

Tesis Doctoral

# Scattering electromagnético en la superficie corrugada de un metamaterial

Grünhut Duenyas, Vivian

2011

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Grünhut Duenyas, Vivian. (2011). Scattering electromagnético en la superficie corrugada de un metamaterial. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Grünhut Duenyas, Vivian. "Scattering electromagnético en la superficie corrugada de un metamaterial". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2011.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*  
*Departamento de Física*

# Scattering electromagnético en la superficie corrugada de un metamaterial

Tesis presentada para optar por el título de Doctor de la Universidad de  
Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

**Vivian Grünhut Duenyas**

Director: Dr. Ricardo A. Depine

Consejero de Estudios: Dra. Ana María Llois

Lugar de Trabajo: Grupo de Electromagnetismo Aplicado

Buenos Aires, Mayo 2011



# Resumen

## **Scattering electromagnético en la superficie corrugada de un metamaterial**

Para estudiar las características de la radiación dispersada en la superficie rugosa de los nuevos materiales artificiales conocidos como metamateriales, en este trabajo de tesis se generalizan al caso de materiales con valores arbitrarios (positivos o negativos) de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica dos métodos originalmente desarrollados para estudiar la radiación dispersada en la superficie de materiales isótropos convencionales (no magnéticos). Los dos métodos generalizados, un método perturbativo en la altura de la rugosidad y otro esencialmente numérico basado solamente en la validez de la hipótesis de Rayleigh, fueron sometidos a diversos controles para estudiar su rango de validez y garantizar su correcto funcionamiento y pueden emplearse para superficies con rugosidades deterministas o con rugosidades caracterizadas aleatoriamente. Para ilustrar su uso en aplicaciones de interés actual, los métodos se emplean en los siguientes casos: a) para estudiar los cambios producidos en la reflectividad de la superficie de un metamaterial con rugosidades localizadas cuando se cambia el signo del índice de refracción relativo entre los medios a ambos lados de la superficie rugosa; b) para investigar la excitación de ondas superficiales en superficies con rugosidades localmente periódicas, y c) para estudiar la intensificación del pico de retroreflexión en superficies con rugosidades caracterizadas aleatoriamente.

**Palabras claves:** Superficies rugosas, metamateriales, scattering electromagnético, hipótesis de Rayleigh, refracción negativa, métodos numéricos.



# Abstract

## **Electromagnetic scattering in the rough surface of a metamaterial.**

In order to study the features of the radiation scattered on a rough surface of the new artificial materials known as metamaterials, in this work we generalize to the case of materials with arbitrary values (positive or negative) of magnetic permeability and electrical permittivity, two methods originally developed to study the radiation scattered on the surface of conventional isotropic materials (non-magnetic). The two generalized methods, a perturbative method at the height of the roughness and another one essentially numerical based solely on the validity of the Rayleigh hypothesis, were subjected to various checks to assess their range of validity and to ensure proper operation and can be used for deterministic or random rough surfaces. To illustrate their use in topical applications, the methods were used in the following cases: a) to study the changes in the reflectivity of the surface of a metamaterial with localized roughness when changing the sign of the refractive index between the media on both sides of the rough surface; b) to investigate the excitation of surface waves in locally periodic rough surfaces, and c) to study the intensification of the retroreflection peak on surfaces characterized with random roughness.

**Key words:** Rough surfaces, metamaterials, electromagnetic scattering, Rayleigh's hypothesis, negative refraction, numerical methods.



# Agradecimientos

A Ricardo por haberme dado la gran posibilidad de realizar este trabajo y depositarme su absoluta confianza sin siquiera conocerme.

A Rodrigo por acompañarme con su apoyo y amor incondicional todos los días.

A toda mi familia por confiar en mi desde siempre. A mis padres por transmitirme el entusiasmo por el conocimiento, mi viejo la pasión por la ciencia y a mi vieja por ayudarme con mis niños cotidianamente.

A mi amigo Mauro por todos los momentos compartidos en la oficina y por ahorrarme tantos años de terapia. Gran parte de esta tesis se la debo a él.

A Diana y Marina por tener siempre la puerta de la oficina abierta.

A todo el Grupo de Electromagnetismo Aplicado y a Luz por los primeros años.

Y, por último, al CONICET por haberme dado las becas que me posibilitaron realizar este trabajo.



*A mis padres,  
y a Rodrigo, Luca y Lucía.*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	8
2.1.1. Condiciones de Contorno . . . . .	10
2.1.2. Modos de polarización . . . . .	10
2.2. Desarrollos de Rayleigh . . . . .	11
2.3. Hipótesis de Rayleigh . . . . .	13
2.4. Ecuaciones de Rayleigh Reducidas . . . . .	14
2.5. Balance de Potencias . . . . .	17
<b>3. Métodos numéricos</b>	<b>19</b>
3.1. Método directo . . . . .	19
3.2. Método perturbativo . . . . .	21
3.3. Controles numéricos . . . . .	22
3.4. Controles físicos . . . . .	23
3.4.1. Incidencia normal . . . . .	25
3.4.2. Incidencia oblicua . . . . .	32
3.4.3. Red de difracción infinita . . . . .	36
3.5. Comparación entre los métodos . . . . .	41

<b>4. Superficies rugosas deterministas</b>	<b>45</b>
4.1. Perfil rectangular . . . . .	46
4.2. Perfil sinusoidal . . . . .	49
4.2.1. Medios con pérdida . . . . .	49
4.2.2. Medios sin pérdida . . . . .	52
<b>5. Ondas superficiales en superficies con rugosidades localizadas</b>	<b>59</b>
5.1. Excitación de ondas superficiales . . . . .	61
5.2. Resultados . . . . .	64
5.2.1. Región A: polarización $s$ , excitación de ondas progresivas . . . . .	65
5.2.2. Región B: polarización $p$ , excitación de ondas regresivas . . . . .	74
<b>6. Superficies rugosas aleatorias</b>	<b>83</b>
6.1. Localización débil y <i>enhanced backscattering</i> . . . . .	83
6.2. Descripción estadística . . . . .	85
6.3. Resultados Región A . . . . .	86
6.4. Resultados Región B . . . . .	88
<b>7. Conclusiones</b>	<b>93</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Todas las superficies, desde las naturales hasta las fabricadas artificialmente y con cuidado, son rugosas en cierta medida. Por este motivo es interesante, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado, investigar cómo la rugosidad afecta los procesos físicos que ocurren en una superficie de separación entre dos medios. En este trabajo de tesis se estudia de manera teórica la interacción entre una onda electromagnética y una superficie rugosa que separa dos semiespacios que contienen materiales lineales, isótropos y homogéneos. El medio que contiene a las fuentes de la onda electromagnética (medio de incidencia) es un medio convencional con índice de refracción real y positivo, mientras que el medio que no contiene fuentes libres (medio de transmisión) es un *metamaterial* [1–3], es decir, un material artificial con características electromagnéticas inexistentes o muy difíciles de encontrar en la naturaleza [4–6].

Entre las características novedosas de los metamateriales, la que quizás más ha llamado la atención tanto de la comunidad científica como de los medios de difusión, es la posibilidad de que el índice de refracción tome valores negativos en cierto rango de frecuencias [7]. La demostración experimental de un medio artificial con índice de refracción negativo para frecuencias en la zona de las microondas fue publicada en el año 2001 [8]. Debido a objeciones a la interpretación de los resultados [9], los experimentos fueron repetidos posteriormente por dos grupos independientes [10, 11]. Una revisión de los avances logrados en el siglo XXI para obtener MMs con índice negativo en regiones espectrales de cada vez mayor frecuencia, desde el metamaterial usado en la Ref. [8] para 4.85 GHz hasta el metamaterial usado en la Ref. [12] para 380 THz, es decir, casi en el límite rojo del espectro visible, puede consultarse en un trabajo reciente de Tsuker-

man [13]. La importancia de la verificación experimental de la refracción negativa ha sido reconocida por la revista Science como uno de los avances científicos más importantes del año 2003 [14].

Actualmente es posible diseñar metamateriales con valores de permeabilidad magnética muy distinta a la de los materiales convencionales, esencialmente no magnéticos en el rango óptico (permeabilidad muy parecida a la del vacío). Los avances en este campo han motivado la necesidad de reexaminar fenómenos ópticos que habían sido estudiados para medios ordinarios pero no para medios magnéticos. Es aquí donde se enmarca este trabajo de tesis, en el que nos hemos propuesto reexaminar los fenómenos asociados con la interacción entre una onda electromagnética y la superficie rugosa *no periódica* de un medio con valores arbitrarios de permitividad eléctrica y de permeabilidad magnética.

El estudio del scattering electromagnético en volúmenes y superficies ha sido siempre un tema de interés, motivado por aplicaciones concretas como el radar [15], el sensado remoto de recursos naturales [16], el control de calidad de superficies ópticas [17] o el desarrollo de nuevas técnicas de microscopía basadas en la detección de campos cercanos [18]. El tema también ha sido considerado en el marco de motivaciones más generales, donde se ha investigado la posibilidad de encontrar el análogo óptico de la localización de electrones, un fenómeno propuesto por Anderson en 1958 [19] para explicar la transición de conductor a aislante que experimentan ciertos sólidos cristalinos a bajas temperaturas y que se asoció con la interferencia de ondas recién en la década de 1980 [20,21]. Actualmente se sabe [22–25] que la *localización débil* es una propiedad general de cualquier tipo de ondas que se propagan en medios desordenados y que puede ocurrir aún cuando el desorden esté limitado a la superficie y no necesariamente a todo el volumen con el que interactúa la onda.

Si bien el popular formalismo de la Óptica de Fourier [26, 27] puede emplearse con seguridad para obtener los comportamientos cinemáticos de las ondas involucradas en todo problema de scattering, dicho formalismo es una aproximación que no hace referencia al carácter vectorial de los campos electromagnéticos ni a las propiedades constitutivas de los medios materiales y en consecuencia no predice correctamente todos los comportamientos dinámicos o energéticos. En particular, es sabido que la Óptica de Fourier falla cuando las dimensiones típicas de los objetos dispersores son comparables con la longitud de onda de la radiación empleada [28–35]. Por este motivo, en esta zona (llamada zona resonante) es necesario emplear métodos basados en la *solución rigurosa de las ecuaciones*

de *Maxwell* con sus respectivas condiciones de contorno. Con los métodos rigurosos no es fácil encontrar soluciones analíticas y se debe recurrir a soluciones numéricas cuyo grado de complejidad aumenta con los tamaños de los objetos dispersores. Esto es así ya que a grandes rasgos se puede decir que las mayores dificultades de los tratamientos rigurosos surgen al tener que satisfacer condiciones de contorno en superficies muy grandes medidas en unidades de la longitud de onda.

En el caso de superficies rugosas, el primer intento de resolver un problema invocando las condiciones de contorno fue realizado por Rayleigh en el año 1907 [36] en el marco del estudio de redes de difracción hechas de materiales impenetrables. Posteriormente, los avances computacionales permitieron resolver problemas de redes de difracción en medios transparentes o con conductividad finita [37–39]. En el caso de redes, si bien la superficie es grande medida en unidades de longitud de onda, la periodicidad del problema permite simplificar el análisis y reducir los requisitos computacionales. Es así que en el momento actual se dispone de tratamientos rigurosos y confiables para redes de difracción que no solo permiten reproducir observaciones experimentales sino que también han logrado predecir fenómenos nunca antes observados [37–39].

Posteriormente, el éxito de la teoría electromagnética de redes de difracción ha incentivado el desarrollo de tratamientos rigurosos también para superficies no periódicas [33, 34], aunque en algunos casos los tiempos de cómputo aún hoy resultan prohibitivos. Recién durante las dos últimas décadas del siglo XX ha sido posible realizar cálculos para superficies rugosas aleatorias con simetría de translación a lo largo de una dirección (rugosidades 1D). En estos casos, las formulaciones rigurosas han permitido predecir nuevos e interesantes fenómenos ópticos, ausentes en descripciones más sencillas. Uno de los mayores logros de la teoría electromagnética rigurosa fue la predicción en 1985 de la intensificación del pico de retroreflexión (enhanced backscattering) en superficies rugosas aleatorias unidimensionales [40]. Este fenómeno, observado experimentalmente dos años más tarde [41], es una manifestación de la localización fotónica débil [42]. La intensificación del pico de retroreflexión puede ocurrir incluso en el caso de *superficies planas* con desorden en sus propiedades constitutivas [43–45]. En esta situación la intensificación del pico de retroreflexión está relacionada con la localización débil de ondas superficiales, un fenómeno que también ocurre en superficies metálicas con rugosidades de altura muy baja [42, 46–50].

Al comenzar este trabajo de tesis, todos los formalismos desarrollados para estudiar el

scattering electromagnético en superficies rugosas no periódicas suponían que los medios involucrados eran no magnéticos y de esta manera excluían la presencia de metamateriales. Para explorar los fenómenos asociados con el scattering superficial en presencia de metamateriales, hemos elegido generalizar a medios magnéticos dos métodos basados en la hipótesis de Rayleigh [36] y que ya habían sido empleados en el caso de materiales ordinarios: un método perturbativo [51–55], válido para rugosidades con alturas muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación empleada, y un método directo [56–58] solamente limitado por la validez de la hipótesis de Rayleigh. Ambos métodos ya habían sido generalizados a medios magnéticos en el caso mucho más sencillo de superficies rugosas periódicas [59,60]. Las herramientas desarrolladas se emplearon para investigar los diversos efectos ópticos asociados con la presencia de rugosidad superficial en los nuevos escenarios provistos por los metamateriales magnéticos.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se resumen los elementos de la teoría electromagnética que conforman el punto de partida de todo formalismo riguroso. A continuación se introduce la hipótesis de Rayleigh, un elemento teórico que simplifica el tratamiento de las condiciones de contorno y que durante el transcurso de este trabajo [61–65] ha merecido renovada atención en la comunidad óptica debido a que su rango de aplicación podría exceder el que ha sido aceptado hasta el momento. En el capítulo 3 se desarrollan los nuevos formalismos y se dan los detalles esenciales de las implementaciones numéricas. Luego se analiza la convergencia numérica, la consistencia entre los resultados obtenidos con ambos métodos y se muestran resultados que validan los métodos presentados para distintas polarizaciones de la onda incidente y distintos medios de refracción. El capítulo 4 está dedicado a explorar las nuevas respuestas ópticas provistas por los metamateriales. Se estudian los campos difractados en superficies unidimensionales con una protuberancia de perfil rectangular y sinusoidal. En particular se comparan las distribuciones de potencia reflejada y transmitida cuando se cambia el signo del índice de refracción del metamaterial. Esta situación reviste especial interés pues puede ser relevante no solamente en novedosas aplicaciones donde las propiedades de los metamateriales pueden jugar un papel crucial, como por ejemplo en el diseño de mantos de invisibilidad [66,67], lentes perfectas [68], control de la fuerza de Casimir [69], sino también en aplicaciones más convencionales, análogas a las empleadas para medios magnéticos, como por ejemplo en la determinación de los parámetros constitutivos de un metamaterial a partir de curvas experimentales de reflectancia en función del ángulo

de incidencia [70]. En el capítulo 5 se presta especial atención a los efectos ópticos relacionados con la excitación de ondas superficiales. Es sabido [71–74] que la aparición de los metamateriales ha permitido la existencia de nuevos regímenes de ondas superficiales. Los medios no magnéticos soportan sólo la propagación de ondas superficiales con polarización  $p$  mientras que en los metamateriales con índice de refracción negativo, medios necesariamente magnéticos, las ondas superficiales se logran excitar además con polarización  $s$ . Estos nuevos regímenes de excitación habían sido explorados solamente en el caso de superficies periódicamente corrugadas [59, 60, 75–78], mientras que con los métodos desarrollados en este trabajo de tesis se ha podido estudiar también la excitación de ondas superficiales cuando la superficie de separación tiene rugosidades localizadas, un tema relevante en aplicaciones plasmónicas donde se necesitan técnicas especiales de acoplamiento entre una onda propagante y una onda superficial [79, 80]. A diferencia de los capítulos anteriores, donde se consideran solamente superficies rugosas deterministas, el capítulo 6 está dedicado al estudio del scattering en superficies rugosas aleatorias. Para ello, primero se describe la caracterización de las propiedades estadísticas de las superficies empleadas y el algoritmo utilizado para generarlas. Luego, se presta especial atención al fenómeno de intensificación del pico de retroreflexión y a su relación con la *localización débil* en el caso de materiales convencionales y en las nuevas regiones de excitación de ondas superficiales. Finalmente, en el capítulo 7 se resumen las conclusiones de este trabajo de tesis.





# Capítulo 2

## Teoría

En este capítulo damos los elementos teóricos necesarios para estudiar el scattering electromagnético en la superficie rugosa de un metamaterial. En todo el trabajo de tesis consideraremos que la superficie rugosa tiene simetría de traslación y que esta representada por la función  $y = g(x)$  (ver Figura 2.1). Esta superficie separa dos medios lineales, homogéneos e isotropos caracterizados por los parámetros constitutivos  $\epsilon_i$  (permitividad eléctrica) y  $\mu_i$  (permeabilidad magnética),  $i = 1, 2$ . Supondremos que el medio 1 ( $y > g(x)$ , medio de incidencia) es un material convencional con índice de refracción positivo  $\nu_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ,  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ , mientras que el medio 2 ( $y < g(x)$ , medio de refracción) es un metamaterial con parámetros constitutivos  $\epsilon_2 = \epsilon_{2R} + i\epsilon_{2I}$  y  $\mu_2 = \mu_{2R} + i\mu_{2I}$ , ambos dependientes de la frecuencia  $\omega$ , partes reales de signo arbitrario y partes imaginarias positivas  $\epsilon_{2I} > 0$  y  $\mu_{2I} > 0$  (causalidad). En el caso ideal (sin pérdidas,  $\epsilon_{2I} = 0$ ,  $\mu_{2I} = 0$ ), el metamaterial tiene índice de refracción positivo  $\nu_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ , como un material convencional, cuando  $\epsilon_{2R} > 0$  y  $\mu_{2R} > 0$ . En este caso, el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  de una onda plana es paralelo al vector de onda  $\mathbf{k}$  y por este motivo se dice que el metamaterial es un medio con velocidad de fase positiva (medio PPV, por las siglas en inglés de positive phase velocity). En cambio, el índice de refracción de un metamaterial sin pérdidas es negativo  $\nu_2 = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  cuando  $\epsilon_{2R} < 0$  y  $\mu_{2R} < 0$  [81]. En este caso, el vector de Poynting  $\mathbf{S}$  de una onda plana es antiparalelo al vector de onda  $\mathbf{k}$  y se dice que el metamaterial tiene velocidad de fase negativa (medio NPV por las siglas en inglés de negative phase velocity). Para medios reales con pérdidas, estas condiciones son mas amplias y se puede demostrar [82] que el material es PPV cuando se cumple la condición

$$\epsilon_R |\mu| + \mu_R |\epsilon| > 0. \quad (2.1)$$

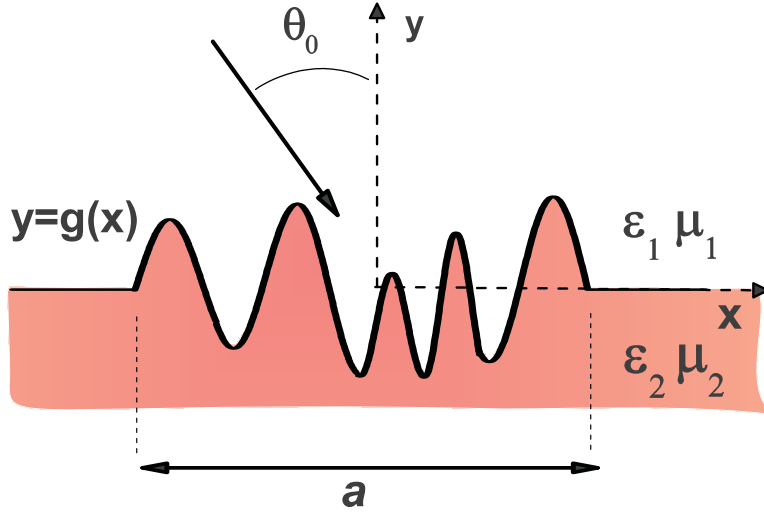


Figura 2.1: Esquema del problema de valores de contorno.

En cambio, cuando

$$\epsilon_R |\mu| + \mu_R |\epsilon| < 0, \quad (2.2)$$

el material es NPV.

La superficie rugosa es iluminada por una onda electromagnética que se propaga en el plano  $(x, y)$  (plano de incidencia) y cuya dirección forma un ángulo  $\theta_0$ , ( $|\theta_0| < \pi/2$ ) con el eje  $y$ . Para resolver el problema de scattering esquematizado en la Figura 2.1 se deben encontrar los campos electromagnéticos totales en todo punto del espacio.

## 2.1. Ecuaciones de Maxwell

En la descripción macroscópica clásica, los campos electromagnéticos satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (las ecuaciones de Maxwell) que, en ausencia de fuentes libres y en unidades gaussianas, se puede expresar de la siguiente forma [83]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.6)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío;  $\mathbf{E}$  el vector campo eléctrico,  $\mathbf{H}$  el vector campo magnético,  $\mathbf{D}$  el vector desplazamiento eléctrico y  $\mathbf{B}$  el vector inducción magnética. Todos los campos son funciones de la coordenada espacial  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  y del tiempo  $t$ . A partir de este momento consideraremos dependencias temporales armónicas, de la forma  $e^{-i\omega t}$  donde  $\omega$  es la frecuencia angular. Para tener en cuenta las propiedades de cada medio, las ecuaciones de Maxwell deben completarse con las relaciones constitutivas. En medios lineales, isótropos y homogéneos como los que supondremos en este trabajo de tesis, la relaciones constitutivas para dependencias temporales armónicas son

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.7)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

donde  $\epsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$  son números complejos que representan la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética respectivamente. Con estas consideraciones las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir de la siguiente forma

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\frac{\omega}{c}\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\frac{\omega}{c}\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.12)$$

Aplicando rotor a las ecuaciones (2.9) y (2.10) y combinándolas con las ecuaciones (2.11) y (2.12) se obtiene la siguiente ecuación de ondas

$$\{\nabla^2 + k^2\}\Psi = 0, \quad (2.13)$$

donde  $\Psi$  representa cualquier campo  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  o  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  y  $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon}$  es el número de onda. Esta ecuación es también conocida como la ecuación homogénea de Helmholtz.

### 2.1.1. Condiciones de Contorno

En la superficie de separación  $y = g(x)$  y en ausencia de fuentes libres, los campos deben satisfacer las siguientes condiciones de contorno

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)|_{y=g(x)} = 0, \quad (2.14)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_{y=g(x)} = 0, \quad (2.15)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)|_{y=g(x)} = 0, \quad (2.16)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)|_{y=g(x)} = 0, \quad (2.17)$$

donde  $\hat{n}$  es el versor normal a la superficie. Las ecuaciones (2.14)-(2.15) establecen la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  y las ecuaciones (2.16) y (2.17) la continuidad de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$ .

### 2.1.2. Modos de polarización

Para superficies unidimensionales de la forma  $y = g(x)$  y para direcciones de propagación de la onda incidente contenidas en el plano  $(x, y)$ , el problema de scattering exhibe simetría de traslación en la dirección del eje  $z$ . En este caso los campos totales no dependen de la variable  $z$  y todas las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  se pueden expresar en términos de las componentes  $E_z$  y  $H_z$

$$E_x(x, y) = \frac{ic}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} \quad (2.18)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{ic}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$H_x(x, y) = -\frac{ic}{\omega\mu} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \quad (2.20)$$

$$H_y(x, y) = \frac{ic}{\omega\mu} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x}. \quad (2.21)$$

De esta manera, vemos que la simetría de traslación y la linealidad del problema permiten analizar cualquier polarización arbitraria en términos de dos polarizaciones independientes: la polarización  $s$  o TE (Transverso Eléctrico), cuando  $H_z = 0$  y  $E_z \neq 0$ , y la polarización  $p$  o TM (Transverso Magnético), cuando  $E_z = 0$  y  $H_z \neq 0$ . El primer caso corresponde a la situación en que el campo eléctrico de la onda incidente está linealmente polarizado en dirección perpendicular al plano de incidencia y el segundo caso a la situación en que el campo eléctrico de la onda incidente está linealmente polarizado en una dirección contenida en el plano de incidencia. En ambos casos, los campos totales, reflejado y transmitido, mantienen la polarización de la onda incidente. Las ecuaciones de continuidad en la superficie de separación quedan

$$E_{1z}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)} = E_{2z}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)}, \quad (2.22)$$

$$H_{1x}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)} = H_{2x}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)}, \quad (2.23)$$

para la polarización  $s$ , y

$$H_{1z}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)} = H_{2z}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)}, \quad (2.24)$$

$$E_{1x}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)} = E_{2x}(\mathbf{r}, t)|_{y=g(x)} \quad (2.25)$$

para la polarización  $p$ , donde el subíndice 1 o 2 indica el medio respectivo. Para ambos tipos de polarización, estas condiciones de contorno se pueden expresar en términos de las componentes  $E_z$  y  $H_z$ . Si llamamos  $\Psi(x, y)$  a la componente  $z$  del campo *eléctrico* total en el caso de polarización  $s$  o a la componente  $z$  del campo *magnético* total en el caso de polarización  $p$ , las ecuaciones de continuidad se pueden resumir de la siguiente forma

$$\Psi_1(x, g(x)) = \Psi_2(x, g(x)), \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \Psi_1(x, g(x)) = \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \Psi_2(x, g(x)), \quad (2.27)$$

donde  $\sigma_j = \mu_j$  para el modo  $s$  o  $\sigma_j = \epsilon_j$  para el modo  $p$ .

## 2.2. Desarrollos de Rayleigh

Es sabido que fuera de la región corrugada ( $\text{mín } g(x) \leq y \leq \text{máx } g(x)$ ), la función  $\Psi(x, y)$  se puede representar rigurosamente mediante superposiciones de ondas planas,

conocidas en la literatura como *desarrollos de Rayleigh*. Para la zona  $y > \text{máx } g(x)$ , el desarrollo de Rayleigh adecuado es

$$\Psi_1(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(1)} y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_\alpha^{(1)} y)} d\alpha, \quad (2.28)$$

donde el primer término representa la onda plana incidente con amplitud unidad y el segundo término representa los campos dispersados en el medio 1 (o campos dispersados reflejados). La constante

$$\alpha_0 = k_0 \nu_1 \sin \theta_0, \quad k_0 = \omega/c$$

es la componente  $x$  del vector de onda incidente. El integrando en (2.28) representa ondas planas con amplitud  $R(\alpha)$  y vector de onda

$$\vec{k}^{(1r)}(\alpha) = \alpha \hat{x} + \beta_\alpha^{(1)} \hat{y}.$$

Análogamente, en la zona  $y < \text{mín } g(x)$  el desarrollo de Rayleigh adecuado para los campos dispersados en el medio 2 (o campos dispersados transmitidos) es

$$\Psi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_\alpha^{(2)} y)} d\alpha, \quad (2.29)$$

cuyo integrando representa ondas planas con amplitud  $T(\alpha)$  y vector de onda

$$\vec{k}^{(2t)}(\alpha) = \alpha \hat{x} - \beta_\alpha^{(2)} \hat{y}.$$

Notar que nuestro problema de scattering queda resuelto cuando se encuentran las cantidades complejas  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$  que determinan la distribución de ondas planas en los campos dispersados reflejados y transmitidos.

Las componentes según  $y$  de los vectores de onda  $\vec{k}^{(1r)}$  y  $\vec{k}^{(2t)}$  quedan fijas por la relación de dispersión en cada medio y vienen dadas por la siguiente expresión

$$\beta_\alpha^{(j)} = \beta^{(j)}(\alpha) = (k_0^2 \epsilon_j \mu_j - \alpha^2)^{1/2}, \quad j = 1, 2, \quad (2.30)$$

donde hemos definido  $\beta_0^{(j)} = \beta^{(j)}(\alpha_0)$ . Notemos que las cantidades  $\beta_\alpha^{(1)}$  son reales o imaginarias puras. Cuando estas cantidades son reales, una situación que ocurre en la llamada *zona radiativa*  $|\alpha/k_0| < \nu_1$ , se debe pedir que  $\text{Re } \beta_\alpha^{(1)} \geq 0$ , para que los campos de la ec. (2.28) representen ondas planas propagantes que *se alejan* de la superficie hacia el semiespacio  $y > g(x)$ . En cambio, cuando estas cantidades son imaginarias puras, una situación

que ocurre en la llamada *zona no radiativa*  $|\alpha/k_0| \geq \nu_1$ , se debe pedir que  $\text{Im} \beta_\alpha^{(1)} \geq 0$ , para que estos campos representen ondas evanescentes que *se atenúan* para  $y \rightarrow +\infty$ . Consideraciones similares valen para las cantidades  $\beta_\alpha^{(2)}$  en el caso ideal de medios de transmisión completamente transparentes (sin pérdidas,  $\epsilon_2$  y  $\mu_2$  reales), aunque debe notarse que en este caso la elección de las ramas de las funciones raíz cuadrada en (5.2) depende del carácter PPV o NPV del medio 2: positiva para PPV o negativa para NPV. En cambio, cuando el medio 2 es un medio real (con pérdidas,  $\text{Im} \epsilon_2 > 0$ ,  $\text{Im} \mu_2 > 0$ ), las cantidades  $\beta_\alpha^{(2)}$  son siempre complejas con parte imaginaria no nula, y en consecuencia se debe pedir que  $\text{Im} \beta_\alpha^{(2)} > 0$ , para que los campos de la ec. (2.29) se atenúen para  $y \rightarrow -\infty$ . Notar que la condición  $\text{Im} \beta_\alpha^{(2)} > 0$  fija automáticamente el signo de  $\text{Re} \beta_\alpha^{(2)}$ , independientemente de los signos de  $\epsilon_{2R}$  y de  $\mu_{2R}$ , es decir, independientemente del carácter PPV o NPV del medio 2.

## 2.3. Hipótesis de Rayleigh

Para obtener las amplitudes incógnita  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$ , las representaciones (2.28) y (2.29) deben satisfacer las condiciones de contorno (2.26) y (2.27) en la superficie corrugada  $y = g(x)$ . En este trabajo de tesis generalizamos al caso de metamateriales dos tratamientos relativamente sencillos que ya han sido empleados exitosamente en el caso de superficies entre medios convencionales (no magnéticos) [85] y que están basados en lo que se conoce como hipótesis de Rayleigh [36]. Esta hipótesis, usada por Lord Rayleigh en 1907 para resolver la dispersión de una onda acústica en una superficie periódica impenetrable, consiste en suponer que los desarrollos (2.28) y (2.29), estrictamente válidos solamente en la zona fuera de la rugosidad  $y = g(x)$ , también tienen validez en la zona de las rugosidades cercana a la superficie y que entonces pueden emplearse para imponer las condiciones de contorno (2.26) y (2.27). Esta suposición fue objetada por Lippmann [86] recién en 1953. Las objeciones de Lippmann dieron lugar a numerosos estudios dedicados a establecer el límite de validez de la hipótesis de Rayleigh (para un resumen histórico ver por ejemplo [87]). La aplicación de esta hipótesis en diversas configuraciones sigue despertando interés, tal como puede verse en las referencias [61–63, 88, 89]. Hoy en día se admite que en el caso de materiales convencionales la hipótesis de Rayleigh da buenos resultados para superficies con rugosidades bajas. Lo mismo se ha podido comprobar en el caso de metamateriales con índice de refracción negativo, donde la hipótesis de Rayleigh ha sido



empleada exitosamente para estudiar la difracción en superficies corrugadas periódicamente [59, 60, 77, 90]. Aunque fue muchas veces cuestionada, muy recientemente se ha demostrado que la hipótesis de Rayleigh puede ser aplicada a rugosidades más profundas que el límite de validez conocido, sin problemas numéricos y con una precisión mejor que otros métodos exactos [64, 65]. De esta forma se revitalizan los métodos numéricos basados en esta hipótesis y tal como escribe Tishchenko en [65], esto no es un acontecimiento menor: *“La revitalización de la hipótesis de Rayleigh es un resultado fundamental en la teoría de difracción. La demostración numérica de su validez y su demostración analítica son sólo los primeros pasos en esta dirección... Muy importante en este sentido es la posibilidad propuesta por la hipótesis de Rayleigh de proporcionar una formulación analítica de las soluciones donde finalmente el análisis numérico está obligado a resolver un gran sistema, evitando así la acumulación de errores típicos de los métodos puramente numéricos y acelerar el proceso de cálculo drásticamente”*.

A continuación usamos la hipótesis de Rayleigh para satisfacer las condiciones de contorno (2.26) y (2.27). Con los desarrollos (2.28) y (2.29) estas condiciones se escriben de la siguiente manera

$$e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(1)} g)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_\alpha^{(1)} g)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_\alpha^{(2)} g)} d\alpha \quad (2.31)$$

y

$$\begin{aligned} (-g'\alpha_0 - \beta_0^{(1)}) e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(1)} g)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha) (-g'\alpha + \beta_\alpha^{(1)}) e^{i(\alpha x + \beta_\alpha^{(1)} g)} d\alpha \\ = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) (-g'\alpha - \beta_\alpha^{(2)}) e^{i(\alpha x - \beta_\alpha^{(2)} g)} d\alpha \end{aligned} \quad (2.32)$$

Proyectando las ecuaciones (2.31) y (2.32) en la base de funciones  $\{e^{i\alpha'x}\}_{\alpha' \in \text{Re}}$  es posible obtener un sistema de dos ecuaciones integrales acopladas para las amplitudes incógnitas  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$ .

