

Tesis Doctoral

El decaimiento libre de flujos turbulentos rotantes

Teitelbaum, Tomás

2012

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Teitelbaum, Tomás. (2012). El decaimiento libre de flujos turbulentos rotantes. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Teitelbaum, Tomás. "El decaimiento libre de flujos turbulentos rotantes". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2012.



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

*El decaimiento libre de flujos
turbulentos rotantes*

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor
de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas
por

Lic. Tomás Teitelbaum

Director de Tesis: Dr. Pablo Daniel Mininni

Lugar de Trabajo: Depto. de Física, FCEyN, UBA

Buenos Aires, 2012

Resumen

En esta tesis se presenta un estudio detallado del decaimiento libre de flujos turbulentos rotantes tridimensionales (3D), y de flujos rotantes y estratificados en la aproximación cuasi-geostrófica de superficie, sometidos a distintas condiciones iniciales.

En el caso de la turbulencia rotante 3D se usa la conocida cuasi-bidimensionalización para predecir los distintos decaimientos, proponiendo un método original que consiste en estudiar la energía presente en modos bidimensionales (2D) y 3D de manera independiente. Con el mismo fin, se introduce el uso de dos nuevas magnitudes conservadas anisótropas, relacionadas con el momento lineal y angular en la dirección paralela al eje de rotación. Los resultados indican que las leyes del decaimiento de la energía no son universales, dependiendo de la forma en que los flujos son excitados inicialmente. Las leyes de potencia observadas para el decaimiento son afectadas por las correlaciones en las escalas grandes, por la cantidad neta de helicidad presente inicialmente, por el grado inicial de anisotropía, y por la formación de estructuras coherentes. Para todos los casos estudiados se logra predecir las leyes de potencia observadas en las simulaciones mediante modelos fenomenológicos, conocidas las condiciones iniciales.

Los flujos estratificados fuertemente rotantes se estudian utilizando la aproximación cuasi-geostrófica de superficie, derivada a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Se presentan soluciones estadísticas de equilibrio para las ecuaciones ideales, verificando su validez en simulaciones numéricas. Las soluciones estadísticas del sistema ideal permiten predecir el sentido de la transferencia y cascadas de las dos magnitudes cuadráticas (la pseudoenergía y la pseudo-estrofia) conservadas por el sistema. A partir de estos resultados se predice la tasa de decaimiento de la pseudo-estrofia, teniendo en cuenta el efecto de las estructuras coherentes en el flujo. La predicción es verificada para número de Reynolds muy alto en simulaciones del sistema viscoso y en simulaciones ideales.

Palabras clave: Turbulencia Rotante - Decaimiento - Simulaciones Numéricas - Estratificación - Flujos cuasi-geostróficos - Condensados

Abstract

The Decay of Rotating Turbulent Flows

In this thesis we present a numerical study of freely decaying turbulent rotating three dimensional (3D) flows, and of rotating and stratified fluids under the surface quasi-geostrophic approximation. In both cases we explore a wide variety of initial conditions.

In the case of 3D rotating turbulence we propose an original approach considering the energy contained in 2D and 3D modes separately, and take advantage of the well known bidimensionalizing process common in these systems. Also, we introduce two new anisotropic conserved quantities related to the angular and linear momentum parallel to the rotation axis. The results show that the energy decay rates are sensitive to the initial conditions and no single universal solution appears to exist. The different decay laws observed indicate that rotating turbulence is affected by initial large scale correlations in the flow, by the initial content of helicity, by the anisotropy in the initial conditions, and by the formation of coherent structures. For every initial condition studied, we use phenomenological models to predict the decay laws observed in the simulations.

We then study stratified flows under strong rotation using the surface quasi-geostrophic (SQG) approximation derived from the Navier-Stokes equations. We derive statistical equilibrium solutions of the inviscid equations, and verify the validity of these solutions in numerical simulations. The statistical solutions of the inviscid equations allow us to predict the direction in which the two quadratic invariants of the system (the pseudo-energy and pseudo-enstrophy) cascade in the viscous case. Using these results, we predict the decay rate of the pseudo-enstrophy considering also the effect of coherent structures in the flow evolution. These predictions were validated using numerical simulations of viscous and inviscid systems.

Keywords: Rotating Turbulence - Decay - Numerical Simulations - Stratification - Quasi-geostrophic flows - Condensates

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director Pablo, quien junto a su enorme pasión por la Física me enseñó a trabajar en el mundo científico con seriedad y dedicación.

También al Departamento de Física por brindarme un lugar de trabajo en esta Facultad y al CONICET por adjudicarme mi beca doctoral.

Por supuesto a mis amigos, que estando cerca me acompañaron desde distintos lugares, en diferentes momentos: Ale, Monter, Pedro, Jess, Leo, Pato, Mechi, Balen, Guille, Chanta, Mauro, Laura, Pablo, Ju, Diego, Gonzo, Luis, Paola, Bruno, Marie.. a todos ellos, gracias.

Y finalmente a mis padres que me bancaron siempre y me incentivaron a seguir adelante.

Índice general

1. Introducción	1
2. Flujos rotantes y cuasi-geostróficos	5
2.1. Introducción	5
2.2. Teoría de flujos rotantes y estratificados	5
2.2.1. Flujos rotantes	5
2.2.2. Ondas inerciales y la descomposición helicoidal	6
2.2.3. La variedad resonante	7
2.2.4. Dinámica de los modos rápidos y lentos	9
2.2.5. La aproximación SQG	11
2.3. Modelos numéricos	15
2.3.1. Simulaciones directas	15
2.3.2. Modelos de subgrilla	16
2.4. Condiciones iniciales	17
2.4.1. Taylor-Green	18
2.4.2. Arnòld-Beltrami-Childress	18
2.4.3. Flujos aleatorios helicoidales	19
2.4.4. Flujos aleatorios en la descomposición de Craya-Herring	19
2.4.5. Flujos aleatorios bidimensionales	20
2.5. Otras definiciones	20
3. Decaimiento de turbulencia confinada	25
3.1. Introducción	25
3.2. Teoría fenomenológica	31
3.2.1. Sistemas sin rotación	32
3.2.2. Sistemas rotantes sin helicidad	32
3.2.3. Sistemas rotantes con helicidad	33
3.3. Resultados numéricos	34
3.3.1. Condiciones iniciales	35
3.3.2. Decaimiento de la Turbulencia	35
3.3.3. Espectros y flujos	37

3.3.4. Análisis de la anisotropía	39
3.4. Conclusiones	42
4. Decaimiento de turbulencia k^4	45
4.1. Introducción	45
4.2. Teoría de von Kármán-Howarth	48
4.3. Impulso lineal y angular	52
4.4. Teoría fenomenológica	54
4.4.1. Flujos sin rotación	54
4.4.2. Argumentos isótropos para flujos rotantes	55
4.4.3. Argumentos anisótropos para flujos rotantes	56
4.4.4. Decaimiento de la enstrofia	57
4.5. Resultados numéricos	58
4.5.1. Flujos sin rotación	58
4.5.2. Flujos rotantes	60
4.5.3. Efecto de la anisotropía inicial	69
4.5.4. Momentos de asimetría y curtosis	72
4.6. Conclusiones	76
5. Decaimiento de turbulencia k^2	79
5.1. Introducción	79
5.2. Fenomenología	81
5.3. Resultados numéricos	84
5.3.1. Flujos sin rotación	85
5.3.2. Flujos con rotación	87
5.3.3. Transferencia de energía entre modos	91
5.3.4. Distribución espectral de la energía	94
5.4. Conclusiones	97
6. Aproximación cuasi-geostrófica de superficie	99
6.1. Introducción	99
6.2. Ensamble canónico en la aproximación SQG	103
6.3. Resultados numéricos	107
6.3.1. Simulaciones ideales	108
6.3.2. Comparación entre sistemas con y sin disipación	115
6.3.3. Decaimiento	117
6.4. Conclusiones	125
7. Conclusiones	129

Capítulo 1

Introducción

El fenómeno de la turbulencia está presente en una gran variedad de sistemas físicos y en un número inmenso de escalas. La no linealidad de los sistemas turbulentos hace que las estructuras en las distintas escalas se encuentren acopladas y su interacción resulta un problema altamente complejo. La principal característica de un flujo turbulento radica en que la amplitud del acoplamiento no lineal entre los distintos modos del problema comparada con la disipación, es decir, el número de Reynolds, es muy grande ($\sim 10^8$ o mayor en la atmósfera, $\sim 10^{12}$ o mayor en flujos astrofísicos). La cantidad de grados de libertad presentes en sistemas con números de Reynolds tan altos es enorme, por lo cual su estudio se vuelve especialmente complejo. En particular, el estudio mediante simulaciones numéricas requiere de una importante capacidad de cálculo que recién se volvió disponible en las últimas décadas.

Dentro de la diversidad de flujos turbulentos, la turbulencia en medios rotantes representa un problema relevante en el campo de la dinámica de fluidos dado que existe una gran cantidad de sistemas afectados por la rotación. La misma afecta los movimientos a gran escala de la atmósfera terrestre y sus océanos, es vital en muchas aplicaciones industriales como turbomaquinarias, rotor-craft y canales rotantes, y es importante también en muchos sistemas astrofísicos como son las regiones estelares convectivas (incluyendo al Sol) y las atmósferas planetarias gaseosas. La existencia de tantas aplicaciones tanto naturales como tecnológicas generó la necesidad de entender en forma detallada distintas propiedades de estos fluidos. Aún así, poco se sabe sobre las propiedades de la intermitencia en estos flujos, o sobre la influencia de ondas en las propiedades de los mismos.

El estudio de la tasa de decaimiento de la energía en turbulencia rotante es particularmente importante para muchos problemas geofísicos y astrofísicos. De hecho, la forma en que este tipo de flujos decae es un tema que ha sido

estudiado por largo tiempo. Aún en el caso sin rotación, se sabe que la tasa de decaimiento para flujos turbulentos es sensible a las condiciones iniciales y que no existe una única solución universal a la cual converjan asintóticamente todos los flujos para números de Reynolds altos [1]. Estas características hacen del estudio del decaimiento un problema altamente complejo y cuya comprensión plantea un desafío más que interesante.

Las leyes de decaimiento que sigue un flujo están prescriptas por las ecuaciones de balance que satisfacen las magnitudes conservadas en el caso ideal. Existen dos invariantes cuadráticos ideales para la ecuación de movimiento que rige a la turbulencia tridimensional: la energía y la helicidad. La helicidad mide la correlación global entre el campo de velocidades \mathbf{u} y la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, de forma tal que una helicidad distinta de cero implica la ruptura de la simetría de reflexión en el flujo. Históricamente se estudió primero la helicidad magnética en flujos conductores ($\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$, con \mathbf{B} el campo magnético), introducida por Woltjer [2] y estudiada más tarde por Chandrasekhar y Kendall (ver por ejemplo [3]). La conservación de la helicidad hidrodinámica fue luego propuesta en [4] en donde se mostró que dicha magnitud es proporcional al grado total de anudamiento de los filamentos de vorticidad del fluido. En los años 70, la helicidad capturó mucho interés en el estudio de flujos conductores, al descubrirse que los campos de velocidad cuyas propiedades estadísticas no poseen simetría de reflexión juegan un rol importante en la generación de campos magnéticos turbulentos [5–7]. En [8] se predijo teóricamente el efecto de la helicidad en turbulencia hidrodinámica isótropa y homogénea, mostrando que la misma inhibe la transferencia de energía hacia las escalas chicas retrasando la ocurrencia del máximo de disipación de la energía. Este resultado fue corroborado luego en [9] a través de soluciones numéricas de las ecuaciones integro-diferenciales EDQNM (“eddy-damped quasi-normal Markovian”) y en años subsiguientes mediante simulaciones numéricas directas (DNS) [10–17].

En turbulencia hidrodinámica sin rotación, existe un proceso de cascada mediante el cual la energía y la helicidad son transferidas hacia las escalas más chicas. Al asumir que la tasa de transferencia está determinada únicamente por el flujo de la energía, se puede obtener una ley para los espectros de ambas magnitudes. Hipótesis sobre el flujo en las escalas grandes permiten obtener distintas leyes de decaimiento auto-similar de la energía, las cuales (como consecuencia de los resultados mencionados arriba) no son afectadas por la presencia de la helicidad.

Uno de los principales resultados presentados en esta tesis es que al agregar rotación la helicidad afecta al decaimiento de la energía de manera mucho más drástica, inhibiendo la cascada directa de la misma, de forma tal que la energía decae más lento, respondiendo a leyes de potencia distintas que en el

caso no helicoidal.

La turbulencia rotante puede ser vista como un modelo muy simple de la atmósfera terrestre teniendo en cuenta que la rotación domina en las escalas más grandes (escalas mayores a las sinópticas en la atmósfera terrestre $\gtrsim 100$ km). Por otro lado, la helicidad es altamente relevante en varios procesos atmosféricos tales como tormentas rotantes con convección (ver ejemplos en [18–21]). Se cree que el entendimiento de flujos helicoidales con rotación puede resultar de gran ayuda para predecir la formación y duración de estos fenómenos [18].

En esta tesis se propone el estudio numérico de flujos hidrodinámicos rotantes con especial énfasis en el decaimiento y la distribución espectral de la energía. Con este fin, se integran las ecuaciones dinámicas mediante métodos pseudoespectrales [22], conservativos y no dispersivos. Los resultados numéricos se corroboran además mediante modelos fenomenológicos. El énfasis en la primer mitad de la tesis está puesto en la caracterización de todas las posibles soluciones para el decaimiento de la energía en flujos rotantes, dependiendo del contenido de helicidad, la correlación inicial del flujo en las escalas más grandes, y los valores de los parámetros adimensionales. Se obtienen todas las soluciones a partir de una exploración del espacio de parámetros mediante simulaciones numéricas, y también se obtienen diferentes regímenes a partir de la teoría, resultando así una descripción completa del fenómeno. En la segunda parte de la tesis, se extienden los resultados para el decaimiento de la turbulencia a modelos más realistas de la atmósfera y los océanos que consideran también el efecto de la estratificación.

Dada la extrema complejidad de las ecuaciones que gobiernan la dinámica atmosférica, existe una gran variedad de modelos aproximados y de ecuaciones simplificadas. Muchos de ellos eliminan términos que resultan despreciables en diferentes escalas típicas de los procesos atmosféricos y oceánicos. Una aproximación ampliamente utilizada es la aproximación de Bousinesq, la cual describe un flujo rotante, incompresible y estratificado que responde a un balance hidrostático en la dirección vertical pero con densidad media constante en cada plano horizontal. De este modelo se desprenden diversas aproximaciones, siendo una de las más utilizadas la llamada aproximación cuasi-geostrófica (QG) [23–25].

A partir de las ecuaciones de movimiento de un fluido rotante y estratificado en la aproximación QG se deriva un modelo para flujos cercanos a superficies tales como la superficie del océano o la tropopausa, en donde el flujo se comporta en forma diferente al interior. Dicho modelo corresponde a la ecuación cuasi-geostrófica de superficie o SQG (del inglés “surface quasi-geostrophic”) y fue desarrollado en [26]. Este es el modelo que consideramos al final de la tesis. Su dinámica es influenciada enteramente por la evolu-

ción de la temperatura potencial (o densidad) en la superficie, y es utilizado actualmente para estudiar la dinámica de las altas capas de la tropósfera [27–29], y de las capas superiores del océano con relativa precisión hasta aproximadamente los 500m de profundidad [30–32]. La extensión del estudio del decaimiento a estos flujos nos permitirá construir un modelo novedoso que conecta la dinámica de flujos SQG con la de condensados estadísticos.

La tesis se divide en 7 capítulos y está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presenta una breve discusión sobre la teoría de flujos turbulentos rotantes junto a una derivación del modelo SQG que se analizará más adelante en el capítulo 6. A continuación se explica brevemente el código que se utiliza para simular el decaimiento de los diversos flujos, y finalmente se presentan diferentes definiciones y herramientas que se utilizarán a lo largo de este trabajo. En el capítulo 3 se comienza analizando el caso más simple de flujos turbulentos rotantes, aquellos para los cuales su longitud característica (tamaño de los vórtices más grandes del sistema) se encuentra saturada y no crece con el tiempo. A estos flujos se los denomina flujos confinados. Se analizará, en particular, el rol que cumple la helicidad en el decaimiento de este tipo de flujos. En los capítulos 4 y 5 se estudia el decaimiento de flujos para los cuales la longitud característica crece libremente, analizando flujos cuyo espectro de energía inicial es de la forma k^4 y k^2 respectivamente. En ambos casos, se utilizarán argumentos teóricos y fenomenológicos junto a la conservación del momento angular y lineal para predecir el decaimiento de la energía. Se presenta también un análisis original del problema, al estudiar la evolución de la energía contenida en modos tridimensionales, y aquella contenida en modos bidimensionales independientemente. En el capítulo 6 se extienden los resultados y se aplica la teoría de ensambles clásicos de Gibbs para estudiar flujos bajo la aproximación SQG. Dicho análisis permite predecir la forma del espectro de equilibrio en la versión invíscida del sistema, y también estudiar el decaimiento del sistema viscoso, es decir, fuera del equilibrio. Finalmente, se presentan las conclusiones en el capítulo 7.

