

Tesis Doctoral

Un estudio general del proceso de decoherencia cuántica

Fortin, Sebastián Ezequiel

2011

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Fortin, Sebastián Ezequiel. (2011). Un estudio general del proceso de decoherencia cuántica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Fortin, Sebastián Ezequiel. "Un estudio general del proceso de decoherencia cuántica". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2011.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

**UN ESTUDIO GENERAL DEL PROCESO DE
DECOHERENCIA CUANTICA**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área de Ciencias Físicas.

Sebastian Ezequiel Fortin

Director de Tesis: Dr. Mario Alberto Castagnino.

Consejero de Estudios: Dr. Fernando Lombardo.

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio I.A.F.E.

Buenos Aires, 2011

UN ESTUDIO GENERAL DEL PROCESO DE DECOHERENCIA CUANTICA

Resumen: En el presente trabajo se aborda un estudio general de la decoherencia cuántica, entendiendo por general que no se centra en el análisis de un modelo particular.

El estudio de la decoherencia ha adquirido, recientemente, una gran importancia en la computación cuántica, donde el fenómeno de la decoherencia representa un gran obstáculo para implementación de hardware para procesamiento de la información. Por otro lado, la decoherencia juega un papel esencial en el límite clásico y en la emergencia del comportamiento clásico en sistemas cuánticos. Por este motivo la comprensión del fenómeno de la decoherencia y el desarrollo de formalismos matemáticos para estudiarla son esenciales. De acuerdo con los trabajos de Zurek et al., la decoherencia es un proceso que resulta de la interacción entre un sistema cuántico abierto y su ambiente (EID). Este proceso determina cuál es la base privilegiada, que define los observables que adquieren características clásicas y pueden interpretarse como propiedades que obedecen a la lógica booleana. Recientemente Castagnino et al señalaron la conveniencia de tomar en cuenta tres aspectos de la teoría: (i) la posibilidad de estudiar la decoherencia de sistemas cerrados (sin ambiente), (ii) el criterio para determinar cuál es el subsistema que decohere, y (iii) el cálculo de la base privilegiada móvil. Por otro lado, en la bibliografía se encuentran otros enfoques para describir tanto la decoherencia como la relajación de los sistemas cuánticos. Tal es el caso de los trabajos de Castagnino et al., según el cual la relajación es un proceso que resulta de la elección de los observables que tienen relevancia física en un sistema cerrado (SID), y que define los observables que adquieren características clásicas y pueden interpretarse como propiedades que obedecen a la lógica booleana. La existencia de ambos enfoques aporta puntos de vista distintos acerca de los fenómenos físicos de la decoherencia y de la relajación. En esta tesis se presenta una perspectiva basada en valores medios, que cambia el foco de interés del operador de estado a los valores medios. Dicha perspectiva da lugar a un esquema general que unifica los enfoques anteriores de decoherencia y relajación, sobre el cual se espera seguir trabajando para la incorporación de otros enfoques. Esta perspectiva, además, permite reconsiderar los tres aspectos señalados anteriormente: (i) incorpora el estudio de sistemas sin ambiente, (ii) explicita el carácter relativo de la decoherencia respecto de la elección de los observables relevantes y permite definir al “mundo” clásico emergente como un conjunto de observables, y (iii) provee caracterizaciones alternativas del tiempo de decoherencia y de la base privilegiada móvil.

Por otro lado, se presentan aportes de naturaleza técnica sobre aspectos de la decoherencia, en particular se propone una técnica que permite calcular los tiempos de decoherencia y relajación a partir de la extensión analítica de funciones que dependen del Hamiltoniano.

Palabras clave: decoherencia, límite clásico, base privilegiada, relajación, tiempos característicos, evoluciones no unitarias

A GENERAL STUDY OF QUANTUM DECOHERENCE PROCESS

Abstract: The present work addresses a general study of quantum decoherence, where general is understood in the sense that it is not an analysis of a particular model.

Recently the study of quantum decoherence has acquired a great importance in quantum computing, where the phenomenon of decoherence is a major obstacle to the implementation of hardware for information processing. On the other hand, decoherence plays an essential role in the classical limit of quantum mechanics and in the emergence of classical behavior in quantum systems. For this reason, the understanding of the phenomenon of decoherence and the development of mathematical formalisms to study it are essential. According to the work of Zurek et al., decoherence is a process resulting from the interaction between an open quantum system and its environment (EID). This process determines the privileged basis, which defines the observables that will behave classically, and that can be interpreted as properties obeying Boolean logic.

Recently, Castagnino et al pointed out the convenience of taking into account three aspects of the theory: (i) the possibility of studying decoherence in closed systems (no environment), (ii) the criterion to determine the subsystem that decoheres, and (iii) the computation of the moving preferred basis. On the other hand, in the literature there are other approaches to describe both the decoherence and the relaxation of quantum systems. For example, in the works of Castagnino et al., relaxation is a process resulting from the selection of the physically relevant observables in a closed system (SID), which defines the classical observables that can be interpreted as Boolean properties. The existence of both approaches provides different views about the physical phenomena of decoherence and relaxation. This thesis presents a perspective based on expectation values, which shifts the focus from state operators to mean values. This perspective leads to a general framework that unifies the previous approaches to decoherence and relaxation. Moreover, this perspective allows us to reconsider the three aspects mentioned above: (i) it adds the study of systems without environment, (ii) it makes explicit the relative nature of decoherence with respect to the selection of the relevant observables, and makes possible to define the emergent classic world as a set of observables, and (iii) supplies alternative characterizations of the decoherence time and the privileged basis. On the other hand, the thesis introduces technical contributions about certain aspects of decoherence; in particular, it provides a method that allows us to compute the decoherence and the relaxation times on the basis of the analytic extension of functions depending on the Hamiltonian.

Keywords: decoherence, classical limit, preferred basis, relaxation, characteristic times, non-unitary evolution

Agradecimientos

No existen palabras que puedan expresar el sentimiento de gratitud que me invade al caer en la cuenta del tiempo y la paciencia invertidos por mi director, el Dr. Mario Castagnino, en ayudarme a realizar esta tesis. Quiero agradecerle muy especialmente, como así también a su hospitalaria y encantadora familia, por hacer posible que este trabajo haya sido desarrollado en tan ameno y placentero ambiente de trabajo. Fueron imprescindibles: su tiempo para responder mis dudas e inquietudes, la orientación en cuestiones físicas y matemáticas, y simplemente la existencia de su persona íntegra, que representa, en mi opinión, un modelo a seguir. Además, quiero agradecer a una persona que prefiere mantenerse en el anonimato, debido a razones personales, por su invaluable ayuda y tiempo. También quiero reconocer el apoyo del Instituto de Astronomía y Física del Espacio, donde desarrollé gran parte del trabajo aquí presentado, la instrucción recibida por parte de los miembros del grupo de investigación del Dr. Mario Castagnino, y al CONICET por financiarme. Por otro lado quiero agradecer a quienes me acompañaron y me apoyaron no sólo durante la realización de esta tesis, sino durante toda mi carrera: a mi padre Jorge Fortin, mi madre Dra. Ofelia Cortes y mi hermana Soledad por su apoyo económico y espiritual; a Nadia por su amor, al Dr. Federico Holik por las críticas y discusiones, al Dr. Belarmino por las correcciones, a Martincito (a quien quiero mucho); a mis amigos que acompañaron e hicieron ameno el largo camino; a Laura y Chechu por la terapia de grupo; y muy especialmente a Iván y Yamila cuyas existencias son un soplo de aliento en la eternidad.

*a Pato
cuac...*

Quien cree que todas las frutas maduran al mismo tiempo que las fresas nada sabe sobre las uvas.

PARACELSO.

Índice general

1. Introducción y objetivos	5
1.1. Reconstrucción del programa de la decoherencia	5
1.2. Objetivos de la tesis	6
2. Distintos enfoques para la decoherencia	9
2.1. Consideraciones previas	9
2.1.1. Los estados en mecánica cuántica	9
2.1.2. La decoherencia como origen del límite clásico	12
2.2. El enfoque ortodoxo de la decoherencia	15
2.2.1. La <i>base privilegiada móvil</i>	17
2.2.2. Otros aspectos de la decoherencia	17
2.3. El enfoque basado en valores medios	20
2.3.1. Irreversibilidad y decoherencia	21
2.3.2. La decoherencia de los observables	22
2.3.3. La relación entre decoherencia y relajación	23
2.3.4. Un esquema general de la decoherencia	25
2.3.5. El GTFD y EID	26
2.4. Conclusiones parciales	29
3. Un esquema unificador enfoques	31
3.1. La generalización de SID al caso discreto	31
3.1.1. El teorema de Riemann-Lebesgue y el caso discreto	32
3.1.2. Tres casos en el análogo discreto	32
3.1.3. Condiciones para la validez del análogo discreto	33
3.1.4. Un lema para la aplicación del análogo discreto	36
3.1.5. Una versión discreta de SID	38
3.2. Exportación de los métodos de SID a EID	39
3.2.1. El lema 1 en EID	40
3.3. Conclusiones parciales	42
4. Sobre el modelo de spines	43
4.1. Presentación del modelo a tratar	43
4.2. Aplicación del esquema general de la decoherencia	46
4.3. Caso (a): Observando la partícula S	46

4.4.	Caso (b): Observando una partícula del ambiente	50
4.5.	Caso (c): Observando varias partículas del ambiente	52
4.6.	Caso (d): Observando el sistema cerrado	54
4.7.	Conclusiones parciales	55
5.	Sobre el modelo de spines generalizado	57
5.1.	Presentación del modelo a tratar	57
5.2.	Aplicación del GTFD	63
5.3.	Caso (a): Observando el sistema A	65
5.3.1.	Simulaciones numéricas	69
5.4.	Caso (b): Observando una partícula del sistema A	71
5.5.	Conclusiones parciales	76
6.	Tiempo de decoherencia y base privilegiada	79
6.1.	Relaciones entre tiempos y bases	80
6.2.	La técnica polar: elementos matemáticos	82
6.2.1.	Continuaciones analíticas en el lenguaje de bra-ket	82
6.2.2.	Lenguaje de observables y estados	84
6.3.	Modelos particulares de decoherencia y relajación tratados mediante la técnica polar	85
6.3.1.	Modelo 1. Un polo y el término de Khalfin	85
6.3.2.	Modelo 2: Dos polos sin término de Khalfin	88
6.3.3.	Observaciones sobre los Modelos 1 y 2	89
6.4.	El caso general: N polos	90
6.5.	Conclusiones parciales	94
7.	Sobre el modelo de osciladores	95
7.1.	Presentación del modelo	95
7.2.	El cálculo del tiempo de decoherencia en base a los polos	97
7.2.1.	El modelo de Lee-Friedrich	97
7.2.2.	El tiempo de relajación	98
7.2.3.	Los otros polos del modelo de Lee-Friedrich	99
7.2.4.	Las condiciones iniciales	100
7.2.5.	La condición de macroscopicidad	101
7.2.6.	La amplitud de probabilidad	102
7.2.7.	Componentes no diagonales del estado	103
7.2.8.	El tiempo de decoherencia	104
7.3.	Conclusiones parciales	105
8.	Resumen, conclusiones y perspectivas	107
8.1.	Resumen y conclusiones	107
8.2.	Perspectivas de trabajo	109

9. Anexo	111
9.0.1. Caso (a.2): Ambiente homogéneo con interacción heterogénea.	111
9.0.2. Caso (a.3): Ambiente contaminado.	111
9.0.3. Caso (a.4): Ambiente inhomogéneo.	112

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Reconstrucción del programa de la decoherencia

Las características peculiares de la mecánica cuántica se deben principalmente al principio de superposición y su consecuencia, el fenómeno de interferencia. Por lo tanto, cualquier intento de explicar cómo lo clásico emerge del comportamiento cuántico debe incluir dos elementos: un proceso a través del cual la interferencia desaparece y una regla de superselección que elimina la superposición. La decoherencia es el proceso que cancela la interferencia y conduce a la regla que selecciona los candidatos a estados clásicos.

Históricamente, la decoherencia fue concebida en términos de la búsqueda de explicación acerca de cómo un estado coherente puro se convierte en una mezcla estable decoherente sin términos de interferencia. En otras palabras, la tarea consistía en explicar cómo el estado de un sistema cuántico pasa de la frontera de un conjunto convexo de estados a su interior. Sobre esta base, la decoherencia fue estudiada en sistemas abiertos y cerrados. Esquemáticamente, pueden identificarse tres períodos en el desarrollo de este programa general:

- **Primer período: La llegada al equilibrio de los sistemas irreversibles** (van Kampen [1], van Hove [2], Daneri *et al.* [3]). Con el propósito de entender cómo las características clásicas macroscópicas emergen del comportamiento cuántico microscópico, se definen observables colectivos, y los estados que son indistinguibles para un observador macroscópico (esto es, que sólo accede a los observables colectivos) se describen mediante el mismo *estado de grano grueso* $\rho_G(t)$. Cuando se estudia la evolución de $\rho_G(t)$ (o del valor medio de los observables colectivos), se comprueba que alcanza el equilibrio en el tiempo de relajación t_R ; por lo tanto, $\rho_G(t)$ decohere en su propia autobase luego de un tiempo de decoherencia. Este esquema tiene sus raíces en el estudio tradicional de los procesos irreversibles. El principal problema de este período fue la comprobación de que el tiempo de decoherencia calculado con estos prim-

itivos formalismos resultó ser demasiado largo comparado con las mediciones experimentales (ver [4]).

- **Segundo período: Sistemas abiertos y la base privilegiada móvil.** El sistema abierto S se considera en interacción con su ambiente E , y se estudia la evolución del estado reducido $\rho_S(t) = Tr_E \rho(t)$. El enfoque llamado *decoherencia inducida por el ambiente*, o en inglés *environment-induced decoherence* (EID) (Zeh [5], Zurek [6], [7], [8] and [9]) prueba que, como los estados de E devienen rápidamente ortogonales, los términos de interferencia de $\rho_S(t)$ desaparecen rápidamente y $\rho_S(t)$ decohere en una *base “puntero”* adecuada (que más adelante se denominará *base privilegiada móvil*) luego de un tiempo de decoherencia t_D muy corto; esto resuelve el principal problema del primer período. Actualmente, este formalismo ha sido aplicado a un amplio espectro de modelos, y sus resultados han tenido muchas confirmaciones experimentales (ver [10]).
- **Tercer período: Sistemas abiertos y cerrados.** Aunque actualmente EID aún se considera la posición “ortodoxa” en el tema (ver [11]), durante los últimos tiempos se han propuesto otros esquemas para dar cuenta de la decoherencia en sistemas cerrados (Diosi, Milburn, Penrose, Casati y Chirikov, Adler [12]). Algunos de estos métodos son claramente “no disipativos” (ver [13], [14], [15]), esto es, no están basados en la disipación de energía desde el sistema hacia el entorno. Entre ellos, se ha desarrollado el enfoque llamado *decoherencia autoinducida*, o en inglés *self-induced decoherence* (SID), de acuerdo con el cual un sistema cuántico cerrado con espectro continuo puede decoherir por interferencia destructiva y alcanzar un estado final donde puede obtenerse el límite clásico (ver [16]). La principal crítica al formalismo de decoherencia SID es que estudia los sistemas en la base de la energía y por lo tanto se trataría de un formalismo de la relajación y no específicamente de decoherencia (este punto se desarrollará en detalle en la Sección 2.3.3).

1.2. Objetivos de la tesis

A pesar del hecho de que las teorías de decoherencia en sistemas abiertos y cerrados coexisten en el tercer período, en la bibliografía ambos tipos de teorías son considerados alternativamente en distintos escenarios, o como explicando fenómenos distintos (ver [17]). Utilizando el lenguaje más simple posible aquí se intentará argumentar que éste no es el caso. Por el contrario, estos formalismos, originalmente concebidos para ser aplicados en situaciones distintas, o sea, sistemas abiertos y cerrados, pueden enmarcarse en un esquema teórico más general que, para resumir, aquí denominaremos *Esquema General de la Decoherencia*¹ (GTFD por las siglas de su denominación en inglés General Theoretical Framework for Decoherence, ver [18]).

¹Es preciso aclarar que este esquema general se trata de una construcción en desarrollo y de ningún modo se lo considera completamente general en su estado actual.

El objetivo general de la tesis es realizar un pequeño avance hacia el desarrollo de un GTFD que sea capaz de subsumir los distintos formalismos de decoherencia y relajación, unificando así fenómenos diferentes. Específicamente, en esta tesis se presenta un GTFD que unifica la decoherencia y la relajación en un mismo esquema en sistemas con o sin ambiente. Además, al brindar un marco unificado a distintos enfoques de la decoherencia, el GTFD clarifica algunos puntos que permanecen oscuros cuando se los considera por separado. Por otro lado, el GTFD, que puede ser aplicado a sistemas abiertos y a algunos sistemas sin ambiente, explicita el carácter relativo de la decoherencia respecto de la elección de los observables relevantes y permite definir el “mundo” clásico emergente en términos de un conjunto de observables. A lo largo de la tesis se aplica el GTFD y se van proponiendo distintas técnicas que pueden resultar de utilidad a la hora de estudiar sistemas concretos, en particular se provee una técnica matemática alternativa para hallar el tiempo de decoherencia de un modo diferente al usual. En resumen, esta tesis incluye un pequeño avance hacia la construcción de un GTFD y presenta un conjunto de resultados que pueden aportar al estudio de la decoherencia mediante el uso de técnicas no tradicionales.

Sobre esta base, el trabajo se organiza en los siguientes capítulos

- En el Capítulo 2 se presentan las ideas fundamentales sobre las que será construido el GTFD. En primer lugar, continuando con ideas propuestas por Zeh, se propone un cambio de énfasis para la decoherencia, según el cual el énfasis puesto en el estudio de la diagonalización del estado pasa al estudio de la desaparición de los términos de interferencia de los valores medios. Luego se muestra que este cambio de énfasis, al que se llamará “*perspectiva de los valores medios*”, dará lugar a un GTFD basado en el estudio de los valores medios.
- En el Capítulo 3 se muestra que, al ser el GTFD un esquema unificador, permite la exportación de métodos de un enfoque a otro. En particular, se presenta una versión de SID aplicable a sistemas con espectro de energía discreto. Este enfoque hace uso de una técnica específica desarrollada especialmente para el caso, e incluye un lema que permite determinar si un sistema discreto decohere o no. El GTFD permite advertir que SID y EID son esencialmente el mismo fenómeno y, por lo tanto, es posible aplicar los métodos de SID en EID, en particular el mencionado lema.
- En el Capítulo 4 se estudia el típico modelo de spines mediante la técnica desarrollada para SID, mostrando así la aplicabilidad del GTFD. Por otro lado, se estudia dicho modelo y se muestra cómo en este caso es posible definir cuál es el mundo clásico emergente, incluyendo el comportamiento clásico del lo que tradicionalmente se llama ambiente.
- En el Capítulo 5 se estudia una generalización del modelo de spines, en la cual se ponen de manifiesto algunas características que no aparecían en el modelo

de spines tradicional. En este modelo el GTFD es capaz de definir un mundo clásico emergente que no tiene un operador de estado asociado, sino que viene definido por un conjunto de observables cuyos valores medios se comportan clásicamente.

- En el Capítulo 6 se introduce el formalismo utilizado en el estudio de resonancias, basado en el estudio de los polos de la extensión analítica del Hamiltoniano. Sobre esta base, se propone un formalismo, que se llamará a lo largo de la tesis “*técnica polar*”, el cual permite hallar los tiempos de relajación y decoherencia de un sistema dado de un modo diferente al usual en la bibliografía sobre decoherencia.
- En el Capítulo 7 se aplica la técnica polar al conocido modelo que consiste en un oscilador armónico en interacción con un baño de osciladores. En este caso, los tiempos de decoherencia y relajación, coinciden con los resultados calculados mediante el tratamiento ortodoxo.
- En el Capítulo 8 se presenta un resumen del trabajo, sus conclusiones generales, y las nuevas perspectivas que abre la presente línea de investigación.

Capítulo 2

Distintos enfoques para la decoherencia

El fenómeno de la decoherencia es tradicionalmente estudiado mediante el análisis de la evolución del estado reducido del sistema. En este Capítulo se propone un enfoque alternativo que consiste en estudiar la estructura interna de los valores medios y su evolución, siguiendo el camino iniciado por H. D. Zeh en [10]. Se discuten en detalle las características de este enfoque y sus diferencias con el enfoque ortodoxo. Además se muestra cómo este enfoque permite sentar las bases de lo que se llamará a lo largo de la tesis Esquema General de la Decoherencia, el cual permite dar cuenta de los enfoques EID y SID en un solo formalismo. Por este motivo, en este capítulo se discuten sólo aspectos conceptuales en forma general; algunas aplicaciones del formalismo y discusiones sobre su utilidad pueden consultarse en [18], [19], [20], [21], [22] y [23]. En el resto de los capítulos se estudian distintos modelos concretos y podrá apreciarse que, junto con la introducción de algunas técnicas matemáticas, se realizan aportes al estudio de la decoherencia y la relajación.

2.1. Consideraciones previas

2.1.1. Los estados en mecánica cuántica

Sistemas cerrados

Según el formalismo de la mecánica cuántica, todo sistema tiene asociado un operador de estado $\hat{\rho}$ que lleva toda la información (estadística o probabilística) posible acerca del sistema. La representación matemática del estado se realiza en el espacio de Liouville¹ \mathcal{L} , y en el caso discreto se puede pensar al operador de estado como una matriz cuyos elementos evolucionan en el tiempo según la ecuación de von

¹Es el producto tensorial de dos espacios de Hilbert ordinarios $\mathcal{L} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$

Neumann-Schrödinger:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (2.1)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema.

Cada propiedad física del sistema queda representada por un observable específico \hat{O} que pertenece al espacio dual de \mathcal{L} , \mathcal{L}' , de modo que el operador \hat{q} representa la posición, el operador \hat{p} representa el momento, etc. Para calcular magnitudes de interés físico, se realizan operaciones algebraicas a partir de los mencionados operadores. Así, por ejemplo, el valor medio de la propiedad representada por \hat{O} , para un sistema en el estado $\hat{\rho}$, se calcula como la traza del producto de ambos operadores:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = Tr(\hat{\rho}\hat{O}) \quad (2.2)$$

En el caso de los sistemas simples² no hay diferencia sustancial entre conocer el estado y conocer los valores medios de los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores³:

- (i) dado el estado, se puede calcular el valor medio de cualquier observable, y
- (ii) dado el valor medio de los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores, es posible calcular el estado del sistema.

Por lo tanto, en estos casos resulta intuitiva la postura según la cual hay un sistema físico, cuyo comportamiento es cuántico y tiene asociado un operador de estado $\hat{\rho}$.

Sistemas abiertos

En el caso de sistemas compuestos, el estado inicial del sistema total se construye como el producto tensorial de los estados de sus subsistemas. En el caso de un sistema compuesto de N partículas⁴, el procedimiento es el siguiente:

- Se consideran N partículas inicialmente separadas e independientes: la partícula 1 en el estado $\hat{\rho}_1(0)$, la partícula 2 en el estado $\hat{\rho}_2(0)$,... y la partícula N en el estado $\hat{\rho}_N(0)$.
- Se asume que a partir del instante $t = 0$ las N partículas serán consideradas partes de un sistema compuesto total cuyo estado inicial es (que es un caso particular)

$$\hat{\rho}_T(0) = \hat{\rho}_1(0) \otimes \hat{\rho}_2(0) \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_N(0) = \bigotimes_{i=1}^N \hat{\rho}_i(0) \quad (2.3)$$

²Simples en el sentido de que no son sistema compuestos.

³Esto resulta evidente ya que las componentes del operador de estado no son otra cosa que los valores medios de los operadores de la base.

⁴Más genéricamente, en lugar de “partículas” pueden considerarse subsistemas.

- En $t = 0$ es posible recuperar el estado de cualquiera de las partículas mediante la *traza parcial*, que consiste en “trazar” los grados de libertad del resto de las partículas:

$$\hat{\rho}_1(0) = Tr_{2,\dots,N} (\hat{\rho}_T(0)) \quad (2.4)$$

En general, cuando se quiere recuperar el estado inicial de alguna partícula dada, se dice que esa partícula constituye el *sistema de interés* S y se llama al resto de las partículas *ambiente* E . Así, la notación se simplifica:

$$\hat{\rho}_S(0) = Tr_E (\hat{\rho}_T(0)) \quad (2.5)$$

donde S y E simplemente hacen referencia a los grados de libertad que se conservan y los que se trazan respectivamente.

- El estado total del sistema evoluciona, como todo sistema cuántico, según la ecuación de von Neumann-Schrödinger:

$$\frac{d\hat{\rho}_T}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_T] \quad (2.6)$$

- Se calculan los valores medios del modo usual:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_T} = Tr (\hat{\rho}_T \hat{O}) \quad (2.7)$$

Con este procedimiento se trabaja normalmente sin inconvenientes.

Luego se quiere retomar la idea de evolución de las “partículas componentes” del sistema total. Una vez compuesto el sistema, éste evoluciona como un todo siguiendo la ecuación de Liouville - von Neumann de acuerdo con el Hamiltoniano total, y sus partes, si están en interacción, pierden su individualidad. Nada impide tomar la traza parcial del estado total evolucionado y recuperar un ente matemático que tiene la apariencia de un estado y se denomina *estado reducido*:

$$\hat{\rho}_S(t) = Tr_E (\hat{\rho}_T(t)) \quad (2.8)$$

este estado reducido no evoluciona según la ecuación de Liouville - von Neumann:

$$\frac{d\hat{\rho}_S}{dt} \neq \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S] \quad (2.9)$$

La dinámica del estado reducido responde a una ecuación maestra no unitaria, distinta en cada problema particular.

Suele afirmarse que la partícula 1 puede reidentificarse en el sistema compuesto o sea, es un sistema cuántico (que no obedece la ecuación de von Neumann-Schrödinger) que está representado por el operador de estado reducido $\hat{\rho}_S$. En efecto, si se consideran observables que actúan sólo sobre el sistema de interés:

$$\hat{O} = \hat{O}_S \otimes \hat{I}_E \quad (2.10)$$

donde \hat{O}_S es un observable cualquiera del sistema S y \hat{I}_E es la identidad del espacio de observables del sistema E , entonces se pueden calcular los valores medios de estos observables del siguiente modo:

$$\langle \hat{O}_S \rangle_{\hat{\rho}_S} = Tr \left(\hat{\rho}_S \hat{O}_S \right) \quad (2.11)$$

ya que

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_T} = Tr \left(\hat{\rho}_T \hat{O} \right) = Tr \left(\hat{\rho}_T \left(\hat{O}_S \otimes \hat{I}_E \right) \right) = Tr \left(\hat{\rho}_S \hat{O}_S \right) = \langle \hat{O}_S \rangle_{\hat{\rho}_S} \quad (2.12)$$

Por lo tanto, los valores medios de estos observables se calculan de forma idéntica que para los sistemas cerrados, pero usando el operador de estado reducido $\hat{\rho}_S$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que esto sólo vale para los observables de la forma $\hat{O}_S \otimes \hat{I}_E$. La expresión (2.11) reproduce la estadística de las mediciones que puedan realizarse teniendo acceso solamente a S : ya que el operador de estado reducido $\hat{\rho}_S$ no permite calcular las correlaciones de S con E . El corolario de esta observación es que, si se conocen completamente $\hat{\rho}_S$ y $\hat{\rho}_E$, no se tiene la información del sistema total ya que no es posible recuperar todas las correlaciones.

Este hecho, perfectamente compatible con la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, puede representar una dificultad para las interpretaciones sin colapso como las interpretaciones modales. Según las interpretaciones modales, luego de una medición el sistema no colapsa y permanece en una superposición. La única manera de explicar la coincidencia de la lectura de los punteros en mediciones sucesivas del mismo observable es apelando a las correlaciones entre el sistema y los aparatos de medición. En este caso la pérdida de las correlaciones resulta desastrosa. Sin embargo, en la mayoría de los casos, estas cuestiones no resultan relevantes y se opera con $\hat{\rho}_S$.

En el caso de los sistemas compuestos tampoco hay diferencia entre conocer el estado reducido y conocer los valores medios de los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores del sistema S :

- (i) dado el estado reducido, se puede calcular el valor medio de cualquier observable \hat{O}_S en el estado $\hat{\rho}_S$, y
- (ii) dado el valor medio de los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores del sistema S , es posible calcular el estado reducido del sistema $\hat{\rho}_S$.

2.1.2. La decoherencia como origen del límite clásico

El principio de correspondencia establece que debería ser posible recuperar las leyes de la mecánica clásica a partir de las de la cuántica. Un modo de establecer el vínculo entre ambas teorías es la utilización de la teoría de deformaciones algebraicas, según la cual es posible “deformar” un álgebra hasta convertirla en otra por

medio de algún operador [24]. Con ayuda de esta teoría es posible transformar el estado cuántico $\hat{\rho}$ en un estado análogo al de la mecánica estadística clásica, $\rho(p, q)$, que habita el espacio de las fases. Se pretende interpretar esta función como una distribución de probabilidad en el espacio de las fases, que fija la probabilidad de que el sistema posea un par posición-momento clásico bien definido.

Sin embargo es posible establecer una transición cuántico-clásico a nivel de los valores medios. En esta sección se muestra el modo en que se entiende este límite clásico de los valores medios y su relación con el límite de los estados.

Los valores medios clásicos y cuánticos

A continuación tomamos por simplicidad el caso de sistemas con espectro discreto de energía; todas las consideraciones de este capítulo pueden hacerse también en el caso continuo.

Según las estadísticas clásicas, se puede calcular el valor medio de un observable O sumando los valores que es posible medir para este observable pesados con su probabilidad. Si los valores que es posible medir para el observable O son $\{o_1, o_2, \dots, o_N\}$, $\Omega = \{o_1, o_2, \dots, o_N\}$ es el espacio de eventos posibles, y P_i es la probabilidad de medir o_i , entonces el valor medio es

$$\langle O \rangle = \sum_{i=1}^N o_i P_i \quad (2.13)$$

donde $0 \leq P_i \leq 1$ y $\sum_i P_i = 1$.

Sin embargo la mecánica cuántica da lugar a valores medios que poseen otra estructura. Si utilizamos la expresión (2.2) para calcular el valor medio de un observable \hat{O} en el estado $\hat{\rho}$ se obtiene

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_{i,j} O_{ij} \rho_{ji} \quad (2.14)$$

Es importante señalar que, el operador de estado $\hat{\rho}$ es un ente matemático que admite múltiples representaciones concretas; por ejemplo, en el caso discreto y finito $\hat{\rho}$ es una matriz que se puede escribir en distintas bases. Pero los elementos de matriz ρ_{ji} del operador $\hat{\rho}$ cambian cuando se elige expresarlos en una base u otra. Por lo tanto expresar al operador $\hat{\rho}$ a partir de sus componentes ρ_{ji} implica la elección de una base particular del espacio de Hilbert. En la expresión (2.14), donde se ha elegido una base particular del espacio de Hilbert, se pueden separar los términos que tienen origen en las componentes diagonales de \hat{O} y $\hat{\rho}$ y los que tienen origen en los términos no-diagonales:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_i O_{ii} \rho_{ii} + \sum_{i \neq j} O_{ij} \rho_{ji} \quad (2.15)$$

En la primer sumatoria aparecen los elementos diagonales $O_{ii} = O_i$ del observable, que según la interpretación usual serían los valores que es posible medir, multiplicados por los elementos diagonales ρ_{ii} del operador de estado, que justamente

corresponden a las probabilidades $P_{ii} = P_i$ que asigna la regla de Born. Es decir,

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_i O_i P_i + \sum_{i \neq j} O_{ij} \rho_{ji} \quad (2.16)$$

Se obtienen entonces dos sumatorias, la que incluye los aportes de las componentes diagonales de \hat{O} y $\hat{\rho}$,

$$\sum^D = \sum_i O_i P_i \quad (2.17)$$

y la que incluye los aportes de las componentes no-diagonales de \hat{O} y $\hat{\rho}$,

$$\sum^{ND} = \sum_{i \neq j} O_{ij} \rho_{ji} \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq P_i \leq 1$ y $\sum_i P_i = 1$, se concluye que \sum^D tiene la estructura de un valor medio clásico y se le puede dar una interpretación por ignorancia. Por otro lado, \sum^{ND} no posee dicha estructura ya que, por ejemplo, ρ_{ji} puede no ser positivo. Entonces el término \sum^{ND} dificulta la interpretación del valor medio cuántico como un valor medio clásico, y este hecho es razonable porque de otro modo no habría nada especial en la mecánica cuántica. En la sumatoria \sum^{ND} es donde se ven manifestadas las características más curiosas de la mecánica cuántica: los fenómenos de superposición e interferencia. Por este motivo, los términos de \sum^{ND} suelen denominarse *términos de interferencia*.

Un puente entre valores medios: La decoherencia

Queda claro, entonces, que en la sumatoria \sum^{ND} se ponen de manifiesto las características peculiares de la mecánica cuántica. Por lo tanto, cualquier intento de hallar un límite entre las estadísticas cuánticas y las estadísticas clásicas debe incluir un proceso mediante el cual desaparezcan los términos de interferencia en los valores medios, i.e.

$$\sum^{ND} \rightarrow 0 \quad (2.19)$$

A este proceso se lo llamará *decoherencia*. Así es posible armar el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum^D + \sum^{ND} \sim \text{Estadística cuántica} \\ \downarrow \\ \text{Decoherencia} \\ \downarrow \\ \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum^D \\ \downarrow \\ \text{Interpretación de } P_i \\ \downarrow \\ \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_i O_i P_i \sim \text{Estadística clásica} \end{array}$$

En este punto es conveniente hacer una observación que va a dar lugar al enfoque ortodoxo de la decoherencia. La condición para obtener el límite entre las estadísticas clásica y cuántica es que a partir de cierto momento $\sum^{ND} = 0$. Y esto sucede, en particular, cuando el operador de estado es diagonal en la base donde se está trabajando (más adelante se discute la importancia de esta base):

$$\text{Si } \hat{\rho} \text{ es diagonal} \implies \sum^{ND} = 0 \quad (2.20)$$

De hecho, si se consideran los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores :

- (i) cuando $\hat{\rho}$ es diagonal, desaparecen los términos de interferencia del valor medio los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores , y
- (ii) si desaparecen los términos de interferencia de los valores medios los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores, entonces $\hat{\rho}$ es diagonal.

De manera que, cuando se consideran los observables que constituyen una base **completa** del espacio de operadores, el estudio de la decoherencia se puede encarar desde dos puntos de vista equivalentes:

1. El estudio de la diagonalización del estado.
2. El estudio de la desaparición de los términos de interferencia de los valores medios.

Pero no hay que olvidar que, ya sea que se considere el estado o los valores medios, siempre es necesario elegir una base particular en la que se escriben ρ_{ij} y O_{ij} .

2.2. El enfoque ortodoxo de la decoherencia

La decoherencia es un proceso originalmente concebido para explicar la diagonalización de la matriz reducida. Su versión ortodoxa, la decoherencia inducida por el ambiente (*Environment Induced Decoherence*, EID), es un enfoque que se aplica a sistemas abiertos ya que, como su nombre lo indica, considera al sistema bajo estudio S embebido en un ambiente E que induce la decoherencia.

El sistema S es un sistema abierto que tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H}_S y ambiente E es un sistema abierto que tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H}_E . Los correspondientes espacios de von Neumann-Liouville de cada uno son: $\mathcal{L}_S = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ y $\mathcal{L}_E = \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_E$. El universo U es un sistema cerrado que tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H} que es el producto de los espacios de Hilbert que corresponden

al sistema propio S y al ambiente E , es decir, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$; por otro lado el correspondiente espacio de von Neumann-Liouville de U es $\mathcal{L} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{L}_S \otimes \mathcal{L}_E$.

Al ser U un sistema compuesto, el estado inicial del sistema total se construye según (2.3) como el producto tensorial de los estados iniciales de sus subsistemas⁵

$$\hat{\rho}_T(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0) \quad (2.21)$$

El estado total del sistema evoluciona, según la ecuación de Liouville - von Neumann:

$$\frac{d\hat{\rho}_T}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_T] \quad (2.22)$$

Tomando la traza parcial del estado total evolucionado, se recupera el estado reducido evolucionado,

$$\hat{\rho}_S(t) = Tr_E(\hat{\rho}_T(t)) \quad (2.23)$$

La dinámica del estado reducido responde a una ecuación maestra no unitaria, distinta en cada problema particular.

Así, según el enfoque EID, el estudio de la decoherencia se basa en el estudio de la evolución de la matriz reducida escrita en una dada base. Ya sea calculando explícitamente $\hat{\rho}_S(t)$ o analizando caso por caso la ecuación maestra, es posible determinar si en determinadas condiciones el operador de estado reducido se vuelve diagonal o no en una base particular. En muchos modelos de sistemas físicos donde la cantidad de grados de libertad del ambiente es enorme, se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow t_{DS}} \hat{\rho}_S(t) = \hat{\rho}_S^{(D)}(t) \textit{ diagonal} \quad (2.24)$$

Según el criterio usual se dice que, como luego de un *tiempo de decoherencia* t_{DS} la matriz $\hat{\rho}_S(t)$ evolucionó a $\hat{\rho}_S^{(D)}$ diagonal (luego de un tiempo t_{DS} el estado $\hat{\rho}_S(t)$ se diagonaliza en cierta base), entonces se dio un proceso de decoherencia inducido por la gran cantidad de grados de libertad del ambiente. Esto equivale a pensar que $\hat{\rho}_S(t)$ representa el estado de una parte del sistema total, y que esta parte se volvió clásica⁶. En general, esta parte se piensa de un modo bastante concreto, ya que en muchos casos el sistema representa una partícula. Como el estado se volvió diagonal y representa una partícula, entonces se puede decir que esta partícula se volvió clásica.

Esta perspectiva es útil cuando se adopta el punto de vista de un observador para el que no es posible acceder al sistema E y, por lo tanto, tampoco es posible acceder a las correlaciones. La única información que puede obtener este observador es la que brindan los valores medios de los observables de la forma

$$\hat{O}_S \otimes \hat{I}_E \quad (2.25)$$

⁵Obsérvese que esta elección es un caso particular adecuado a los cálculos que siguen. Algunos autores realizan elecciones más generales del estado inicial, pero de ese modo trasladan el problema de la individualidad a la situación inicial. En este trabajo se prefiere no dar lugar a controversias en ese sentido.

⁶Para completar el límite clásico hay que hacer la transformada de Wigner y $\hbar \rightarrow 0$.

Entonces, desde su punto de vista, las correlaciones carecen de sentido práctico y el operador de estado $\hat{\rho}_S$ le provee toda la información sobre el sistema S , y este sistema responde a una estadística clásica.

2.2.1. La base privilegiada móvil

Como es sabido, el operador de estado es hermítico y, por lo tanto, siempre existe una base en la que es diagonal. Esto parecería sugerir que, como siempre es posible escribir $\hat{\rho}_S$ de forma diagonal, entonces los valores medios no tendrán términos de interferencia y siempre es posible interpretarlos como valores medios clásicos. Por lo tanto, puesto que un operador de estado $\hat{\rho}_S$ es siempre diagonal en alguna base, hay que aclarar a qué se refiere la expresión “ $\hat{\rho}_S$ se diagonaliza”. En efecto, el estado $\hat{\rho}_S$ se puede representar en distintas bases, dando lugar a expresiones en las que los valores medios se pueden expresar en términos de \sum^D y \sum^{ND} distintas en cada base. A su vez, hay una base particular que cambia instante a instante en la que \sum^{ND} es siempre cero. Sin embargo, las características del sistema de interés, su ambiente y la interacción entre ambos determina una base particular en la que se deben realizar los cálculos. A esta base se la llama *base privilegiada móvil* (*moving preferred basis* en inglés) y está formada por el conjunto de estados más estables y robustos, menos afectados por la interacción entre el sistema y su entorno. Si hay decoherencia, el sistema evoluciona de manera que, luego de un tiempo y si $\hbar \rightarrow 0$, el estado expresado en esa base es diagonal; entonces desaparecen los términos de interferencia de los valores medios de todos los observables y se los puede pensar como valores medios clásicos. Así, la decoherencia no habla simplemente de la diagonalización del operador de estado, sino que habla de la diagonalización del estado escrito en una base particular. Es decir, fijada la base privilegiada móvil donde la representación del estado inicial del sistema es no-diagonal, la decoherencia es un proceso que, en esa misma base, hace que luego de evolucionar durante un *tiempo de decoherencia* t_{DS} el estado quede representado por un estado diagonal y permanezca de ese modo.