## 2.4. Ecuaciones de Rayleigh Reducidas

Para lograr un sistema de dos ecuaciones integrales desacopladas, utilizaremos un procedimiento similar al empleado originalmente por Toigo et al. [91] para materiales convencionales y posteriormente generalizado a redes de difracción de materiales magnéticos en la Ref. [92]. En primer lugar, multiplicamos la ecuación (2.31) por

$$(g'\alpha' - \beta_{\alpha'}^{(2)})e^{-i(\alpha'x + \beta_{\alpha'}^{(2)}g)}$$

y la ecuación (2.32) por

$$-\sigma_2 e^{-i(\alpha'x + \beta_{\alpha'}^{(2)}g)}.$$

En segundo lugar, se integra entre  $-\infty$  y  $+\infty$  con respecto a  $x$  y se suman ambas ecuaciones. De esta forma la integral que contiene a  $T(\alpha)$  queda:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) [g'(\alpha' + \alpha) - \beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)}] e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) [(\alpha' + \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} g' e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx \\ & \quad - (\beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_{\alpha}^{(2)}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx] d\alpha. \end{aligned}$$

Integrando por partes la primera de estas integrales y reagrupando convenientemente, la integral que contiene a  $T(\alpha)$  es nula

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} T(\alpha) \left[ \frac{i(\alpha' + \alpha)}{\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)}} (i(\alpha' - \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx \right. \\ & \quad \left. - (\beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_{\alpha}^{(2)}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx \right] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(\alpha)}{(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx \right. \\ & \quad \left. (-(\alpha'^2 - \alpha^2) - ((\beta_{\alpha'}^{(2)})^2 - (\beta_{\alpha}^{(2)})^2)) \right] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(\alpha)}{(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha' - \alpha)x} e^{-i(\beta_{\alpha'}^{(2)} + \beta_{\alpha}^{(2)})g} dx \right. \\ & \quad \left. (-(\alpha')^2 + \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\nu_2)^2 + (\alpha')^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(\nu_2)^2 - \alpha^2) \right] d\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente, multiplicamos la ecuación (2.31) por

$$(g'\alpha' + \beta_{\alpha'}^{(1)})e^{-i(\alpha'x - \beta_{\alpha'}^{(1)}g)}$$

y la ecuación (2.32) por

$$\sigma_1 e^{-i(\alpha'x - \beta_{\alpha'}^{(1)}g)}.$$

En segundo lugar, integramos entre  $-\infty$  y  $+\infty$  con respecto a  $x$  y se restan ambas ecuaciones. De esta forma se obtiene una ecuación integral sólo para las amplitudes incógnita  $T(\alpha)$  pues, en este caso, la integral que contiene a  $R(\alpha)$  es nula.

Los procedimientos esquematizados nos han permitido desacoplar las condiciones de contorno y obtener una ecuación integral sólo para las amplitudes incógnita  $R(\alpha)$

$$-K(\alpha_0, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^r(\alpha', \alpha)R(\alpha')d\alpha'. \quad (2.33)$$

y otra ecuación integral sólo para las amplitudes incógnita  $T(\alpha)$

$$-2\beta_0^{(1)} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \delta(\alpha - \alpha_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^t(\alpha', \alpha)T(\alpha')d\alpha' \quad (2.34)$$

donde  $\delta()$  es la distribución delta de Dirac,

$$K^r(\alpha', \alpha) = M_{\alpha', \alpha} D \left[ \alpha - \alpha', \beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)} \right] \quad (2.35)$$

y

$$K^t(\alpha', \alpha) = M_{\alpha, \alpha'} D \left[ \alpha - \alpha', \beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)} \right] \quad (2.36)$$

donde

$$M_{\alpha', \alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \left(\alpha\alpha' + \beta_{\alpha'}^{(2)}\beta_{\alpha'}^{(1)}\right) + k_0^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\nu_1^2 - \nu_2^2\right)}{\beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)}} \quad (2.37)$$

y

$$D[u, v] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iux} e^{-ivg(x)} \quad (2.38)$$

es la transformada de Fourier de  $e^{-ivg(x)}$ .

Las ecuaciones (2.33) y (2.34) son ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie con núcleos  $K^r(\alpha', \alpha)$  y  $K^t(\alpha', \alpha)$  respectivamente. La inhomogeneidad en la ec. (2.33) viene dada por  $K(\alpha_0, \alpha)$ , con

$$K(\alpha_0, \alpha) = N_{\alpha_0, \alpha} 2\pi D \left[ \alpha - \alpha_0, \beta_{\alpha}^{(2)} + \beta_0^{(1)} \right] \quad (2.39)$$

donde

$$N_{\alpha_0, \alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \left(\alpha_0\alpha - \beta_{\alpha}^{(2)}\beta_0^{(1)}\right) + k_0^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\nu_1^2 - \nu_2^2\right)}{\beta_{\alpha}^{(2)} + \beta_0^{(1)}}. \quad (2.40)$$

## 2.5. Balance de Potencias

Los campos electromagnéticos deben satisfacer el balance de energía. En el caso ideal en el que el medio 2 no tiene pérdidas, dicha condición impone que el promedio temporal del flujo del vector de Poynting  $\mathbf{S}$  sea nulo a través de cualquier superficie cerrada [83]. Esta condición se puede expresar de la siguiente manera:

$$\oint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 \quad (2.41)$$

donde  $\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  el versor normal a la superficie y el  $*$  denota el complejo conjugado. El balance energético dado por la ecuación (2.41) involucra a los campos totales y puede expresarse en términos de las cantidades  $\mathbf{S}_{\text{inc}}$ ,  $\mathbf{S}_{\text{ref}}$  y  $\mathbf{S}_{\text{tran}}$  asociadas con los campos incidentes, reflejados y transmitidos respectivamente. A continuación tomamos una superficie cerrada definida por el contorno rectangular que encierra a la superficie rugosa y que se muestra en la figura 2.2. Dicho contorno está formado por dos rectas horizontales en  $y = \pm y_0$  y dos rectas verticales en  $x = \pm x_0$ . De esta forma la condición

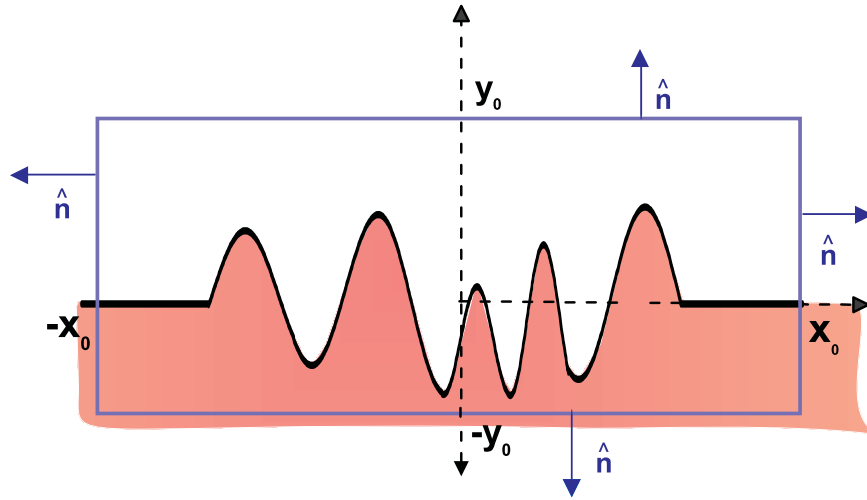


Figura 2.2: Esquema del recinto utilizado para realizar el balance de potencias en el caso en el que el medio de transmisión no tenga pérdidas.

(2.41) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int \mathbf{S}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int \mathbf{S}_{\text{ref}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl + \int \mathbf{S}_{\text{tran}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl. \quad (2.42)$$

De las ecuaciones de Maxwell (2.9) y (2.10) podemos deducir la expresión del promedio temporal del vector de Poynting que, proyectado según  $\hat{\mathbf{y}}$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$\langle \mathbf{S} \cdot \hat{y} \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{c}{\omega} \operatorname{Re} \frac{1}{i\sigma} \Psi \partial_y \Psi.$$

donde  $\sigma = \mu$  para el modo  $s$  o  $\sigma = -\epsilon$  para el modo  $p$ . Por lo tanto, para obtener la contribución del campo reflejado en  $y = y_0$ , se calcula el promedio temporal del vector de Poynting proyectado según  $y$ , y se lo integra entre  $-\infty$  y  $+\infty$  con respecto a  $x$ . Normalizado con el campo incidente queda:

$$P_r = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(\beta_\alpha^{(1)})}{\beta_0^{(1)}} |R(\alpha)|^2 d\alpha \quad (2.43)$$

que representa la fracción de potencia incidente que es reflejada en el medio 1, por encima de la superficie. Análogamente, para obtener la contribución en  $y = -y_0$  del campo transmitido, se proyecta según  $-y$  el promedio temporal del vector de Poynting y se lo integra entre  $-\infty$  y  $+\infty$  con respecto a  $x$ . Normalizado con el campo incidente queda:

$$P_t = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{\sigma_1 (\beta_\alpha^{(2)})^*}{\sigma_2^* \beta_0^{(1)}} \right) |T(\alpha)|^2 d\alpha \quad (2.44)$$

que representa la fracción de potencia incidente que es transmitida en el medio 2, por debajo de la superficie. Dado que las proyecciones según  $x$  en  $x = \pm x_0$  no contribuyen al vector de Poynting, podemos escribir la ecuación que se debe verificar para la conservación de la energía, para el caso de medio sin pérdida:

$$P_r + P_t = 1. \quad (2.45)$$

En el caso en el que el medio 2 tenga pérdida, para hacer el balance reemplazamos la superficie en  $y = -y_0$  por la superficie  $y = g(x)$  y entonces el balance energético involucra a  $\mathbf{S}_{\text{abs}}$  (la potencia absorbida por el medio 2 debajo de la superficie). Por lo tanto, para calcular el promedio temporal de  $\mathbf{S}_{\text{abs}}$  se debe proyectar el vector de Poynting sobre el vector normal a la superficie en cada punto. De esta forma, la fracción de potencia absorbida normalizada con el campo incidente queda:

$$P_a = \frac{\operatorname{Re} \sigma_1}{\beta_0^{(1)} \sigma_2^*} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \Psi_2 \left( \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x} g' \right) \right]_{y=g(x)} dx \quad (2.46)$$

y la ecuación a verificar es [93]:

$$P_r + P_a = 1. \quad (2.47)$$

# Capítulo 3

## Métodos numéricos

Hemos visto en el capítulo anterior que cuando el plano de incidencia coincide con la sección principal de la superficie unidimensional, el problema físico de scattering se reduce a encontrar las cantidades complejas  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$  en todo el dominio de la variable espectral  $\alpha$  ( $-\infty < \alpha < \infty$ ). También hemos visto que si la hipótesis de Rayleigh es válida, entonces  $R(\alpha)$  satisface la ecuación integral (2.33) y  $T(\alpha)$  la ecuación integral (2.34). En este capítulo esquematizaremos dos métodos numéricos para resolver las ecuaciones integrales (2.33) y (2.34): un método directo (MD) y un método perturbativo (MP), este último con validez restringida a rugosidades con alturas pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente. Debido a la ausencia de estudios sistemáticos previos, se ha prestado especial atención a la validación de los resultados obtenidos mediante ambos métodos numéricos. En particular, parece imprescindible validar los resultados en situaciones que habían sido descartadas hasta la aparición de los metamateriales, como por ejemplo el caso de medios con índice de refracción negativo. Se mostrará que los dos métodos numéricos (MD y MP) dan resultados coincidentes dentro de sus rangos de validez y que estos resultados son consistentes con los que podrían esperarse a partir de principios físicos bien establecidos.

### 3.1. Método directo

Para resolver numéricamente ecuaciones integrales como (2.33) es posible emplear esquemas de cuadratura que permitan aproximar la integral como una combinación lineal de los valores  $R(\alpha_j)$  de la función incógnita  $R$  evaluada en una grilla  $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$  de la va-

riable  $\alpha$ .  $N_\alpha$  es un parámetro numérico que determina la densidad de la grilla y que se obtendrá mediante criterios de convergencia. De esta manera, y evaluando la versión aproximada de la identidad (2.33) en los puntos discretos  $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$ , es posible obtener  $N_\alpha$  ecuaciones algebraicas cuya inversión permitirá determinar las incógnitas  $R(\alpha_j)$ ,  $j = 1, \dots, N_\alpha$ . En este caso aparece una dificultad: el intervalo de integración de la variable  $\alpha$  en (2.33) es infinito. Esta dificultad se puede superar suponiendo que  $|R(\alpha)| \rightarrow 0$  cuando  $|\alpha| \rightarrow \pm\infty$ . Por lo tanto, en este caso será lícito aproximar la integral en el intervalo infinito por una integral en el intervalo finito  $|\alpha| \leq \alpha^{\text{Max}}$ , donde  $\alpha^{\text{Max}}$  es otro parámetro numérico que será determinado a posteriori mediante criterios de convergencia. Un tratamiento análogo para la ecuación (2.34) permitirá determinar los valores  $T(\alpha_j)$  de la función incógnita  $T$  evaluada en la grilla  $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$  de la variable  $\alpha$ .

Al pretender resolver numéricamente las ecuaciones (2.33) y (2.34) mediante el procedimiento descrito, han surgido dos dificultades adicionales. En primer lugar, observamos que para una superficie plana ( $g(x) \equiv 0$ ) las funciones  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$  son proporcionales a distribuciones delta de Dirac. Por este motivo, es de esperar que en el caso de superficies levemente corrugadas las funciones  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$  estén muy concentradas alrededor del valor  $\alpha \approx \alpha_0$  que corresponde a las direcciones especulares, característica que podría exigir valores muy grandes para el parámetro numérico  $N_\alpha$ . En segundo lugar, la ec. (2.34) contiene una delta de Dirac, lo que resulta inconveniente para la discretización. Estas dificultades se pueden superar si en los campos dispersados se escriben por separado las contribuciones de la superficie perfectamente plana y de la rugosidad, es decir, se reescribe la ecuación (2.28) de la siguiente manera

$$\Psi_1(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(1)} y)} + R^{(0)} e^{i(\alpha_0 x + \beta_0^{(1)} y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_\alpha^{(1)} y)} d\alpha, \quad (3.1)$$

donde ahora el segundo término, con amplitud  $R^{(0)}$ , representa la onda plana reflejada por el plano perfecto mientras que la integral del tercer término puede interpretarse como la contribución de la rugosidad. Análogamente, la ecuación (2.29) se puede escribir explicitando la onda plana transmitida por el plano perfecto

$$\Psi_2(x, y) = T^{(0)} e^{i(\alpha_0 x - \beta_0^{(2)} y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_\alpha^{(2)} y)} d\alpha. \quad (3.2)$$

$R^{(0)}$  y  $T^{(0)}$  son los coeficientes de Fresnel de la superficie perfectamente plana, dados por [83]

$$R^{(0)} = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)} - \beta_0^{(2)}}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)} + \beta_0^{(2)}}, \quad (3.3)$$

y

$$T^{(0)} = 2 \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)}}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \beta_0^{(1)} + \beta_0^{(2)}}. \quad (3.4)$$

Matemáticamente, este procedimiento es completamente equivalente a redefinir las amplitudes complejas  $R(\alpha) = R^{(0)}\delta(\alpha - \alpha_0) + \tilde{R}(\alpha)$  y  $T(\alpha) = T^{(0)}\delta(\alpha - \alpha_0) + \tilde{T}(\alpha)$ . Las nuevas ecuaciones integrales para las amplitudes complejas  $\tilde{R}(\alpha)$  y  $\tilde{T}(\alpha)$  son

$$-K(\alpha_0, \alpha) = R^{(0)}(\alpha) K^r(\alpha_0, \alpha) + \int_{-\infty}^{+\infty} K^r(\alpha', \alpha) \tilde{R}(\alpha') d\alpha', \quad (3.5)$$

y

$$-2\beta_0^{(1)} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = T^{(0)}(\alpha) K^t(\alpha_0, \alpha) + \int_{-\infty}^{+\infty} K^t(\alpha', \alpha) \tilde{T}(\alpha') d\alpha'. \quad (3.6)$$

## 3.2. Método perturbativo

El método perturbativo ha sido desarrollado originalmente por Rice [95] para medios impenetrables. A diferencia del método numérico directo, permite exhibir los efectos perturbativos de los parámetros de la rugosidad y dado que su tratamiento numérico es relativamente sencillo, resulta muy conveniente para validar los resultados obtenidos con el método numérico directo. En este trabajo de tesis hemos resuelto las ecuaciones (2.33) y (2.34) modificando el tratamiento perturbativo estándar [91, 95] para incluir medios magnéticos con índice negativo. Tanto las amplitudes complejas  $R(\alpha)$  y  $T(\alpha)$  como los términos de la forma  $e^{-ivg(x)}$  que aparecen en los núcleos (2.35) y (2.36) y en la inhomogeneidad (2.39) se desarrollan en series de potencias

$$R(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad (3.7)$$

$$T(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad (3.8)$$

$$e^{-ivg(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ivg(x))^n}{n!}. \quad (3.9)$$

La integral (2.38) se puede reescribir como

$$D[u, v] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n v^n}{n!} \hat{g}^{(n)}(u), \quad (3.10)$$



donde  $\hat{g}^{(n)}(u)$  es la transformada de Fourier de la función  $[g(x)]^n$  y el índice  $n$  en las series (3.7), (3.8) y (3.10) indica el orden perturbativo. Introduciendo los desarrollos (3.7) y (3.10) en la ecuación (2.33) y los desarrollos (3.8) y (3.10) en la ecuación (2.34) es posible obtener los siguientes esquemas iterativos para los coeficientes  $R^{(n)}(\alpha)$  y  $T^{(n)}(\alpha)$ ,  $n \geq 1$

$$R^{(n)}(\alpha) = - \left[ (-i)^n 2\pi \hat{g}^{(n)}(\alpha - \alpha_0) N_{\alpha_0} \left( \beta_{\alpha}^{(2)} + \beta_0^{(1)} \right)^n + \sum_{j=1}^n (-i)^j \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' M_{\alpha\alpha'} \left( \beta_{\alpha}^{(2)} - \beta_{\alpha'}^{(1)} \right)^j \hat{g}^{(j)}(\alpha - \alpha') R^{(n-j)}(\alpha') \right] / M_{\alpha\alpha}, \quad (3.11)$$

$$T^{(n)}(\alpha) = - \left[ \sum_{j=1}^n (-i)^j \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' M_{\alpha'\alpha} \left( \beta_{\alpha'}^{(2)} - \beta_{\alpha}^{(1)} \right)^j \hat{g}^{(j)}(\alpha - \alpha') T^{(n-j)}(\alpha') \right] / M_{\alpha\alpha}, \quad (3.12)$$

donde  $R^{(0)}(\alpha)$  y  $T^{(0)}(\alpha)$  son los coeficientes de Fresnel dados por las ecuaciones (3.3) y (3.4).

### 3.3. Controles numéricos

Al utilizar el método directo es necesario controlar numéricamente la *estabilidad* y la *convergencia* de los resultados frente a variaciones de los parámetros  $N_{\alpha}$  y  $\alpha^{\text{Max}}$ . Tal como ocurre para medios convencionales, hemos comprobado que tanto la estabilidad como la convergencia empeoran cuando la altura de las rugosidades supera un cierto valor crítico y que el valor de la altura crítica depende de los valores de los parámetros constitutivos. A menos que se indique lo contrario, en los ejemplos mostrados en esta tesis se han usado alturas y parámetros constitutivos para los cuales se ha obtenido convergencia de 6 cifras significativas. Cuando se aumenta la densidad de la grilla  $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_{\alpha}}$  es posible que la matriz  $A$  del sistema algebraico quede mal condicionada, en cuyo caso el método de inversión empleado, el de eliminación gaussiana, puede fallar. Siempre se ha controlado la calidad de la inversión a través de las cantidades  $e_1 = \|A^{-1}A - I\|$  y  $e_2 = \|AA^{-1} - I\|$  donde  $e_1$  y  $e_2$  son medidas de los errores cometidos al realizar las inversiones. Si estos valores son grandes, la inversión no es confiable. En todos los casos mostrados tanto  $e_1$  como  $e_2$  son del orden de la precisión computacional ( $\sim 10^{-13}$ ).

Además de satisfacer criterios de convergencia y estabilidad frente a variaciones de los parámetros numéricos, es físicamente necesario que los resultados provistos tanto por el método directo como por el método perturbativo también satisfagan el principio de

*conservación de la energía* expresado por los balances de potencia desarrollados en la sección (2.5). A menos que se indique lo contrario, en los ejemplos mostrados en esta tesis se han usado alturas y parámetros constitutivos para los cuales los balances de potencia se satisfacen con no menos de tres cifras significativas. Como regla general, se ha observado que cuando se mantienen fijos los valores de los parámetros constitutivos y se aumenta la altura de las rugosidades, disminuye la cantidad de cifras significativas con que se satisface aproximadamente el balance de potencia. Análogamente, se ha comprobado que cuando se mantiene fija la altura de las rugosidades, el grado de exactitud con que se cumple el balance de potencias depende de los valores empleados para los parámetros constitutivos. Cuando el medio 2 es PPV, el balance se satisface con un mayor número de cifras significativas que cuando el medio es NPV. También hemos comprobado que el error cometido en el cumplimiento del balance de potencias para medios con pérdida (ec.(2.47)) siempre es mayor que para medios sin pérdida (ec.(2.45)).

### 3.4. Controles físicos

Una vez verificados los controles numéricos, hemos evaluado la confiabilidad de la aplicación de la hipótesis de Rayleigh a superficies rugosas no periódicas analizando la compatibilidad de los resultados con los predichos por formalismos ondulatorios más sencillos, como el principio de Huygens o la óptica de Fourier [37, 94]. Con este fin hemos obtenido las distribuciones angulares de potencia dispersada (campos lejanos) para superficies con protuberancias sinusoidales. Las distribuciones de potencia dispersada en los medios 1 y 2 se obtienen como el flujo del vector de Poynting asociado a los integrandos en las ecuaciones (2.28) y (2.29) respectivamente. Normalizadas a la potencia incidente resultan

$$\frac{dP^{(1)}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi a} \frac{\operatorname{Re} \left( \beta_{\alpha}^{(1)} \right)}{\beta_0^{(1)}} |\tilde{R}(\alpha)|^2 \quad (3.13)$$

y

$$\frac{dP^{(2)}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi a} \operatorname{Re} \left( \frac{\sigma_1 \left( \beta_{\alpha}^{(2)} \right)^*}{\sigma_2^* \beta_0^{(1)}} \right) |\tilde{T}(\alpha)|^2. \quad (3.14)$$

Ambas expresiones muestran que en las potencias dispersadas sólo intervienen los valores de  $\tilde{R}(\alpha)$  y  $\tilde{T}(\alpha)$  en la zona radiativa  $|\alpha/k_0| < \nu_i$ ,  $i = 1, 2$ ; es decir, en la zona espectral donde los integrandos de las ecuaciones (2.28) y (2.29) representan ondas planas propagantes que se alejan de la superficie en una dirección que forma un ángulo de dispersión

$\theta_{si}$ , ( $|\theta_{si}| < \pi/2$ ),  $i = 1, 2$ , con el eje  $+y$ . En la figura 3.1 se indican estas direcciones junto con la convención de signos empleada para estos ángulos. Obsérvese que en el caso de superficie plana ( $g(x) \equiv 0$ ) sólo están permitidas las direcciones con ángulos  $\theta_{s1} = \theta_0$  y  $\theta_{s2}$  dado por la ley de Snell. Las distribuciones de potencia dadas por las expresiones (3.13)

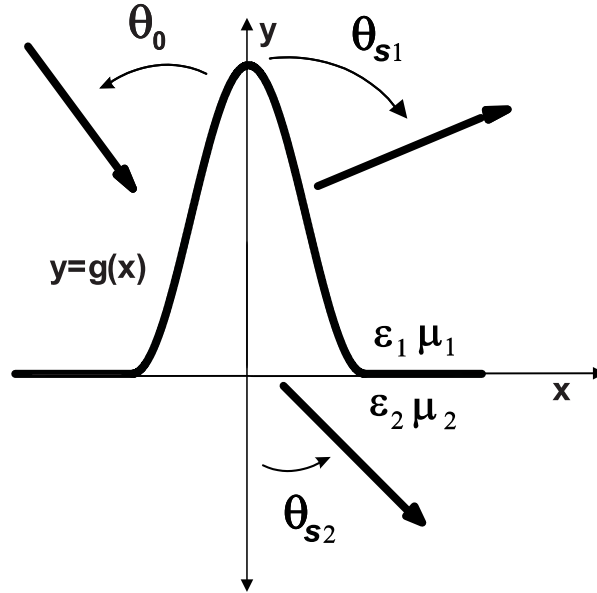


Figura 3.1: Esquema de los ángulos de dispersión e incidente.

y (3.14) suelen ser las magnitudes de interés para la óptica tradicional o de campo lejano. En caso de estar interesados en el comportamiento de los campos cercanos o evanescentes, es necesario recurrir a las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  y  $|\tilde{T}(\alpha)|^2$  fuera de las zonas radiativas.

A continuación mostraremos ejemplos donde hemos considerado que el medio de incidencia es vacío ( $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$ ) y que el medio 2 es PPV o NPV con aproximadamente el mismo módulo del índice de refracción. En particular, los parámetros constitutivos considerados fueron  $\epsilon_2 = 5 + 0.01i$  y  $\mu_2 = 1 + 0.01i$  si el medio es PPV o  $\epsilon_2 = -5 + 0.01i$  y  $\mu_2 = -1 + 0.01i$  en caso contrario. Si bien ahora sólo estamos interesados en ver si los resultados obtenidos mediante la aplicación de la hipótesis de Rayleigh son compatibles con los predichos por formalismos ondulatorios más sencillos, la elección de estos valores para los parámetros constitutivos se inscribe en el marco de la simetría que para superficies perfectamente planas deben satisfacer los campos frente a la transformación  $\{\epsilon_2 \rightarrow -\epsilon_2^*, \mu_2 \rightarrow -\mu_2^*\}$  y que será desarrollada detalladamente en el próximo capítulo. Para los ejemplos siguientes hemos elegido rugosidades con altura muy baja, ya que es de

esperar que en estos casos e independientemente de la polarización incidente, las características principales de las distribuciones angulares de potencia dispersada sean similares a las exhibidas por la transformada de Fourier de la forma de la superficie, tal como lo predice la teoría elemental de difracción de Fraunhofer [27, 37].

### 3.4.1. Incidencia normal

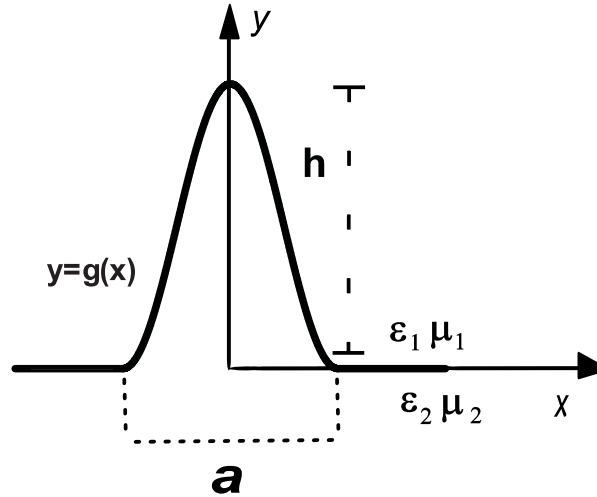


Figura 3.2: Esquema de una protuberancia sinusoidal.

Cuando una onda plana incide normalmente ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) en una superficie con rugosidades simétricas con respecto a  $x = 0$ , es decir,  $g(x) = g(-x)$ , las distribuciones angulares de intensidad reflejada y transmitida deben ser simétricas con respecto a la normal a la superficie media, es decir,  $|\tilde{R}(\alpha)|^2 = |\tilde{R}(-\alpha)|^2$  y  $|\tilde{T}(\alpha)|^2 = |\tilde{T}(-\alpha)|^2$ . Por lo tanto, las distribuciones angulares (3.13) y (3.14) también deben exhibir esta simetría con respecto a la dirección normal.

Para explorar la validez de los resultados provistos por los métodos desarrollados e implementados en este trabajo, hemos elegido como primer ejemplo el caso de una única protuberancia sinusoidal de la forma  $g(x) = \frac{h}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi}{a}x)] \text{rec}(x/a)$ , donde  $\text{rec}(u)$  es la función rectángulo centrada en el origen con ancho y altura igual a la unidad (figura 3.2). Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.0025$ ,  $\lambda/a = 0.25$  y la polarización incidente es  $s$ . Para esta pequeña altura, los esquemas (3.11) y (3.12) del método perturbativo convergen con 8 cifras significativas en el primer orden. El módulo de la transformada de Fourier de esta superficie rugosa está graficado en la figura 3.3. En

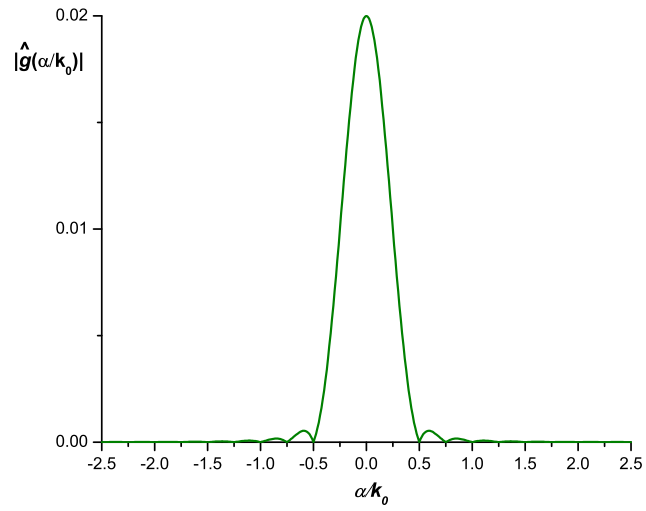


Figura 3.3: Gráfico del módulo de la transformada de Fourier vs  $\alpha/k_0$  para una protuberancia sinusoidal,  $h/a = 0.0025$  y  $\lambda/a = 0.25$ .

la figura 3.4 (izquierda) se muestra la curva de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  para el caso en el que el medio de refracción es PPV. Se observa que la curva es simétrica con respecto a  $\alpha = 0$  y que tiene su primer mínimo en la posición predicha por la transformada de Fourier mostrada en la figura 3.3. Cuando se amplía la escala (figura 3.4, derecha), también se

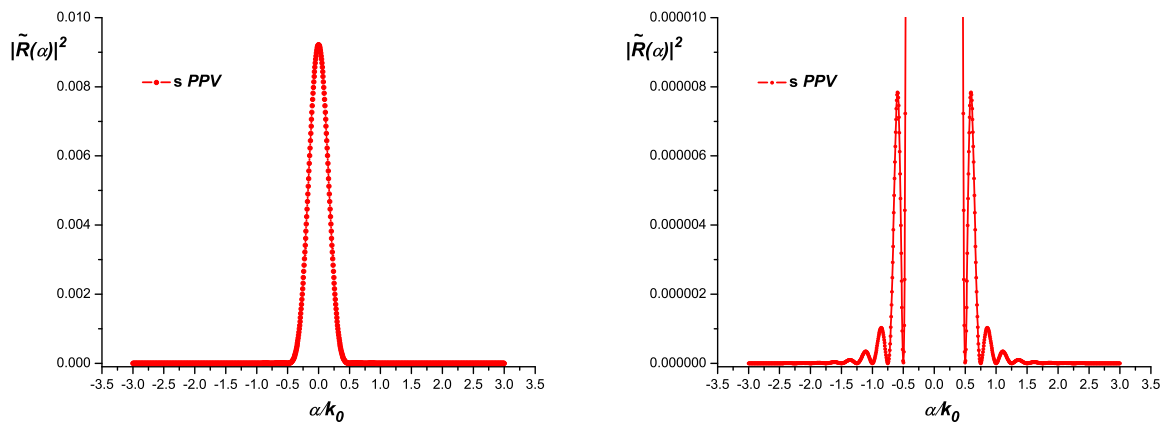


Figura 3.4:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para una protuberancia sinusoidal,  $h/a = 0.0025$ ,  $\lambda/a = 0.25$ , incidencia normal, polarización s, medio PPV.

puede apreciar que tanto la curva de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  como la curva de la transformada de Fourier de la rugosidad tienen: (i) los mínimos de difracción en las mismas posiciones, dadas por

$$(\alpha/k_0)_{\text{mín}} = m \lambda/a = m 0.25, \text{ con } m \in Z \text{ y } |m| > 1,$$

(ii) los máximos principales con el mismo ancho, dado por  $4\lambda/a = 1$  y (iii) los máximos secundarios con el mismo ancho, dado por  $\lambda/a = 0.25$ . En el caso en el que el medio 2

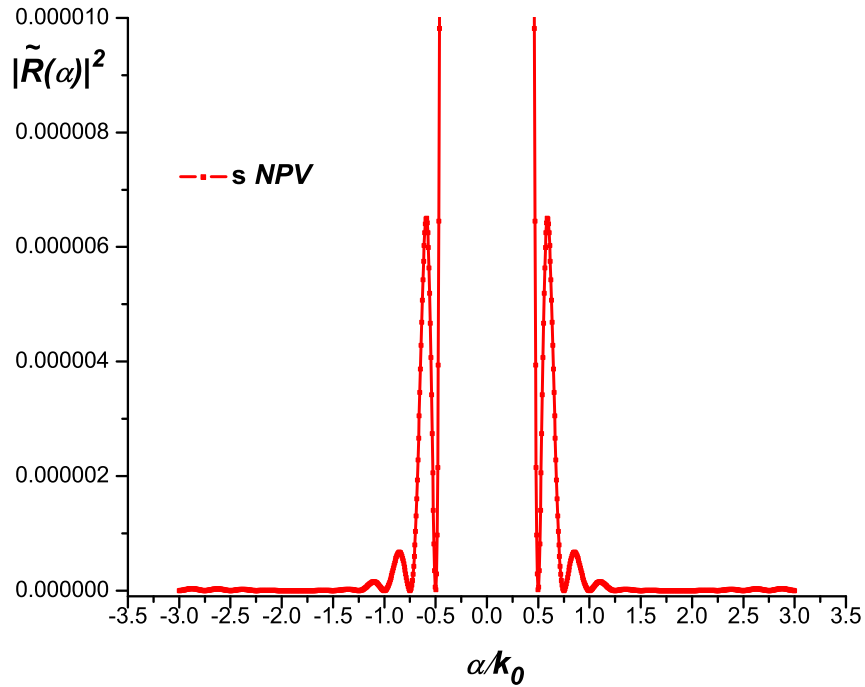


Figura 3.5:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para una protuberancia sinusoidal,  $h/a = 0.0025$ ,  $\lambda/a = 0.25$ , incidencia normal, polarización  $s$ , medio NPV.

es NPV, los métodos implementados dan resultados análogos, tal como se muestra en la figura 3.5 donde sólo se ha graficado la curva de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  con la escala ampliada para poder observar la posición de los mínimos. Hemos comprobado que las curvas obtenidas para la polarización  $p$  (no mostradas) exhiben características completamente análogas a las ya vistas para polarización  $s$ .