Capítulo 2

Flujos rotantes y cuasi-geostróficos

2.1. Introducción

Se presentan aquí las ecuaciones y los diferentes modelos para flujos rotantes y atmosféricos que se estudiarán en esta tesis, junto con los resultados teóricos más conocidos y relevantes para cada modelo. Luego se presentan preliminares del trabajo original que serán usados en todos los capítulos. En particular, se describe el método numérico y código usado para resolver las ecuaciones, y se dan como referencia todas las condiciones iniciales usadas.

2.2. Teoría de flujos rotantes y estratificados

En esta sección se presentan resultados usuales para flujos rotantes y estratificados, con especial énfasis en la transferencia y distribución espectral de la energía entre las distintas escalas. La teoría de flujos rotantes y estratificados puede consultarse con mayor detalle en [33–35].

2.2.1. Flujos rotantes

La dinámica de un fluido incompresible sometido a rotación rígida en el sistema de referencia rotante se describe agregando los términos de aceleración centrífuga y de Coriolis a la ecuación de Navier Stokes,

$$\partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \mathcal{P} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

junto a la condición de incompresibilidad,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

En las ecuaciones \mathbf{u} es el campo de velocidad, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ es la vorticidad, la aceleración centrífuga se encuentra absorbida en el término de la presión total por unidad de masa $\mathcal{P} = p/\rho - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/2 + \mathbf{u}^2/2$ y ν es la viscosidad cinemática.

2.2.2. Ondas inerciales y la descomposición helicoidal

A partir de la ecuación (2.1) se puede escribir la ecuación linealizada para la vorticidad de un fluido invíscido sujeto a rotación,

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

la cual admite soluciones de la forma $\mathbf{u} = \mathbf{h}_s \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t)$ (ondas inerciales) siempre y cuando se cumpla $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0$ por incompresibilidad. Las ondas inerciales presentan una relación de dispersión anisótropa y dispersiva, dada por

$$\omega = 2s(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k. \quad (2.4)$$

Los modos helicoidales $\mathbf{h}_s \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t)$ corresponden a ondas circularmente polarizadas que se propagan en la dirección \mathbf{k} , con

$$\mathbf{h}_s = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\kappa} + is\boldsymbol{\nu}, \quad (2.5)$$

donde $s = \pm 1$ es la polarización, $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ y $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}/\|\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}\|$ son dos vectores unitarios ortogonales entre si definidos a través del vector fijo $\boldsymbol{\Omega}$. Los modos helicoidales son paralelos a su rotor y, por lo tanto, poseen helicidad máxima cuyo signo dependerá del signo de s ,

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{h}_s = sk\mathbf{h}_s. \quad (2.6)$$

Además de ser soluciones lineales, los modos helicoidales \mathbf{h}_s son soluciones del sistema no lineal bajo rotación, con helicidades opuestas según el signo de s . Finalmente, los modos poseen la misma estructura que las ondas inerciales, las cuales brindan una representación apropiada del campo de velocidades para el caso rotante [36]. Esta base ha sido ampliamente utilizada en trabajos sobre turbulencia bajo rotación fuerte [37, 38], en estudios teóricos sobre turbulencia rotante [34] y en turbulencia helicoidal [39]. La descomposición del campo de velocidades en términos de los modos helicoidales resulta,

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = a_+(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_+ + a_-(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_-. \quad (2.7)$$

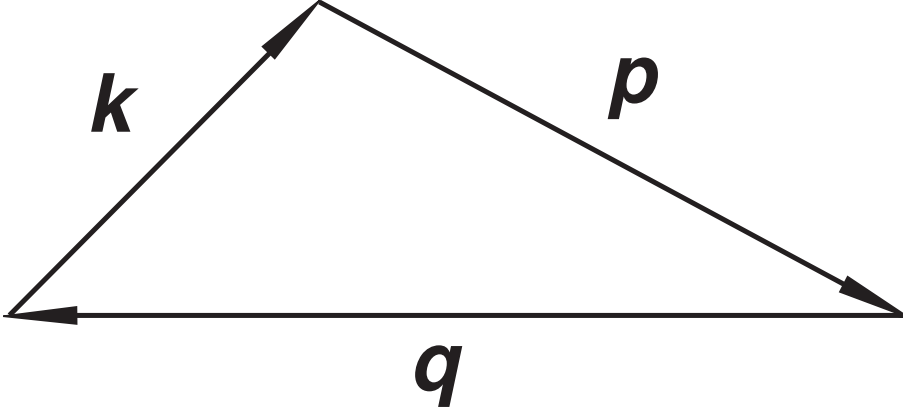


Figura 2.1: Los modos que interactúan gracias al término no lineal en la ecuación de Navier Stokes componen los lados de un triángulo con lados \mathbf{k} , \mathbf{p} , y \mathbf{q} .

2.2.3. La variedad resonante

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$, la relación de dispersión de los modos helicoidales es

$$\omega = 2sk_{\parallel}/k = 2s\cos\theta_k, \quad (2.8)$$

siendo θ_k el ángulo formado entre los vectores $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{k} . Los modos con $k_{\parallel} = k_z = 0$ poseen frecuencia igual a cero y por lo tanto reciben el nombre de *modos lentos*; son modos bidimensionales (2D) que no presentan variación en la dirección paralela al eje de rotación. El resto de los modos con $k_{\parallel} \neq 0$ son modos tridimensionales (3D) con frecuencia distinta de cero y reciben el nombre de *modos rápidos*.

Sustituyendo la ecuación (2.7) en la ecuación (2.1) se obtiene una ecuación para la evolución de las amplitudes $a_{\mathbf{k}} = a_{\pm}(\mathbf{k}, t)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega + \nu^* k^2\right)a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}Ro \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{q}}^*. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) fue adimensionalizada utilizando las escalas L , U y $(2\Omega)^{-1}$ como la longitud, velocidad y tiempo característico respectivamente. $Ro = U/(2\Omega L)$ es el número de Rossby y $\nu^* = \nu/(2\Omega L^2)$ es el número de Ekman. $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}$ son coeficientes de interacción entre modos con vectores de onda \mathbf{k} , \mathbf{p} y \mathbf{q} (ver [34, 40]). La condición $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ implica que los modos interactúan únicamente entre tríadas en donde los modos resultan lados de triángulos como ilustra la figura 2.1.

Las amplitudes a_k evolucionan en dos escalas de tiempo diferentes: una escala rápida $t \sim l/U$ asociada a las ondas, y una escala lenta $\tau \sim Ro$ asociada a los remolinos turbulentos. Como resultado, las amplitudes pueden escribirse

$$a_k = b_k(\tau)e^{i\omega_k t}, \quad (2.10)$$

es decir, oscilaciones rápidas moduladas en amplitud por los remolinos más lentos. Sustituyendo la ecuación (2.10) en la ecuación (2.9) y promediando sobre el tiempo rápido se obtiene,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu^* k^2\right) b_k = \frac{1}{2} Ro \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0}^{\omega_k+\omega_p+\omega_q=0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} b_p^* b_q^*. \quad (2.11)$$

donde se considera que aquellas interacciones con $\omega_k + \omega_p + \omega_q \neq 0$ promedian cero a lo largo de la escala lenta τ . Esta ecuación fue probada en forma rigurosa en [41, 42] para una ecuación dinámica más general que incluye a la rotación rápida como un caso especial.

La ecuación (2.11) es idéntica a la ecuación (2.9) excepto que la suma se encuentra restringida, además, por la condición de resonancia para las ondas $\omega_k + \omega_p + \omega_q = 0$. A partir de la relación de dispersión (2.4), las condiciones $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ y $\omega_k + \omega_p + \omega_q = 0$ en la ecuación (2.11) resultan

$$s_k \cos\theta_k + s_p \cos\theta_p + s_q \cos\theta_q = 0 \quad (2.12)$$

$$k \cos\theta_k + p \cos\theta_p + q \cos\theta_q = 0 \quad (2.13)$$

De estas relaciones se sigue que existen tres tipos de interacciones resonantes [34]. Interacciones entre modos “rápidos-lentos-rápidos”, “rápidos-rápidos-rápidos” y “lentos-lentos-lentos”. Mientras que sólo un subconjunto de interacciones “r-r-r” cumplen con las condiciones (2.12) y (2.13), las interacciones “l-l-l” son todas trivialmente resonantes y, por lo tanto, la energía se transfiere con mayor eficiencia entre modos 2D (aquellos con $\theta_k = \pi/2$). Por otro lado, en las interacciones “r-l-r”, el modo lento actúa sólomente como intermediario en el intercambio de energía entre dos modos rápidos sin existir transferencia de energía hacia ó desde el modo lento (ver [34, 43] para mayor detalle). Debido a que los modos lentos siempre cumplen la condición (2.12) y (2.13), las interacciones entre modos 3D tienden a transferir energía a modos más cercanos al plano $k_{\parallel} = 0$, es decir, modos con un θ mayor, siendo entonces la condición de resonancia la responsable del proceso mediante el cual los flujos rotantes tienden a un estado cuasi-2D. Este proceso ha recibido el nombre de “teorema dinámico de Taylor Proudman” [44], en referencia al conocido teorema de Taylor-Proudman para flujos estacionarios [46].

Es importante notar que si bien los modos 3D transfieren energía a modos más cercanos al plano $k_{\parallel} = 0$, la condición de resonancia prohíbe la transferencia de energía entre modos 3D y modos puramente 2D. Las interacciones resonantes transfieren energía hacia valores menores de k_{\parallel}/k pero no a modos con $k_{\parallel} = 0$ (ver [34, 43, 47]). Sin embargo, se verá más adelante que la energía es efectivamente transferida hacia modos puramente 2D, aumentando la energía en el plano $k_{\parallel} = 0$ a expensas de una merma de la energía 3D. Dicha transferencia proviene de interacciones cuasi-resonantes donde $\omega_k + \omega_p + \omega_q \approx Ro$, caso para el cual pueden tomarse términos de orden superior en el desarrollo del término no lineal en la ecuación (2.9). Este caso se contempla en la teoría de las interacciones cuárticas [48] pero no será analizado en el presente trabajo.

2.2.4. Dinámica de los modos rápidos y lentos

A primer orden en los efectos no lineales, las ondas lentas se desacoplan y evolucionan independientemente de las ondas rápidas. En este contexto, el desacople implica que los modos 2D con $k_{\parallel} = 0$ evolucionan según su propia dinámica independientemente de las ondas rápidas, al menos durante tiempos del orden Ro^{-2} [49, 50]. Este desacoplamiento, resultado de interacciones resonantes entre modos lentos (modos geostróficos en flujos rotantes) y modos rápidos, ocurre en un amplio rango de sistemas muy relacionados entre sí, tales como los flujos en el plano β [51], flujos estratificados [52, 53], flujos rotantes estratificados [41, 54] y flujos rotantes poco profundos [42, 55].

Las ecuaciones que rigen la dinámica lenta se pueden encontrar descomponiendo la velocidad total de la siguiente manera

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{3D}(x, y, z) + \mathbf{u}_{2D}(x, y) + w\hat{z}(x, y), \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{u}_{2D}(x, y) + w\hat{z}(x, y) = (u_{2D}(x, y), v_{2D}(x, y), w(x, y))$ es la porción de la velocidad que no presenta variación a lo largo del eje z , es decir, la velocidad correspondiente a los modos 2D. La misma puede calcularse promediando la velocidad a lo largo del eje de rotación,

$$\frac{1}{H} \int_0^H \mathbf{u} dz = \mathbf{u}_{2D}(x, y) + w(x, y)\hat{z}. \quad (2.15)$$

A su vez, $\mathbf{u}_{3D}(x, y, z)$ es la diferencia entre la velocidad total y la velocidad constante a lo largo del eje z , es decir, representa a los modos 3D con $k_z \neq 0$ y cumple

$$\frac{1}{H} \int_0^H \mathbf{u}_{3D}(x, y, z) dz = 0. \quad (2.16)$$

Reemplazando la descomposición (2.14) en la ecuación de Euler ($\nu = 0$) y utilizando la propiedad (2.16) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones [12, 42, 50]

$$\partial_t \mathbf{u}_{3D} = -\mathbf{u}_{2D} \cdot \nabla \mathbf{u}_{3D} - w \partial_z \mathbf{u}_{3D} - \mathbf{u}_{3D} \cdot \nabla \mathbf{u}_{3D} - \frac{\nabla \mathcal{P}_{3D}}{\rho}, \quad (2.17)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_{2D} = -\mathbf{u}_{2D} \cdot \nabla \mathbf{u}_{2D} - \mathbf{u}_{3D} \cdot \nabla \mathbf{u}_{2D} - \frac{\nabla \mathcal{P}_H}{\rho}, \quad (2.18)$$

$$\partial_t w = -\mathbf{u}_{3D} \cdot \nabla w - \mathbf{u}_{2D} \cdot \nabla w. \quad (2.19)$$

donde $\mathcal{P}(x, y, z) = \mathcal{P}_{3D}(x, y, z) + \mathcal{P}_H(x, y)$ es la presión total que se descompone en una componente \mathcal{P}_H constante a lo largo del eje z y en una componente que varía a lo largo de dicho eje, siendo $\frac{1}{H} \int_0^H \mathcal{P}_{3D}(x, y, z) dz = 0$. Transformando Fourier y multiplicando las ecuaciones (2.17) - (2.19) por \mathbf{u}_{3D} , \mathbf{u}_{2D} y w e integrando sobre todo el dominio se pueden escribir ecuaciones para la transferencia de energía entre las distintas componentes en el espacio Fourier [12, 49, 56],

$$\partial_t E_{3D} = T_{33 \rightarrow 3} + T_{32 \rightarrow 3} + T_{3w \rightarrow 3}, \quad (2.20)$$

$$\partial_t E_{2D} = T_{22 \rightarrow 2} + T_{33 \rightarrow 2}, \quad (2.21)$$

$$\partial_t E_w = T_{33 \rightarrow w} + T_{2w \rightarrow w}. \quad (2.22)$$

Los símbolos T hacen referencia a la transferencia de energía entre distintos modos de Fourier. $T_{33 \rightarrow 2}$, por ejemplo, representa la interacción de energía entre dos modos 3D que transfieren energía a modos 2D. Notar que estos términos representan justamente las interacciones “l-l”, “r-r-r” y “r-l-r” discutidas con anterioridad. Para sistemas con rotación fuerte en donde $Ro \rightarrow 0$, los modos 3D no transfieren energía a los modos 2D al resultar nulo el coeficiente de interacción $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Por lo tanto, los términos $T_{33 \rightarrow 2}$ y $T_{33 \rightarrow w}$ son idénticamente nulos [34], con lo cual para $Ro \rightarrow 0$ resulta [49, 56],

$$\partial_t E_{3D} = T_{33 \rightarrow 3} + T_{32 \rightarrow 3} + T_{3w \rightarrow 3}, \quad (2.23)$$

$$\partial_t E_{2D} = T_{22 \rightarrow 2}, \quad (2.24)$$

$$\partial_t E_w = T_{2w \rightarrow w}. \quad (2.25)$$

En este límite, agregando viscosidad a las ecuaciones (2.17) - (2.19) se obtiene

$$\partial_t \mathbf{u}_{3D} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_{3D} - \frac{\nabla \mathcal{P}_{3D}}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_{3D}, \quad (2.26)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_{2D} = -\mathbf{u}_{2D} \cdot \nabla \mathbf{u}_{2D} - \frac{\nabla \mathcal{P}_H}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_{2D}, \quad (2.27)$$

$$\partial_t w = -\mathbf{u}_{2D} \cdot \nabla w + \nu \nabla^2 w. \quad (2.28)$$

Los modos 2D, representados por $\mathbf{u}_{2D} + w\hat{z}$, evolucionan independientemente de los modos 3D mientras que w satisface una ecuación de tipo escalar pasivo, siendo advechado por el campo \mathbf{u}_{2D} . Vale la pena mencionar que en [43] se muestra que el resultado de desacoplamiento entre modos 2D y modos rápidos 3D en ondas inerciales es válido para flujos en un dominio confinado general.

2.2.5. La aproximación SQG

Para extender los resultados de flujos rotantes al caso estratificado, en esta tesis consideraremos un modelo muy sencillo de flujos atmosféricos dado por la aproximación cuasi-geostrofica de superficie. A continuación se derivan las ecuaciones que rigen la dinámica de un flujo bajo dicha aproximación tal como se analizará en el capítulo 5.