Según el enfoque ortodoxo de la decoherencia, dado un sistema S embebido en un ambiente E con muchos grados de libertad, la transición cuántico-clásico del sistema S puede explicarse del siguiente modo: existe una base privilegiada en la que el estado reducido $\hat{\rho}_S$ del sistema S se vuelve aproximadamente diagonal en el tiempo t_{DS} . Esta base privilegiada es la que indica cuál es la realidad clásica emergente.

2.2.2. Otros aspectos de la decoherencia

Actualmente, el formalismo de EID ha sido aplicado a un amplio espectro de modelos, sus resultados han tenido muchas confirmaciones experimentales, y recientemente su estudio ha cobrado especial relevancia en computación cuántica. Por otro lado es posible hacer algunos comentarios sobre otros aspectos de la decoherencia entendida de un modo más amplio:

La decoherencia de sistemas sin ambiente

La bibliografía incluye modelos donde es posible describir una decoherencia en sistemas que no tienen un ambiente entendido del modo tradicional. Algunos ejemplos son:

- Sistemas como el de Casati-Prosen [25]: En este tipo de sistemas la decoherencia se manifiesta en la observación del patrón de interferencia que se obtiene en una pantalla a la salida de una doble rendija ubicada en una cavidad con una geometría particular. Más allá de los detalles del modelo, y si bien no es un problema central de la física, éste es un caso en el que no es posible atribuir la desaparición de la interferencia a un ambiente externo al sistema.
- El caso de los sistemas estudiados por SID [16]: SID es un caso particular de decoherencia que se produce en la base de la energía, por lo que se la puede considerar una teoría de la relajación. No obstante describe la transición cuántico-clásica (y la relajación) en los casos particulares donde la base privilegiada móvil es la base de la energía (tal es el caso de los modelos de espines). En este formalismo la pérdida de coherencia se atribuye a un grano grueso y es difícil atribuirla a la presencia de un ambiente externo al sistema.
- Los sistemas estudiados por Gambini [14]: En este caso se analiza la influencia de un término extra en la ecuación diferencial del estado, proveniente de consideraciones hechas basadas en gravedad cuántica. Este término puede interpretarse como una indeterminación en el tiempo físico o un grano grueso temporal. En este formalismo tampoco parece fácil la identificación de un ambiente que cause la pérdida de coherencia.

Debido a sus características, estos casos de decoherencia quedan fuera del alcance de EID, que pretende, como su nombre lo indica, estudiar la decoherencia inducida por el ambiente. Según Zurek, la clasicidad de sistemas cerrados no puede siquiera ser planteada en EID (ver [26], p.181). Por lo tanto puede resultar conveniente elaborar un esquema unificador que incluya todos estos formalismos en uno solo.

La identificación del sistema que decohere

Como se ha señalado anteriormente, el enfoque EID resulta satisfactorio en gran cantidad de casos, pero EID no se aplica directamente a sistemas cerrados. El modo de proceder ante un sistema cerrado consiste en dividirlo: se considera “sistema” a ciertos grados de libertad y “ambiente” al resto. Un ejemplo reciente y claro es el procedimiento aplicado en [27] al modelo cosmológico actual. En este caso, cuando se estudian las fluctuaciones generadas durante el período inflacionario de la evolución cósmica, puesto que el universo no interactúa con nada, se distingue entre fluctuaciones escalares y fluctuaciones de tipo tensorial, y se las considera en interacción. De este estudio se concluye que las fluctuaciones tensoriales pueden provocar la pérdida de coherencia de las escalares, de manera que el tratamiento

de estas últimas como fluctuaciones clásicas está justificado. Este es un ejemplo de cómo es posible dividir entre sistema y ambiente en el caso cosmológico, aunque diferente del modo usual donde la separación consiste en considerar como “entorno” a los modos de longitud de onda cortos y como sistema a los de longitud de onda largos [28].

En el procedimiento de definir cuál es el sistema que se debe estudiar surge una aparente dificultad. Puesto que el entorno puede ser externo o interno al sistema de interés, no hay un criterio unívoco para decidir dónde ubicar el “corte” entre sistema y entorno. Si bien podría pensarse que esto es una dificultad de EID, no es así, puesto que la decoherencia se define en función del sistema de interés. Además, cabe señalar que EID permite el estudio de las correlaciones entre el sistema y el ambiente, incluyendo así el estudio del ambiente [29], también permite estudiar la decoherencia de distintos subsistemas.

Si bien el formalismo basado en la descripción del estado reducido no presenta dificultades, debe ser interpretado cuidadosamente al momento de explicar la emergencia de las propiedades clásicas a partir de las cuánticas. En efecto, dado un sistema cerrado cuántico U al que se aplica el esquema EID, U puede descomponerse en sistema y ambiente de diferentes modos:

- Descomposición 1: $U = S_1 \cup E_1$
- Descomposición 2: $U = S_2 \cup E_2$
- \vdots
- Descomposición n: $U = S_n \cup E_n$

En este punto pueden darse tres situaciones:

1. Si todos los sistemas de interés que surgen de la diferentes descomposiciones no decoheren, entonces en este sistema no hay emergencia del mundo clásico.
2. Si todos los sistemas de interés surgidos de la diferentes descomposiciones no decoheren excepto uno, entonces en este subsistema emerge un mundo clásico.
3. Si más de uno de los sistemas de interés surgidos de las diferentes descomposiciones decoheren, entonces en este sistema emerge más de un mundo clásico.

Este último caso la emergencia del mundo clásico debe explicarse con sumo cuidado, ya que en el mundo que usualmente se llama clásico es único, y está bien determinado por las leyes de la mecánica clásica, y es el mundo que observamos en la vida cotidiana.

Un ejemplo concreto de esta situación se analizará en el Capítulo 5, donde todas las partículas del sistema decoheren frente al entorno si se las considera por separado, pero el sistema compuesto de todas ellas no lo hace.

La identificación de la base privilegiada

Según las secciones anteriores, la transición cuántico-clásico del sistema S puede explicarse del siguiente modo: dados el sistema S y el ambiente E , existe una base privilegiada en la que el estado reducido $\hat{\rho}_S$ del sistema S se vuelve aproximadamente diagonal a partir del tiempo de decoherencia t_D . Esta es una conclusión que surge a la vista de muchísimos modelos resueltos en la bibliografía sobre decoherencia. En la resolución de estos modelos primero se define el Hamiltoniano H del sistema a tratar, luego se halla la evolución no unitaria definida por S en interacción con E , se escribe $\hat{\rho}_S(t)$ en una base de estados que son aproximadamente estables, y se muestra que $\hat{\rho}_S(t)$ se vuelve diagonal aproximadamente luego del tiempo de decoherencia. Por lo tanto, el tiempo de decoherencia es aquél a partir del cual el operador de estado se vuelve aproximadamente diagonal y se mantiene diagonal en una base de estados que son aproximadamente estables. El criterio que permite distinguir los elementos de la base privilegiada móvil es conocido como *predictability sieve criterion* (ver [30]). La idea básica es la siguiente: para encontrar los estados de la base privilegiada, se deben considerar todos los posibles estados iniciales puros para el sistema y calcular la entropía asociada al estado reducido después de un tiempo t ; los estados puntero son los que reducen al mínimo la producción de entropía. Este criterio es fácil de aplicar a sistemas simples donde el Hamiltoniano propio del sistema o el Hamiltoniano de interacción se pueden despreciar. Por otro lado, también ha sido aplicado en numerosos casos que incluyen el movimiento Browniano cuántico. Mediante este criterio se puede definir la base privilegiada, en tanto base menos afectada por la dinámica del sistema.

El *predictability sieve criterion* tiene la particularidad de que exige el cálculo de la evolución de la entropía (o de la pureza según una variante del criterio) del sistema [31], lo cual puede ser más o menos fácil según el caso, y depende fuertemente de la habilidad del observador de predecir la evolución temporal del sistema de interés. Por lo tanto, si bien es un muy buen criterio, podría ser fructífero complementar las herramientas matemáticas mediante una técnica que no requiriera el cálculo de la evolución completa del sistema y no apele a conceptos como la entropía o la pureza.

2.3. El enfoque basado en valores medios

En las consideraciones realizadas en la Sección 2.1 se mostró que, si bien el enfoque basado en el operador de estado presenta algunas dificultades para ciertas interpretaciones sin colapso, no hay diferencia sustancial entre conocer el estado y conocer los valores medios los observables que constituyen una base completa del espacio de operadores. Por lo tanto es posible describir los sistemas cuánticos abiertos y cerrados desde el punto de vista de los valores medios sin diferencia alguna con el enfoque usual basado en el estado. Por otro lado, en la Sección 2.1.2 se mostró que el estudio de la decoherencia se puede estudiar desde dos puntos de vista equivalentes:

1. El estudio de la diagonalización del estado en la base privilegiada.

2. El estudio de la desaparición de los términos de interferencia de los valores medios escritos en la base privilegiada.

En enfoque ortodoxo aborda el problema estudiando la diagonalización del estado y fue descrito en la sección anterior. En la presente sección se desarrolla el segundo punto de vista, encontrando que este enfoque es compatible con los resultados del ortodoxo, pero presenta las siguientes diferencias:

- Permite la descripción de una decoherencia sin ambiente.
- Si bien tampoco establece un criterio para determinar cuál es el “sistema” y cuál es el “ambiente”, permite definir al mundo clásico en una situación como la que se describe en 2.2.2.
- Ofrece un marco amplio para desarrollar la teoría de la decoherencia.

2.3.1. Irreversibilidad y decoherencia

Como enfatiza Omnès en [32], la decoherencia es un caso particular del problema general de la irreversibilidad en mecánica cuántica. El problema de la irreversibilidad puede ser expresado en los siguientes términos. Un estado cuántico $\rho(t)$ describe una evolución unitaria dada por el operador de evolución temporal $\mathcal{U}(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$; el carácter unitario de esta evolución impide que el estado alcance el equilibrio para $t \rightarrow \infty$. Esto significa que, para dar cuenta de la llegada al equilibrio, es necesario utilizar algún tipo de evolución no unitaria; por lo tanto, se debe introducir algún tipo de operación que transforme la evolución unitaria en una no unitaria. Desde un punto de vista general, esta operación consiste en la partición de la información maximal del sistema en una parte relevante y una no relevante. La parte relevante es considerada, como su nombre lo indica, de interés y la información que proviene de ella se retiene, mientras que la parte no relevante se desprecia. En un esquema de este tipo la evolución puede alcanzar una situación de equilibrio final. Es importante señalar que, desde el punto de vista más general, al hablar de parte relevante y parte no relevante se hace referencia a la información maximal del sistema, y eso no implica de ningún modo que se deje de pensar al sistema físico como un todo o que se establezca una separación en grupos de las partículas que forman parte del sistema. Este último caso sería sólo un modo particular de particionar la información maximal del sistema.

Esta idea, expresada de un modo amplio en el párrafo anterior, puede ser reformulada en el lenguaje de operadores. La información maximal de un sistema U está dada por el espacio \mathcal{O} de todos los observables que teóricamente es posible construir para el sistema. La división entre la información relevante y la información irrelevante se realiza eligiendo observar una “parte” del sistema que resulta de interés y pasar por alto la “parte” restante; esto equivale a elegir un subespacio $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}$ de *observables relevantes* que dan cuenta de la información elegida, e ignorar el resto.

Debido a la importancia de este concepto, se vuelve a subrayar que la separación en “partes” refiere a la información maximal del sistema y no a la división del sistema en subsistemas que puedan identificarse con “objetos” con propiedades esenciales y espacialmente localizados. Por ejemplo, dado el sistema cerrado U , podrían elegirse como observables relevantes todos los $O \in \mathcal{O}$ salvo uno, O_1 , aun cuando O_1 no puede interpretarse por sí solo como representando un objeto físico (por ejemplo, una partícula).

Una elección muy frecuente de los $O_R \in \mathcal{O}_R$ es la que se efectúa dividiendo el sistema cerrado U , representado en \mathcal{H} , en dos subsistemas abiertos S y E , representados en \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E respectivamente, de modo tal que $U = S \cup E$. En este caso:

$$O_R = O_S \otimes I_E \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \quad (2.26)$$

donde I_E es la identidad en $\mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_E$, y $O_S \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ es un observable del sistema S . Puesto que el único observable considerado en el subsistema E es la identidad I_E , resulta claro que O_R sólo brinda información acerca de S . En casos como éste, S suele denominarse *sistema* y el subespacio E *ambiente*.

Por consiguiente, los valores medios $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ de los observables $O_R \in \mathcal{O}_R$ dan cuenta sólo de la parte relevante del sistema cerrado. Es importante aclarar que, en principio, la decisión de cuáles son los observables relevantes, es decir, los que se consideran de interés, depende del propósito particular que se plantee en cada situación. Si bien la elección no es meramente arbitraria, sí es convencional ya que depende solamente de las intenciones del observador. En otras palabras, la elección de los observables relevantes responde a un propósito, pero no indica un modo “esencial” de identificar los subsistemas. Por otra parte, la división del sistema cerrado en subsistemas no implica que éstos deban necesariamente decoherir: en principio, la decoherencia o no de los subsistemas debe demostrarse en cada caso.

También es importante enfatizar que, sin una restricción sobre el espacio de observables, la descripción de evoluciones no unitarias irreversibles no es posible ya que, de acuerdo con el postulado dinámico de la mecánica cuántica, el estado del sistema cerrado U evoluciona unitariamente según la ecuación de Schrödinger en la versión de von Neumann. Como la decoherencia es un proceso irreversible, siempre se debe efectuar la partición de todo el espacio de observables en el subespacio relevante $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}$ y el subespacio irrelevante, conformado por los restantes observables. Es interesante advertir que, para explicar la decoherencia en todas sus versiones, de un modo u otro se elige un subespacio de observables relevantes: los *observables “gruesos”* en van Kampen [1], los *observables macroscópicos del aparato* en Daneri *et al.* [3], los *observables del sistema abierto* en EID [5] [6] [7], los *observables colectivos* en Omnès [32], los *observables de van Hove* en SID [16], etc.

2.3.2. La decoherencia de los observables

La desaparición de los términos no-diagonales \sum^{ND} del valor medio escritos en la base privilegiada puede analizarse desde el punto de vista de los valores medios.

Así, el fenómeno de la decoherencia se presenta de un modo más fiel al planteo presentado en la Sección 2.2. Dado un estado inicial $\hat{\rho}(0)$ y un subespacio de observables relevantes $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}$, la decoherencia se da cuando, en la base privilegiada (ver Sección 2.1.2),

$$\sum^{ND}(t) \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

en el tiempo de decoherencia, y

$$\sum^{ND}(t) \simeq 0 \quad (2.28)$$

a partir de entonces. Esto implica que el operador de estado sea diagonal, sino simplemente que para el conjunto de observables relevantes no hay términos de interferencia (usando la base privilegiada). Entonces se puede afirmar que el estado inicial $\hat{\rho}(0)$ evoluciona como $\hat{\rho}(t)$ y luego de un tiempo llamado tiempo de decoherencia t_D el estado adopta una forma particular que hace desaparecer los términos no-diagonales del valor medio (en la base privilegiada)

$$\lim_{t \rightarrow t_D} \langle \hat{O}_R \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \sum^D(t) \quad (2.29)$$

Esta manera de describir la decoherencia es distinta de la ortodoxa pero la incluye. En efecto, cuando se eligen los observables relevantes de la forma $O_R = O_S \otimes I_E$, entonces el requerimiento de pedir que desaparezcan los términos de interferencia del valor medio equivale a pedir que el operador de estado reducido del sistema sea diagonal. Pero cuando se eligen los observables relevantes de otro modo, la equivalencia se pierde. Este enfoque sienta las bases de un GTFD, por medio del cual se pueden englobar distintos enfoques existentes de decoherencia y relajación en un único marco teórico general. Además, puede dar lugar a nuevos enfoques; en particular permite describir la decoherencia para conjuntos de observables que no tienen un operador de estado asociado (por ejemplo la decoherencia de un solo observable). En los siguientes apartados se vuelve sobre este punto.

2.3.3. La relación entre decoherencia y relajación

Si bien la decoherencia de un sistema cuántico y su relajación son fenómenos que se estudian separadamente, existe una relación entre ellos. Entender esta relación es fundamental para desarrollar un GTFD, que pretenda dar cuenta de ambos fenómenos. Por este motivo, a continuación se resume dicha relación.

Por simplicidad se considera el caso de sistemas con espectro de energía discreto, pero los resultados son fácilmente exportables a sistemas continuos. Sea un sistema cuántico S con un espacio de Hilbert asociado \mathcal{H}_S , y un Hamiltoniano H_S con autoestados $\{|\omega_i\rangle\}$ y autovalores $\{\omega_i\}$. El estado inicial para el sistema S , escrito en la base de la energía, es

$$\rho_S(0) = \sum_i \rho_{ii} |\omega_i\rangle \langle \omega_i| + \sum_{i,j} \rho_{ij} |\omega_i\rangle \langle \omega_j| \quad (2.30)$$

El valor medio de un observable cualquiera en el estado inicial resulta

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_S(0)} = \sum_i O_{ii} \rho_{ii} + \sum_{i,j} O_{ji} \rho_{ij} \quad (2.31)$$

Si el sistema evoluciona cuánticamente de acuerdo con la evolución de Liouville - von Neumann, en la base elegida el valor medio evolucionado es

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_S(t)} = \sum_i O_{ii} \rho_{ii} + \sum_{i,j} O_{ji} \rho_{ij} e^{-\frac{i}{\hbar}(\omega_i - \omega_j)t} = \sum^D + \sum^{ND}(t) \quad (2.32)$$

La relajación se da cuando, luego de un tiempo llamado *tiempo de relajación del sistema* t_R , los valores medios de los observables ya no evolucionan. Cuando se escriben los valores medios en la base de la energía, el requerimiento de que los valores medios no evolucionen es equivalente a pedir que la sumatoria $\sum^{ND}(t)$ se haga cero. Así, la parte dependiente del tiempo desaparece y el sistema alcanza la relajación. La *base de equilibrio final* es aquella que diagonaliza al operador de estado cuando el sistema alcanzó la relajación, i.e. luego del tiempo de relajación t_R .

Por otro lado, si hay decoherencia en esta base, desaparecen los términos de interferencia y sobreviven los términos diagonales que no evolucionan en el tiempo, i.e. $\sum^{ND}(t)$ se hace cero. Entonces el sistema decohere y llega al equilibrio al mismo tiempo. Así, es posible afirmar que la decoherencia en la base de la energía y la relajación se dan simultáneamente o bien, son el mismo fenómeno.

Hasta aquí la base elegida fue la de la energía. En el caso general donde se estudia la desaparición de los términos de interferencia en la *base privilegiada móvil*, el análisis anterior muestra que, como la base que diagonaliza al estado es única, entonces la *base privilegiada móvil* y la *base de equilibrio final* deben converger en el tiempo de relajación. En este caso general la evolución del valor medio expresada en la base privilegiada móvil es:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_S(t)} = \sum^D(t) + \sum^{ND}(t) \quad (2.33)$$

Así en el tiempo de decoherencia se tiene que la interferencia desaparece

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_S(t)} \rightarrow \sum^D(t) \quad (2.34)$$

y en el tiempo de relajación el sistema deja de evolucionar

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_S(t)} \rightarrow \sum_*^D \quad (2.35)$$

En conclusión, cuando la decoherencia se da en la base de la energía entonces el tiempo de decoherencia y relajación son el mismo y, por supuesto, la base de la decoherencia coincide con la base de equilibrio (la de la energía). Además, cuando la base privilegiada no es la de la energía, ésta es móvil y converge a la de equilibrio para tiempos grandes.

Con esta relación y las consideraciones presentadas en las subsecciones anteriores es posible formular un GTFD.

2.3.4. Un esquema general de la decoherencia

El enfoque de valores medios permite analizar las partes de un sistema desde la perspectiva del sistema cerrado. Como ya se explicó anteriormente, el énfasis se pone en la elección de los observables relevantes del sistema cerrado. Antes de continuar conviene precisar algunas definiciones:

- La *base de equilibrio final* es aquélla que diagonaliza al operador de estado cuando el sistema alcanzó la relajación, i.e. luego del tiempo de relajación t_R .
- La *base privilegiada móvil* es aquélla que diagonaliza al operador de estado luego del tiempo de decoherencia t_D .
- La *técnica polar* es la técnica que se desarrollará en el Capítulo 6 de esta tesis y consiste en analizar la distribución de polos de la extensión analítica del Hamiltoniano del sistema.

Entonces, dado un sistema cuántico, los fenómenos de la decoherencia y de la relajación se pueden explicar en el marco de un esquema que consiste en aplicar cuatro pasos, que son una generalización del GTFD con tres pasos presentado anteriormente⁷ (para más detalles, ver [33] y [34]):

1. **Primer paso:** Dado el sistema cuántico bajo estudio, se eligen los observables que resultan de interés para el problema que se quiere tratar. Cada uno de estos observables O_R se denomina *observable relevante*, y todos ellos conforman el conjunto \mathcal{O}_R de observables relevantes del sistema. De modo que $O_R \in \mathcal{O}_R$.
2. **Segundo paso:** Se obtiene el valor medio de cualquiera de los observables relevantes, $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$, $\forall O_R \in \mathcal{O}_R$. Para ello se calcula $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ como el valor medio de O_R en el estado $\rho(t)$ del sistema completo, que evoluciona de forma unitaria.
3. **Tercer paso:** Se demuestra (cuando hay relajación) que, para todo $O_R \in \mathcal{O}_R$, $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ alcanza un valor final de equilibrio $\langle O_R \rangle_{\rho_*}$:

$$\lim_{t \rightarrow t_R} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \langle O_R \rangle_{\rho_*} = \sum_*^D \quad (2.36)$$

Se calcula el tiempo de relajación t_R y, con él, la *base de equilibrio final*⁸. El estado de equilibrio ρ_* es un operador de estado que cumple los requisitos usuales, entre ellos, ser autoadjunto; por lo tanto, se puede escribir en forma diagonal en su propia base de autovectores. Esta base será llamada *base de equilibrio final*.

⁷Se entiende que este GTFD es una construcción en desarrollo que no tiene pretensiones de ser completamente general en su estado actual, pero avanza en ese sentido.

⁸Este paso puede realizarse mediante la técnica polar o no.

4. **Cuarto paso:** Se calcula el tiempo de decoherencia t_D analizando los tiempos de decaimiento característicos de los valores medios⁹. Con t_D se construye la *base privilegiada móvil*. Y se demuestra (cuando hay decoherencia) que para todo $O_R \in \mathcal{O}_R$, $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ adopta la forma diagonal en la *base privilegiada móvil*:

$$\lim_{t \rightarrow t_D} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum^D(t) \quad y \quad \langle O_R \rangle_{\rho(t)} \underset{t > t_D}{\cong} \sum^D(t) \quad (2.37)$$

Estrictamente hablando, la ecuación (2.36) sólo indica que el valor medio en el estado global $\rho(t)$ alcanza el equilibrio, es decir, tiene definido su límite cuando $t \rightarrow t_R$. Partiendo de este hecho, en virtud de (2.36) no puede afirmarse simplemente que $\lim_{t \rightarrow t_R} \rho(t) = \rho_*$. Por el contrario, en este caso se dice, según la jerga matemática, que el estado $\rho(t)$, que representa a todo el sistema y evoluciona en forma unitaria, tiene definido sólo un *límite débil*, que se simboliza del siguiente modo:

$$W - \lim_{t \rightarrow t_R} \rho(t) = \rho_* \quad (2.38)$$

Análogamente, la ecuación (2.37) da lugar al siguiente límite débil:

$$W - \lim_{t \rightarrow t_D} (\rho(t) - \rho_R(t)) = 0 \quad (2.39)$$

La interpretación de este límite débil es que, aunque los términos fuera de la diagonal de $\rho(t)$ nunca desaparecen a través de la evolución unitaria, el sistema llega al equilibrio (ec. 2.38) y a la decoherencia (ec. 2.39) desde el punto de vista observacional, es decir, desde el punto de vista dado por los observables relevantes del sistema $O_R \in \mathcal{O}_R$.

Desde esta perspectiva general, resulta claro que la decoherencia y la relajación son procesos descritos por una *operación de grano grueso*, que lleva al límite clásico sólo en ese sentido. Es decir, el fenómeno de interferencia es suprimido porque los términos fuera de la diagonal de $\rho(t)$ desaparecen desde el punto de vista de los observables relevantes.

Los argumentos que defienden la introducción de los cuatro pasos del GTFD serán desarrollados a lo largo de esta tesis. La intención de la presente sección es, simplemente, presentar el esquema y comentar brevemente cómo contribuye a enriquecer la descripción del fenómeno.

2.3.5. El GTFD y EID

El enfoque EID encaja perfectamente en el GTFD, ya que considera los observables de la forma $O_R = O_S \otimes I_E$, donde O_S son observables del sistema y I_E es la identidad en el espacio de Hilbert del ambiente. Sin embargo, el GTFD permite elegir los observables relevantes de otros modos: ésta es la clave para integrar los formalismos de decoherencia sin ambiente y definir el mundo clásico emergente cuando no hay un estado asociado, según se detalla a continuación.

⁹Esto puede hacerse analizando la distribución de polos de la extensión analítica de los valores medios (técnica polar) o con otra técnica.

La inclusión de formalismos de decoherencia sin ambiente

Además de incluir a EID, el GTFD también incluye al enfoque de la decoherencia llamado *decoherencia autoinducida* (en inglés, *Self Induced Decoherence*, SID). El enfoque SID fue desarrollado en la última década con intención de dar cuenta de la decoherencia en sistemas cerrados. Su elaboración abarcó tanto la parte teórica (ver [16]) como los fundamentos matemáticos (ver [35]) y los fundamentos filosóficos (ver [31]). En particular, este enfoque puede explicar el caso de la decoherencia en modelos como el de Casati-Prosen (ver [36]). Sin embargo, la presentación original es susceptible de una crítica: SID trata de la decoherencia en la base de la energía, por lo tanto trata de la relajación de los sistemas¹⁰. Si bien relajación y decoherencia son el mismo fenómeno cuando se trabaja en la base de la energía, el enfoque SID original no puede describir la decoherencia de los sistemas sin ambiente cuando la base privilegiada no es la de la energía.

Pero por intermedio del GTFD es posible tomar las ideas de SID y aplicarlas a sistemas generales que decoheren en bases que no son las de la energía. Esto se logra gracias a la introducción del paso 4 del GTFD:

1. **Primer paso:** Se considera un sistema cuántico con un Hamiltoniano H con espectro continuo: $H|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle$, $\omega \in [0, \infty)$. La restricción en el espacio de observables se introduce al considerar sólo los *observables de van Hove*, cuyas componentes están dadas por

$$\tilde{O}_R(\omega, \omega') = O(\omega)\delta(\omega - \omega') + O(\omega, \omega') \quad (2.40)$$

donde $O(\omega, \omega')$ es una función regular. Por lo tanto, los observables relevantes tienen la siguiente forma

$$O_R = \int_0^\infty O(\omega)|\omega\rangle d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty O(\omega, \omega')|\omega, \omega'\rangle d\omega d\omega' \quad (2.41)$$

donde $|\omega\rangle = |\omega\rangle\langle\omega|$ y $|\omega, \omega'\rangle = |\omega\rangle\langle\omega'|$. Esta restricción en los observables no disminuye la generalidad de SID, ya que los observables que no pertenecen al espacio de van Hove no son experimentalmente accesibles y, por esta razón, en la práctica son siempre aproximados con la precisión deseada por observables regulares para los cuales el enfoque funciona satisfactoriamente (para un argumento completo ver [31]).

2. **Segundo paso:** La evolución temporal del valor medio de un observable $O_R \in \mathcal{O}_{VH}$ en el estado $\rho \in S$ se puede calcular como la acción del funcional $\rho(t)$ sobre el operador O_R (ver [16]):

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \int_0^\infty \rho^*(\omega)O(\omega) d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho^*(\omega, \omega')O(\omega, \omega') e^{i\frac{\omega - \omega'}{\hbar}t} d\omega d\omega' \quad (2.42)$$

¹⁰Se agradece la observación y el interés de Juan Pablo Paz en el trabajo del grupo.

3. **Tercer paso:** Se requiere que la función $\rho^*(\omega, \omega')O(\omega, \omega')$ sea regular, en verdad simplemente \mathbb{L}_1 en la variable $\nu = \omega - \omega'$, de modo que el teorema de Riemann-Lebesgue puede ser aplicado a (2.42)¹¹. Como consecuencia, el segundo término desaparece:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \int_0^\infty \rho^*(\omega) O(\omega) d\omega \quad (2.43)$$

Esto significa que, para $t \rightarrow \infty$, el valor medio de cualquier observable $O_R \in \mathcal{O}_{VH}$ en el estado $\rho \in S$ se puede calcular como si el sistema se encontrara en un estado final estable ρ_* tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \langle O_R \rangle_{\rho_*} \quad (2.44)$$

donde $\rho_* = \int_0^\infty \rho^*(\omega) (\omega | d\omega$, escrito en la base del Hamiltoniano, tiene sólo términos diagonales. Así queda demostrado que la base de equilibrio final es la de la energía.

4. **Cuarto paso:** Se calcula el tiempo de decoherencia t_D analizando los tiempos de decaimiento característicos de los valores medios. Con t_D se construye la *base privilegiada móvil*. Y se demuestra (cuando hay decoherencia) que $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ adopta la forma

$$\lim_{t \rightarrow t_D} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum^D (t) \quad (2.45)$$

La restricción para la *base privilegiada móvil* es que, para tiempos largos, tienda a la *base de equilibrio final*. Un ejemplo de esto se encuentra en las secciones 6.3 y 6.4¹².

De este modo, a través de los cuatro pasos, SID cancela la interferencia y selecciona los estados privilegiados que, eventualmente, pueden ser observados al final del proceso. Así, cuando el valor medio inicial tiene componentes diagonales y no diagonales, el sistema evoluciona de manera tal que luego de un tiempo de decoherencia t_D los términos de interferencia desaparecen pero el valor medio continúa evolucionando hasta que en algún tiempo t_R el valor medio se “detiene”:

$$\sum^D (t) + \sum^{ND} (t) \rightarrow \sum^D (t) \rightarrow \sum^D \quad (2.46)$$

El enfoque fue concebido originalmente para sistemas sin ambiente de espectro continuo, pero puede aplicarse también a sistemas sin ambiente con espectro discreto de energía bajo ciertas condiciones (ver próximo capítulo).

¹¹El teorema de Riemann-Lebesgue expresa matemáticamente el fenómeno de la interferencia destructiva y afirma:

$$\text{Si } f(\nu) \in \mathbb{L}_1 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\nu f(\nu) e^{i\nu t} = 0$$

¹²El formalismo presentado aquí es una ampliación de SID. Un desarrollo completo y detallado se encontrará en un paper que actualmente se encuentra en preparación.

De este modo, el GTFD permite la descripción de decoherencia y relajación en sistemas sin ambiente, unificando EID y SID en un mismo formalismo. Por supuesto, si el GTFD pretende ser un formalismo general, la tarea debe continuar para incluir otros formalismos. Dicha tarea se encuentra en desarrollo.

La identificación del sistema que decohere

El GTFD pone de manifiesto en forma explícita que no hay un criterio unívoco para determinar cuáles son los grados de libertad de interés, revelando el carácter relativo de la decoherencia. En efecto, el paso 1 del GTFD indica que se debe hacer una selección de los observables relevantes según el propósito del observador, en consonancia con las opiniones de Zurek, quien sostiene que el primer paso es definir el sistema de interés.

Por otro lado el GTFD, permite encarar la situación presentada en 2.2.2. Por ejemplo, sea un sistema U compuesto que se puede descomponer de dos formas:

Descomposición 1: $U = S_1 \otimes E_1$.

Descomposición 2: $U = S_2 \otimes E_2$.

Puede darse el caso en que las partes S_1 y S_2 decoheren pero el sistema compuesto U no lo hace. Queda claro que no tiene sentido afirmar que existen dos mundos clásicos emergentes. Para el enfoque de valores medios en este caso el mundo clásico está unívocamente definido por todos los observables $\{O_c\}$ tales que sus valores medios no presentan términos de interferencia luego del tiempo de decoherencia. Por lo tanto, para definir el mundo clásico basta definir el conjunto $\{O_c\}$. Un ejemplo concreto de esta situación se encuentra en el Capítulo 5.

2.4. Conclusiones parciales

En este capítulo se presentó una forma de estudiar a la decoherencia inspirada en los trabajos de Zeh [10]. El enfoque de valores medios propone estudiar la desaparición de los términos de interferencia de dichos valores, mientras que el enfoque ortodoxo centra su atención en el estado. Se mostró que ambos enfoques son equivalentes en los casos tratados por el enfoque ortodoxo, pero el enfoque de valores medios permite seleccionar los observables relevantes de otro modo. Por otro lado, se presentó un esquema general de la decoherencia que, basado en el enfoque de valores medios, atiende a las pretensiones planteadas en 2.2.2:

- El GTFD permite incluir EID y formalismos de decoherencia sin ambiente en un mismo esquema.
- El GTFD explicita en su formulación el carácter relativo de la decoherencia y permite identificar el mundo clásico en términos de los observables cuyos valores medios no presentan términos de interferencia luego del tiempo de decoherencia.

- El GTFD invita a proponer un modo alternativo de calcular el tiempo de decoherencia, en términos del cual, a su vez, puede obtenerse la base privilegiada móvil.

En los capítulos que siguen se aplican estas ideas generales a casos concretos, poniendo de manifiesto sus aspectos positivos.

Capítulo 3

Un esquema unificador enfoques

El GTFD presentado en el capítulo anterior engloba en un mismo formalismo la llegada al equilibrio y la decoherencia. En este sentido, cumple un papel unificador en virtud del cual se pueden enriquecer los aspectos técnicos. Es sabido que cada enfoque de la decoherencia (lo mismo sucede con la llegada al equilibrio) desarrolla su marco conceptual y sus técnicas de cálculo específicas. El objetivo del presente capítulo es mostrar que, bajo la órbita del GTFD, es posible exportar fácilmente los métodos de un enfoque a otro. Comprender esta posibilidad amplía la diversidad de técnicas disponibles para resolver problemas y motiva una mejor comprensión del fenómeno de la decoherencia. El estudio se centra en dos enfoques: la *decoherencia inducida por el ambiente* (EID) desarrollado para ser aplicado a sistemas abiertos, y la *decoherencia autoinducida* (SID) desarrollado para ser aplicado a sistemas sin ambiente con espectro de energía continuo. En particular se desarrollan dos aspectos de la unificación:

- i. El GTFD permite reconocer que la diferencia fundamental entre EID y SID reside en la elección de los observables relevantes. Por lo tanto, debería poder plantearse una versión de SID que fuera aplicable a sistemas con espectro de energía discreto. Esto permite una mejor comparación entre teorías, y
- ii. una vez que se dispone de una versión de SID aplicable a sistemas con espectro de energía discreto, la exportación de los métodos de SID a EID es inmediata. De este modo se enriquece el bagaje de métodos que es posible utilizar para mostrar que un sistema decohere o no.

Este desarrollo puede encontrarse también en [37].

3.1. La generalización de SID al caso discreto

En el capítulo anterior, Sección 2.3.5, el enfoque SID fue reinterpretado para enmarcarlo en el GTFD. Está claro que el argumento fundamental para la desaparición de los términos no diagonales esta basado en el teorema de Riemann-Lebesgue.

3.1.1. El teorema de Riemann-Lebesgue y el caso discreto

El teorema de Riemann-Lebesgue, que es la expresión matemática de la interferencia destructiva, establece que:

$$\text{Si } f(\nu) \in \mathbb{L}_1 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\nu f(\nu) e^{i\nu t} = 0 \quad (3.1)$$

Éste es el teorema sobre el que descansa el enfoque SID de la decoherencia ya que, según lo expuesto en la Sección 2.3.5, se utiliza en el tercer paso del formalismo. Aplicándolo es posible obtener la expresión (2.43) e inferir que el sistema decohere en la base de autovectores del Hamiltoniano.

Es evidente que el teorema de Riemann-Lebesgue estrictamente sólo se aplica en los casos de espectro de energía continuo. Sin embargo, también se sabe que se pueden utilizar los resultados provenientes de la esfera continua en casos cuasi-continuos, esto es, en modelos discretos donde (i) el espectro de energía es cuasi-continuo, i.e., el espaciado entre los niveles de energía es muy pequeño, y (ii) las funciones de la energía utilizadas en el formalismo son tales que las sumatorias en las que participan se pueden aproximar por integrales de Riemann. Estas condiciones son bastante débiles: de hecho, la inmensa mayoría de los modelos físicos estudiados en la bibliografía sobre dinámica, termodinámica, mecánica cuántica y teoría cuántica de campos son cuasi-continuos. El objetivo general de la presente sección es proporcionar una formulación rigurosa de esta idea intuitiva.

En particular, se desarrolla un análogo discreto del teorema de Riemann-Lebesgue, y esta tarea llevará a introducir un lema en términos del cual es posible predecir de un modo teórico si un sistema discreto decohere o no.

3.1.2. Tres casos en el análogo discreto

Para obtener una versión aplicable al caso de espectro discreto, se analiza el análogo de la integral de Riemann en el caso de espectro discreto:

$$R(t) = \int_0^1 d\nu f(\nu) e^{i\nu t} \longrightarrow R_D(t) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{N} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{i\frac{j}{N}t} \quad (3.2)$$

donde $0 \leq j/N \leq 1$, y t es un tiempo adimensional. Como la función $R_D(t)$ es una suma finita de funciones armónicas $f\left(\frac{j}{N}\right) e^{i\frac{j}{N}t}$, tendrá un tiempo de recurrencia o de Poincaré t_P . Dado un estado inicial $R_D(0)$, se busca el tiempo de Poincaré tal que $R_D(0) = R_D(t_P)$. Es decir:

$$\sum_{j=0}^N \frac{1}{N} f\left(\frac{j}{N}\right) \left(e^{i\frac{j}{N}t_P} - 1 \right) = 0 \implies t_P = 2\pi \quad (3.3)$$

Como el sistema vuelve al estado inicial cuando $t = t_P$, no hay análogo discreto riguroso del teorema de Riemann-Lebesgue. Pero en esta instancia se pueden distinguir tres situaciones posibles, a saber:

1. Si $N \rightarrow \infty$, entonces la diferencia $\left| \frac{j+1}{N} - \frac{j}{N} \right|$ (esto es, la diferencia entre los niveles de energía) se vuelve infinitesimal y $t_P \rightarrow \infty$. Por lo tanto, esta situación puede considerarse como un caso de espectro continuo donde el teorema de Riemann-Lebesgue se puede aplicar.
2. Si N es grande, entonces la diferencia $\left| \frac{j+1}{N} - \frac{j}{N} \right|$ es muy pequeña. Por lo tanto, las sumatorias pueden aproximarse por integrales de Riemann. De este modo se reobtiene, en forma aproximada, el caso de espectro continuo donde el teorema se puede aplicar. Esta condición se cumple en un ejemplo concreto en [38]: a pesar del hecho de que, en sentido estricto, un sistema con espectro discreto nunca alcanza el equilibrio debido a la recurrencia de Poincaré, este paper muestra que, para tiempos $t \ll t_P$, el espectro discreto se puede aproximar por un espectro continuo, donde las funciones consideradas satisfacen las condiciones ordinarias de regularidad e integrabilidad.
3. Si N no es grande, entonces la diferencia $\left| \frac{j+1}{N} - \frac{j}{N} \right|$ dista mucho de ser infinitesimal y las sumatorias no pueden aproximarse por integrales de Riemann. En consecuencia, el teorema de Riemann-Lebesgue no es aplicable.