Como validación adicional, veamos a continuación los resultados obtenidos para los campos transmitidos. Con este fin tomamos un medio de refracción con la parte real de

los parámetros constitutivos igual a la utilizada en el ejemplo anterior, pero sin pérdidas ( $\epsilon_{2I} = 0$  y  $\mu_{2I} = 0$ ). La óptica física predice que los mínimos de difracción en la distribución de potencia transmitida a través de una superficie con una protuberancia sinusoidal deben estar ubicados en posiciones angulares dadas por

$$\sin \theta_{s2,\text{mín}} = m \frac{1}{v_2} \lambda/a, \text{ con } m \in \mathbb{Z} \text{ y } |m| > 1.$$

En este ejemplo hemos tomado  $h/a = 0.01$ , es decir, una altura 40 veces mayor que la considerada en el primer ejemplo. Con estos parámetros, el primer orden perturbativo asegura 3 cifras significativas (en vez de 8, como para el caso anterior con menor altura). En la figura 3.6 se grafica la distribución de potencia dispersada en el medio 2 para el caso PPV y polarización incidente  $p$ . En el gráfico con escala ampliada (derecha) se observa que la posición angular del primer mínimo es  $\theta_{s2,\text{mín}} \approx \pm 12.9^\circ$ , un valor que coincide muy bien con el predicho por la óptica física. Lo mismo sucede con las posiciones angulares de los siguientes mínimos, ubicados en  $\theta_{s2,\text{mín}} \approx \pm 19.6^\circ, \pm 26.56^\circ, \pm 34^\circ$ , etc.

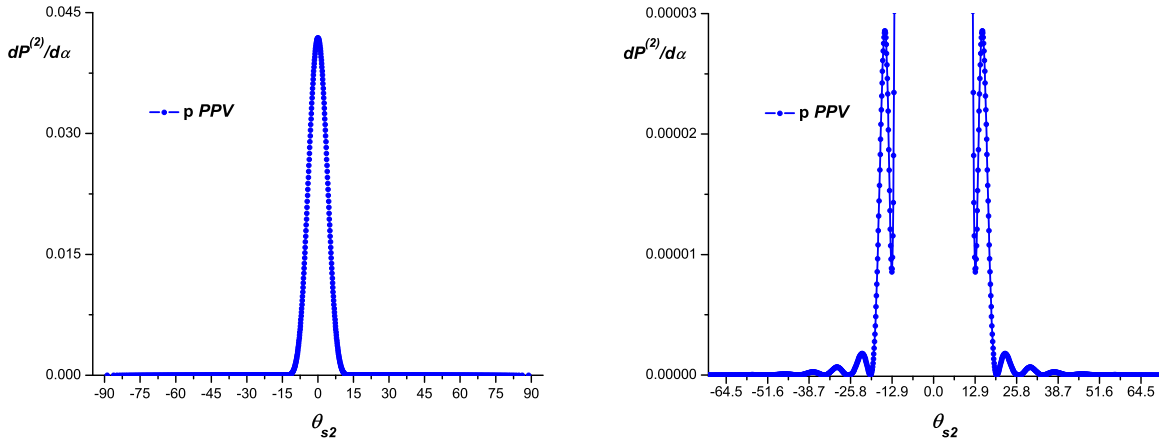


Figura 3.6: Distribución de potencia dispersada en el medio 2 en función del ángulo de observación para una protuberancia sinusoidal,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda/a = 0.25$ , polarización  $p$  y medio de refracción PPV.

Cuando el medio 2 es NPV, hemos obtenido resultados cualitativamente similares a los ya mostrados para el caso PPV. Esto puede observarse en la figura 3.7 donde sólo se ha graficado la distribución de potencia dispersada en el medio 2 con la escala ampliada.

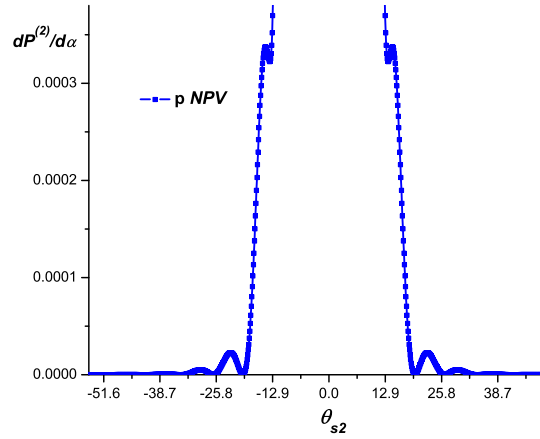


Figura 3.7: Distribución de potencia dispersada en el medio 2 en función del ángulo de observación para una protuberancia sinusoidal,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda/a = 0.25$ , polarización  $p$  y medio NPV.

Hemos comprobado que las curvas de los campos transmitidos obtenidas para la polarización  $s$  (no mostradas) también exhiben características completamente análogas a las ya vistas en este segundo ejemplo para polarización  $p$ .

Los ejemplos mostrados hasta este momento ponen en evidencia que los resultados obtenidos mediante la aplicación de la hipótesis de Rayleigh para una superficie de metamaterial con una sola rugosidad, son compatibles con los resultados generales predichos por los métodos de la óptica física para la difracción en cualquier obstáculo u objeto dispersor. Como validación adicional, a continuación repetiremos la comparación con los resultados de la óptica física en situaciones donde, además de difracción en un obstáculo, haya también interferencia entre distintos obstáculos. En nuestro tercer ejemplo consideraremos el caso de dos protuberancias sinusoidales de la forma  $g(x) = \frac{h}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi}{d}(x - d/2))]$   $\text{rec}(x/a)$  tal como se esquematiza en la figura 3.8. En este caso la óptica física predice la existencia de máximos principales de interferencia ubicados en posiciones espectrales dadas por

$$(\alpha/k_0)_{\text{máx}} = 0, \pm\lambda/d,$$

y mínimos ubicados en

$$(\alpha/k_0)_{\text{mín}} = \pm\lambda/2d.$$



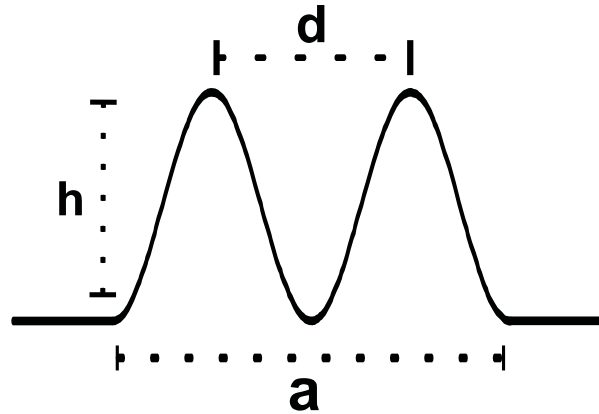


Figura 3.8: Esquema de dos protuberancias sinusoidales.

En la figura 3.9 se muestran las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para el caso en el que el medio de refracción es PPV (izquierda) y NPV (derecha). Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/d = 0.0025$ ,  $\lambda/a = 0.125$  y  $\lambda/d = 0.25$  y la polarización incidente es  $s$ . Observamos que, tal como lo predice la óptica física, las curvas mostradas tienen máximos principales ubicados en  $(\alpha/k_0)_{\text{máx}} = 0, \pm 0.25$  y mínimos en  $(\alpha/k_0)_{\text{mín}} = \pm 0.125$ . También observamos que las curvas de distribución espectral de intensidad son simétricas respecto de  $\alpha = 0$ , tal como debe suceder en el caso de rugosidades simétricas. Para complementar la validación anterior, como cuarto ejemplo consideramos el caso de cuatro protuberancias sinusoidales. Para esta cantidad de protuberancias, la óptica física predice la misma ubicación de los máximos principales que para el caso de dos protuberancias, la ubicación de los mínimos en

$$(\alpha/k_0)_{\text{mín}} = \pm m \lambda/4d, \quad m = 1, 2 \text{ y } 3,$$

además de la existencia de dos máximos secundarios entre máximos principales consecutivos. En la figura 3.10 se muestran las curvas obtenidas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  correspondientes a los tipos de medios PPV (izquierda) y NPV (derecha) para una superficie con cuatro protuberancias y con parámetros iguales a los de la figura 3.9 excepto por  $\lambda/a = 0.0625$ . Para ambos gráficos se observa que (i) los máximos principales se ubican en  $(\alpha/k_0)_{\text{máx}} = \pm 0.25$ , (ii) los mínimos en  $(\alpha/k_0)_{\text{mín}} = \pm 0.00625, \pm 0.125$  y  $\pm 0.1875$ , (iii) hay dos máximos secundarios entre máximos principales consecutivos y (iv) las curvas son simétricas respecto de  $\alpha = 0$ , características que coinciden en su totalidad con lo predicho por la óptica física.

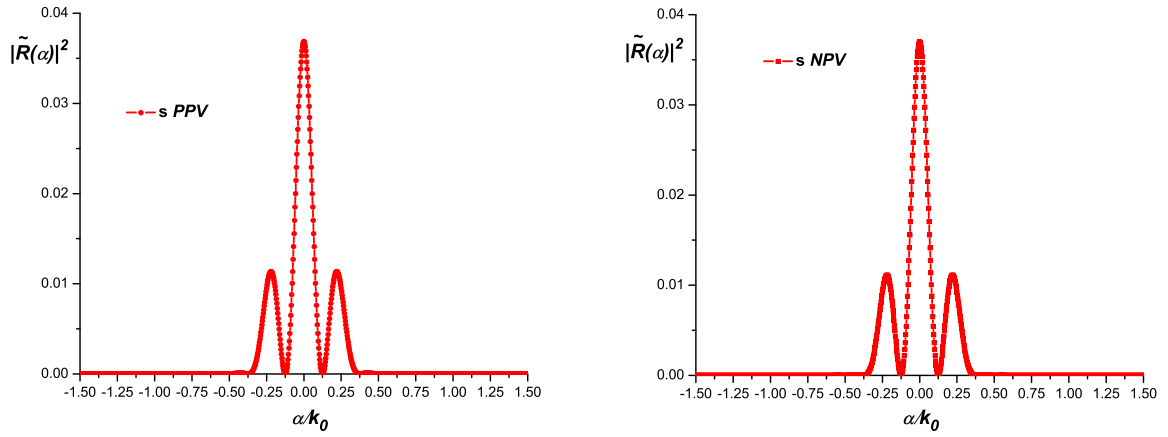


Figura 3.9:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para dos protuberancias sinusoidales (figura 3.8),  $h/d = 0.0025$ ,  $\lambda/a = 0.125$ ,  $\lambda/d = 0.25$ , incidencia normal y polarización  $s$ . El medio 2 es PPV (izquierda) y NPV (derecha).

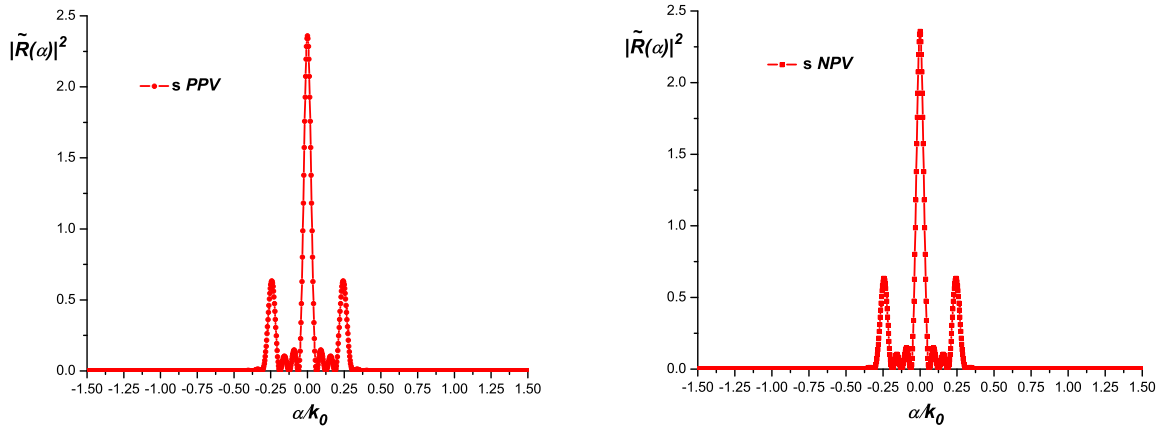


Figura 3.10:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para cuatro protuberancias sinusoidales. Los parámetros geométricos y de incidencia son los de la figura 3.9 excepto por  $\lambda/a = 0.0625$ . El medio 2 es PPV (izquierda) y NPV (derecha).

En las figuras mostradas hasta aquí hemos reproducido, para el caso de incidencia normal, los resultados generales predichos por la óptica física en diversas situaciones de difracción e interferencia. También se ha verificado que todas las distribuciones angulares

son simétricas con respecto a  $\alpha = 0$ , como sucede en el caso de superficies simétricas ( $g(x) = g(-x)$ ). Como próximo paso en la validación de los resultados obtenidos con nuestros métodos, repetiremos la comparación que hemos hecho pero para el caso en que la onda plana incida oblicuamente.

### 3.4.2. Incidencia oblicua

Cuando una onda plana incide con  $\theta_0 \neq 0^\circ$  sobre una superficie con rugosidades simétricas con respecto a  $x = 0$ , las distribuciones angulares de intensidad reflejada y transmitida dejan de ser simétricas con respecto a la normal a la superficie media. O sea,  $|\tilde{R}(\alpha)|^2 \neq |\tilde{R}(-\alpha)|^2$  y  $|\tilde{T}(\alpha)|^2 \neq |\tilde{T}(-\alpha)|^2$  y, por lo tanto, las distribuciones angulares (3.13) y (3.14) también dejan de exhibir una simetría con respecto a la dirección normal. Cuando las rugosidades tienen baja altura, es de esperar que la distribución angular de potencia para el campo reflejado esté centrada en la dirección especular  $\theta_{s1} = \theta_0$ , independientemente del tipo de medio de refracción, y que la distribución angular de potencia para el campo transmitido para medios sin pérdidas esté centrada en la dirección predicha por la ley de Snell

$$\theta_{s2} = \arcsin\left(\frac{1}{\nu_2} \sin \theta_0\right)$$

si el medio 2 es PPV, o

$$\theta_{s2} = -\arcsin\left(\frac{1}{|\nu_2|} \sin \theta_0\right)$$

si el medio 2 es NPV.

Continuando con la validación de los resultados, hemos elegido nuevamente como primer ejemplo el caso de una única protuberancia sinusoidal con los mismos parámetros y el mismo modo de polarización incidente que los de la figura 3.6. En la figura 3.11 graficamos la potencia dispersada en el medio 1 para el caso PPV (izquierda) y NPV (derecha) cuando  $\theta_0 = 40^\circ$ . En ambos gráficos se observa que las curvas son ligeramente asimétricas con respecto a  $\theta_0$  y un desplazamiento del máximo siguiendo la dirección especular ( $\theta_{s1} = \theta_0 = 40^\circ$ ). Como validación complementaria, analizamos también lo que sucede con los campos dispersados en el medio 2. En la figura 3.12 graficamos la distribución angular de los campos transmitidos para el caso PPV (los dos gráficos de arriba) y NPV (los dos de abajo). Se observa que cuando el índice de refracción es positivo (medio PPV) el máximo de la curva se ubica en  $\theta_{s2} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 40^\circ\right) \approx 16.7^\circ$ , valor

que se distingue claramente en la figura ampliada (arriba derecha). Además, el gráfico está centrado alrededor de este valor, tal como corresponde a lo predicho por la óptica geométrica para una superficie quasisplana de índice positivo. En el caso en el que el índice de refracción es negativo (medio NPV) la máxima potencia transmitida aparece en una dirección de observación dada por  $\theta_{s2} = \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \sin 40^\circ\right) \approx -16.7^\circ$  y la distribución está centrada alrededor de este valor, tal como puede apreciarse en la figura ampliada (abajo derecha). Los gráficos de la figura 3.12 ponen en evidencia la influencia dramática que tiene el signo del índice de refracción en la distribución de campos transmitidos, aún para superficies quasisplanas como la considerada en este ejemplo.

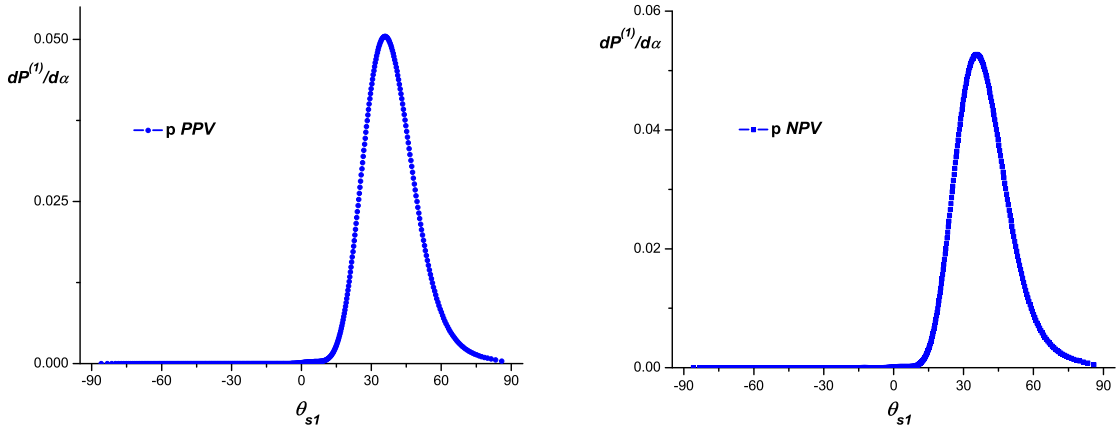


Figura 3.11: Distribución de potencias dispersadas en el medio 1 en función del ángulo dispersado para una protuberancia sinusoidal iluminada en modo  $p$  con  $\theta_0 = 40^\circ$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.01$  y  $\lambda/a = 0.25$ . El medio 2 considerado es PPV (izquierda) y NPV (derecha).

Todos estos resultados muestran características completamente compatibles con las predichas por la óptica física para la difracción por un único objeto dispersor. Como paso siguiente, validamos nuestros resultados con los que se obtienen en situaciones donde hay interferencia entre distintos obstáculos además de haber difracción. Para ello, consideramos superficies con dos y cuatro protuberancias sinusoidales. En estos casos, la óptica física predice la ubicación de los dos máximos principales en

$$\theta_{s1,\text{máx}} = \arcsin(\pm\lambda/d + \sin\theta_0),$$

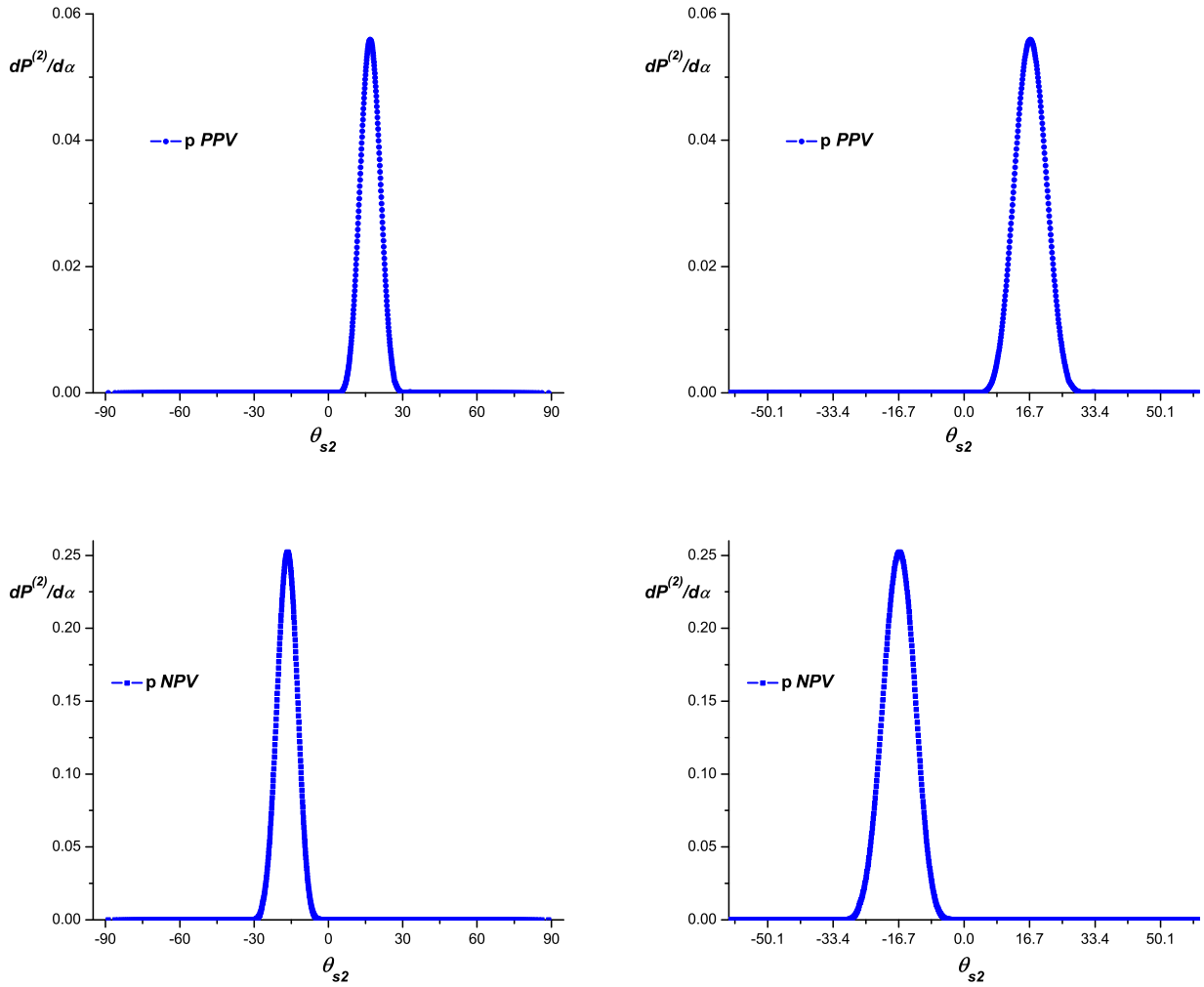


Figura 3.12: Distribución de potencias dispersadas en el medio 2, en función del ángulo dispersado para una protuberancia sinusoidal. Los parámetros geométricos y de incidencia son los mismos que los de la figura 3.11. El medio 2 considerado es NPV.

y de los mínimos en

$$\theta_{s1,\text{mín}} = \arcsin(m\lambda/Nd + \sin\theta_0), \text{ con } m \in Z, m < N,$$

donde  $N$  es la cantidad de protuberancias de la superficie corrugada. Las superficies de refracción y los parámetros de incidencia son los mismos que los considerados en las figuras 3.9 y 3.10 para dos y cuatro protuberancias, respectivamente. El medio 2 es NPV y la onda incide con  $\theta_0 = 10^\circ$ , polarizada en modo  $p$ . En la figura 3.13 graficamos la distribución de

potencia dispersada en el medio 1 para dos (izquierda) y cuatro (derecha) protuberancias respectivamente. En ambas se observa claramente que verifican lo predicho por la óptica física, es decir, los gráficos están centrados en el orden especular que ahora se encuentra en  $\theta_{s1} = \theta_0 = 10^\circ$  y la ubicación de los máximos y mínimos se encuentra desplazada hacia la derecha una constante igual a  $\sin 10^\circ \approx 0.174$ . O sea, en el caso de dos protuberancias los dos máximos principales aparecen en  $\theta_{s1,\text{máx}} \approx \arcsin(\pm 0.25 + 0.174)$  ( $\theta_{s1,\text{máx}} \approx 25^\circ$  y  $\theta_{s1,\text{máx}} \approx -4.38^\circ$ ) y los mínimos en  $\theta_{s1,\text{mín}} \approx \arcsin(\pm 0.125 + 0.174)$  ( $\theta_{s1,\text{mín}} \approx 17.4^\circ$  y  $\theta_{s1,\text{mín}} \approx 2.8^\circ$ ). Se obtienen características análogas para el caso de cuatro protuberancias. Además, como era de esperar, aunque las superficies sean simétricas con respecto a  $x = 0$ , las distribuciones angulares dejan de ser simétricas con respecto al ángulo incidente,  $\theta_{s1} = \theta_0 = 10^\circ$ .

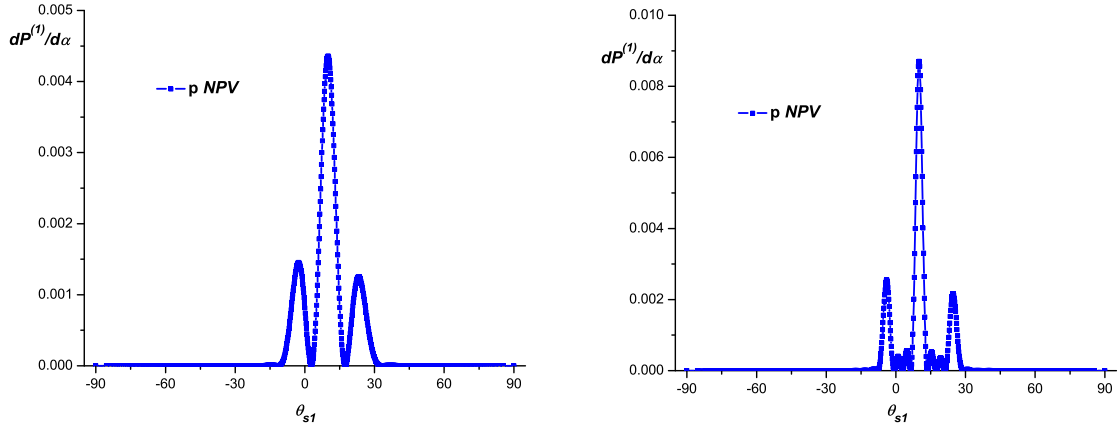


Figura 3.13: Distribución de potencias dispersadas en el medio 1 en función del ángulo dispersado para dos (izquierda) y cuatro (derecha) protuberancias sinusoidales iluminadas en modo  $p$  con  $\theta_0 = 10^\circ$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/d = 0.0025$ ,  $\lambda/d = 0.25$  y  $\lambda/a = 0.125$  para dos y  $\lambda/a = 0.0625$  para cuatro. El medio 2 considerado es NPV.

Los ejemplos mostrados hasta aquí revelan que los resultados obtenidos con los métodos desarrollados en esta tesis para el caso en que el metamaterial consista en una o varias protuberancias sinusoidales, son compatibles con los resultados generales de interferencia y difracción para distintos ángulos de incidencia. Otro de los controles realizados, complementario a las validaciones hechas, fue la comparación de nuestros resultados con los

que se obtienen para redes de difracción infinita que son ampliamente conocidos [96]. Eso es lo que analizamos en la siguiente sección.

### 3.4.3. Red de difracción infinita

En una superficie con una cantidad finita de protuberancias, es de esperar, que a medida que aumente el número de las mismas, los gráficos de las distribuciones angulares tiendan a parecerse a los de la red infinita. Para ello, en primer lugar detallamos las características de estos gráficos cuando la superficie es periódica infinita y, a continuación, mostramos algunos ejemplos obtenidos con nuestros métodos que los reproducen.

Se sabe [96] que a medida que aumenta la cantidad de protuberancias, los dos máximos principales, que corresponden a los órdenes 1 y -1 de difracción de la red infinita, verifican lo siguiente:

- (i) sus posiciones espectrales se mantienen constantes en  $\sin \theta_{s1, \text{máx}} = \pm(\lambda/d)$ ,
- (ii) se angostan sus anchos, y
- (iii) aumenta la altura de los mismos.

Los resultados con los que se compararon nuestros métodos fueron obtenidos con variaciones de altura sinusoidales alrededor de  $y = 0$  y por este motivo en esta sección consideramos superficies de la forma  $y = g(x) = \frac{h}{2} \sin(\frac{2\pi}{d}x) \text{rect}(x/a)$ , tal como se ilustra en la figura 3.14. Cabe aclarar que, aunque esta superficie sea muy parecida a la que consideramos anteriormente ( $g(x) = \frac{h}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi}{d}(x - d/2))] \text{rec}(x/a)$ ) difiere en una constante aditiva (de valor 1) y entonces las transformadas de Fourier son muy distintas en la dirección especular. En la figura 3.15 graficamos el módulo de las transformadas vs  $\alpha/k_0$  para ambas superficies con cuatro protuberancias e incidencia normal con polarización  $s$  y con parámetros  $h/d = 0.008$ ,  $\lambda/d = 0.8$  y  $\lambda/a = 0.2$ . Se observa que ambas transformadas son iguales en todo su dominio salvo en  $\alpha/k_0 = 0$ . En esta dirección una de ellas muestra un máximo y la otra un mínimo. Esto es así pues la superficie anterior contiene al  $\text{sinc}(\alpha)$  como consecuencia del 1, a diferencia de la que consideramos ahora. Esta diferencia en las transformadas se ve reflejada en los gráficos de distribución de potencia dispersada que mostraremos para la validación.

Para analizar la validez de la hipótesis de Rayleigh a medida que se incrementa el número de protuberancias, hemos considerado como primer ejemplo el caso en que la onda plana incide normalmente. En los gráficos de la figura 3.16 se muestran las distribuciones angulares en el medio 1 para los casos correspondientes a cuatro (arriba izquierda), seis

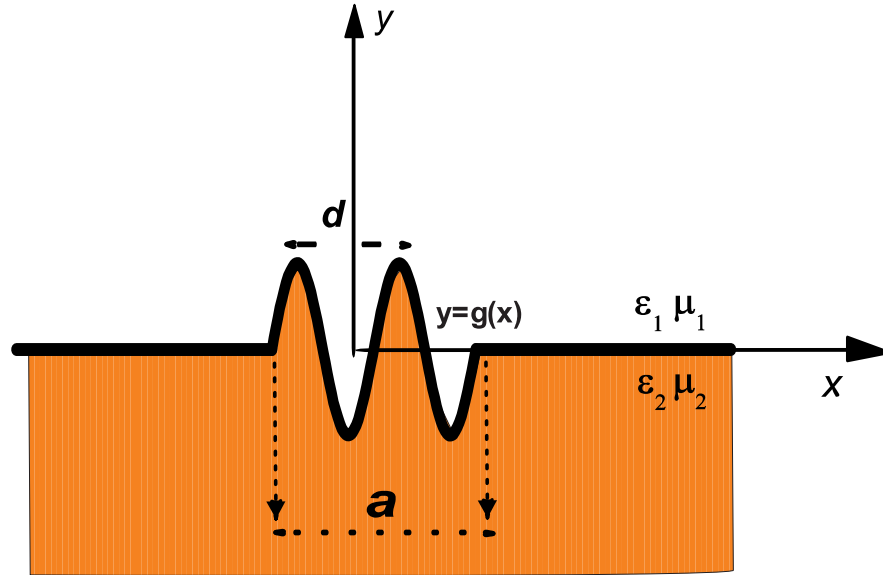


Figura 3.14: Esquema del problema de valores de contorno utilizado para la comparación con la red infinita.

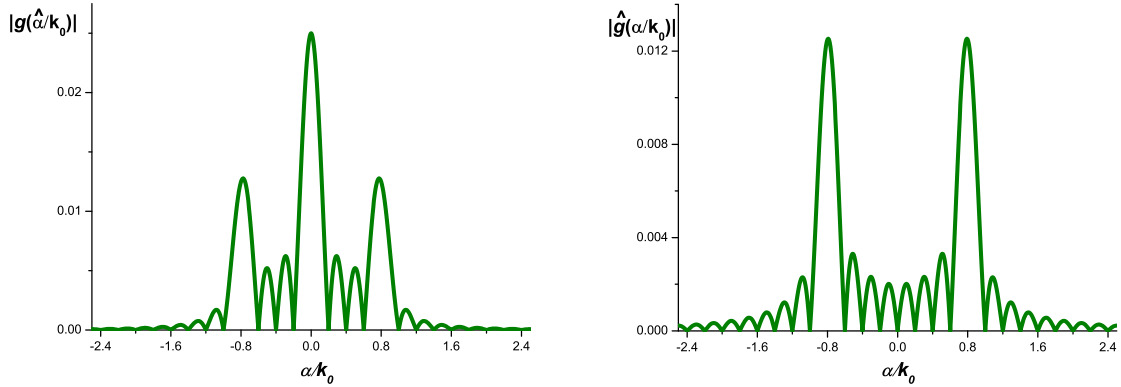


Figura 3.15: Gráfico del módulo de las transformadas de Fourier vs  $\alpha/k_0$  para cuatro protuberancias de la forma  $g(x) = \frac{h}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi}{d}(x - d/2))] \text{rec}(x/a)$  (simétricas, izquierda) y cuatro protuberancias de la forma  $g(x) = \frac{h}{2} \sin(\frac{2\pi}{d}x) \text{rect}(x/a)$  (asimétricas, derecha). Los parámetros geométricos son:  $h/d = 0.008$ ,  $\lambda/d = 0.8$  y  $\lambda/a = 0.2$ . La onda plana incide normalmente con polarización  $s$ .

(arriba derecha), ocho (abajo izquierda) y doce (abajo derecha) protuberancias. El medio de refracción considerado es NPV, con pérdida y el modo de polarización incidente es  $p$ .



Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/d = 0.01$  y  $\lambda/d = 0.8$ . El ancho  $a$  de las superficies depende de la cantidad de protuberancias,  $\lambda/a = 0.2$ ; 0.13334; 0.1 y 0.06667 para cuatro, seis, ocho y doce protuberancias, respectivamente. En esta figura se observa que a medida que el número de protuberancias aumenta, los picos de intensidad se van afinando y aumentando su valor, en total correspondencia con la convergencia a la red de difracción infinita. Además, la ubicación espectral de dichos órdenes, no cambia y está fija en  $\theta_{s1} = \pm \arcsin(\lambda/d) = \pm \arcsin(0.8) \approx \pm 53.13^\circ$ , como era de esperar.

Como validación adicional, en el segundo ejemplo, comparamos los cocientes de las distribuciones angulares en los órdenes de difracción 1 y -1, es decir,  $|\tilde{R}(-\lambda/d)|^2/|\tilde{R}(\lambda/d)|^2$ , con los obtenidos por el método de Chandezón [97–100]. Este método, que se caracteriza por ser un método exacto basado en un nuevo sistema de coordenadas, no utiliza la hipótesis de Rayleigh y, por lo tanto, no está limitado a pequeñas protuberancias. Es una herramienta teórica muy eficiente y sirve como otra forma de corroborar nuestros resultados. En el caso de incidencia normal, el radio de estos órdenes es uno pues tienen la misma altura, por eso tiene sentido compararlos en el caso en que la onda incida oblicuamente. En la figura 3.17 graficamos las distribuciones angulares en el medio 1 para cuatro, seis, ocho y doce protuberancias (distribuidas de la misma manera que en la figura 3.16). Los parámetros geométricos son  $h/d = 0.01$ ,  $\lambda/d = 0.5$  y el ancho depende de la cantidad de protuberancias  $\lambda/a = 0.125$ ; 0.083334; 0.0625 y 0.0416667 para cuatro, seis, ocho y doce respectivamente. La onda plana incide oblicuamente con  $\theta_0 = 10^\circ$ , polarización  $p$  y el medio de refracción es PPV. En todos los casos, hemos obtenido los mismos resultados que para una superficie infinitamente periódica,  $|\tilde{R}(-\lambda/d)|^2/|\tilde{R}(\lambda/d)|^2 \approx 1.41$ , verificándose el hecho de que el cociente entre los órdenes es independiente de la cantidad de protuberancias [96]. Además, todos los gráficos muestran que la ubicación de los máximos principales (órdenes 1 y -1) está desplazada  $\sin \theta_0 = \sin 10^\circ \approx 0.174$  hacia la derecha, como se espera en el caso de incidencia oblicua.