Una aproximación ampliamente utilizada como punto de partida en el estudio de flujos atmosféricos es la aproximación de Boussinesq. Corresponde a un fluido incompresible y estratificado en el cual se asume balance hidrostático en la dirección vertical y una densidad media constante en el plano horizontal. La estratificación se implementa escribiendo a la densidad y la presión como una perturbación a sus valores medios en la dirección vertical

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t), \quad (2.29)$$

$$p = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t). \quad (2.30)$$

Usualmente (aunque no es necesario) se asume balance hidrostático en la dirección vertical para p y \bar{p} , lo cual implica el mismo balance para p' ,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho'. \quad (2.31)$$

Bajo estas aproximaciones, asumiendo que las perturbaciones son pequeñas y despreciandolas en todos los términos excepto en el empuje, y a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensional y la conservación de la masa para un fluido incompresible, se obtienen las ecuaciones de Boussinesq:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho_0} - 2\Omega u_y = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_y + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho_0} + 2\Omega u_x = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho', \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\rho'g}{\rho_0} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{-\rho'g}{\rho_0} \right) + N^2 u_z = 0. \quad (2.35)$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}, \quad (2.36)$$

donde la última ecuación corresponde a la conservación de la masa, N^2 es una frecuencia de flotación (o empuje) debido a la estratificación de la densidad impuesta por $\bar{\rho}(z)$, y ρ_0 es un valor de referencia para la densidad, que se puede tomar como un valor medio $\rho_0 = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{\rho} dz$. La frecuencia N^2 es conocida como la frecuencia de Brunt-Väisälä.

El sistema de ecuaciones (2.32)-(2.36) es altamente complejo. Se puede lograr una primer simplificación imponiendo la condición de balance geostrófico a las ecuaciones de Boussinesq, obteniéndose el campo geostrófico de velocidades que se escribe a continuación con super-índice g ,

$$u_x^g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y^g = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.37)$$

donde ψ es la función de corriente gesotrófica, definida según

$$\psi = \frac{p'}{2\Omega\rho_0} \quad (2.38)$$

y se cumple

$$\frac{\partial u_x^g}{\partial x} + \frac{\partial u_y^g}{\partial y} = 0. \quad (2.39)$$

Notar que el balance gesotrófico corresponde físicamente a pedir que la fuerza de Coriolis esté balanceada por los gradientes horizontales de presión. La condición de incompresibilidad impone que la variación de la componente vertical u_z^g no puede presentar variación en z y, por lo tanto, puede tomarse igual a su valor en la superficie

$$u_z^g = 0. \quad (2.40)$$

Además, utilizando el balance hidrostático en la dirección vertical se obtiene

$$\rho' = -\frac{2\Omega\rho_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.41)$$

Otra aproximación ampliamente utilizada es la cuasi-geostrófica. Las ecuaciones cuasi-geostróficas se obtienen mediante una aproximación más compleja a la ecuación de Boussinesq que la obtenida mediante balance geostrófico.

Sus ecuaciones se derivan suponiendo una velocidad ageostrófica que resulta de la diferencia entre la velocidad de Boussinesq \mathbf{u} y la geostrófica \mathbf{u}^g hallada en las ecuaciones (2.37)

$$u_x^{QG} = u_x - u_x^g, \quad u_y^{QG} = u_y - u_y^g, \quad u_z^{QG} = u_z. \quad (2.42)$$

Reemplazando las relaciones (2.42) en las ecuaciones (2.32), (2.33), (2.34) y (2.35), y usando las ecuaciones (2.37) - (2.41) se obtiene

$$\frac{\partial u_x^g}{\partial t} + u_x^g \frac{\partial u_x^g}{\partial x} + u_y^g \frac{\partial u_x^g}{\partial y} - 2\Omega u_y^{QG} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial u_y^g}{\partial t} + u_x^g \frac{\partial u_y^g}{\partial x} + u_y^g \frac{\partial u_y^g}{\partial y} + 2\Omega u_x^{QG} = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u_x^{QG}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{QG}}{\partial y} + \frac{\partial u_z^{QG}}{\partial z} = 0, \quad (2.45)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g\rho'}{\rho_0} \right) - u_x^g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g\rho'}{\rho_0} \right) - u_y^g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g\rho'}{\rho_0} \right) + N^2 u_z^{QG} = 0. \quad (2.46)$$

A partir de las ecuaciones (2.43) y (2.44) se puede escribir una ecuación para la vorticidad vertical de la forma

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + [\psi, \omega] = 2\Omega \frac{\partial u_z^{QG}}{\partial z}, \quad (2.47)$$

donde

$$\omega = -\partial_{xx}\psi - \partial_{yy}\psi. \quad (2.48)$$

y donde $[A, B] = \partial_x A \partial_y B - \partial_y A \partial_x B$ es el corchete de Poisson. El término a la derecha de la ecuación (2.47) es el responsable de la generación de vorticidad por gradientes verticales de u_z^{QG} . Si un volumen material fluido penetra una región en donde la velocidad vertical aumenta con la altura, es estirado verticalmente. Por conservación de la masa, el volumen se encogerá en el plano horizontal modificando el valor de ω . Aumentará el valor de ω en el hemisferio Norte (donde $\Omega > 0$) ó lo disminuirá en el hemisferio Sur (donde $\Omega < 0$). Usando la ecuación (2.46) y que

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{g\rho'}{2\Omega\rho_0}, \quad (2.49)$$

se puede escribir la ecuación (2.47) como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + [\psi, \omega] = -2\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \partial_y \psi \partial_x + \partial_x \psi \partial_y \right) \left(\frac{2\Omega}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi. \quad (2.50)$$

Definiendo la vorticidad potencial cuasi-geostrófica

$$\vartheta = \omega + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2\Omega}{N} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi, \quad (2.51)$$

la ecuación (2.50) queda escrita en forma más compacta

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + [\psi, \vartheta] = 0. \quad (2.52)$$

Notar que mediante un cambio de variables en la coordenada vertical la vorticidad potencial se puede escribir

$$\vartheta = \left[\omega + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right] \psi. \quad (2.53)$$

Escribiendo, a partir de la ecuación (2.49), las fluctuaciones de densidad como proporcionales a una variable q

$$q = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.54)$$

y usando las ecuaciones (2.35) y (2.41) se obtiene

$$\frac{\partial q}{\partial t} + [\psi, q] = -N^2 u_z^{QG}. \quad (2.55)$$

Las ecuaciones (2.52) y (2.55) son las correspondientes al modelo cuasi-Geostrófico (QG). Para obtener las ecuaciones del modelo SQG, se considera a la vorticidad potencial $\vartheta = 0$ en el interior del recinto. De esta forma, las ecuaciones (2.52) y (2.55) se satisfacen trivialmente dentro del recinto y se busca una solución en la superficie $z = 0$ para la ecuación (2.55) con condiciones de contorno de tipo Neumann, es decir, utilizando un valor de $u_z^{QG} = 0$ en la superficie. De esta forma, la dinámica responde a la ecuación

$$\frac{\partial q}{\partial t} + [\psi, q] = 0., \quad (2.56)$$

y la relación entre ψ y q se encuentra trivialmente a partir de las ecuaciones (2.53), (2.54) y la condición de Neumann,

$$q = (-\nabla^2)^{1/2} \psi. \quad (2.57)$$

Como se explicará en el capítulo 5, estas ecuaciones describen un flujo en el que las fuentes de movimiento son las fluctuaciones de densidad q (o temperatura) en la superficie. Las ecuaciones describen correctamente las escalas más grandes de la tropopausa [27–29], y la dinámica oceánica en escalas grandes y hasta profundidades de 500 m [30–32].

2.3. Modelos numéricos

En esta tesis, las ecuaciones de movimiento se resolvieron numéricamente mediante dos métodos distintos: simulaciones directas ó DNS (del inglés “Direct Numerical Simulation”) y usando modelos de subgrilla ó LES (del inglés “Large Eddy Simulation”). Las simulaciones 3D se realizaron en un dominio cúbico de longitud 2π con condiciones de contorno periódicas, y se utilizaron distintas resoluciones espaciales entre 96^3 y 512^3 puntos de grilla. Para los flujos SQG se utilizó un dominio cuadrado de longitud 2π con las mismas condiciones de contorno, y con resoluciones espaciales entre 32^2 y 1024^2 puntos de grilla.

2.3.1. Simulaciones directas

En una DNS las ecuaciones de movimiento se resuelven directamente, sin mediar ningún modelo de turbulencia, es decir, todas las escalas espaciales y temporales se resuelven explícitamente. Para resolver dichas ecuaciones se utilizó GHOST [58, 59], un código paralelizado que resuelve las ecuaciones mediante un método pseudo-espectral y que utiliza la regla de los dos tercios para evitar efectos de aliasing [58, 59]. Dicha regla cancela la amplitud del campo de velocidades para números de onda $|\mathbf{k}| \geq N/3$ en cada iteración (N es la resolución lineal). De esta manera, el mayor número de onda resuelto es $k_{max} = N/3$. La idea detrás de estas simulaciones es que el número de onda k_{max} sea del orden ó mayor al número de onda asociado a la escala de disipación de Kolmogorov k_η , es decir, al mínimo número de onda para el cual la disipación se vuelve dominante. En el caso de turbulencia isotrópica tridimensional en decaimiento libre, el número de onda asociado a la escala de disipación es $k_\eta = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$, donde ϵ es la tasa de disipación de la energía. Para que una simulación con N puntos lineales de grilla resuelva todas las escalas pertinentes, se necesita que la separación entre puntos $\Delta x = 1/N$ sea del orden ó menor a la escala de disipación $l_\eta \sim 1/k_\eta$, es decir, toda simulación DNS bien resuelta debe cumplir

$$\frac{N}{3} \gtrsim \left(\frac{\epsilon}{\nu^3} \right)^{1/4}. \quad (2.58)$$

Para la aproximación SQG, la expresión para la escala de disipación es la misma y mediante argumentos similares al caso hidrodinámico tridimensional se deriva la condición

$$\frac{N}{3} \gtrsim \left(\frac{\beta}{\nu^3} \right)^{1/4}, \quad (2.59)$$

donde β es la tasa de disipación de la pseudo-estrofia en un flujo SQG.

2.3.2. Modelos de subgrilla

Para simulaciones 3D el costo computacional hace necesario usar modelos de subgrilla para poder explorar números de Reynolds altos. El modelo utilizado en esta tesis se clasifica dentro de la familia de las LES [60–63]. Estos modelos dividen las longitudes de onda del problema en dos rangos. Un rango de escalas grandes acotado superiormente por un número de onda relacionado con el tamaño de la simulación $k_c = N/2 - 1$, y un rango de escalas chicas compuesto por números de onda $k_c < k < ak_c$ con a de orden $\mathcal{O}(1)$. Las escalas más grandes se resuelven explícitamente, incluyendo en el cálculo de las mismas el efecto estadístico de las escalas no resueltas mediante el modelado de la transferencia de energía entre ambos rangos.

El modelo utilizado en esta tesis se basa en la clausura EDQNM [64, 65] para calcular viscosidad turbulenta y un ruido turbulento, y asume que las escalas sin resolver son isotrópas (aun en presencia de rotación se espera que los vórtices más pequeños no sean afectados por el proceso de bidimensionalización y que el flujo sea isótropo [66]). La viscosidad y el ruido turbulentos se calculan teniendo en cuenta tanto la contribución del espectro no resuelto de energía como el de helicidad. El modelo se adapta dinámicamente a la forma de ambos espectros en las escalas resueltas, lo cual lo convierte en un modelo especialmente interesante para el estudio de turbulencia rotante, para la cual las leyes de escala no son del todo conocidas y pueden depender del número de Rossby. Si bien fue derivado en primer término para flujos isótropos con ó sin helicidad [68], en esta tesis se utiliza su extensión al caso rotante presentado en [69]. Para la validación de este modelo frente a simulaciones DNS y otro modelo de subgrilla [65] se puede consultar [68] para el caso isótropo, [69] para el caso forzado con rotación (no helicoidal) y [70] para el caso forzado, rotante y helicoidal.

El modelo de subgrilla comienza aplicando un filtro espectral a las ecuaciones dinámicas, truncando todas las componentes de la velocidad para vectores de onda \mathbf{k} con $|\mathbf{k}| = k > k_c$. Luego se modela la transferencia entre las escalas grandes (resueltas) y las escalas chicas (escalas de subgrilla, no resueltas) agregando viscosidad y ruido turbulento a las ecuaciones para las escalas

resueltas. Estas cantidades se obtienen resolviendo las ecuaciones EDQNM estimando los espectros de energía y helicidad en la escala de subgrilla a partir de la forma de los mismos en las escalas resueltas. Para esto, se define un rango intermedio entre k'_c y k_c (generalmente $k'_c = k_c/3$), donde se asume que los espectros de energía y helicidad presentan la forma de una ley de potencias seguida de un decrecimiento exponencial,

$$E(k, t) = E_0 k^{-\alpha_E} e^{-\delta_E k}, \quad k'_c \leq k < k_c, \quad (2.60)$$

$$H(k, t) = H_0 k^{-\alpha_H} e^{-\delta_H k}, \quad k'_c \leq k < k_c. \quad (2.61)$$

Los coeficientes $\alpha_E, \alpha_H, \delta_E, \delta_H, E_0, y H_0$ se calculan en cada paso temporal mediante una regresión de cuadrados mínimos al espectro de energía y helicidad en las escalas resueltas. Luego se extrapola el espectro a las escalas sin resolver utilizando estos coeficientes, y se resuelven las ecuaciones EDQNM. Seguidamente se resuelve la ecuación de Navier-Stokes (2.1) con un término extra en el lado derecho, que en el espacio espectral toma la forma $-\nu(k|k_c, t)k^2 \mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$, donde $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$ es la transformada de Fourier del campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $-k^2$ es el Laplaciano en el espacio complejo y $\nu(k|k_c, t)$ es la viscosidad turbulenta. El ruido turbulento representa la energía que se escapa de las escalas no resueltas a las escalas resueltas (por ejemplo, por batido entre frecuencias cercanas), y se agrega luego sumando al campo de velocidad un campo aleatorio con amplitud dada por el resultado de resolver las ecuaciones EDQNM. En las simulaciones LES no es necesario remover efectos de aliasing, y por lo tanto el número de onda máximo resuelto es $k_{max} = N/2$.

En las simulaciones DNS y LES se evolucionaron las ecuaciones en el tiempo utilizando un método de Runge-Kutta de segundo orden. Se verificó asimismo que se cumpliera la condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) con un número de Courant menor que uno, $\langle U \rangle \Delta t / \Delta x < 1$ ($\langle U \rangle$ es el valor característico de la velocidad). En decaimiento libre, y gracias a que el valor inicial de la velocidad fue normalizado en todas las simulaciones según $U \approx 1$, la condición CFL resulta $\Delta t \lesssim 1/N$.

2.4. Condiciones iniciales

A lo largo de esta tesis se usan distintos campos de velocidad como condiciones iniciales. Sus características dependen de la clase de flujo que se quiere analizar, diferenciándose entre ellas principalmente por el contenido total de helicidad y la distribución espectral de la energía. Todas ellas fueron utilizadas para los casos tridimensionales. En el caso bidimensional (SQG)

se impone una condición inicial al potencial ψ en lugar del campo de velocidades, como se explica al final de esta sección.

2.4.1. Taylor-Green

El flujo TG [71] es un flujo no-helicoidal que se construye mediante la multiplicación de senos y cosenos.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{TG} = & U \sin(k_0 x) \cos(k_0 y) \cos(k_0 z) \hat{x} - \\ & U \cos(k_0 x) \sin(k_0 y) \cos(k_0 z) \hat{y}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

En el espacio Fourier, está formado por vectores de onda de la forma $\mathbf{k} = k_0(n, m, l)$. Notar que este flujo no posee energía en los modos con $k_z = 0$, es decir, no se excita directamente ningún modo con $\mathbf{k} = k_0(n, m, 0)$ con n y m enteros. Como se verá más adelante, el crecimiento de la energía en esos modos se debe sólo a la transferencia de energía 3D al plano 2D. El flujo TG suele ser elegido por su importancia en hidrodinámica, siendo un flujo que desarrolla rápidamente escalas más y más pequeñas. También es muy usado por su parecido con flujos de tipo von Kármán que se desarrollan entre discos contra-rotantes utilizados en muchos experimentos.

2.4.2. Arnòld-Beltrami-Childress

El vector velocidad en un flujo ABC [72],

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ABC} = & [B \cos(k_0 y) + A \sin(k_0 z)] \hat{x} + \\ & [C \cos(k_0 z) + A \sin(k_0 x)] \hat{y} + \\ & [A \cos(k_0 x) + B \sin(k_0 y)] \hat{z}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

es una auto-función del operador rotor

$$\nabla \times \mathbf{u}_{ABC} = \lambda \mathbf{u}_{ABC} \quad (2.64)$$

por lo que resulta paralelo a la vorticidad, maximizando su helicidad. Siendo una suma de senos y cosenos, distribuye la energía a lo largo de los ejes k_x, k_y, k_z , con vectores de ondad de la forma $\mathbf{k} = k_0(1, 0, 0)$, $\mathbf{k} = k_0(0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = k_0(0, 0, 1)$. De esta forma, dos terceras partes de la energía total se ubica en el plano $k_z = 0$. Este flujo fue usado como ejemplo paradigmático en el estudio de flujos helicoidales en la atmósfera en [18].