Es importante señalar que la diferencia entre los casos 2. y 3. no es completamente precisa, ya que no se ha definido un criterio para determinar cuándo N es grande y cuándo no. En las secciones que siguen se establecerá este criterio.

3.1.3. Condiciones para la validez del análogo discreto

El problema es encontrar las condiciones para el tiempo t_F tal que $R_D(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_F$: por lo tanto, en la escala de tiempo $[0, t_F]$ se puede considerar que N es lo suficientemente grande como para hacer aplicable la aproximación de espectro continuo. Para hacer frente a este problema, se comienza por considerar un tiempo fijo t y la descomposición de la exponencial de (3.2) como

$$R_D(t) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} f(x_i) e^{ix_i t} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} f(x_i) \cos(x_i t) + i \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} f(x_i) \sin(x_i t) \quad (3.4)$$

donde los puntos $x_i = i/N$ pertenecer a un conjunto discreto $\{x_i\}$ con $i = 0, 1, \dots, N$. Primero se analiza el caso donde $f(x_i) = 1$, esto es,

$$R_D^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} \cos(x_i t) + i \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} \sin(x_i t) \quad (3.5)$$

En particular, se analizarán las sumatorias

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \cos(x_i t) = R_D^{(1C)}(t) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \sin(x_i t) = R_D^{(1S)}(t) \quad (3.6)$$

Se comienza por considerar $R_D^{(1C)}(t)$, porque el caso de $R_D^{(1S)}(t)$ será análogo.

La sumatoria $R_D^{(1C)}(t)$ desaparece cuando sus términos se cancelan de a pares, es decir, cuando para cualquier $x_i \in \{x_i\}$,

$$\cos(x_it) + \cos(x_it + \pi) = 0 \quad (3.7)$$

donde $x_k = x_i + \pi/t \in \{x_i\}$. Como $x_i = i/N$, esto sucede cuando

$$\frac{k}{N} = \frac{i}{N} + \frac{\pi}{t} \Rightarrow k - i = \frac{\pi}{t}N \quad (3.8)$$

donde $k - i \in \mathbb{N}$ y $N \in \mathbb{N}$. Sin embargo, ya que en general $\pi/t \notin \mathbb{N}$, la condición (3.8) no siempre se cumple. Entonces, en lugar de exigir que los términos de $R_D^{(1C)}(t)$ se cancelen entre sí exactamente, sólo se requiere que la diferencia correspondiente sea pequeña en el siguiente sentido:

$$|\cos(x_it) + \cos(x_it + \pi + \delta_j)| < \varepsilon \ll 1 \quad (3.9)$$

donde ahora $x_k = x_i + \pi/t + \delta_i/t \in \{x_i\}$ y

$$\delta_j = \min_i \{\delta_i\} \quad \text{con} \quad \delta_i = x_k t - x_i t - \pi \quad (i = 0 \dots N) \quad (3.10)$$

Si $\delta_j < 1$, el desarrollo de Taylor de $\cos(x_it + \pi + \delta_j)$ conduce a

$$|\cos(x_it) + \cos(x_it + \pi + \delta_j)| \simeq |\sin(x_it) \delta_j + \cos(x_it) \delta_j^2| < \varepsilon \quad (3.11)$$

Pero, por otro lado,

$$\begin{aligned} |\sin(x_it) \delta_j + \cos(x_it) \delta_j^2| &= |\delta_j| |\sin(x_it) + \cos(x_it) \delta_j| \\ &\leq |\delta_j| (|\sin(x_it)| + |\cos(x_it)| |\delta_j|) \leq |\delta_j| (1 + |\delta_j|) \leq |\delta_j| \end{aligned} \quad (3.12)$$

Entonces, si $|\delta_j| < \varepsilon \ll 1$, a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.12) se obtiene la condición de la ecuación (3.9). Por lo tanto, la condición de “cancelación aproximada” es (ver (3.10))

$$|\delta_j| < \varepsilon \ll 1 \quad \text{con} \quad \delta_j = x_k t - x_j t - \pi \quad (3.13)$$

A continuación se expresa esta condición (3.13) en términos del tiempo t . Primero hay que advertir que la condición no se cumple para $t = 0$, ya que $t = 0 \Rightarrow \delta_j = -\pi \Rightarrow |\delta_j| > \varepsilon$. Entonces, la primera condición es $t > 0$. Ahora, recordando que $x_i = i/N$, de la expresión de δ_j en (3.13) se obtiene

$$k - j = \frac{\pi N}{t} + \frac{\delta_j N}{t} \quad (3.14)$$

Pero como $j, k \in \mathbb{N}$, y $j, k \in [0, N]$, entonces para $j < k$,

$$1 \leq k - j \leq N \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \frac{\pi N}{t} + \frac{\delta_j N}{t} \leq N \quad (3.15)$$

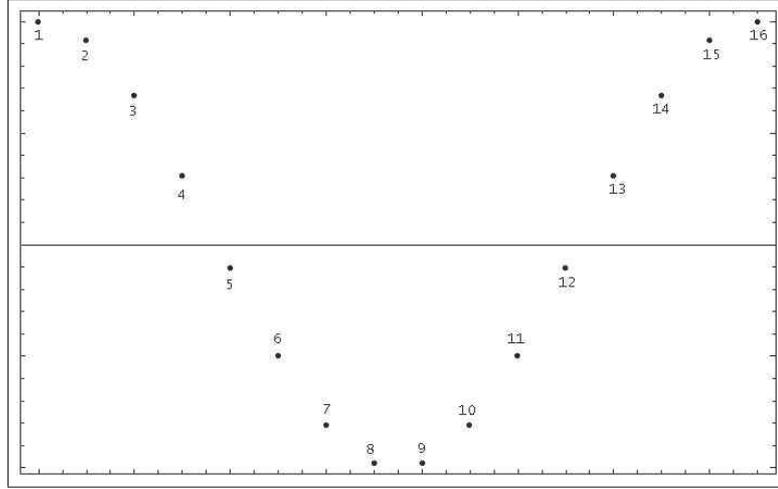


Figura 3.1: El punto 1 se cancela con el punto 9, el punto 2 con el punto 10, ... , el punto 8 con el punto 16.

Así, si $|\delta_j| < \varepsilon \ll 1$, la expresión (3.15) implica que

$$1 \leq \frac{\pi N}{t} \leq N \quad (3.16)$$

Por lo tanto, la condición $|\delta_j| < \varepsilon \ll 1$ de “cancelación aproximada” resulta ser

$$\pi \leq t \leq \pi N \quad (3.17)$$

Hasta este momento se ha demostrado que, para $\pi \leq t \leq \pi N$, $\cos(x_j t)$ se cancela aproximadamente con $\cos(x_j t + \pi + \delta_j)$. La Figura 3.1 muestra un ejemplo de esta situación, donde el punto 1 se cancela con el punto 9, el punto 2 con el punto 10, ..., el punto 8 con el punto 16. Sin embargo, éste no es el caso más general, ya que los puntos se cancelan de a pares sólo cuando $t = 2\pi n$. En el caso general, hay puntos sin contraparte para ser cancelados. Un ejemplo de esta situación se muestra en la Figura 3.2, donde los puntos 13, 14, 15 y 16 no se cancelan.

Para analizar esta situación general, se considera el “peor” caso, cuando los puntos de medio período no se cancelan, es decir, cuando $t = (2n + 1)\pi$. Como en t hay $N + 1$ puntos, en medio período hay $(N + 1)/(2n + 1)$ puntos, cuya contribución $r_\pi(t)$ a la sumatoria $R_D^{(1C)}(t)$ es

$$r_\pi(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N+1}{2n+1}-1} \cos(x_i t) \quad (3.18)$$

Esta contribución esta acotada:

$$r_\pi(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N+1}{2n+1}-1} \cos(x_i t) < \frac{1}{N} \frac{N+1}{2n+1} \cong \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{t} \quad (3.19)$$

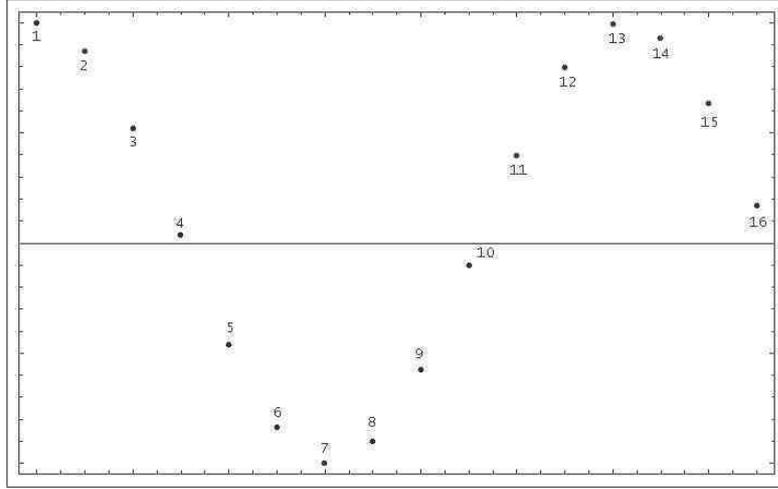


Figura 3.2: Los puntos 13, 14, 15 y 16 no se cancelan.

Entonces, la contribución $r_\pi(t)$ de los puntos que no se cancelan es irrelevante cuando $r_\pi(t) = \pi/t < \varepsilon \ll 1$, y esto suma la condición

$$t \gg \pi \quad (3.20)$$

En resumen, si se combinan las ecuaciones (3.17) y (3.20), se obtiene la condición en la escala de tiempo que garantiza la “cancelación aproximada” de los términos de $R_D^{(1C)}(t)$:

$$\text{Si } \pi \ll t \leq \pi N \quad \Rightarrow \quad R_D^{(1C)}(t) < \varepsilon \ll 1 \quad (3.21)$$

Mediante el mismo argumento aplicado a $R_D^{(1S)}(t)$, se obtiene un resultado análogo que, cuando se combina con (3.21), resulta

$$\text{Si } \pi \ll t \leq \pi N \quad \Rightarrow \quad R_D^{(1)}(t) < \varepsilon \ll 1 \quad (3.22)$$

3.1.4. Un lema para la aplicación del análogo discreto

Hasta este momento se ha estudiado el caso $f(x_i) = 1$; A continuación se generaliza el resultado para $f(x_i) \neq 1$. Con el fin de calcular $R_D(t)$ tal como se define en la ecuación (3.4), hay que pedir un cierto grado de regularidad de la función $f(x_i)$. El primer paso consiste en dividir el conjunto $\{x_i\}$ en G subconjuntos de $(P+1)$ puntos consecutivos:

$$\{x_i\} = \bigcup_{k=1}^G \{x_{(k-1)(P+1)+1}, \dots, x_{k(P+1)}\} = \bigcup_{k=1}^G X_k \quad (3.23)$$

Si ahora se renombran los puntos $x_j \in X_k$, como $j = (k-1)(P+1)+1, \dots, k(P+1)$, se puede reemplazar el índice j por el índice $r_k = j + (1-k)(P+1) - 1$, y se obtiene

$$x_j \in X_k \longrightarrow x_{r_k} \in X_k \quad \text{con } r_k = 0, \dots, P \quad (3.24)$$

Entonces, se define

Definición 1 Sea $\{x_i\}$ un conjunto de puntos uniformemente distribuidos (o equidistantes), con $i \in [0, N]$ y $N \gg 1$. El conjunto $\{x_i\}$ se dice que es *cuasi-continuo de clase 1* si $\exists G \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}$ tal que $P \gg 1$ y $\{x_i\} = \bigcup_{k=1}^G \{x_{(k-1)(P+1)+1}, \dots, x_{k(P+1)}\} = \bigcup_{k=1}^G X_k$. Al conjunto X_k se le llama la k componente de la descomposición cuasi-continua.

Si la función $f(x_{r_k})$ es casi constante en X_k , i.e.

$$f(x_{r_k}) \cong C_k \quad (3.25)$$

entonces, puede definirse

Definición 2 Sea $f(x_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función discreta definida sobre el conjunto cuasi-continuo $\{x_i\}$ de clase 1. Si en cada componente X_k de la descomposición cuasi-continua $f(x_{r_k}) \cong C_k$, con $x_{r_k} \in X_k$, se dice que $f(x_i) \in \mathcal{L}_1$.

Por lo tanto, cuando $f(x_i) \in \mathcal{L}_1$, la función discreta $R_D(t)$ se puede escribir como

$$R_D(t) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} f(x_i) e^{ix_i t} = \sum_{k=1}^G \frac{P}{N} \left(\sum_{r_k=0}^P \frac{1}{P} f(x_{r_k}) e^{ix_{r_k} t} \right) = \sum_{k=1}^G \frac{P}{N} C_k \left(\sum_{r_k=0}^P \frac{1}{P} e^{ix_{r_k} t} \right) \quad (3.26)$$

Si se define la función

$$R_D^{(k)}(t) = \sum_{r_k=0}^P \frac{1}{P} e^{ix_{r_k} t} \quad (3.27)$$

entonces la función discreta $R_D(t)$ resulta

$$R_D(t) = \sum_{k=1}^G \frac{P}{N} C_k R_D^{(k)}(t) \quad (3.28)$$

Bajo esta forma, la condición de la ecuación (3.22) obtenida en la subsección anterior se puede aplicar a cada $R_D^{(k)}(t)$:

$$\text{Si } \pi \ll t \leq \pi P \quad \Rightarrow \quad R_D^{(k)}(t) < \varepsilon \ll 1 \quad (3.29)$$

Cuando se cumple esta condición, la sumatoria $R_D(t)$ resulta

$$R_D(t) = \sum_{k=1}^G \frac{P}{N} C_k R_D^{(k)}(t) < \sum_{k=1}^G \frac{P}{N} C_k \varepsilon_k \leq \sum_{k=1}^G \frac{P}{N} C \varepsilon = \frac{PG}{N} C \varepsilon = C \varepsilon \quad (3.30)$$

donde $\varepsilon = \max_k \{\varepsilon_k\}$ y $C = \max_k \{C_k\}$. Como consecuencia de ello, si tenemos en cuenta que $t_P = 2\pi$, se ha demostrado que

Lema 1. Sea $f(x_i)$ definida sobre el conjunto cuasi-continuo $\{x_i\}$ de clase 1, con $i = 1 \dots N$. Si $f(x_i) \in \mathcal{L}_1$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_P/2} \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} f(x_i) e^{ix_i t} \cong 0 \quad (3.31)$$

Hay diferentes tipos de funciones para las que la sumatoria $R_D(t)$ se anula y que podrían ser caracterizadas otros lemas, pero esos casos no serán considerados en este trabajo. Sin embargo, con esta función es posible introducir una observación de orden práctico. Dada una función $f(x_i)$, su *transformada de fourier discreta* (DFT por sus siglas en inglés), que se utiliza en el análisis de señales (ver [39], [40], [41] y [42]) se define como

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{N} f(x_i) e^{ix_it} \quad (3.32)$$

Esta observación puede ser muy útil en la práctica, en particular en los casos en que el Lema 1 es difícil de aplicar. De hecho, cuando se cae en la cuenta de que la sumatoria $R_D(t)$ correspondiente a la función $f(x_i)$ es precisamente la DFT de $f(x_i)$, se pueden utilizar todas las propiedades de la DFT –como linealidad, simetría, time-shifting, frequency-shifting y los teoremas de convolución– para estudiar $R_D(t)$. Además, se puede aprovechar la gran cantidad de software diseñado para calcular DFT, ampliamente utilizados en física e ingeniería. Todos estos recursos, que son las herramientas estándar del análisis de señales, pueden resultar muy útiles para el estudio de decoherencia en modelos discretos.

3.1.5. Una versión discreta de SID

Se tomará en consideración un sistema cuántico asociado a un Hamiltoniano H con espectro de energía discreto, es decir $H|\omega_i\rangle = \omega_i|\omega_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots$, y se aplica el GTFD:

1. **Primer paso:** Se eligen los observables relevantes de la forma

$$O_R = \sum_i O_i |\omega_i\rangle \langle \omega_i| + \sum_{i \neq j} O_{ij} |\omega_i\rangle \langle \omega_j| \quad (3.33)$$

Estos observables relevantes pertenecen al espacio de “van Hove”¹ \mathcal{O}_{VH} cuya base es $\{|\omega_i\rangle \langle \omega_i|, |\omega_i\rangle \langle \omega_j|\}$.

2. **Segundo paso:** El valor medio de los observables $O_R \in \mathcal{O}_{VH}$ en el estado $\rho \in S$ puede ser calculado como la traza del funcional ρ aplicado al operador O_R , es decir, $\langle O_R \rangle_\rho = Tr(\rho O_R)$, y resulta

$$\langle O_R \rangle_\rho = \sum_i \rho_i O_i + \sum_{i \neq j} \rho_{ij}^* O_{ij} \quad (3.34)$$

¹Este espacio está bien definido en el caso de espectro continuo. En el caso de espectro discreto serían los observables tales que se pueda aplicar el Lema 1 en el valor medio.

donde ρ_i y O_i son tales que la primer sumatoria está bien definida. Por otro lado, como se sabe, la evolución temporal del valor de medio está dada por

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum_i \rho_i O_i + \sum_{i \neq j} \rho_{ij}^* O_{ij} e^{i \frac{\omega_i - \omega_j}{\hbar} t} \quad (3.35)$$

$$= \Sigma^D + \Sigma^{ND}(t) \quad (3.36)$$

3. **Tercer paso:** Los elementos de matriz $\rho_{ij}^* O_{ij}$ y las diferencias de energías $\omega_i - \omega_j$ se usan para definir una f tal que

$$\Sigma^{ND}(t) = R_D(t) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{N} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{i \frac{j}{N} t} \quad (3.37)$$

De este modo se puede aplicar el Lema 1 de la subsección anterior para determinar si el sistema relaja o no. En el caso afirmativo se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum_i \rho_i O_i \quad (3.38)$$

4. **Cuarto paso:** Se calcula el tiempo de decoherencia t_D analizando los tiempos característicos de los valores medios. Con t_D se construye la *base privilegiada móvil*. Y se demuestra (cuando hay decoherencia) que $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ adopta la forma

$$\lim_{t \rightarrow t_D} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum^D(t) \quad (3.39)$$

Esto significa que, para $t \rightarrow \infty$, el valor medio de cualquier observable $O_R \in \mathcal{O}_{VH}$ en un estado $\rho \in \mathcal{S}$ puede calcularse como si el sistema se encontrara en un estado final estable $\rho_* = \sum_i \rho_i |\omega_i\rangle \langle \omega_i|$, que es diagonal en la autobase del Hamiltoniano, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \langle O_R \rangle_{\rho_*} \quad (3.40)$$

Este resultado también puede expresarse como un límite débil:

$$W - \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_* \quad (3.41)$$

Como ya se ha señalado, la estructura formal del enfoque SID se aplica, en forma estricta, a sistemas con espectro de energía continuo. No obstante, esta versión simplificada puede aplicarse a sistemas con espectro discreto de energía cuando se cumplen los requisitos del Lema 1.

3.2. Exportación de los métodos de SID a EID

El GTFD permite exportar los métodos de SID a EID. Por ejemplo, el Lema 1 desarrollado en la sección anterior podría ser utilizado en el tratamiento de los modelos de EID. Para ello se enmarca el enfoque EID en el GTFD y se introduce el Lema 1.

3.2.1. El lema 1 en EID

Como fue señalado, EID es un enfoque concebido para sistemas abiertos ya que, como su nombre lo indica, considera al sistema bajo estudio S acompañado de un ambiente E que induce la decoherencia. El sistema compuesto $S \cup E$ forma el universo U y queda claro que, al distinguir las partes S y E , lo que se introduce es un corte o partición que equivale a elegir los observables relevantes. Los pasos 1 a 4 no están explicitados en el formalismo original de EID; sin embargo, el enfoque se puede enmarcar en el esquema general que toma en cuenta el sistema cerrado completo U .

El universo U es un sistema cerrado que tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H} que es el producto de los espacios de Hilbert que corresponden al sistema propio S (\mathcal{H}_S) y al ambiente E (\mathcal{H}_E), es decir, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. El correspondiente espacio de von Neumann-Liouville de U es $\mathcal{L} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{L}_S \otimes \mathcal{L}_E$, donde $\mathcal{L}_S = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ y $\mathcal{L}_E = \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_E$. Se tomarán en consideración el Hamiltoniano H_S del sistema S con espectro de energía discreto, es decir $H_S|\omega_j\rangle = \omega_j|\omega_j\rangle$, y el Hamiltoniano H_E del ambiente E con espectro de energía discreto, es decir $H_E|\omega_\alpha\rangle = \omega_\alpha|\omega_\alpha\rangle$. El Hamiltoniano del sistema total U es $H = H_S + H_E + H_{int}$, también con espectro de energía discreto $H|\omega_{j\alpha}\rangle = \omega_{j\alpha}|\omega_{j\alpha}\rangle$ donde $\omega_{j\alpha} = \omega_j + \omega_\alpha + \omega_{int}$, o bien $H|\omega_\nu\rangle = \omega_\nu|\omega_\nu\rangle$ donde $j\alpha \rightarrow \nu$ y $\omega_{j\alpha} = \omega_\nu$.

1. **Primer paso:** Un observable genérico O de U pertenece a \mathcal{L} y se representa

$$O = \sum_{\nu, \nu'} O_{\nu\nu'} |\omega_\nu\rangle \langle \omega_{\nu'}| = \sum_{j, \alpha, j', \alpha'} O_{j\alpha j'\alpha'} |\omega_{j\alpha}\rangle \langle \omega_{j'\alpha'}| \quad (3.42)$$

En el caso considerado los observables relevantes son los del sistema S . Por lo tanto, la parte del observable O que actúa sobre el subespacio \mathcal{H}_E , que es la que se pretende ignorar, debe ser la identidad, $I_E \in \mathcal{L}_E$ ($\delta_{\alpha\alpha'}$ en componentes), mientras la parte que actúa sobre \mathcal{H}_S no tiene más restricciones que $O_S \in \mathcal{L}_S$ autoadjunto ($O_{jj'}$ en componentes). En consecuencia, los observables relevantes O_R adoptan la siguiente forma:

$$O_R = \sum_{\nu, \nu'} (O_R)_{\nu\nu'} |\omega_\nu\rangle \langle \omega_{\nu'}| = \sum_{j, \alpha, j', \alpha'} O_{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} |\omega_{j\alpha}\rangle \langle \omega_{j'\alpha'}| \quad (3.43)$$

o bien

$$O_R = O_S \otimes I_E \in \mathcal{O}_R \quad (3.44)$$

donde $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{L}$ es un subespacio de todos los posibles observables relevantes, en particular, el subespacio que considera las propiedades del sistema S .

2. **Segundo paso:** Dado un estado ρ del sistema completo U , con componentes $\rho_{j\alpha j'\alpha'}$, el valor medio de cualquier observable relevante $O_R \in \mathcal{O}_R$ se escribe como

$$\begin{aligned} \langle O_R \rangle_\rho &= Tr(\rho O_R) = Tr(\rho(O_S \otimes I_E)) \\ &= \sum_{j, j'} O_{jj'} \sum_{\alpha\alpha'} \rho_{j\alpha j'\alpha'}^* \delta_{\alpha\alpha'} = \sum_{j, j'} O_{jj'} \sum_{\alpha} \rho_{j\alpha j'\alpha}^* \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se definen entonces las componentes del *estado reducido* de S , ρ_S ,

$$\sum_{\alpha} \rho_{j\alpha j'\alpha} = \rho_{ij} \quad (3.46)$$

donde \mathcal{O}'_R es el espacio dual de \mathcal{O}_R . Con esta definición, dado un estado ρ , el valor medio $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ se puede expresar del siguiente modo:

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} = Tr (\rho(t) O_R) = Tr (\rho_S(t) O_S) = \langle O_S \rangle_{\rho_S(t)} \quad (3.47)$$

o bien

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum_{\nu} (O_R)_{\nu\nu} \rho_{\nu\nu}^* + \sum_{\nu, \nu'} (O_R)_{\nu\nu'} \rho_{\nu\nu'}^* e^{i \frac{\omega_{\nu'} - \omega_{\nu}}{\hbar} t} \quad (3.48)$$

3. **Tercer paso:** Los elementos de matriz $(O_R)_{\nu\nu'} \rho_{\nu\nu'}^*$ y las diferencias de energías $\omega_{\nu'} - \omega_{\nu}$ se usan para definir una función f tal que

$$\Sigma^{ND}(t) = R_D(t) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{N} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{i \frac{j}{N} t} \quad (3.49)$$

De este modo se puede aplicar el Lema 1 de la Sección 3.1.4 para determinar si el sistema relaja o no. En el caso afirmativo se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum_i \rho_i O_i \quad (3.50)$$

4. **Cuarto paso:** Se calcula el tiempo de decoherencia t_D analizando los tiempos característicos de los valores medios. Con t_D se construye la *base privilegiada móvil*. Y se demuestra (cuando hay decoherencia) que $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ adopta la forma

$$\lim_{t \rightarrow t_D} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum^D(t) \quad (3.51)$$

La expresión (3.51) significa que, para $t \rightarrow \infty$, el valor medio de cualquier observable $O_R \in \mathcal{O}_{VH}$ en un estado $\rho \in S$ puede calcularse como si el sistema se encontrara en un estado final estable $\rho_* = \sum_i \rho_i |\omega_i\rangle \langle \omega_i|$, que es diagonal en la auto-base del Hamiltoniano, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \langle O_R \rangle_{\rho_*} \quad (3.52)$$

Este resultado también puede expresarse como un límite débil:

$$W - \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_* \quad (3.53)$$

De este modo, las técnicas desarrolladas originalmente para una versión discreta de SID pueden utilizarse en la versión discreta de EID. Este método será utilizado en el Capítulo 4 para resolver el conocido modelo de spines.

3.3. Conclusiones parciales

En este capítulo se mostró cómo el GTFD puede actuar como marco para la unificación de los formalismos existentes para la decoherencia y la relajación. Esto puede lograrse también desde el punto de vista práctico. Para ello se desarrolló una versión de SID aplicable a sistemas con espectro discreto de energía. Este nuevo formalismo incluye el Lema 1, que brinda un criterio para decidir si un sistema decohere.

Por otra parte, se ha mostrado cómo la gran cantidad de métodos matemáticos de la ingeniería de software basado en la Transformada de Fourier Discreta puede utilizarse para predecir la decoherencia en modelos discretos.

Finalmente, con ayuda del GTFD se exportó la técnica desarrollada al enfoque EID. Simplemente cambiando la elección de observables relevantes es posible aplicar el Lema 1 a sistemas abiertos. Estas ideas serán utilizadas en un ejemplo concreto en el próximo capítulo, a fin de ilustrar la aplicación de la técnica.

Capítulo 4

Sobre el modelo de spines

En este capítulo se estudia un ejemplo bien conocido y extensamente tratado en la bibliografía sobre decoherencia. El ejemplo en cuestión ha sido elegido teniendo en cuenta que: (i) el problema es susceptible de ser tratado desde el enfoque EID porque es fácil tomar la traza parcial respecto de distintas partes del sistema; (ii) el problema es susceptible de ser tratado desde otros enfoques porque el Hamiltoniano puede ser fácilmente diagonalizado. La tarea realizada en esta sección permite echar luz sobre algunos aspectos del GTFD y las libertades que confiere la perspectiva de los valores medios. Los resultados aquí presentados pueden también encontrarse en [43], [44], [45], [37] y [46]. Es importante tener presente que se tratará un “modelo de juguete” de la decoherencia y no un modelo completo para el límite clásico.

4.1. Presentación del modelo a tratar

Se considera un sistema total U compuesto por las siguientes partes: (i) un *sistema* S , constituido por una partícula P de spin $\frac{1}{2}$, que tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H}_S . Los dos estados que forman la base ortonormal del operador de spin $S_{S,\vec{v}}$ en la dirección \vec{v} son $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, y cumplen (tomando $\hbar = 1$, como en el resto del capítulo)

$$S_{S,\vec{v}} |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \quad \text{y} \quad S_{S,\vec{v}} |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle \quad (4.1)$$

(ii) un *ambiente* E , constituido por una colección de N partículas P_i de spin $\frac{1}{2}$, cada una de las cuales tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H}_i , con $i = 1, 2, \dots, N$. Los estados que forman la base ortonormal de los operadores de spin $S_{i,\vec{v}}$ en la dirección \vec{v} son $|\uparrow_i\rangle, |\downarrow_i\rangle$, y cumplen

$$S_{i,\vec{v}} |\uparrow_i\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_i\rangle \quad \text{y} \quad S_{i,\vec{v}} |\downarrow_i\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow_i\rangle \quad (4.2)$$

El espacio de Hilbert total del sistema compuesto $U = S \cup E$ es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$. Por lo tanto, un estado producto del sistema total se escribe como

$$|\psi\rangle = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i|\uparrow_i\rangle + \beta_i|\downarrow_i\rangle) \right) \quad (4.3)$$

Los Hamiltonianos libres del sistema y el ambiente se consideran nulos:

$$H_S = H_E = 0 \quad (4.4)$$

El Hamiltoniano del sistema compuesto $H = H_S + H_E + H_{SE}$ es (ver [6] y [17])

$$H = H_{SE} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \sum_{i=1}^N g_i (|\uparrow_i\rangle\langle\uparrow_i| - |\downarrow_i\rangle\langle\downarrow_i|) \bigotimes_{j \neq i}^N I_j \quad (4.5)$$

donde $I_j = |\uparrow_j\rangle\langle\uparrow_j| + |\downarrow_j\rangle\langle\downarrow_j|$ es la identidad del subespacio \mathcal{H}_j . En este caso, el Hamiltoniano ya esta escrito en forma diagonal puesto que sólo contiene términos del tipo $|\uparrow\rangle\langle\uparrow|, |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, |\uparrow_i\rangle\langle\uparrow_i|, |\downarrow_i\rangle\langle\downarrow_i|$. Entonces, los autovectores son $|\uparrow\rangle|\uparrow_1\rangle \dots |\uparrow_i\rangle \dots |\uparrow_{N-1}\rangle|\uparrow_N\rangle, |\uparrow\rangle|\uparrow_1\rangle \dots |\uparrow_i\rangle \dots |\uparrow_{N-1}\rangle|\downarrow_N\rangle, \dots, |\downarrow\rangle|\downarrow_1\rangle \dots |\downarrow_i\rangle \dots |\downarrow_{N-1}\rangle|\downarrow_N\rangle$. Para simplificar, se los representará como $|\mathcal{A}_\lambda\rangle$, con $\lambda = 1, 2, \dots, 2^{N+1}$. Entonces hay:

- Dos autoestados con todas las partículas de E con spin $|\uparrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H |\mathcal{A}_1\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N g_i \right) |\mathcal{A}_1\rangle \\ |\mathcal{A}_{-1}\rangle &= |\downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H |\mathcal{A}_{-1}\rangle = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N g_i \right) |\mathcal{A}_{-1}\rangle \end{aligned} \quad (4.6)$$

- $2N$ autoestados con una sola partícula de E con spin $|\downarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_j\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H |\mathcal{A}_j\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N g_i - g_k \right) |\mathcal{A}_j\rangle \\ |\mathcal{A}_{-j}\rangle &= |\downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H |\mathcal{A}_{-j}\rangle = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N g_i - g_k \right) |\mathcal{A}_{-j}\rangle \\ \text{con } j &= 2, 3, \dots, N+1 \text{ y } k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.7)$$

- $(N-1)N$ autoestados con dos partículas de E con spin $|\downarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_j\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H |\mathcal{A}_j\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N g_i - g_k - g_l \right) |\mathcal{A}_j\rangle \\ |\mathcal{A}_{-j}\rangle &= |\downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H |\mathcal{A}_{-j}\rangle = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N g_i - g_k - g_l \right) |\mathcal{A}_{-j}\rangle \\ \text{con } j &= N+2, N+3, \dots, N+1 + \frac{(N-1)N}{2} \text{ y } k, l = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.8)$$

- Para el resto de los autoestados con más spines $|\downarrow\rangle$ el procedimiento es análogo.

Por lo tanto, cuando las constantes de acoplamiento g_i son números aleatorios, todos los autovalores son distintos. Por otro lado, cuando las constantes de acoplamiento son todas iguales $g_i = g$, se obtiene que hay

$$\begin{aligned}
& 2 \text{ autoestados con autovalores } \frac{N}{2}g \\
& 2N \text{ autoestados con autovalores } \frac{N-2}{2}g \\
& \vdots \\
& 2 \frac{N!}{(N-l)!l!} \text{ autoestados con autovalores } \frac{N-2l}{2}g
\end{aligned} \tag{4.9}$$

con $l = 0, 1, \dots, N$. En este caso, está claro que H es degenerado: tiene 2^{N+1} autoestados pero $2N$ autovalores distintos. En ambos casos el número de energías posibles distintas es grande cuando N es un número grande.

Se considera un estado inicial puro de la forma (4.3), donde los coeficientes α_i y β_i son aleatorios con la restricción $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$. Para simplificar la notación se agrupan los grados de libertad del ambiente en sólo un ket $|\mathcal{E}(0)\rangle$. Entonces (4.3) se escribe

$$|\psi(0)\rangle = a |\uparrow\rangle |\mathcal{E}(0)\rangle + b |\downarrow\rangle |\mathcal{E}(0)\rangle \tag{4.10}$$

El estado $|\psi(0)\rangle$ evoluciona bajo la acción de H con el operador evolución temporal $\mathcal{U}(t) = e^{-iHt}$, es decir,

$$\mathcal{U}(t) = e^{-i|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \sum_{j=1}^N g_j \frac{1}{2} (|\uparrow_j\rangle\langle\uparrow_j| - |\downarrow_j\rangle\langle\downarrow_j|) t} e^{i|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \sum_{j=1}^N g_j \frac{1}{2} (|\uparrow_j\rangle\langle\uparrow_j| - |\downarrow_j\rangle\langle\downarrow_j|) t} \tag{4.11}$$

donde el primer término puede llamarse $\mathcal{U}_\uparrow(t)$ y el segundo $\mathcal{U}_\downarrow(t)$, de modo que $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_\uparrow(t)\mathcal{U}_\downarrow(t)$. Se definen además $|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle$ y $|\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle$, de modo que se cumpla

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \mathcal{U}(t)|\psi(0)\rangle = a\mathcal{U}_\uparrow(t) |\uparrow\rangle |\mathcal{E}(0)\rangle + b\mathcal{U}_\downarrow(t) |\downarrow\rangle |\mathcal{E}(0)\rangle \\
&= a |\uparrow\rangle |\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle + b |\downarrow\rangle |\mathcal{E}_\downarrow(t)\rangle
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Por lo tanto:

$$|\mathcal{E}_\uparrow(t)\rangle = |\mathcal{E}_\downarrow(-t)\rangle = \bigotimes_{i=1}^N (\alpha_i e^{ig_it/2} |\uparrow_i\rangle + \beta_i e^{-ig_it/2} |\downarrow_i\rangle) \tag{4.13}$$

La matriz densidad que corresponde al estado evolucionado $|\psi(t)\rangle$ es, como siempre, $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$.

4.2. Aplicación del esquema general de la decoherencia

En primer lugar, se introducirán ciertos observables $O^C \in \mathcal{O}$, a partir de los cuales se definirán los observables relevantes para cada caso a tratar. La forma genérica de los O^C será

$$O^C = \sum_{\lambda\lambda'} O_{\lambda\lambda'}^C |\phi_\lambda\rangle \langle\phi_{\lambda'}| \quad (4.14)$$

Explícitamente¹ (ver [17]),

$$O^C = \begin{pmatrix} s_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + s_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + \\ + s_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + s_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \end{pmatrix} \bigotimes_{i=1}^N \begin{pmatrix} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\downarrow_i| + \\ + \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\downarrow_i| \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Como los operadores deben ser hermíticos, las componentes de la diagonal $s_{\uparrow\uparrow}$, $s_{\downarrow\downarrow}$, $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)}$, $\epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)}$ deben ser números reales y las componentes fuera de ella son, en general, números complejos que deben cumplir $s_{\uparrow\downarrow} = s_{\downarrow\uparrow}^*$, $\epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)*}$.

Los valores medios de los observables $O^C \in \mathcal{O}$ en el estado $\psi(t)$ pueden calcularse como

$$\langle O^C \rangle_{\psi(t)} = (|a|^2 s_{\uparrow\uparrow} + |b|^2 s_{\downarrow\downarrow}) \Gamma_0(t) + 2 \operatorname{Re} [ab^* s_{\downarrow\uparrow} \Gamma_1(t)] \quad (4.16)$$

donde

$$\Gamma_0(t) = \prod_{i=1}^N \left[|\alpha_i|^2 \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} + |\beta_i|^2 \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} + \alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} e^{-igt} + (\alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)})^* e^{igt} \right] \quad (4.17)$$

$$\Gamma_1(t) = \prod_{i=1}^N \left[|\alpha_i|^2 \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} e^{igt} + |\beta_i|^2 \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} e^{-igt} + \alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} + (\alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)})^* \right] \quad (4.18)$$

4.3. Caso (a): Observando la partícula S

Se consideran una división *sistema-ambiente* en la que al *sistema* S es la partícula P fuertemente acoplada con el *ambiente* $E = \bigcup_i P_i$.

1. **Primer paso:** Los observables relevantes son sólo aquellos que corresponden al *sistema* S fuertemente acoplado con el *ambiente* E . Esto equivale a dividir el sistema compuesto U en las partes originalmente planteadas, $U = S \cup E$. Según la ecuación (3.44), estos observables $O_R \in \mathcal{O}$ se escriben como

$$O_R = \left(\sum_{s,s'=\uparrow,\downarrow} s_{ss'} |s\rangle \langle s'| \right) \bigotimes_{i=1}^N I_i = O_S \bigotimes_{i=1}^N I_i \quad (4.19)$$

Esto sucede cuando, en la expresión (4.15), $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} = 1$ y $\epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = 0$.

¹Si bien los observables más generales pueden ser escritos como suma de productos tensoriales, los O^C aquí presentados tienen la generalidad suficiente para los propósitos de esta tesis.

2. **Segundo paso:** El valor medio de O_R en el estado $\psi(t)$ de U resulta

$$\langle O_R \rangle_{\psi(t)} = |a|^2 s_{\uparrow\uparrow} + |b|^2 s_{\downarrow\downarrow} + \text{Re}[ab^* s_{\downarrow\uparrow} r(t)] \quad (4.20)$$

donde

$$r(t) = \langle \mathcal{E}_{\downarrow}(t) | \mathcal{E}_{\uparrow}(t) \rangle = \prod_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 e^{-ig_it} + |\beta_i|^2 e^{ig_it}) \quad (4.21)$$

y

$$|r(t)|^2 = \prod_{i=1}^N (|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2|\alpha_i|^2 |\beta_i|^2 \cos 2g_it) = \prod_{i=1}^N r_i(t) \quad (4.22)$$

3. **Tercer paso:** En este caso la base privilegiada es la base de autoestados de la energía. Por lo tanto, según lo comentado en la Sección 2.3.3 del Capítulo 2, en este caso no hay diferencia entre decoherencia y relajación; entonces es posible utilizar alguno de los métodos de SID extrapolado a EID mediante el esquema general. Aunque hay muchos métodos usualmente utilizados para calcular el límite de este valor medio, en este caso se recurrirá al método de la Sección 2.3.3 sólo con fines ilustrativos.