A modo de comentario hacemos notar que para lograr que los gráficos queden “suavizados” se requiere correr los programas con muchos puntos. Esta necesidad no es algo sencillo de cumplir pues no se puede ampliar indefinidamente la cantidad de puntos de la grilla. Estamos limitados, entre otras cosas, por las matrices a invertir y por la memoria de la computadora. En el primer caso porque tienen que estar bien condicionadas y la inversión tiene que estar bien hecha y, en el segundo, porque si la computadora tiene poca memoria, no permite hacer operaciones con matrices de dimensiones muy grandes. La

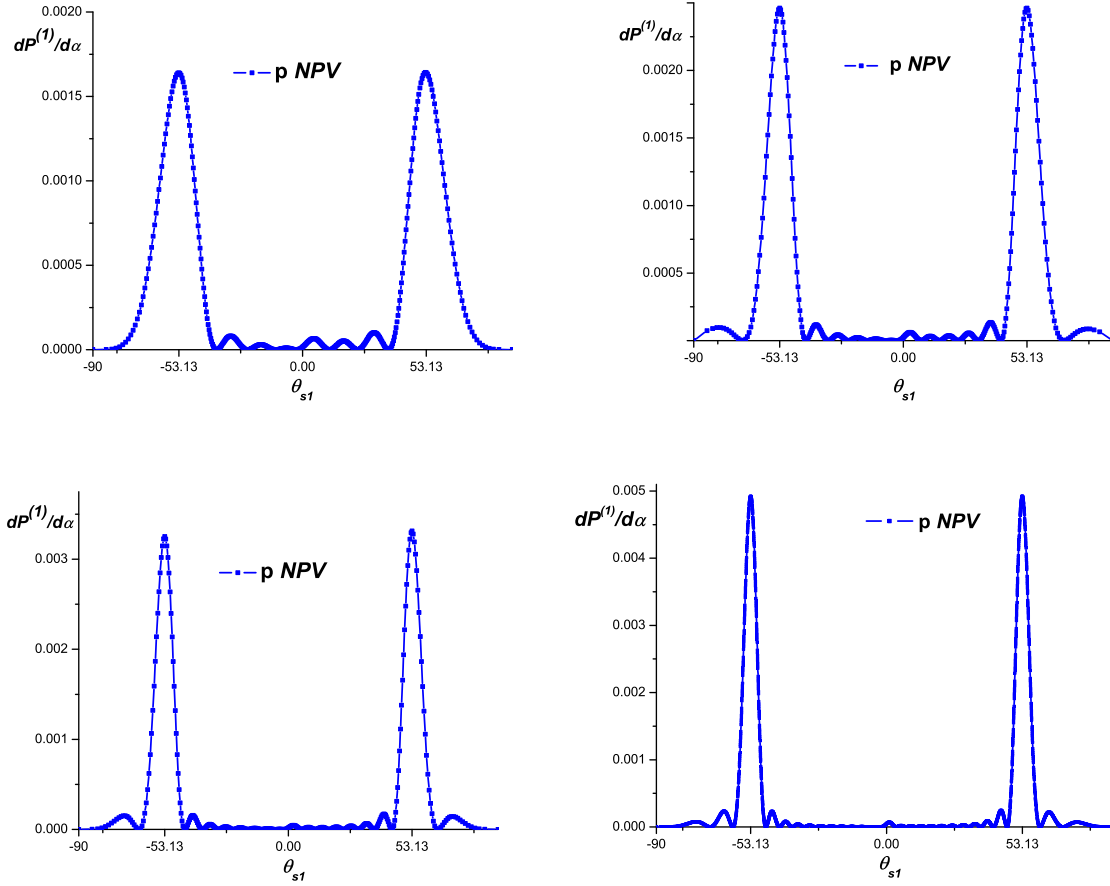


Figura 3.16: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 para 4 (arriba izquierda), 6 (arriba derecha), 8 (abajo izquierda) y 12 (abajo derecha) protuberancias con ancho,  $a$ , tal que  $\lambda/a = 0.2$ ;  $0.13334$ ;  $0.1$  y  $0.06667$  respectivamente.  $h/d = 0.01$  y  $\lambda/d = 0.8$ . La onda plana incide normalmente en modo  $s$  y el medio 2 considerado es NPV.

forma en que evitamos estos problemas y logramos suavizar los gráficos es corriendo el programa una determinada cantidad de veces para los mismos datos de entrada pero modificando el comienzo de la grilla de la variable  $\alpha_j$ . Obviamente, esto requiere de un mayor tiempo computacional pero se logra el objetivo. La forma utilizada para variarlo es la siguiente: si llamamos  $\Delta_j$  al paso  $j$  que tomamos para discretizar las integrales, entonces  $\Delta_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j$ . En todos nuestros ejemplos tomamos los pasos iguales. Dividimos

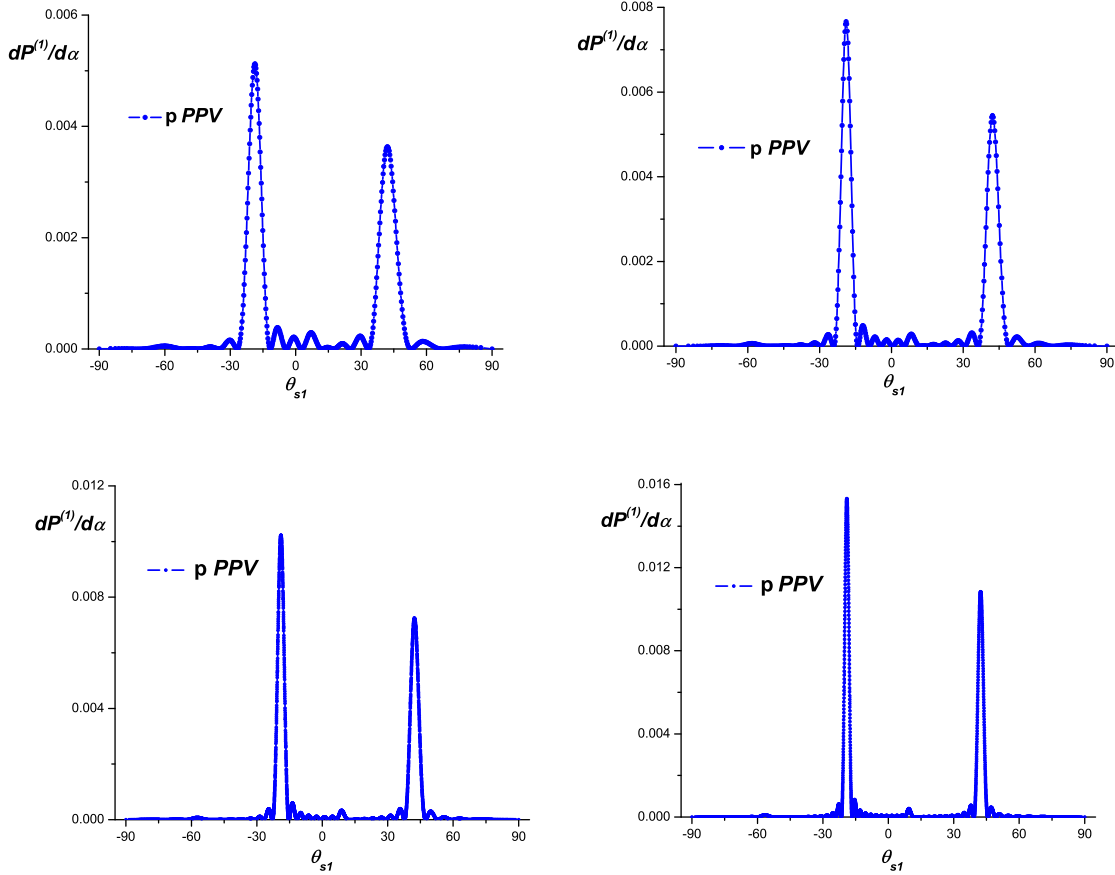


Figura 3.17: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 para 4 (arriba izquierda), 6 (arriba derecha), 8 (abajo izquierda) y 12 (abajo derecha) protuberancias con ancho,  $a$ , tal que  $\lambda/a = 0.125; 0.083334; 0.0625$  y  $0.0416667$  para 4, 6, 8 y 12 protuberancias respectivamente.  $h/d = 0.01$  y  $\lambda/d = 0.5$ . La onda plana incide con  $\theta_0 = 10^\circ$  en modo  $p$  y el medio 2 considerado es PPV.

el paso por  $D$ , o sea,  $\Delta_j/D$  y procedemos de la siguiente forma: el primer valor que toma la variable  $\alpha$  en la primera corrida del programa es:

$$\alpha_j = -\alpha^{\text{Max}},$$

en la segunda corrida del programa es:

$$\alpha_j = -\alpha^{\text{Max}} + \Delta_j/D,$$

en la tercera corrida del programa es:

$$\alpha_j = -\alpha^{\text{Max}} + 2\Delta_j/D,$$

y así sucesivamente. En general, en cada corrida, el primer valor que toma la variable  $\alpha$  es:

$$\alpha_j = -\alpha^{\text{Max}} + \frac{d}{D}\Delta_j, \quad \text{donde} \quad d = 0, 1, \dots, D - 1.$$

De esta manera generamos más puntos sin necesidad de agrandar las dimensiones de las matrices para poder suavizar los gráficos. Este procedimiento es el que utilizamos en los ejemplos que mostramos en esta tesis donde, a menos que se diga lo contrario, tomamos  $D = 10$ . Para ilustrar la necesidad de realizarlo, en la figura 3.18 mostramos el ejemplo de doce protuberancias de la figura 3.17 sin el gráfico suavizado (izquierda) y con el gráfico suavizado (derecha). Ampliamos el orden -1 para que las diferencias en la punta del pico sean más evidentes.

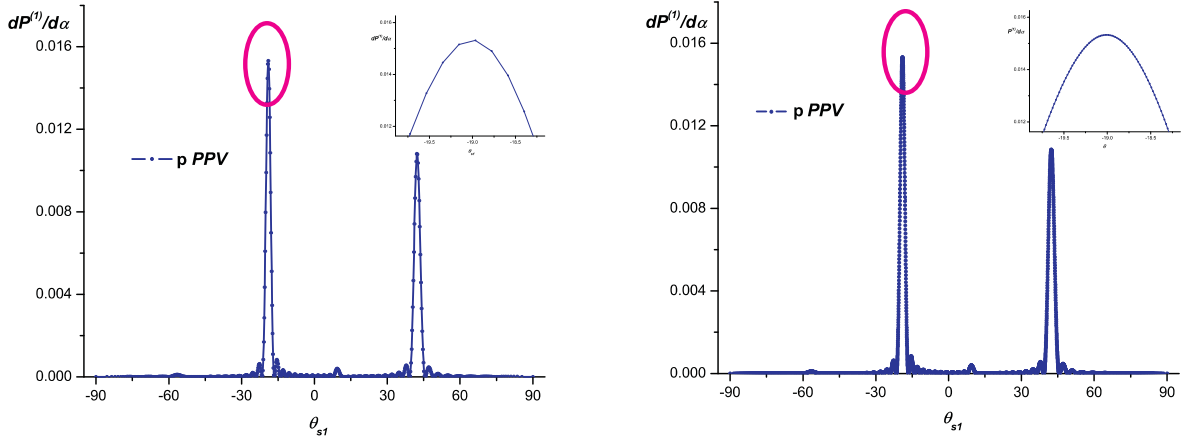


Figura 3.18: Gráfico suavizado (derecha) y Gráfico sin suavizar (izquierda) del ejemplo de la figura 3.17.

### 3.5. Comparación entre los métodos

En esta sección estamos interesados en evaluar la consistencia entre ambos métodos desarrollados. Para ello, consideramos el caso de una superficie con una protuberancia rectangular de ancho  $a$  y altura  $h$ , iluminada en incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ). En este caso  $g(x) = h \text{ rec}(x/a)$  y los parámetros constitutivos son los de la sección anterior sin pérdida. En las Figuras 3.19 y 3.20 se muestran las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas

con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer orden (círculos) para el caso  $h/a = 0.005$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y medios PPV y NPV. La Figura 3.19 corresponde a polarización  $s$  y la Figura 3.20 a polarización  $p$ . Obsérvese que ambos métodos numéricos dan una excelente coincidencia y en todos los casos predicen la presencia de un máximo principal centrado en el valor de la variable espectral  $\alpha = \alpha_0$ , que corresponde a la dirección de reflexión especular. Este máximo tiene ancho  $2\lambda/a$  y está rodeado por máximos secundarios de ancho  $\lambda/a$ , en total coincidencia con lo predicho por la teoría escalar para la difracción de Fraunhofer en una rendija de ancho  $2\lambda$ . Tal como hemos observado para otros valores de los parámetros geométricos y de incidencia y para otras formas de protuberancias, este ejemplo muestra que cuando la altura de las protuberancias es muy pequeña, el método perturbativo converge rápidamente y coincide con el método numérico directo, tal como ocurre para protuberancias periódicas en medios NPV [60].

En las Figuras 3.21 y 3.22 se repiten las comparaciones entre el método directo (curva continua) y el método perturbativo (círculos) para las mismas situaciones consideradas en las Figuras 3.19 y 3.20, excepto que ahora la altura de la protuberancia se aumenta 10 veces ( $h/a = 0.05$ ). Resulta interesante observar que el método perturbativo converge mejor en el caso PPV, donde la coincidencia con el método directo se obtiene en ambas polarizaciones en el orden perturbativo 8, mientras que para medios NPV la coincidencia se obtiene en el orden perturbativo 20.

Se ha comprobado que para alturas mayores y medios NPV el método perturbativo puede dejar de converger, a pesar de que para estas mismas alturas el método perturbativo sigue convergiendo cuando el medio es PPV. Por ejemplo, para el caso de una protuberancia sinusoidal de la forma  $g(x) = \frac{h}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi}{a}x)] \text{rec}(x/a)$  con  $h/a = 0.1$ ,  $\lambda/a = 0.5$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$  y medio PPV, los resultados del método numérico directo coinciden con los resultados perturbativos en el orden 10, aunque no se obtiene convergencia cuando el medio es NPV.

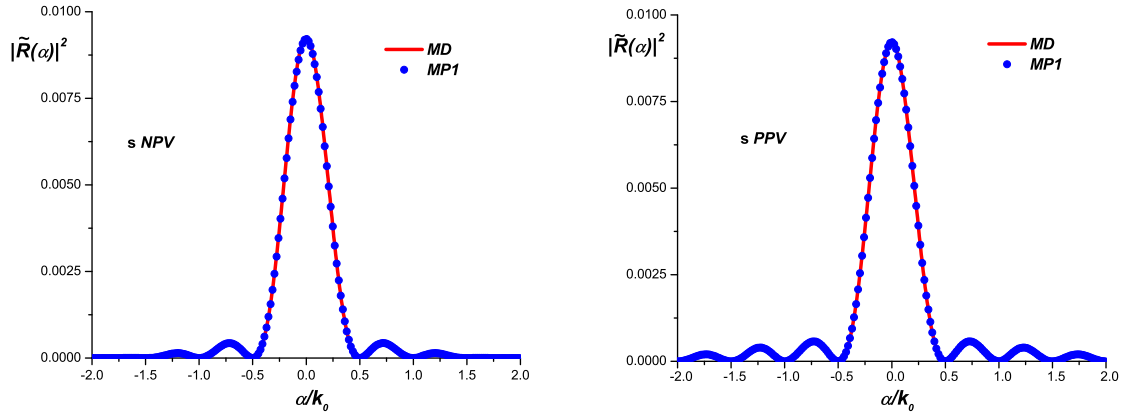


Figura 3.19: curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer orden (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular iluminada en incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con polarización  $s$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.005$  y  $\lambda/a = 0.5$ . Los medios considerados son NPV (izquierda) y PPV (derecha).

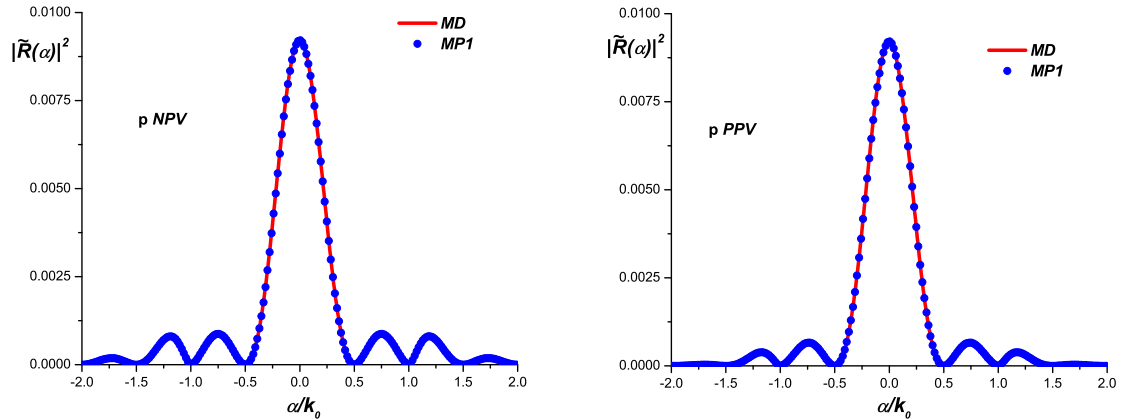


Figura 3.20: curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo a primer orden (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular iluminada en incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con polarización  $p$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.005$  y  $\lambda/a = 0.5$ . Los medios considerados son NPV (izquierda) y PPV (derecha).

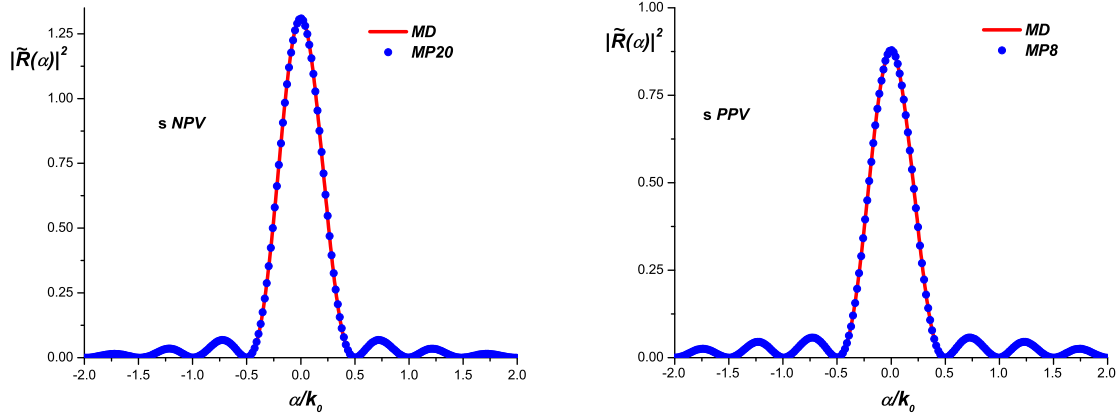


Figura 3.21: curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular iluminada en incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con polarización  $s$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.05$  y  $\lambda/a = 0.5$ . Los medios considerados son NPV (izquierda) y PPV (derecha).

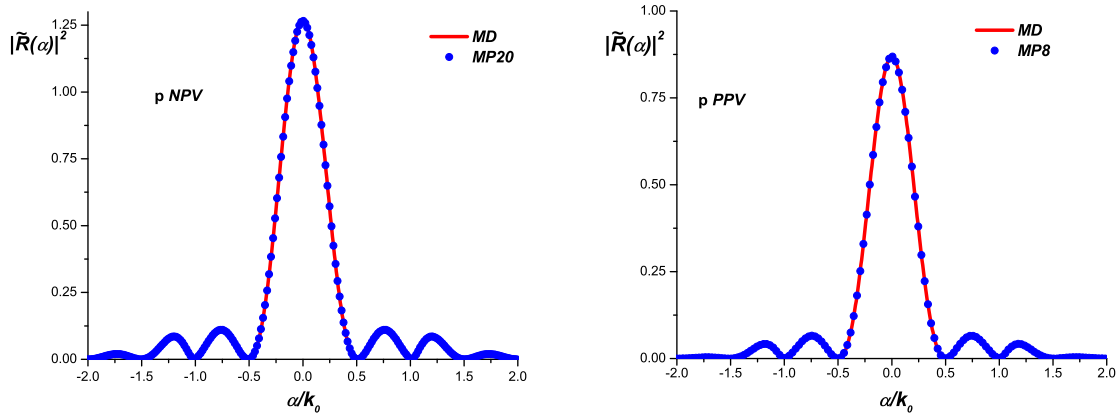


Figura 3.22: curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas con el método directo (curva continua) y el método perturbativo (círculos) para el caso de una protuberancia rectangular iluminada en incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con polarización  $p$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.05$  y  $\lambda/a = 0.5$ . Los medios considerados son NPV (izquierda) y PPV (derecha).

# Capítulo 4

## Superficies rugosas deterministas

En el capítulo anterior se ha estudiado la confiabilidad de los métodos de scattering desarrollados para superficies de metamateriales con protuberancias localizadas y se han mostrado varios ejemplos donde los resultados obtenidos parecen ser físicamente adecuados siempre que se satisfagan determinados criterios físicos y numéricos. A continuación emplearemos los nuevos formalismos para investigar propiedades ópticas que resultan de interés en el campo de los metamateriales. En particular, en este capítulo dirigiremos nuestra atención a investigar cómo cambia la respuesta óptica de un metamaterial rugoso cuando se cambia solamente el signo del índice de refracción. Este punto es especialmente interesante ya que la diferencia de signo afecta de manera crucial la manifestación de fenómenos tan conocidos como el efecto Doppler, la ley de Snell o la radiación de Cerenkov, tal como especulara Veselago [81] en 1968. En cambio, para medios sin pérdidas separados por superficies perfectamente planas, las curvas de reflectancia en función del ángulo de incidencia  $\theta_0$  *no distinguen entre medios PPV y NPV* con idénticos valores del módulo del índice de refracción relativo. Esta propiedad, que se inscribe en una simetría más general [101], válida para superficies refractoras con pérdidas, asegura que la transformación  $\{\epsilon \rightarrow -\epsilon^*, \mu \rightarrow -\mu^*\}$ , donde ahora  $\epsilon$  y  $\mu$  representan los parámetros relativos y el asterisco denota el complejo conjugado, cambia la fase pero no el módulo del coeficiente de Fresnel para la amplitud del campo reflejado, lo que equivale a decir que el cambio de signo del índice de refracción no puede detectarse mediante mediciones de intensidad reflejada. Esta simetría de conjugación es sólo válida para ondas incidentes no evanescentes, es decir, para ángulos de incidencia  $\theta_0$  reales y con  $0 \leq |\theta_0| \leq \pi/2$ .

Para problemas de scattering electromagnético en volúmenes limitados, los efectos aso-



ciados al cambio de signo del índice de refracción del objeto dispersor han sido estudiados para objetos de forma simple como cilindros [102, 103], esferas [104, 105] y para el caso sencillo de superficies isotrópicas periódicamente corrugadas [59, 60, 77, 78]. Sin embargo, hasta el momento no existen estudios similares para superficies rugosas no periódicas. El estudio de la influencia de la rugosidad en la respuesta electromagnética de superficies cuasiplanas que solamente difieren en el signo del índice de refracción relativo entre los medios a ambos lados de la superficie resulta atrayente pues, cuando la superficie deja de ser plana, los campos dispersados en general pueden contener, además de componentes propagantes *no especulares*, componentes *evanescentes* que en principio permitirían distinguir el carácter PPV o NPV de una determinada superficie, una característica relevante en técnicas de análisis no destructivo. Teniendo en cuenta estas características de los campos dispersados por superficies rugosas, resulta plausible esperar que los indicadores del carácter PPV o NPV de una superficie rugosa podrían encontrarse en: i) el campo lejano dispersado en direcciones de observación alejadas de la dirección especular, y ii) en las observaciones de campo cercano, ya que las ondas evanescentes se comportan de manera opuesta en medios PPV y NPV [68, 81].

## 4.1. Perfil rectangular

Comenzamos con superficies con una protuberancia rectangular, es decir,  $g(x) = h \text{rec}(x/a)$ . El medio de incidencia es vacío y el de transmisión un metamaterial sin pérdida con parámetros constitutivos  $\epsilon_2 = 5$  y  $\mu_2 = 1$  para el caso PPV o  $\epsilon_2 = -5$  y  $\mu_2 = -1$  para el caso NPV, como en la sección 3.5. Se ha verificado que los resultados satisfacen el criterio de conservación de la energía (2.45) con un error menor a 0.1 %. En la figura 4.1 se comparan las distribuciones angulares de potencia reflejada obtenidas para esta forma de rugosidad cuando sólo se cambia el signo del índice de refracción del metamaterial. Si bien la forma de las protuberancias son distintas, los parámetros geométricos y de incidencia ( $h/a = 0.005$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y  $\theta_0 = 0^\circ$ ) son idénticos a los empleados en las figuras 3.19 y 3.20. Las características de las curvas para esta rugosidad rectangular son cualitativamente muy similares a las ya observadas para la rugosidad sinusoidal: cerca de la dirección especular las cuatro curvas ( $s$  PPV,  $s$  NPV,  $p$  PPV,  $p$  NPV) muestran esencialmente la misma respuesta y por este motivo se ha elegido una escala que amplifique las diferencias en regiones de observación  $\theta_{s1} \neq \theta_0$ . El primer orden perturbativo ya exhibe analíticamente

la coincidencia de respuestas en la dirección especular, tal como puede comprobarse a partir de las expresiones (3.11). Desde un punto de vista físico, dicha coincidencia podría esperarse si se tiene en cuenta la baja altura considerada en este ejemplo y que para una superficie plana: i) las polarizaciones  $s$  y  $p$  son indistinguibles en incidencia normal y ii) el intercambio entre medios de refracción PPV y NPV cambia la fase pero no el módulo del coeficiente de Fresnel para las amplitudes del campo reflejado. Sin embargo, debe notarse que a pesar de la baja altura considerada, para direcciones de observación  $\theta_{s1}$  alejadas de  $\theta_0$ , la distribución angular de potencia reflejada correspondiente a cada polarización incidente es sensible al cambio de signo del índice de refracción del metamaterial. Para otros valores del ángulo de incidencia se observan características similares a las observadas en incidencia normal: las distribuciones angulares de potencia reflejada correspondientes a una rugosidad de baja altura son poco sensibles al intercambio entre medios PPV - NPV si la dirección de observación está cerca de la dirección especular aunque sí son sensibles a este intercambio para direcciones de observación alejadas de la dirección especular, tal como se muestra en la figura 4.2, análoga a la figura 4.1 excepto que ahora  $\theta_0 = 30^\circ$ .

Cuando se aumenta la altura de la rugosidad, la potencia reflejada en direcciones de observación  $\theta_{s1}$  cercanas a  $\theta_0$  se hace más sensible al intercambio entre medios PPV - NPV, tal como se observa en las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  mostradas en la figura 4.3, correspondiente al caso  $h/a = 0.05$ , una altura diez veces mayor que la considerada en las figuras 4.1 y 4.2. Para apreciar mejor las diferencias, en esta figura se comparan las curvas de potencia reflejada en función del ángulo de observación  $\theta_{s1}$  para incidencia normal (figura 4.3, izquierda) e incidencia oblicua ( $\theta_0 = 30^\circ$ , figura 4.3, derecha).

En las curvas ilustradas en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 está involucrado solamente el rango radiativo de la cantidad  $\tilde{R}(\alpha)$ , rango en el cual  $\tilde{R}(\alpha)$  representa la amplitud de ondas planas propagantes y que entonces es relevante en aplicaciones de la óptica tradicional o de campo lejano, donde se detecta la potencia reflejada en diferentes direcciones de observación. En cambio, para aplicaciones de óptica de campo cercano, el rango no radiativo puede jugar un papel muy importante, ya que en este rango la cantidad  $\tilde{R}(\alpha)$  representa ondas evanescentes que solamente afectan el valor de los campos muy cerca de la superficie. Las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  en el rango no radiativo se muestran en la figura 4.4 para los mismos parámetros geométricos y de incidencia considerados en la figura 4.3. Se puede apreciar que, a pesar de que la superficie es ópticamente cuasi-plana ( $h/\lambda = 0.1$ ), los campos evanescentes generados son sensibles al cambio de signo del índice

de refracción.

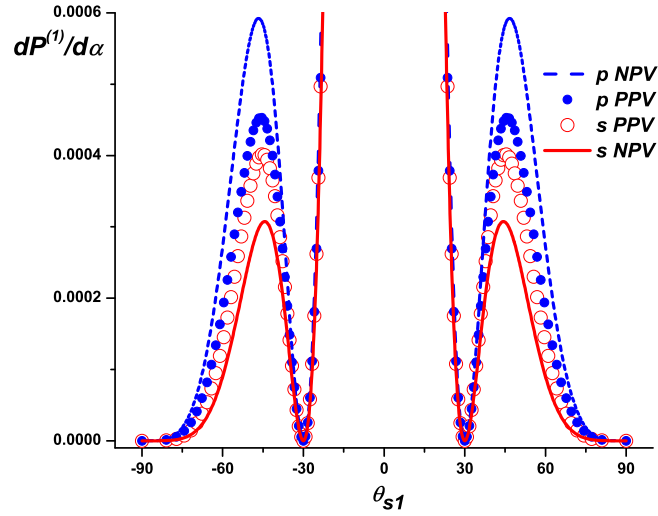


Figura 4.1: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1. Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.005$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y  $\theta_0 = 0^\circ$ .

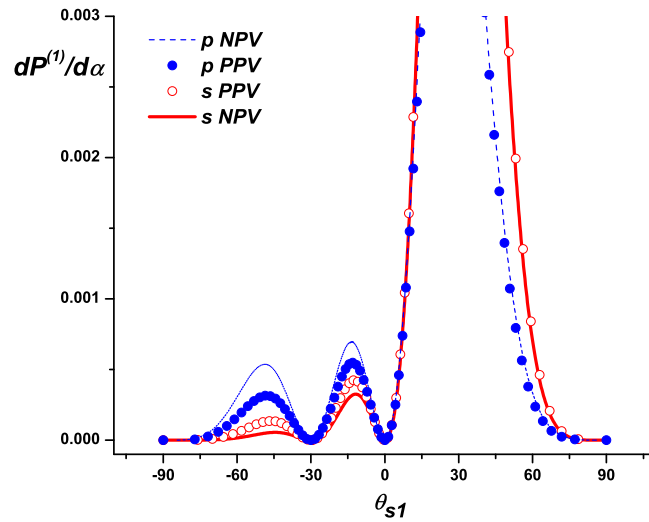


Figura 4.2: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de la figura 4.1, excepto que ahora  $\theta_0 = 30^\circ$ .

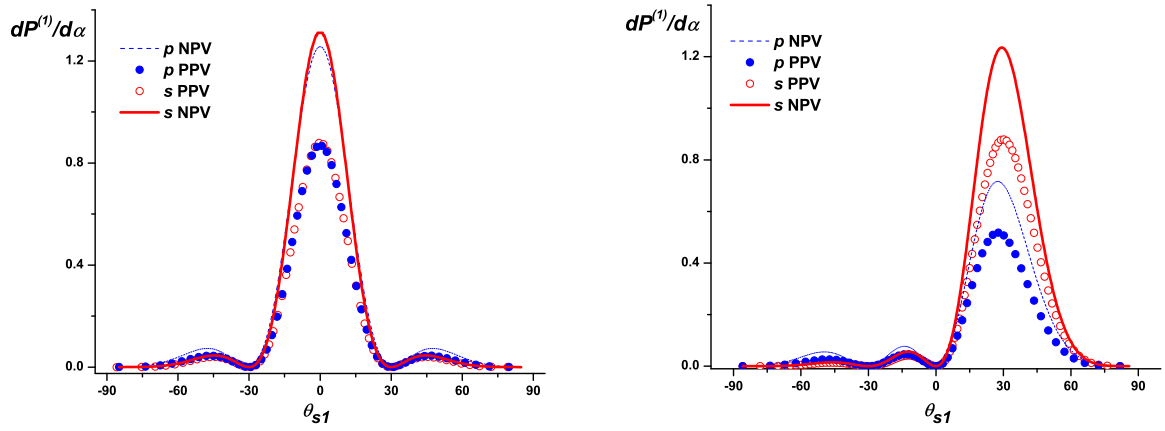


Figura 4.3: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 para una protuberancia rectangular. Los parámetros geométricos y de incidencia son  $h/a = 0.05$  y  $\lambda/a = 0.5$ . La figura de la izquierda corresponde a incidencia normal ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) y la de la derecha a incidencia oblicua ( $\theta_0 = 30^\circ$ ).

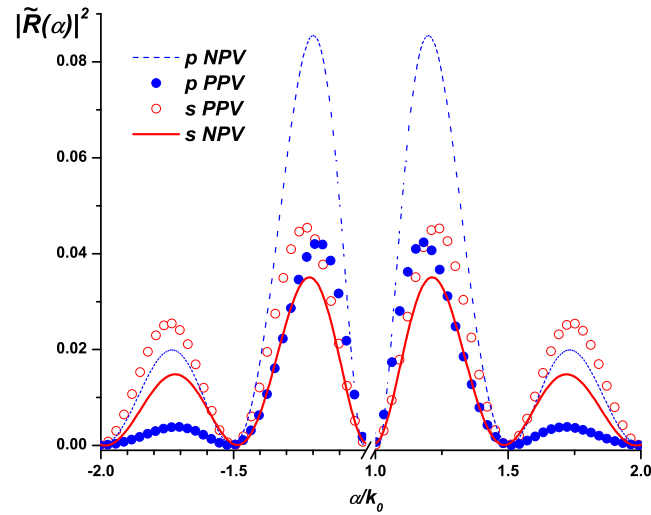


figura 4.4:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  en la zona no radiativa  $|\alpha/k_0| > 1$ . Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de las figuras 4.3,  $h/a = 0.05$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y  $\theta_0 = 0^\circ$ .