2.4.3. Flujos aleatorios helicoidales

Se utilizó un flujo construido a partir de una superposición de modos de Fourier con fases aleatorias utilizando el algoritmo descrito en [73], el cual permite controlar la cantidad total de helicidad con relativa facilidad. En breve, el procedimiento es el siguiente. Se generaron dos campos aleatorios

$$v_i^{(1)}(\mathbf{k}) = A(k)e^{i\phi}, \quad v_i^{(2)}(\mathbf{k}) = A(k)e^{i\phi'}, \quad (2.65)$$

donde $i = 1, 2, 3$ son las componentes cartesianas del campo, ϕ y ϕ' son fases aleatorias diferentes para cada componente i y cada vector de onda \mathbf{k} , y $A(k)$ es una amplitud usada para controlar la forma final del espectro de energía. Luego se construyeron campos incompresibles tomando

$$\mathbf{u}^{(1)} = \nabla \times \mathbf{v}^{(1)} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \nabla \times \mathbf{v}^{(2)}. \quad (2.66)$$

Finalmente se toma $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\sin \alpha \mathbf{u}^{(1)} + \cos \alpha \mathbf{u}^{(2)})$ con α un parámetro que controlará la helicidad (la helicidad relativa resulta $h = \sin(2\alpha)$, siendo mínima para $\alpha = 0$ y máxima para $\alpha = \pi/4$), y se construyen las condiciones iniciales $\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \cos \alpha \mathbf{u}^{(1)}(k) + \sin \alpha \mathbf{u}^{(2)}(k) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k})/k$.

2.4.4. Flujos aleatorios en la descomposición de Craya-Herring

Aunque el método descrito arriba genera un campo aleatorio con helicidad casi perfectamente isotrópico, el uso del generador $(1, 1, 1)$ para todos los vectores de onda \mathbf{k} en los campos $\mathbf{v}^{(1)}$ y $\mathbf{v}^{(2)}$ introduce una pequeña anisotropía. Cuando sea necesario generar el campo más isotrópico posible, se usará un método distinto que se describe a continuación. La descomposición de Craya-Herring [74, 125] asocia a cada vector de onda \mathbf{k} un sistema ortonormal cuyos ejes dependen de \mathbf{k} según

$$\mathbf{i}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}|}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{i}}{|\mathbf{k}|}, \quad \frac{\mathbf{k}}{k}; \quad (2.67)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ es un vector unitario fijo en el espacio y se elegirá paralelo al eje de rotación, $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$. Esta representación se usa comúnmente al estudiar turbulencia (ver por ejemplo [75, 76]). Usando estos generadores, las condiciones iniciales aleatorias se crearon mediante la superposición de modos armónicos con fases aleatorias $\phi(\mathbf{k})$, $\phi'(\mathbf{k})$ proyectados sobre el sistema de referencia de Craya para cada \mathbf{k} ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = e^{i\phi} \mathbf{i} + e^{i\phi'} \mathbf{j}. \quad (2.68)$$

Notar que no se incluye una componente de \mathbf{u} sobre el eje \mathbf{k} . Esto se debe a la condición de incompresibilidad que exige $\mathbf{u}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$.

2.4.5. Flujos aleatorios bidimensionales

Para las simulaciones SQG la condición inicial se escribe para la función de corriente $\psi(\mathbf{k})$, la cual estará dada por una superposición de modos armónicos con fases aleatorias $\phi(\mathbf{k})$, $\phi'(\mathbf{k})$ sobre los ejes cartesianos en el espacio Fourier,

$$\psi(\mathbf{k}) = e^{i\phi} \hat{k}_x + e^{i\phi'} \hat{k}_y. \quad (2.69)$$

2.5. Otras definiciones

Se presentan a continuación definiciones de las distintas magnitudes que se utilizarán a lo largo de esta tesis.

Escalas características

Existen tres escalas características ampliamente utilizadas en el estudio de la turbulencia. La escala integral,

$$l = 2\pi \frac{\sum_k k^{-1} E(k)}{\sum_k E(k)}, \quad (2.70)$$

con $E(k)$ el espectro de energía isotrópico. La misma da cuenta del tamaño característico de los vórtices en los cuales se concentra la mayor parte de la energía. En la práctica es también la escala en la cual se inyecta energía en los casos de turbulencia forzada. La escala de Taylor,

$$l_\lambda^2 = \frac{\sum_k E(k)}{\sum_k k^2 E(k)}, \quad (2.71)$$

se usa principalmente en estudios experimentales y es una escala característica del rango inercial en el espectro turbulento. Y la escala de disipación de Kolmogorov en turbulencia 3D isotrópica y homogénea,

$$l_\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}. \quad (2.72)$$

Para escalas menores a l_η los efectos disipativos comienzan a ser dominantes.

Números adimensionales

Se utilizarán distintos números adimensionales para caracterizar ciertos aspectos de los flujos. El número de Reynolds mide la amplitud relativa del término no lineal respecto al término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes. El número de Reynolds basado en la escala integral l se define como

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu}, \quad (2.73)$$

mientras que el número de Reynolds basado en la escala de Taylor es

$$Re_\lambda = \frac{U\lambda}{\nu}. \quad (2.74)$$

En flujos rotantes, el número de Rossby mide la relación entre el término no lineal y el término de Coriolis, siendo menor cuanto mayor es la frecuencia de rotación

$$Ro = \frac{U}{2\Omega l}, \quad (2.75)$$

El llamado número de Rossby en la micro-escala se define como

$$Ro^\omega = \frac{\omega}{2\Omega}. \quad (2.76)$$

Puede interpretarse como el cociente entre la aceleración dada por convección y aquella causada por Coriolis en la escala de Taylor. En todas las simulaciones de este trabajo, importará que Ro sea lo suficientemente chico para que la rotación afecte a la turbulencia, mientras que Ro^ω debe ser mayor que la unidad para que el efecto linealizador de las ondas inerciales no sea dominante, derivando en un decaimiento de la energía puramente exponencial por efectos viscosos [47].

Helicidad

La helicidad es, junto a la energía, uno de los dos invariantes cuadráticos ideales de la ecuación de Navier-Stokes 3D y mide el grado de alineación entre la velocidad y la vorticidad. Si es cero, el flujo es simétrico ante reflexiones, y por lo tanto mide también el grado de simetría ante reflexiones que posee el flujo. Su invariancia fue descubierta en [4].

Se define a la helicidad neta como

$$H = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (2.77)$$

donde los corchetes indican promedio espacial. La helicidad relativa se define como

$$h = \frac{H}{\langle |\mathbf{u}| |\boldsymbol{\omega}| \rangle}; \quad (2.78)$$

se encuentra acotada entre -1 y 1 y puede interpretarse como el promedio del coseno del ángulo entre la velocidad y la vorticidad en cada punto del espacio.

Espectros

Para caracterizar la distribución espectral de la energía se considerarán espectros tanto isótropos como anisótropos. Los últimos se utilizarán exclusivamente para los flujos rotantes cuya anisotropía crece con el tiempo.

El espectro isótropo usual se define promediando sobre casquetes esféricos (en 3D) ó circulares (en 2D) en el espacio Fourier,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k \leq |\mathbf{k}| < k+1} \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, t), \quad (2.79)$$

donde \mathbf{u}^* es el complejo conjugado de la velocidad.

Para calcular el espectro anisótropo perpendicular, las componentes de $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ se integran alrededor del eje de rotación para obtener un espectro que depende solamente de k_{\perp} ,

$$E(k_{\perp}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_{\perp} \leq |\mathbf{k}_{\perp}| < k_{\perp}+1} \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, t). \quad (2.80)$$

La relación entre $E(k)$ y $E(k_{\perp})$ se puede derivar tomando la ecuación (2.79) en el límite continuo,

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int \hat{\Phi}_{ii}(\mathbf{k}, t) k^2 d\Omega_k, \quad (2.81)$$

con $\hat{\Phi}_{ij}$ el tensor espectral, es decir, la transformada Fourier de la función de correlación de segundo orden de la velocidad $\Phi_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$, y donde Ω_k representa el ángulo sólido en el espacio Fourier. Según la ecuación (2.81), si $E(k) \sim k^{\sigma}$ entonces $\hat{\Phi}_{ii} \sim k^{\sigma-2}$. Para flujos axisimétricos, se puede escribir $E(k_{\perp})$ integrando $\hat{\Phi}_{ij}$ sobre cáscaras cilíndricas en el espacio complejo,

$$E(k_{\perp}, t) = \frac{1}{2} \int \hat{\Phi}_{ii}(\mathbf{k}, t) k_{\perp} d\phi_k dk_z. \quad (2.82)$$

Si $E(k) \sim k^\sigma$ entonces,

$$\begin{aligned} E(k_\perp) &= \frac{1}{2} \int k^{\sigma-2} k_\perp d\phi_k dk_z = \\ &= \frac{1}{2} \int (k_\perp^2 + k_z^2)^{\frac{\sigma-2}{2}} k_\perp d\phi_k dk_z, \end{aligned} \quad (2.83)$$

Cuando la mayor parte de la energía se encuentra en el plano $k_\parallel = 0$, de la ecuación (2.83) se obtiene

$$E(k_\perp) \sim \frac{1}{l_\parallel} \int k_\perp^{\sigma-1} d\phi_k. \quad (2.84)$$

Aún en el caso para el cual la energía no se concentra en el plano $k_\parallel = 0$ la dependencia de $E(k_\perp)$ será $\sim k_\perp^{\sigma-1}$ como se sigue del análisis dimensional de la ecuación (2.83). Resumiendo,

$$E(k) \sim k^\sigma \quad \Rightarrow \quad E(k_\perp) \sim k_\perp^{\sigma-1}. \quad (2.85)$$

Esta relación simple entre los espectros $E(k)$ y $E(k_\perp)$ resultará útil para entender las leyes de potencia que se presentarán más adelante.

Por otra parte, en el caso tridimensional se puede definir un espectro paralelo integrando las componentes de $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ sobre planos perpendiculares al eje de rotación,

$$E(k_\parallel) = \frac{1}{2} \sum_{k_\parallel \leq |\mathbf{k}_\parallel| < k_\parallel + 1} \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}, t). \quad (2.86)$$

Se puede obtener aún más información de la anisotropía espectral estudiando el espectro axisimétrico de energía $e(k_\parallel, k_\perp)$ (ver [38, 47]). El mismo se define a partir de la integración de $\hat{\Phi}_{ii}(\mathbf{k})$ alrededor del eje de rotación (es decir, sobre ϕ_k), para obtener un espectro que depende solamente de k_\parallel y k_\perp , que se relaciona con los espectros anisótrpos según

$$E(k_\parallel) = \sum_{k_\perp} e(k_\parallel, k_\perp), \quad (2.87)$$

y

$$E(k_\perp) = \sum_{k_\parallel} e(k_\parallel, k_\perp). \quad (2.88)$$

Los espectros de helicidad y enstrofía se pueden definir de la misma forma, reemplazando $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ por $\omega(\mathbf{k})$ como corresponda.

Capítulo 3

Decaimiento de turbulencia confinada

3.1. Introducción

En el presente capítulo se analiza el efecto de la rotación y la helicidad en el decaimiento libre de flujos en régimen turbulento para el caso particular de flujos confinados, es decir, flujos en los cuales la escala integral (tamaño de los vórtices más grandes) es comparable al dominio de integración de la simulación. En experimentos, esta situación corresponde a las etapas más tardías de la evolución del flujo, cuando los vórtices alcanzan el tamaño del recipiente que contiene al fluido. Si bien el dominio utilizado en las simulaciones posee condiciones periódicas de contorno, se usará el término “confinado” en analogía con los experimentos, ya que aún en las simulaciones los vórtices no pueden ser más grandes que el dominio computacional. Pero es importante notar que los efectos de confinamiento en flujos rotantes van más allá de la saturación de la escala integral creciendo hasta el tamaño del dominio. El confinamiento también selecciona un conjunto discreto de ondas inerciales que son modos normales del dominio, y los contornos pueden a su vez introducir disipación a través de capas límite y de Ekman. Este último efecto no está presente en nuestras simulaciones.

La presencia de helicidad en turbulencia rotante mostrará ser de particular importancia, al modificar la forma en que la energía es transferida entre las distintas escalas del sistema, impactando fuertemente en la tasa de decaimiento de la energía cinética total.

La helicidad demostró tener gran importancia en la evolución y la estabilidad de flujos astrofísicos, geofísicos y en ingeniería. Como se verá a continuación, fue propuesta por [18] como responsable de la estabilidad y

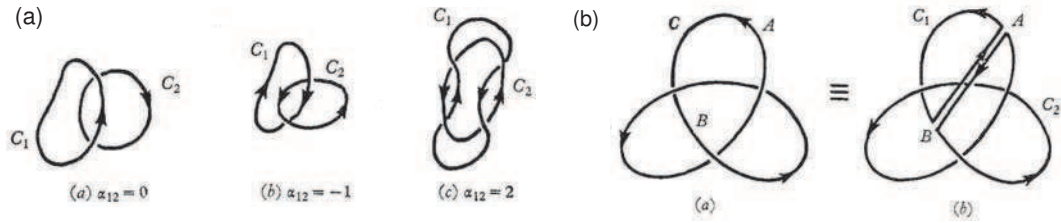


Figura 3.1: (a) Grado de anudamiento α_{12} entre dos filamentos cerrados C_1 y C_2 . El signo de α se determina según la orientación relativa de los filamentos y su módulo según la cantidad de veces que un filamento atraviesa el área encerrada por el otro. (b) Descomposición de un único filamento de vorticidad auto-anudado C en dos filamentos no anudados C_1 y C_2 pero enlazados entre sí. La helicidad resulta proporcional al grado de anudamiento del filamento de vorticidad que, según la figura (b), es equivalente al grado de enlace entre distintos filamentos no auto-anudados. (tomado de [4]).

predictibilidad de tormentas rotantes convectivas. Al no ser una magnitud definida positiva, un flujo puede presentar zonas con helicidad positiva o negativa, y aun así, no poseer globalmente una cantidad neta de helicidad. Sin embargo, la existencia de una cantidad neta de helicidad diferente de cero rompe la simetría de reflexión del flujo y, afectará la dinámica en sistemas rotantes. Inicialmente estudiada en su versión magnética por [2], su conservación en flujos hidrodinámicos fue demostrada en [4], en donde se muestra también que la misma es proporcional al grado de anudamiento de los filamentos de vorticidad presentes en el fluido (ver figura 3.1).

La principal motivación para estudiar flujos rotantes helicoidales proviene de la conjetura realizada en [18], donde se propone a la helicidad como una de las causas que dan lugar a la larga duración, estabilidad y mayor predictibilidad aparente de tormentas rotantes convectivas ó supercelda. Las mismas se caracterizan por la presencia de mesociclones, es decir, vórtices de entre 3 y 15 km de diámetro correspondiente a mesoescalas en meteorología. La formación de dichas tormentas suele explicarse a partir de la presencia de fuertes cambios en la dirección y velocidad del viento (cizalladura del viento) la cual genera tubos de aire rotante paralelos a la superficie en la baja atmósfera. Las corrientes convectivas de las tormentas rotan el eje de estos tubos ubicándolos perpendiculares a la superficie, formando grandes columnas de aire ascendente y rotante. Usualmente rotan en el mismo sentido que los sistemas de baja presión en un dado hemisferio, resultando en estructuras altamente helicoidales. A modo de ilustración, se muestran en la figura 3.2 tres estadios típicos en su formación.

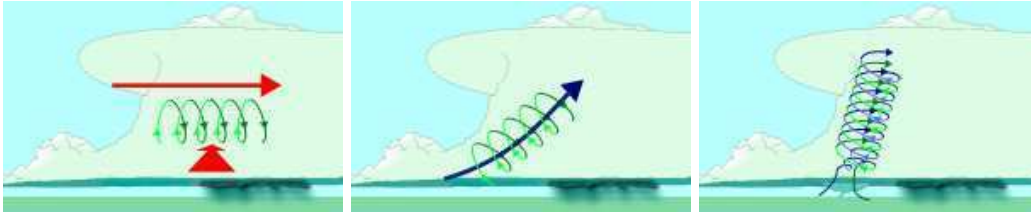


Figura 3.2: Esquema de las diferentes etapas que llevan a la formación de una tormenta convectiva rotante o supercelda con una fuerte componente de helicidad. (tomados de <http://en.wikipedia.org/wiki/Supercell>)

En la figura 3.3(a) se muestra un esquema de las trayectorias de parcelas de aire formadas a 0.25 km sobre la superficie, obtenidas a partir de un modelo numérico [78], para tormentas de este tipo. Notar la estructura helicoidal de las trayectorias. En la figura 3.3(b) se muestran curvas típicas de helicidad relativa en función de la altura para una simulación de una tormenta utilizando un modelo numérico [18], con altos valores de helicidad relativa en alturas de hasta 10 km.