La expresión (4.20) se puede escribir como

$$\langle O_R \rangle_{\psi(t)} = \sum_i \rho_i O_i + \sum_{\nu} \rho_{\nu}^* O_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} \quad (4.23)$$

donde

$$\sum_i \rho_i O_i = |a|^2 s_{\uparrow\uparrow} + |b|^2 s_{\downarrow\downarrow} \quad (4.24)$$

y

$$\sum_{\nu} \rho_{\nu}^* O_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} = 2 \text{Re}[ab^* s_{\downarrow\uparrow} \prod_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 e^{-ig_it} + |\beta_i|^2 e^{ig_it})] \quad (4.25)$$

Esta última expresión es un producto binomial, y es fácil constatar que se puede escribir como una sumatoria. De hecho, se puede hacer siguiendo el siguiente razonamiento. Primero se define el índice ν que establece el número de términos de la sumatoria: como en (4.25) hay 2^N términos, entonces $\nu = 0, 1, \dots, 2^N - 1$. Se define además el número $p_{\nu,i}$ como el i -ésimo dígito del número ν escrito en base 2. Por otro lado cada término de la suma es un producto de N exponenciales del tipo e^{-ig_it} , que pueden ser agrupadas en una sola exponencial $e^{i\omega_{\nu} t}$. Los números ω_{ν} son todas las posibles sumas y restas entre los coeficientes g_i . Para obtener un ω_{ν} en particular, se calcula

$$\omega_{\nu} = \left(\sum_{i=1}^N (-1)^{p_{\nu,i}} g_i \right) \quad (4.26)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\nu = 0 = 0 \cdots 000_b &\longrightarrow \omega_0 = \left(\sum_{i=1}^N g_i \right) \\
\nu = 1 = 0 \cdots 001_b &\longrightarrow \omega_1 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} g_i - g_N \right) \\
\nu = 2 = 0 \cdots 010_b &\longrightarrow \omega_2 = \left(\sum_{i=1}^{N-2} g_i - g_{N-1} + g_N \right) \\
\nu = 3 = 0 \cdots 011_b &\longrightarrow \omega_3 = \left(\sum_{i=1}^{N-2} g_i - g_{N-1} - g_N \right) \\
\nu = 4 = 0 \cdots 100_b &\longrightarrow \omega_4 = \left(\sum_{i=1}^{N-2} g_i - g_{N-2} + g_{N-1} + g_N \right) \\
&\vdots \\
\nu = 2^N - 1 = 1 \cdots 1_b &\longrightarrow \omega_{2^N-1} = \left(- \sum_{i=1}^N g_i \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Por otro lado, la función discreta $f_d(\omega_\nu)$ es

$$f_d(\omega_\nu) = \prod_{k=1}^N |\gamma_{\nu,k}|^2 \tag{4.28}$$

donde $\gamma_{\nu,k} = (\alpha_k - \beta_k) p_{\nu,k} + \beta_k$, que es igual a α_k si $p_{\nu,k} = 1$ y es igual a β_k si $p_{\nu,k} = 0$. Luego,

$$\prod_{i=1}^N (|\alpha_i|^2 e^{-ig_it} + |\beta_i|^2 e^{ig_it}) = \sum_{\nu=0}^{2^N-1} f_d(\omega_\nu) e^{-i\omega_\nu t} \tag{4.29}$$

Así se obtiene

$$\langle O_R \rangle_{\psi(t)} = \sum_i \rho_i O_i + 2 \operatorname{Re}[ab^* s_{\downarrow\uparrow} \sum_{\nu=0}^{2^N-1} f_d(\omega_\nu) e^{-i\omega_\nu t}] \tag{4.30}$$

Para aplicar el lema 1 es necesario que $f_d(\omega_\nu) \in \mathcal{L}_1$. Primero se considera que $\{\omega_\nu\}$ tiene 2^N elementos; entonces para $N \gg 1$, $\{\omega_\nu\}$ es *cuasi-continuo de clase 1*. Por otro lado, $f_d(\omega_\nu)$ definida en (4.28), donde $0 < |\gamma_{\nu,k}|^2 < 1$, es el producto de N números menores que 1. Entonces,

$$\begin{aligned}
|\gamma_{\nu,k}|^2 < 1 &\Rightarrow f_d(\omega_\nu) = \prod_{k=1}^N |\gamma_{\nu,k}|^2 \ll 1 \text{ if } N \gg 1 \\
&\Rightarrow 0 < f_d(\omega_\nu) < \varepsilon \ll 1 \\
&\Rightarrow \max_{\mu,\nu} (|f_d(\omega_\mu) - f_d(\omega_\nu)|) \ll 1
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Este es requisito es suficiente para que $f_d(\omega_\nu) \in \mathcal{L}_1$. Entonces, por Lema 1,

$$\langle O_R \rangle_{\psi(t)} \rightarrow \sum_i \rho_i O_i \quad (4.32)$$

y el sistema decohere.

Análisis del tiempo de Poincaré.

Un análisis completo de las condiciones que tiene que tener la distribución de constantes de acoplamiento para producir un decaimiento gaussiano en la función $r(t)$ puede encontrarse en [47]². En esta sección se pretende mostrar un análisis mínimo que permita mostrar la aplicación del GTFD.

Cada $r_i(t)$ de la expresión (4.22) vuelve a su estado inicial por primera vez en un tiempo t_{P_i} , dado por $2g_i t_{P_i} = 2\pi \Rightarrow t_{P_i} = \pi/g_i$. Por este motivo $|r(t)|^2$ vuelve a su estado inicial por primera vez cuando todos los factores $r_i(t)$ vuelvan a su estado inicial simultáneamente. Por lo tanto el tiempo de Poincaré t_P de este modelo es aquél en el que todos los factores $r_i(t)$ vuelvan a su estado inicial simultáneamente. Pueden distinguirse tres casos:

- (i) Todos los g_i tienen el mismo valor: $g_i = g$, para todo i . Entonces el valor medio de las constantes de acoplamiento es $\bar{g}_i = g$. En este caso todos los factores $r_i(t)$ vuelven al estado inicial al mismo tiempo $t_{P_i} = \pi/g$. El tiempo de Poincaré del sistema es $t_P = \pi/g = \pi/\bar{g}_i$, y no depende del número de partículas N .
- (ii) Todos los g_i son tales que $g_i = n_i g_{\min}$, con $n_i \in \mathbb{N}$. En este caso, t_P es el t_{P_i} más grande, que se corresponde con el g_i más chico, g_{\min} : $t_P = \pi/g_{\min}$. Entonces, dado un g_{\min} , el tiempo de Poincaré t_P no depende de N . Dado que el valor medio es $\bar{g}_i > g_{\min}$, se obtiene $t_P > \pi/\bar{g}_i$.
- (iii) Todos los g_i son aleatorios. Dado que cualquier número irracional se puede aproximar por un número racional con precisión arbitrariamente grande, no se pierde generalidad al considerar que g_i es un número racional, es decir, $g_i = p_i/q_i$, con $p_i, q_i \in \mathbb{N}$. Si se hace $t_P = \pi Q$, el número Q tiene que ser tal que $Q = n_i q_i/p_i$ para todo i , con $n_i \in \mathbb{N}$. Luego, $n_i = Q p_i/q_i$. Como p_i y q_i son números naturales aleatorios, el más bajo Q que garantiza que n_i sea natural para todo i es $Q = \prod_{i=1}^N q_i$. Entonces,

$$t_P = \pi Q = \pi \prod_{i=1}^N q_i \quad (4.33)$$

A su vez, Q es más grande que cualquier q_i , y mayor a medida que aumenta N . Entonces, para N grande y para cualquier $g_i = p_i/q_i$, el tiempo de Poincaré es

²Para un análisis de estas condiciones en modelos más generales ver [48].

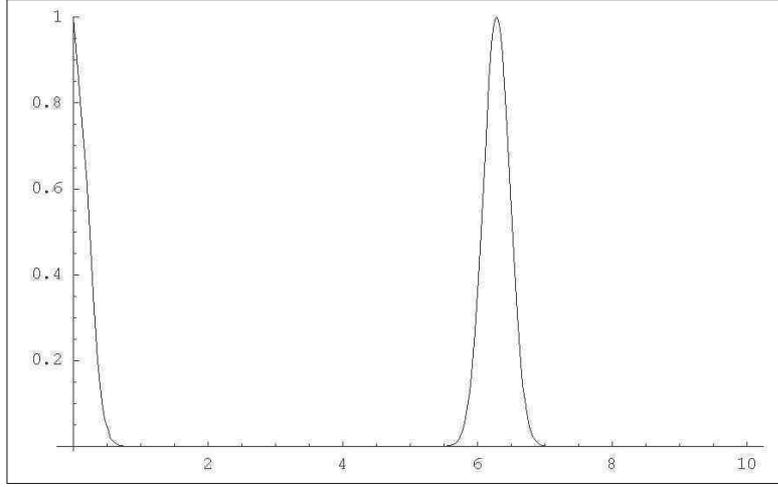


Figura 4.1: Evolución temporal de $|r(t)|^2$ dada por (4.22), para $N = 100$ y $g_i = g = 0,5$.

$t_P = \pi Q \gg \pi q_i > \pi q_i/p_i = \pi/g_i = t_{P_i}$, y también $t_P \gg \pi/\bar{g}_i$. Por otra parte, el orden de magnitud del t_P se puede estimar como $t_P = \pi Q \sim \pi \bar{q}_i^N \gg (\pi/\bar{g}_i)^N$: cuando los coeficientes de acoplamiento son aleatorios, el tiempo de Poincaré aumenta exponencialmente con el número de partículas.

Como es habitual en esta instancia, se realizó un cálculo numérico con computadora, en el que se utilizaron valores de $|\alpha_i|^2$ y $|\beta_i|^2$ tomados de un generador de números aleatorios. De este modo se puede graficar $|r(t)|^2$ en función del tiempo.

Ambiente homogéneo con interacción homogénea.

Se considera primero el caso en el que todas las partículas del ambiente son de la misma especie y, por lo tanto interactúan con P mediante la misma constante de acoplamiento $g_i = g$ (Caso (i) del apartado anterior). El comportamiento de $\langle O_R \rangle_{\psi(t)}$ en el tiempo dado por (4.30) cuando $N = 100$ y $g_i = g = 0,5$ se muestra en la Figura 4.1: puede verse que el tiempo de Poincaré $t_P = \pi/g = \pi/0,5 \simeq 6,28$ no es mucho más largo que el tiempo de decoherencia, lo cual no parece suficiente como para considerar la transición del sistema a un régimen clásico.

Tres ejemplos más, relacionados con los Casos (ii) y (iii) del apartado anterior, se presentan en el Anexo.

4.4. Caso (b): Observando una partícula del ambiente

Como ya fue señalado, no hay descomposición esencial ni privilegiada entre *sistema* y *ambiente*. La perspectiva de los valores medios permite estudiar la decoheren-

cia en las diferentes particiones posibles del sistema total. Esto es lo que se analizará en los casos (b), (c) y (d).

1. **Primer paso:** Podría considerarse de interés observar una partícula j del conjunto que antes se consideraba ambiente. Si ése es el caso, el sistema de interés S pasa a ser P_j , y los observables relevantes son sólo los que dan cuenta de esta partícula, o sea, los que actúan sólo sobre el subespacio correspondiente a S_j . Según (3.44), estos nuevos observables relevantes $O_{R_j} \in \mathcal{O}_j$ son

$$O_{R_j} = I_S \otimes O_{S_j} \bigotimes_{i \neq j} I_i \quad (4.34)$$

donde (ver 4.15)

$$O_{S_j} = \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} |\uparrow_j\rangle\langle\uparrow_j| + \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} |\downarrow_j\rangle\langle\downarrow_j| + \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} |\downarrow_j\rangle\langle\uparrow_j| + \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(j)} |\uparrow_j\rangle\langle\downarrow_j| \quad (4.35)$$

donde los coeficientes $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)}$, $\epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)}$, $\epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)}$ son ahora genéricos (la única restricción es que estén definidos de modo que O_{S_j} sea autoadjunto).

2. **Segundo paso:** En este caso, el valor medio de O_{R_j} en el estado $\psi(t)$ de U resulta:

$$\langle O_{R_j} \rangle_{\psi(t)} = |\alpha_j|^2 \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + |\beta_j|^2 \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} + \text{Re} \left(\alpha_j \beta_j^* \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} e^{ig_j t} \right) \quad (4.36)$$

3. **Tercer paso:** Si se decide centrar la atención sobre la partícula P_j (que en el Caso (a) era sólo un oscilador del ambiente), hay que considerar la evolución del valor medio de los correspondientes estados relevantes $O_{R_j} \in \mathcal{O}_j$. En este caso tampoco es necesaria una simulación numérica mediante computadora para señalar que la expresión (4.36) muestra que $\langle O_{R_j} \rangle_{\psi(t)}$ oscila y, por lo tanto, no tiene límite para $t \rightarrow \infty$. En efecto, la expresión (4.36), la dependencia temporal está en el tercer término, que por conveniencia se reescribe

$$\text{Re} \left(\alpha_j \beta_j^* \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} e^{ig_j t} \right) = \text{mod} \left(\alpha_j \beta_j^* \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} \right) \cos \left(g_j t + \arg \left(\alpha_j \beta_j^* \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} \right) \right) \quad (4.37)$$

Como consecuencia, se puede afirmar que una partícula cualquiera del antes llamado ambiente no decohere. Este resultado puede parecer completamente previsible desde un punto de vista físico, ya que la partícula P_j que forma el sistema S , perteneciente al antes llamado ambiente, está desacoplada (no interactúa) con todo el resto, sino que evoluciona libremente interactuando sólo con P ; en otras palabras, su ambiente es prácticamente no interactuante y, por lo tanto, incapaz de hacerla alcanzar un estado final de decoherencia. Sin embargo, este resultado no es trivial, ya que, como se verá más adelante, es posible encontrar particiones donde hay decoherencia con un ambiente compuesto de una sola partícula.

4.5. Caso (c): Observando varias partículas del ambiente

1. **Primer paso:** En esta sección se considera un arreglo que observa, ya no una partícula acoplada con el ambiente como en el Caso (a), o una partícula sola del ambiente como en el Caso (b), sino que observa un conjunto de partículas del antes llamado ambiente, por ejemplo, las p primeras partículas P_j . En este caso, el sistema de interés está formado por p partículas, $S = \sum_{i=1}^p P_i$, y el nuevo ambiente está compuesto por todas las partículas restantes, $E = P + \sum_{i=p+1}^N P_i$.

Entonces en la ecuación (4.15), $s_{\uparrow\uparrow} = s_{\downarrow\downarrow} = 1$, $s_{\uparrow\downarrow} = s_{\downarrow\uparrow} = 0$, los coeficientes $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)}$, $\epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)}$, $\epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)}$ son genéricos para $j \in \{1 \dots p\}$, y $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} = 1$, $\epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)} = \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = 0$ para $i \in \{p+1 \dots N\}$. Por lo tanto, los observables relevantes $O_R \in \mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}$ son

$$O_R = I_S \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^p O_{S_j} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=p+1}^N I_i \right) \quad (4.38)$$

donde O_{S_j} está dado por (4.35).

2. **Segundo paso:** En este caso, el valor medio de O_{R_j} en el estado $\psi(t)$ de U resulta

$$\langle O_R \rangle_{\psi(t)} = \prod_{i=1}^p \left[\begin{array}{l} |\alpha_i|^2 \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} + \alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} e^{-igt} \\ + |\beta_i|^2 \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} + (\alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)})^* e^{igt} \end{array} \right] \quad (4.39)$$

3. **Tercer paso:** Si bien la ecuación (4.39) es muy similar a la ecuación (4.25), se calcula la evolución temporal de los valores medios por medio de simulaciones numéricas.

Con el fin de simplificar el cálculo, se considera el caso particular en el que los observables relevantes son

$$O_R = I_S \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^p S_x^{(j)} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=p+1}^N I_i \right) \quad (4.40)$$

donde $S_x^{(j)}$ es la proyección del spin de la partícula P_j en la dirección \hat{x} . Entonces $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} = \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} = 0$, y los valores medios se escriben

$$\langle O_R \rangle_{\psi(t)} = r_3(t) = \prod_{i=1}^p \left[2 * \text{Re} \left(\alpha_i^* \beta_i \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} e^{-igt} \right) \right] \quad (4.41)$$

En esta ecuación se puede seleccionar cualquier $N \geq P$. También en este caso la dependencia temporal de $r_3(t)$ viene dada por una función periódica, cuyo tiempo de recurrencia aumenta fuertemente con el número de partículas implicadas.

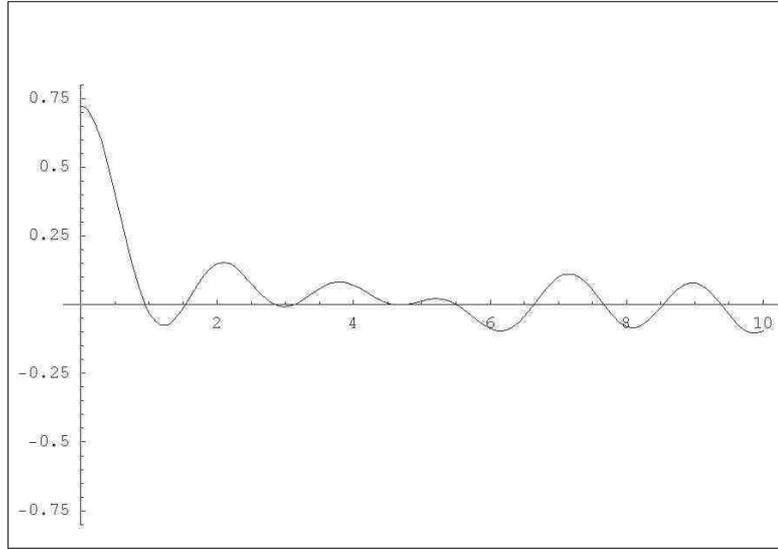


Figura 4.2: Gráfico de $r_3(t)$ dada por (4.41), para $p = 4$.

La evolución de $r_3(t)$, con $p = 4$, se muestra en la Figura 4.2, donde se puede ver una rápida caída seguida por fluctuaciones en torno al cero. Como era de esperar, este tipo de fluctuaciones se hacen más pequeñas con el aumento del número p de partículas; así se muestra en la Figura 4.3 ($p = 8$) y la Figura 4.4 ($p = 10$). Con $p = 200$ el gráfico resulta ser indistinguible del obtenido para la decoherencia del Caso (a) con $N = 200$.

La consecuencia sorprendente de estos resultados es que el comportamiento es independiente del número N de partículas P_i , y sólo depende del número P de las partículas que constituyen el sistema de interés (véase la ecuación (4.39)). Por lo tanto, se puede considerar un caso límite con $N = p = 10$, donde el sistema S está compuesto por $p = N = 10$ partículas y el ambiente E es una sola partícula, $E = P$: en este caso, como se muestra en la Figura 4.4, resulta que un sistema de 10 partículas decohere como resultado de su interacción con un *entorno de una sola partícula*. La situación se vuelve aún más evidente a medida que aumenta el número p : con $N = p = 200$, el sistema de 200 partículas fuertemente acopladas a un entorno de una sola partícula decohere de un modo similar al Caso (a) de una partícula en un baño de $N = 200$ partículas.

La idea de que no es necesario un ambiente enorme para producir decoherencia se viene desarrollando hace algún tiempo y en este ejemplo se pone de manifiesto. Hay modelos en los que unos pocos grados de libertad con una dinámica compleja permiten que, pese a tener pocos grados de libertad, el efecto de este entorno sea parecido al de un entorno simple con muchos grados de libertad (ver [49]). Por otro lado unos pocos grados de libertad acoplados de la manera apropiada pueden anular completamente la interferencia. Este es el caso de las junturas Josephson, donde se descubrió que el efecto de la decoherencia estaba amplificado fuertemente

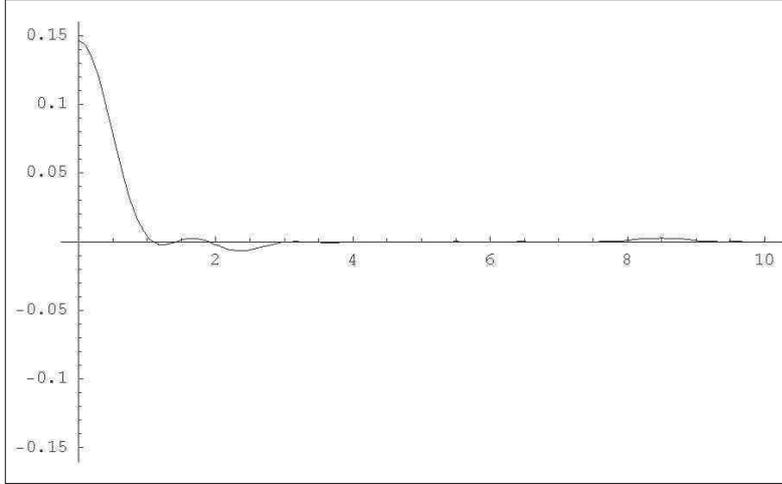


Figura 4.3: Gráfico de $r_3(t)$ dada por (4.41), para $p = 8$.

por el acoplamiento a unos pocos grados de libertad (impurezas) que funcionaban efectivamente como sistemas de dos niveles fuertemente acoplados con el flujo superconductor³ (ver [50]). El ejemplo presentado aquí es un aporte sencillo en esta línea.

4.6. Caso (d): Observando el sistema cerrado

1. **Primer paso:** Una posibilidad es la de estudiar al sistema cerrado como un todo. En ese caso los observables relevantes son

$$O^C = \left(\begin{array}{c} s_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + s_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + \\ + s_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + s_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \end{array} \right) \bigotimes_{i=1}^N \left(\begin{array}{c} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\downarrow_i| + \\ + \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\downarrow_i| \end{array} \right) \quad (4.42)$$

Como los operadores deben ser hermíticos, las componentes de la diagonal $s_{\uparrow\uparrow}$, $s_{\downarrow\downarrow}$, $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)}$, $\epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)}$ deben ser números reales y las componentes fuera de ella son, en general, números complejos que deben cumplir $s_{\uparrow\downarrow} = s_{\downarrow\uparrow}^*$, $\epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)*}$.

2. **Segundo paso:** Los valores medios de los observables $O^C \in \mathcal{O}$ en el estado $\psi(t)$ pueden calcularse como

$$\langle O^C \rangle_{\psi(t)} = (|a|^2 s_{\uparrow\uparrow} + |b|^2 s_{\downarrow\downarrow}) \Gamma_0(t) + 2 \operatorname{Re} [ab^* s_{\downarrow\uparrow} \Gamma_1(t)] \quad (4.43)$$

con $\Gamma_0(t)$ y $\Gamma_1(t)$ dados por (4.17) y (4.18).

3. **Tercer paso:** El resultado obtenido con la perspectiva de los valores medios permite inferir el comportamiento del sistema cerrado compuesto U . Como se

³Agradecemos a Juan Pablo Paz por las discusiones y sugerencias.

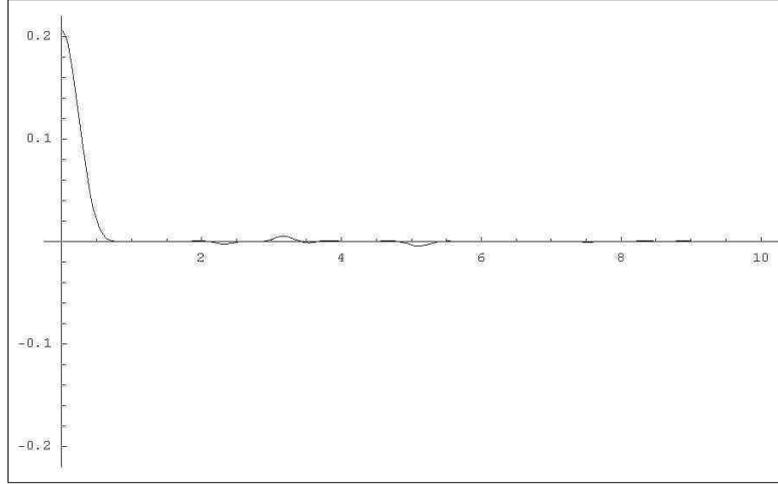


Figura 4.4: Gráfico de $r_3(t)$ dada por (4.41), para $p = 10$.

concluyó al final del paper [51], la decoherencia de U impone una restricción física suficientemente fuerte como para implicar la decoherencia de cualquiera de sus subsistemas. Por lo tanto, si cualquiera de los subsistemas de un sistema cerrado compuesto U no decohere, entonces se puede afirmar que U tampoco decohere. Éste es, precisamente, el caso del modelo expuesto en esta sección: cómo S decohere pero las partículas de E no lo hacen, el sistema compuesto $U = S \cup E$ no puede decoherir, esto es, tiene un tiempo de decoherencia infinito $t_{DS} = \infty$.

Lo que el modelo pone de manifiesto que el sistema cerrado no decohere cuando el Hamiltoniano del ambiente es trivial, o sea, cuando el ambiente no decohere.

4.7. Conclusiones parciales

En este Capítulo se estudió el conocido modelo de spines. Se consideraron distintas particiones entre sistema y ambiente. La partición usual del Caso (a) se pudo analizar mediante la técnica desarrollada para sistemas sin ambiente (SID discreto), mostrando así que pueden exportarse los métodos de un enfoque a otro, enriqueciendo el bagaje de herramientas matemáticas disponibles a la hora de tratar con un modelo concreto. Además, el análisis de las particiones de los Casos (b), (c) y (d) revela aspectos curiosos de la decoherencia. En efecto, muestra que es posible que, estudiando partículas que no decoheren, se encuentre un conjunto de observables globales que sí decoheren; esto permitiría definir la emergencia de un mundo clásico en lo que tradicionalmente se denomina ambiente. Por otro lado, en este sencillo ejemplo también es posible observar que no es necesario un número enorme de partículas en el entorno para inducir la decoherencia en el sistema abierto: el Caso (c) muestra observables que decoheren con un ambiente de una sola partícula.

Capítulo 5

Sobre el modelo de spines generalizado

En este capítulo se estudia un caso más general que el ejemplo tratado en el capítulo anterior. El caso en cuestión ha sido elegido teniendo en cuenta que: (i) el problema es susceptible de ser tratado desde distintos enfoques porque el Hamiltoniano puede ser fácilmente diagonalizado, (ii) es fácil tomar la traza parcial respecto de distintas partes del sistema, y (iii) es la generalización de un caso bien estudiado. Esta generalización del ejemplo típico de la decoherencia es un paso, quizás pequeño pero ciertamente necesario, hacia el desarrollo de un esquema aplicable al caso más general posible. La tarea realizada en este capítulo permite profundizar el conocimiento sobre el proceso de decoherencia y, además, extraer algunas conclusiones interesantes. El ejemplo se analiza desde el punto de vista teórico y se realizan experiencias simuladas haciendo uso de técnicas simples de cálculo numérico, lo que permite visualizar los resultados y completa el conocimiento que puede extraerse del mismo. Los aportes de la perspectiva de los valores medios al campo de la decoherencia expuestos en este capítulo pueden encontrarse también en [45], [52], [53] y [51]. Es importante tener presente que se tratará un “modelo de juguete” de la decoherencia y no un modelo completo para el límite clásico.

5.1. Presentación del modelo a tratar

Se considera un sistema total U compuesto por los siguientes subsistemas:

1. El subsistema A , que tiene M subsistemas A_i , con $i = 1, 2, \dots, M$, cada uno asociado a un espacio de Hilbert \mathcal{H}_{S_i} , y constituido por una partícula de spin $\frac{1}{2}$. Los estados que forman la base ortonormal de los operadores de spin $S_{S_i, \vec{v}}$ del sistema A_i en la dirección \vec{v} son $|\uparrow_i\rangle, |\downarrow_i\rangle$, y cumplen (como en el capítulo anterior, se tomará $\hbar = 1$)

$$S_{A_i, \vec{v}} |\uparrow_i\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_i\rangle \quad \text{y} \quad S_{A_i, \vec{v}} |\downarrow_i\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow_i\rangle \quad (5.1)$$

Los M subsistemas forman el sistema compuesto $A = \bigcup_{i=1}^M A_i$, que tiene asociado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A = \bigotimes_{i=1}^M \mathcal{H}_{A_i}$. Entonces, un estado de este sistema A se puede escribir como

$$|\mathcal{A}\rangle = \bigotimes_{i=1}^M (a_i |\uparrow_i\rangle + b_i |\downarrow_i\rangle) \quad (5.2)$$

con

$$|a_i|^2 + |b_i|^2 = 1 \quad (5.3)$$

2. El subsistema B , que posee N subsistemas B_k , con $k = 1, 2, \dots, N$, cada uno asociado a un espacio de Hilbert \mathcal{H}_{B_k} y constituido por una partícula de spin $\frac{1}{2}$. Los estados que forman la base ortonormal de los operadores de spin $S_{B_k, \vec{v}}$ en la dirección \vec{v} son $|\uparrow_k\rangle, |\downarrow_k\rangle$, y cumplen

$$S_{B_k, \vec{v}} |\uparrow_k\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_k\rangle \quad \text{y} \quad S_{B_k, \vec{v}} |\downarrow_k\rangle = \frac{1}{2} |\downarrow_k\rangle \quad (5.4)$$

Los N subsistemas forman el sistema compuesto $B = \bigcup_{k=1}^N B_k$, que tiene asociado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_B = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_{B_k}$. Entonces, un estado de este subsistema B se puede escribir como

$$|\mathcal{B}\rangle = \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow_k\rangle + \beta_k |\downarrow_k\rangle) \quad (5.5)$$

con

$$|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = 1 \quad (5.6)$$

El espacio de Hilbert total del sistema compuesto $U = A \cup B$ es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, o sea,

$$\mathcal{H} = \left(\bigotimes_{i=1}^M \mathcal{H}_{A_i} \right) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_{B_k} \right) \quad (5.7)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta las expresiones (5.2) y (5.5), un estado producto del sistema total se escribe como $|\psi\rangle = |\mathcal{A}\rangle \otimes |\mathcal{B}\rangle$, o sea¹,

$$|\psi\rangle = \left(\bigotimes_{i=1}^M (a_i |\uparrow_i\rangle + b_i |\downarrow_i\rangle) \right) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow_k\rangle + \beta_k |\downarrow_k\rangle) \right) \quad (5.8)$$

¹Al igual que en los ejemplos precedentes, la antisimetría de la función de onda no se hace explícita, ya que una partícula real tiene asociada además una parte espacial. De modo que, combinando los subespacios simétricos, antisimétricos, y mixtos de la parte espacial con la de spin, se logra la antisimetría y no es necesario reducir el número de elementos de la base asociada al spin.

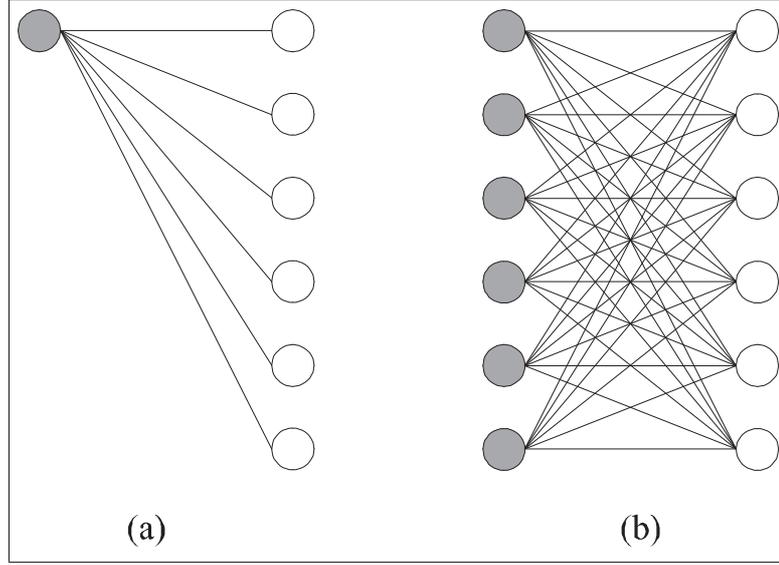


Figura 5.1: (a) El esquema de la interacción entre las partículas del *Sistema* y el *Ambiente* en el modelo tradicional de spines. (b) El esquema de la interacción entre las partículas del grupo *A* y las del grupo *B* en el modelo generalizado de spines.

Los Hamiltonianos libres de *A* y de *B* se consideran nulos:

$$H_A = H_B = 0 \quad (5.9)$$

El Hamiltoniano del sistema compuesto, $H = H_A + H_B + H_{AB}$, es,

$$H = H_{AB} = H_1 \otimes H_2 = \left(\sum_{i=1}^M S_{A_i, \vec{v}} \bigotimes_{j \neq i}^M I_{A_j} \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^N g_k S_{B_k, \vec{v}} \bigotimes_{n \neq k}^N I_{B_n} \right) \quad (5.10)$$

donde $I_{A_j} = |\uparrow_j\rangle \langle \uparrow_j| + |\downarrow_j\rangle \langle \downarrow_j|$ es la identidad del subespacio \mathcal{H}_{A_j} y $I_{B_j} = |\uparrow_j\rangle \langle \uparrow_j| + |\downarrow_j\rangle \langle \downarrow_j|$ es la identidad del subespacio \mathcal{H}_{B_j} . Entonces, el sistema *U* considerado consiste en un grupo *A* de *M* partículas de spin $\frac{1}{2}$ y un grupo *B* de *N* partículas de spin $\frac{1}{2}$. Una dada partícula del grupo *A* interactúa con cada una de las partículas del grupo *N*; gráficamente, esta situación se puede representar con el esquema de la Figura 5.1.

En este caso el Hamiltoniano está escrito en forma diagonal, ya que sólo contiene términos del tipo $|\uparrow_i\rangle \langle \uparrow_i|$, $|\downarrow_i\rangle \langle \downarrow_i|$, $|\uparrow_i\rangle \langle \uparrow_i|$, $|\downarrow_i\rangle \langle \downarrow_i|$. Los autovectores de H_1 conforman una base de \mathcal{H}_A cuyos elementos serán ordenados de dos modos distintos, como $\{|\mathcal{A}'_i\rangle\}$ y como $\{|\mathcal{A}_i\rangle\}$, para facilitar los cálculos.

Considérese el primer ordenamiento. Un autovector $|\mathcal{A}'_i\rangle$ tiene un autovalor \mathcal{A}'_i , y el conjunto $\{|\mathcal{A}'_i\rangle\}$ es la base de autovectores de *A* y tiene 2^M elementos. Para formar la base $\{|\mathcal{A}'_i\rangle\}$, los $|\mathcal{A}'_i\rangle$ se pueden ordenar de la forma más intuitiva posible,

o sea, similar al ordenamiento de los números binarios:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}'_1\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle \\
|\mathcal{A}'_2\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle \\
|\mathcal{A}'_3\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle \\
|\mathcal{A}'_4\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle \\
&\dots \\
|\mathcal{A}'_{2^M}\rangle &= |\downarrow, \downarrow, \dots, \downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Esta base tiene una característica que será aprovechada más adelante: sus elementos están ordenados de modo que los $|\tilde{\mathcal{S}}_i\rangle$ con i par tienen el spin M en el estado \uparrow , y los $|\tilde{\mathcal{S}}_i\rangle$ con i impar tienen el spin M en el estado \downarrow .

Considérese el segundo ordenamiento, que se utilizará para el resto de los cálculos. Un autovector $|\mathcal{A}_i\rangle$ tiene un autovalor \mathcal{A}_i y el conjunto $\{|\mathcal{A}_i\rangle\}$ es la base de autovectores de H_1 y tiene 2^M elementos. Los $|\mathcal{A}_i\rangle$ se ordenan tomando en cuenta cuántas partículas de ese subespacio tienen spin \downarrow . Para esto se define el número $l \in \mathbb{N}_0$ que indica cuántas partículas están en el estado \downarrow . De este modo, los valores posibles de l son $l = 0, 1, 2, \dots, M$. El orden respecto de l queda entonces:

1. $l = 0$. Encabeza la lista el estado que no tiene ninguna partícula en el estado \downarrow . Tal estado es único, y es el que tiene todas sus partículas con spin \uparrow . De modo que:

$$|\mathcal{A}_1\rangle = |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H_1 |\mathcal{A}_1\rangle = \frac{M}{2} |\mathcal{A}_1\rangle \tag{5.12}$$

2. $l = 1$. Siguen los estados que sólo tienen una partícula en el estado \downarrow . La elección de cuál es la partícula a la que se asigna spin \downarrow se hace sobre M partículas y, por tanto que hay M posibilidades. Como sólo hay dos estados posibles para cada partícula, los estados que cumplen esta condición son M y se ordenan de la siguiente forma (si bien el orden de estos estados ($l = 1$) no será relevante para el cálculo):

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_2\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle \implies H_1 |\mathcal{A}_2\rangle = \frac{M-2}{2} |\mathcal{A}_2\rangle \\
|\mathcal{A}_3\rangle &= |\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle \implies H_1 |\mathcal{A}_3\rangle = \frac{M-2}{2} |\mathcal{A}_3\rangle \\
&\vdots \\
|\mathcal{A}_{M+1}\rangle &= |\downarrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle \implies H_1 |\mathcal{A}_{M+1}\rangle = \frac{M-2}{2} |\mathcal{A}_{M+1}\rangle
\end{aligned} \tag{5.13}$$

3. Para los restantes valores de l , el procedimiento es análogo.

En consecuencia, se contabilizan:

$$\begin{aligned}
& 1 \text{ autovector con autovalor } \frac{M}{2} \\
& M \text{ autovectores con autovalor } \frac{M-2}{2} \\
& \vdots \\
& \frac{M!}{(M-l)!} \text{ autovectores con autovalor } \frac{M-2l}{2}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

donde $l = 0, 1, \dots, M$. Queda claro entonces que hay 2^M autovectores pero sólo M autovalores distintos. La expresión (5.2) para un estado genérico de A puede ser escrita en la base $\{|\mathcal{A}_i\rangle\}$, como

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum_{i=1}^{2^M} C_i |\mathcal{A}_i\rangle \in \mathcal{H}_A \tag{5.15}$$

con

$$\sum_{i=1}^{2^M} |C_i|^2 = 1 \tag{5.16}$$

Como se ha señalado, el orden de los autoestados con igual l no es relevante para el cálculo que se quiere realizar, ya que la pretensión es identificar los autoestados con autovalores distintos pero los autoestados con igual l tienen el mismo autovalor. Si bien el orden de los autoestados con igual l es irrelevante, el hecho de que existan autoestados con igual autovalor (esto es, que el Hamiltoniano sea degenerado) tiene consecuencias que se señalarán llegado el momento.