## 4.2. Perfil sinusoidal

### 4.2.1. Medios con pérdida

En esta sección, consideramos superficies con perfiles sinusoidales como las del capítulo anterior, de la forma  $g(x) = \frac{h}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi}{a}x)] \text{rec}(x/a)$ , con parámetros  $\lambda/a = 0.25$  y

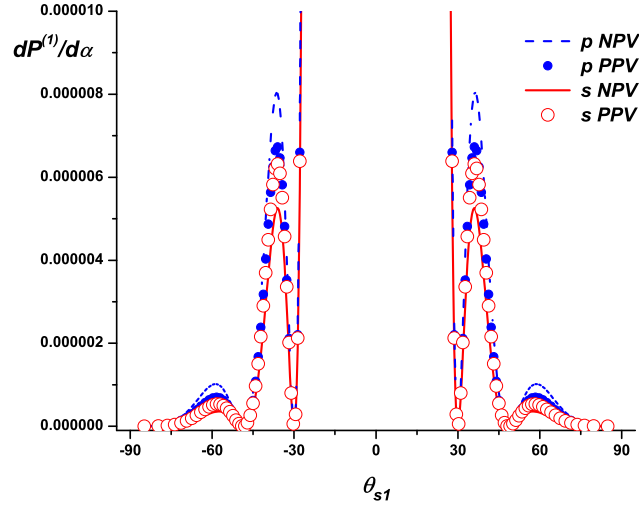


Figura 4.5: Distribución angular de potencia reflejada en el medio 1 para una protuberancia sinusoidal. Los parámetros de incidencia corresponden a las figuras 3.19 y 3.20 y los geométricos son  $\lambda/a = 0.25$ ,  $h/a = 0.0025$ .

$h/a = 0.0025$ . En este caso, el medio de transmisión es un metamaterial con pérdida cuyos parámetros constitutivos son  $\epsilon_2 = 5 + 0.01i$ ,  $\mu_2 = 1 + 0.01i$  (un medio PPV con índice de refracción  $\nu_2 \approx 2.236 + 0.0134i$ ) o  $\epsilon_2 = -5 + 0.01i$ ,  $\mu_2 = -1 + 0.01i$  (un medio NPV con índice de refracción  $\nu_2 \approx -2.236 + 0.0134i$ ). Se ha hecho un análisis similar al de la sección anterior y, como mostramos a continuación, los resultados obtenidos no dependen ni de la geometría de la protuberancia, ni del hecho de que el metamaterial contiene pérdida. Se ha verificado que el criterio de conservación de energía (2.47) se satisface con un error menor a 0.2%. Comparamos la distribución angular de potencia reflejada cuando la superficie es iluminada bajo incidencia normal en la figura 4.5 y bajo incidencia oblicua ( $\theta_0 = 20^\circ$ ) en las figuras 4.6 y 4.7, obteniéndose resultados similares a los del caso rectangular. Cerca de la dirección especular, se obtiene esencialmente la misma respuesta para  $\theta_0 = 0^\circ$ , y para  $\theta_0 = 20^\circ$  la diferencia depende sólo de la polarización incidente. Para direcciones alejadas de la especular, la respuesta depende tanto del medio de refracción como de la polarización incidente. Nuevamente, al aumentar 10 veces la altura de la protuberancia considerada, se observa que la potencia reflejada cerca de la dirección especular ( $\theta_{s1} \approx \theta_0$ ) se vuelve más sensible al intercambio entre PPV y NPV como ilustran los gráficos de la

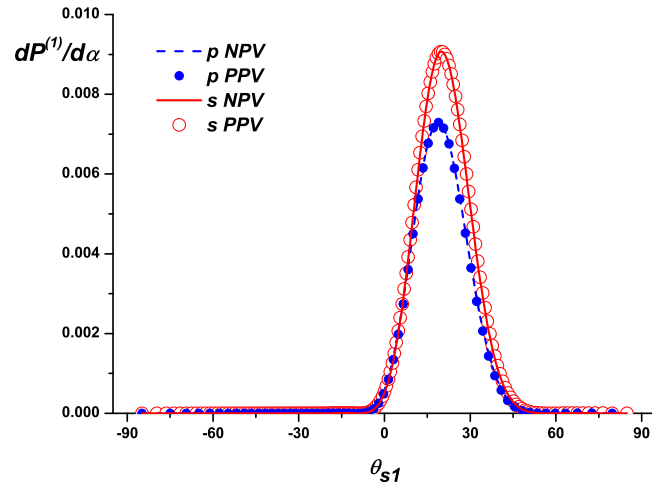


Figura 4.6: Distribución angular de potencia reflejada en el medio 1 para una protuberancia sinusoidal. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de la figura 4.5, excepto que ahora  $\theta_0 = 20^\circ$ .

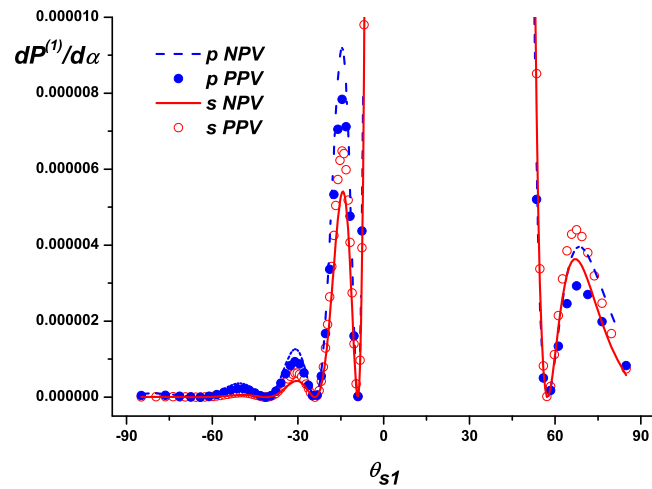


Figura 4.7: Idem figura 4.6, pero con una escala distinta para que se evidencien las diferencias entre las curvas en direcciones de observación lejanas de la dirección especular.

figura 4.8 (incidencia normal, derecha) y ( $\theta_0 = 20^\circ$ , izquierda).

Los resultados presentados en las figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 confirman la conjetura sugerida por la simetría de conjugación, es decir, la respuesta óptica a lo largo de las direcciones de observación lejanas de la dirección especular puede ser utilizada como un indicador de campo lejano del carácter PPV/NPV de metamateriales superficialmente corrugados.

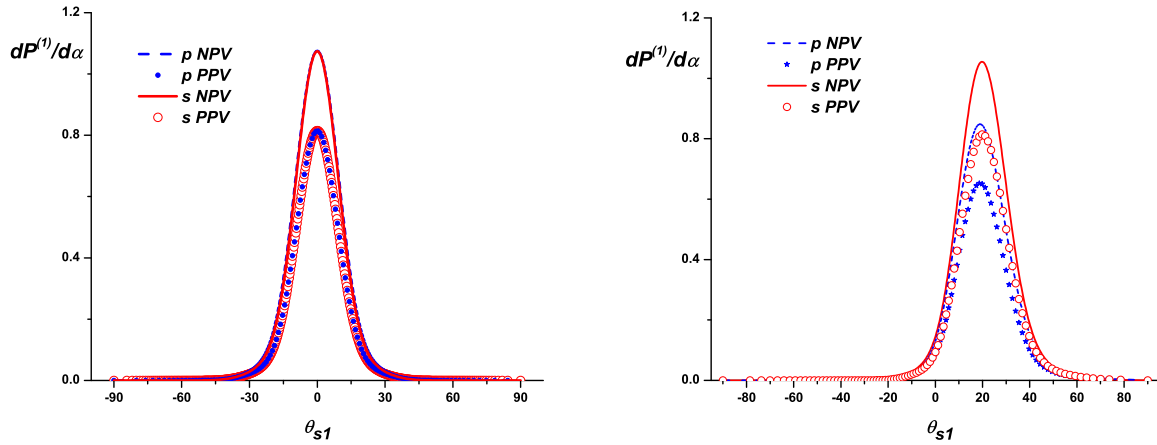


Figura 4.8: Izquierda: Idem figura 4.5, excepto que ahora  $h/a = 0.025$ . Derecha:  $\theta_0 = 20^\circ$ .

Por otro lado, como se mostró para el caso de perfiles rectangulares en la figura 4.4, cuando los campos cercanos están involucrados, el rango no radiativo de la cantidad  $\tilde{R}(\alpha)$  puede resultar como un indicador PPV/NPV del medio. En la figura 4.9 se comparan las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  en la zona no radiativa para el caso sinusoidal con los mismos parámetros geométricos y de incidencia considerados en las figuras 4.8. En el gráfico se observa que el comportamiento de las ondas evanescentes cambia drásticamente dependiendo del signo del índice de refracción del medio.

#### 4.2.2. Medios sin pérdida

A continuación consideraremos el caso ideal de metamateriales sin pérdida, una suposición que nos permitirá explorar las características de los campos transmitidos lejos de la superficie rugosa. Consideramos una superficie con perfil sinusoidal con parámetros  $h/a = 0.001$  y  $\lambda/a = 0.25$  y el mismo medio de transmisión que la sección anterior

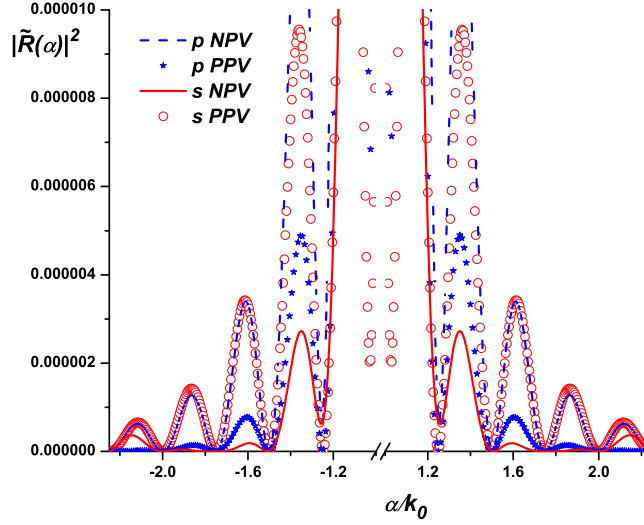


Figura 4.9: Curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  para una única protuberancia sinusoidal. Los parámetros geométricos y de incidencia corresponden a los de las figuras 4.8.

sin pérdida. En la figura 4.10 se comparan la distribución angular de potencia reflejada (izquierda) y transmitida (derecha) cuando la protuberancia es iluminada normalmente ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con ambas polarizaciones. Cerca de la dirección especular la potencia reflejada no muestra diferencia alguna al cambiar el medio de refracción o la polarización incidente. Sin embargo, a pesar de la baja altura considerada, se observa que la potencia transmitida sí depende del medio de refracción. La relación de la potencia transmitida entre los distintos medios de refracción (PPV o NPV) se puede calcular analíticamente evaluando el siguiente cociente que se deduce del primer orden del método perturbativo (ver ecuación (3.12)):

$$\frac{\tilde{T}_{NPV}^{(1)}(\alpha)}{\tilde{T}_{PPV}^{(1)}(\alpha)} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{-|\beta_0^{(2)}| - \beta_0^{(1)}}{\beta_0^{(1)} - |\beta_0^{(2)}|}, \quad (4.1)$$

donde para  $\alpha_0 = 0$  resulta  $\beta_0^{(1)} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\nu_1} = \frac{2\pi}{\lambda}$  y  $|\beta_0^{(2)}| = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\nu_2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{5}$ . (El signo de  $\beta_0^{(2)}$  depende del tipo de medio: positivo para PPV o negativo para NPV). Por lo tanto, para cualquier polarización incidente resulta,

$$\left| \frac{\tilde{T}_{NPV}^{(1)}(\alpha)}{\tilde{T}_{PPV}^{(1)}(\alpha)} \right|^2 \Big|_{\alpha=0} = 6.854.$$

Numéricamente, para este ejemplo hemos obtenido,



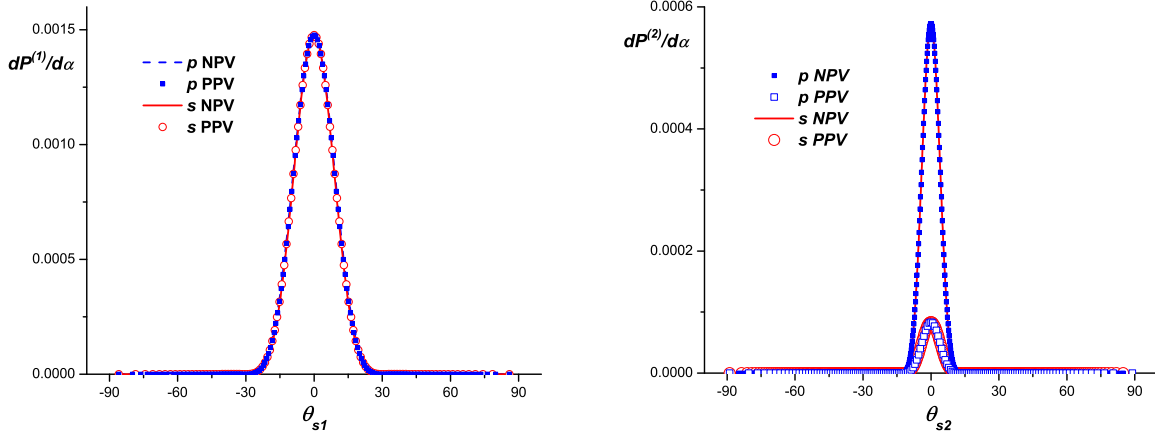


Figure 4.10: Izquierda: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 (Potencia reflejada). Derecha: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 2 (Potencia transmitida). Ambas obtenidas con una protuberancia sinusoidal con  $h/a = 0.001$ ,  $\lambda/a = 0.25$  y  $\theta_0 = 0^\circ$ .

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2^*} \frac{(\beta_0^{(2)})^*}{\beta_0^{(1)}} \right) |\tilde{T}_{NPV}^{(1)}(0)|^2 = 0.000572$$

y

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2^*} \frac{(\beta_0^{(2)})^*}{\beta_0^{(1)}} \right) |\tilde{T}_{PPV}^{(1)}(0)|^2 = 0.0000835,$$

cuyo cociente es aproximadamente igual a 6.85, como se predice analíticamente. Para direcciones  $\theta_{s1}$  lejanas de  $\theta_0$ , la figura 4.11 muestra claramente que la distribución angular de potencia transmitida es muy sensible, no sólo a la polarización incidente, sino también al signo del índice de refracción del metamaterial, tal como sucede con la potencia reflejada. Para el caso de incidencia oblicua ( $\theta_0 = 40^\circ$ ) se ilustran en la figura 4.12 la potencia reflejada (izquierda) y transmitida (derecha) obtenidas con la misma superficie que la considerada en la figura 4.10. En el caso de la distribución de potencia reflejada, el único cambio que se observa en la dirección especular se debe al cambio de polarización incidente y no al del medio de refracción. Para otras direcciones alejadas de la especular, la potencia reflejada es sensible al intercambio entre medios aunque no se vea ilustrado por la escala utilizada. Sin embargo, tal como sucedía en el caso de incidencia normal, la distribución angular de potencia transmitida es sensible cerca de la dirección especular al intercambio de medios PPV - NPV. La figura 4.12 (derecha) muestra que en el caso en el que el medio

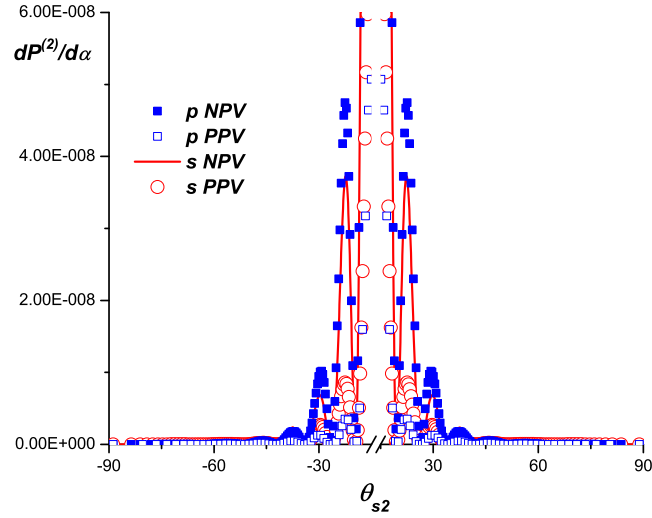


Figure 4.11: Ampliación de la potencia transmitida (distribución angular de potencia dispersada en el medio 2) de la figura 4.10.

sea NPV, el gráfico de la distribución angular de potencia transmitida se ubica del otro lado de la normal a la superficie media, tal como predice la ley de Snell. Reemplazando con los datos de este ejemplo, obtenemos  $\sin \theta_{s_2} = \sin 40^\circ / \sqrt{5} \approx 0.2875$  y, por lo tanto,  $\theta_{s_2} \approx 16.71^\circ$  para el caso PPV o  $\sin \theta_{s_2} \approx -0.2875$  y, por lo tanto,  $\theta_{s_2} \approx -16.71^\circ$  para NPV. Esto está claramente ilustrado en la figura 4.13, que es una ampliación de la figura 4.12 (derercha). Para direcciones de observación  $\theta_{s_1} \neq \theta_0$ , en la figura 4.14 se observan similares características a las obtenidas para el caso de incidencia normal.

Evidentemente, estos resultados muestran que la potencia transmitida también puede ser utilizada como un indicador de campo lejano del carácter PPV/NPV de superficies de baja altura. Como última observación, en la figura 4.15 se comparan las curvas de  $|\tilde{T}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  en la zona no radiativa para PPV y NPV. La superficie considerada es la de la figura 4.10 con los mismos parámetros de incidencia. Claramente se muestra que las amplitudes de los campos evanescentes son sensibles al cambio de signo del índice de refracción y, por lo tanto, puede ser utilizado también como un indicador de campo cercano.

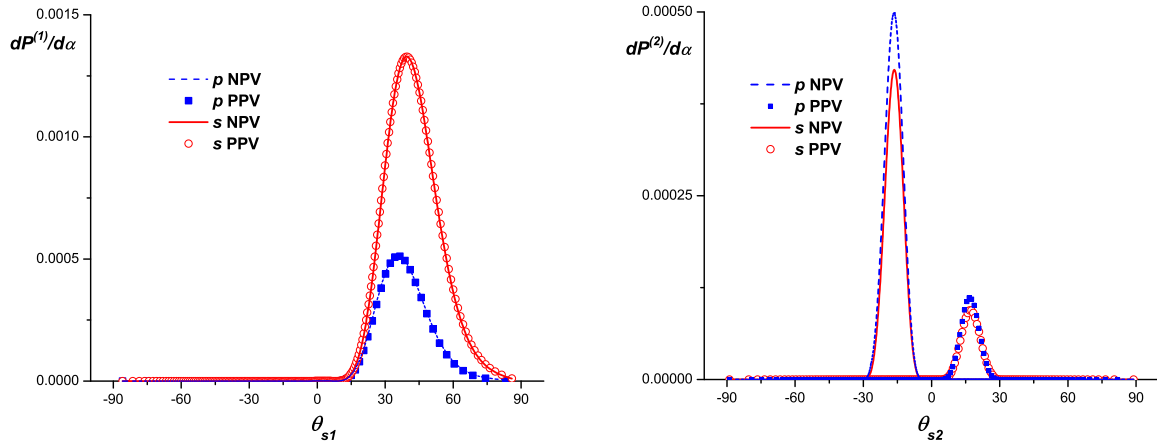


Figure 4.12: Izquierda: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 (potencia reflejada). Derecha: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 2 (potencia transmitida). Los parámetros geométricos son  $h/a = 0.001$  y  $\lambda/a = 0.25$  cuando  $\theta_0 = 40^\circ$ .

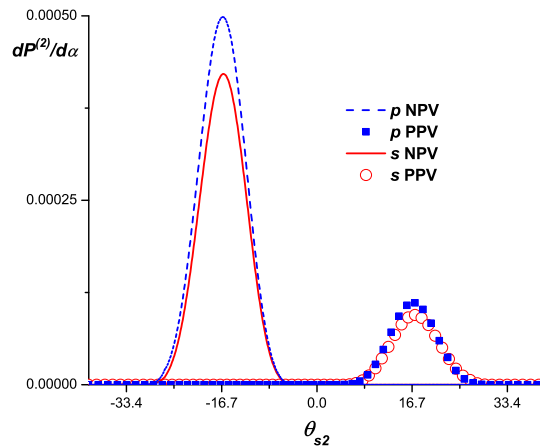


Figure 4.13: Ampliación de la distribución angular de potencia dispersada en el medio 2 (potencia transmitida) de la figura 4.12.

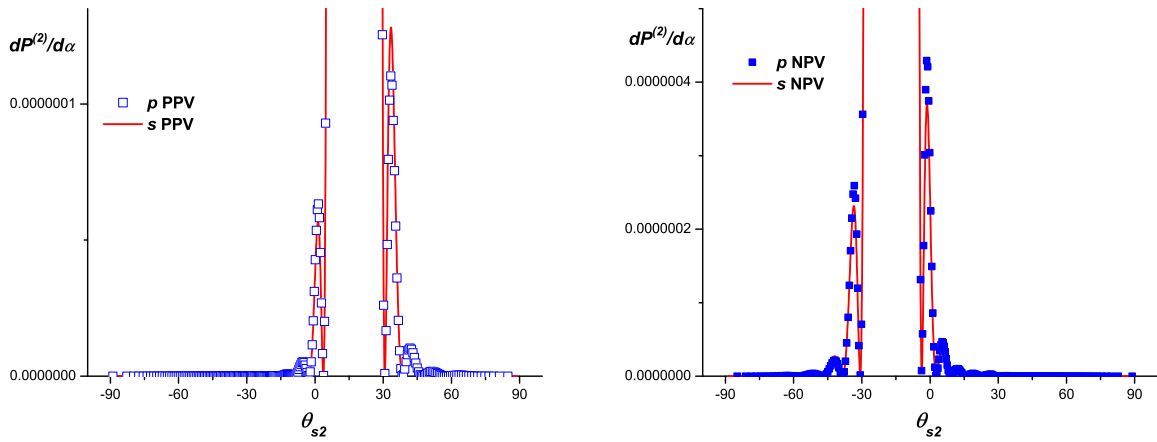


Figure 4.14: Distribución angular de potencia dispersada en el medio 2. Los medios son PPV (izquierda) y NPV (derecha). Los parámetros geométricos y de incidencia son los de la figura 4.12.

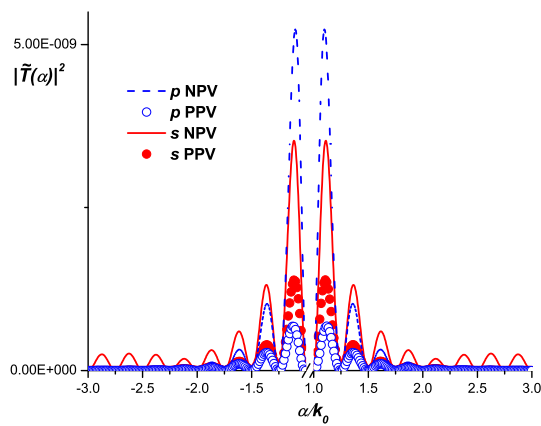


Figure 4.15: Curvas de  $|\tilde{T}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son los correspondientes a la figura 4.10.



# Capítulo 5

## Ondas superficiales en superficies con rugosidades localizadas

Las ondas superficiales son modos electromagnéticos de propagación a lo largo de una interfase que separa dos medios. Desde un punto de vista matemático, son soluciones de las ecuaciones de Maxwell junto con las correspondientes condiciones de contorno en ausencia de onda incidente [107] y en esta perspectiva resultan completamente análogas a los modos propios de una cuerda o de una guía de ondas dieléctrica o metálica. Como sucede en todo problema forzado, las soluciones del sistema homogéneo (sin fuerza externa en problemas mecánicos y sin onda incidente en problemas de scattering) pueden ser excitadas de manera resonante cuando una fuente externa logra reproducir las características especiales del modo propio. Cuando esto sucede la respuesta del sistema es generalmente muy singular y se dice que la fuente externa se acopla con el modo propio.

En los capítulos anteriores hemos considerado efectos ópticos producidos por la rugosidad de la superficie metamaterial en situaciones donde no se excitan ondas superficiales. En particular, en todos los ejemplos mostrados anteriormente la excitación de ondas superficiales ha sido excluída intencionalmente desde un principio debido a la elección de los valores de los parámetros constitutivos. En cambio, en este capítulo estamos particularmente interesados en estudiar los efectos ópticos producidos por la excitación de ondas superficiales a raíz de la interacción entre una onda plana y un metamaterial levemente corrugado.

Las ondas superficiales se propagan “pegadas” a la superficie y tienen periodicidades menores que la longitud de onda de la radiación electromagnética de la misma frecuencia,

una característica muy adecuada para la miniaturización de dispositivos fotónicos. Tanto esta característica de miniaturización como el comportamiento resonante hacen que las ondas superficiales sean atractivas para numerosas aplicaciones. En el momento actual, el estudio de las ondas electromagnéticas superficiales ha cobrado un gran impulso y ha generado el área conocida como *Plasmónica*, denominación originada en el hecho de que las únicas ondas superficiales que existen en medios isótropos convencionales, con permeabilidades magnéticas positivas, son los llamados *plasmones* superficiales [107].

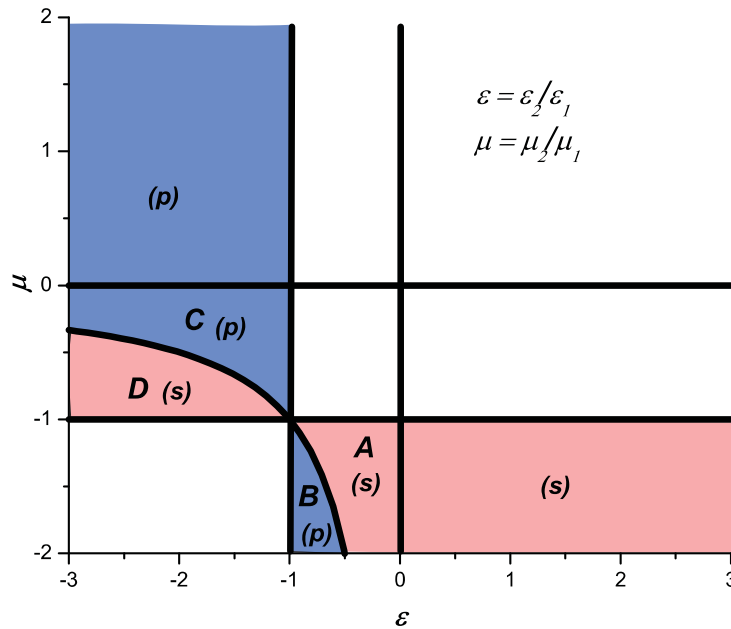


Figura 5.1: Regiones del espacio de parámetros constitutivos donde existen modos superficiales para una superficie plana entre un medio convencional y un metamaterial, ambos sin pérdida.

La aparición de los metamateriales con índice de refracción negativo (parámetros constitutivos simultáneamente negativos en el mismo rango de frecuencia) ha motivado un nuevo interés en el estudio del problema homogéneo de una superficie. En el caso de superficies planas [71–74, 108] se han identificado recientemente nuevas ondas superficiales con características inexistentes en medios convencionales, como por ejemplo ondas superficiales regresivas, con velocidad de fase negativa, opuesta a la dirección en que se propaga la energía. Las regiones de existencia para ondas superficiales se pueden esquematizar en el espacio de parámetros constitutivos mostrado en la figura 5.1 para el caso particular de medios sin pérdidas. Nótese que las regiones A, B, C y D corresponden a medios trans-

parentes (en vez de a medios metálicos, como con los materiales convencionales) con índice de refracción negativo. En el caso general de metamateriales con pérdidas, las regiones son sutilmente diferentes y fueron discutidas en [74].

Debido a que las ondas superficiales tienen menor periodicidad que la que puede inducir en la superficie un fotón incidente de la misma frecuencia, la resonancia con ondas planas nunca puede lograrse con una única superficie plana. Por lo tanto, para lograr excitar y detectar los modos superficiales, se necesitan técnicas especiales de acoplamiento donde hay que abandonar la simple configuración de una superficie plana. Una posibilidad es la que nos interesa explorar en este capítulo y consiste en deformar ligeramente la superficie con cavidades o protuberancias [79, 80]. Otras técnicas de acoplamiento muy difundidas se basan en la utilización de una red de difracción periódica [75, 76, 80, 107, 109], o en el empleo del fenómeno de reflexión total atenuada (ATR, por sus siglas en inglés) [74, 108]. En todos estos casos el acoplamiento es observable debido a que el cambio de geometría modifica la constante de propagación, es decir aumenta la periodicidad superficial.

## 5.1. Excitación de ondas superficiales

En el caso de superficie plana,  $g(x) \equiv 0$ , la relación de dispersión para ondas superficiales se obtiene planteando las condiciones de contorno (2.26) y (2.27) en la interfase sin onda incidente [71] y se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma_2 \beta_\alpha^{(1)} + \sigma_1 \beta_\alpha^{(2)} = 0, \quad (5.1)$$

donde  $\beta_\alpha^{(j)} = \beta^{(j)}(\alpha) = (k_0^2 \epsilon_j \mu_j - \alpha^2)^{1/2}$ ,  $j = 1, 2$ , son las componentes según  $y$  de los vectores de onda  $\vec{k}^{(1r)}$  y  $\vec{k}^{(2t)}$ , definidas en el capítulo 2. El confinamiento de la onda superficial requiere que el campo electromagnético se atenúe en dirección perpendicular a la superficie, por lo tanto,

$$\text{Im } \beta_\alpha^{(j)} > 0 \quad j = 1, 2. \quad (5.2)$$

En el caso ideal de medios sin pérdidas,  $\beta_\alpha^{(j)}$  es puramente imaginario y esta condición se satisface si

$$\alpha > \text{máx}\{k_0 \nu_1, k_0 \nu_2\}. \quad (5.3)$$

De la relación (5.1) y del requerimiento (5.2), se deduce que una condición necesaria para la existencia de ondas superficiales es que los medios a ambos lados de la superficie tengan parámetros constitutivos con signo opuesto.



Reescribiendo la relación (5.1) en términos de los parámetros constitutivos relativos  $\epsilon = \epsilon_2/\epsilon_1$  y  $\mu = \mu_2/\mu_1$ , se obtiene la constante de propagación

$$\alpha_{sp}^2 = k_0^2 \epsilon_1 \mu_1 \begin{cases} \frac{\mu(\mu-\epsilon)}{\mu^2-1} & \text{polarizada en modo } s, \\ \frac{\epsilon(\epsilon-\mu)}{\epsilon^2-1} & \text{polarizada en modo } p. \end{cases} \quad (5.4)$$

Para determinar las regiones de existencia en el espacio de parámetros debemos pedir que se cumplan las expresiones (5.4), junto con la condición (5.2) y que la onda superficial sea propagante ( $\alpha_{sp}^2 > 0$ ). Estas son las regiones que están representadas en la figura 5.1, que incluye tanto a materiales habituales como a metamateriales.

Para ilustrar los efectos ópticos del acoplamiento en las diferentes regiones, comenzamos considerando una zona no magnética como la que corresponde a los metales. En los gráficos de la figura 5.2 se muestra  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  con distintas escalas, para una única protuberancia rectangular con parámetros  $h/a = 0.05$  y  $\lambda/a = 0.5$ . La superficie es un metal con parámetros constitutivos  $\epsilon_2 = -5 + i0.01$  y  $\mu_2 = 1$  y la onda plana incide normalmente polarizada en modo  $p$ . Se sabe que las ondas superficiales de polarización  $p$  pueden propagarse en la interfase entre el vacío y un metal. Este hecho pasa desapercibido si observamos la zona radiativa de la figura 5.2 (derecha) pues muestra un comportamiento similar a los gráficos obtenidos en los capítulos anteriores donde se reproducen las características predichas por la óptica física. Es decir, se mantiene la ubicación espectral de los máximos y mínimos. En particular, se puede comparar esta figura con la figura 4.3 que corresponde a la misma protuberancia en una zona donde no soporta ondas superficiales. Sin embargo, la zona no radiativa de la figura 5.2 (izquierda) es bastante diferente a la que mostramos en la figura 4.4 que corresponde a la zona no radiativa de la figura 4.3. En la figura 5.2 se observan dos picos bien marcados. El hecho de que los picos intensos que aparecen en la zona no radiativa corresponde a la excitación de ondas superficiales se confirma al notar que para estos datos, la ecuación (5.4) da  $\text{Re}(\alpha_{sp}/k_0) \approx \pm\sqrt{30/24} \approx \pm 1.12$ , valor que coincide con las posiciones de los picos en la figura 5.2 (izquierda). Por lo tanto, debido a la propagación de ondas superficiales, la zona no radiativa nunca tiene comportamientos tan singulares como los que se muestran en la figura 5.2. En las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  de la figura 4.4 el aporte de la zona no radiativa nunca supera al aporte de la zona radiativa, mientras que en esta figura sí. Más aún, la forma en que el aporte no radiativo contribuye a las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  es muy distinta entre esta figura y la figura 4.4. En esta figura el aporte no radiativo es de tipo “delta”, a diferencia de lo que sucede en la figura 4.4. De estas singularidades podemos concluir que las contribuciones

más importantes a la energía están dadas por el especular y las ondas superficiales. Por lo tanto, estas contribuciones son las que más aportan al campo cercano y, por ende, al vector de Poynting cercano a la superficie. En particular la componente en la dirección  $x$  del vector de Poynting,  $\mathbf{S}_{\mathbf{T}_x} \propto \Psi_T \partial_x \Psi_T^*$ , se puede aproximar como

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}_x} \propto (e^{i(\alpha_0 + \alpha_{sp})x} + e^{i(\alpha_0 - \alpha_{sp})x}) \quad (5.5)$$

si se desprecian los otros términos que forman parte del modelo exacto. Es decir, despreciando el aporte de los campos incidente y dispersados a ambos lados de la superficie. Este es un modelo aproximado que sirve para deducir fácilmente el período de las ondas superficiales en una región cercana a la superficie.