Como un flujo perfectamente helicoidal tiene su velocidad paralela a la vorticidad, el término no lineal en la ecuación de movimiento es nulo y los flujos helicoidales resultan muy estables. Basándose en estudios previos sobre turbulencia helicoidal [9, 79], Lilly [18] argumentó que la presencia de helicidad en tormentas convectivas rotantes las vuelve menos susceptibles a la transferencia no lineal de energía hacia escalas chicas (escalas en las cuales la energía se disipa más rápidamente), resultando en estructuras más duraderas. Otros estudios sobre el efecto de la helicidad en la dinámica atmosférica incluyen trabajos como [80, 81], ó publicaciones más recientes como [21]. Como resultado de estos estudios, en el pronóstico meteorológico, hoy en día se utilizan indicadores sobre el contenido de helicidad de las tormenta para predecir la posibilidad de desarrollo de tornados (los índices SRH y EHI del inglés “Storm Relative Helicity” y “Energy Helicity Index” respectivamente).

Sin embargo, el uso de estos indicadores no tiene una clara justificación desde la dinámica de los fluidos. En el caso de fluidos no rotantes, isótropos y homogéneos, las estructuras en turbulencia helicoidal decaen en el mismo tiempo que en el caso no helicoidal.

Distintos estudios [8, 11, 12, 14, 82] mostraron que tanto la helicidad como la energía son transferidos hacia escalas más pequeñas con flujo constante, y que la ley de escala para la energía, particularmente la ley de Kolmogorov $E(k) \sim k^{-5/3}$ [83], no es afectada por la helicidad. En estos flujos el efecto de la helicidad se advierte sólomente por el retraso temporario en el desarrollo de la turbulencia, evidenciado por el aumento en el tiempo que toma al flujo

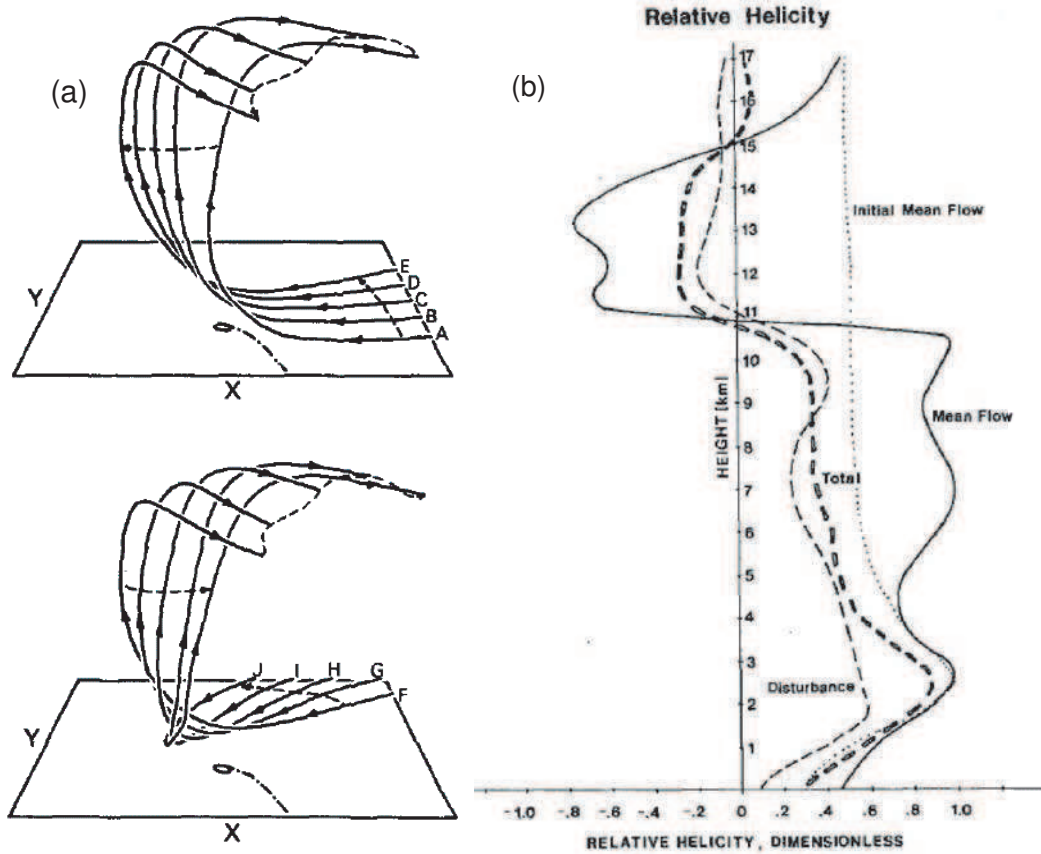


Figura 3.3: (a) Trayectorias de parcelas de aire originadas a 0.25 km de altura para el modelo KWR. El área horizontal es de 9×25 km Tomado de [78]). (b) Helicidad relativa en función de la altura para el flujo total, el flujo medio, y para las perturbaciones alrededor del mismo. Los datos fueron extraídos de una simulación numérica (tomado de [18]).

alcanzar su valor máximo de enstrofía [9]. Como resultado, la helicidad retrasa sólo transitoriamente el decaimiento de la energía, sin afectar el exponente del decaimiento en tiempos suficientemente largos.

Esto hizo que a pesar de utilizarse a la helicidad como un indicador en el pronóstico, las causas físicas de su efecto fueran desatendidas. Al revisar la literatura disponible, se puede apreciar una marcada ausencia de estudios detallados sobre turbulencia helicoidal y rotante, tanto en trabajos experimentales, como numéricos o teóricos. Esto resulta llamativo si se tiene en cuenta la relevancia de la helicidad y la rotación actuando en forma conjunta en muchos procesos astrofísicos y geofísicos, como el caso ejemplificado en los párrafos anteriores. Uno de los objetivos de esta tesis es identificar los mecanismos físicos necesarios para que la helicidad afecte el decaimiento de estructuras turbulentas, tal como es observado en la atmósfera.

En lo referente al decaimiento de la energía, aún para el caso de turbulencia isotrópica y homogénea, las leyes de decaimiento son materia de debate [35, 84–88]. Se sabe que dependen de las condiciones iniciales, y que al parecer no existe una solución única y universal a la que todos los flujos converjan asintóticamente para número de Reynolds infinito [1].

En este capítulo se comienza entonces por el caso más simple, el de flujos confinados. Para el caso no rotante, los trabajos experimentales realizados en [89], en donde se estudia turbulencia generada por una grilla y se mide el campo de velocidades utilizando la técnica de velocimetría por imágenes de partículas (PIV), muestran un decaimiento de la energía compatible con $E \sim t^{-2}$ una vez que la escala integral del fluido llega a su valor máximo, alcanzando longitudes comparables al tamaño del recipiente (ver figura 3.4(a)). El mismo decaimiento fue corroborado en simulaciones [90,91] y predicho teóricamente [86]. También fue obtenido en las simulaciones numéricas que se mostrarán más adelante.

La discusión sobre el decaimiento es mucho más compleja en el caso de flujos rotantes, en donde la aparición de una dirección privilegiada paralela al eje de rotación rompe la isotropía del espacio, impactando fuertemente en la tasa de decaimiento de la energía. El decaimiento dependerá en principio de la frecuencia de rotación del sistema (ver por ejemplo [92]). Es conocido también que los flujos rotantes desarrollan una cascada inversa de energía hacia las escalas grandes, inhibiendo la cascada directa hacia escalas chicas y reduciendo la disipación de energía en comparación a flujos no rotantes. Esta reducción de la disipación ha sido observada en simulaciones [93,94], experimentos [89,95] y estudiada teóricamente [96]. A partir de esta reducción en la tasa de disipación, puede esperarse que el decaimiento de la energía se vuelva más lento. En particular, los experimentos en [89] muestran un decaimiento $E(t) \sim t^{-1}$ para frecuencias de rotación intermedias en flujos confinados (ver

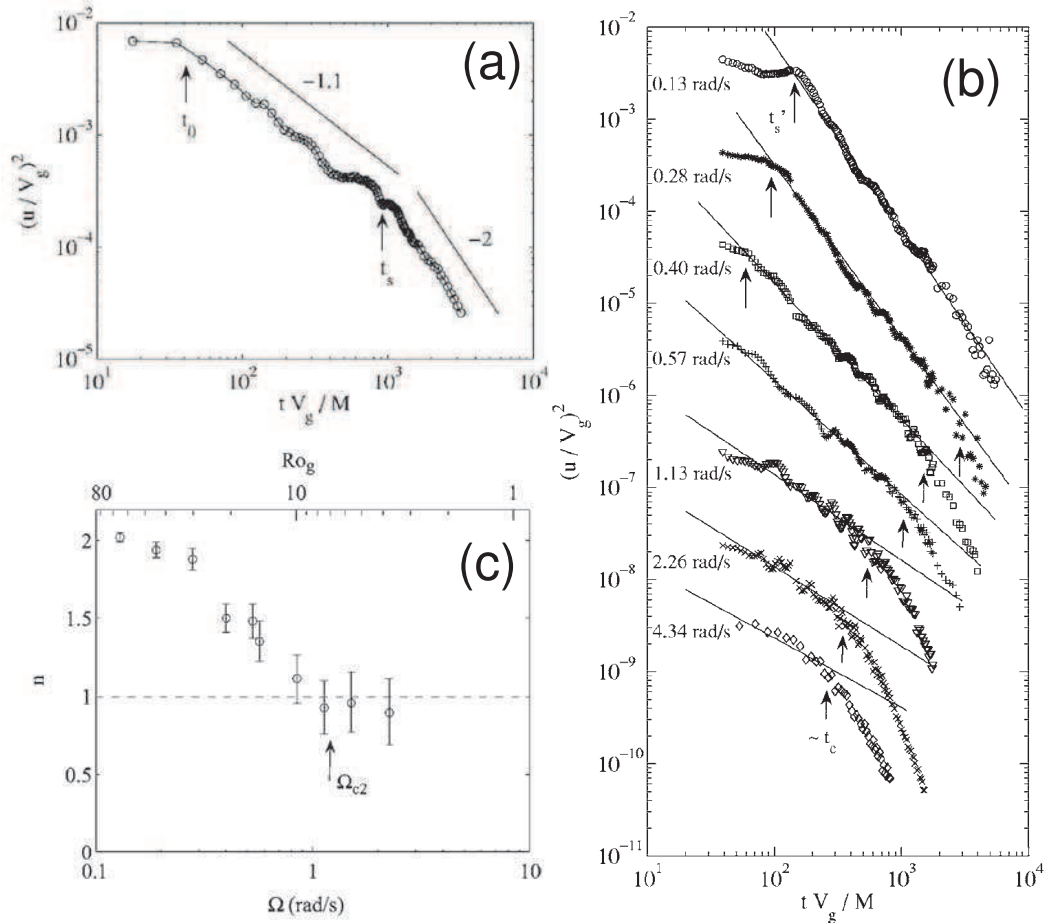


Figura 3.4: (a) Evolución temporal de la energía en ausencia de rotación para mediciones experimentales de turbulencia libre generada por una grilla; t_0 indica el tiempo en el cual se estima que las ondas producidas por el paso de la grilla se atenúan, y t_s indica el tiempo de saturación de la escala integral al tamaño del recipiente. Notar la ley de potencias aproximada t^{-2} para $t > t_s$. Sobre la ley $t^{-1,1} \sim t^{-6/5}$ se hablará en el capítulo 4. (b) Decaimiento de la energía para diferentes frecuencias de rotación en el mismo experimento que (a) pero con rotación. El tiempo t'_s indica la saturación de la escala integral inducida por la rotación mientras que t_c indica el comienzo de un decaimiento exponencial asociado a la disipación. (c) Exponente del decaimiento auto-similar de la energía en función de la frecuencia de rotación Ω (ó número de Rossby Ro). Los exponentes se acercan a un decaimiento $\sim t^{-1}$ al aumentar la rotación (Adaptado de [89]).

figuras 3.4(b) y (c)). Paralelamente, se ha reportado un aumento de la longitud integral paralela al eje de rotación tanto en experimentos [89] como en simulaciones [97, 98].

Si bien la literatura abunda en estudios detallados sobre turbulencia rotante no helicoidal [34, 38, 47], pocos son los estudios para el caso rotante con helicidad. Uno de estos casos es [15], en donde se muestra que la energía cinética de sistemas rotantes decae más lentamente a medida que el valor absoluto de la helicidad aumenta, pero sólo para el transitorio y sin considerar el decaimiento auto-similar que sucede una vez que la turbulencia se encuentra plenamente desarrollada.

Con el fin de estudiar numéricamente el efecto de la helicidad en el decaimiento de la energía en flujos rotantes se generarán dos condiciones iniciales distintas correspondientes a flujos con y sin helicidad, pero con espectros iniciales de energía idénticos. La forma del espectro inicial $E(k) \sim k^{-4}$ es tal que contiene la mayor parte de la energía en las escalas grandes, de manera que la escala integral satura rápidamente y se mantiene aproximadamente constante a lo largo de las simulaciones. Casos más complejos, con escalas integrales dependientes del tiempo, se estudiarán en los capítulos 3 y 4.

Los resultados para flujos rotantes que se presentan en el resto de este capítulo fueron publicados en [17]. El capítulo se desarrolla de la siguiente manera. En primer lugar, se presenta una teoría fenomenológica que permite predecir los distintos decaimientos que se observan en las simulaciones. Luego, se presentan simulaciones de flujos confinados con y sin helicidad, en presencia y ausencia de rotación. Se abarcará el estudio de la evolución de la energía, de los espectros y de la transferencia de energía y de la helicidad entre las distintas escalas del sistema. Luego se analiza el desarrollo de anisotropía en las simulaciones rotantes, utilizando herramientas que permiten cuantificar el grado de anisotropía y dar una idea sobre la distribución de la energía en el espacio Fourier. Finalmente, se muestran visualizaciones del flujo en el espacio real a tiempos largos y se discuten las estructuras observadas en términos de la vorticidad, la velocidad y la helicidad.

3.2. Teoría fenomenológica

En esta sección se proponen argumentos fenomenológicos que permiten predecir las leyes de potencia para el decaimiento de la energía en flujos rotantes con y sin helicidad.

3.2.1. Sistemas sin rotación

Comenzando con el caso sin rotación, en donde la turbulencia es isotrópica, homogénea y estadísticamente estacionaria, la teoría clásica de Kolmogorov [83] predice la conocida ley

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.1)$$

siendo ϵ la tasa de disipación de la energía. A partir de la ecuación de Navier-Stokes se puede mostrar que para un fluido en decaimiento libre se cumple $\epsilon = -dE/dt$. Utilizando la relación entre la energía total y el espectro isotrópico, $E(t) \sim E(k)k$, y asociando al número de onda k la longitud l de forma tal que $k \sim 1/l$, a partir de la ecuación (3.1) se obtiene

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{E^{3/2}}{l} \quad (3.2)$$

donde l es una escala característica del sistema. Si se asocia l al tamaño de los vórtices alrededor de los cuales se concentra la mayor parte de la energía del sistema, entonces para los casos confinados que se analizan en este capítulo $l = l_0 \sim \text{constante}$. Vale aclarar que esta última suposición es válida en tanto y en cuanto el espectro de energía mantenga la mayor parte de la energía en modos cuyo número de onda sea cercano a $k_0 = 1$, es decir, al mínimo número de onda disponible. Proponiendo un decaimiento auto-similar de la forma $E \sim t^A$, la ecuación (3.2) admite como solución la siguiente ley para el decaimiento, [35, 85, 86, 90, 91]

$$E(t) \sim t^{-2}. \quad (3.3)$$

3.2.2. Sistemas rotantes sin helicidad

Como se vió en el capítulo 1, la transferencia espectral de energía en turbulencia rotante se produce únicamente entre aquellas tríadas que cumplen con la condición de resonancia, con la subsiguiente disminución en el flujo de energía total. Además, en la dinámica del sistema intervienen dos escalas de tiempo, una escala lenta τ_l asociada a remolinos turbulentos de radio l , y una escala rápida τ_Ω asociada a las ondas inerciales. En este caso, el impacto de la rotación en la reducción del flujo de energía se puede tener en cuenta escribiendo $\epsilon \sim (u_l^2/\tau_l)(\tau_\Omega/\tau_l)$ donde (τ_Ω/τ_l) es un factor adimensional que atenúa la transferencia de energía debido a la presencia de ondas (ver [16, 99, 100]). Asociando $\tau_l = l/U$ y usando que $E(t) \sim E(k)k$ se puede escribir

$$\epsilon \sim \tau_\Omega E^2(k) k^4. \quad (3.4)$$

Asociando la escala de tiempo rápida a la frecuencia de las ondas inerciales se puede escribir $\tau_\Omega = 1/\Omega$, con lo cual se obtiene el espectro de energía para turbulencia rotante

$$E(k) \sim \epsilon^{1/2} \Omega^{1/2} k^{-2}. \quad (3.5)$$

Este tipo de análisis fenomenológico fue introducido en [101] al incluir la influencia de las ondas de Alfvén en el espectro de turbulencia magnetohidrodinámica, y fue aplicado a turbulencia rotante en [100, 102].

El espectro (3.5) se observó en simulaciones forzadas con 512^3 puntos de grilla [99, 103] y también fue obtenido a partir de teorías de clausura de dos puntos [104]. En [100] se encontró en simulaciones numéricas un espectro $E(k) \sim k^\alpha$ con α tomando valores entre $-5/3$ para el caso no rotante hasta -2 para rotación fuerte.