Hasta aquí se ha considerado el sistema A , representado en \mathcal{H}_A y con una base conformada por los autovectores de H_1 . Ahora, se analizará el sistema completo $U = A \cup B$ representado en \mathcal{H} , con una base formada por los autovectores del Hamiltoniano total H dado por la expresión (5.10). Mediante las expresiones (5.8) y (5.15), un estado puro de U puede ser escrito como

$$|\psi\rangle = \left(\sum_{i=1}^{2^M} C_i |\mathcal{A}_i\rangle \right) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow_k\rangle + \beta_k |\downarrow_k\rangle) \right) \tag{5.17}$$

donde los coeficientes α_i , β_i y C_i son aleatorios, con la restricciones dadas por las expresiones (5.6) y (5.16). Para simplificar la notación, los grados de libertad del subsistema B se agrupan en un sólo ket $|\mathcal{B}(0)\rangle$, de modo que el estado inicial de U se puede escribir

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^{2^M} C_i |\mathcal{A}_i\rangle |\mathcal{B}(0)\rangle \tag{5.18}$$

El estado $|\psi(0)\rangle$ evoluciona bajo la acción de H con el operador de evolución temporal $\mathcal{U}(t) = e^{-iHt}$:

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{5.19}$$

Entonces, para cada $|\mathcal{A}_k\rangle$, hay un término en (5.19) de la forma

$$C_k |\mathcal{A}_k\rangle \mathcal{U}_k(t) |\mathcal{B}(0)\rangle = C_k |\mathcal{A}_k\rangle |\mathcal{B}_k(0)\rangle \quad (5.20)$$

donde, si se llama Λ_k al autovalor de $|\mathcal{A}_k\rangle$, resulta

$$\mathcal{U}_k(t) = e^{i\Lambda_k \sum_{j=1}^N g_j S_{B_j, \vec{v}} t} \quad (5.21)$$

Como hay una cierta cantidad autoestados $|\mathcal{A}_i\rangle$ con el mismo autovalor Λ_i , cantidad dada por (5.14), los términos tipo (5.20) pueden agruparse, de modo que el estado evolucionado resulta

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= (C_1 |\mathcal{A}_1\rangle |\mathcal{B}_0(t)\rangle) + \left(\sum_{\lambda=1}^{M+1} C_\lambda |\mathcal{A}_\lambda\rangle |\mathcal{B}_1(t)\rangle \right) + \\ &+ \left(\sum_{\lambda=M+2}^{M+1+\frac{(M-1)M}{2}} C_\lambda |\mathcal{A}_\lambda\rangle |\mathcal{B}_3(t)\rangle \right) + \dots + \\ &+ \left(\sum_{\lambda=1+\sum_{p=0}^{l-1} \binom{M}{p}}^{\sum_{p=0}^l \binom{M}{p}} C_\lambda |\mathcal{A}_\lambda\rangle |\mathcal{B}_l(t)\rangle \right) + \dots + \\ &+ (C_{2^M} |\mathcal{A}_{2^M}\rangle |\mathcal{B}_M(t)\rangle) \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde

$$|\mathcal{B}_l(t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{i\frac{(2l-M)}{2} g_k t} |\uparrow_k\rangle + \beta_k e^{-i\frac{(2l-M)}{2} g_k t} |\downarrow_k\rangle \right) \quad (5.23)$$

Si se define la función

$$f(l) = \begin{cases} \sum_{p=0}^l \binom{M}{p} & \text{si } l = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.24)$$

entonces la expresión (5.22) se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda=f(l-1)+1}^{f(l)} C_\lambda |\mathcal{A}_\lambda\rangle |\mathcal{B}_l(t)\rangle \quad (5.25)$$

y el operador de estado $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$ resulta

$$\rho(t) = \sum_{l, l'=0}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l-1)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{\substack{f(l) \\ f(l')}} C_\lambda C_{\lambda'}^* |\mathcal{A}_\lambda\rangle |\mathcal{B}_l(t)\rangle \langle\mathcal{B}_{l'}(t)| \langle\mathcal{A}_{\lambda'}| \quad (5.26)$$

5.2. Aplicación del GTFD

Al igual que en el capítulo anterior, en primer lugar se introducirán ciertos observables $O^C \in \mathcal{O}$, a partir de los cuales se definirán los observables relevantes para cada caso a tratar. La forma genérica de los O^C será

$$O^C = \sum_{\nu\nu'} O_{\nu\nu'}^C |\phi_\nu\rangle \langle\phi_{\nu'}| \quad (5.27)$$

Explícitamente²,

$$O^C = \left(\sum_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'=0}^{2^M} s_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'} |\mathcal{A}_{\tilde{\lambda}}\rangle \langle\mathcal{A}_{\tilde{\lambda}'}| \right) \bigotimes_{i=1}^N \left(\begin{array}{l} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\downarrow_i| + \\ + \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\downarrow_i| \end{array} \right) \quad (5.28)$$

Nuevamente, como los operadores deben ser hermíticos, las componentes de la diagonal $s_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}}$, $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)}, \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)}$ deben ser números reales y las componentes fuera de ella son, en general, números complejos que deben cumplir $s_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'} = s_{\tilde{\lambda}', \tilde{\lambda}}^*$, $\epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)*}$.

Los valores medios de los observables $O^C \in \mathcal{O}$ en el estado $\rho(t)$ pueden ser calculados como

$$\langle O^C \rangle_{\rho(t)} = Tr(O^C \rho(t)) \quad (5.29)$$

Si se define el operador auxiliar

$$O_B = \bigotimes_{i=1}^N \left(\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} |\uparrow_i\rangle \langle\downarrow_i| + \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\uparrow_i| + \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} |\downarrow_i\rangle \langle\downarrow_i| \right) \quad (5.30)$$

se puede escribir

$$O^C \rho(t) = \sum_{l, l'=0}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{f(l)} \sum_{\tilde{\lambda}=0}^{2^M} C_\lambda C_{\lambda'}^* s_{\lambda', \tilde{\lambda}} |\mathcal{A}_\lambda\rangle |\mathcal{B}_l(t)\rangle \langle\mathcal{B}_{l'}(t)| O_B \langle\mathcal{A}_{\lambda'}| \quad (5.31)$$

Para calcular el valor medio (5.29), primero se toma la traza parcial de (5.31) sobre los grados de libertad del sistema A :

$$\begin{aligned} Tr_A(O^C \rho(t)) &= \sum_{\nu=0}^{2^M} \langle\mathcal{A}_\nu| O^C \rho(t) |\mathcal{A}_\nu\rangle = \\ &= \sum_{l, l'=0}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{f(l)} C_\lambda C_{\lambda'}^* s_{\lambda', \lambda} |\mathcal{B}_l(t)\rangle \langle\mathcal{B}_{l'}(t)| O_B \end{aligned} \quad (5.32)$$

²Nótese que la expresión (4.15) del capítulo anterior es un caso particular de (5.28), donde sólo hay cuatro términos en el primer factor. Si bien los operadores más generales pueden ser escritos como suma de productos tensoriales, los O^C son suficientemente generales para los propósitos de la tesis.

La expresión $|\mathcal{B}_l(t)\rangle \langle \mathcal{B}_{l'}(t)|_{O_B}$ se calcula mediante (5.23) y (5.30) como

$$|\mathcal{B}_l(t)\rangle \langle \mathcal{B}_{l'}(t)|_{O_B} = \bigotimes_{k,j=1}^N \left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & \alpha_k \alpha_j^* e^{i(g_{k,l}-g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + \\ & + \alpha_k \beta_j^* e^{i(g_{k,l}+g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} \end{aligned} \right) |\uparrow_k\rangle \langle \uparrow_j| + \\ & + \left(\begin{aligned} & \beta_k \alpha_j^* e^{-i(g_{k,l}+g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + \\ & + \beta_k \beta_j^* e^{-i(g_{k,l}-g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} \end{aligned} \right) |\downarrow_k\rangle \langle \uparrow_j| + \\ & + \left(\begin{aligned} & \alpha_k \alpha_j^* e^{i(g_{k,l}-g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(j)} + \\ & + \alpha_k \beta_j^* e^{-i(g_{k,l}+g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} \end{aligned} \right) |\uparrow_k\rangle \langle \downarrow_j| + \\ & + \left(\begin{aligned} & \beta_k \alpha_j^* e^{-i(g_{k,l}+g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(j)} + \\ & + \beta_k \beta_j^* e^{-i(g_{k,l}-g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} \end{aligned} \right) |\downarrow_k\rangle \langle \downarrow_j| \end{aligned} \right]$$

donde se definió la variable auxiliar

$$g_{k,l} = (2l - M) g_k \quad (5.33)$$

Luego hay que tomar la traza de (5.32) sobre los restantes grados de libertad, lo cual resulta

$$Tr(O^C \rho(t)) = \sum_{l,l'=0}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l-1)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} T_{l,l'}(t) \quad (5.34)$$

donde

$$T_{l,l'}(t) = \prod_{j=1}^N \left(\begin{aligned} & |\alpha_j|^2 e^{i(g_{j,l}-g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + \alpha_k \beta_j^* e^{i(g_{j,l}+g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} + \\ & + \beta_j \alpha_j^* e^{-i(g_{j,l}+g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} + |\beta_j|^2 e^{-i(g_{j,l}-g_{j,l'}) \frac{t}{2}} \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} \end{aligned} \right) \quad (5.35)$$

siendo

$$B_{\lambda,\lambda'} = C_\lambda C_{\lambda'}^* s_{\lambda',\lambda} \quad (5.36)$$

una variable auxiliar.

La expresión (5.34) es un tanto difícil de analizar bajo la forma en que ha sido presentada; por esta razón se la reescribirá. Es conveniente notar que las exponenciales de (5.35) son las responsables de la evolución temporal de (5.34), y que el argumento de estas exponenciales es del tipo $g_{j,l} \pm g_{j,l'}$, que en algunos casos se anula. Por conveniencia se elige separar los términos en los que se anula el argumento de alguna de estas exponenciales:

$$\begin{aligned} \langle O^C \rangle_{\rho(t)} &= Tr(O^C \rho(t)) = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda,\lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} T_{l,l}(t) + \\ &+ \sum_{l=0}^{\tilde{M}} \sum_{\lambda,\lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} (T_{l,M-l}(t) + T_{M-l,l}(t)) + \\ &+ \sum_{\substack{l,l'=0 \\ l \neq l'}}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l-1)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} T_{l,l'}(t) \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde³

$$\tilde{M} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{M-2}{2} \text{ si } M \text{ es par} \\ \frac{M-1}{2} \text{ si } M \text{ es impar} \end{array} \right\} \quad (5.38)$$

$$T_{l,l}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + 2 \operatorname{Re} \left(\alpha_k \beta_j^* e^{ig_j, it} \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} \right) + |\beta_j|^2 \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} \right) \quad (5.39)$$

$$T_{l, M-l}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 e^{ig_j, it} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + \alpha_k \beta_j^* \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} + \beta_j \alpha_j^* \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(j)} + |\beta_j|^2 e^{-ig_j, it} \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} \right) \quad (5.40)$$

$$T_{M-l, l}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 e^{-ig_j, it} \epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(j)} + \alpha_j \beta_j^* \epsilon_{\downarrow\uparrow}^{(j)} + \beta_j \alpha_j^* \epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(j)} + |\beta_j|^2 e^{ig_j, it} \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(j)} \right) \quad (5.41)$$

Entonces, como indican (5.40) y (5.41), $T_{M-l, l, \lambda, \lambda'}(t) = (T_{l, M-l, \lambda, \lambda'}(t))^*$ y la expresión (5.37) resulta

$$\begin{aligned} \langle O^C \rangle_{\rho(t)} &= \operatorname{Tr} (O^C \rho(t)) = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda' = f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda, \lambda'} T_{l,l}(t) + \\ &+ \sum_{l=0}^{\tilde{M}} \sum_{\lambda, \lambda' = f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda, \lambda'} 2 \operatorname{Re} (T_{l, M-l}(t)) + \\ &+ \sum_{\substack{l, l' = 0 \\ l \neq l'}}^M \sum_{\substack{\lambda = f(l-1)+1 \\ \lambda' = f(l'-1)+1 \\ l' \neq M-l}}^{f(l')} B_{\lambda, \lambda'} T_{l, l'}(t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Se consideran dos divisiones *sistema-ambiente* distintas, lo cual corresponde a elegir cuatro tipos de observables relevantes.

5.3. Caso (a): Observando el sistema A

1. **Primer paso:** Este modelo es similar al modelo típico usado como ejemplo de EID, donde los observables relevantes son sólo aquéllos que corresponden al sistema A fuertemente acoplado con el sistema B . Esto equivale a dividir al sistema compuesto U en las partes originalmente planteadas, $U = A \cup B = S \cup E$, donde el sistema S es A y el ambiente E es B . Según la ecuación (3.44), estos observables $O_R \in \mathcal{O}$ se escriben:

$$O_R = \left(\sum_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}' = 0}^{2^M} s_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'} |\mathcal{A}_{\tilde{\lambda}}\rangle \langle \mathcal{A}_{\tilde{\lambda}'}| \right) \bigotimes_{i=1}^N I_i = O_A \bigotimes_{i=1}^N I_i \quad (5.43)$$

³Nótese que la expresión (5.39) corresponde a la (4.17) del capítulo anterior, mientras que la suma de las expresiones (5.40) y (5.41) corresponde a la (4.18).

Esto sucede cuando, en la expresión (5.28), $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} = 1$ y $\epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = 0$.

2. **Segundo paso:** Imponiendo la condición dada por la expresión (5.6), las funciones auxiliares definidas en (5.35), (5.39), (5.40) y (5.41) resultan

$$T_{l,l'}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 e^{i(g_{j,l}-g_{j,l'})\frac{t}{2}} + |\beta_j|^2 e^{-i(g_{j,l}-g_{j,l'})\frac{t}{2}} \right) \quad (5.44)$$

$$T_{l,l}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 \right) = 1 \quad (5.45)$$

$$T_{l,M-l}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 e^{ig_{j,l}t} + |\beta_j|^2 e^{-ig_{j,l}t} \right) \quad (5.46)$$

$$T_{M-l,l}(t) = \prod_{j=1}^N \left(|\alpha_j|^2 e^{-ig_{j,l}t} + |\beta_j|^2 e^{ig_{j,l}t} \right) \quad (5.47)$$

Según las cuatro expresiones anteriores y (5.42), el valor medio de O_R en el estado $\rho(t)$ de U resulta

$$\begin{aligned} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} &= \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda' = f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda, \lambda'} + \\ &+ \sum_{l=0}^{\tilde{M}} \sum_{\lambda, \lambda' = f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda, \lambda'} 2 \operatorname{Re} (T_{l, M-l}(t)) + \\ &+ \sum_{\substack{l, l'=0 \\ l \neq l' \\ l' \neq M-l}}^M \sum_{\substack{\lambda = f(l-1)+1 \\ \lambda' = f(l'-1)+1}}^{f(l)} B_{\lambda, \lambda'} T_{l, l'}(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Es útil definir $R_l(t) = |T_{l, M-l}(t)|^2$ y $R_{l'l'}(t) = |T_{l, l'}(t)|^2$ que, según (5.46) y (5.33) son⁴

$$R_l(t) = \prod_{i=1}^N \left(|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2 |\alpha_i|^2 |\beta_i|^2 \cos (2(2l - M) g_i t) \right) \quad (5.49)$$

$$R_{l'l'}(t) = \prod_{i=1}^N \left(|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2 |\alpha_i|^2 |\beta_i|^2 \cos (2(l - l') g_i t) \right) \quad (5.50)$$

⁴Nótese que las expresiones (5.49) y (5.50) corresponden a $|r(t)|^2$ de (4.22) del capítulo anterior.

3. **Tercer paso:** El valor medio que se muestra en la expresión (5.48) tiene tres sumandos

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \Sigma^{(1)}(t) + \Sigma^{(2)}(t) + \Sigma^{(3)}(t) \quad (5.51)$$

que se pueden analizar por separado. El primero es, según (5.36),

$$\Sigma^{(1)} = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda} = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda=f(l-1)+1}^{f(l)} C_{\lambda} C_{\lambda}^* s_{\lambda,\lambda} = \Sigma^D \quad (5.52)$$

donde intervienen todas constantes, provenientes de las condiciones iniciales y de los observables, asociadas a las componentes no diagonales; queda claro que este sumando no evoluciona en el tiempo porque se utiliza la base de la energía:

$$\Sigma^D = \Sigma^{(1)} \neq \Sigma^{(1)}(t) \quad (5.53)$$

El segundo sumando es

$$\Sigma^{(2)}(t) = \sum_{l=0}^{\tilde{M}} \sum_{\lambda,\lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} 2 \operatorname{Re} (T_{l,M-l}(t)) \quad (5.54)$$

cuya evolución temporal esta dada por $T_{l,M-l}(t)$. El tercer sumando es

$$\Sigma^{(3)}(t) = \sum_{\substack{l,l'=0 \\ l \neq l' \\ l' \neq M-l}}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l-1)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} T_{l,l'}(t) \quad (5.55)$$

cuya evolución temporal está dada por $T_{l,l'}(t)$. El segundo y el tercer sumando forman los términos de interferencia del valor medio:

$$\Sigma^{ND}(t) = \Sigma^{(2)}(t) + \Sigma^{(3)}(t) \quad (5.56)$$

Para estudiar la evolución de estos sumandos se puede comenzar por analizar la evolución de cada uno de los términos de las sumatorias. Si se estudia la función

$$R_l(t) = |T_{l,M-l}(t)|^2 \quad \text{y} \quad R_{l'}(t) = |T_{l,l'}(t)|^2 \quad (5.57)$$

dada por las expresiones (5.49) y (5.50), se tendrá una forma de determinar si cada uno de estos sumandos es cero o no. Primero se calcula el límite de $R_l(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Teniendo en cuenta la condición (5.6), es evidente que, a medida que transcurre el tiempo, se tiene que

$$\begin{aligned} \max_t (|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2 |\alpha_i|^2 |\beta_i|^2 \cos(2(2l-M)g_it)) &= \left((|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)^2 \right) \implies \\ \max_t (|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2 |\alpha_i|^2 |\beta_i|^2 \cos(2(2l-M)g_it)) &= 1 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \min_t (|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2|\alpha_i|^2|\beta_i|^2 \cos(2(2l-M)g_it)) &= \left((|\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2)^2 \right) \implies \\ \min_t (|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2|\alpha_i|^2|\beta_i|^2 \cos(2(2l-M)g_it)) &= (2|\alpha_i|^2 - 1)^2 \quad (5.59) \end{aligned}$$

El análisis es similar al realizado para el término (4.22) en el Capítulo 4: $(|\alpha_i|^4 + |\beta_i|^4 + 2|\alpha_i|^2|\beta_i|^2 \cos(2(2l-M)g_it))$ es un número aleatorio que, si $t \neq 0$, fluctúa entre $(2|\alpha_i|^2 - 1)^2$ y 1. Nótese que, como los $|\alpha_i|^2$ y $|\beta_i|^2$ son números aleatorios en el intervalo cerrado $[0, 1]$, si hay muchas partículas (esto es, $N \rightarrow \infty$), el valor estadístico de los casos $|\alpha_i|^2 = 1$, $|\beta_i|^2 = 1$, $|\alpha_i|^2 = 0$ y $|\beta_i|^2 = 0$ es nulo. Entonces, la expresión (5.49) para $R_l(t)$ es un producto infinito de números que pertenecen al intervalo abierto $(0, 1)$, por lo cual se puede afirmar que, cuando $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_l(t) = 0 \quad (5.60)$$

Esta conclusión es similar a la que se encontró en el capítulo anterior, pero en este caso el análisis es un poco más delicado. Al encontrarse que $R_l(t) \rightarrow 0$, sobreviene la tentación de establecer la total analogía con el caso tratado anteriormente y concluir que el sistema “decohere”. Sin embargo, si bien se tiene que $R_l(t) \rightarrow 0$, este número (en realidad, su raíz) está dentro de una sumatoria. Si el número de términos es pequeño, entonces es posible adoptar la señalada simplificación sin mayores problemas, ya que la suma de unos pocos términos que tienden a cero también tiende a cero. Pero cuando el número de términos es grande y creciente, este procedimiento no es el correcto ya que la serie, si bien converge, puede no converger a cero. El mismo análisis vale para el tercer sumando.

- En el caso en que $M \ll N$ (similar al ejemplo típico de decoherencia), entonces puede decirse que $\Sigma^{ND}(t)$ tiende a cero y el sistema decohere.
- Cuando $M \gg N$ o $M \cong N$, la situación es nueva respecto del caso tratado en el capítulo anterior.

En este punto ya es posible extraer una conclusión. Cuando $M \ll N$, aplicando el mismo análisis realizado en el capítulo anterior, se obtiene $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma^{(2)}(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma^{(3)}(t) = 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Sigma^{(2)}(t) + \Sigma^{(3)}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Sigma^{ND}(t)) = 0 \quad (5.61)$$

y de la expresión (5.48) se obtiene el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda' = f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda, \lambda'} = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda' = f(l-1)+1}^{f(l)} C_{\lambda} C_{\lambda'}^* S_{\lambda', \lambda} = \langle O_R \rangle_{\rho_*} \quad (5.62)$$

donde ρ_* es el estado final diagonal de U .

Cuando no se cumple $M \ll N$, el análisis anterior falla por la siguiente razón. Si bien $\lim_{N \rightarrow \infty} R_{l,l'}(t) = 0$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} R_{l,l'}(t) = 0$, estas funciones de t están dentro de sumatorias cuya cantidad de términos es función de M ; por eso no es posible, en principio, asegurar que las sumatorias $\Sigma^{(2)}$ y $\Sigma^{(3)}$ sean cero, ya que la suma de muchos números cercanos a cero puede no ser cercana a cero.

5.3.1. Simulaciones numéricas

Se realizó un cálculo numérico con computadora, en el que se utilizaron valores de $|\alpha_i|^2$ y $|\beta_i|^2$ tomados de un generador de números aleatorios para obtener $T_{l,l}(t_k)$. Luego se eligió una condición inicial para S donde todos los posibles estados tengan igual probabilidad, es decir:

$$|\mathcal{S}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^M}} \sum_{i=1}^{2^M} |\mathcal{S}_i\rangle \implies C_\lambda = C_\lambda^* = \frac{1}{\sqrt{2^M}} \forall \lambda \implies C_\lambda C_{\lambda'}^* = \frac{1}{2^M} \quad (5.63)$$

Para realizar el cálculo, se eligieron los $s_{\lambda,\lambda} = 1$; entonces:

$$B_{\lambda,\lambda'} = \frac{1}{2^M} \quad (5.64)$$

De este modo se puede graficar $\Sigma^{ND}(t)$ en función del tiempo. La primera simulación muestra la evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ en el caso en que $M \ll N$, es decir, cuando hay decoherencia. En la Figura 5.2 se muestran los casos para $N = 10^3$ con $M = 1$ y $M = 10$; en ambos casos se observa que el sistema decohere y hay una dependencia del tiempo de decoherencia respecto del número de partículas que componen el sistema A .

La segunda simulación muestra la evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ en el caso en que $M \gg N$. En la Figura 5.3 se muestran los casos para $M = 10^3$ con $N = 10$ y $N = 100$; en ambos casos se observa que el sistema no decohere. La tercera simulación muestra la evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ en el caso en que $M \cong N$. En la Figura 5.4 se muestran los casos para $N = 10^3$ con $M = 10^2$ y $M = 10^3$, en ambos casos se observa que si bien el sistema presenta una reducción en los términos de interferencia, el sistema no decohere.

La conclusión para el Caso (a) es la siguiente:

- Cuando $M \ll N$, el sistema decohere.
- Cuando $M \gg N$ o $M \cong N$, el sistema no decohere.

Por otro lado, si se observa la Figura 5.1, donde se representan las interacciones entre partículas, se reconoce inmediatamente una simetría importante del sistema. Todas las partículas del grupo A interactúan con todas las partículas del grupo B , pero a su vez todas las partículas del grupo B interactúan con todas las partículas del grupo A . Esto significa que no hay una diferencia sustancial entre el análisis del sistema A y el B . Teniendo esto en cuenta, se puede afirmar que:

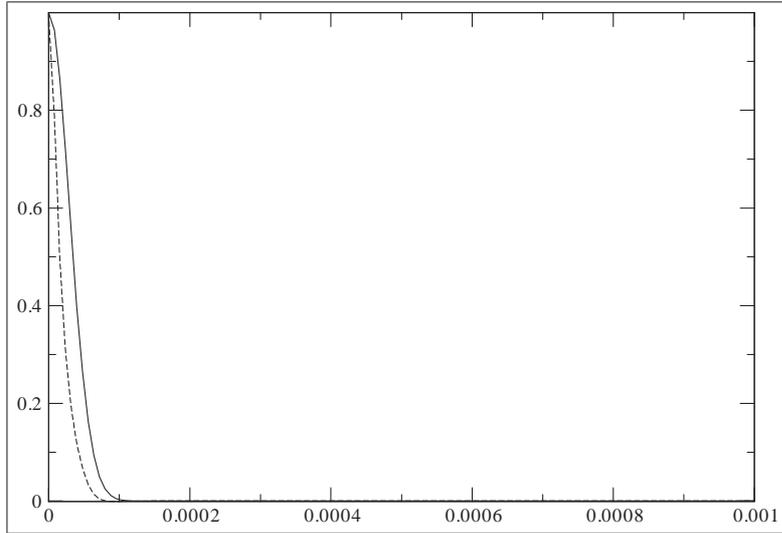


Figura 5.2: Evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ con $N = 10^3$. $M = 10$ en línea sólida y $M = 1$ en línea punteada.

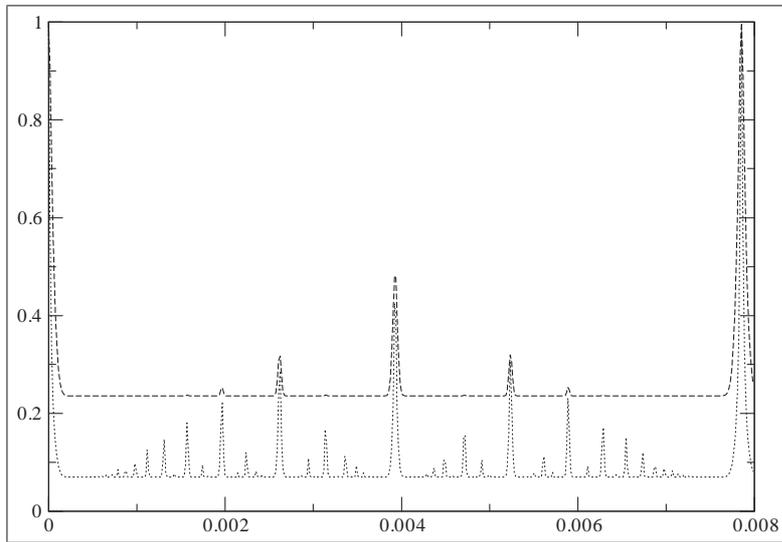


Figura 5.3: Evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ con $M = 10^3$. $N = 10$ en línea interrumpida y $N = 100$ en línea punteada.

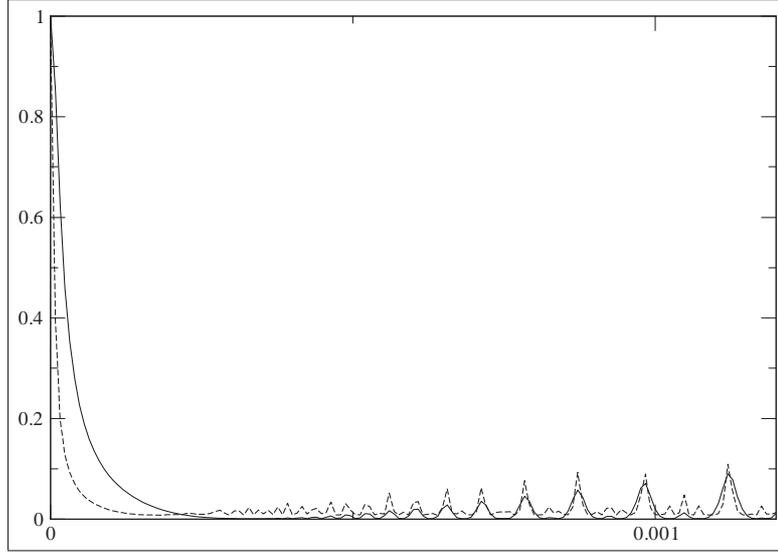


Figura 5.4: Evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ con $N = 10^3$. $M = 10^2$ en línea interrumpida y $M = 10^3$ en línea continua.

- Cuando $M \ll N$, el sistema A decohere y el sistema B no decohere.
- Cuando $M \gg N$, el sistema A no decohere y el sistema B decohere.
- Cuando $M \cong N$, ninguno de los sistemas, A y B , decoheren.

5.4. Caso (b): Observando una partícula del sistema A

1. **Primer paso:** Otro modelo similar al del capítulo anterior es el que se obtiene cuando se eligen como observables relevantes sólo aquéllos que corresponden a una única partícula A_k del sistema A fuertemente acoplado con el sistema B . Esto equivale a dividir al sistema compuesto U en nuevas partes: ahora el sistema de interés S' pasa a ser, por ejemplo, A_M , que es la última partícula que se representa en el ket $|\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle$, y el nuevo ambiente es $E' = \left(\bigcup_{i=1}^{M-1} A_i\right) \cup B$. De modo que $U = A_M \cup E'$. Según la ecuación (3.44), estos observables $O_R \in \mathcal{O}$ se escriben como

$$O_R = \left(\bigotimes_{i=1}^{M-1} I_i \right) \otimes \left(\sum_{\lambda, \lambda' = \uparrow, \downarrow} s_{\lambda, \lambda'} |\lambda\rangle \langle \lambda'| \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^N I_i \right) = O_{A_M} \bigotimes_{i=1}^N I_i \quad (5.65)$$

En este punto es posible simplificar mucho las expresiones si se trabaja en la base $\{|\mathcal{A}'_\lambda\rangle \langle \mathcal{A}'|\}$ definida en (5.11). De modo que es conveniente reescribir

O_{A_M} en la base $\{|\mathcal{A}'\rangle \langle \mathcal{A}'|\}$:

$$O_{A_M} = \sum_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'=0}^{2^{M-1}} \left(\begin{array}{l} \tilde{s}_{\uparrow\uparrow} |\mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}}\rangle \langle \mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}'}| + \tilde{s}_{\uparrow,\downarrow} |\mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}}\rangle \langle \mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}'+1}| + \\ \tilde{s}_{\downarrow,\uparrow} |\mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}'+1}\rangle \langle \mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}}| + \tilde{s}_{\downarrow\downarrow} |\mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}'+1}\rangle \langle \mathcal{A}'_{2\tilde{\lambda}'+1}| \end{array} \right) \quad (5.66)$$

Estos observables se obtienen cuando, en la expresión (5.28), entre otras cosas, $\epsilon_{\uparrow\uparrow}^{(i)} = \epsilon_{\downarrow\downarrow}^{(i)} = 1$ y $\epsilon_{\uparrow\downarrow}^{(i)} = 0$.

2. **Segundo paso:** Las funciones auxiliares definidas en (5.35), (5.39) y (5.40) resultan ser iguales que en el Caso (a), es decir, las dadas por las expresiones (5.44), (5.45) y (5.46). El valor medio de O_R en el estado $\rho(t)$ de U resultan, entonces,

$$\begin{aligned} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} &= \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} \tilde{B}_{\lambda, \lambda'} + \\ &+ \sum_{l=0}^{\tilde{M}} \sum_{\lambda, \lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} \tilde{B}_{\lambda, \lambda'} 2 \operatorname{Re} (T_{l, M-l}(t)) + \\ &+ \sum_{\substack{l, l'=0 \\ l \neq l' \\ l' \neq M-l}}^M \sum_{\substack{\lambda=f(l-1)+1 \\ \lambda'=f(l'-1)+1}}^{f(l)} \tilde{B}_{\lambda, \lambda'} T_{l, l'}(t) \end{aligned} \quad (5.67)$$

La diferencia entre las expresiones (5.48) y (5.67) se concentra en los $\tilde{B}_{\lambda, \lambda'}$, que dependen de la forma particular de los observables, y cuya expresión general no es fácil escribir en la base $\{|\mathcal{S}_\lambda\rangle\}$. Pero en la base $\{|\tilde{\mathcal{S}}_\lambda\rangle\}$ se pueden escribir, según (5.36) y (5.66), como:

$$\tilde{B}_{\lambda, \lambda'} = \left\{ \begin{array}{ll} C_\lambda C_{\lambda'}^* \tilde{s}_{\uparrow\uparrow} & \text{si } \lambda \text{ es par y } \lambda' \text{ es par} \\ C_\lambda C_{\lambda'}^* \tilde{s}_{\uparrow\downarrow} & \text{si } \lambda \text{ es par y } \lambda' \text{ es impar} \\ C_\lambda C_{\lambda'}^* \tilde{s}_{\downarrow\uparrow} & \text{si } \lambda \text{ es impar y } \lambda' \text{ es par} \\ C_\lambda C_{\lambda'}^* \tilde{s}_{\downarrow\downarrow} & \text{si } \lambda \text{ es impar y } \lambda' \text{ es impar} \end{array} \right\} \quad (5.68)$$

De modo que la primer sumatoria de la expresión (5.67) resulta

$$\sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda'=f(l-1)+1}^{f(l)} \tilde{B}_{\lambda, \lambda'} = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda, \lambda'=f(l-1)+1}^{\tilde{f}(l)} \left(\begin{array}{l} C_{2\lambda} C_{2\lambda'}^* \tilde{s}_{\uparrow\uparrow} + \\ + C_{2\lambda} C_{2\lambda'+1}^* \tilde{s}_{\uparrow\downarrow} + \\ + C_{2\lambda+1} C_{2\lambda'}^* \tilde{s}_{\downarrow\uparrow} + \\ + C_{2\lambda+1} C_{2\lambda'+1}^* \tilde{s}_{\downarrow\downarrow} \end{array} \right) \quad (5.69)$$

donde:

$$\tilde{f}(l) = \left\{ \begin{array}{l} f(l) \text{ si } l \text{ es par} \\ f(l) - 1 \text{ si } M \text{ es impar} \end{array} \right\} \quad (5.70)$$

3. **Tercer paso:** El valor medio $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ dado por la ecuación (5.67) nuevamente se puede separar en tres sumatorias que pueden ser analizadas por separado:

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} = \Sigma^{(1)}(t) + \Sigma^{(2)}(t) + \Sigma^{(3)}(t)$$

- El primero es, según (5.68) y (5.70),

$$\Sigma^{(1)} = \Sigma^D = \sum_{l=0}^M \sum_{\lambda=f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{2^{M-1}} (|C_{2\lambda}|^2 \tilde{s}_{\uparrow\uparrow} + |C_{2\lambda+1}|^2 \tilde{s}_{\downarrow\downarrow}) \quad (5.71)$$

donde todas las constantes que intervienen provienen de las condiciones iniciales y de los observables asociadas a las componentes no diagonales; queda claro que este sumando no evoluciona en el tiempo porque se utiliza la base de la energía:

$$\Sigma^D = \Sigma^{(1)} \neq \Sigma^{(1)}(t) \quad (5.72)$$

- El segundo sumando, según (5.68) y (5.70), es

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(t) &= \sum_{l=0}^{\tilde{M}} \sum_{\substack{\lambda=f(l-1)+1 \\ \lambda'=f(M-l-1)+1}}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda'} 2 \operatorname{Re} (T_{l,M-l}(t)) = \\ &= C_{f(\frac{M-1}{2}-1)+1} C_{f(\frac{M-1}{2}-1)+2}^* (\tilde{s}_{\downarrow\uparrow} + \tilde{s}_{\uparrow\downarrow}) 2 \operatorname{Re} \left(T_{\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

Luego, con el fin de obtener el límite de este término, tenemos que calcular el límite de $T_{\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}}(t)$, que es precisamente el $T_{l,l'}(t)$ del Caso (a) en el caso particular en que $l = \frac{M-1}{2}$ y $l' = \frac{M+1}{2}$. Pero, como hemos visto en el Caso (a), $T_{l,l'}(t)$ tiene la misma forma funcional que el $\Gamma_1(t)$ del modelo original (ver eq. (4.18)), que tiende a cero para $t \rightarrow \infty$ cuando $N \gg 1$. Por lo tanto, para $N \gg 1$, $T_{\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}}(t)$ también tiende a cero para $t \rightarrow \infty$, y lo mismo vale para $\Sigma^{(2)}(t)$ ya que es una suma de dos términos que contienen $T_{\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}}(t)$.

- La dependencia temporal de la tercera parte está dada por $T_{l,l'}(t)$. $\Sigma^{(3)}$ resulta

$$\Sigma^{(3)}(t) = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq \frac{M-1}{2}}}^M \sum_{\lambda=f(l-1)+1}^{f(l)} (B_{\lambda,\lambda+1} T_{l,l+1}(t) + B_{\lambda,\lambda-1} T_{l,l-1}(t)) \quad (5.74)$$

Como $l' = l \pm 1$, en este caso $T_{l,l \pm 1}(t)$ es

$$T_{l,l \pm 1}(t) = \prod_{j=1}^N (|\alpha_j|^2 e^{\mp i g_j t} + |\beta_j|^2 e^{\pm i g_j t}) \quad (5.75)$$

Si se compara esta ecuación con (4.21) para $r(t)$ en el modelo original de spines, se puede ver que

$$T_{l,l+1}(t) = r(t) \quad \text{y} \quad T_{l,l-1}(t) = r^*(t) \quad (5.76)$$

Entonces,

$$\Sigma^{(3)}(t) = (S_+ r(t) + S_- r^*(t)) \quad (5.77)$$

donde S_+ y S_- son constantes dadas por

$$S_{\pm} = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq \frac{M-1}{2}}}^M \sum_{\lambda=f(l-1)+1}^{f(l)} B_{\lambda,\lambda\pm 1} \quad (5.78)$$

Sobre la base de las simulaciones del modelo original, se puede afirmar que, cuando $N \gg 1$, $r(t)$ tiende a cero para $t \rightarrow \infty$. Por tanto, cuando $N \gg 1$, $\Sigma^{(3)}(t)$ tiende a cero para $t \rightarrow \infty$.

Entonces, la sumatoria Σ^D permanece constante y la sumatoria $\Sigma^{ND}(t) = \Sigma^{(2)}(t) + \Sigma^{(3)}(t)$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ para $N \gg 1$.

Puesto que la decisión de elegir A_M al comienzo fue arbitraria, y dada la simetría del sistema, las mismas conclusiones pueden extraerse para cualquier partícula A_j del subsistema A . Por lo tanto,

- Cuando $N \gg 1$ el sistema A_j decohere $\forall j$. Es decir, todas las partículas del sistema A decoheren independientemente del valor de M .

Teniendo en cuenta las consideraciones de simetría mencionadas en el Caso (a), se puede extraer una conclusión análoga para las partículas del sistema B :

- Cuando $M \gg 1$, el sistema B_k decohere $\forall k$. Es decir, todas las partículas del sistema B decoheren independientemente del valor de N .

Para ilustrar esta situación se realizaron simulaciones numéricas con la misma técnica que en el Caso (a). En la Figura 5.5 se muestra la evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ para $N = 1$ cuando $M = 10$ y $M = 10^3$; se ve el sistema no decohere y en ambos casos los gráficos se superponen completamente. En la Figura 5.6 se muestra la evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ para $N = 10^3$ cuando $M = 10$ y $M = 10^3$; se ve el sistema decohere y en ambos casos los gráficos se superponen completamente. La única condición para que el sistema A_j (B_k) decohera es que el número N (M) sea grande.