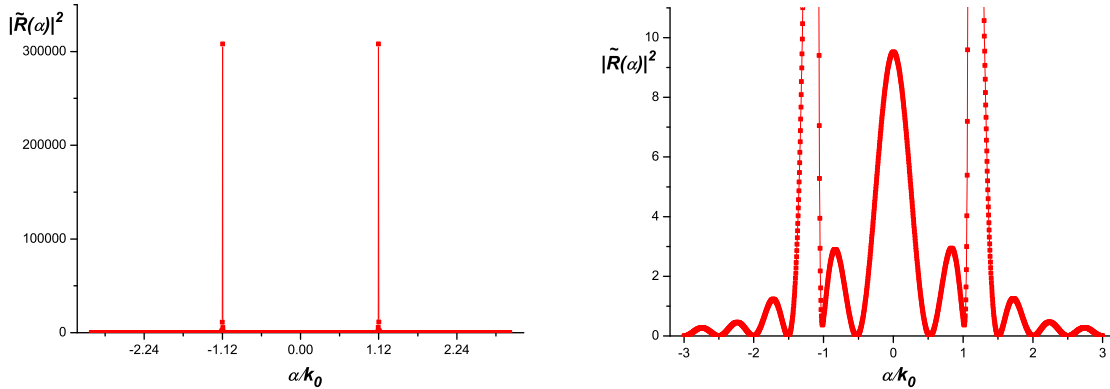


Figura 5.2:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para una protuberancia metálica ( $\epsilon_2 = -5 + i0.01$  y  $\mu_2 = 1$ ) rectangular, iluminada normalmente ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con polarización  $p$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $\lambda/a = 0.5$  y  $h/a = 0.05$ .

Como mostraremos a continuación, el hecho de que aparezcan dos picos bien marcados ubicados en la constante de propagación de las ondas superficiales se reproduce para el caso de metamateriales. Para ilustrar este caso, consideramos superficies con parámetros constitutivos  $\epsilon_2$  y  $\mu_2$  correspondientes a las regiones A y B de la figura 5.1. La diferencia entre estas regiones está dada por la polarización (s o p) y por la excitación de las ondas: progresivo para la región A o regresivo para la B. En el caso de onda progresiva, el sentido del flujo neto de energía coincide con el sentido de propagación de la onda.  $\text{Re}(\alpha_{sp})$  tiene igual signo que  $\text{Im}(\alpha_{sp})$  y, por lo tanto, para que la energía tienda a cero para  $\pm\infty$ ,  $\text{Re}(\alpha_{sp})$  tiene que ser positiva para  $+x$  y negativa para  $-x$ . En cambio, cuando la onda

es regresiva, la dirección del flujo neto de potencia paralelo a la superficie tiene sentido opuesto a la dirección de propagación [72–74].  $\text{Re}(\alpha_{sp})$  tiene signo opuesto a  $\text{Im}(\alpha_{sp})$  y, por lo tanto,  $\text{Re}(\alpha_{sp})$  tiene que ser negativa en dirección  $+x$  y positiva en  $-x$  para que la energía tienda a cero en  $\pm\infty$ . El tipo de onda (progresivo o regresivo) en cada caso queda en evidencia en los gráficos del módulo del vector de Poynting pues el período de las ondas superficiales excitadas es diferente a ambos lados de la superficie corrugada. Suponiendo válido el modelo aproximado (5.5) podemos concluir que en el caso de onda progresiva, el período es

$$\Lambda^- = \lambda / |\sin \theta_0 - (-\text{Re}(\alpha_{sp}/k_0))|$$

a la izquierda de las protuberancias y

$$\Lambda^+ = \lambda / |\sin \theta_0 - (+\text{Re}(\alpha_{sp}/k_0))|$$

a la derecha de las mismas [112]. En ambas ecuaciones,  $\sin \theta_0$  es la proyección sobre la superficie del campo especular. En el caso de onda regresiva, sucede lo contrario, las ondas tienen un período igual a  $\Lambda^-$  a la derecha de las protuberancias y  $\Lambda^+$  a la izquierda.

En primer lugar mostramos los resultados obtenidos cuando deformamos el plano con una única protuberancia. A continuación, analizamos el caso en que la superficie contiene una cantidad finita de protuberancias y lo comparamos con el caso límite (red de difracción). Consideramos, en particular, la incidencia de la onda plana con el ángulo de acople para una red periódica infinita. En este caso, se sabe que para que haya un acoplamiento el ángulo de incidencia  $\theta_0$  debe satisfacer la siguiente condición:

$$\text{Re}(\alpha_{sp}(h)) = \frac{w}{c} \epsilon_1 \mu_1 \sin \theta_0 + m \frac{2\pi}{d}, \quad (5.6)$$

donde  $m$  es un entero y  $\alpha(h)$  es la constante de propagación. Si  $\lambda$  es la longitud de onda del medio incidente, esta condición puede ser reescrita como:

$$\text{Re}(\alpha_{sp}(h)/k_0) = \sin \theta_0 + m \frac{\lambda}{d}. \quad (5.7)$$

Si se supone una rugosidad suave, las protuberancias no perturban a las ondas superficiales y en este caso  $\alpha_{sp}(h)$  en (5.6) puede ser reemplazada por  $\alpha_{sp}(0)$  en (5.4).

## 5.2. Resultados

Sólo consideramos superficies con parámetros constitutivos  $\epsilon_2$  y  $\mu_2$  correspondientes a las regiones A y B de la figura 5.1 pues en las zonas C y D se obtienen los mismos resultados

cambiando la polarización de la onda incidente y los parámetros  $\epsilon_2$  por  $\mu_2$  y viceversa. Las rugosidades consideradas son como las capítulo 3, centradas en  $x = 0$  y con perfiles simétricos  $[g(x) = \frac{h}{2}(1 + \cos(\frac{2\pi}{d}x))\text{rec}(x/a)]$  o asimétricos  $[g(x) = \frac{h}{2}\sin(\frac{2\pi}{d}x)\text{rec}(x/a)]$ .

### 5.2.1. Región A: polarización $s$ , excitación de ondas progresivas

Para esta región hemos elegido superficies cuyos parámetros constitutivos son  $\epsilon_2 = -0.2 + 0.001i$  y  $\mu_2 = -1.3 + 0.001i$ . En este caso se excitan las ondas superficiales de forma progresiva en modo  $s$ . Con estos parámetros la ecuación (5.4) proporciona la constante  $\alpha_{sp}/k_0 = \pm(1.4396 + 0.00216i)$  de propagación para la superficie plana.

#### Una protuberancia

Para ilustrar las características del acoplamiento entre una onda plana y un metamaterial levemente corrugado comenzamos considerando dos superficies planas deformadas por una sola protuberancia cada una, una de forma simétrica y otra asimétrica. Los parámetros geométricos de ambas superficies son  $\lambda/d = 0.5$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y  $h/d = 0.01$ . Las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  obtenidas para cada una de las superficies cuando la onda plana incide normalmente ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) se muestran en la figura 5.3. El gráfico de la izquierda corresponde al caso de la protuberancia simétrica y el de la derecha a la asimétrica. Se observa claramente que ambos gráficos alcanzan máximos pronunciados en  $\alpha/k_0 \approx \pm 1.4396$ . Esto indica que dos ondas superficiales, una propagándose en la dirección  $+x$  y otra que se propaga en la dirección  $-x$ , son excitadas por la onda plana incidente. Es evidente que la longitud finita de la interfase permite el acoplamiento entre esta onda plana y las dos ondas superficiales que se propagan en la superficie, a diferencia de lo que sucede con la red infinita donde sólo se logra excitar a una de ellas. Cabe destacar una diferencia que se observa entre el caso simétrico y el asimétrico. Mientras que para la interfase simétrica, ambos picos alcanzan el mismo valor, para la asimétrica, el máximo de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  se alcanza para  $\alpha/k_0 = 1.4396$ . Este hecho implica un acoplamiento asimétrico, donde la intensidad es más evidente en la onda superficial que se propaga en la dirección  $+x$  que en la que se propaga en la otra dirección. Es decir, ambas ondas se excitan de un modo diferente. Esta característica se repite para ambas superficies en la figura 5.4 donde se incide oblicuamente ( $\theta_0 = 10^\circ$ ). Ambos gráficos de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  muestran que la incidencia oblicua de la onda plana implica un acoplamiento asimétrico aún en el caso en que la superficie

sea simétrica. Además se observa un incremento en la altura de los picos asociado a la excitación de las ondas superficiales en  $\alpha/k_0 \approx \pm 1.4396$  con respecto al caso de incidencia normal.

Para apreciar los detalles del campo cercano asociado a esta configuración, mostramos los mapas de los módulos de los vectores de Poynting en las regiones cercanas a cada una de las superficies en la figura 5.5. En ambos gráficos se ilustra claramente el carácter progresivo de las ondas superficiales. La densidad de energía se intensifica por arriba de la superficie (sobre el medio que posee menor módulo de la permeabilidad magnética) y a la derecha de la protuberancia y decrece en la dirección de propagación  $+x$ . Dicha densidad es discontinua en la superficie de separación. Hay que resaltar que estos gráficos muestran la diferencia en la periodicidad de las ondas a ambos lados de las protuberancias. Del lado izquierdo se verifica  $\Lambda^- = 1/|\sin 10^\circ + 1.4396| \approx 0.62$  y del lado derecho  $\Lambda^+ = 1/|\sin 10^\circ - 1.4396| \approx 0.79$ .

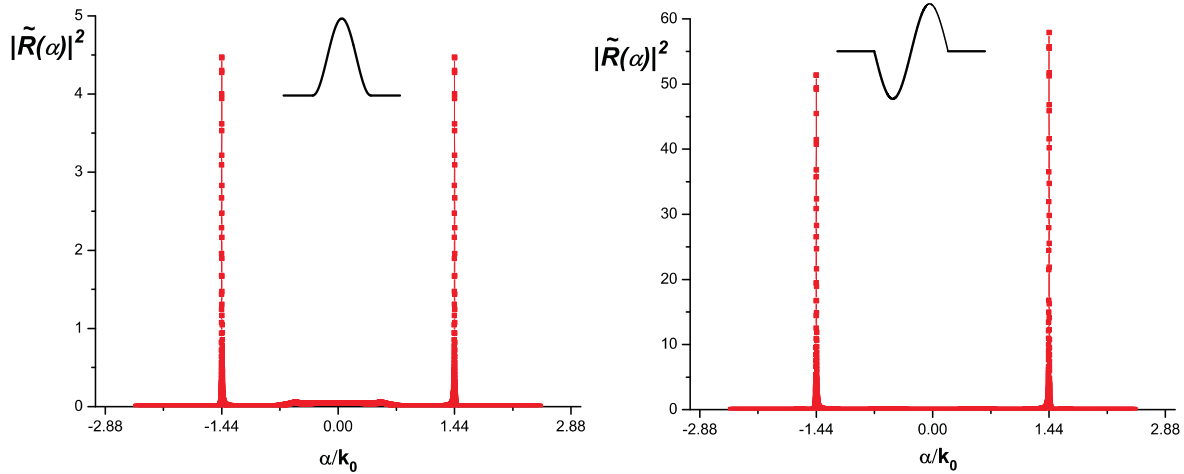


Figura 5.3: Curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para una protuberancia sinusoidal simétrica (izquierda) y una asimétrica (derecha), iluminadas normalmente ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) con polarización  $s$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $\lambda/d = 0.5$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y  $h/d = 0.01$ .

### Varias protuberancias

Para mostrar las características de las ondas cuando la cantidad de protuberancias aumenta, consideramos en primer lugar el caso en que la superficie contiene 3 protuber-

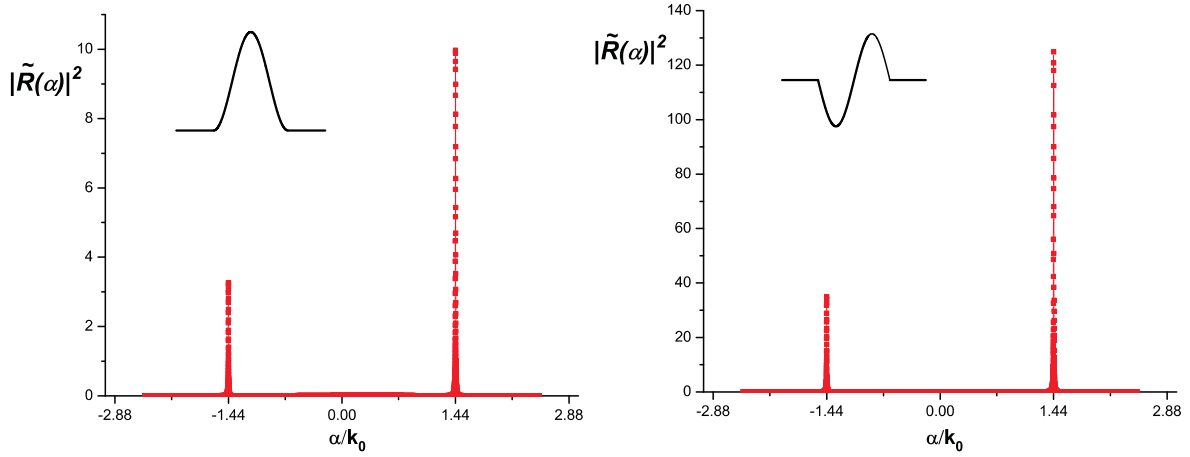


Figura 5.4: Curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para una protuberancia sinusoidal simétrica (izquierda) y una asimétrica (derecha), iluminadas oblicuamente ( $\theta_0 = 10^\circ$ ) con polarización  $s$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $\lambda/d = 0.5$ ,  $\lambda/a = 0.5$  y  $h/d = 0.01$ .

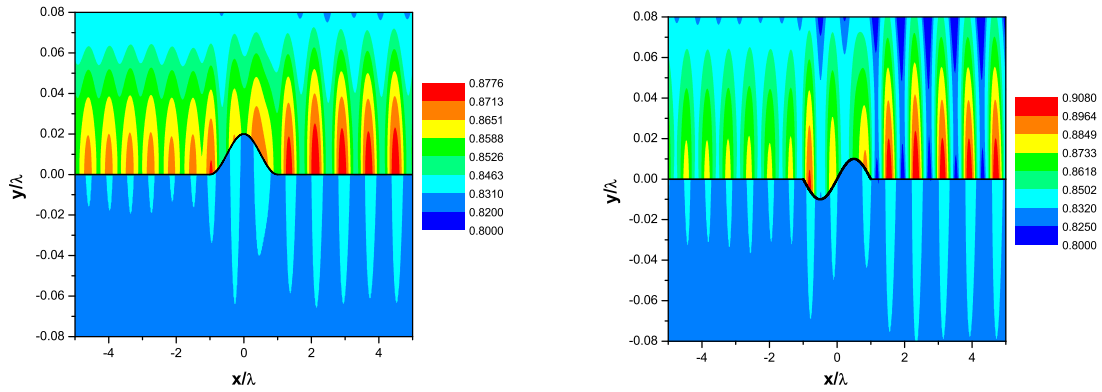


Figura 5.5: Mapa de los módulos de los vectores de Poynting obtenidos en el caso de una protuberancia sinusoidal simétrica (izquierda) y otra asimétrica (derecha) cuyos parámetros son los mismos que los de la figura 5.4.

ancias del tipo simétrico. En la figura 5.6 se muestran las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  obtenidas para tres ángulos de incidencia distintos,  $\theta_0 = 0^\circ$  (arriba),  $\theta_0 = 20^\circ$  (medio) y  $\theta_0 = 70^\circ$  (abajo). Los parámetros geométricos de la superficie son como los de

la figura 5.3 excepto por  $\lambda/a = 0.16667$ . Con estos datos  $\theta_0 = 70^\circ$  verifica la ecuación (5.7) para  $m = 1$  y, por lo tanto, es el ángulo de acople correspondiente a una red infinita. Cuando la cantidad de protuberancias aumenta a 3, como muestra la figura 5.6, también se excitan dos ondas superficiales para cualquier ángulo de incidencia, una que se propaga en dirección  $+x$  y otra en sentido contrario. Esto es así pues aparecen dos máximos en  $\alpha/k_0 \approx \pm 1.4396$ . Cuando  $\theta_0 = 0^\circ$  se observa que estos máximos se alcanzan con el mismo valor de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ , a diferencia de lo que sucede si  $\theta_0 \neq 0^\circ$  donde se excita con mayor intensidad una onda superficial que la otra. Además, ambos gráficos de incidencia oblicua muestran que la onda que se excita más es la que se propaga en dirección  $+x$  y que este acople depende del ángulo de incidencia. Es decir, la altura que alcanzan los picos que corresponden a las ondas excitadas no es la misma para ambos casos. En el caso en que  $\theta_0 = 20^\circ$  se observa que el pico de la onda que más se excita es  $\approx 4$  veces más intenso que el pico de la que se propaga en la dirección  $-x$  y que ambos resultan visibles en el mismo gráfico. Sin embargo, en el caso de incidencia con el ángulo de acople resulta evidente que el pico que se encuentra en  $\alpha/k_0 = 1.4396$  es mucho más intenso que el otro ( $\approx 1000$  veces más), a tal punto que el que se encuentra en  $\alpha/k_0 = -1.4396$  no resulta visible a la misma escala.

Las características del campo cercano para los distintos ángulos de incidencia las resaltamos con el mapa del módulo del vector de Poynting. En el caso de incidencia normal, figura 5.7, es evidente la distribución simétrica de la densidad de energía alrededor de la superficie. La periodicidad sobre el corrugado es la de las protuberancias  $\Lambda = 2$  y, a ambos lados del corrugado es la misma e igual a la que tienen en el plano, es decir,  $\Lambda^\pm = 1/|\pm \text{Re}(\alpha_{sp})| \approx 0.7$ . Sin embargo, cuando se incide con el ángulo de máximo acoplamiento,  $\theta_0 = 70^\circ$ , en la figura 5.8 se observa claramente la diferencia de periodicidades a ambos lados de la superficie. En el gráfico de la derecha, que es una ampliación del de la izquierda, se evidencia aún más que la periodicidad de las ondas es  $\Lambda^+ = 1/|\sin 70^\circ - 1.4396| \approx 2$  a la derecha de las protuberancias y  $\Lambda^- = 1/|\sin 70^\circ + 1.4396| \approx 0.42$  a la izquierda de las mismas. También se ilustra como la energía se dirige en dirección de la onda superficial máximamente acoplada,  $+x$ , disminuyendo a medida que se aleja de la superficie, tal como debe pasar para el caso de ondas progresivas. Además se verifica en ambos casos (incidencia normal y oblicua) que la mayor densidad de energía se encuentra por arriba de la superficie.

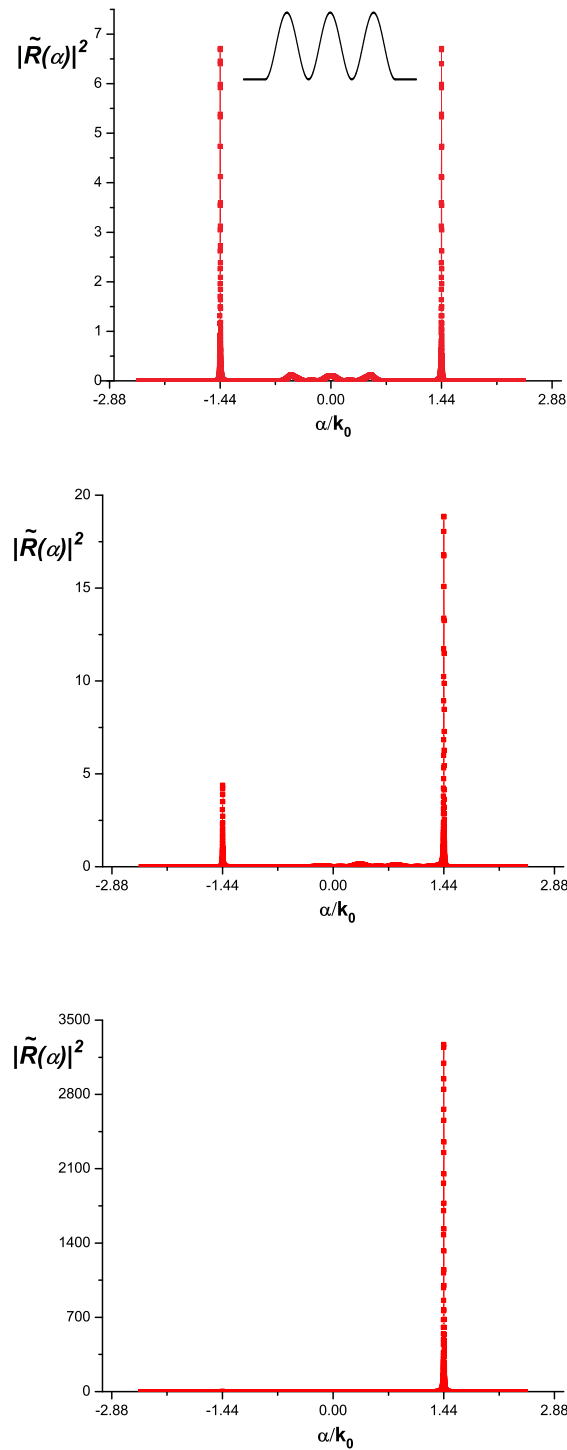


Figura 5.6: Curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  en función de  $\alpha/k_0$  para tres protuberancias sinusoidales simétricas, iluminadas normalmente (arriba) y oblicuamente ( $\theta_0 = 20^\circ$  (medio) y  $\theta_0 = 70^\circ$  (abajo)) con polarización  $s$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $\lambda/d = 0.5$ ,  $\lambda/a = 0.16667$  y  $h/d = 0.01$ .



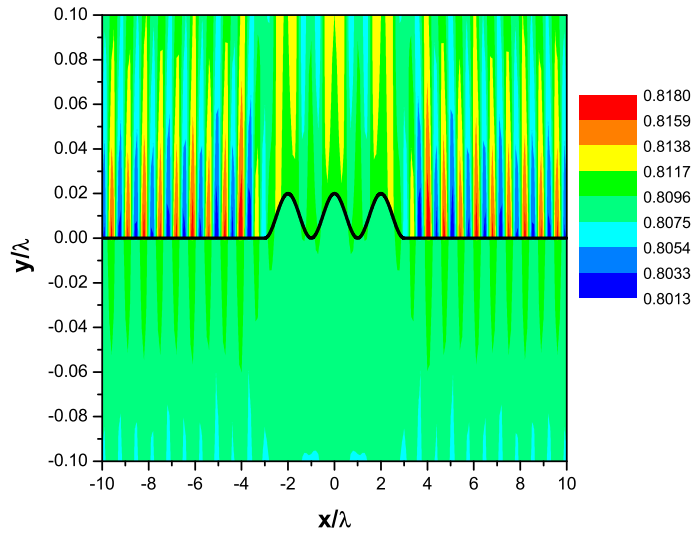


Figura 5.7: Mapa del módulo del vector de Poynting para la superficie considerada en la figura 5.6 cuando  $\theta_0 = 0^\circ$ .

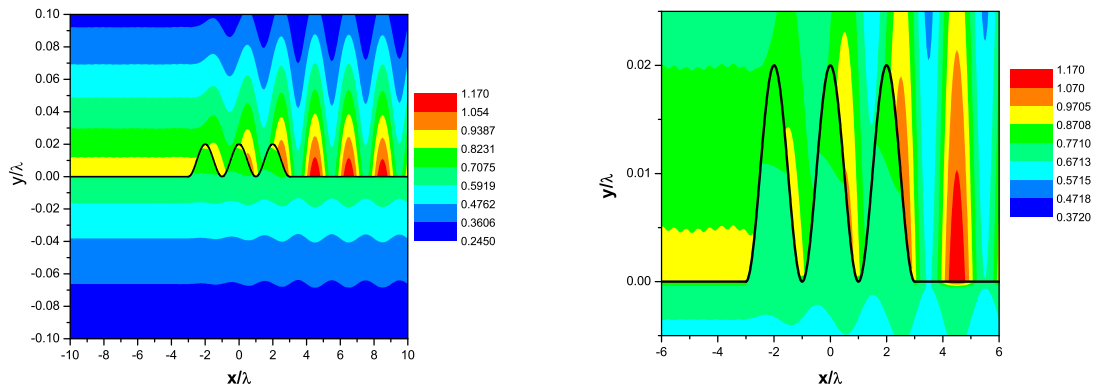


Figura 5.8: Mapa del módulo del vector de Poynting para la superficie considerada en la figura 5.6 cuando  $\theta_0 = 70^\circ$ .

Si se aumenta un poco más la cantidad de protuberancias se continúan observando los dos picos en la constante de propagación, como muestra el gráfico de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  en la figura 5.9 para 16 protuberancias asimétricas. Los parámetros de la superficie son  $\lambda/d = 0.9$ ,  $\lambda/a = 0.05625$  y  $h/d = 0.018$  y la onda plana incide con el ángulo de máximo acoplamiento para estos datos,  $\theta_0 = 32.7^\circ$ . En esta figura se observan claramente las dos ondas excitadas y que la que se encuentra en  $\alpha/k_0 = 1.4396$ , o sea la que se dirige en dirección  $+x$ , está máximamente acoplada. El alto valor que alcanza  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  se puede explicar por la gran cantidad de protuberancias que contiene la superficie. Hemos observado que a medida que aumenta el número de protuberancias, mayor es la intensidad con la que se excita la onda más acoplada, en total coincidencia con el problema de la red infinita.

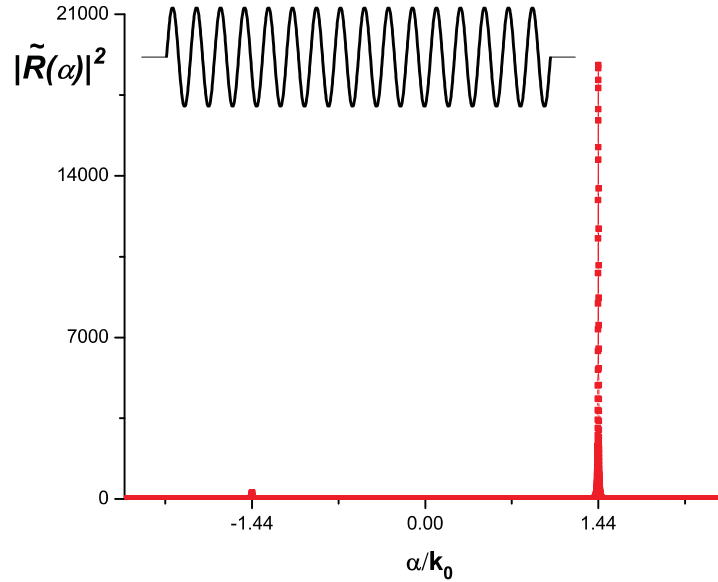


Figura 5.9:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  para 16 protuberancias sinusoidales asimétricas, iluminadas con  $\theta_0 = 32.7^\circ$  en polarización  $s$ . Los parámetros geométricos y de incidencia son  $\lambda/d = 0.9$ ,  $\lambda/a = 0.05625$  y  $h/d = 0.018$ .

Para resaltar una vez más los efectos que produce la excitación de las ondas superficiales al campo cercano a la superficie, en las figuras 5.10 y 5.11 ilustramos el mapa de colores del módulo del vector de Poynting para este ejemplo. En la figura 5.10 se observa como la energía se dirige en el mismo sentido que la onda superficial más acoplada,  $+x$ , disminuyendo a medida que se aleja de la superficie y también como se modifica la periodicidad de las ondas alrededor de la superficie. La figura 5.11 muestra claramente las diferencias en las periodicidades sobre las protuberancias y a ambos lados de las mismas,

el lado izquierdo está graficado arriba y el derecho abajo. Como se puede corroborar de los gráficos, a la derecha se obtiene  $\Lambda^+ = 1/|\sin 32.7^\circ - 1.4396| \approx 1.11$ , y a la izquierda  $\Lambda^- = 1/|\sin 32.7^\circ + 1.4396| \approx 0.5$ .

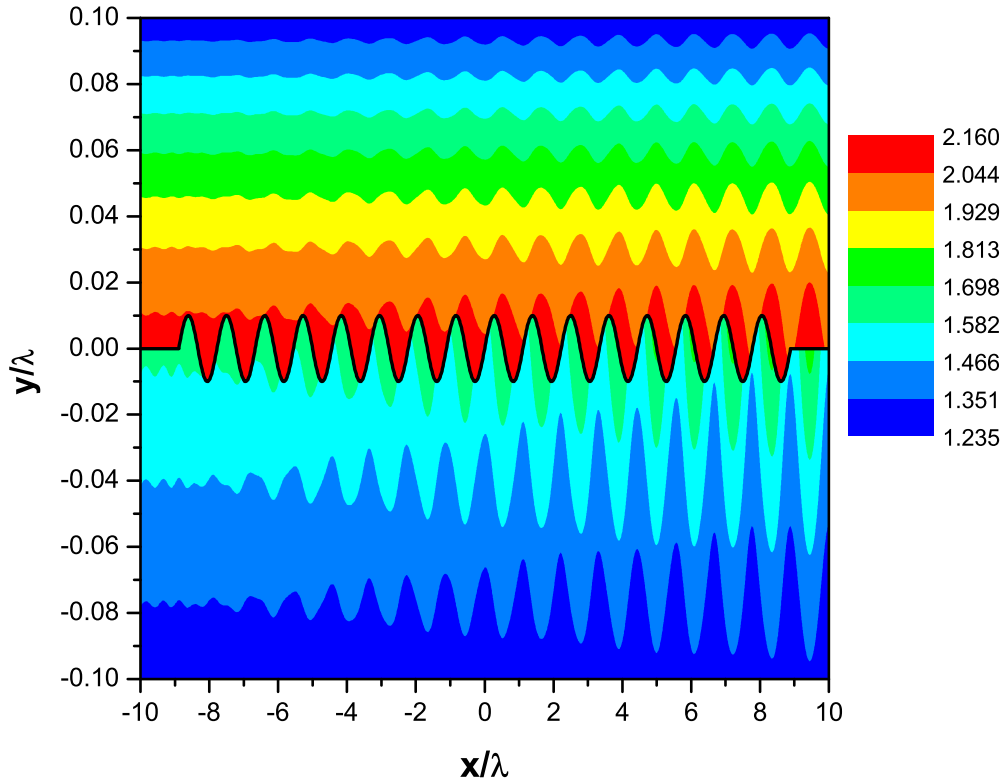


Figura 5.10: Mapa del módulo del vector de Poynting obtenido para la configuración de la figura 5.9.

Si se observa las figuras 5.3, 5.4, 5.6 y 5.9 se puede concluir que la posición espectral de los máximos en las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  es independiente no sólo del ángulo incidente sino también de la cantidad de protuberancias. En los ejemplos que consideramos en este trabajo, en donde la altura de las protuberancias es chica comparada con la longitud de onda del medio incidente ( $h/\lambda \ll 1$ ), la posición de estos máximos sólo depende de los

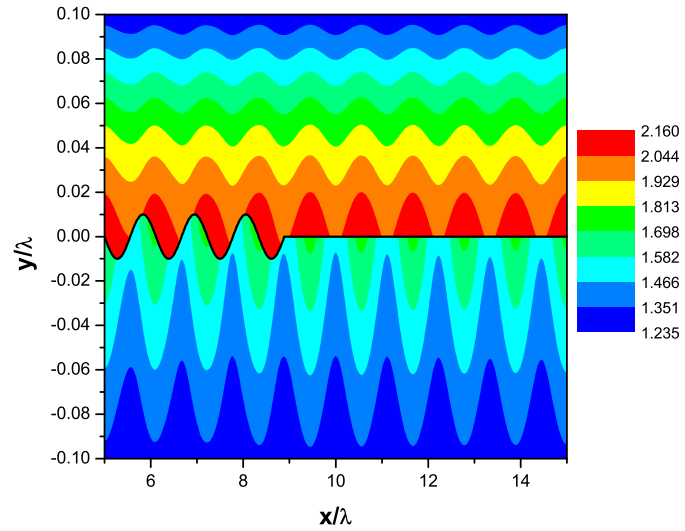
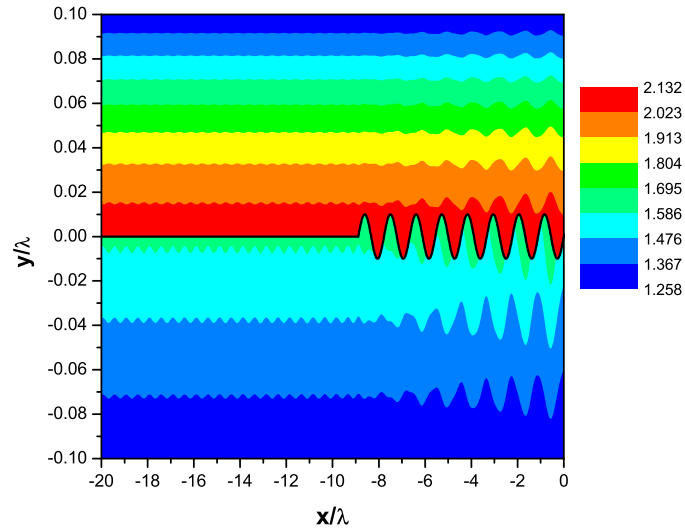


Figura 5.11: Ampliación de la figura 5.10. Arriba: lado izquierdo de la superficie corrugada y Abajo: lado derecho.

parámetros constitutivos de los medios considerados ( $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\epsilon_2$ , y  $\mu_2$ ).

Por otro lado, el carácter progresivo de las ondas superficiales en esta región queda

completamente reflejado en todos los gráficos del módulo del vector de Poynting (figuras 5.5, 5.7, 5.8, 5.10 y 5.11), donde la densidad de energía se intensifica por arriba de la superficie y a la derecha de la zona corrugada, disminuyendo en la dirección de propagación  $+x$ .

### 5.2.2. Región B: polarización $p$ , excitación de ondas regresivas

En esta región, a diferencia de la anterior, es necesario que la onda plana incidente esté polarizada en modo  $p$  para que se exciten las ondas superficiales. En este caso, consideramos superficies cuyos parámetros constitutivos son  $\epsilon_2 = -0.6 + 0.001i$  y  $\mu_2 = -2.4 + 0.001i$ . Con estos parámetros la ecuación (5.4) proporciona la constante de propagación para la superficie plana,  $\alpha_{sp}/k_0 = \pm(1.299 - 0.0023i)$ . En esta región, las ondas superficiales son regresivas y, por lo tanto, se obtiene una configuración de acoplamiento que difiere radicalmente de las ampliamente conocidas para superficies metálicas o de excitación de ondas progresivas. Contrariamente a lo que ocurre en la región anterior, en este caso la mayor densidad de energía se concentra en la región ocupada por el medio metamaterial. Más aún, la densidad de energía cercana decrece en la dirección  $-x$ , de acuerdo con el hecho de que la energía transportada por las ondas superficiales se atenúa en la dirección  $-x$  correspondiente al flujo de potencia.