Usando $E(t) \sim E(k)k$ y reemplazando en $dE/dt = -\epsilon$ se obtiene

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{E^2}{\Omega l^2}; \quad (3.6)$$

asumiendo nuevamente un decaimiento auto-similar con l constante, la solución resulta

$$E(t) \sim t^{-1}. \quad (3.7)$$

Este decaimiento es consistente con experimentos y con simulaciones con menor resolución espacial que las que se presentarán en este trabajo [89, 104, 105].

3.2.3. Sistemas rotantes con helicidad

Los sistemas rotantes con helicidad no nula difieren de los últimos dos casos estudiados. En este caso existe una cascada directa de helicidad que es dominante respecto a la de energía. Se pueden utilizar argumentos similares a los de flujos rotantes no helicoidales pero teniendo ahora en cuenta el impacto de las ondas inerciales en el flujo de helicidad. Dicho flujo se puede escribir como $\delta \sim (h_l/\tau_l)(\tau_\Omega/\tau_l)$ donde h_l es la helicidad presente en la escala l , y donde nuevamente τ_l y τ_Ω son tiempos típicos asociados respectivamente a la escala l y a la rotación. También en este caso, el factor τ_Ω/τ_l se asocia a la disminución de la transferencia hacia escalas chicas debido a que en las interacciones entre ondas sólo sobreviven aquellas que son resonantes.

Cuadro 3.1: Parámetros utilizados en las simulaciones. ν es la viscosidad cinemática, Ω es la frecuencia de rotación, Re , Ro , Ro^w y E_k son respectivamente los números de Reynolds, Rossby, de Rossby en la micro escala y de Ekman. h y h^* son la helicidad relativa inicial y al tiempo de disipación máxima t^* . Los valores de Re , Ro , Ro^w y E_k están calculados para $t = t^*$.

Sim.	ν	Ω	Re	Ro	Ro^w	E_k	h	h^*	t^*
A1	$1,5 \times 10^{-3}$	0	450	∞	∞	∞	0	0	1,06
A2	$1,5 \times 10^{-3}$	0	600	∞	∞	∞	0,95	0,34	2,25
A3	$1,5 \times 10^{-3}$	4	550	0,12	1,28	$2,2 \times 10^{-4}$	0	0	0,88
A4	$1,5 \times 10^{-3}$	4	830	0,08	0,80	$1,0 \times 10^{-4}$	0,95	0,65	1,70
B1	$7,0 \times 10^{-4}$	4	1100	0,12	1,82	$1,1 \times 10^{-4}$	0	0	1,26
B2	$7,0 \times 10^{-4}$	4	1750	0,08	1,15	$4,7 \times 10^{-5}$	0,95	0,44	2,28

Tomando $\tau_\Omega \sim 1/\Omega$, escribiendo $\delta \sim h_l u_l^2 / (l^2 \Omega k^2 l^2)$ y teniendo en cuenta que $E(k) = u_l^2/k$ y $H(k) = h_l/k$ se puede ver que $\Omega \delta / k^4 \sim H(k)E(k)$. Asumiendo que $E(k) \sim \epsilon^\alpha k^{-n}$, resulta $H(k) \sim \Omega \delta \epsilon^\alpha k^{n-4}$. Para el caso de helicidad máxima $H(k) = E(k)k$, luego $-n+1 = n-4$, es decir, $n = 5/2$ [103]. Análisis dimensional en $E(k) \sim \epsilon^\alpha \Omega^\beta k^{-5/2}$ da como resultado

$$E(k) \sim \epsilon^{1/4} \Omega^{5/4} k^{-5/2}, \quad (3.8)$$

y usando $-dE/dt = \epsilon$ resulta

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{E^4}{\Omega^5 l^6}. \quad (3.9)$$

Para l constante se obtiene una ley de decaimiento para el caso de máxima helicidad dada por

$$E(t) \sim t^{-1/3}. \quad (3.10)$$

Para casos intermedios en los que la helicidad no es máxima, se espera obtener decaimientos con exponentes entre -1 y $-1/3$. Esta ley de decaimiento es un resultado de esta tesis y se presentó por primera vez en [17].

3.3. Resultados numéricos

Las simulaciones numéricas presentadas en esta sección son soluciones de la ecuación de Navier-Stokes en un marco de referencia rotante para un fluido incompresible, y fueron publicadas en [17]. Sus parámetros se encuentran resumidos en la tabla 3.1.

3.3.1. Condiciones iniciales

Se realizaron dos series de simulaciones directas con resoluciones de 256^3 (serie A) y 512^3 (serie B) puntos de grilla utilizando un método pseudo-espectral según lo explicado en el capítulo 2. Las simulaciones dentro de cada grupo (A ó B) difieren en la intensidad de la rotación (el número de Rossby), y en la helicidad inicial. Para controlar la cantidad inicial de helicidad se usaron dos condiciones iniciales distintas: una superposición de flujos de *Taylor-Green* (TG) [71] y una superposición de flujos *Arn'old-Beltrami-Childress* (ABC) [72].

Todas las simulaciones se inicializaron utilizando una superposición de dichos flujos entre números de onda $4 \leq |\mathbf{k}| \leq 14$ siguiendo un espectro $E(k) \sim k^{-4}$. De esta forma, la mayor parte de la energía se encuentra contenida en el número de onda $k_0 = 4$, muy próximo al menor número de onda disponible $k_{min} = 1$, asegurando así que la escala integral sature rápidamente y tenga sentido aplicar la fenomenología descrita con $l \approx l_0$ constante. Los tiempos en las figuras están expresados en unidades del tiempo característico $T = l/U$ a $t = 0$, siendo $l \approx 2\pi/k_0 = 2\pi/4$ y $U \approx 1$ respectivamente la escala y la velocidad r.m.s. inicial. Las simulaciones fueron extendidas por 40 unidades de tiempo y la escala disipativa estuvo bien resuelta, manteniéndose todo el tiempo una relación $k_\eta/k_{max} < 0,85$.

3.3.2. Decaimiento de la Turbulencia

La figura 3.5 muestra la evolución temporal de la energía para las simulaciones sin rotación A1 y A2, y para las simulaciones con rotación B1 y B2 junto al decaimiento de la enstrofia para A1 y A2 en el recuadro. Cada simulación desarrolla un decaimiento auto-similar a partir del tiempo t^* , correspondiente a sus respectivos máximos de enstrofia. Las simulaciones con rotación A3 y A4 no se muestran por razones de claridad, pero evolucionan esencialmente con el mismo decaimiento auto-similar que B1 y B2, aunque durante un lapso de tiempo menor, debido a la menor resolución espacial y a la subsiguiente disminución del número de Reynolds. La energía en las simulaciones A1 y A2 (con $\Omega = 0$, respectivamente sin y con helicidad) decae según $\sim t^{-2}$, consistente con la fenomenología descrita más arriba para flujos isotropos y homogéneos. La presencia de helicidad en A2 no afecta la ley de decaimiento, corroborando que la helicidad no modifica la dependencia del espectro de energía con el número de onda ni su decaimiento temporal [8]. Sin embargo, a A2 le lleva más tiempo alcanzar la etapa de decaimiento auto-similar. Este comportamiento fue reportado antes en [9, 15], asociándose a la disminución en la tasa de generación de escalas pequeñas en flujos heli-

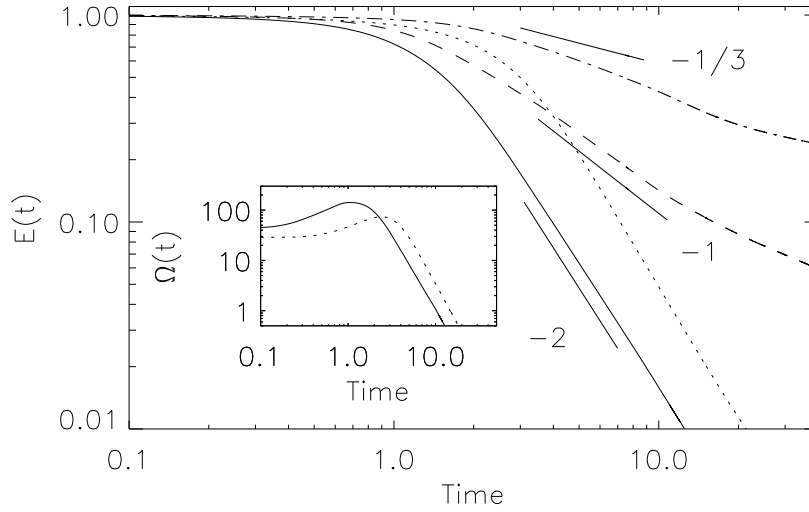


Figura 3.5: Evolución de la energía para las simulaciones A1 (trazo continuo), A2 (puntos), B1 (guiones) y B2 (puntos-guiones). A1 y A2 no poseen rotación ($\Omega = 0$) y decaen con la misma tasa independientemente de poseer o no helicidad. En las simulaciones con rotación B1 y B2, la helicidad disminuye la tasa de decaimiento de la energía. Recuadro: evolución de la enstrofia para las simulaciones A1 (trazo continuo) y A2 (puntos). La presencia de helicidad en A2 retrasa la generación de escalas pequeñas como puede apreciarse en el retraso del máximo de enstrofia de A2 respecto a A1. Sin embargo, el decaimiento auto-similar posterior no se ve modificado.

coidales. También puede verificarse en el recuadro de la figura 3.5 en donde se aprecia la demora de A2 en alcanzar su máximo de enstrofia respecto a A1.

En las simulaciones con rotación (A3, A4, B1 y B2) también se observa un transitorio hasta un tiempo t^* mientras la turbulencia se desarrolla, luego del cual comienza un decaimiento auto-similar con diferentes leyes de potencia. La energía en las simulaciones no helicoidales A3 y B1 decae según $\sim t^{-1}$, mientras que en las simulaciones con helicidad A4 y B2 decae más lentamente, con una ley cercana a $t^{-1/3}$. Ambos decaimientos corroboran lo predicho por las ecuaciones (3.7) y (3.10) respectivamente. Si bien el decaimiento de A4 y B2 es ligeramente más rápido que $t^{-1/3}$, cabe recordar que dicha ley se obtuvo suponiendo un fluido con máxima helicidad, propiedad imposible de mantener en la evolución temporal de un flujo turbulento. De todas maneras, el comportamiento que se pretende resaltar es que en sistemas rotantes la

presencia de helicidad afecta sensiblemente al decaimiento de la energía, disminuyendo su tasa de decaimiento a medida que la helicidad neta aumenta. Se realizó también una simulación con una cantidad intermedia de helicidad relativa ($h \approx 0,4$) en la que la energía evolucionó con una ley de potencias intermedia entre los casos B1 y B2. Asimismo, una simulación idéntica a B2 pero con helicidad relativa inicial $h = -1$ mostró el mismo decaimiento que la simulación B2.

3.3.3. Espectros y flujos

El análisis de espectros y flujos permite comprender con mayor detalle cómo se distribuye la energía entre las distintas escalas. Los espectros también presentan diferencias según el caso. Las simulaciones sin rotación son consistentes con la teoría K41, mostrando ambas simulaciones (A1 y A2) un espectro $E(k) \sim k^{-5/3}$ que mantiene su forma aproximadamente a partir de $t = t^*$ y durante el tiempo que dura el decaimiento auto-similar. Las simulaciones rotantes, por el contrario, muestran leyes diferentes dependiendo del contenido de helicidad relativa. A partir del tiempo t^* , la simulación B1 desarrolla un espectro de energía compatible con k^{-2} en buen acuerdo con la ecuación (3.5), mientras que en la simulación B2 el espectro es más empinado que k^{-2} , siguiendo en el rango inercial una ley de potencias para la energía cercana a $k^{-2,5}$, como puede verse en la figura 3.6. A su vez, el espectro de helicidad de B2 es menos empinado que el de la energía, cumpliéndose que el producto entre ambos espectros es cercano a k^{-4} , según propone [103] y la fenomenología descrita anteriormente. El espectro de helicidad relativa en B2 sigue una ley $\sim k^{-0,6}$ (no se muestra), a diferencia de la relación $h \sim k^{-1}$ esperada en turbulencia isótropa y homogénea. Como resultado, B2 posee un exceso de helicidad en las escalas más chicas. En otras palabras, en esas escalas existe un mayor alineamiento entre los vectores \mathbf{u} y $\boldsymbol{\omega}$, disminuyendo la influencia del término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes, con la subsiguiente disminución en la transferencia de energía a escalas chicas. Como consecuencia de esto, la tasa de disipación disminuye y, por ende, disminuye también la tasa de decaimiento de la energía.

En la figura 3.6 (b) se muestra la evolución temporal de $E(k)$ para la simulación B2 entre $t = 0,6$ y $t = 40$ a intervalos de tiempo $\Delta t = 0,6$. A medida que el tiempo transcurre, la energía se acumula gradualmente en las escalas grandes mientras que el espectro se vuelve más empinado en las escalas chicas. Si bien se muestra sólo el caso B2, esta acumulación es propia de sistemas rotantes y fue observada en todas las simulaciones de este tipo. La acumulación está asociada al desarrollo de una cascada inversa de energía en el caso forzado, y las herramientas teóricas para explicarla serán discutidas

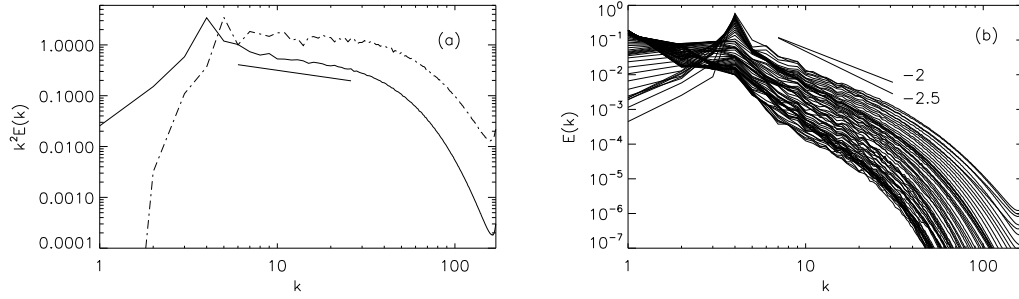


Figura 3.6: (a) Espectros de energía $E(k)$ compensados por k^2 para las simulaciones B1 (puntos y guiones) y B2 (trazo continuo). El rango horizontal en B1 indica una ley de potencias $\sim k^{-2}$. Se muestra también en línea sólida una pendiente $\sim k^{-2,5}$ (correspondiente a una pendiente $k^{-0,5}$ en la figura compensada). La simulación B2 es más cercana a este espectro. (b) Evolución de $E(k)$ para la simulación B2 entre $t = 0,6$ y $t = 40$ a intervalos $\Delta t = 0,6$. Notar la acumulación gradual de energía en las escalas grandes. Las pendientes 2 y 2,5 se muestran como referencia.

en el capítulo 6 en el marco de la aproximación quasi-geostrófica.

La disipación afecta en mayor medida a las escalas pequeñas y por lo tanto el cambio en la forma del espectro trae aparejado una disminución en la tasa de decaimiento de la energía a partir de $t \approx 20$, como se muestra en la Figura 3.5 para ambas simulaciones rotantes B1 y B2.

La acumulación de energía en escalas grandes en las simulaciones rotantes, junto con el desarrollo de anisotropía espectral, resulta también en la formación de estructuras con forma de columna en el espacio real. Este proceso es similar al observado en turbulencia en dos dimensiones, cuando vórtices en escalas grandes coalescen a tiempos largos dando lugar a un espectro de energía más empinado y a un cambio en el decaimiento auto-similar [106].

Los flujos de energía y de helicidad permiten estudiar la transferencia de estas magnitudes entre las distintas escalas del sistema e identificar en forma más precisa la presencia de transferencia directa o inversa, en intervalos en los cuales los flujos son aproximadamente constantes. Si bien las simulaciones sin rotación A1 y A2 desarrollan flujos directos (positivos) de energía hacia las escalas más chicas de acuerdo a la teoría clásica de Kolmogorov (no se muestra), los casos rotantes presentan mayor complejidad. La figura 3.7(a) muestra los flujos de energía $\Pi(k)$ para la simulación B1 a tiempos $t \approx 2$ y $t \approx 11$. En la figura 3.7(b) se muestran los flujos de energía $\Pi(k)$ y de helicidad $\Sigma(k)$ para la simulación B2 a tiempos $t \approx 5$ y $t \approx 13$. Para facilitar la comparación entre los flujos de energía y helicidad, el flujo de helicidad fue

normalizado por el número de onda $k_0 = 4$ en el cual se concentra inicialmente la mayor cantidad de energía. La simulación B1, rotante pero sin helicidad, desarrolla una cascada directa y cierta transferencia inversa de energía (estrictamente hablando, para tener una cascada inversa cuasi-estacionaria, es necesario tener un forzado externo, ver por ejemplo [141]). A tiempos cortos, en $t \approx 2$, el flujo de energía es positivo y constante denotando transferencia directa. Más tarde, en $t \approx 11$, predomina un flujo negativo indicando una transferencia inversa.