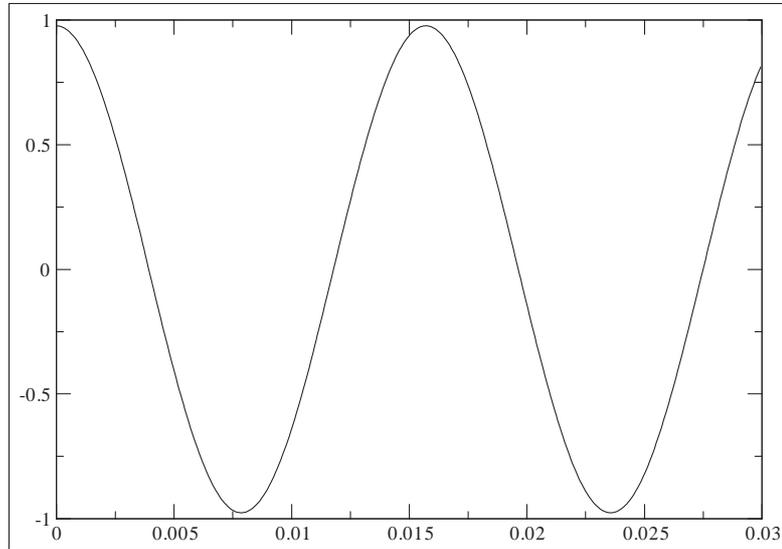


Figura 5.5: Evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ para $N = 1$ cuando $M = 10$ (línea continua) y $M = 10^3$ (línea de puntos); se ve el sistema no decohere y los gráficos se superponen completamente.

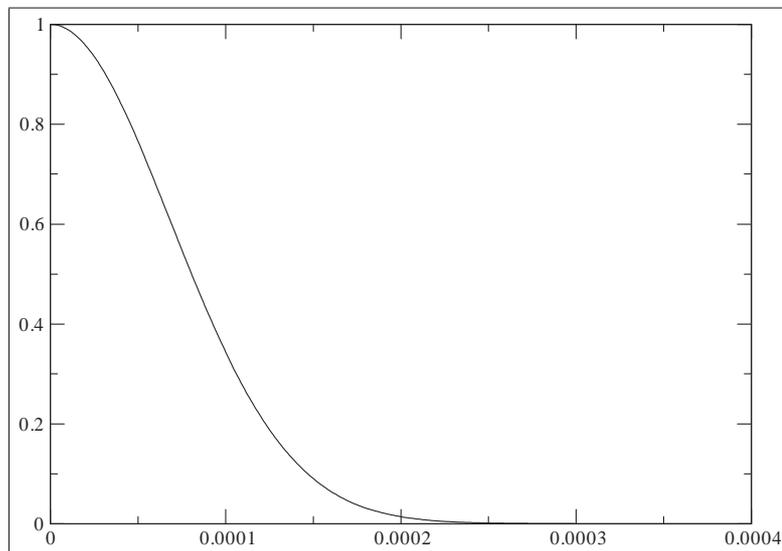


Figura 5.6: Evolución de $\Sigma^{ND}(t)$ para $N = 10^3$ cuando $M = 10$ (línea continua) y $M = 10^3$ (línea de puntos); se ve el sistema decohere y los gráficos se superponen completamente.

5.5. Conclusiones parciales

En este capítulo se estudió una generalización de modelo de spines, donde el sistema cerrado U está compuesto por dos subsistemas, $U = A \cup B$, con A de M partículas A_i y B de N partículas B_j . Se mostró cómo el modelo se comporta bajo diferentes definiciones del sistema de interés y de las relaciones entre los números de M y N . Los resultados obtenidos permiten señalar las siguientes observaciones:

- a) Se ha visto que, cuando $M \gg N$ o $M \simeq N$, el subsistema A no decohere, pero la partícula A_i , considerada de forma independiente, decohere cuando $N \gg 1$, $\forall i$. Esto significa que hay situaciones con sentido físico, dadas por $M \gg N \gg 1$ o $M \simeq N \gg 1$, donde todos los A_i decoheren a pesar de que A no decohere. En otras palabras, a pesar del hecho de que ciertas partículas decoheren y pueden comportarse de forma clásica, el subsistema formado por todas ellas conserva su naturaleza cuántica. También se vio que, por simetría, todas las partículas B_j , consideradas de forma independiente, también decoheren cuando $M \gg 1$. Entonces, cuando $M \gg N \gg 1$ o $M \simeq N \gg 1$, el requisito $M \gg 1$ permanece y se puede concluir que no sólo todos los A_i , sino también todos los B_j decoheren, aunque A y B no decoheran. Por lo tanto, todas las partículas del sistema cerrado $U = (\cup_i A_i) \cup (\cup_j B_j)$ pueden convertirse en clásicas cuando se las considera independientes, a pesar de que el sistema cerrado U no decohera y, por lo tanto, conserve su carácter cuántico. Estos resultados, considerados en conjunto, son una manifestación clara del hecho, ya señalado por Schlosshauer ([54]), que la disipación de la energía y la decoherencia son fenómenos diferentes: ya que todas las partículas del sistema U decoheren cuando se las considera independiente, la decoherencia no puede ser resultado de la disipación de energía de los sistemas a sus entornos.
- b) El modelo generalizado, que muestra la división del sistema cerrado en un sistema abierto y su entorno, responde a la selección de los observables relevantes en cada situación. Puesto que no hay descomposición privilegiada o esencial, se pueden seleccionar los observables del subsistema A de forma que el sistema no decohera. De esta manera, sería posible utilizar los subsistemas seleccionados apropiadamente, de modo de constituir un sistema abierto no afectado por la decoherencia, para el almacenamiento de información cuántica, como ya se ha hecho en los clusters de spines.
- c) El paso más natural de la generalización consistirá en seguir las ideas del paper [55], y la introducción de acoplamiento interno para los subsistemas A o B . Por ejemplo, dado que la decoherencia de A es cada vez menor en cuanto aumenta su número de partículas M , se podría esperar que la supresión de la decoherencia sea también más eficiente, cuando la interacción entre los spines del baños se incrementa.
- d) Este es un claro ejemplo de modelo que debe ser interpretado cuidadosamente al momento de explicar la emergencia de las propiedades clásicas a partir

de las cuánticas. Puesto que todas las partículas A_i y B_i decoheren pero los sistemas A y B no lo hacen, es imposible definir el sistema cuántico que decohere en términos de un único estado. Por otro lado, el enfoque de valores medios permite definir el mundo clásico en este caso, como el conjunto $\{O_{A1}, O_{B1}, O_{A2}, O_{B2}, \dots\}$, ya que en los valores medios de todos estos observables los términos de interferencia desaparecen.

Capítulo 6

Tiempo de decoherencia y base privilegiada

En este capítulo se introduce una técnica matemática para calcular el tiempo de decoherencia y el de relajación (ver [33] y [34]). Como es bien sabido, los autovalores del Hamiltoniano determinan las frecuencias características de la evolución unitaria de un sistema oscilatorio. De forma análoga, para la evolución no unitaria, los polos de la extensión analítica del Hamiltoniano son el catálogo de los modos de decaimiento hacia el equilibrio de estas evoluciones no unitarias (ver [56]). Ésta será la idea principal para encontrar los tiempos de relajación y de decoherencia: el primero de ellos se calculará mediante el polo más cercano al eje real, mientras que el segundo se obtendrá mediante un promedio de los restantes polos, pesado con las condiciones iniciales.

En este capítulo se intenta avanzar hacia una técnica que permita calcular el tiempo de decoherencia en forma simple, y en el caso de una distribución general de polos y para cualquier espacio \mathcal{O}_R de observables relevantes. Entonces es necesario dotar a las coordenadas de los observables y los estados en la base del Hamiltoniano $\{|\omega\rangle\}$ (i.e. las funciones $O(\omega, \omega')$ y $\rho(\omega, \omega')$) con propiedades adicionales de analiticidad, pero en general estas propiedades adicionales son simples y razonables. Es bien sabido que este requerimiento es habitual en muchos capítulos de la física, e.g. en la teoría de la dispersión.

También se sabe que la evolución hacia el equilibrio tiene dos fases:

1. Una fase exponencial de decaimiento, que se puede describir estudiando la continuación analítica del Hamiltoniano al plano complejo de la energía (ver [56], [57], [58], [59], [60], [61]). Este hecho también es bien conocido en la teoría de la dispersión.
2. Un decaimiento polinomial final en t^{-1} , conocido como efecto Khalfin (ver [62], [63]), que es muy débil y difícil de detectar experimentalmente (ver [64])¹.

¹También hay período no exponencial inicial ($t = 0$) llamado efecto Zenón, que no es importante para este trabajo.

Estas dos fases pueden ser identificadas por la teoría de la continuación analítica de los vectores, observables y estados.

Como fue señalado en el Capítulo 2, la *base privilegiada móvil* es la base, compuesta por estados aproximadamente estables, en la cual el operador de estado se vuelve aproximadamente diagonal (y permanece así) luego del tiempo de decoherencia. Para obtener la base privilegiada se suele utilizar un criterio, el *predictability sieve criterion* [30]. En este capítulo se indicarán las relaciones entre los diferentes tiempos característicos de decaimiento y las diferentes bases que se pueden utilizar para expresar el estado. A partir de ello, se introducirá un modo alternativo de identificar la base privilegiada móvil en términos del tiempo de decoherencia.

6.1. Relaciones entre tiempos y bases

Es conocido el hecho (ver (2.36) y (2.38)) de que el estado, cuando hay relajación, sigue una evolución irreversible con un límite débil

$$\langle O_R \rangle_{\rho(t)} \rightarrow \langle O_R \rangle_{\rho_*} \quad (6.1)$$

Esto significa que el sistema alcanza el estado de equilibrio ρ_* , y la ecuación (2.43) indica que el estado ρ_* es diagonal en la base de la energía. Por lo tanto se define²

1. la *base de equilibrio final* $\{|f_*\rangle\}$, tal que $\{|f_*\rangle\} \sim \{|\omega\rangle\}$ es la base de autovectores del Hamiltoniano. Entonces,

$$\rho_* = \sum_f \rho_f |f_*\rangle \langle f_*| = \sum_f \rho_f |\omega_f\rangle \langle \omega_f| \quad (6.2)$$

El estado final de relajación queda diagonal en esta base.

Por otro lado se sabe que el operador de estado es hermítico, y por lo tanto diagonalizable en todo momento. Esto significa que hay una base móvil que diagonaliza al operador de estado en todo instante. Entonces se define

2. la *base de diagonalización instantánea* $\{|i(t)\rangle\}$ tal que

$$\rho(t) = \sum_i \rho_i(t) |i(t)\rangle \langle i(t)| \quad (6.3)$$

El estado queda diagonal en esta base en todo momento. Notar que $\{|i(t)\rangle\}$ es la autobase de $\rho(t)$.

Cabe señalar que la base que diagonaliza un operador hermítico es única (se considera el caso no degenerado por simplicidad). Por lo tanto, la base $\{|i(t)\rangle\}$ debe

²Para simplificar, se utilizan sumatorias en lugar de utilizar integrales.

converger a la base $\{|f_*\rangle\}$ para tiempos largos, ya que ambas son las bases que diagonalizan el estado a tiempos largos.

Finalmente, a través de un cambio de base genérico se puede llegar a una base genérica $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$

$$|\widetilde{j(t)}\rangle = \sum_i a_j^i(t) |i(t)\rangle \quad (6.4)$$

Por lo tanto, se tiene

3. una base móvil genérica tal que

$$\rho(t) = \sum_{jj'} \rho_{ij}(t) |\widetilde{j(t)}\rangle \langle \widetilde{j'(t)}| \quad (6.5)$$

A continuación se determinan cuáles son las condiciones que deben cumplir los coeficientes $a_j^i(t)$ para que $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$ se convierta en la base privilegiada móvil. Se impone la condición de que esta base sea aquella que diagonaliza al operador de estado luego del tiempo de decoherencia. Así

- a. El *tiempo de decoherencia* t_D del sistema es el tiempo en el que el estado $\rho(t)$ adopta una forma diagonal en la base $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$.
- b. El *tiempo de relajación* t_R del sistema es el tiempo en el que el estado $\rho(t)$ alcanza el equilibrio.

Entonces puede hacerse una elección especial para la base genérica $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$. Dado el tiempo de decoherencia t_D y tiempo de relajación t_R , tales que $0 < t_D < t_R$, se toman los coeficientes $a_j^i(t)$ de la ecuación (6.4), que definen el cambio de base entre $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$ y $\{|i(t)\rangle\}$, como

- i. Para $t \in [0, t_D]$ se impone la condición $a_j^i(t) \neq \delta_j^i$, fuera de esto los coeficientes son genéricos.
- ii. Para $t \in [t_D, t_R]$ se impone la condición $a_j^i(t) = \delta_j^i$.
- iii. Para el tiempo t_D , $a_j^i(t)$ debe ser una función continua, de modo que el salto del régimen “i” al régimen de “ii” sea continuo.

Esta base es lo suficientemente general para el propósito que aquí se plantea:

- Para $t < t_D$, $|\widetilde{j(t)}\rangle \neq |i(t)\rangle$ y $\rho(t)$ no es diagonal en la base $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$.
- Para $t > t_D$, $|\widetilde{j(t)}\rangle = |i(t)\rangle$ y $\rho(t)$ es diagonal en la base $\{|\widetilde{j(t)}\rangle\}$.
- Para $t = t_D$, $|\widetilde{j(t)}\rangle$ converge continuamente a $|i(t)\rangle$.

- Para $t \rightarrow t_R$, $|i(t)\rangle$ converge continuamente a $|f_*\rangle$.

Queda claro que este procedimiento permite construir una base que diagonaliza el estado a partir del tiempo de decoherencia t_D siempre que dicho tiempo este dado de antemano. Si a esto se suma la restricción de que de todas las $\{|j(t)\rangle\}$ posibles se selecciona la opción adiabática (robusta o estable), entonces dado el tiempo de decoherencia es posible calcular la base privilegiada móvil. En las secciones siguientes se introducirá una técnica, basada en el estudio de los polos de la continuación analítica de una función, que permitirá calcular el tiempo de decoherencia y, con él, caracterizar la base privilegiada móvil.

6.2. La técnica polar: elementos matemáticos

La técnica que se introduce en esta sección sigue la línea de los trabajos [56], [60] y [65], de los cuales se presentará un breve resumen.

6.2.1. Continuaciones analíticas en el lenguaje de bra-ket

En primer lugar se resumen las características de la continuación analítica de estados puros. Dado el Hamiltoniano $H = H_0 + V$, donde H_0 es el Hamiltoniano libre que satisface (ver [56], eq. (8) o [60])

$$H_0|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle, \quad \langle\omega|H_0 = \omega\langle\omega|, \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (6.6)$$

y (ver [56], eq. (9))

$$I = \int_0^\infty d\omega |\omega\rangle\langle\omega|, \quad \langle\omega|\omega'\rangle = \delta(\omega - \omega') \quad (6.7)$$

entonces (ver [56], eq. (10))

$$H_0 = \int_0^\infty \omega |\omega\rangle\langle\omega| d\omega \quad (6.8)$$

y (ver [56], eq. (11))

$$H = H_0 + V = \int_0^\infty \omega |\omega\rangle\langle\omega| d\omega + \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' V_{\omega\omega'} |\omega\rangle\langle\omega'| = \int_0^\infty \omega |\omega^+\rangle\langle\omega^+| d\omega \quad (6.9)$$

donde los $|\omega^+\rangle$ son los autoestados del Hamiltoniano completo H , que también satisfacen la condición de la ecuación (6.7). Los autoestados de H están dados por las ecuaciones de Lippmann-Schwinger (ver [56], eq. (12) y (13)):

$$\langle\psi|\omega^+\rangle = \langle\psi|\omega\rangle + \langle\psi|\frac{1}{\omega + i0 - H}V|\omega\rangle, \quad \langle\omega^+|\varphi\rangle = \langle\omega|\varphi\rangle + \langle\omega|V\frac{1}{\omega - i0 - H}|\varphi\rangle \quad (6.10)$$

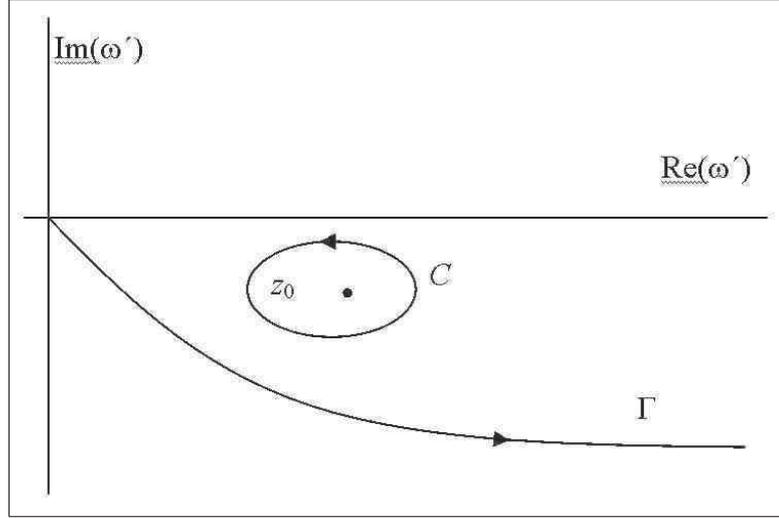


Figura 6.1: Contorno complejo Γ en el semiplano inferior de energía compleja usado en la evaluación de las integrales. La “energía” z_0 es el polo que se asume simple.

Las funciones de ω se dotan de propiedades de analiticidad (ver [66]): e.g. se considera que el estado $|\varphi\rangle$ (resp. $\langle\psi|$) es tal que no introduce polos en la extensión analítica de $\langle\omega|\varphi\rangle$ (resp. $\langle\psi|\omega\rangle$), de modo que esta función sea analítica en todo el plano complejo de la energía. Ésta es una simplificación que, como se verá más adelante, tiene que relajarse en algunos casos. Además se considera que la extensión analítica de la función $\langle\omega^+|\varphi\rangle$ (resp. $\langle\psi|\omega^+\rangle$) es analítica pero con un solo polo simple en $z_0 = \omega_0 - \frac{i}{2}\gamma_0$, $\gamma_0 > 0$, en el semiplano inferior (resp. otro polo $z_0^* = \omega_0 + \frac{i}{2}\gamma_0$, $\gamma_0 > 0$ en el semiplano superior) (ver [65] para detalles³). Si bien pueden existir muchos polos, por simplicidad se comenzará considerando sólo uno de ellos, y luego se realizará la generalización.

El primer paso consiste en efectuar la continuación analítica del eje positivo de ω a la curva Γ del semiplano inferior del plano de la Figura 6.1⁴.

Luego (ver [56], eq. (29)) se puede definir

$$\langle\tilde{f}_0|\varphi\rangle \equiv \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} \langle\omega'^+|\varphi\rangle, \quad \langle\psi|f_0\rangle \equiv (-2\pi i) \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0} (\omega' - z_0) \langle\psi|\omega'^+\rangle$$

$$\langle\tilde{f}_{z'}|\varphi\rangle \equiv \text{cont}_{\omega' \rightarrow z'} \langle\omega'^+|\varphi\rangle, \quad \langle\psi|f_{z'}\rangle \equiv \text{cont}_{\omega' \rightarrow z'} \langle\psi|\omega'^+\rangle, \quad z' \in \Gamma, \forall |\varphi\rangle \langle\psi| \quad (6.11)$$

y (ver [56], eq. (31))

$$\langle\psi|\tilde{f}_0\rangle \equiv \text{cont}_{\omega \rightarrow z_0^*} \langle\psi|\omega^+\rangle, \quad \langle f_0|\varphi\rangle \equiv (2\pi i) \text{cont}_{\omega' \rightarrow z_0^*} (\omega - z_0) \langle\omega^+|\varphi\rangle$$

³Éste es un modelo “de juguete” con un solo polo y el efecto Khalfin. Modelos más generales, con dos polos y más, se considerarán en la siguientes subsecciones. El polo se corresponde con el residuo que se puede calcular con la curva C , y el efecto Khalfin con integral a lo largo de la curva Γ de la Figura 6.1.

⁴Todas los gráficos son meramente ilustrativos y no la solución numérica de un problema concreto.

$$\langle \psi | \widetilde{f_{z'}} \rangle \equiv \text{cont}_{\omega \rightarrow z} \langle \psi | \omega^+ \rangle, \quad \langle f_z | \varphi \rangle \equiv \text{cont}_{\omega \rightarrow z} \langle \omega^+ | \varphi \rangle, \quad z \in \Gamma, \forall |\varphi\rangle \langle \psi| \quad (6.12)$$

donde *cont* es la continuación analítica. Por último, se puede demostrar que (ver [56])

$$H = z_0 |f_0\rangle \langle \widetilde{f_0}| + \int_{\Gamma} z |f_z\rangle \langle \widetilde{f_z}| dz \quad (6.13)$$

que es una simple expresión de H en términos de los vectores del plano complejo.

6.2.2. Lenguaje de observables y estados

El procedimiento utilizado con estados puros y el Hamiltoniano se puede repetir con los estados, observables y el operador Liouvilliano L (ver [67]). Pero es preferible seguir el camino de [56], manteniendo el enfoque Hamiltoniano y discutir la extensión analítica de $\langle O \rangle_{\rho(t)}$, que se va a simbolizar como $(\rho(t)|O)$. De acuerdo con el enfoque de los valores medios, éste es el personaje principal para estudiar la decoherencia y la relajación de los sistemas.

Se introduce la notación, ya utilizada en el Capítulo 2 (ver [56], eq. (42)),

$$|\omega\rangle = |\omega\rangle \langle \omega|, \quad \text{y} \quad |\omega, \omega'\rangle = |\omega\rangle \langle \omega'| \quad (6.14)$$

Así, un observable relevante genérico $O_R \in \mathcal{O}_R$ se expresa (ver [60], eq. (42) o [56], eq. (42))

$$O_R = |O_R\rangle = \int d\omega O(\omega) |\omega\rangle + \int d\omega \int d\omega' O(\omega, \omega') |\omega, \omega'\rangle \quad (6.15)$$

y un estado genérico se expresa ([60], eq. (45) o [56], eq. (45))

$$\rho_R = (\rho_R| = \int d\omega \rho(\omega) \widetilde{|\omega\rangle} + \int d\omega \int d\omega' \rho(\omega, \omega') \widetilde{|\omega, \omega'\rangle} \quad (6.16)$$

donde (ver también [60] eq. (44) o [56]. eq. (45))

$$\widetilde{|\omega\rangle} = \delta(\omega - \omega') \quad \text{y} \quad \widetilde{|\omega, \omega'\rangle} = \delta(\omega - \omega'') \delta(\omega' - \omega''') \quad (6.17)$$

Entonces

$$\widetilde{|\omega\rangle} O_R = O(\omega), \quad \widetilde{|\omega, \omega'\rangle} O_R = O(\omega, \omega') \quad (6.18)$$

Se seguirá el tratamiento más general posible, i.e. O_R es cualquier observable tal que $O_R \in \mathcal{O}_R$ y ρ_R cualquier estado tal que $\rho_R \in \mathcal{O}'_R$. De hecho, en la próxima sección se considerara solamente el valor medio genérico $\langle O_R \rangle_{\rho(t)}$ para dos modelos paradigmáticos: el modelo 1 con un solo polo acompañado del término de Khalfin y el modelo 2 con dos polos.

6.3. Modelos particulares de decoherencia y relajación tratados mediante la técnica polar

En esta sección se presentan dos modelos particulares de decoherencia y relajación a fin de mostrar cómo se aplican las ideas presentadas en la sección anterior. La comprensión de estos modelos es fundamental para construir el modelo general que se presentará en la siguiente sección.

6.3.1. Modelo 1. Un polo y el término de Khalfin

Se puede demostrar (ver [56], eq. (67)) que la expresión de la evolución del valor medio $\langle \rho(t) | O \rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle O_R \rangle_{\rho(t)} &= \langle \rho(t) | O_R \rangle \\ &= \int_0^\infty \rho^*(\omega) O(\omega) d\omega + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho^*(\omega, \omega') O(\omega, \omega') e^{i\frac{\omega-\omega'}{\hbar}t} d\omega d\omega' \end{aligned} \quad (6.19)$$

Usando (6.15) y (6.16), este valor medio en el caso $V \neq 0$ es

$$\langle \rho(t) | O_R \rangle = \int d\omega (\rho(0) | \Phi_\omega) (\widetilde{\Phi}_\omega | O_R) + \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' e^{i\frac{\omega-\omega'}{\hbar}t} (\rho(0) | \Phi_{\omega\omega'}) (\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'} | O_R) \quad (6.20)$$

donde $O(\omega) = (\widetilde{\Phi}_\omega | O_R)$, $O(\omega, \omega') = (\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'} | O_R)$, $\rho^*(\omega) = (\rho(0) | \Phi_\omega)$, $\rho^*(\omega, \omega') = (\rho_R(0) | \Phi_{\omega\omega'})$, y los vectores Φ se definen del siguiente modo:

$$|\Phi_\omega\rangle = |\omega^+\rangle \langle \omega^+|, \quad (\widetilde{\Phi}_\omega | = (\widetilde{\omega} |, \quad |\Phi_{\omega\omega'}\rangle = |\omega^+\rangle \langle \omega'^+|, \quad (6.21)$$

y

$$(\widetilde{\Phi}_{\omega\omega'} | = \int d\varepsilon [\langle \omega^+ | \varepsilon \rangle \langle \varepsilon | \omega'^+ \rangle - \delta(\omega - \varepsilon) \delta(\omega' - \varepsilon)] (\widetilde{\varepsilon} | + \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \langle \omega^+ | \varepsilon \rangle \langle \varepsilon' | \omega'^+ \rangle (\widetilde{\varepsilon, \varepsilon'} | \quad (6.22)$$

Entonces, si las funciones poseen las propiedades analíticas mencionadas anteriormente y hay un solo polo z_0 en el semiplano inferior, se puede probar que ([56] eq. (70))

$$\begin{aligned} \langle \rho(t) | O_R \rangle &= \int d\omega (\rho(0) | \Phi_\omega) (\widetilde{\Phi}_\omega | O_R) + e^{i\frac{z_0^* - z_0}{\hbar}t} (\rho(0) | \Phi_{00}) (\widetilde{\Phi}_{00} | O_R) \\ &+ \int_\Gamma dz' e^{i\frac{z_0^* - z'}{\hbar}t} (\rho(0) | \Phi_{0z'}) (\widetilde{\Phi}_{0z'} | O_R) + \int_{\Gamma^*} dz e^{i\frac{z - z_0}{\hbar}t} (\rho(0) | \Phi_{0z}) (\widetilde{\Phi}_{0z} | O_R) \\ &+ \int_{\Gamma^*} dz \int_\Gamma dz' e^{i\frac{z - z'}{\hbar}t} (\rho(0) | \Phi_{zz'}) (\widetilde{\Phi}_{zz'} | O_R) \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde $z_0 = \omega_0 - \frac{i}{2}\gamma_0$, $\gamma_0 > 0$, es el polo simple del semiplano inferior de la Figura 6.1, y donde $|\Phi_z\rangle$, $(\widetilde{\Phi}_z |$, $|\Phi_{zz'}\rangle$ y $(\widetilde{\Phi}_{zz'} |$ son las extensiones analíticas en el semiplano

inferior que se pueden definir como en el caso de (6.11) y (6.12) (ver ([56] eq. (54)), o también pueden definirse como una simple generalización de los vectores $|f_0\rangle$, $\langle f_0|$, $|f_z\rangle$ y $\langle f_z|$ (ver [56], eq. (42)). Entonces, las ecuaciones (6.23) y (6.19) permiten calcular los límites (2.36) y (2.37) para cualquier $\rho(0)$.

Por lo tanto, se puede concluir que los cuatro últimos términos de la ecuación (6.23) desaparecen con tiempos característicos

$$\frac{\hbar}{\gamma_0}; \frac{2\hbar}{\gamma_0}; \frac{2\hbar}{\gamma_0}; \infty \quad (6.24)$$

respectivamente. Es conveniente introducir las siguientes observaciones:

- i. La desaparición del segundo, tercero y cuarto términos de la ecuación (6.23) se da a través de decaimientos exponenciales. Éste también será el caso en los modelos más complicados, con muchos polos.
- ii. El ∞ significa que la evolución del último término de esta ecuación corresponde a un decaimiento polinomial, i.e. la *evolución de Khalfin*. Éste es un efecto muy débil, detectado experimentalmente en 2006 [64]. Si hay un número finito de polos y la curva Γ pasa por debajo de ellos, entonces la contribución de la integral a lo largo de Γ corresponde al efecto Khalfin⁵. Un modelo de sistema cerrado para el efecto Khalfin se pueden encontrar en [68], Sección 6, y uno tipo EID en [69], Sección 5.

Una vez obtenidos todos los tiempos característicos, se considera que el tiempo característico más pequeño es el tiempo de decoherencia $t_D = \frac{\hbar}{\gamma_0}$. Para tiempos $t > t_D$, la ecuación (6.23) queda

$$(\rho(t)|O_R) = \int d\omega (\rho(0)|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O) + \int_{\Gamma^*} dz \int_{\Gamma} dz' e^{\frac{i}{\hbar}(z-z')t} (\rho(0)|\Phi_{zz'}) (\widetilde{\Phi}_{zz'}|O) \quad (6.25)$$

ya que para $t > t_D = \frac{\hbar}{\gamma_0}$ los términos que incluyen el polo desaparecen⁶.

Ahora se puede diagonalizar el $\rho(t)$ que interviene en la ecuación (6.23) como⁷

$$\rho(t) = \sum_i \rho_i(t) |i(t)\rangle \langle i(t)| \quad (6.26)$$

⁵Si hay un conjunto infinito de los polos z_i , con parte imaginaria $-\frac{1}{2}\gamma_i$ de tal manera que $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \infty$, entonces se puede elegir una curva Γ_j por debajo de los polos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j$. Entonces la integral a lo largo de la curva Γ_j contiene el efecto de los polos $\gamma_{j+1}, \gamma_{j+2}, \dots, y$ y el efecto Khalfin. Así, se puede elegir la curva Γ_j de tal forma que los tiempos de decaimiento que corresponden a estos polos, $t_{j+n} = \hbar/\gamma_{j+n}$, sean muy pequeños y puedan despreciarse.

⁶Como t_D sólo brinda un orden de magnitud de la tasa de decaimiento, se considera que las tres primeras partes imaginarias de las ecuaciones (6.24) son esencialmente equivalentes.

⁷Aquí, en aras de la simplicidad, se utilizará la suma en lugar de la integral, y también se hará más adelante en todos los casos de diagonalización. Por otra parte, en muchos casos, el O_R o las condiciones iniciales sólo se pueden desarrollar en forma discreta (véase más adelante).

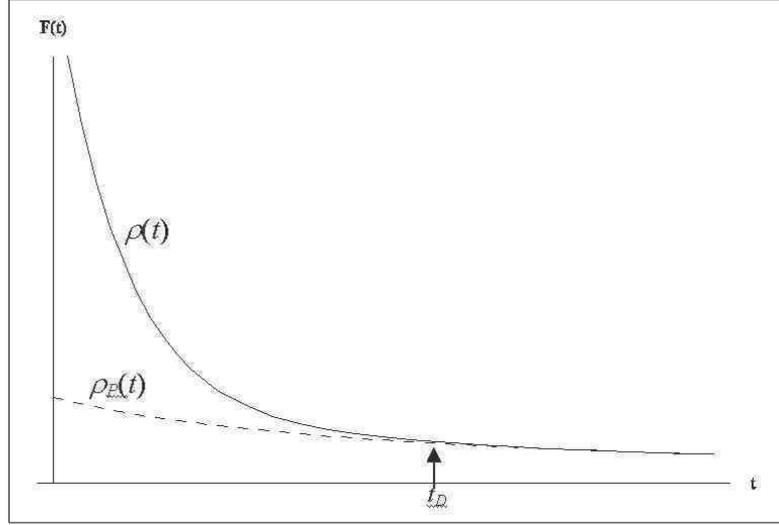


Figura 6.2: $\rho(t)$ y $\rho_P(t)$ coinciden en el límite para $t \rightarrow t_D$

donde $\{|i(t)\rangle\}$ es la base de diagonalización instantánea de $\rho(t)$. A continuación se define un estado $(\rho_P(t)|)$, el *estado privilegiado*, de modo que, para todo tiempo, cumple

$$(\rho_P(t)|O_R) = \int d\omega (\rho(0)|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O) + \int_{\Gamma^*} dz \int_{\Gamma} dz' e^{\frac{i}{\hbar}(z-z')t} (\rho(0)|\Phi_{zz'}) (\widetilde{\Phi}_{zz'}|O) \quad (6.27)$$

Así, $\rho_P(t)$ es el estado que evolucionaría en un modelo sin polos pero con el término de Khalfin. Esta evolución existe y puede encontrarse con una interacción adecuada⁸.

Es claro que

- i. para $t < t_D$, $\rho(t) \neq \rho_P(t)$,
- ii. para $t \rightarrow t_D$, $\rho_R(t) \rightarrow \rho_P(t)$
- iii. para $t > t_D$, $\rho(t) = \rho_P(t)$

La autobase de $\rho_P(t)$ es aquella que se elegirá como base privilegiada móvil. De hecho, diagonalizando $\rho_P(t)$ se obtiene

$$\rho_P(t) = \sum_j \rho_j(t) |\widetilde{j}(t)\rangle \langle \widetilde{j}(t)| \quad (6.28)$$

y cuando $t \rightarrow t_D = \frac{\hbar}{\gamma_0}$ se tiene que $\rho(t) \rightarrow \rho_P(t)$. Por lo tanto, de las ecuaciones (6.26) y (6.28) se observa que la autobase de $\rho(t)$ también converge a la de $\rho_P(t)$:

$$\{|i(t)\rangle\} \rightarrow \{|\widetilde{j}(t)\rangle\} \quad (6.29)$$

⁸Todas estas fórmulas han sido confirmadas por la coincidencia de resultados con otros métodos: e.g. los que se utilizan para estudiar el estado de un $^{208}\text{Pb}(2d_{5/2})$ en un potencial de Woods-Saxon (ver [56] Figura 3).

Es decir, $\{|i(t)\rangle\}$ converge a $\{|j(t)\rangle\}$ y $\rho(t)$ se vuelve diagonal en la base $\{|j(t)\rangle\}$: por lo tanto, $\{|j(t)\rangle\}$ se considera la base privilegiada móvil. En este modelo, el tiempo de relajación t_R se corresponde con el tiempo característico del término de Khalfin, que es extremadamente largo:

$$t_D \ll t_R \quad (6.30)$$

6.3.2. Modelo 2: Dos polos sin término de Khalfin

El termino de Khalfin es tan pequeño (ver [64]) que puede ser despreciado en la mayoría de las situaciones experimentales. Por eso, en este nuevo modelo se desprecia el término de Khalfin y se consideran dos polos z_0 y z_1 . Así, la ecuación (6.23) se convierte en

$$\begin{aligned} (\rho(t)|O_R) &= \int d\omega (\rho(0)|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O_R) + e^{\frac{i}{\hbar}(z_0^*-z_0)t} (\rho(0)|\Phi_{00})(\widetilde{\Phi}_{00}|O_R) + \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}(z_1^*-z_0)t} (\rho(0)|\Phi_{10})(\widetilde{\Phi}_{10}|O_R) + e^{\frac{i}{\hbar}(z_0^*-z_1)t} (\rho(0)|\Phi_{01})(\widetilde{\Phi}_{01}|O_R) \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}(z_1^*-z_0)t} (\rho(0)|\Phi_{11})(\widetilde{\Phi}_{11}|O_R) \end{aligned} \quad (6.31)$$

donde $z_0 = \omega_0 - \frac{i}{2}\gamma_0$, $\gamma_0 > 0$, $z_1 = \omega_1 - \frac{i}{2}\gamma_1$, $\gamma_1 > 0$, y también se considerará que $\gamma_0 \ll \gamma_1$ (ver [70], Section 3, para detalles). Entonces, los cuatro tiempos característicos (6.24) ahora son

$$\frac{\hbar}{\gamma_0}; \frac{\hbar}{\gamma_1 + \gamma_0} = \frac{\hbar}{\gamma_1 + \gamma_0} \approx \frac{\hbar}{\gamma_1} \quad (6.32)$$

Para tiempos $t > t_D = \frac{\hbar}{\gamma_1}$, la ecuación (6.25) se convierte en

$$(\rho(t)|O_R) = \int d\omega (\rho(0)|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O_R) + e^{\frac{i}{\hbar}(z_0^*-z_0)t} (\rho(0)|\Phi_{00})(\widetilde{\Phi}_{00}|O_R) \quad (6.33)$$

y se puede definir el estado $(\rho_P(t)|)$ tal que, para todo tiempo, se escriba

$$(\rho_P(t)|O_R) = \int d\omega (\rho(0)|\Phi_\omega)(\widetilde{\Phi}_\omega|O_R) + e^{\frac{i}{\hbar}(z_0^*-z_0)t} (\rho(0)|\Phi_{00})(\widetilde{\Phi}_{00}|O_R) \quad (6.34)$$

Repitiendo el razonamiento anterior se puede ver que, diagonalizando esta última ecuación, se obtiene la base privilegiada móvil como la base que diagonaliza al estado si no existiera el polo z_1 . Luego, en este caso la relajación se obtiene con un decaimiento exponencial dado por el polo z_0 (no con el término de Khalfin) y

$$t_R = \frac{\hbar}{\gamma_0} \gg t_D = \frac{\hbar}{\gamma_1} \quad (6.35)$$

Una vez más, cuando $t \rightarrow t_D = \frac{\hbar}{\gamma_0}$ se tiene que $\rho(t) \rightarrow \rho_P(t)$, y nuevamente se llega a la ecuación (6.29): $\rho(t)$ se vuelve en diagonal en la base privilegiada móvil en el tiempo t_D .

6.3.3. Observaciones sobre los Modelos 1 y 2

Antes de examinar el caso de muchos polos conviene a introducir algunos comentarios generales.