#### Una protuberancia

Comenzamos el análisis de esta región con una superficie levemente deformada. El acoplamiento entre una onda plana normalmente incidente ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) y una única protuberancia sinusoidal simétrica con parámetros  $\lambda/a = 0.25$  y  $h/a = 0.01$  se ilustra en la figura 5.12. El gráfico de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  muestra dos máximos ubicados aproximadamente en  $\alpha/k_0 \approx \pm 1.299$  que alcanzan la misma altura. Es decir, nuevamente dos ondas superficiales son excitadas con la misma intensidad, una en dirección de propagación  $+x$  y la otra en dirección  $-x$ . Cuando la incidencia es oblicua ( $\theta_0 = 30^\circ$ ), aunque la ubicación de los dos máximos no cambia si se modifica el valor de la altura que alcanzan. La onda que se propaga en dirección  $+x$  está excitada con más intensidad que la que se propaga en dirección  $-x$ , tal como puede observarse en la figura 5.13. Todas estas características son similares a las que ocurren en la región de ondas progresivas. Por otra parte, en los gráficos de las figuras 5.12 y 5.13 es posible apreciar, además, la zona no radiativa ( $|\alpha/k_0| < 1$ )

de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$ . Esto es así pues esta superficie no es tan reflectiva como las que analizamos anteriormente y, por lo tanto, los resultados obtenidos en la zona radiativa están en la misma escala que los obtenidos para la zona no radiativa.

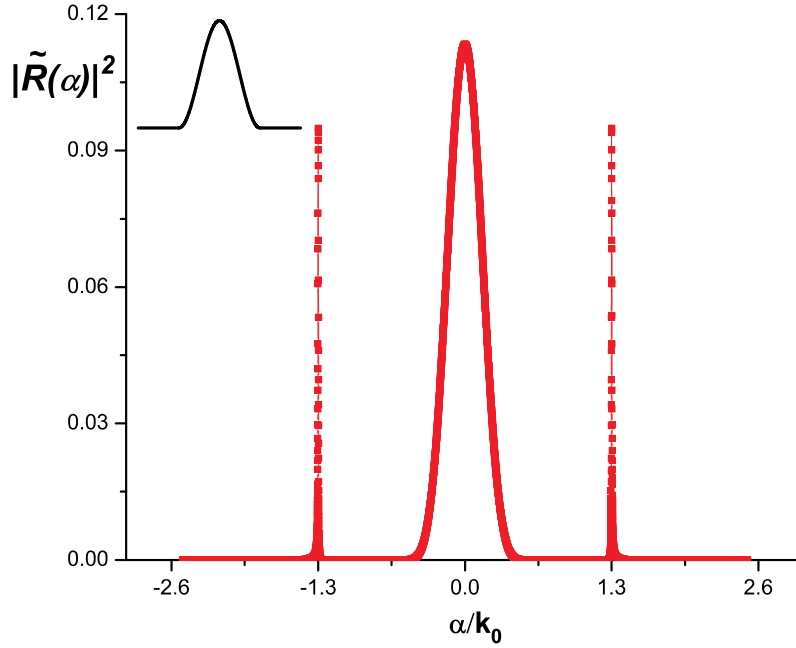


Figura 5.12:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenida para una protuberancia sinusoidal iluminada con  $\theta_0 = 0^\circ$  polarizada en modo  $p$ . Los parámetros de la superficie son:  $\lambda/a = 0.25$  y  $h/a = 0.01$ .

Lo que sucede cerca de la superficie debido a la interacción onda plana-única protuberancia cuando  $\theta_0 = 30^\circ$  está ilustrado en la figura 5.14. En este caso se obtiene un gráfico muy distinto al obtenido anteriormente (figura 5.5). Entre las diferencias que vale la pena resaltar encontramos: (i) la mayor densidad de energía se encuentra por debajo de la superficie, o sea, en la zona del metamaterial; (ii) esta densidad de energía se dirige en la dirección  $-x$ , es decir, en la dirección opuesta a la que se propaga la onda superficial acoplada con mayor intensidad, y (iii) la menor periodicidad ( $\Lambda^-$ ) de las ondas resultantes aparece en el lado derecho de la protuberancia y la mayor ( $\Lambda^+$ ) en el lado izquierdo. Observando esta figura se puede constatar que  $\Lambda^- = 1/|\sin 30^\circ - (-1.299)| \approx 0.556$  y  $\Lambda^+ = 1/|\sin 30^\circ - (+1.299)| \approx 1.25$ .

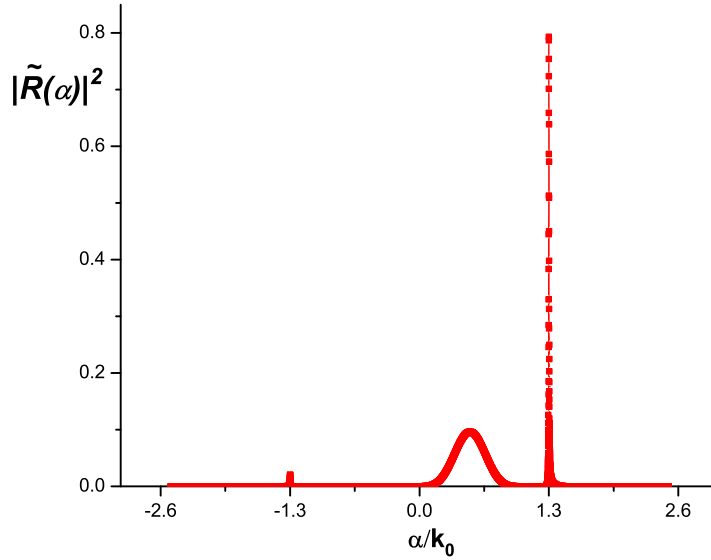


Figura 5.13: Idem figura 5.12 excepto por  $\theta_0 = 30^\circ$ .

### Varias protuberancias

Lo que sucede cuando deformamos la superficie con algunas protuberancias más lo mostramos en la figura 5.15 para el caso de 3 protuberancias simétricas con parámetros  $\lambda/d = 0.5$ ,  $\lambda/a = 0.16667$  y  $h/d = 0.01$ . Esta figura ilustra las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  para distintos ángulos de incidencia. El gráfico de arriba corresponde al caso de incidencia normal, el del medio a  $\theta_0 = 30^\circ$  y el de abajo al de máximo acoplamiento,  $\theta_0 = 52.18^\circ$ . En todos los casos, dos ondas superficiales son excitadas y la intensidad con la que se excita cada una depende del ángulo incidente. En el caso de incidencia normal, ambas ondas se excitan con igual intensidad, a diferencia del caso de incidencia oblicua, donde la onda que se propaga en dirección  $+x$  se excita con mayor intensidad. En el caso en que  $\theta_0 = 52.18^\circ$  es evidente que esta onda resulta máximamente acoplada, y por eso sólo es visible el máximo ubicado en  $\alpha/k_0 \approx 1.299$ . Estas propiedades son semejantes a las que aparecen en la zona de ondas progresivas (figura 5.6) y, por lo tanto, la propiedad regresiva propia de estas ondas no se logra distinguir en estos gráficos. Sin embargo, se refleja de forma muy clara en el mapa del módulo del vector de Poynting, graficado en la figura 5.16. El carácter regresivo de la onda resulta evidente al observar que, por un lado, la mayor densidad de energía en la región cercana a la superficie está en el metamaterial

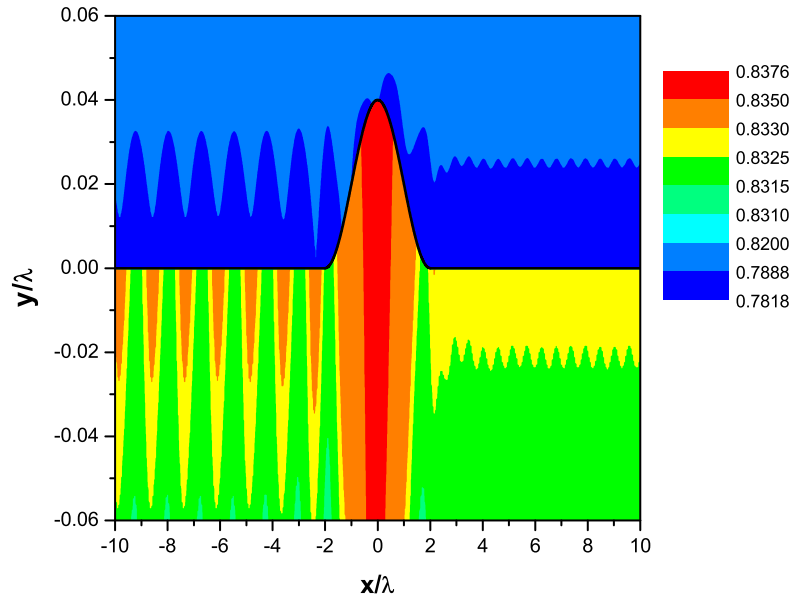


Figura 5.14: Mapa del módulo del vector de Poynting obtenido para el caso de la figura 5.12 cuando  $\theta_0 = 30^\circ$ .

y se dirige hacia los  $x$  negativos, disminuyendo a medida que se aleja de la superficie y, por el otro, al verificar que la menor periodicidad ( $\Lambda^-$ ) de las ondas resultantes aparece en el lado derecho de la zona corrugada y la mayor ( $\Lambda^+$ ) en el lado izquierdo.



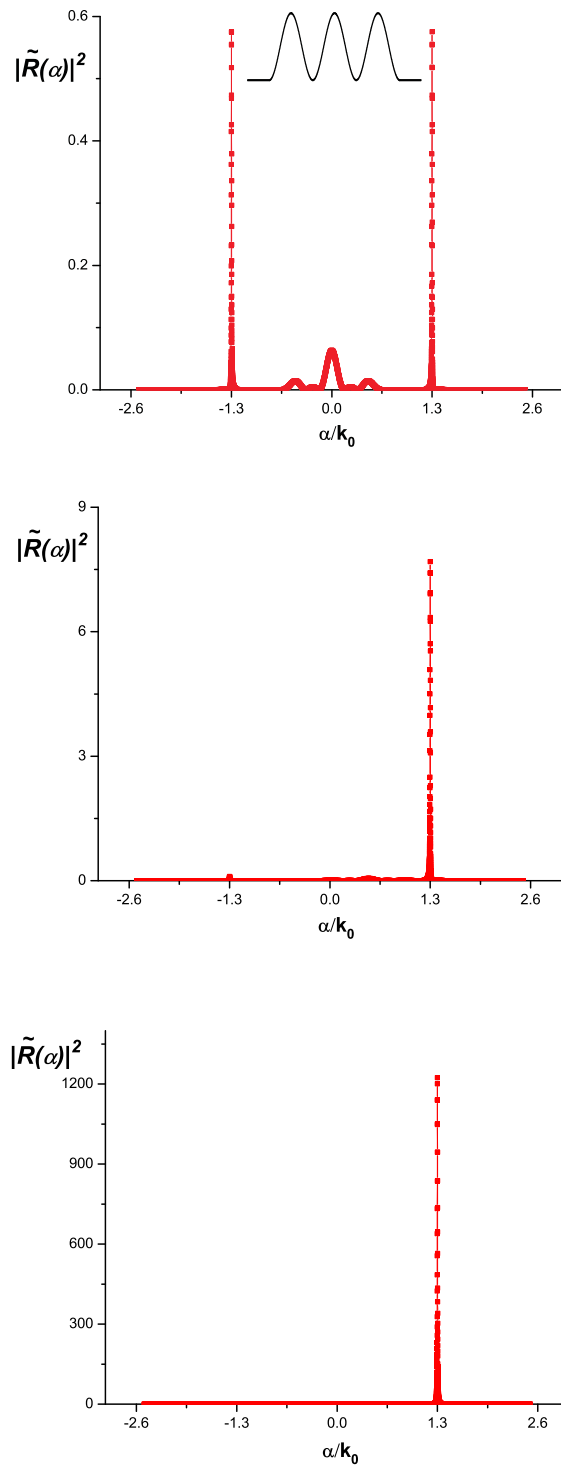


Figura 5.15: Curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas para tres protuberancias sinusoidales iluminada con  $\theta_0 = 0^\circ$  (arriba),  $\theta_0 = 30^\circ$  (medio) y  $\theta_0 = 52.18^\circ$  (abajo), polarizada en modo  $p$ . Los parámetros de la superficie son:  $\lambda/d = 0.5$ ,  $\lambda/a = 0.16667$  y  $h/d = 0.01$ .

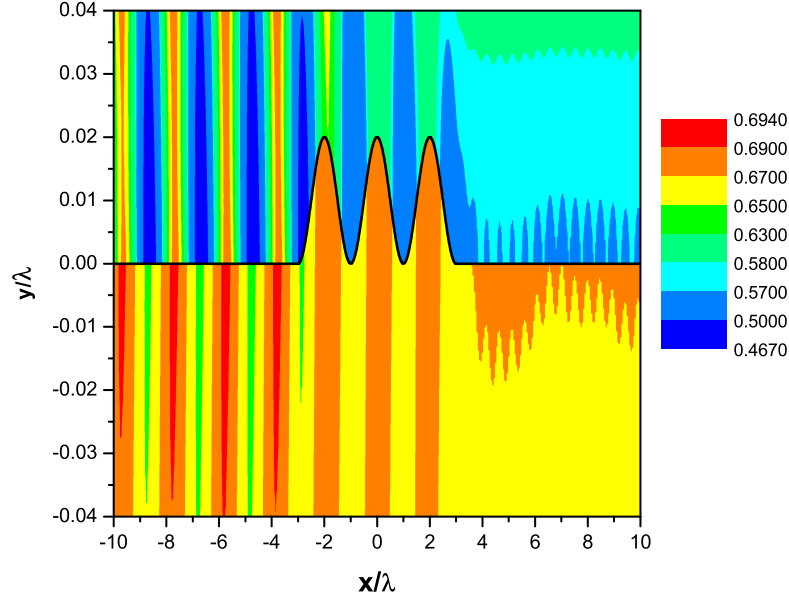


Figura 5.16: Mapa del módulo del vector de Poynting obtenido para el caso de la figura 5.15 cuando se incide con el ángulo de máximo acople,  $\theta_0 = 52.18^\circ$ .

Como último ejemplo de este capítulo, consideramos un metamaterial corrugado con 16 protuberancias asimétricas con parámetros  $\lambda/d = 0.9$ ,  $\lambda/a = 0.05625$  y  $h/d = 0.018$ . Los parámetros constitutivos de la superficie son  $\epsilon_2 = -0.8 + 0.001i$  y  $\mu_2 = -1.5 + 0.001i$ . Con estos datos, la ecuación (5.4) nos determina la constante característica en  $\alpha_{sp}/k_0 = \pm(1.2472 - 0.00355i)$  y la ecuación (5.7) el ángulo de acople en  $\theta_0 = 20.4^\circ$ . El gráfico de  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  se muestra en la figura 5.17 para este ángulo de incidencia. Nuevamente, se observan dos máximos con distintos valores ubicados aproximadamente en  $\alpha_{sp}/k_0 \approx \pm 1.25$  y, por lo tanto, dos ondas superficiales son excitadas con distinta intensidad. El máximo que se encuentra en  $\alpha_{sp}/k_0 \approx -1.25$  resulta apenas visible pues la onda máximamente acoplada es la que se dirige en la dirección de propagación  $+x$ . Si observamos las regiones cercanas a esta superficie (figuras 5.18 y 5.19) es evidente que la mayor densidad de energía está en el medio metamaterial, además de que se atenúa en la dirección del flujo neto de potencia ( $-x$ ), que en este caso es opuesto a la dirección de propagación,  $+x$ . En un entorno cercano a la zona corrugada las ondas adquieren la periodicidad de la

superficie (figura 5.18), a diferencia de lo que ocurre a los costados de la misma. La menor periodicidad aparece a la derecha de la zona corrugada y la mayor a la izquierda, propiedad característica de las ondas regresivas (figura 5.19).

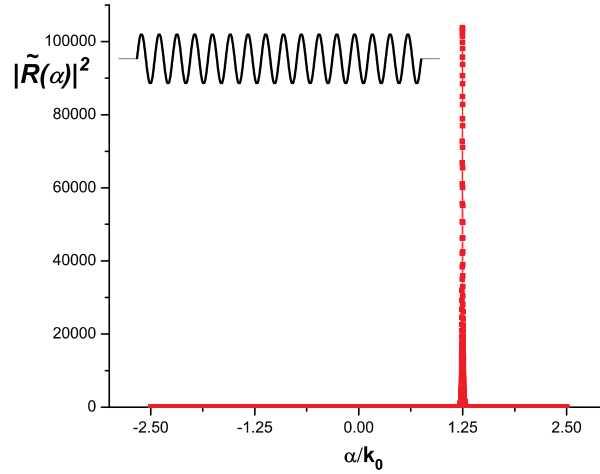


Figura 5.17:  $|\tilde{R}(\alpha)|^2$  vs  $\alpha/k_0$  obtenida para 16 protuberancias sinusoidales asimétricas iluminadas con  $\theta_0 = 20.4^\circ$  polarizada en modo  $p$ . Los parámetros de la superficie son:  $\lambda/d = 0.9$ ,  $\lambda/a = 0.05625$  y  $h/d = 0.018$ .

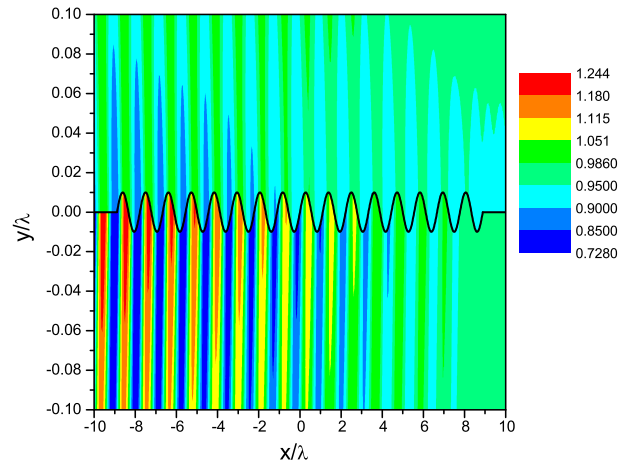


Figura 5.18: Mapa del módulo del vector de Poynting obtenido para 16 protuberancias asimétricas.

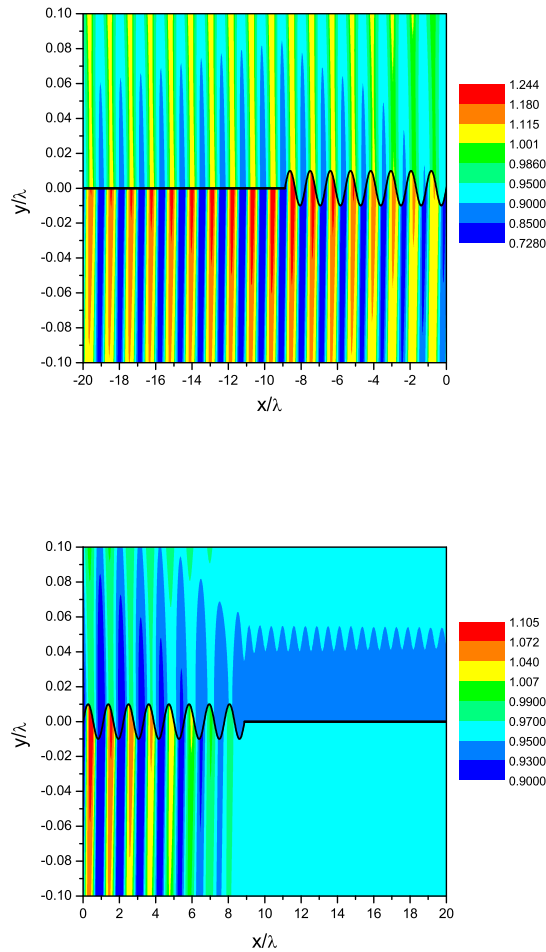


Figura 5.19: Ampliación de la figura 5.18. Izquierda: lado izquierdo de las protuberancias y derecha: lado derecho.

Los resultados mostrados en este capítulo ponen en evidencia que si bien el campo lejano no es un buen indicador del carácter progresivo o regresivo de las ondas superficiales excitadas en la superficie rugosa de un metamaterial, el campo cercano sí lo es, tal como se ha visto en los mapas de intensidad cerca de la superficie, que muestran características muy distintas cuando se excitan ondas superficiales progresivas o regresivas.



# Capítulo 6

## Superficies rugosas aleatorias

En este capítulo dejaremos de lado las superficies rugosas deterministas estudiadas en los capítulos anteriores para pasar a estudiar la respuesta óptica de superficies rugosas caracterizadas mediante de un proceso aleatorio. En particular, prestaremos atención al efecto conocido como intensificación de la retro-reflexión, conocido en la literatura inglesa por el nombre de *enhanced backscattering*, un efecto que para materiales convencionales y rugosidades de baja altura se sabe que está asociado con la excitación de ondas superficiales considerada en el capítulo 5. Este fenómeno será ejemplificado para metamateriales con parámetros constitutivos donde la excitación de ondas superficiales ocurre para las regiones A y B de la figura 5.1.

### 6.1. Localización débil y *enhanced backscattering*

El *enhanced backscattering* es un efecto de scattering múltiple y para materiales convencionales ha sido muy estudiado hacia finales del siglo XX [40–49]. Se manifiesta como un pico en la dirección de retroreflexión, muy bien definido sobre el fondo difuso. Alrededor de 1980, se comenzó a incorporar el scattering múltiple en las teorías de dispersión de luz sobre superficies aleatorias pues se reconoció que llevaba a una variedad de efectos nuevos que no tenían su equivalente cuando sólo se consideraba el scattering simple. La primera vez que se observó un pico bien definido en la dirección de retroreflexión fue en 1985 [40] cuando se estudiaba el scattering de ondas polarizadas en modo  $p$  sobre una superficie metálica, aleatoria y rugosa unidimensional. El origen de este fenómeno se vinculó con la interacción coherente de las ondas superficiales, soportadas por la interfase vacío-metal,

con sus “compañeros recíprocos”. En la figura 6.1 se ilustra el proceso de interacción entre la luz, las ondas superficiales y la rugosidad. En este caso, la luz y las ondas interactúan con la rugosidad en los mismos puntos de la superficie pero en sentido contrario. Las ondas resultantes de dicha dispersión recíproca tienen la misma amplitud y fase cuando los vectores de onda de las ondas dispersadas e incidente están en direcciones opuestas. Por lo tanto, estas ondas resultantes interfieren constructivamente. La primera observación experimental de este efecto fue en 1987 [41, 110] para superficies que no soportaban ondas superficiales y eran mucho más rugosas que las que se habían supuesto en la referencia [40]. Por este motivo, se concluyó que la formación del pico de retroreflexión en superficies muy rugosas no requiere de la existencia de ondas superficiales y puede ser interpretada como lo ilustra la figura 6.2. En este caso, la dispersión múltiple de la luz se produce por el hecho de que la superficie tiene gran amplitud y pendiente y las ondas intermedias que viajan de un lado a otro no son necesariamente ondas superficiales. En los ejemplos que mostramos en este capítulo todas las superficies soportan ondas superficiales.

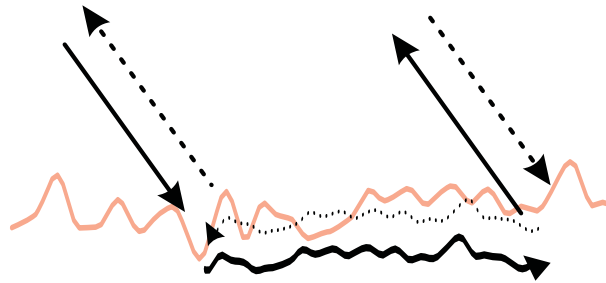


Figura 6.1: Ilustración del mecanismo necesario para lograr el *enhanced backscattering* en una superficie levemente rugosa que soporta ondas superficiales. La excitación de estas ondas es esencial para que aparezca el pico.

La principal razón para el interés en estos fenómenos es fundamental en la naturaleza. En particular, el *enhanced backscattering* es un ejemplo de una clase más amplia de fenómenos de dispersión múltiple llamada *localización débil*. Este nombre se originó con los primeros estudios de conducción eléctrica de materiales impuros desordenados. Los electrones, que representan paquetes cuánticos de ondas, son sometidos a la dispersión múltiple debido a las impurezas aleatoriamente distribuidas de estos materiales. La interferencia coherente de las ondas conduce a una mayor probabilidad de que el electrón vuelva a su origen, es decir, a una mayor retrodispersión del electrón [20, 21]. El aumento en la probabilidad de retornar a su origen, reduce su constante de difusión y consecuentemente,

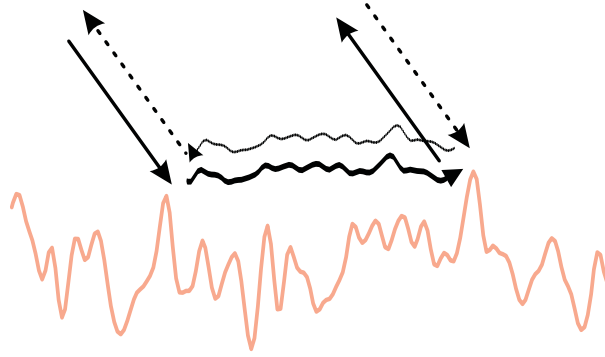


Figura 6.2: Ilustración de la secuencia de doble scattering y su “compañero” recíproco que contribuyen al *enhanced backscattering* en una superficie muy rugosa.

reduce la conductividad eléctrica del material desordenado. Este conjunto de efectos es lo que se llama *localización débil* [111]. Hoy en día se sabe que la localización débil es una propiedad general de todo tipo de ondas que se propagan en medios aleatorios, incluyendo ondas clásicas como las electromagnéticas, elásticas y acústicas [22]. También se reconoce que el medio desordenado no tiene que ser necesariamente un volumen; una superficie rugosa aleatoria también puede dar lugar a los efectos de localización débil.

La distribución de potencia dispersada de una superficie rugosa aleatoria sigue un patrón de “speckle” [27]. Por lo tanto, para poder observar el pico de retroreflexión es esencial que se promedie esta distribución sobre un conjunto de realizaciones de la superficie. A diferencia de muchos picos que desaparecen después de tomar el promedio, el pico en la dirección de retroreflexión sigue estando.

## 6.2. Descripción estadística

A continuación enunciamos las propiedades estadísticas que poseen las superficies rugosas empleadas, en las cuales la forma de la rugosidad no viene dada de manera determinista sino a través de propiedades estadísticas de un conjunto de rugosidades. De esta manera, las magnitudes físicas asociadas a la respuesta óptica de la superficie también quedan descritas estadísticamente, a través de los distintos momentos de una distribución cuyas propiedades se desea obtener. Supondremos que la función  $g(x)$  está caracterizada mediante un proceso estocástico, gaussiano, estacionario, con las siguientes propiedades

$$\langle g(x) \rangle = 0 \quad (6.1)$$



y

$$\langle g(x)g(x') \rangle = h^2 W(|x - x'|), \quad (6.2)$$

donde  $\langle \rangle$  significa el promedio sobre el conjunto de realizaciones de la superficie,

$$h^2 = \langle g^2(x) \rangle$$

es la altura cuadrática media que hay desde el plano a la superficie y

$$W(|x|) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

es la función de correlación que suponemos con forma gaussiana. La longitud característica  $\sigma$  se conoce como *longitud de correlación transversal* y es una buena aproximación a la distancia media entre picos y valles de la superficie.

Para generar numéricamente superficies aleatorias con estas propiedades utilizamos un algoritmo similar al propuesto por Maradudin y otros en [42].

Los parámetros geométricos y de incidencia utilizados para generar las superficies de todos los ejemplos que mostramos a continuación son  $h/\sigma = 0.025$  y  $\lambda/a = 0.04445$ . La conservación de la energía (2.45) se verifica para cada una de las realizaciones de las superficies con tres cifras significativas.

### 6.3. Resultados Región A

Para esta región hemos elegido  $\epsilon_2 = -0.21213$  y  $\mu_2 = -1.4142$  como parámetros constitutivos. En este caso las ondas superficiales se excitan en modo  $s$ . Se promediaron los resultados obtenidos para 3000 superficies cuando  $\theta_0 = 10^\circ$  y se obtuvieron los gráficos que se muestran en las figuras 6.3, 6.4 y 6.5. En la figura 6.3 mostramos las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|$  y  $|\tilde{T}(\alpha)|$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas para este ejemplo. La existencia de ondas superficiales se refleja en el hecho que aparecen dos picos bien marcados ubicados en el valor de la constante de propagación que se obtiene reemplazando los parámetros constitutivos en la ecuación (5.4) y da  $\text{Re}(\alpha_{sp}/k_0) \approx \pm 1.3$ . En estos gráficos no se observan los picos de retrodispersión pues la zona radiativa no resulta visible por la gran contribución de la región no radiativa debido a la existencia de ondas superficiales. Sin embargo, el efecto de localización débil del cual estamos interesados, *enhanced backscattering*, sí resulta visible si graficamos las distribuciones angulares de potencia dispersada en ambos medios, o sea,

si graficamos sólo la zona radiativa. La distribución angular de potencia dispersada en el medio 1 está ilustrada en la figura 6.4 y se distinguen cuatro picos. La posición de los mismos se ve claramente en la figura de la derecha que es una ampliación de la de la izquierda. Dos de ellos aparecen ubicados en  $\theta_{s1} = \pm 10^\circ$ , o sea, uno en la dirección de reflexión especular ( $\theta_{s1} = 10^\circ$ ) y el otro en la dirección de retroreflexión ( $\theta_{s1} = -10^\circ$ ). Los otros dos picos aparecen ubicados, aproximadamente, en el ángulo de reflexión total,  $\theta_{s1} \approx \pm 33.21^\circ$ . Estos se deben a la aparición de las llamadas ondas laterales justamente en este mismo ángulo. Ishimaru hace referencia a estas ondas en [74].

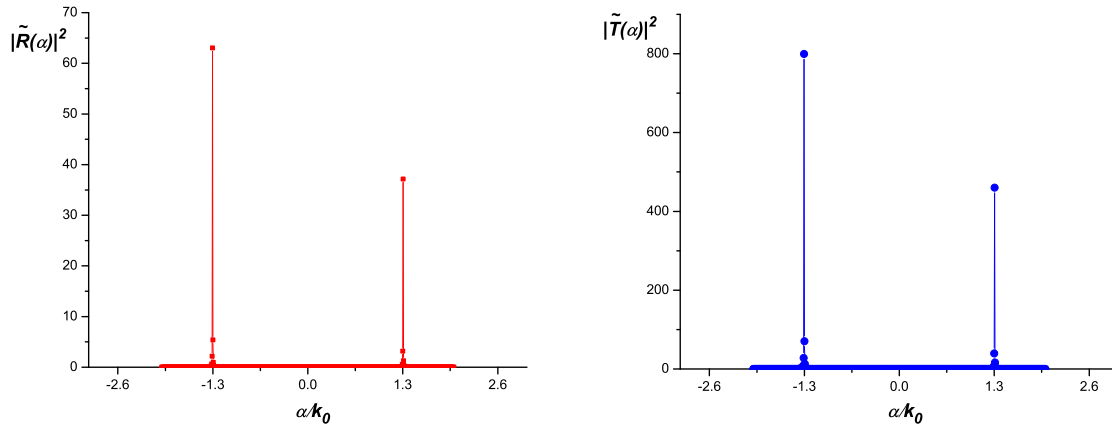


Figura 6.3: Izquierda:  $|\tilde{R}(\alpha)|$  vs  $\alpha/k_0$ . Derecha:  $|\tilde{T}(\alpha)|$  vs  $\alpha/k_0$ . Los parámetros de las superficies aleatorias son  $h/\sigma = 0.025$ ,  $\lambda/a = 0.04445$ . La onda incide con  $\theta_0 = 10^\circ$  polarizada en modo  $s$ .

La distribución de potencia dispersada en el medio 2 está graficada en la figura 6.5. En este caso, se observan claramente dos picos que sobresalen del gráfico, uno ubicado en la dirección de transmisión especular  $\theta_{s2} \approx -18.5^\circ$ , ( $\sin \theta_{s2} \approx \sin \theta_0/\nu_2 \approx -0.317$ ) y el otro en la dirección de retrotransmisión en  $\theta_{s2} \approx 18.5^\circ$ . Nuevamente, el gráfico de la derecha es una ampliación del de la izquierda.

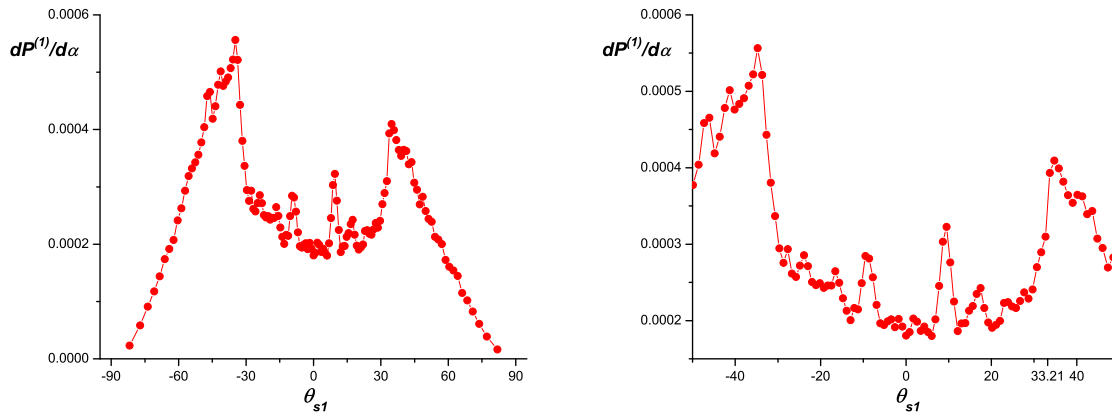


Figura 6.4: Distribución de potencia dispersada en el medio 1. Las superficies generadas y los parámetros de incidencia son los mismos que en la figura 6.3.