Para la simulación B2 se muestra en la figura 3.7(b) el instante en el cual se alcanza el máximo flujo de energía y helicidad hacia escalas chicas ($t \approx 5$), evidenciando inicialmente la co-existencia de transferencia directa de energía y de helicidad como se observa también en casos isótropos o con muy baja frecuencia de rotación [103]. Más tarde, a $t \approx 13$ puede identificarse una transferencia inversa de energía hacia escalas grandes (flujo negativo) y, simultáneamente, la coexistencia de transferencia directa de energía y helicidad, aunque el flujo positivo de helicidad predomina sobre el de energía en todo instante. En [103] se muestra que dicho predominio en las escalas chicas aumenta a medida que disminuye Ro .

En ningún momento en estas simulaciones se observa transferencia inversa de helicidad. Esto sucede porque la transferencia de helicidad hacia escalas grandes está limitada por la desigualdad $|H(k)| \leq kE(k)$. El flujo de helicidad hacia $k = 0$ debe ser nulo a menos que $E(k) \rightarrow \infty$ para $k \rightarrow 0$. El flujo de parte de la energía hacia escalas grandes limita la cantidad de energía que puede tener un flujo directo, logrando así que el flujo directo de helicidad sea dominante en dicho rango.

3.3.4. Análisis de la anisotropía

Los flujos rotantes son intrínsecamente anisótropos, al poseer una dirección privilegiada paralela al vector de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. Más allá de las diferentes simetrías en las condiciones iniciales TG y ABC, es de esperar que la presencia de rotación redistribuya la energía de manera anisótropa a medida que el sistema evoluciona en el tiempo. Con el fin de analizar la evolución de dicha distribución en las escalas grandes, se estudió el desarrollo de anisotropía analizando la evolución del cociente entre la energía contenida en el plano $k_{\parallel} = 0$ del espacio Fourier (E_{2D}) y la energía total del sistema E para las simulaciones B1 y B2 (ver la figura 3.8(a)). Notar que E_{2D} corresponde a la energía en modos bidimensionales o modos lentos (ya que al satisfacer trivialmente la relación de dispersión para ondas inerciales, no tienen modulación rápida). Independientemente de la diferencia en los valores iniciales debido a las distintas condiciones iniciales, ambos casos evolucionan aumentando la

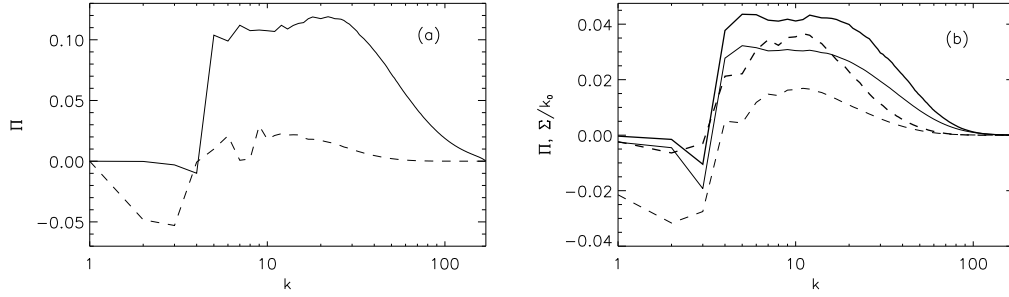


Figura 3.7: (a) Flujo de energía $\Pi(k)$ para la simulación B1 a tiempos $t \approx 2$ (trazo continuo) y $t \approx 11$ (guiones). (b) Flujos de energía $\Pi(k)$ (trazo fino) y de helicidad (trazo grueso) $\Sigma(k)$ para la simulación B2 a tiempos $t \approx 5$ (trazo continuo) y $t \approx 13$ (guiones). $\Sigma(k)$ está normalizado por el número de onda $k_0 = 4$ donde se encuentra inicialmente la mayoría de la energía. Un flujo positivo indica una cascada directa, mientras que un flujo negativo indica una transferencia inversa.

proporción de la energía en los modos lentos respecto a la energía total, alcanzando asintóticamente valores cercanos a la unidad para tiempos largos. Esto muestra que efectivamente ambos sistemas evolucionan hacia un estado anisótropo, transfiriendo energía hacia los modos bidimensionales [34, 38, 47].

En la figura 3.8(b) se muestra también la evolución del ángulo de Shebalin para las mismas simulaciones [107]. Dicha magnitud es una medida de la anisotropía presente en las escalas chicas y se define según

$$\text{tg}^2 \theta = 2 \frac{\sum_{k=1}^{k_{\max}} k_{\perp}^2 E(k_{\perp})}{\sum_{k=1}^{k_{\max}} k_{\parallel}^2 E(k_{\parallel})}. \quad (3.11)$$

Se puede entender como el cociente entre la enstrofía total y la contenida en todo el espacio Fourier a excepción del plano $k_{\parallel} = 0$. Notar que la presencia del coeficiente k^2 privilegia la contribución de las escalas chicas sobre las grandes. Dicho ángulo toma valores crecientes en ambas simulaciones, si bien en la simulación B2 satura en $t \approx 20$ manteniendo luego un valor aproximadamente constante. Su crecimiento indica una mayor proporción de energía en modos con $k_{\parallel} = 0$. En los dos casos resulta $\text{tg}^2 \theta \gg 2$, valor que corresponde al observado en flujos anisótropos.

El aumento de las magnitudes E_{2D}/E y $\text{tg}^2 \theta$ es clara evidencia de la evolución del sistema hacia un estado anisótropo en el cual la mayoría de la energía se concentra en el plano $k_{\parallel} = 0$, mostrando una tendencia del flujo hacia la bidimensionalidad.

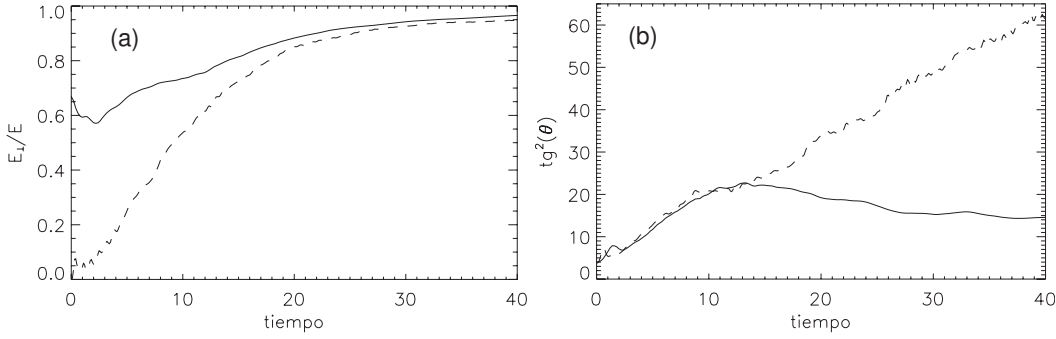


Figura 3.8: (a) Cociente entre la energía contenida en los modos con $k_{\parallel} = 0$ y la energía total en las simulaciones B1 (guiones) y B2 (trazo continuo). A pesar de las diferencias en las condiciones iniciales, ambas curvas crecen monótonamente hacia la unidad, evidenciando una transferencia de energía a modos lentos. (b) Evolución temporal del ángulo de Shebalin para las mismas simulaciones.

Con el fin de estudiar cualitativamente la geometría del campo de velocidades, se estudiaron las simulaciones rotantes A3 y A4 en el espacio real, visualizando la vorticidad a distintos tiempos. Se confirmó el aumento de la anisotropía en el tiempo, formándose estructuras elongadas en la dirección paralela al eje de rotación con un alto contenido de vorticidad, velocidad vertical v_z y helicidad. A tiempos largos, el flujo consiste básicamente en dos grandes columnas de vorticidad, correspondientes a un estado en el que prácticamente toda la energía se encuentra en el menor número de onda disponible $k = 1$.

La estructura interna de estas columnas varía apreciablemente según el flujo sea helicoidal o no. En la figura 3.9 se muestran estas estructuras en detalle, presentando la intensidad de la vorticidad vertical para una sola columna en cada caso. También se superponen algunas líneas del campo de velocidad y se incluyen cortes de v_z y de la helicidad en planos perpendiculares a Ω . En ambos casos las líneas se enroscan alrededor de las columnas mientras que los cortes delatan una alta concentración de velocidad vertical v_z y helicidad relativa h en el interior de las mismas. Si bien estas características son comunes a ambas simulaciones, existe una importante diferencia en su estructura interna. En el caso no helicoidal, la estructura posee vorticidad vertical positiva a lo largo de toda la columna, pero presenta zonas con $v_z < 0$ y zonas con $v_z > 0$, existiendo como resultado alternancia entre zonas con $h > 0$ y $h < 0$. Así, el valor neto de la helicidad en la estructura es nulo y también es nulo el valor total de la helicidad en todo el dominio. En el caso helicoidal, en cambio, tanto ω_z como v_z mantienen su signo a lo largo

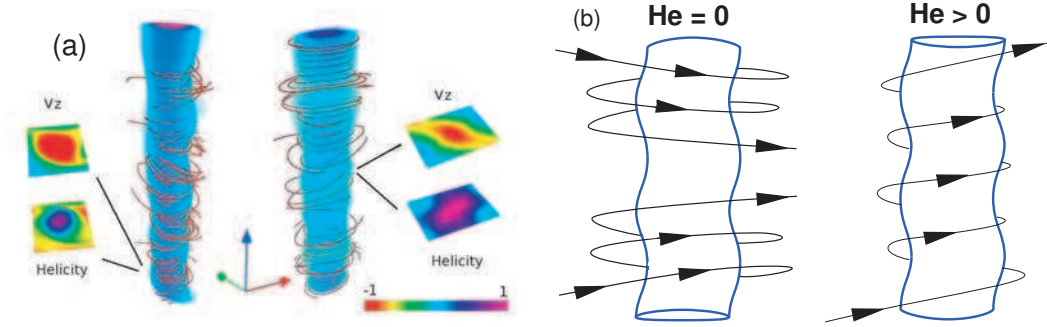


Figura 3.9: (a) Visualización de la componente vertical de la vorticidad ω_z a $t \approx 45$ con líneas de campo de velocidad para las simulaciones A3 (izquierda) y A4 (derecha). Se incluyen cortes de v_z y h en planos perpendiculares a Ω . La paleta de colores representa la amplitud normalizada por el valor máximo de cada magnitud. El perfil ondulante de las columnas denota la presencia de ondas en la dirección vertical. (b) Ilustración de las líneas de corriente donde se esquematiza la cancelación de la helicidad en las columnas de la simulación A3 (izquierda) y el contenido neto de helicidad en las columnas de la simulación A4 (derecha).

de la columna, resultando en una estructura con helicidad total distinta de cero. En este último caso, las visualizaciones de las simulaciones a tiempos largos muestran columnas ascendentes y descendentes con $\omega_z > 0$ y $v_z > 0$ ó $\omega_z < 0$ y $v_z < 0$ a lo largo de toda la columna. Todas las estructuras tienen helicidad positiva, y el dominio está formado por columnas con un alto grado de helicidad distribuidas entre zonas de muy baja helicidad relativa.

3.4. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se estudió el decaimiento de la energía para flujos confinados con y sin helicidad, en presencia y ausencia de rotación. La cantidad neta de helicidad fue controlada usando condiciones iniciales del tipo TG ó ABC. Se estudió el decaimiento de la energía así como la transferencia de energía y helicidad entre las distintas escalas a partir del estudio de espectros y flujos. Finalmente, se estudió el desarrollo de anisotropía en los flujos rotantes y se visualizó el campo de vorticidad en el espacio real en los casos rotantes con y sin helicidad.

En ausencia de rotación, se corroboraron leyes de escala para el decaimiento y el espectro de energía bien conocidas para flujos isótropos y homogéneos. La presencia de helicidad en estos flujos no afecta dichas leyes, siendo su úni-

co efecto el retraso en el desarrollo de escalas pequeñas (evidenciado por la demora en alcanzar el valor máximo de enstrofia) y el subsiguiente retraso en el comienzo del decaimiento auto-similar.

En las simulaciones rotantes, el decaimiento de la energía es en general más lento y su espectro más empujado. La presencia de rotación disminuye la tasa de transferencia de energía hacia escalas chicas, disminuyendo sensiblemente la tasa de decaimiento. La presencia de helicidad en flujos rotantes disminuye aún más dicha transferencia y por ende la tasa de decaimiento resulta aún menor. El exceso de helicidad en las escalas chicas, evidenciado por un espectro de helicidad menos empujado que el de la energía, disminuye el efecto del término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes, explicando la disminución en la transferencia de energía hacia escalas chicas y la subsiguiente disminución en la tasa de disipación y de decaimiento. Si bien en flujos no rotantes la helicidad no desempeña un rol importante, las simulaciones muestran que su efecto en la transferencia y decaimiento de la energía es de fundamental importancia en presencia de rotación. Este resultado novedoso, junto con el modelo fenomenológico que explica correctamente la tasa de decaimiento de la energía, constituyen los principales resultados de este capítulo, y fueron publicados en [17].

El estudio de la anisotropía mostró que en los casos rotantes la energía es transferida hacia el plano $k_{\parallel} = 0$, perdiéndose la isotropía espacial a medida que las simulaciones evolucionan en el tiempo. La transferencia anisótropa de energía durante el decaimiento de turbulencia rotante fue recientemente verificada también en experimentos [113]. El estudio de los flujos en el espacio real develó una evolución hacia estructuras con forma de columna a medida que la energía se concentra en modos bidimensionales. Dichas estructuras interactúan entre sí, y se mueven a lo largo del dominio de las simulaciones hasta que a tiempos largos solamente sobreviven dos columnas. La estructura interna de las mismas resulta muy distinta según exista o no helicidad total en el fluido. En los casos no helicoidales, las columnas poseen zonas con helicidad positiva y negativa alternada, resultando globalmente no helicoidales. En cambio, para flujos con una cantidad neta de helicidad, dichas columnas mantienen correlación entre los signos de v_z y ω_z , resultando altamente helicoidales y aportando un valor no nulo a la helicidad total.

Tanto el efecto de la helicidad en el decaimiento y la transferencia de la energía, así como la teoría fenomenológica desarrollada para explicar dichos decaimientos, dieron lugar a un estudio más profundo de la helicidad y la anisotropía en flujos rotantes. En los capítulos siguientes se estudian flujos más complejos, donde la escala integral varía con el tiempo y en donde se necesita profundizar el estudio de la distribución anisótropa de la energía para lograr entender y predecir la variedad de leyes de decaimiento que se

observan.

Capítulo 4

Decaimiento de turbulencia k^4

4.1. Introducción

Como se mencionó en el capítulo anterior, no parece existir una ley universal para el decaimiento de la energía en flujos turbulentos para número de Reynolds infinito. El decaimiento dependerá, en particular, de la forma del espectro inicial y de propiedades estadísticas de las condiciones iniciales [1].

En el caso de turbulencia isótropa y homogénea con alto número de Reynolds, existen dos casos canónicos y bien conocidos en relación a la forma posible del espectro en las escalas grandes. Estos casos corresponden al denominado espectro de Saffman, para el cual $E(k \rightarrow 0) \sim Lk^2$ [84, 109], y al espectro de Batchelor, donde $E(k \rightarrow 0) \sim Ik^4$ [45, 172]. Cuál de estos espectros se observa depende de la forma del espectro inicial. Las magnitudes integrales I y L se conservan aproximadamente en turbulencia isótropa en decaimiento libre, y han sido utilizadas para derivar leyes de decaimiento para la energía total (ver por ejemplo [77, 84, 112]). Su cuasi-conservación puede asociarse a la existencia de soluciones auto-preservadas de la ecuación de von Kármán-Howarth o también a la conservación del momento lineal y angular. La constancia de L es una consecuencia de la conservación del momento lineal [84] mientras que la constancia de I es consecuencia de la conservación del momento angular [87, 175]. Como resultado, condiciones iniciales con espectros que no sean de la forma $E(k) \sim k^2$ o $\sim k^4$ decaen en muchos casos a estas dos soluciones (existen otros casos que pueden aparecer si el sistema viola las hipótesis necesarias para que valga la ecuación de von Kármán-Howarth. Ver por ejemplo [117])

Al incluir rotación, la isotropía se rompe y aparece una dirección privilegiada en la dirección del eje de rotación. Esta clase de flujos desarrolla anisotropías que han mostrado impactar fuertemente en la tasa de decaimien-

to de la energía, dando lugar a distintas leyes de decaimiento. Los desarrollos teóricos basados en argumentos isótropos dejan de ser válidos y por lo tanto deben ser extendidos al caso axisimétrico para incluir el efecto de la rotación. Las integrales I y L se vuelven tensores cuyos elementos diagonales podrían considerarse reemplazos a I y L como magnitudes conservadas. Existen algunas extensiones previas de estos argumentos para casos anisótropos, como ser el caso de flujos conductores en un campo magnético y de flujos rotantes y estratificados [87, 88, 115].