Sobre los observables y las condiciones iniciales

Conviene señalar que $(\widetilde{\Phi}_\omega|O_R)$, $(\widetilde{\Phi}_{0z'}|O_R)$, $(\widetilde{\Phi}_{0z}|O_R)$ y $(\widetilde{\Phi}_{zz'}|O_R)$ pueden ser cero, dependiendo del observable O_R . Entonces, en el caso de muchos polos, puede haber algunos polos que son detectados por O_R , y otros que no y desaparecen de la fórmula. Para ilustrar la situación se introduce el siguiente ejemplo: sea el sistema \mathcal{S} con el Hamiltoniano

$$H = H_0 + H_{Int} \quad (6.36)$$

donde

$$H_0 = \Omega_1|1\rangle\langle 1| + \Omega_2|2\rangle\langle 2| + 2 \int_0^\infty \omega|\omega\rangle\langle\omega|d\omega \quad (6.37)$$

y

$$H_{Int} = \int_0^a V_\omega^{(1)} [|\omega\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle\omega|] d\omega + \int_b^\infty V_{\omega'}^{(2)} [|\omega'\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle\omega'|] d\omega' \quad (6.38)$$

donde $a < b$ y $\langle 1|2\rangle = \langle\omega|2\rangle = \langle 1|\omega\rangle = 0$. Este Hamiltoniano se puede expresar como

$$H = H_1 + H_2 \quad (6.39)$$

donde

$$H_1 = \Omega_1|1\rangle\langle 1| + \int_0^\infty \omega|\omega\rangle\langle\omega|d\omega + \int_0^a V_\omega^{(1)} [|\omega\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle\omega|] d\omega \quad (6.40)$$

y

$$H_2 = \Omega_2|2\rangle\langle 2| + \int_0^\infty \omega'|\omega'\rangle\langle\omega'|d\omega' + \int_b^\infty V_{\omega'}^{(2)} [|\omega'\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle\omega'|] d\omega' \quad (6.41)$$

Entonces es fácil demostrar que

$$[H_1, H_2] = 0 \quad (6.42)$$

y que

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_1t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_2t\right) \quad (6.43)$$

Se descompone ahora el sistema como $\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ donde la parte \mathcal{P}_1 está relacionada con Hamiltoniano H_1 y la parte \mathcal{P}_2 está relacionada con Hamiltoniano H_2 . Cabe observar que estas dos partes no son independientes, puesto que comparten un espectro continuo común, i. e. $2 \int_0^\infty \omega|\omega\rangle\langle\omega|d\omega$. Si se definen los espacios de observables \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 , \mathcal{O}_{E1} y \mathcal{O}_{E2} como los que tienen las bases $\{|1\rangle\langle 1|\}$, $\{|2\rangle\langle 2|\}$, $\{|\omega\rangle\langle\omega|\}$ y $\{|\omega'\rangle\langle\omega'|\}$ respectivamente, los observables relevantes para la parte \mathcal{P}_1 son $O_1 \otimes I_{E1}$,

y para la parte \mathcal{P}_2 son $O_2 \otimes I_{E2}$. Así, se pueden considerar los dos tipos de observables relevantes del sistema $\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$,

$$\mathbb{O}_1 = O_1 \otimes I_{E1} \otimes I_2 \otimes I_{E2} \text{ y } \mathbb{O}_2 = I_1 \otimes I_{E1} \otimes O_2 \otimes I_{E2} \quad (6.44)$$

donde I es el operador identidad. Entonces,

$$(\rho(t)|\mathbb{O}_1) = (\rho(0)|\mathbb{O}_1(t)) = (\rho(0)| \exp(\frac{i}{\hbar}H_1t)O_1 \exp(-\frac{i}{\hbar}H_1t) \otimes I_{E1} \otimes I_2 \otimes I_{E2}) \quad (6.45)$$

$$(\rho(t)|\mathbb{O}_2) = (\rho(0)|\mathbb{O}_2(t)) = (\rho(0)|I_1 \otimes I_{E1} \otimes \exp(\frac{i}{\hbar}H_2t)O_2 \exp(\frac{i}{\hbar}H_2t) \otimes I_{E2}) \quad (6.46)$$

Así, \mathbb{O}_1 sólo “ve” la evolución de la parte \mathcal{P}_1 , mientras que \mathbb{O}_2 sólo “ve” la evolución de la parte \mathcal{P}_2 . En consecuencia, como los polos de la parte \mathcal{P}_1 corresponden a los modos de decaimiento de la evolución de esa parte, \mathbb{O}_1 sólo “ve” los polos de la parte \mathcal{P}_1 . Respectivamente, \mathbb{O}_2 sólo “ve” los polos de la parte \mathcal{P}_2 . q.e.d.

Éste también es el caso de las condiciones iniciales $(\rho(0)|\Phi_\omega)$, $(\rho(0)|\Phi_{0z'})$, $(\rho(0)|\Phi_{0z})$ y $(\rho(0)|\Phi_{zz'})$, que pueden eventualmente ser cero. Pero O_R o $\rho(0)$ también pueden crear algunos polos. Así que algunos polos pueden ser eliminados o creados por los observables o las condiciones iniciales, mientras que otros pueden ser retenidos. Pero, usualmente, se elegirán O_R y $\rho(0)$ tales que que no crean ni eliminan polos.

Sobre los tiempos de decoherencia y relajación

Sobre la base de los propios conceptos de tiempo de decoherencia y tiempo de relajación, se sabe que

$$t_D \ll t_R \quad (6.47)$$

Así, el tiempo de relajación debe estar asociado al polo con parte imaginaria más pequeña para obtener el tiempo característico más largo. Por otro lado, como el tiempo de decoherencia debe ser menor, se lo asociará al siguiente polo o, como se verá más adelante, a todo el resto de los polos.

6.4. El caso general: N polos

En esta sección se considera el caso general de un sistema con $N + 1$ polos $z_i = \omega'_i - i\gamma_i$. En este caso es fácil ver que la ecuación (6.31) (sin término de Khalfin) se convierte en

$$(\rho(t)|O_R) = (\rho_*|O_R) + \sum_{i=0}^N a_i(t) \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\hbar}t\right) = (\rho_*|O_R) + f(t) \quad (6.48)$$

donde $(\rho_*|O_R)$ es el valor de equilibrio final de $(\rho(t)|O_R)$ y $a_i(t)$ son funciones reales oscilatorias. Sea que los z_i estén distribuidos al azar o no, se los puede ordenar⁹

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \quad (6.49)$$

⁹Para simplificar, se considera sólo el caso $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$. Otros casos especiales deberán considerarse en otra oportunidad.

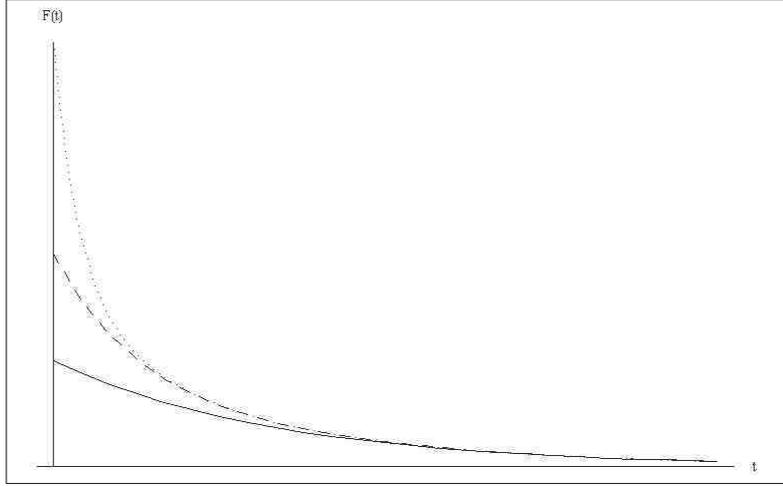


Figura 6.3: La función $F(t)$ esta dominada por diferentes componentes en distintos periodos de tiempo. En un primer momento dominan las componentes con tiempo característico pequeño (línea de puntos), luego las componentes con tiempo característico mediano (línea de trazos) y finalmente las componentes con tiempo característico largo (línea de continua).

Para ilustrar la situación se graficó la función $F(t) = (\rho_R(t)|O_R) - (\rho_{R^*}|O_R)$ en la Figura 6.3.

Entonces es claro que el tiempo de relajación queda identificado sin ambigüedad como $t_R = \frac{\hbar}{\gamma_0}$.

A continuación se considera el tiempo de decoherencia. Cada polo z_i define un modo de decaimiento con un tiempo característico

$$t_i = \frac{\hbar}{\gamma_i} \quad (6.50)$$

Esto significa que los polos llevan consigo la esencia de los fenómenos de decaimiento exponencial. Sin embargo el tiempo de decoherencia depende de su distribución y de otros datos, como la condición inicial del sistema. En una distribución completamente al azar de los polos, la mejor opción parece ser

$$t_R = \frac{\hbar}{\gamma_0}, \quad t_D = \frac{\hbar}{\gamma_1} \quad (6.51)$$

Entonces, en este caso,

$$(\rho_P(t)|O_R) = (\rho_{R^*}|O_R) + a_0(t) \exp\left(-\frac{\gamma_0 t}{\hbar}\right) \quad (6.52)$$

y la base privilegiada móvil $\{\widetilde{|j(t)\rangle}\}$ es la base que diagonaliza $\rho_P(t)$, como en el caso de 2 polos. Pero, como se verá, se puede mejorar esta caracterización mediante una que sería válida en un caso más general.

La experiencia obtenida por el estudio de muchos modelos de la bibliografía muestra que t_R parece estar dado por el tiempo característico más lento, independientemente de las condiciones iniciales. Por este motivo se puede caracterizar el tiempo de relajación mediante la estrategia de la sección anterior: usar el polo más cercano al eje real:

$$t_R = \frac{\hbar}{\gamma_0} \quad (6.53)$$

Este t_R coincidirá con el del modelo del siguiente capítulo.

Pero las condiciones iniciales parecen ser esenciales en la determinación de t_D . Para introducir tales condiciones iniciales, se toma $f(t)$

$$f(t) = \sum_{i=0}^N a_i(t) e^{-\frac{\gamma_i}{\hbar} t}, \quad f'(t) = \sum_{i=0}^N a'_i(t) e^{-\frac{\gamma_i}{\hbar} t} - a_i(t) \frac{\gamma_i}{\hbar} e^{-\frac{\gamma_i}{\hbar} t} \quad (6.54)$$

Entonces las condiciones iniciales a $t = 0$ resultan

$$f(0) = \sum_{i=0}^N a_i(0), \quad f'(0) = \sum_{i=0}^N a'_i(0) - \frac{1}{\hbar} \sum_{i=0}^N a_i(0) \gamma_i \quad (6.55)$$

La función $f(t)$ se puede escribir como $f(t) = \text{const.} \exp g(t) \sim \exp g(t)$, y se puede expandir la función $g(t)$ en una serie de Taylor

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \dots \quad (6.56)$$

Esta función se puede expresar en términos de la variable adimensional $\eta = \frac{t}{t_R}$ usando t_R , el único tiempo característico que se tiene hasta ahora:

$$g(\eta) = g(0) + g'(0)t_R\eta + \frac{1}{2}g''(0)t_R^2\eta^2 + \dots \quad (6.57)$$

donde $g(t) = g(\eta)$, $g'(0)t_R$, $g''(0)t_R^2$, ... son adimensionales. Como ya fue indicado, $t_D \ll t_R$, i.e. $\eta \ll 1$. Luego, con esta condición tenemos las aproximaciones

$$g(\eta) = g(0) + g'(0)t_R\eta \quad \text{o} \quad g(t) = g(0) + g'(0)t \quad (6.58)$$

donde

$$g(0) = \log f(0), \quad g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} \quad (6.59)$$

Estas ecuaciones contienen las condiciones iniciales. Luego, en esta aproximación

$$f(t) = \exp g(0) \exp tg'(0) = f(0)\bar{a}_i(t) \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \frac{\sum_{i=0}^N a_i \gamma_i t}{\sum_{i=0}^N a_i} \right) = f(0)\bar{a}_i(t) \exp \left(-\frac{\gamma_{eff}}{\hbar} t \right) \quad (6.60)$$

donde

$$\bar{a}_i(t) = f(0) \exp\left(\frac{\sum_{i=0}^N a'_i t}{\sum_{i=0}^N a_i}\right) \quad \gamma_{eff} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \gamma_i}{\sum_{i=0}^N a_i} \quad \text{y} \quad f(t) = \bar{a}_i(t) \exp\left(-\gamma_{eff} \frac{t}{\hbar}\right) \quad (6.61)$$

Entonces, el tiempo de decoherencia puede obtenerse como

$$t_D = \frac{\hbar}{\gamma_{eff}} \quad (6.62)$$

En consecuencia, como típicamente $\gamma_{eff} \gg \gamma_0$, resulta que $t_D \ll t_R$, donde γ_{eff} y t_D son ambas funciones de las condiciones iniciales. De este modo se ha obtenido un decaimiento típicamente muy rápido, y esta evolución es la que produce el fenómeno de la decoherencia.

A continuación se caracteriza la base privilegiada móvil, tarea sencilla ya que ahora se cuenta con el tiempo de decoherencia. Es evidente que, para tiempos $t > t_D$, los modos con tiempos característicos $t_i < t_D$ (i.e. $\gamma_i > \gamma_{eff}$), que se llamarán modos rápidos, se han convertido en insignificantes en la ecuación (6.48). Por lo tanto, en este caso $\rho_P(t)$ se puede definir como

$$(\rho_P(t)|O_R) = (\rho_*|O_R) + \sum_{i=0}^M a_i(t) \exp\left(-\frac{\gamma_i t}{\hbar}\right) \quad (6.63)$$

donde la sumatoria de esta ecuación sólo contiene los $M < N$ polos tales que $\gamma_i < \gamma_{eff}$, a los que se llamará modos lentos¹⁰. Esta es nuestra elección adiabática, ya que se han elegido los modos con decaimiento más lentos para definir $\rho_P(t)$ y se ignoraron todos los modos rápidos¹¹.

Por otra parte, el movimiento producido por los modos rápidos tales que $\gamma_i > \gamma_{eff}$, es decir, aquéllos con los movimientos más rápidos que el de la evolución de la ecuación (6.61), dejan de ser relevantes cuando $t > t_D$ y $\rho_P(t) \rightarrow \rho_R(t)$. Entonces se puede diagonalizar $\rho_P(t)$ y se obtiene la base privilegiada móvil $\{|j(t)\rangle\}$, la autobase de $\rho_P(t)$, que evoluciona sólo influenciada por los polos $\gamma_i < \gamma_{eff}$: cuando $t \rightarrow t_D$, $\{|j(t)\rangle\} \rightarrow$ la autobase de $\rho_R(t)$.

Valores medios y estados: un caso particular

Si bien hasta aquí se ha trabajado con valores medios, en el caso particular donde se estudia un estado dado por la superposición de dos estados de la base privilegiada

¹⁰E. g. en el caso de la ecuación (6.34) sólo aparece z_0 del lado derecho. Éste es un caso particular de la ecuación (6.63), cuando $a_0 = a_1$ y $\gamma_0 < \gamma_1$.

¹¹Las condiciones iniciales intervienen en la definición de γ_{eff} y, por lo tanto, de los modos lentos y rápidos. La elección adiabática realizada equivale a retener los modos lentos y descartar los rápidos. Entonces, en este trabajo los modos robustos son los lentos, porque ellos son los menos afectados por la interacción con el ambiente, que crea los polos. Ésta es la noción de robustez que introduce el tratamiento polar. Análogamente, si se calcula la entropía lineal se obtiene la mínima variación de esa entropía al considerar los modos lentos. Esta sería la minimización de la entropía lineal: la evolución de la base privilegiada móvil contiene sólo los modos lentos.

y donde los observables relevantes son todos los observables de un cierto subsistema, puede resultar más fácil trabajar con los polos pero desde el punto de vista del estado reducido del subsistema. Si $(\rho(t)|$ es el estado escrito en la base privilegiada, entonces

$$(\rho(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{12}^*(t) & \rho_{22}(t) \end{pmatrix} = (\rho(t)|_D + \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}(t) \\ \rho_{12}^*(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

donde $(\rho(t)|_D$ es la parte diagonal de $(\rho(t)|$. Cuando hay decoherencia del estado, en la parte no diagonal hay una exponencial real. Entonces,

$$(\rho(t)| = (\rho(t)|_D + \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}(t) \\ \rho_{12}^*(t) & 0 \end{pmatrix} = (\rho(t)|_D + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\rho}_{12}(t) \\ \tilde{\rho}_{12}^*(t) & 0 \end{pmatrix} e^{-\gamma_{eff}t}$$

y en este caso particular el tiempo de decoherencia depende de las condiciones iniciales pero no del observable.

6.5. Conclusiones parciales

En este capítulo se ha desarrollado en detalle la técnica polar que permite calcular los tiempos de decoherencia y de relajación de un sistema cuántico. La conclusión es que los polos de la extensión analítica de los valores medios suministran el catálogo de evoluciones no unitarias. Por lo tanto, el estudio de la distribución de estos polos permite calcular todos los tiempos característicos:

- El polo más cercano al eje real corresponde al tiempo característico más largo y se asocia al tiempo de relajación t_R .
- El tiempo de decoherencia t_D está asociado a un polo efectivo γ_{eff} , que se define como un promedio de los restantes polos pesados con las condiciones iniciales.
- Finalmente, se muestra que $t_D \ll t_R$

Esta estrategia basada en el estudio de los polos de una función tiene una ventaja de orden pragmático. Para hallar los polos se puede aprovechar la infinidad de software desarrollado en ingeniería para el cálculo de polos de funciones en el contexto de la teoría de circuitos. Esta teoría establece que cada componente electrónico de un circuito tiene asociado un operador, que se debe combinar con los operadores de los otros componentes para dar lugar a la ecuación diferencial que determina la corriente del circuito. Para resolver esta ecuación diferencial, se le aplica la transformada de Laplace, y al resultado se le buscan los polos. Estos polos son los que dan la información acerca de cómo responde el circuito ante un determinado estímulo. Puesto que esta técnica consiste en buscar polos y se aplica a infinidad de circuitos de interés comercial, la industria ya ha invertido mucho esfuerzo y dinero en desarrollar software con este fin, que se puede aprovechar para estudiar la decoherencia de los sistemas.

Capítulo 7

Sobre el modelo de osciladores

Para estudiar el tiempo de relajación y el tiempo de decoherencia, los modelos de espines estudiados en los Capítulos 4 y 5 no son los más didácticos, ya que en ellos la base privilegiada móvil es siempre la base de la energía; por lo tanto, el sistema relaja y decohere al mismo tiempo. Por este motivo, se expone a continuación un modelo simple que es un buen ejemplo de decoherencia y relajación: el oscilador que se encuentra analizado en el capítulo 7 del libro [71] de Omnès. El ejemplo que allí se expone es el típico modelo en el que el *sistema* es un oscilador armónico y el *ambiente* es un conjunto de muchos osciladores no interactuantes. Dicho de otro modo, se eligen los observables relevantes del sistema total de modo que queda definido el subsistema oscilador principal, y el único acoplamiento existente es el que se da entre el oscilador principal y el resto de los osciladores que conforman el ambiente. Este ejemplo queda enmarcado en el caso particular mencionado al final del capítulo anterior: resulta más sencillo trabajar con el estado reducido que con los valores medios. En este capítulo se utiliza un método basado en el estudio de los polos de la extensión analítica de funciones para calcular el tiempo de decoherencia del sistema. Por otra parte, en el enfoque de Omnès, la base preferida móvil debe estar relacionada con algunas “variables colectivas” que son experimentalmente accesibles. En este caso, la variable colectiva relevante es el centro de masa del oscilador principal, i. e., el valor medio de la posición en estados coherentes.

7.1. Presentación del modelo

En [71] se considera un oscilador en una dimensión (el sistema) en un baño de osciladores (el ambiente). Debido a que el tratamiento más simple es el caso del oscilador armónico, se elige describir el sistema con operadores de creación a^\dagger y destrucción a con una frecuencia angular característica ω_0 . Y los N osciladores armónicos con frecuencia angular ω_k ($k = 1, 2, \dots, N$) que conforman el ambiente son descritos mediante sus correspondientes operadores de creación b_k^\dagger y destrucción b_k .

Siendo éste el ejemplo a tratar, el Hamiltoniano total se escribe como¹

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k (\lambda_k a^\dagger b_k + \lambda_k^* a b_k^\dagger) \quad (7.1)$$

donde el primer término representa la energía del centro de masa del oscilador principal, el segundo es el Hamiltoniano de los N osciladores y el último es el término de interacción entre el oscilador principal y los osciladores del ambiente, caracterizado por las constantes de acoplamiento λ_k que se asumen pequeñas. Se construyen los estados coherentes $\{|\alpha, \{\beta_k\}\rangle\}$ de la forma habitual, donde α y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ son los autovalores complejos de los operadores de destrucción², es decir

$$a|\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \alpha|\alpha, \{\beta_k\}\rangle, b_k|\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \beta_k|\alpha, \{\beta_k\}\rangle \quad (7.2)$$

Estos números complejos definen los estados coherentes³. Como es sabido (ver [72]), los estados coherentes forman una base que genera todo el espacio (pero no es ortogonal). Por lo tanto, un estado genérico se puede obtener combinando estados coherentes.

Este modelo se puede resolver de distintos modos y hallar el tiempo de decoherencia y relajación. Con fines comparativos, a continuación se muestra el resultado tal como es obtenido en [71]. El amortiguamiento produce que el sistema llegue a un estado de relajación en un tiempo

$$t_{RS} = 1/\gamma \quad (7.3)$$

donde

$$\gamma = \pi \int n(v') dv' \lambda_v'^2 \delta(\omega - v') \quad (7.4)$$

siendo $n(v') dv' = d\mathbf{k}$. Por otro lado, el tiempo de decoherencia del sistema es (ver [71], pp. 289-291)

$$t_D \sim \frac{1}{m\omega_0 L_0^2} t_R \quad (7.5)$$

En la siguiente sección se pretende recuperar estos resultados a partir de la introducción de la técnica de polos en el estudio de este modelo.

¹Este Hamiltoniano es similar al de la ecuación (6.9) y (7.6) que se introducirá más adelante. De hecho, en algunas etapas del tratamiento, Omnès se ve obligado a pasar al espectro continuo. Un tratamiento completo de este modelo continuo se puede encontrar en [61]. Por otro lado, en este capítulo se toma $\hbar = 1$.

²Puesto que los operadores de destrucción a y b_k no son autoadjuntos, sus autovalores son, en general, complejos.

³El estado coherente que define el número λ es $|\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$, ver [73].

7.2. El cálculo del tiempo de decoherencia en base a los polos

Si no se toma en cuenta el término de Khalfin en el modelo de Lee-Friedrich, éste puede asimilarse al modelo de osciladores mencionado en el apartado anterior. Por ese motivo, en las siguientes subsecciones se presentará el modelo de Friedrich, que tiene un polo, y luego su generalización en el modelo de Lee-Friedrich con N polos. Los resultados servirán para ser aplicados al modelo de osciladores introducido en el apartado anterior.

7.2.1. El modelo de Lee-Friedrich

Muchos modelos de especial importancia se pueden estudiar, como el de [61], con el Hamiltoniano

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \int \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} + \int \lambda_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}}^\dagger a + a^\dagger b_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \quad (7.6)$$

i.e. una versión continua de (7.1). En esta versión, se debe dotar a los escalares $(\rho(t)|O_R)$ de las condiciones de analiticidad. Para ello, la función λ_k (donde $k = \omega_k = |\mathbf{k}|$) se elige de tal forma que

$$\eta_{\pm}(\omega_k) = \omega_k - \omega_0 - \int \frac{d\mathbf{k} \lambda_{\mathbf{k}}^2}{\omega_k - \omega_{\mathbf{k}'} \pm i0} \quad (7.7)$$

no se anula para $k \in \mathbb{R}^+$, y su extensión analítica $\eta_+(z)$ al semiplano inferior sólo tiene un polo simple en z_0 . Este hecho va a tener influencia en los polos de $(\rho(t)|O_R)$ y, como se propuso en el capítulo anterior, el estudio de $(\rho_R(t)|O_R)$ será el camino esencial para entender el problema.

El Hamiltoniano (7.6) a veces es llamado Hamiltoniano de Lee-Friedrich y se caracteriza por el hecho de que contiene diferentes sectores de números de modos (número de sectores de partículas en QFT). De hecho, a^\dagger y $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ son operadores de creación que permiten definir los sectores con números de modos, e.g. el sector de un modo contendrá estados como $a^\dagger|0\rangle$ y $b_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$ (donde $a|0\rangle = b_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$). Entonces, la acción de $\exp(-Ht)$ (o simplemente la de H) conservará el número de modos de este sector en un solo modo, ya que en (7.6) todos los operadores de destrucción son precedidos por un operador de creación. Éste también es el caso del sector de n modos. El Hamiltoniano del sector de un solo modo es el llamado Hamiltoniano del modelo de Friedrich, i. e.

$$H_F = \omega_0 |1\rangle \langle 1| + \int \omega_v |v\rangle \langle v| dv + \int (\lambda(v) |v\rangle \langle 1| + \lambda^*(v) |1\rangle \langle v|) dv \quad (7.8)$$

Como consecuencia de la condición de analiticidad impuesta, este sencillo modelo de Friedrich muestra sólo una resonancia, que se produce en z_0 . Sea H_F el Hamiltoniano

de la continuación analítica del modelo de Friedrich, entonces⁴,

$$H_F|z_0\rangle = z_0|z_0\rangle, \quad H_F|z\rangle = z|z\rangle \quad (7.9)$$

donde $z_0 = \omega_0 + \delta\omega_o - i\gamma = \omega - i\gamma$ es el único polo y $z \in \Gamma$.

7.2.2. El tiempo de relajación

El modelo de Lee-Friedrich describe la interacción entre un oscilador cuántico y un campo escalar, y se encuentra analizado ampliamente en la bibliografía. En general, este modelo se estudia mediante el análisis del sector de un modo excitado, i.e., el modelo de Friedrich. Entonces, si se calcula el polo de este último modelo hasta el segundo orden en λ_k , se obtiene que

$$z_0 = \omega_0 + \int \frac{d\mathbf{k}' \lambda_{\mathbf{k}'}^2}{\omega_0 - \omega_k + i0} \quad (7.10)$$

Cuando este polo (que corresponde al polo más cercano al eje real en el modelo de Lee-Friedrich) se calcula (ver [74], eq. (42)), el resultado coincide con el presentado en el libro de Omnès ([71], p. 288) para el tiempo de relajación. De hecho,

$$\frac{1}{\omega_0 - \omega' + i0} = P \left(\frac{1}{\omega_0 - \omega'} \right) - i\pi\delta(\omega_0 - \omega') \quad (7.11)$$

donde P es la “parte principal”. Así

$$z_0 = \omega_0 + P \int \frac{d\mathbf{k}' \lambda_{\mathbf{k}'}^2}{\omega_0 - \omega_k} - i\pi \int d\mathbf{k}' \lambda_{\mathbf{k}'}^2 \delta(\omega_0 - \omega_k) \quad (7.12)$$

Luego, si $d\mathbf{k} = n(v')dv'$, se obtiene

$$\delta\omega = P \int \frac{n(v')dv' \lambda_{v'}^2}{\omega_0 - v'}, \quad \gamma = \pi \int n(v')dv' \lambda_{v'}^2 \delta(\omega_0 - v') \quad (7.13)$$

donde $\delta\omega$ produce un corrimiento en la frecuencia del oscilador principal $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, y γ produce un amortiguamiento. Estos resultados coinciden con los resultados de [71] p. 288. De este modo,

$$z_0 = (\omega_0 + \delta\omega) - i\gamma = \omega - i\gamma \quad (7.14)$$

En definitiva, el resultado presentado en el libro de Omnès para el tiempo de relajación coincide con el obtenido sobre el mismo modelo mediante la técnica de polar, esto es,

$$t_R = \frac{1}{\gamma} \quad (7.15)$$

⁴Sólo simbólicamente, ya que los polos pertenecen a los escalares $(\rho(t)|O)$.

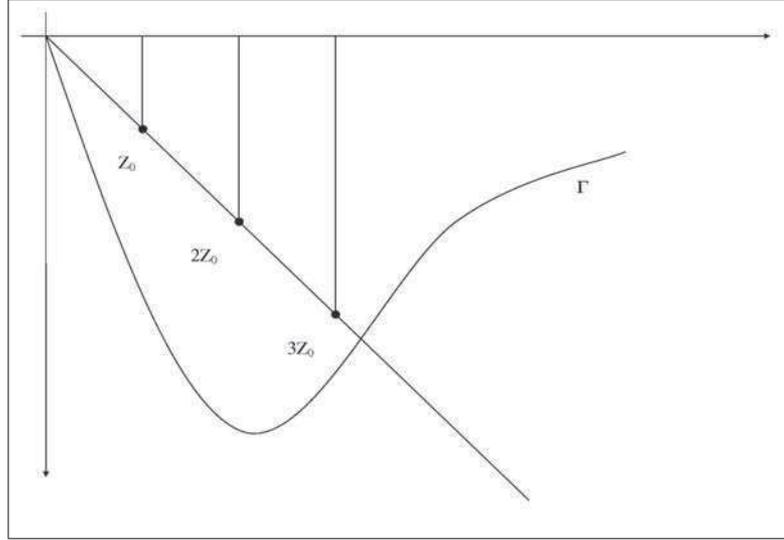


Figura 7.1: Contorno complejo en el semiplano inferior de energía compleja para el sector de tres modos. Los polos de energías z_0 , $2z_0$ y $3z_0$ se asumen simples.

7.2.3. Los otros polos del modelo de Lee-Friedrich

Ahora se considerará el Hamiltoniano de Lee-Friedrich (7.6) para sectores de más de una partícula, e. g. para el sector de tres modos. Entonces se tiene que⁵:

$$H|z_a, z_b, z_c\rangle = (z_a + z_b + z_c)|z_a, z_b, z_c\rangle \quad (7.16)$$

donde $(z_a + z_b + z_c)$ es el autovalor. Si $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma$ (donde Γ es el contorno complejo en el semiplano inferior de energía compleja para el sector de tres modos) y z_0 es el polo del sector de una partícula, en el plano complejo del espectro de H se obtienen

- 1.- Autovalores $(z_1 + z_2 + z_3)$ con tres puntos de la curva Γ .
- 2.- Autovalores $(z_1 + z_2 + z_0)$, $(z_1 + z_0 + z_3)$ y $(z_0 + z_2 + z_3)$, con dos puntos en la curva y el polo z_0 .
- 3.- Autovalores $(z_1 + z_0 + z_0)$, $(z_0 + z_2 + z_0)$ y $(z_0 + z_0 + z_3)$, con un polo en $2z_0$, y un punto de la curva Γ .
- 4.- El autovalor $(z_0 + z_0 + z_0)$, con el polo en $3z_0$.

En la Figura 7.1 se ilustra la situación. Como es usual, se desprecian los términos de Khalfin porque esos términos corresponden a un decaimiento no exponencial. Entonces si se eliminan z_1, z_2 y z_3 de la ecuación (7.16), solamente quedan los vectores $|z_0\rangle = |1\rangle$, $|z_0, z_0\rangle = |2\rangle$ y $|z_0, z_0, z_0\rangle = |3\rangle$. Por supuesto, en el caso general 3 se reemplaza por n y, como consecuencia, el espectro es $nz_0 + \text{la curva } \Gamma$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En efecto

$$z_n = nz_0 + \bigcup_j z_j, \quad z_j \in \Gamma \quad (7.17)$$

⁵Sólo simbólicamente, como ya se ha explicado en una nota anterior.

Entonces, si se desprecia el término de Khalfin ya que tiene asociado un tiempo de decaimiento extremadamente largo, Γ desaparece y solamente quedan los vectores $|z_0, \dots, z_0\rangle = |n\rangle$. Luego, bajo esta aproximación, el sistema tiene un Hamiltoniano efectivo (no hermítico)

$$H_{eff} = z_0 \left(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2} \right) = z_0 \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (7.18)$$

donde a_0^\dagger, a_0 son los operadores de creación y destrucción para el modo correspondiente al polo z_0 y $N = a_0^\dagger a_0$ es el correspondiente número de polos del operador

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (7.19)$$

En la aproximación sin término de Khalfin, y si n es muy grande, el H_{eff} resulta

$$H_{eff} = z_0 a_0^\dagger a_0 = z_0 N_0 \quad (7.20)$$

los autovalores de H_{eff} son

$$z_n = n z_0 = n(\omega - i\gamma) \quad (7.21)$$

y la evolución de los autoestados es

$$e^{-iH_{eff}t}|n\rangle = e^{-iz_n t}|n\rangle = e^{-inz_0 t}|n\rangle \quad (7.22)$$

Entonces, en esta aproximación, el Hamiltoniano efectivo H_{eff} de Lee-Friedrich es simplemente una versión no Hermítica de H_o con un término de decaimiento.

7.2.4. Las condiciones iniciales

Como las condiciones iniciales son estados coherentes ($|\alpha_1(0)\rangle$ y $|\alpha_2(0)\rangle$), se los puede expresar en la base $\{|n\rangle\}$, con $n = 0, 1, \dots, \infty$. Un estado coherente es

$$|\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (7.23)$$

Pero también se puede elegir una versión aproximada de las condiciones iniciales, donde el número de modos sea N y se toma $n = 0, 1, \dots, N$, es decir, un estado cuasi-coherente o cuasi-Gaussiano

$$|\lambda\rangle = \left(\sum_{k=0}^N \frac{|\lambda|^{2k}}{k!} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (7.24)$$

Este estado cuasi-Gaussiano se convierte en un estado coherente cuando $N \rightarrow \infty$. A partir de aquí se considera que N es lo suficientemente grande como para poder aproximar el estado cuasi-Gaussiano a un estado coherente.

Luego se eligen las condiciones iniciales como la suma de dos estados coherentes, es decir,

$$|\Phi(0)\rangle = a |\alpha_1(0)\rangle + b |\alpha_2(0)\rangle \quad (7.25)$$

donde $|\alpha_1(0)\rangle$ y $|\alpha_2(0)\rangle$ son estados coherentes. En efecto,

$$|\alpha_1(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha_1(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1(0))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (7.26)$$

$$|\alpha_2(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha_2(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2(0))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (7.27)$$

Así, el estado inicial es

$$\begin{aligned} \rho_0 = |\Phi(0)\rangle \langle \Phi(0)| &= |a|^2 |\alpha_1(0)\rangle \langle \alpha_1(0)| + ab^* |\alpha_1(0)\rangle \langle \alpha_2(0)| \\ &+ a^*b |\alpha_2(0)\rangle \langle \alpha_1(0)| + |b|^2 |\alpha_2(0)\rangle \langle \alpha_2(0)| \end{aligned} \quad (7.28)$$

Se eligen los dos estados coherentes (7.26) y (7.27) con centro en $p_{1,2}(0) = 0$; entonces (ver [71], ec. (7.15) de p. 284)

$$\alpha_1(0) = \frac{m\omega_0}{\sqrt{2m\omega_0}} x_1(0) \quad (7.29)$$

$$\alpha_2(0) = \frac{m\omega_0}{\sqrt{2m\omega_0}} x_2(0) \quad (7.30)$$

Bajo estas condiciones, $\alpha_1(0)$ y $\alpha_2(0)$ son números reales.

Sin pérdida de generalidad (ya que con un cambio de coordenadas se pueden trasladar $x_1(0)$ y $x_2(0)$), se puede considerar que $\alpha_1(0)$ y $\alpha_2(0)$ son positivos. Por este motivo se pueden utilizar $\alpha_i(0)$ y $|\alpha_i(0)|$ indistintamente.

7.2.5. La condición de macroscopicidad

La evolución temporal del estado es

$$\begin{aligned} \rho(t) = |\Phi(t)\rangle \langle \Phi(t)| &= |a|^2 |\alpha_1(t)\rangle \langle \alpha_1(t)| + |b|^2 |\alpha_2(t)\rangle \langle \alpha_2(t)| + \\ &+ ab^* |\alpha_1(t)\rangle \langle \alpha_2(t)| + a^*b |\alpha_2(t)\rangle \langle \alpha_1(t)| \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde $|\alpha_1(t)\rangle$ y $|\alpha_2(t)\rangle$ son los estados evolucionados de las condiciones iniciales $|\alpha_1(0)\rangle$ y $|\alpha_2(0)\rangle$. El estado $|\alpha_i(t)\rangle$ es la evolución del estado inicial $|\alpha_i(0)\rangle$ regida por el Hamiltoniano efectivo H_{eff}

$$|\alpha_i(t)\rangle = e^{-\frac{(\alpha_i(0))^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i(0))^n}{\sqrt{n!}} e^{-iz_n t} |n\rangle \quad (7.32)$$

Por otro lado, $|\tilde{\alpha}_j(t)\rangle$ es la evolución del estado inicial $|\alpha_j(0)\rangle$ regida por el Hamiltoniano del oscilador armónico con frecuencia ω sin interacción

$$|\tilde{\alpha}_j(t)\rangle = e^{-\frac{(\alpha_j(0))^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j(0))^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_n t} |n\rangle \quad (7.33)$$

Entonces, en la base $\{|\tilde{\alpha}_1(t)\rangle, |\tilde{\alpha}_2(t)\rangle\}$,

$$\rho(t) = \rho^{(D)}(t) + \rho^{(ND)}(t) \quad (7.34)$$

donde $\rho^{(D)}(t)$ es la parte diagonal de $\rho(t)$

$$\rho^{(D)}(t) = \rho_{11}^{(ND)}(t) |\tilde{\alpha}_1(t)\rangle \langle \tilde{\alpha}_1(t)| + \rho_{22}^{(ND)}(t) |\tilde{\alpha}_2(t)\rangle \langle \tilde{\alpha}_2(t)| \quad (7.35)$$

y $\rho^{(ND)}$ es la parte no diagonal de $\rho(t)$

$$\rho^{(ND)}(t) = \rho_{12}^{(ND)}(t) |\tilde{\alpha}_1(t)\rangle \langle \tilde{\alpha}_2(t)| + \rho_{21}^{(ND)}(t) |\tilde{\alpha}_2(t)\rangle \langle \tilde{\alpha}_1(t)| \quad (7.36)$$

A continuación se mostrará que, para condiciones iniciales macroscópicas, i.e. cuando los picos de las dos Gaussianas están alejados uno del otro, los estados $|\tilde{\alpha}_1(t)\rangle$ y $|\tilde{\alpha}_2(t)\rangle$ son cuasi-ortogonales, es decir,

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \tilde{\alpha}_2(t) \rangle \cong \langle \tilde{\alpha}_2(t) | \tilde{\alpha}_1(t) \rangle \cong 0 \quad (7.37)$$

En efecto,

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \tilde{\alpha}_2(t) \rangle = e^{-\frac{(\alpha_1(0))^2 + (\alpha_2(0))^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1(0)\alpha_2(0))^n}{n!} \quad (7.38)$$

Luego,

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \tilde{\alpha}_2(t) \rangle = e^{-\frac{(\alpha_1(0) - \alpha_2(0))^2}{2}} \quad (7.39)$$

Entonces, para $|\alpha_1(0) - \alpha_2(0)| \rightarrow \infty$, se obtiene la ortogonalidad que se prometió demostrar. Esto significa que la condición de macroscopicidad es: $|\alpha_1(0) - \alpha_2(0)| \gg 1$ (siempre que $N \rightarrow \infty$).