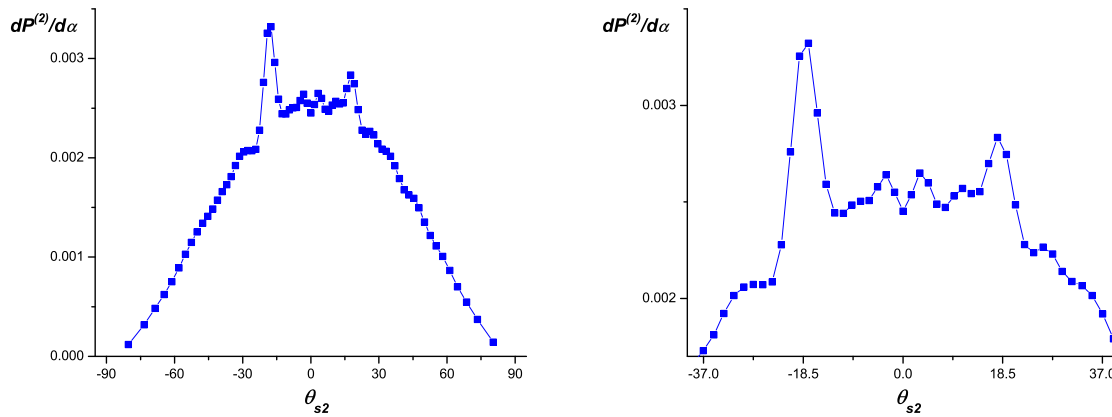


Figura 6.5: Distribución de potencia dispersada en el medio 2. Las superficies generadas y los parámetros de incidencia son los mismos que en la figura 6.3.

## 6.4. Resultados Región B

Para esta región elegimos los parámetros constitutivos  $\epsilon_2 = -0.9487$  y  $\mu_2 = -1.5811$ . La onda plana incide con  $\theta_0 = 20^\circ$ , polarizada en modo  $p$ . Los resultados obtenidos para 2000 superficies están graficados en las figuras 6.6, 6.7 y 6.8. En la figura 6.6 mostramos las curvas de  $|\tilde{R}(\alpha)|$  y  $|\tilde{T}(\alpha)|$  vs  $\alpha/k_0$  obtenidas para este ejemplo. En este caso, la excitación de ondas superficiales se confirma por la posición de los dos picos bien marcados en

$\text{Re}(\alpha_{sp}/k_0) \approx \pm 2.45$ , valor que se obtiene al reemplazar los datos en la ecuación (5.4). Debido a la excitación de ondas superficiales se observan dos picos que sobresalen ubicados en  $\theta_{s1} = \pm 20^\circ$  en el gráfico de distribución dispersada en el medio 1, tal como muestra la figura 6.7. Uno en la dirección de reflexión especular  $\theta_{s1} = 20^\circ$  y el otro en la de retroreflexión  $\theta_{s1} = -20^\circ$ . En este caso, como el índice de refracción del metamaterial es mayor a 1, no hay ángulo de reflexión total y los picos debido a las ondas laterales no aparecen en esta figura. Sin embargo, estas ondas aparecen en los campos transmitidos. En este caso, la distribución de potencia dispersada en el medio 2 ilustra claramente la presencia de los cuatro picos (figuras 6.8 y 6.9). Dos de ellos ubicados en  $\theta_{s2} = \pm 16.22^\circ$  correspondientes a las direcciones de transmisión especular y de retrotransmisión, y los otros dos en  $\theta_{s2} \approx \pm 54.74^\circ$ . Los picos ubicados en  $\theta_{s2} \approx \pm 54.74^\circ$  se deben, efectivamente, a las ondas laterales. Este ángulo verifica que  $\sin \theta_{s2} = \sin(\lambda/\nu_2) \approx \sin 0.8165$  y, por lo tanto, es el ángulo de reflexión total si se incidiera desde el metamaterial.

Cuando se incide con un ángulo distinto a  $\theta_0 = 20^\circ$  se observa que los picos que aparecen debido a la excitación de ondas superficiales y los que se ubican en la dirección de reflexión y transmisión especular dependen del ángulo incidente, tal cual se muestra en la distribución de potencia reflejada (arriba) y transmitida (abajo) en la figura 6.10 cuando se incide con  $\theta_0 = 30^\circ$ . Sin embargo, los picos debidos a la aparición de las ondas laterales no dependen del  $\theta_0$  y por lo tanto no cambian su ubicación. Sólo dependen del índice de refracción del medio 2, que es el que determina el ángulo de reflexión total.

Para los ejemplos mostrados, hemos comprobado que cuando no se pueden excitar ondas superficiales, los picos de retroreflexión y retrotransmisión no se ven. Por un lado, si la onda plana incide en modo  $p$  para la región A y en modo  $s$  para la región B manteniendo todas las demás condiciones de incidencia iguales. Y, por el otro, si se mantiene la polarización incidente y se cambian los signos de  $\epsilon_2$  y  $\mu_2$ , es decir, si se cambia el signo del índice de refracción.

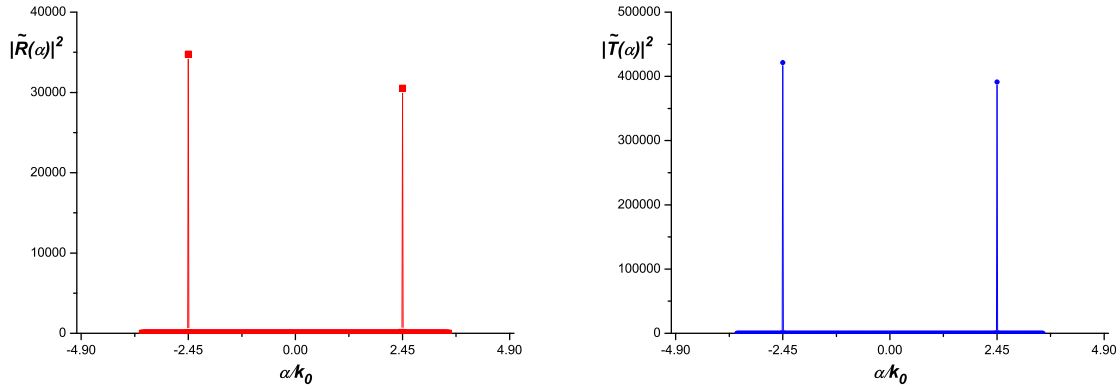


Figura 6.6: Izquierda:  $|\tilde{R}(\alpha)|$  vs  $\alpha/k_0$ . Derecha:  $|\tilde{T}(\alpha)|$  vs  $\alpha/k_0$ . Los parámetros geométricos de las superficies aleatorias son  $h/\sigma = 0.025$ ,  $\lambda/a = 0.04445$ . La onda incide con  $\theta_0 = 20^\circ$  polarizada en modo  $p$ .

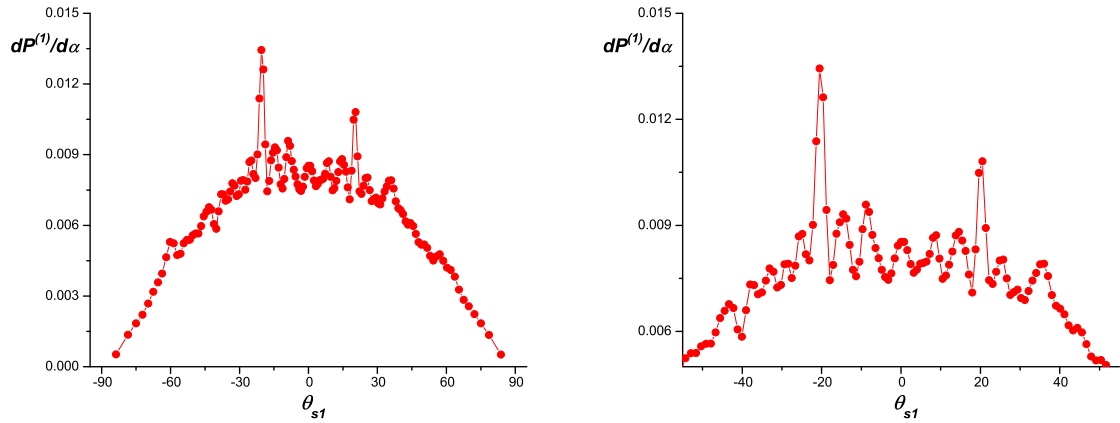


Figura 6.7: Distribución de potencia dispersada en el medio 1. Las superficies generadas y los parámetros de incidencia son los mismos que en la figura 6.6.

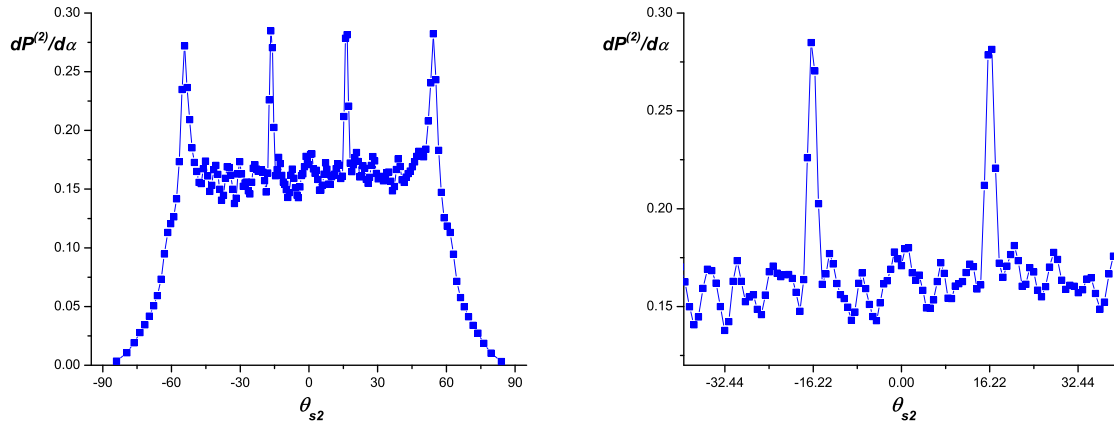


Figura 6.8: Distribución de potencia dispersada en el medio 2. Las superficies generadas y los parámetros de incidencia son los mismos que en la figura 6.6.

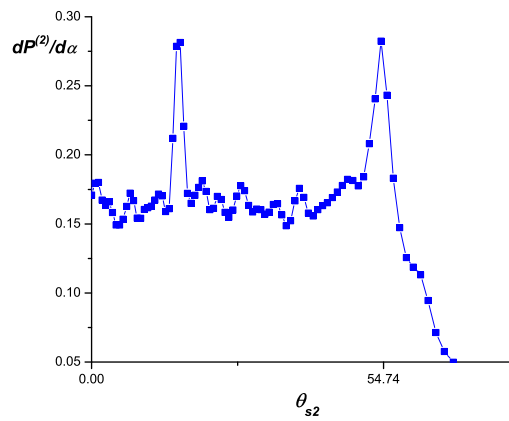


Figura 6.9: Ampliación de la figura 6.8 izquierda.

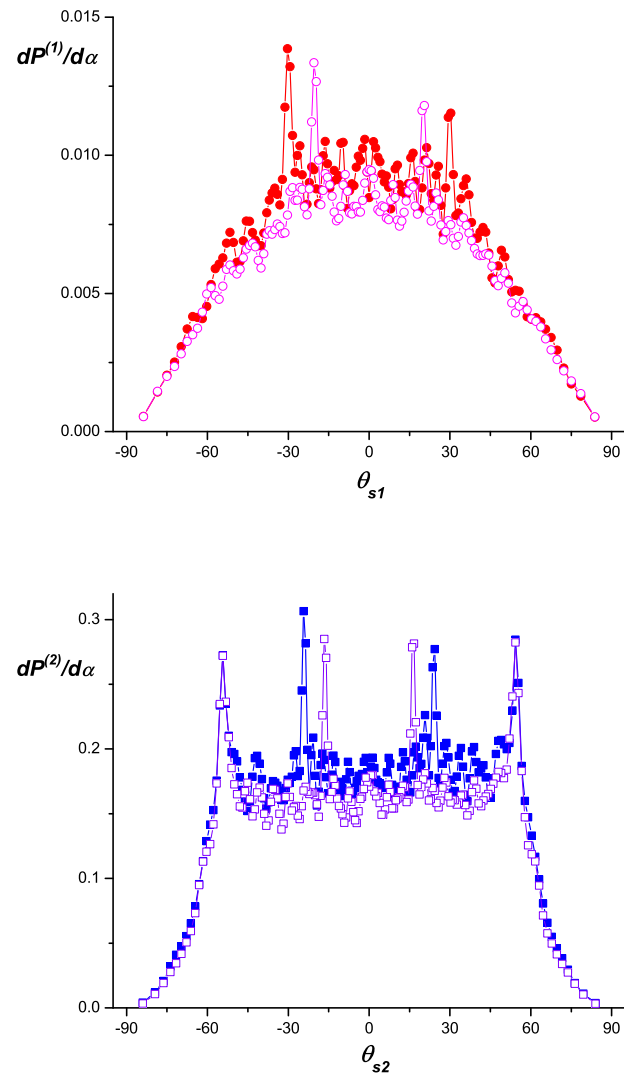


Figura 6.10: Arriba: Distribución de potencia dispersada en el medio 1. Abajo: Distribución de potencia dispersada en el medio 2. Los parámetros de las superficies generadas son los de la figura 6.7, con  $\theta_0 = 20^\circ$  y  $\theta_0 = 30^\circ$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis se han explorado diversos fenómenos que ocurren en la superficie rugosa no periódica de materiales isótropos con valores arbitrarios de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica cuando la superficie es iluminada por una onda electromagnética plana. Los formalismos desarrollados en este trabajo son generalizaciones de dos formalismos teóricos previos, basados en la hipótesis de Rayleigh y válidos solamente para materiales convencionales no magnéticos: un formalismo perturbativo en la altura de la rugosidad y otro formalismo no perturbativo y esencialmente numérico (Capítulo 2). Con el objeto de emplear los nuevos formalismos para encarar problemas motivados por la reciente aparición de metamateriales con índice de refracción negativo, en el capítulo 3 se ha mostrado que, a pesar de requerir tratamientos numéricos muy distintos, ambos formalismos dan resultados coincidentes para rugosidades con pequeñas alturas y que dichos resultados están de acuerdo con las predicciones de la óptica física. Con el fin de controlar la calidad de los resultados provistos por los métodos empleados se han propuesto diversos controles numéricos y físicos.

Los métodos presentados en esta tesis han permitido investigar, por primera vez en la literatura, la respuesta óptica de metamateriales con rugosidades localizadas. En el capítulo 4 se ha considerado el caso de superficies quasi-planas con una protuberancia localizada y se han estudiado los cambios producidos en las propiedades dispersoras de la superficie cuando sólo se cambia el signo del índice de refracción relativo. Se ha comprobado que cuando la dirección de observación está cerca de la dirección especular, la distribución angular de potencia reflejada correspondiente a una rugosidad de baja altura es poco sensible al intercambio entre medios PPV - NPV y que la sensibilidad a este



intercambio aumenta cuando se incrementa la altura de la rugosidad. En cambio, cuando la dirección de observación está alejada de la dirección especular, la distribución angular de potencia reflejada resulta sensible al intercambio PPV - NPV aún para rugosidades muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente.

A continuación se ha considerado el caso en que la superficie de separación entre el vacío y el metamaterial soporta ondas superficiales. En particular se ha visto que para rugosidades localmente periódicas, las características de las ondas superficiales tienden a las de la red de difracción infinita a medida que aumenta el número de rugosidades mientras se mantiene constante la distancia entre ellas. Desde el punto de vista metodológico, estos resultados son especialmente interesantes ya que muestran que los métodos desarrollados en la tesis son confiables para tratar situaciones donde se excita una onda superficial, una característica que otros métodos a veces no satisfacen debido a problemas relacionados con la singularidad de la respuesta asociada con los problemas resonantes. Desde el punto de vista físico, los resultados obtenidos también revisten importancia ya que muestran que mediante observaciones de campo cercano es posible revelar de manera sencilla el carácter progresivo o regresivo de las ondas superficiales excitadas, una característica que no resulta fácil de revelar a través de observaciones de campo lejano.

Como ejemplo de aplicación de la teoría al caso de superficies con rugosidades descritas de manera estadística y sin ánimo de ser exhaustivos, en el capítulo 6 se ha mostrado que en la superficie de un metamaterial con baja rugosidad también se puede producir una intensificación del pico de retroreflexión y que este pico, tal como sucede para materiales convencionales, está asociado con la localización débil de ondas superficiales. Además se ha observado la aparición de picos correspondientes a las ondas laterales y la aparición de una intensificación del pico de retrotransmisión, una situación completamente novedosa e imposible de lograr con materiales transparentes convencionales.

Los resultados obtenidos en esta tesis parecen indicar que los métodos generalizados proporcionan una herramienta útil y eficaz para el estudio sistemático de fenómenos físicos asociados con los nuevos materiales artificiales y que tienen lugar en superficies con rugosidades no muy profundas. Sería deseable poder ampliar el rango de aplicación al caso de alturas comparables a la distancia media entre rugosidades, un objetivo que aparentemente podría lograrse si se tienen en cuenta los sorprendentes resultados demostrados recientemente por Tishchenko [64, 65].

# Bibliografía

- [1] Focus Issue on Negative Refraction and Metamaterials, edited by J. Pendry. *Opt. Express* 11, 639-760 (2003).
- [2] Special Issue on Metamaterial Structures, Phenomena and Applications, edited by T. Itoh and A. A. Oliner, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 53, 1418-1556 (2005).
- [3] Focus Issue on Metamaterials, edited by V. M. Shalaev and A. Boardman. *J. Opt. Soc. Am. B* 23, 386-387 (2006).
- [4] R. Marqués, F. Martín and M. Sorolla, “Metamaterials with Negative Parameters: Theory, Design and Microwave Applications”, Wiley, 2008.
- [5] A. Sihvola, “Metamaterials in electromagnetics”, *Metamaterials* 1, 2-11 (2007)
- [6] L. Solymar and E. Shamonina, “Waves In Metamaterials”, Oxford University Press, New York, 2009.
- [7] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, “Experimental verification of a negative index of refraction”, *Science* 292, 77-79 (2001).
- [8] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, “Experimental verification of a negative index of refraction”, *Science*, vol. 292, 77-79 (2001).
- [9] M. Garcia, and M. Nieto-Vesperinas. “Is there an experimental verification of a negative index of refraction yet?,” *Optics Lett.* 27, 885-887 (2002).
- [10] A. Houck et al., “Experimental Observations of a Left-Handed Material That Obeys Snell’s Law”, *Phys. Rev. Lett.* 90, 137401 (2003).
- [11] C. Parazzoli et al., “Experimental Verification and Simulation of Negative Index of Refraction Using Snell’s Law”, *Phys. Rev. Lett.* 90, 107401 (2003).

- [12] G. Dolling, M. Wegener, C. M. Soukoulis, and S. Linden, “Negative-index metamaterial at 780 nm wavelength,” *Opt. Lett.* 32, 53 (2007).
- [13] I. Tsukerman, “Negative refraction and the minimum lattice cell size,” *J. Opt. Soc. Am. B* 25, 927 (2008).
- [14] “Breakthrough of the year: the runners-up”, *Science* 302, 2039-2045 (2003).
- [15] J. C. Curlander and R. N. McDonough, “Synthetic Aperture Radar: Systems and Processing” John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [16] F. T. Ulaby, A. K. Moore and A. K. Fung, “Microwave Remote Sensing, Active and Passive”, Vols. 1, 2 y 3. Artech House, Norwood, Mass, USA, 1986.
- [17] D. J. Whitehouse, *Topics in Applied Physics* 77, 413 (2000).
- [18] “Handbook of microscopy for nanotechnology”, edited by N. Yao and Z. L. Wang, Kluwer, Academic Publishers, Boston, 2005.
- [19] P. W. Anderson, “Absence of diffusion in certain random lattices”, *Phys. Rev. B* 109, 1492–1505 (1958).
- [20] G. Bergmann, “Physical interpretation of weak localization: a time-of-flight experiment with conduction electrons”, *Phys. Rev. B* 28, 2914-2910 (1983).
- [21] D. E. Khmel'nitskii, “Localization and coherent scattering of electrons”, *Physica* 126, 235-241 (1984).
- [22] P. Sheng, “Introduction to wave scattering, localization, and mesoscopic phenomena”, Academic Press, San Diego, 1995.
- [23] A. Lagendijk, B. van Tiggelen and D. S. Wiersma, “Fifty years of Anderson localization”, *Physics Today* (2009).
- [24] S. John, “Localization of Light”, *Physics Today* (1991).
- [25] D. Maystre G. Tayeb and D. Felbacq, “Microcavities and Photonic Band Gaps: Physics and Applications”, edited by J. G. Rarity and C. Weisbuch, Kluwer Academic Publishers, 1996.

- [26] J. W. Goodman, "Speckle Phenomena in Optics", Roberts and Company Publishers, 2007.
- [27] J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw-Hill, New York, 1968.
- [28] P. Beckman and A. Spizzichino, "The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces", Pergamon Press Ltd., Oxford, 1963.
- [29] J. A. Ogilvy, "Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces", Adam Hilger, Bristol, 1991.
- [30] "Scattering in Volumes and Surfaces", edited by M. Nieto-Vesperinas and J. C. Dainty, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [31] M. Nieto-Vesperinas, "Scattering and Diffraction in Physical Optics", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [32] Waves in Random Media 1, special issue on Diffraction in Surface and Volume, (1991).
- [33] Waves in Random Media 7, special issue on Wave Scattering from Rough Surfaces and Related Phenomena (Part I), 3 (1997).
- [34] Waves in Random Media 8, special issue on Wave Scattering from Rough Surfaces and Related Phenomena (Part II), 1 (1998).
- [35] "Modern Analysis of Scattering Phenomena", edited by J. C. Dainty and D. Maystre, Adam Hilger, Bristol, 1991.
- [36] Lord Rayleigh, "On the dynamical theory of gratings", Proc. R. Soc. Lond, Ser. A, 79, 399-416 (1907).
- [37] "Electromagnetic Theory of Gratings", edited by R. Petit, Springer, Berlin, 1980.
- [38] D. Maystre, "Progress in Optics", edited by E. Wolf, North Holland Publishing Company, Vol. 21, Cap. 1., 1984.
- [39] "Diffraction Gratings", SPIE Milestones series, edited by D. Maystre, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Washington, USA, 1993.

- [40] A. R. McGurn, A. A. Maradudin, and V. Celli, “Localization effects in the scattering of light from randomly rough grating”, *Phys. Rev. B* 31, N°8, 4866-4871 (1985).
- [41] E. R. Méndez, and K. A. O’Donnell, “Observation of depolarization and backscattering enhancement in light scattering from Gaussian random surfaces”, *Opt. Commun.* 61, 91-95 (1987).
- [42] A. A. Maradudin, T. Michel, A. R. McGurn, and E. R. Méndez, “Enhanced backscattering of light from a random grating”, *Annals of Physics* 203, 255-307 (1990).
- [43] R. A. Depine, “Antispecular enhancement in s and p polarized electromagnetic waves scattered from random gratings”, *Opt. Lett.* 16, 1457-1459 (1991).
- [44] R. A. Depine, “Backscattering enhancement of light and multiple scattering of surface waves at a randomly varying impedance plane”, *J. Opt. Soc. Am. A* 9, 609-618 (1992).
- [45] R. A. Depine, “Rigorous formulation of scattering at a randomly varying impedance plane: general case of oblique incidence”, *IEEE Trans. on Antennas and Prop.* 41, 12-19 (1993).
- [46] M. Saillard, “Numerical evidence of Anderson localization for electromagnetic surface waves”, *Opt. Commun.* 96, 1-7 (1993).
- [47] D. Maystre and M. Saillard, “Localization of light by random rough surfaces: concept of localiton”, *J. Opt. Soc. Am. A* 11, 680-690 (1994).
- [48] H. Ogura and Z. L. Wang, “Surface-plasmon mode on a random rough metal surface: enhanced backscattering and localization”, *Phys. Rev. B* 53, 10358–10371 (1996).
- [49] H. Ogura, Z. L. Wang, Y. Sasakura, and V. Freilikher, “Localization of surface plasmon waves on the surface of a random rough metallic grating with a narrow-band spectrum”, *Opt. Commun.* 134, 1-6 (1997).
- [50] H. Ogura, Z. L. Wang, and Y. Sasakura, “Localization of surface plasmon waves on the surface of a random rough metallic grating”, *J. Opt. Soc. Am. A* 15, 1886-1890 (1998).
- [51] K. A. O’Donnell, “Small-amplitude Perturbation theory for One-dimensionally Rough surfaces”, in *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness*, A.A.

- Maradudin, Editor, Nanostructure Science and Technology, National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada, 5, 107-126, 2007.
- [52] K. A. O'Donnell, "High-order perturbation theory for light scattering from a rough metal surface", *JOSA A*, 18, 7, 1507-1518 (2001).
- [53] G. Berginc, "Small-amplitude Perturbation theory for Two-dimensionally Rough surfaces", in *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness*, A.A. Maradudin, Editor, Nanostructure Science and Technology, National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada, 6, 107-126, 2007.
- [54] A. Soubret, G. Berginc, and C. Courrely, "Backscattering enhancement of an electromagnetic wave scattered by two-dimensional rough layers", *JOSA A* 18, 2778-2788 (2001).
- [55] A. R. McGurn and A. A. Maradudin, "Perturbation theory results for the diffuse scattering of light from two-dimensional randomly rough metal surfaces", *Waves in Random Media*, 6, 251-267 (1996).
- [56] A. G. Voronovich, "Rayleigh Hypothesis", in *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness*, A.A. Maradudin, Editor, Nanostructure Science and Technology, National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada, 4, 107-126, 2007.
- [57] A. Madrazo and A. A. Maradudin, "Numerical solutions of the reduced Rayleigh equation for the scattering of electromagnetic waves from rough dielectric films on perfectly conducting substrates", *Optics Communications* 134, 251-263 (1997).
- [58] A. A. Maradudin, "Iterative solutions for electromagnetic scattering by gratings", *JOSA*, 73, 6, 759-764 (1983).
- [59] R. A. Depine and A. Lakhtakia, "Plane-wave diffraction at the periodically corrugated boundary of vacuum and a negative-phase-velocity material", *Phys. Rev. E* 69, 057602 (2004).
- [60] R. A. Depine and A. Lakhtakia, "Perturbative approach for diffraction due to a periodically corrugated boundary between vacuum and a negative phase-velocity material", *Opt. Commun.* 233, 277-282 (2004).

- [61] T. Elfouhaily and T. Hahn, “Rayleighs hypothesis and the geometrical optics limit”, *Phys. Rev. Lett.* 97, 120404 , (2006).
- [62] P. Prabasaj, “The Rayleigh hypothesis in scattering off photonic crystal interfaces”, *Optics Communications*, 278, 204-206 (2007).
- [63] J. Wauer and T. Rother, “Considerations to Rayleighs hypothesis”, *Optics Communications*, 282, 339-350 (2009).
- [64] A. V. Tishchenko, “Numerical demonstration of the validity of Rayleigh hypothesis”, *Optics Express*, 17, 17102-17117 (2009).
- [65] A. V. Tishchenko, “Rayleigh Was Right: Electromagnetic Fields and Corrugated Interfaces”, *Optics and Photonics News* 21(7), 50-54 (2010).
- [66] U. Leonhardt, “Optical Conformal Mapping”, *Science* 312, 1777-1780 (2006).
- [67] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling Electromagnetic Fields”, *Science* 312, 1780-1782 (2006).
- [68] J. B. Pendry, “Negative Refraction Makes a Perfect Lens”, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3966–3969 (2000).
- [69] C. Henkel and K. Joulain, “Casimir force between designed materials: What is possible and what not” *Europhys. Lett.* 72, 929–935 (2005),
- [70] T. Driscoll, D. N. Basov, W. J. Padilla, J. J. Mock and D. R. Smith, “Electromagnetic characterization of planar metamaterials by oblique angle spectroscopic measurements”, *Physical Review B* 75, 115114 (2007).
- [71] R. Ruppin, “Surface polaritons of a left-handed medium”, *Phys. Lett. A* 277, 61-64 (2000).
- [72] S. A. Darmanyan, M. Nevière, and A. A. Zakhidov, “Surface modes at the interface of conventional and left-handed media”, *Optics Communications* 225, 233-240 (2003).
- [73] I. Shadrivov, A. Sukhorukov, I. Kivshar, A. Zharov, A. Boardman, and P. Egan, “Nonlinear surface waves in left-handed materials”, *Phys. Rev. E* 69, 016617 (2004).

- [74] A. Ishimaru, J. R. Thomas, and S. Jaruwatanadilok, “Electromagnetic waves over half-space metamaterials of arbitrary permittivity and permeability”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* 53, 915-921 (2005).
- [75] M. Cuevas and R. A. Depine, “Excitation of surface plasmon polaritons along the sinusoidal boundary of a metamaterial”, *Phys. Rev. B* 78, 125412 (2008).
- [76] M. Cuevas and R. A. Depine, “Radiation characteristics of electromagnetic eigenmodes at the corrugated interface of a left handed material”, *Phys. Rev. Lett.* 103, 097401 (2009).
- [77] R. A. Depine and A. Lakhtakia, “Diffraction gratings of isotropic negative-phase velocity materials”, *Optik* 116, 31-43 (2005).
- [78] R. A. Depine, A. Lakhtakia, and D. R. Smith, “Enhanced diffraction by a rectangular grating made of a negative phase-velocity (or negative index) material”, *Physics Letters A* 337, 155-160 (2005).
- [79] W. L. Barnes, A. Dereux and T. W. Ebbesen, “Surface plasmon subwavelength optics”, *Nature Publishing Group (London)*, 824-830 (2003).
- [80] H. Raether, “Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings”. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [81] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ”, *Soviet Physics Uspekhi* 10, 509-514 (1968).
- [82] R. A. Depine and A. Lakhtakia, “A new condition to identify isotropic dielectric-magnetic materials displaying negative phase velocity”, *Microwave Opt. Technol. Lett.* 41, 315-316 (2004).
- [83] J.D. Jackson, “Electrodinámica Clásica. Segunda Edición”, John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [84] M. Born and E. Wolf, “Principles of Optics”, 6th. ed., Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [85] “Light scattering and Nanoscale Surface Roughness”, A.A. Maradudin, Editor, Nanostructure Science and Technology, National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada, 2007.



- [86] B. A. Lippmann, “Note on the Theory of Gratings,” *J. Opt. Soc. Am.* 43, 408-408 (1953).
- [87] L. Kazandjian, “Rayleigh methods applied to electromagnetic scattering from gratings in general homogeneous media”, *Phys. Rev. E* 54, 6802-6815 (1996).
- [88] J. B. Keller, “Singularities and Rayleigh’s hypothesis for diffraction gratings”, *J. Opt. Soc. Am. A* 17, 456-457 (2000).
- [89] T. Watanabe, Y. Choyal, K. Minami and V. L. Granatstein, “Range of validity of the Rayleigh hypothesis”, *Phys. Rev. E* 69, 056606 (2004).
- [90] R. A. Depine and A. Lakhtakia, “Diffraction by a grating made of an uniaxial dielectric-magnetic medium exhibiting negative refraction”, *New Journal of Physics* 7, 158 (2005).
- [91] F. Toigo, A. Marvin, V. Celli and N. R. Hill, “Optical properties of rough surfaces: general theory and the small roughness limit”, *Phys. Rev. B* 15, N°12, 5618-5626 (1977).
- [92] M. Lester and R.A. Depine, “Reflection of electromagnetic waves from index-matched surfaces”, *Optics Communications* 127, 189-192 (1996).
- [93] J.A. DeSanto, “Exact spectral formalism for rough-surface scattering”, *J. Opt. Soc. Am.* 2, 12, 2202-2206 (1985) .
- [94] E. Hecht and A. Zajac, “Optics”, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, U.S.A., 1974.
- [95] S.O. Rice, “Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces”, *Commun. Pure Appl. Math.* 4, 351-378 (1951).
- [96] D. Maystre, “Rigorous theory of light scattering from rough surface”, *J. Optics*, 15, 43-51 (1984).
- [97] J. Chandezon, D. Maystre and G. Raoult, “A new theoretical method for diffraction gratings and its numerical application”, *J. Opt. (Paris)* 11 235-241 (1980).

- [98] L. Li, J. Chandezon, G Granet and J. Plumey, “Rigorous and efficient grating-analysis method made easy for optical engineers”, *Appl. Opt.* 38, 304-313 (1999).
- [99] L. Li and J. Chandezon, “Improvement of the coordinate transformation method for surface-relief gratings with sharp edges”, *J. Opt. Soc. Am. A* 13, 2247-2255 (1996).
- [100] J. Chandezon, M Dupuis, G. Cornet and D. Maystre, “Multicoated gratings: a differential formalism applicable in the entire optical region”, *J. Opt. Soc. Am.* 72 839-846 (1982).
- [101] A. Lakhtakia, “Conjugation symmetry in linear electromagnetism in extension of materials with negative real permittivity and permeability scalars”, *Microwave Opt. Technol. Lett.* 40, 160-161 (2004).
- [102] R. Ruppin and J. Phys., “Surface polaritons and extinction properties of a left-handed material cylinder”, *Condens. Matter* 16, 5991-5998 (2004).
- [103] S. Ancey, Y. Décanini, A. Folacci, and P. Gabrielli, “Surface polaritons on left-handed cylinders: A complex angular momentum analysis”, *Phys. Rev. B* 72, 085458 (2005).
- [104] S. Ancey, Y. Décanini, A. Folacci, and P. Gabrielli, “Surface polaritons on left-handed spheres”, *Phys. Rev. B* 76, 195413 (2007).
- [105] R. Ruppin, “Extinction properties of a sphere with negative permittivity and permeability”, *Solid State Commun.* 116, 411-415 (2000).
- [106] R. A. Depine, M. E. Inchaussandague, and A. Lakhtakia, “Application of the differential method to uniaxial gratings with an infinite number of refraction channels: scalar case”, *Optics Communications* 258, 90-96 (2006).
- [107] A. D. Boardman, “Electromagnetic surface modes”, Wiley, New York, 1982.
- [108] R. Ruppin, “Surface polaritons of a left-handed material slab”, *J. Phys.: Condens. Matter*, Vol 13, n° 9, 1811-1818. (2001).
- [109] S.A.Maier, “Plasmonics: Fundamentals and Applications”, Springer, New York, 2007.

- [110] K. A. O'Donnell and E. R. Méndez, "Experimental study of scattering from characterized random surfaces", *J. Opt. Soc. Am. A* 4, 1194-1205 (1987).
- [111] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, "Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions", *Phys. Rev. Lett.* 42, 673-676 (1979).
- [112] B. Wang, L. Aigouy, E. Bourhis, J. Gierak, J.P. Hugonin and P. Lalanne. "Efficient generation of surface plasmon by single-nanoslit illumination under highly oblique incidence", *Applied Phys. Lett.* 94 (2009).
- [113] V. Grünhut and R. A. Depine, "Influencia del signo de refracción en la reflectividad de una superficie con una rugosidad localizada", *ANALES AFA* 21, 88-98 (2009).
- [114] V. Grünhut and R. A. Depine, "Influence of the sign of the refractive index in the reflectivity of a metamaterial surface with localized roughness", *Eur. Phys. J. D* 62 2, 227-236 (2011).