGiWr02] G. Lapeyre, M. Girardeau y E. Wright. Phys. Rev. A **66**, 023606 (2002).
- [Lenard64] A. Lenard. J. Math. Phys. **5**, 930 (1964).
- [Lieb63] E. H. Lieb. Phys. Rev. **130**, pp. 1616–1624 (1963).
- [LieLin63] E. H. Lieb y W. Liniger. Phys. Rev. **130**, pp. 1605–1616 (1963).

- [LiGrPa88] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul y L. A. Pastur. *Introduction to the Theory of Disordered Systems*. Wiley, New York (1988).
- [LiSeYn05] E. H. Lieb, R. Seiringer y J. Yngvason. Phys. Rev. Lett. **94**, 080401 (2005).
- [Mess11] R. Messina, *et al.*. A ser publicado (2011).
- [MetStr02] H. J. Metcalf y P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*. 2^{da} Edición, Springer (2002).
- [MiViTo02] A. Minguzzi, P. Vignolo y M. Tosi. Phys. Lett. A **294**, 222, (2002).
- [MKPS03] C. Menotti, M. Kramer, L. P. Pitaevskii y S. Stringari. Phys. Rev. A **67**, 053609 (2003).
- [MMDLMR10] G. A. Moreno, R. Messina, D. A. R. Dalvit, A. Lambrecht, P. A. Maia Neto y S. Reynaud. Phys. Rev. Lett. **105**, 210401 (2010).
- [MoDaCa10] G. A. Moreno, D. A. R. Dalvit y E. Calzetta. New J. Phys. **12**, 033009 (2010).
- [Modu09] Michele Modugno, comunicación personal (Julio, 2009).
- [Modug10] G. Modugno. Rep. Prog. Phys. **73**, 102401 (2010).
- [MurAdh09] P. Muruganandam y S. K. Adhikari. Comput. Phys. Commun. **180**, pp. 1888-1912 (2009).
- [Olshan98] M. Olshanii. Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [OWAPSC07] J. M. Obrecht, R. J. Wild, M. Antezza, L. P. Pitaevskii, S. Stringari y E. A. Cornell. Phys. Rev. Lett. **98**, 063201 (2007).
- [PetSmi08] C. J. Pethick y H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2^{da} Ed. (2008).

- [PezBul07] R. Pezer y H. Buljan. Phys. Rev. Lett. **98**, 240403 (2007).
- [PikShe08] A. S. Pikovsky y D. L. Shepelyansky. Phys. Rev. Lett. **100**, 094101 (2008).
- [Pitaev61] L. P. Pitaevskii. Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961). E.P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
- [Pitaev96] L. P. Pitaevskii. Phys. Lett. A **221**, pp. 14-18 (1996).
- [PitStr03] L. P. Pitaevskii y S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, Oxford (2003).
- [PrHeMa89] D. E. Pritchard, K. Helmerson y A. G. Martin. *Proceedings 11th International Conference on Atomic Physics*. World Scientific, Singapore pp. 179–197 (1989).
- [PTVF97] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1997).
- [PWMMFC04] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch e I. Bloch. Nature **429**, 277 (2004).
- [RCCDCW01] J. L. Roberts, N. R. Claussen, S. L. Cornish, E. A. Donley, E. A. Cornell y C. E. Wieman. Phys. Rev. Lett. **86**, 4211 (2001).
- [RDEFFF08] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno y M. Inguscio. Nature **453**, 895 (2008).
- [RigMur04] M. Rigol y A. Muramatsu. Phys. Rev. A **70**, 031603(R) (2004).
- [RigMur05] M. Rigol y A. Muramatsu. Comput. Phys. Commun. **169**, pp. 416-420 (2005)

- [Saku94] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Rev. Ed. Addison-Wesley (1994).
- [SaPaLe10] L. Sanchez-Palencia y M. Lewenstein. *Nature Physics* **6**, pp. 87-95 (2010).
- [Schulz63] T. D. Schulz. *J. Math. Phys.* **4**, 666 (1963).
- [SKODTD03] J. Steinhauer, N. Katz, R. Ozeri, N. Davidson, C. Tozzo y F. Dalfovo. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060404 (2003).
- [SOKD02] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz y N. Davidson. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002).
- [SPCLBA08] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer y A. Aspect. *New J. Phys.* **10**, 045019 (2008).
- [SPCLBS07] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov y A. Aspect. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210401 (2007).
- [SSCVL11] J. F. Schaff, X. L. Song, P. Capuzzi, P. Vignolo y G. Labeyrie. *EPL*, **93** 23001 (2011).
- [TiVeSt93] E. Tiesinga, B. J. Verhaar y H. T. C. Stoof. *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
- [ToDa03] C. Tozzo y F. Dalfovo. *New J. Phys.* **5**, 54 (2003).
- [UedSai03] M. Ueda y H. Saito. *J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 72 Suppl. C* pp. 127-133 (2003).
- [VaiTra79] H. G. Vaidya y C. A. Tracy. *J. Math Phys.* **20**, 2291 (1979).
- [Wolans07] N. Wolanski. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Cursos de Grado, Fascículo 1, Publicaciones del Departamento de Matemática, FCEyN-UBA (2007).

[Yoshi90] H. Yoshida. *Phys. Lett. A* **150**, pp. 262-268 (1990).

[ZPSKS00] F. Zambelli, L. P. Pitaevskii, D. M. Stamper-Kurn y S. Stringari. *Phys. Rev. A* **61**, 063608 (2000).

[Zinn02] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press (2002).

Publicaciones a las que dió lugar esta tesis

- G. A. Moreno, R. Messina, D. A. R. Dalvit, A. Lambrecht, P. A. Maia Neto, S. Reynaud.
Disorder in quantum vacuum: Casimir-induced localization of matter waves.
Phys. Rev. Lett. **105**, 210401 (2010).
- G. A. Moreno.
Lateral Casimir-Polder force measurement using Bose-Einstein Condensates.
Proceedings of the 9th Conference on Quantum Field Theory Under the Influence of External Conditions (QFEXT09), eds. K. A. Milton and M. Bordag, World Scientific, Singapore pp 122-126 (2010).
- G. A. Moreno, D. A. R. Dalvit, E. Calzetta.
Bragg spectroscopy for measuring Casimir-Polder interactions with Bose-Einstein condensates above corrugated surfaces.
New Journal of Physics **12**, 033009 (2010).
- G. A. Moreno.
High-momentum tail in the Tonks-Girardeau gas under general confining potentials.
Phys. Lett. A **373**, pp. 3897-3900 (2009).

Agradecimientos

Agradezco al CONICET y la UBA por el financiamiento económico y el lugar de trabajo. Le agradezco a Esteban por todo el tiempo que me ha dedicado y por haberme permitido tomar decisiones en los temas de investigación abordados. Decirle gracias a Diego Dalvit sería poco, aún así le agradezco las discusiones y todo el trabajo que hemos hecho en conjunto, como así también haber conseguido el financiamiento de mis estadías en LANL, donde se gestaron buena parte de las ideas desarrolladas en esta tesis.

Quiero agradecer a Álvaro Caso y a Jerónimo Peralta-Ramos por haber leído con interés parte de mi trabajo, y a Pablo Dmitruk y Gabriel Pagola por haberme enseñado trucos sin los cuales mis programas no hubieran corrido.

A mi novia María, a mi Familia y a Marta les agradezco por ser una fuente inagotable de afecto. Le quiero agradecer especialmente a María por bancarme en los momentos malos, que terminan por durar poco cuando ella interviene.