7.2.6. La amplitud de probabilidad

Mediante las ecuaciones (7.32) y (7.33), es fácil calcular la amplitud

$$A_{ji}(t) = \langle \tilde{\alpha}_j(t) | \alpha_i(t) \rangle \quad (7.40)$$

De la ecuación (7.21) se tiene

$$z_n = \omega_n + i\gamma_n \quad (7.41)$$

Entonces,

$$A_{ji}(t) = e^{-\frac{(\alpha_i(0))^2 + (\alpha_j(0))^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i(0)\alpha_j(0))^n}{n!} e^{-\gamma_n t} \quad (7.42)$$

Como fue señalado, si se desprecia el término de Khalfin, los niveles de energía compleja son múltiplos de la energía fundamental:

$$\gamma_n = n\gamma \quad (7.43)$$

donde $z_0 = \omega - i\gamma$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_{ji}(t) &= e^{-\frac{(\alpha_i(0))^2 + (\alpha_j(0))^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i(0)\alpha_j(0)e^{-\gamma t})^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{(\alpha_i(0))^2 + (\alpha_j(0))^2}{2}} e^{\alpha_i(0)\alpha_j(0)e^{-\gamma t}} \end{aligned} \quad (7.44)$$

7.2.7. Componentes no diagonales del estado

De aquí en adelante se considerará que $|\alpha_1(0) - \alpha_2(0)|$ y N cumplen las condiciones de macroscopicidad, por lo que la base $\{|\tilde{\alpha}_1(t)\rangle, |\tilde{\alpha}_2(t)\rangle\}$ es cuasi-ortogonal. Entonces, de la expresión (7.36)

$$\begin{aligned}\rho_{12}^{(ND)}(t) &= \langle \tilde{\alpha}_1(t) | \rho^{(ND)}(t) | \tilde{\alpha}_2(t) \rangle \\ \rho_{21}^{(ND)}(t) &= \langle \tilde{\alpha}_2(t) | \rho^{(ND)}(t) | \tilde{\alpha}_1(t) \rangle\end{aligned}\quad (7.45)$$

Usando la ecuación (7.31) se obtiene

$$\begin{aligned}\rho_{12}^{(ND)}(t) &= ab^* \langle \tilde{\alpha}_1(t) | \alpha_1(t) \rangle \langle \alpha_2(t) | \tilde{\alpha}_2(t) \rangle + a^*b \langle \tilde{\alpha}_1(t) | \alpha_2(t) \rangle \langle \alpha_1(t) | \tilde{\alpha}_2(t) \rangle \\ \rho_{21}^{(ND)}(t) &= ab^* \langle \tilde{\alpha}_2(t) | \alpha_1(t) \rangle \langle \alpha_2(t) | \tilde{\alpha}_1(t) \rangle + a^*b \langle \tilde{\alpha}_2(t) | \alpha_2(t) \rangle \langle \alpha_1(t) | \tilde{\alpha}_1(t) \rangle\end{aligned}\quad (7.46)$$

Con la expresión (7.42) se pueden calcular estos productos:

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \alpha_1(t) \rangle = e^{-(\alpha_1(0))^2} e^{(\alpha_1(0))^2 e^{-\gamma t}} \quad (7.47)$$

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \alpha_2(t) \rangle = e^{-\frac{(\alpha_2(0))^2 + (\alpha_1(0))^2}{2}} e^{\alpha_2(0)\alpha_1(0)e^{-\gamma t}} \quad (7.48)$$

$$\langle \tilde{\alpha}_2(t) | \alpha_1(t) \rangle = e^{-\frac{(\alpha_1(0))^2 + (\alpha_2(0))^2}{2}} e^{\alpha_1(0)\alpha_2(0)e^{-\gamma t}} \quad (7.49)$$

$$\langle \tilde{\alpha}_2(t) | \alpha_2(t) \rangle = e^{-(\alpha_2(0))^2} e^{(\alpha_2(0))^2 e^{-\gamma t}} \quad (7.50)$$

Si se tienen en cuenta ahora las expresiones (7.29) y (7.30), y se recuerda que los centros iniciales de las Gaussianas están dados por (7.26) y (7.27), sin pérdida de generalidad se puede elegir

$$\alpha_1(0) = 0 \quad (7.51)$$

y

$$\alpha_2(0) = \frac{m\omega_0}{\sqrt{2m\omega_0}} L_0 \quad (7.52)$$

No debe olvidarse que se impuso la condición de macroscopicidad a las condiciones iniciales: $|\alpha_1(0) - \alpha_2(0)| \gg 1$. Entonces, en el caso dado por (7.51) y (7.52), se tiene que

$$|\alpha_1(0) - \alpha_2(0)| = \alpha_2(0) \gg 1 \quad (7.53)$$

esto es,

$$\frac{m\omega_0}{\sqrt{2m\omega_0}} L_0 \gg 1 \quad (7.54)$$

Luego, si se sustituyen (7.51), (7.52) y (7.53) en las ecuaciones (7.47), (7.48), (7.49) y (7.50) y se tiene en cuenta (7.53), se obtiene

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \alpha_1(t) \rangle = 1 \quad (7.55)$$

$$\langle \tilde{\alpha}_1(t) | \alpha_2(t) \rangle = e^{-\frac{(\alpha_2(0))^2}{2}} \cong 0 \quad (7.56)$$

$$\langle \tilde{\alpha}_2(t) | \alpha_1(t) \rangle = e^{-\frac{(\alpha_2(0))^2}{2}} \cong 0 \quad (7.57)$$

$$\langle \tilde{\alpha}_2(t) | \alpha_2(t) \rangle = e^{-(\alpha_2(0))^2(1-e^{-\gamma t})} \quad (7.58)$$

Además, si se sustituyen (7.55), (7.56), (7.57) y (7.58) en la expresión (7.46), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(ND)}(t) &\cong ab^* e^{-(\alpha_2(0))^2(1-e^{-\gamma t})} \\ \rho_{21}^{(ND)}(t) &\cong a^* b e^{-(\alpha_2(0))^2(1-e^{-\gamma t})} \end{aligned} \quad (7.59)$$

7.2.8. El tiempo de decoherencia

A partir de las ecuaciones (7.59) y (7.36) se calcula

$$\rho_{ij}^{(ND)}(t) \propto \exp [- (\alpha_2(0))^2 (1 - e^{-\gamma t})] = \exp \left[- \frac{m\omega_0}{2} L_0^2 (1 - e^{-\gamma t}) \right] \quad (7.60)$$

En este punto se puede hacer una expansión de Taylor de $(1 - e^{-\gamma t})$ a primer orden de modo que, para tiempos cortos, la expresión (7.60) resulta

$$\rho_{ij}^{(ND)}(t) \propto \exp \left(- \frac{m\omega_0}{2} L_0^2 \gamma t \right) \quad (7.61)$$

Por lo tanto, el tiempo de decoherencia es

$$t_D = \frac{2}{m\omega_0} \frac{1}{L_0^2 \gamma} \quad (7.62)$$

que es el mismo tiempo obtenido por Omnès en [71] (ver (7.5)). Esta coincidencia del valor obtenido mediante la técnica de los polos es un buen argumento para pensar que dicha técnica es una alternativa adecuada para el cálculo del tiempo de decoherencia.

Puesto que en la ecuación (7.60) no aparecen en forma explícita las contribuciones γ_n de los polos individuales z_n , podría pensarse que tales polos no intervienen en el resultado final. Sin embargo, si se observa la ecuación (7.60), recordando que $\gamma_n = n\gamma$ se comprueba que

$$\rho_{ij}^{(ND)}(t) \propto e^{-(\alpha_2(0))^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2(0))^{2n}}{n!} e^{-n\gamma t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\gamma_n t} \quad (7.63)$$

Esta expresión muestra que $\rho_{ij}^{(ND)}(t)$ es proporcional a la suma, pesada con las condiciones iniciales, de los decaimientos producidos por la parte imaginaria γ_n de cada polo z_n de (7.43). Si se llama $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\gamma_n t}$, entonces puede utilizarse la misma estrategia presentada en la Sección 6.4, de modo que la suma de decaimientos puede aproximarse por el decaimiento que produce un polo efectivo γ_{eff} ,

$$\gamma_{eff} = \frac{m\omega_0}{2} L_0^2 \gamma \quad (7.64)$$

Puesto que el tiempo de decoherencia es $t_D = \gamma_{eff}^{-1}$, obtiene la misma expresión que en (7.62).

Finalmente, si se recuerda que el tiempo de relajación t_R viene dado por el polo original (7.12), se obtiene la relación entre t_D y t_R ,

$$t_D = \frac{2}{m\omega_0} \frac{1}{L_0^2} t_R \quad (7.65)$$

que es la misma relación presentada en [71].

En definitiva, para $t < t_D$ la evolución de $\rho_R(t)$ contiene todos los modos (más o menos como en la figura 3.315_a de [10]). Para $t > t_D$ los modos rápidos ya no son importantes y la evolución responde a la ecuación (6.63), donde sólo los modos lentos tienen una influencia en la evolución de $\rho(t)$ (más o menos como en la figura 3.315_b de [10]). Para tiempos largos sólo sobreviven las “grande montañas” de la figura 3.315_b de [10], mientras que el patrón de interferencia central ha desaparecido. Estas montañas en movimiento son la base privilegiada móvil en este caso. Finalmente para $t \sim t_R$ las dos montañas han alcanzado el equilibrio y sólo permanece $\rho_D(t)$.

7.3. Conclusiones parciales

En el capítulo anterior se describió en detalle la técnica polar y las estrategias propuestas para efectuar los cálculos. Sin embargo, es posible que el lector quedara con la sensación de que todo aquello no tenía mucho que ver con el tipo de modelos que se encuentran en la bibliografía sobre decoherencia. En este capítulo se introdujeron los polos al cálculo del tiempo de decoherencia y relajación en un modelo bien conocido: un oscilador en un baño de osciladores donde la condición inicial es la superposición de dos estados coherentes. La coincidencia entre los resultados presentados en la bibliografía y los obtenidos mediante la utilización de la técnica polar es un buen inicio. Por supuesto, es necesario corroborar estas ideas en otros modelos, pero el primer paso ya fue dado.

Capítulo 8

Resumen, conclusiones y perspectivas

En este capítulo final se presentan las conclusiones obtenidas en esta tesis, y las posibles tareas a realizar como continuación de esta línea de investigación.

8.1. Resumen y conclusiones

En esta tesis se presentan aportes de naturaleza técnica sobre aspectos de la decoherencia, en particular se propone una técnica que permite calcular los tiempos de decoherencia y relajación a partir de la extensión analítica de funciones que dependen del Hamiltoniano. Además, se propone de un esquema general para el estudio de la decoherencia, que puede describir en el mismo formalismo distintos enfoques de decoherencia y relajación.

En el Capítulo 1 se mencionaron diferentes enfoques de la decoherencia, esto es: las primitivas aproximaciones estudiadas por van Kampen, van Hove y Daneri *et al.*, el enfoque EID, y las recientes perspectivas no disipativas. A su vez, se formularon los objetivos del trabajo.

En el Capítulo 2 se presentó una forma de estudiar la decoherencia inspirada en los trabajos de Zeh. El enfoque de valores medios propone estudiar la desaparición de los términos de interferencia de dichos valores, mientras que el enfoque ortodoxo centra su atención en el estado. Se mostró que ambos enfoques son equivalentes en los casos tratados por el enfoque ortodoxo, pero el enfoque de valores medios permite seleccionar los observables relevantes de otro modo. Por otro lado, se presentó un esquema general para el estudio de la decoherencia que:

- permite incluir EID y formalismos de decoherencia sin ambiente en un mismo esquema.
- explicita en su formulación el carácter relativo de la decoherencia y permite identificar el mundo clásico en términos de los observables cuyos valores medios

no presentan términos de interferencia luego del tiempo de decoherencia.

- invita a proponer un modo alternativo de calcular el tiempo de decoherencia, en términos del cual, a su vez, puede obtenerse la base privilegiada móvil.

En el Capítulo 3 se mostró cómo el esquema general propuesto puede actuar como marco para la unificación de los formalismos existentes para la decoherencia y la relajación. A fin de ilustrar esta unificación, se desarrolló una versión de SID aplicable a sistemas con espectro discreto de energía. Este nuevo formalismo incluye el Lema 1, que brinda un criterio para decidir si un sistema decohere. Por otra parte, señaló que la gran cantidad de métodos matemáticos de la ingeniería de software basado en la transformada de Fourier discreta puede utilizarse para predecir la decoherencia en modelos discretos. Finalmente, se exportó la técnica desarrollada al enfoque EID, puesto que cambiando la elección de observables relevantes es posible aplicar el Lema 1 a sistemas abiertos.

En el Capítulo 4 se estudió el conocido modelo de spines. Se consideraron distintas particiones entre sistema y ambiente. La partición usual se pudo analizar mediante la técnica desarrollada para sistemas sin ambiente (SID discreto), mostrando así que pueden exportarse los métodos de un enfoque a otro, enriqueciendo el bagaje de herramientas matemáticas disponibles a la hora de tratar con un modelo concreto. Además, el análisis de las distintas particiones reveló aspectos curiosos de la decoherencia, permitiendo definir la emergencia de un mundo clásico en lo que tradicionalmente se denomina ambiente. Por otro lado, en este sencillo ejemplo también es posible observar que no es necesario un número enorme de partículas en el entorno para inducir la decoherencia en el sistema abierto.

En el Capítulo 5 se estudió una generalización del modelo de spines, donde el sistema cerrado U está compuesto por dos subsistemas de M y N partículas. Se mostró cómo el modelo se comporta bajo diferentes definiciones del sistema de interés y de las relaciones entre los números de M y N . Los resultados obtenidos permitieron señalar que: (i) todas las partículas del sistema cerrado pueden decoherir cuando se las considera independientes, a pesar de que el sistema cerrado no decohera; (ii) puesto que no hay descomposición privilegiada o esencial, se pueden seleccionar los observables relevantes de modo de constituir un sistema abierto no afectado por la decoherencia, que resulte útil para el almacenamiento de información cuántica; (iii) puesto que todas las partículas decoheren pero los sistemas de M y N partículas no lo hacen, es imposible definir el sistema cuántico que decohere en términos de un único estado; no obstante, el enfoque de valores medios permite definir el mundo clásico como el conjunto de observables cuyos términos de interferencia desaparecen.

En el Capítulo 6 se desarrolló en detalle la técnica que permite calcular los tiempos de decoherencia y de relajación de un sistema cuántico en términos de polos. La conclusión es que los polos de la extensión analítica de los valores medios suministran el catálogo de evoluciones no unitarias. Por lo tanto, el estudio de la distribución de estos polos permite calcular todos los tiempos característicos: (i) el polo más cercano al eje real corresponde al tiempo de relajación; (ii) el tiempo de

decoherencia está asociado a un polo efectivo que se define como un promedio de los restantes polos pesados con las condiciones iniciales; (iii) se muestra que $t_D \ll t_R$. Esta estrategia basada en el estudio de los polos de una función permite aprovechar la infinidad de software desarrollado en ingeniería para el cálculo de polos de funciones en el contexto de la teoría de circuitos, al cual la industria ha dedicado mucho tiempo y dinero.

En el Capítulo 7, a fin de conectar la estrategia del capítulo anterior con el tipo de modelos que se encuentran en la bibliografía sobre decoherencia, se introdujeron los polos al cálculo del tiempo de decoherencia y relajación en un modelo bien conocido: un oscilador en un baño de osciladores. La coincidencia entre los resultados presentados en la bibliografía y los obtenidos mediante la utilización de la técnica polar es un buen inicio. Por supuesto, es necesario corroborar estas ideas en otros modelos, pero el primer paso ya fue dado.

8.2. Perspectivas de trabajo

Los resultados obtenidos en los Capítulos 4, 5, y 7 muestran que la aplicación de este enfoque puede ser de utilidad en el estudio de la decoherencia y la relajación de los sistemas cuánticos. Por otro lado, respecto de los aportes de naturaleza técnica es necesario comprobar que con la técnica basada en el estudio de polos se obtienen los mismos resultados en otros modelos conocidos. Y, por supuesto, la aplicación de la técnica a modelos nuevos resulta esencial si se pretende la que los métodos den lugar a resultados novedosos. La ventaja del método que se espera explotar es que se basa en la búsqueda de polos de una función, por lo que se puede adaptar la gran cantidad y variedad de software existente.

De la posibilidad explicada en el Capítulo 2 de hacer distintas descomposiciones en un sistema total y de obtener los tiempos t_D y t_R por el método de los polos surge la posibilidad de que el proceso hacia la clasicidad y el equilibrio tenga diferentes etapas (este tipo de estudio es realizado mediante las técnicas tradicionales). En cada una de ellas, distintas partes del sistema total sucesivamente llegan a la clasicidad y al equilibrio. Este proceso complejo deberá ser estudiado en el futuro mediante la técnica polar.

Finalmente, si se pretende alcanzar un objetivo unificador y clarificador, se deberán encontrar modelos que puedan ser analizados desde esta perspectiva y no desde las perspectivas tradicionales. El ejemplo presentado en el Capítulo 5 es un inicio pero de ningún modo resulta suficiente.

Capítulo 9

Anexo

Un análisis completo de las condiciones que tiene que tener la distribución de constantes de acoplamiento para producir un decaimiento gaussiano en la función $r(t)$ puede encontrarse en [47]¹. En esta sección se pretende mostrar un análisis mínimo.

9.0.1. Caso (a.2): Ambiente homogéneo con interacción heterogénea.

Se considera ahora el caso en el que todas las partículas P_i del ambiente son de la misma especie pero interactúan con P mediante constantes de acoplamiento distintas. En particular se supone que los coeficientes de acoplamiento son aleatorios dentro del intervalo $[\bar{g}_i - \Delta g, \bar{g}_i + \Delta g]$ alrededor del valor medio \bar{g}_i (Caso (iii) del apartado anterior). El comportamiento de $\langle O_R \rangle_{\psi(t)}$ en el tiempo dado por (4.30) cuando $N = 100$ y g_i aleatorios² con $\bar{g}_i = 0,5$ y $\Delta g = 0,1$ se muestra en la Figura 9.1. En este caso, el tiempo de Poincaré es mucho más largo que $(\pi/\bar{g}_i)^N = (6,28)^{100}$, un valor que se puede considerar infinito para todos los propósitos prácticos. Entonces, como muestra la Figura 9.1 es legítimo decir que los observables O_S han decoherido y se volvieron clásicos.

9.0.2. Caso (a.3): Ambiente contaminado.

En este caso se considera un ambiente cuyas partículas P_i no son todas del mismo tipo, y las partículas de cada tipo j interactúan con P a través de su propio coeficiente de acoplamiento g_j : N_1 partículas con g_1 , N_2 partículas con g_2 , ... y N_p partículas con g_p , de modo que $\sum_{j=1}^p N_j = N$. Luego, la expresión (4.22) se puede

¹Para un análisis de estas condiciones en modelos más generales ver [48].

²Por simplicidad en este anexo se considera solamente el caso de una distribución uniforme de las constantes de acoplamiento. Si la distribución es otra, el decaimiento se ve afectado tal como se muestra en [48].

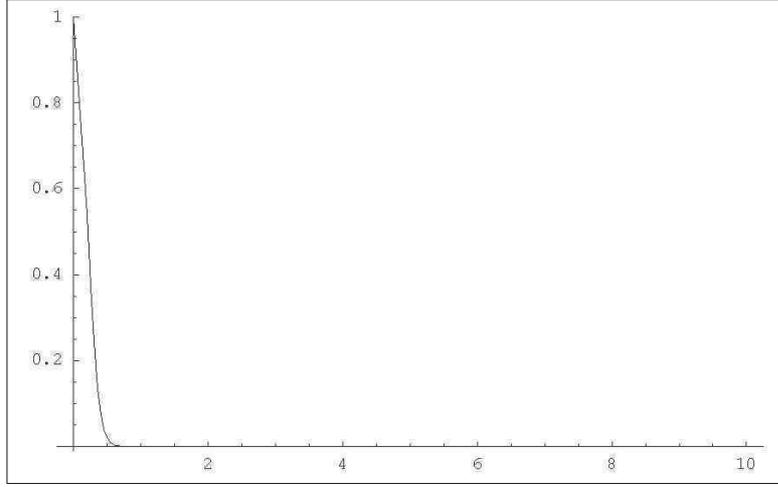


Figura 9.1: Evolución temporal de $|r(t)|^2$ dada por (4.22), para $N = 100$ y $g_i \in [0,4,0,6]$ aleatorio.

escribir como

$$|r(t)|^2 = \prod_{i=1}^N f_i(t) = \left(\prod_{i=1}^{N_1} f_{i,g_1}(t) \right) \left(\prod_{i=1}^{N_2} f_{i,g_2}(t) \right) \dots \left(\prod_{i=1}^{N_p} f_{i,g_p}(t) \right) \quad (9.1)$$

donde cada productoria es la contribución de los distintos tipos de partículas. En particular, se considera una situación en la que el ambiente está compuesto por N partículas, todas del mismo tipo excepto por una pequeña contaminación de partículas de otro tipo. La evolución temporal de $|r(t)|^2$, dada por la ecuación (9.1) con $N = 100$, $N_1 = 91$, $N_2 = N_3 = N_4 = 3$, $g_1 = 2,4$, $g_2 = 1,2$, $g_3 = 0,6$ y $g_4 = 0,3$, se muestra en la Figura 9.2. Como todos los g_i son tales que $g_i = n_i g_{\text{mín}} = n_i g_4$, esta situación corresponde con el Caso (ii). Entonces se puede encontrar el tiempo de Poincaré fácilmente: $t_P = \pi/g_{\text{mín}} = \pi/0,3 \simeq 10,43$. Por lo tanto, en la Figura 9.2 el pico en 10,43 es la recurrencia de $|r(t)|^2$ pero los picos anteriores no lo son y por lo tanto no puede considerarse que el sistema haya decoherido. Esto significa que la partícula P en contacto con un ambiente contaminado no decohere.

9.0.3. Caso (a.4): Ambiente inhomogéneo.

Ahora se considera que P no interactúa de la misma forma con las partículas de un mismo tipo j mismo, pero los coeficientes de acoplamiento g_{ji} son aleatorios en los intervalos $[\bar{g}_{ji} - \Delta g_j, \bar{g}_{ji} + \Delta g_j]$ en torno al valor medio correspondiente \bar{g}_{ji} : N_1 partículas con $g_{1i} \in [\bar{g}_{1i} - \Delta g_1, \bar{g}_{1i} + \Delta g_1]$, N_2 partículas con $g_{2i} \in [\bar{g}_{2i} - \Delta g_2, \bar{g}_{2i} + \Delta g_2]$, ... y N_p partículas con $g_{pi} \in [\bar{g}_{pi} - \Delta g_p, \bar{g}_{pi} + \Delta g_p]$, tal que $\sum_{j=1}^p N_j = N$. Luego, la función $|r(t)|^2$ de (4.22) se puede reescribir como

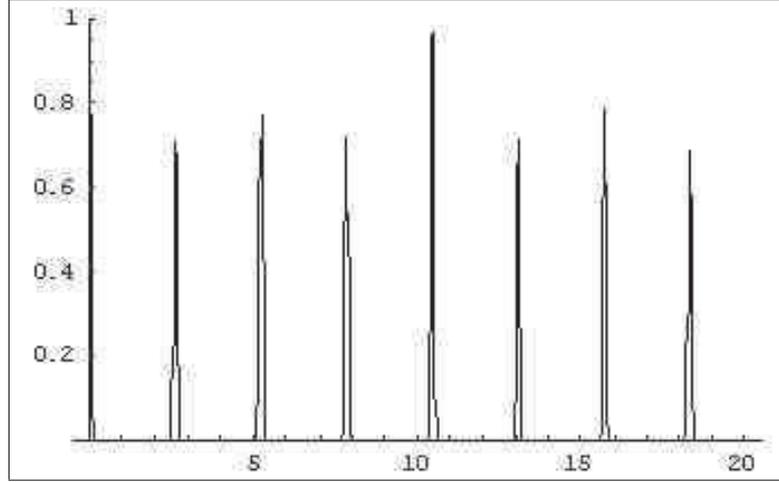


Figura 9.2: Evolución temporal de $|r(t)|^2$ dada por (9.1), para $N = 100$, $N_1 = 91$, $N_2 = N_3 = N_4 = 3$, $g_1 = 2,4$, $g_2 = 1,2$, $g_3 = 0,6$ y $g_4 = 0,3$.

$$|r(t)|^2 = \prod_{i=1}^N f_i(t) = \left(\prod_{i=1}^{N_1} f_{i,g_{1i}}(t) \right) \left(\prod_{i=1}^{N_2} f_{i,g_{2i}}(t) \right) \dots \left(\prod_{i=1}^{N_p} f_{i,g_{pi}}(t) \right) \quad (9.2)$$

En particular, se estudia una situación similar a la anterior respecto de los valores de N y de N_j , donde los coeficientes de acoplamiento g_j utilizados en el caso (a.3) provienen de promediar los coeficientes aleatorios utilizados en el presente caso \bar{g}_{ji} . Por otra parte, en todos los casos el máximo corrimiento de los coeficientes Δg_j respecto del valor medio \bar{g}_{ji} se eligió de aproximadamente un 30%.

La evolución de la función $|r(t)|^2$ dada por (9.2), para $N = 100$, $N_1 = 91$, $N_2 = N_3 = N_4 = 3$, $\bar{g}_{1i} = 2,4$, $\bar{g}_{2i} = 1,2$, $\bar{g}_{3i} = 0,6$, $\bar{g}_{4i} = 0,3$, $\Delta g_1 = 0,8$, $\Delta g_2 = 0,4$, $\Delta g_3 = 0,2$ y $\Delta g_4 = 0,1$, se grafica en la Figura 9.3, donde se puede ver la drástica decoherencia del modelo. El mismo resultado se representa en la Figura 9.4 con una escala de tiempo diferente, con el fin de mostrar el tiempo de decoherencia.

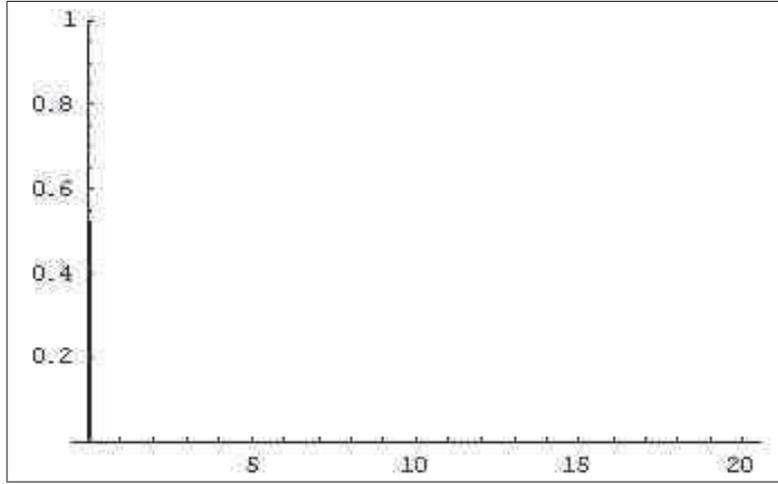


Figura 9.3: Evolución temporal de $|r(t)|^2$ dada por (9.2), para $N = 100$, $N_1 = 91$, $N_2 = N_3 = N_4 = 3$, y $g_{1i} \in [1,6, 3,2]$, $g_{2i} \in [0,8, 1,6]$, $g_{3i} \in [0,4, 0,8]$, y $g_{4i} \in [0,2, 0,4]$ aleatorios.

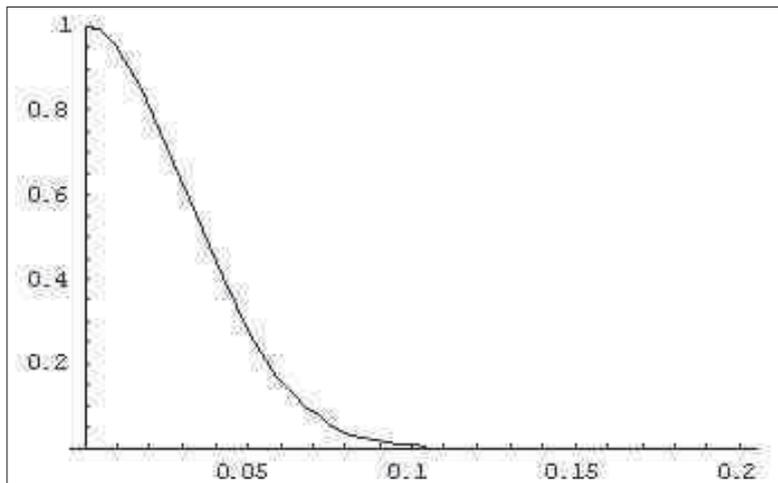


Figura 9.4: El mismo gráfico que 9.3 pero con otra escala temporal.

Bibliografía

- [1] N. G. van Kampen, *Physica*, **20**, 603, 1954.
- [2] L. van Hove, *Physica*, **23**, 441, 1957.
L. van Hove, *Physica*, **25**, 268, 1959.
- [3] A. Daneri, A. Loinger y G. Prosperi, *Nucl. Phys.*, **33**, 297, 1962.
- [4] R. Omnès, *Braz. Jour. Phys.*, **35**, 207, 2005.
- [5] H. D. Zeh, *Found. Phys.*, **1**, 69, 1970.
H. D. Zeh, “On the irreversibility of time and observation in quantum theory”, en B. d’Espagnat (ed.), *Foundations of Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1971.
H. D. Zeh, *Found. Phys.*, **3**, 109, 1973.
- [6] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D*, **26**, 1862, 1982.
- [7] W. H. Zurek, *Progr. Theor. Phys.*, **89**, 281, 1993.
W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 715, 2003.
- [8] J. P. Paz y W. H. Zurek, “Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical”, en D. Heiss (ed.), *Lecture Notes in Physics, Vol. 587*, Springer, Heidelberg, 2002.
- [9] J. P. Paz, S. Habib y W. H. Zurek, *Phys. Rev. D*, **47**, 488, 1993.
- [10] E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, J. Kupsch y I. O. Stamatescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer Verlag, Berlin, 2003.
- [11] J. Bub, *Interpreting the Quantum World*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [12] L. Diosi, *Phys. Lett. A*, **120**, 377, 1987.
L. Diosi, *Phys. Rev. A*, **40**, 1165, 1989.
G. J. Milburn, *Phys. Rev. A*, **44**, 5401, 1991.

- R. Penrose, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- G. Casati y B. Chirikov, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 349, 1995.
- G. Casati y B. Chirikov, *Physica D*, **86**, 220, 1995.
- S. Adler, *Quantum Theory as an Emergent Phenomenon*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [13] R. Bonifacio, S. Olivares, P. Tombesi y D. Vitali, *Phys. Rev. A*, **61**, 053802, 2000.
- G. W. Ford y R. F. O'Connell, *Phys. Lett. A*, **286**, 87, 2001.
- M. Frasca, *Phys. Lett. A*, **308**, 135, 2003.
- A. C. Sicardi Shifino, G. Abal, R. Siri, A. Romanelli y R. Donangelo, "Intrinsic decoherence and irreversibility in a quasiperiodic kicked rotor", arXiv:quant-ph/0308162, 2003.
- [14] R. Gambini, J. Pulin, *Found. of Phys.*, **37**, 7, 2007.
- R. Gambini, R. A. Porto and J. Pulin, *Gen. Rel. Grav.*, **39**, 8, 2007.
- R. Gambini and J. Pulin, "Modern space-time and undecidability", in V. Petkov (ed.), *Fundamental Theories of Physics (Minkowski Spacetime: A Hundred Years Later)*, Vol. 165, Springer, Heidelberg, 2010.
- [15] C. Kiefer and D. Polarski, *Adv. Sci. Lett.*, **2**, 164-173, 2009.
- D. Polarski and A. A. Starobinsky, *Class. Quantum Grav.*, **13**, 377, 1996.
- [16] M. Castagnino y R. Laura, *Phys. Rev. A*, **56**, 108, 1997.
- R. Laura y M. Castagnino, *Phys. Rev. A*, **57**, 4140, 1998.
- R. Laura y M. Castagnino, *Phys. Rev. E*, **57**, 3948, 1998.
- M. Castagnino, *Int. Jour. Theor. Phys.*, **38**, 1333, 1999.
- M. Castagnino y R. Laura, *Phys. Rev. A*, **62**, 022107, 2000.
- M. Castagnino y R. Laura, *Int. Jour. Theor. Phys.*, **39**, 1767, 2000.
- M. Castagnino and O. Lombardi, *Int. Jour. Theor. Phys.*, **42**, 1281, 2003.
- M. Castagnino y A. Ordoñez, *Int. Jour. Theor. Phys.*, **43**, 695, 2004.
- M. Castagnino, *Physica A*, **335**, 511, 2004.
- M. Castagnino, *Phys. Lett. A*, **357**, 97, 2006.
- M. Castagnino, *Physica A*, **335**, 511, 2004.
- M. Castagnino y O. Lombardi, *Phil. Scie.*, **72**, 764, 2005.
- M. Castagnino y M. Gadella, *Found. Phys.*, **36**, 920, 2006.
- [17] M. Schlösshauer, *Phys. Rev. A*, **72**, 012109, 2005.

- [18] M. Castagnino, S. Fortin, R. Laura and O. Lombardi, *Classical And Quantum Gravity*, **25**, 154002, 2008.
- [19] M. Castagnino y S. Fortin, “El esquema general de la decoherencia como punto de partida para un enfoque basado en valores medios”, en *Epistemología e Historia de la Ciencia 2009*, P. García y A. Massolo editores, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina, páginas 142-150, Año 2010, ISBN 978-950-33-0816-5.
- [20] S. Ardenghi, S. Fortin, M. Narvaja and O. Lombardi, “The modal-Hamiltonian interpretation of quantum mechanics: facing the interpretive problems of the theory”, *International Journal of Modern Physics D*, **20**, 5, pp. 861-875, 2011.
- [21] O. Lombardi, S. Fortin, J. S. Ardenghi and M. Castagnino, *Introduction to the modal-Hamiltonian interpretation*, F. Columbus (ed.), Nova Science Publishers Inc., New York, 2010, ISBN: 978-1-61761-316-6.
- [22] O. Lombardi, S. Fortin, M. Castagnino and J. S. Ardenghi, “The modal-Hamiltonian interpretation of quantum mechanics: physical relevance and philosophical implications”, en F. Columbus (ed.), *Quantum Mechanics*, Nova Science Publishers Inc., New York, 2010, ISBN 978-1-61728-966-8.
- [23] O. Lombardi, S. Fortin, M. Castagnino and S. Ardenghi, “Compatibility between environment-induced decoherence and the modal-Hamiltonian interpretation of quantum mechanics”, *Phil. of Science*, aceptado, 2010.
- [24] G. Dito, D. Sternheimer, “Deformation Quantization: Genesis, Developments and Metamorphoses”, in G. Halbout (ed.), *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 1*, W. de Gruyter & Co. KG, Berlin, 2002.
M. Kontsevich, *Lett. in Math. Phys.*, **66**, 157, 2003.
D. Sternheimer, “Deformation Quantization: Twenty Years After”, arXiv:math/9809056v1, 1998.
- [25] G. Casti y T. Prosen, *Phys. Rev. A*, **72**, 032111, 2005.
- [26] W. H. Zurek, “Preferred sets of states, predictability, classicality and environment-induced decoherence”, en J. J. Halliwell, J. Pérez-Mercader y W. H. Zurek (eds.), *Physical Origins of Time Asymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [27] M. Franco and E. Calzetta, Decoherence of scalar cosmological perturbations, arXiv:1002.2916, 2010.
- [28] F. C. Lombardo y D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D*, **53**, 10.1103, 1996.
- [29] J. P. Paz and A. J. Roncaglia, *Phys. Rev. A*, **80**, 042111, 2009.

- [30] Zurek, W. H., *Progr. Theor. Phys.* **89**, 281-302, 1993.
 Zurek, W. H., Habib, S., and Paz, J. P., *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1187, 1993.
- [31] M. Castagnino and O. Lombardi, *Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, **35**, pp. 73-107, 2004.
- [32] R. Omnès, *Understanding quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1999.
 R. Omnès, *Phys. Rev. A*, **65**, 052119, 2002.
 R. Omnès, *Phys. Rev. A*, **56**, 3383-3394, 1997.
- [33] M. Castagnino and S. Fortin, “On a possible definition of the moving preferred basis”, arXiv:1009.0535, enviado a *Journal of Physics A*, 2011.
- [34] M. Castagnino and S. Fortin, “New bases for a general definition for the moving preferred basis”, enviado a *Mod. Phys. Lett. A*, arXiv:1103.6188v1, 2011.
- [35] M. Castagnino and A. Ordoñez, *Int. J. Theor. Phys.*, **43**, 695, 2004.
 G. Murgida, M. Castagnino, *Physica A*, **381**, 170, 2007.
- [36] M. Castagnino, *Physics Letters A*, **357**, 97, 2006.
- [37] M. Castagnino and S. Fortin, *Int. Jour. Theor. Phys.*, **50**, 7, 2259-2267, 2011.
- [38] F. Gaioli, E. García-Álvarez y J. Guevara, *Int. Jour. Theor. Phys.*, **36**, 2167, 1997.
- [39] S. Bochner and K. Chandrasekharan, *Fourier Transforms*, Princeton University Press, London, 1949.
- [40] E. Oran Brigham, *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1988.
- [41] W. Press , J. Teukolsky , E. Vetterling and B. Flanery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [42] J. Kauppinen and J. Partanen, *Fourier Transforms in Spectroscopy*, Wiley-VCH, Berlin, 2001.
- [43] M. Castagnino, S. Fortin and O. Lombardi, *Mod. Physics Lett. A*, **25**, 1431, 2010.
- [44] M. Castagnino, S. Fortin and O. Lombardi, *Mod. Physics Lett. A*, **25**, 611, 2010.
 M. Castagnino, S. Fortin, and O. Lombardi, What are the systems that decohere?, arXiv:1002.3913v1, 2010.

- [45] M. Castagnino, S. Fortin and O. Lombardi, Dissipation and decoherence in closed and open systems, en preparación para enviar a *International Journal of Quantum Information*, 2011.
- [46] S. Fortin and O. Lombardi, “Analyzing the spin-bath model without simulations”, arXiv:1010.3254v1, enviado a *International Journal of Theoretical Physics*, 2010.
- [47] F. M. Cucchietti, J. P. Paz, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. A*, **72**, 052113, 2005.
- [48] W.H. Zurek, F.M. Cucchietti, J.P. Paz, *Acta Physica Polonica B*, **38**, 5, 2007.
Cecilia Cormick and Juan Pablo Paz, *Phys. Rev. A*, **78**, 012357, 2008.
Cecilia Cormick and Juan Pablo Paz, *Phys. Rev. A*, **77**, 022317, 2008.
F. M. Cucchietti, S. Fernandez-Vidal, and J. P. Paz, *Phys. Rev. A*, **75**, 032337, 2007.
- [49] L. Ermann, J. P. Paz and M. Saraceno, *Phys. Rev. A*, **73**, 012302, 2006.
Ph. Jacquod and C. Petitjean, *Advances in Physics*, **58**, 67, 2009.
Jayendra N. Bandyopadhyay, *EPL*, **85**, 50006, 2009.
- [50] Luca Chirollia and Guido Burkard, *Advances in Physics*, **57**, 225, 2008.
- [51] M. Castagnino and S. Fortin, “Relation between the whole and the parts in decoherence models”, en preparación, 2010.
- [52] M. Castagnino, S. Fortin and O. Lombardi, *Jour. Phys. A: Math. and Theor.*, **43**, 065304, 2010.
- [53] O. Lombardi, S. Fortin and M. Castagnino, “The problem of identifying the system and the environment in the phenomenon of decoherence”, en *EPSA Philosophical Issues in the Sciences Volume 3*, Springer, Berlin, en prensa, 2011.
- [54] M. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-to-Classical transition*, Springer, Berlin, 2007.
- [55] L. Tessieri and J. Wilkie, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 12305, 2003.
- [56] M. Castagnino, R. Id Betan, R. Laura, R. J. Liotta, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**, 6055-6074, 2002.
- [57] R. Weder, *Jour. Math. Phys.*, **15**, 20, 1974.
- [58] E. Sudarsham, C. Chiu, V. Gorini, *Phys. Rev. D*, **18**, 2914, 1978.
- [59] M. Castagnino and R. Laura, *Phys. Rev. A*, **56**, 108, 1997.

- [60] R. Laura and M. Castagnino, *Phys. Rev. A*, **57**, 4140, 1998.
- [61] R. Laura and M. Castagnino, *Phys. Rev. E*, **57**, 3948, 1998.
- [62] K. Urbanowski, *Eur. Phys. J. D*, **54**, 25, 2009
K. Urbanowski, J. Piskorski, arXiv:0908.2219v2, 2009.
- [63] N. Bleistein, R. Handelsman, *Asymptotic expansion of integrals*, Dover Inc., New York, 1986.
- [64] C. Rothe, S. I. Hintschich, and A. P. Monkman, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 163601, 2006.
- [65] M. Castagnino y O. Lombardi, *Phys. Rev. A*, **72**, 012102, 2005.
- [66] A. Bohm, *Quantum mechanics, foundations and applications*, Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [67] M. Castagnino, F. Gaioli, E. Gunzig, *Foud. Cosmic Phys.*, **16**, 221-375, 1996.
- [68] F. Gaioli, E. García-Álvarez, J. Guevara, *Int. J. Theor. Phys.*, **36**, 2167-2219, 1997.
- [69] D. Arbó, M. Castagnino, F. Gaioli, S. Iguri, *Physica A*, **274**, 469-495.
- [70] F. Facchi, M. Gadella, S. Pascazio, G. Pronko “The Friedrich Model and its use in resonance phenomena”, private communication, 2008.
- [71] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [72] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics*, New York: Prentice Hall, 1990.
- [73] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics, Revised Edition*, Addison-Wesley, New York, 1994.
- [74] R. Laura, M. Castagnino, R. Id Betan, *Physica A*, **271**, 357-386, 1999.