El desarrollo de anisotropía en flujos rotantes ha sido reportado en una gran variedad de experimentos y simulaciones. Como ya se mencionó, los experimentos de turbulencia libre rotante muestran una reducción en la transferencia de energía, evidenciada por un decrecimiento del decaimiento de la misma [118]. También se ha reportado un flujo de energía anisótropo con tendencia hacia la bidimensionalización [113], evidenciada asimismo por un crecimiento en las longitudes de correlación a lo largo del eje de rotación [108, 176]. Respecto al decaimiento de la energía, resultados experimentales para turbulencia de grilla en ausencia de rotación con escalas integrales más chicas que el tamaño del recipiente [89, 114] muestran un decaimiento $E \sim t^{-1,1}$ compatible con resultados teóricos $E \sim t^{-6/5}$ derivados a partir de un espectro inicial en las escalas grandes del tipo Saffman ($\sim k^2$). En [124] se reporta una transición desde un decaimiento $E \sim t^{-6/5}$ hacia uno cercano a $E \sim t^{-3/5}$ una vez que la rotación comienza a afectar la dinámica del flujo (ver la figura 4.1), así como una asimetría en la actividad ciclónica-anticiclónica evidenciada por un valor positivo de los momentos de asimetría de la vorticidad.

Las simulaciones numéricas también muestran una tasa más baja en el decaimiento de la energía para distintas condiciones iniciales [17, 92, 99, 118, 174], una tendencia hacia la bidimensionalización [56, 99], y una mayor actividad ciclónica que anticiclónica [179]. En [56] se introduce una distinción entre la energía contenida en modos con $k_{\parallel} = 0$ (E_{2D}) y modos con $k_{\parallel} \neq 0$ (E_{3D}) y se realiza un estudio sobre la transferencia de energía entre modos 2D y 3D para un amplio rango de números de Rossby, encontrándose distintos comportamientos para valores de Ro chicos, intermedios y grandes. Se observó una transferencia de energía máxima entre estos dos tipos de modos para valores intermedios de Ro ($\approx 0,1$). En dicho rango se reportó un crecimiento inicial de E_{2D} acompañado por un decaimiento monótono de E_{3D} . En [177] también se observaron comportamientos distintos en la evolución temporal de E_{2D} y E_{3D} , pero los autores sólo consideraron el decaimiento de la energía total $E = E_{2D} + E_{3D}$, proponiendo un decaimiento dependiente de la intensidad de la rotación, $E \sim t^{-\gamma(\Omega)}$. La dependencia de γ con la frecuencia de rotación se derivó utilizando argumentos fenomenológicos, obteniéndose $\gamma \sim \Omega^{-1}$.

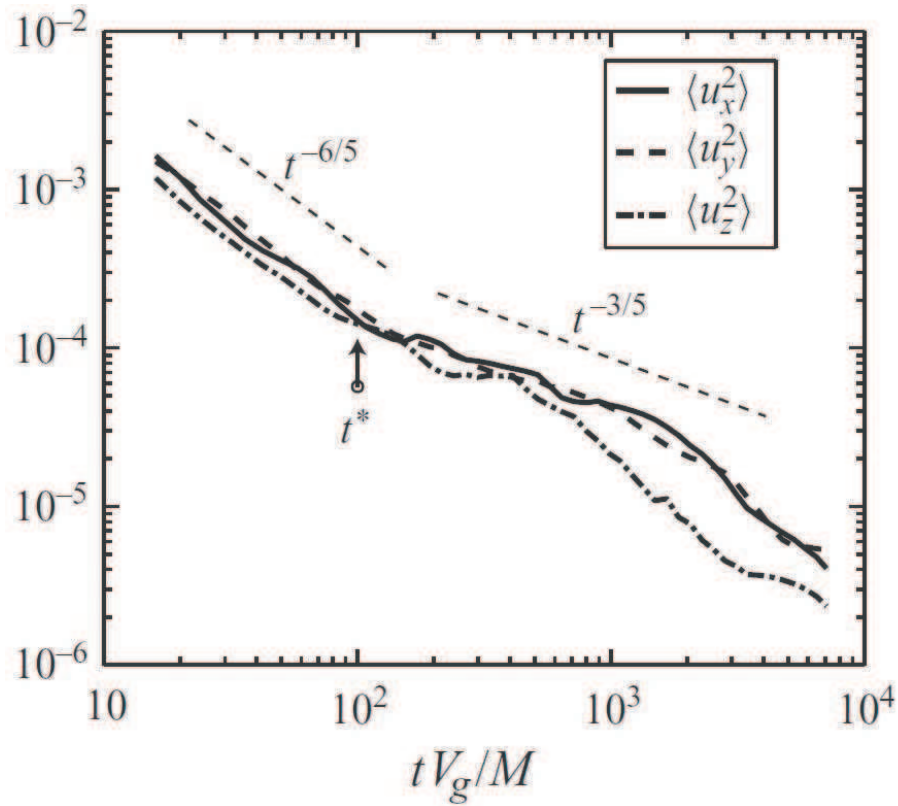


Figura 4.1: Evolución temporal de la varianza de las tres componentes de la velocidad en un experimento de decaimiento de turbulencia de grilla rotante con $\Omega = 0,05 \text{ rad s}^{-1}$. t^* indica el tiempo a partir del cual la rotación comienza a afectar visiblemente el decaimiento, es decir, la transición entre un decaimiento isótropo $\sim t^{-6/5}$ y un decaimiento afectado por la rotación $\sim t^{-3/5}$ (tomado de [124]).

La variedad de soluciones obtenidas en simulaciones y experimentos, junto a los problemas en los argumentos teóricos basados en la conservación de las magnitudes isotropas I y L , motivan el estudio paramétrico de las condiciones iniciales en simulaciones numéricas de turbulencia libre rotante que se presenta en este capítulo y en el siguiente. En el capítulo anterior se estudió el caso de flujos confinados, con y sin rotación, y con y sin helicidad. En este capítulo y en el próximo se estudian flujos cuya escala integral no se encuentra inicialmente saturada por el tamaño del dominio. En particular, en el presente capítulo se estudian casos con un espectro inicial del tipo Batchelor $E(k) \sim k^4$ para flujos con y sin rotación, y con y sin helicidad. Por la forma del espectro queda claro que el tamaño de los vórtices que predominan inicialmente es menor al dominio de la simulación, de forma tal que la escala integral puede crecer al menos durante un cierto tiempo antes de alcanzar el tamaño del dominio. Primeramente se presenta una discusión teórica sobre las magnitudes integrales conservadas para turbulencia rotante utilizando la ecuación de von Kármán-Howarth con la inclusión del término de Coriolis debido a la rotación, extendiendo al caso $E(k) \sim k^4$ los resultados anisótropos derivados anteriormente en [88] para turbulencia k^2 . La cuasi-conservación de magnitudes integrales para espectros $\sim k^4$ se utiliza luego para derivar leyes de decaimiento de la energía en el caso axisimétrico, estudiando la evolución de la energía E_{2D} y E_{3D} independientemente. Esta fenomenología es corroborada luego mediante simulaciones numéricas. Si bien a partir de los resultados teóricos derivados de la versión anisótropa de la ecuación de von Kármán-Howarth se pueden derivar también leyes de decaimiento para turbulencia $\sim k^2$, este caso se analizará en el próximo capítulo. Las leyes fenomenológicas y los resultados numéricos del presente capítulo fueron publicados en [120, 121, 179].

4.2. Teoría de von Kármán-Howarth

En esta sección se derivan teóricamente dos magnitudes anisótropas que resultan constantes a lo largo del decaimiento de flujos rotantes, y que serán útiles luego para derivar leyes de decaimiento para dichos flujos. La derivación que sigue extiende al caso axisimétrico argumentos isotropos derivados anteriormente en [84, 87, 172].

Una de las cantidades estadísticas usualmente utilizadas para cuantificar el estado de una región turbulenta es la denominada función de correlación de la velocidad, la cual se define según

$$\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (4.1)$$

donde u_i es la componente cartesiana i -ésima de la velocidad, y el valor medio denotado por las llaves puede ser sobre un ensamble estadístico, espacial o temporal (en la práctica, en simulaciones numéricas se suele usar el promedio espacial). Cuando el promedio es estadístico, la función de correlación es una función de t , \mathbf{x} , y \mathbf{r} . Si dicha función no depende del tiempo se dice que la turbulencia es estadísticamente estacionaria. Si la función no depende de \mathbf{x} , se habla de turbulencia homogénea, y si sólo depende de $|\mathbf{r}|$, es decir, no depende de la dirección, se dice que la turbulencia es isotrópica.

Esta función indica el grado de correlación entre las componentes de velocidad en dos puntos del espacio separados por el incremento \mathbf{r} . Si las fluctuaciones de las componentes de la velocidad $u_i(\mathbf{x})$ y $u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ son estadísticamente independientes, entonces $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = 0$. Este caso se espera cuando $r = |\mathbf{r}|$ es mucho más grande que el tamaño típico de los vórtices más grandes ($r \gg l$).

La ecuación que rige la evolución de la función de correlación recibe el nombre de ecuación de von Kármán-Howarth y es una de las ecuaciones más importantes para estudiar turbulencia isotrópica y homogénea. En esta sección se deriva una ecuación de von Kármán-Howarth más general a partir de la ecuación de Navier-Stokes, incluyendo el término de Coriolis que aparece al considerar un sistema de referencia rotante no inercial.

Con este fin, se escribe a la ecuación de Navier-Stokes en notación indicial evaluada en dos puntos \mathbf{x} y $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i - 2\epsilon_{imn}\Omega_m u_n, \quad (4.2)$$

y

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x'_k}(u'_j u'_k) - \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \nu \nabla'^2 u'_j - 2\epsilon_{jmn}\Omega_m u'_n, \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{u}' = \mathbf{u}(\mathbf{x}')$, ∇'^2 es el Laplaciano respecto a las coordenadas primadas \mathbf{x}' y ϵ es el símbolo de Levi-Civita. Multiplicando la ecuación (4.2) por u'_j , la ecuación (4.3) por u_i , sumando y tomando promedios se obtiene la ecuación de evolución en el tiempo para el tensor de correlación a dos puntos de la velocidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i u'_j \rangle = & - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_j u_i u_k \rangle + \frac{\partial}{\partial x'_k} \langle u_i u'_j u'_k \rangle \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle u'_j p \rangle + \frac{\partial}{\partial x'_j} \langle u_i p' \rangle \right) + \nu (\nabla^2 \langle u'_j u_i \rangle + \\ & + \nabla'^2 \langle u_i u'_j \rangle) - 2\Omega_m \langle \epsilon_{imn} u_n u'_j + \epsilon_{jmn} u'_n u_i \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si $\Omega = 0$ y asumiendo que la función de correlación de tercer orden $\langle u_i u_j u'_k \rangle$ decae con r lo suficientemente rápido cuando $r \rightarrow \infty$, se pueden obtener dos magnitudes integrales conservadas a partir de la ecuación (4.4). Notar que por la simetría de la función de correlación, al cambiar r por $-r$, sólo interesarán potencias pares de r . Si la función de correlación de tercer orden tiende a cero más rápido que $\mathcal{O}(r^{-2})$, integrando en todo el dominio se sigue que la cantidad

$$L = \int \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \rangle d\mathbf{r}, \quad (4.5)$$

es constante en el tiempo. Dicha magnitud recibe el nombre de integral de Saffman [84].

Si la función de correlación de tercer orden decae más rápido que $\mathcal{O}(r^{-4})$, multiplicando la ecuación (4.4) por r^2 , se puede obtener otro invariante

$$I = - \int r^2 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \rangle d\mathbf{r}, \quad (4.6)$$

denominado integral de Loitsyansky. El hecho de que esta magnitud conserve un valor constante en el decaimiento de turbulencia isotropa y homogénea ha sido tema de discusión durante los últimos años [35].

Dado que el espectro de energía para valores pequeños de k puede desarrollarse como [35]

$$E(k \rightarrow 0) \sim Lk^2 + Ik^4 + \dots, \quad (4.7)$$

(al igual que en la función de correlación, las potencias impares se anulan porque en el caso tridimensional el espectro es simétrico respecto a cambios de k por $-k$), y considerando el decaimiento con r de la función de correlación en cada caso, se espera que las integrales L ó I mantengan un valor constante durante el decaimiento respectivamente para espectros de energía iniciales de la forma $\sim k^2$ (espectro de Saffman) [84, 109] ó $\sim k^4$ (espectro de Batchelor) [110, 172]. Utilizando estas magnitudes integrales cuasi-conservadas, la ecuación de balance de la energía (3.2) puede utilizarse para predecir el decaimiento de flujos con distintos espectros iniciales.

En el caso anisótropo ($\Omega \neq 0$), asumiendo nuevamente decaimiento rápido de las correlaciones para $r \rightarrow \infty$, únicamente el último término a la derecha de la ecuación (4.4) puede contribuir a la tasa de cambio de integrales de la forma

$$I_{ijmn} = \int r_m r_n \langle u_i u'_j \rangle d\mathbf{r}, \quad (4.8)$$

para el caso de turbulencia de Batchelor, o

$$L_{ij} = \int \langle u_i u'_j \rangle d\mathbf{r} \quad (4.9)$$

para turbulencia de Saffman. Surge entonces el problema de encontrar qué componentes de estos tensores se conservan en el caso rotante. En esta sección se considera el tensor I_{ijmn} bajo las mismas hipótesis sobre el decaimiento de las correlaciones con r que las utilizadas para el caso de Batchelor isótropo. Multiplicando la ecuación (4.4) por $r_m r_n$ e integrando sobre todo el espacio se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r_m r_n \langle u_i u'_j \rangle d\mathbf{r} = -2\Omega_l \int r_m r_n (\epsilon_{ilk} \langle u_k u'_j \rangle + \epsilon_{jlk} \langle u'_k u_i \rangle) d\mathbf{r}. \quad (4.10)$$

Asumiendo sin pérdida de generalidad $\Omega_l = \Omega_z \delta_{lz}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r_m r_n \langle u_i u'_j \rangle d\mathbf{r} = -2\Omega_z \int r_m r_n (\epsilon_{izk} \langle u_k u'_j \rangle + \epsilon_{jzk} \langle u'_k u_i \rangle) d\mathbf{r}. \quad (4.11)$$

Siendo el flujo estadísticamente axisimétrico, interesan los componentes diagonales del tensor. Para $i = j$,

$$\Omega_z \epsilon_{izk} \langle u_k u'_i \rangle = \Omega_z \langle u_x u'_y - u_y u'_x \rangle, \quad (4.12)$$

$$\Omega_z \epsilon_{jzk} \langle u'_k u_j \rangle = \Omega_z \langle u'_x u_y - u'_y u_x \rangle, \quad (4.13)$$

donde todos los términos con $i = z$ o $j = z$ son iguales a cero. Para $m = n$, introduciendo $\mathbf{r}_\perp = (r_x, r_y, 0)$ y $\mathbf{u}_\perp = (u_x, u_y, 0)$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r} = -2 \int r_\perp^2 \Omega_z [\langle u_x u'_y - u_y u'_x \rangle - \langle u_x u'_y - u_y u'_x \rangle] d\mathbf{r}. \quad (4.14)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación se cancelan y, por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int r_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r} = 0, \quad (4.15)$$

ó, equivalentemente,

$$I_\perp = \int r_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r} = \text{cte.} \quad (4.16)$$

Argumentos similares para las componentes xx e yy de la ecuación de von Kármán-Howarth en el caso de turbulencia de Saffman resultan en la conservación de la integral

$$L_{\perp} = \int \langle \mathbf{u}_{\perp} \mathbf{u}'_{\perp} \rangle d\mathbf{r}. \quad (4.17)$$

La conservación de esta última integral fue obtenida anteriormente a partir de las ecuaciones de von Kármán-Howarth por otros autores en [88]. El caso de turbulencia $E(k) \sim k^2$ con $L_{\perp} = \text{cte}$ se analizará numéricamente en el próximo capítulo.

Es importante notar que ambas integrales I_{\perp} y L_{\perp} son similares a las integrales cuasi-conservadas para turbulencia en dos dimensiones [67]. Esto es de esperar si se tiene en cuenta que el espectro de un flujo axisimétrico se puede desarrollar (para los modos $k_{\parallel} = 0$) como

$$E(k_{\perp} \rightarrow 0, k_{\parallel} = 0) \approx L_{\perp} k_{\perp} + I_{\perp} k_{\perp}^3 + \dots \quad (4.18)$$

que es también (a excepción de las unidades de I_{\perp} y L_{\perp}) el desarrollo para un espectro bidimensional. Esta analogía cobra mayor sentido al observar que los flujos rotantes tienden a volverse cuasi-bidimensionales, concentrando la mayoría de la energía en los modos lentos con $k_{\parallel} = 0$.

4.3. Impulso lineal y angular

Resulta interesante notar que la constancia de I_{\perp} y L_{\perp} puede ser asociada respectivamente a la conservación de la componente z del momento angular y lineal de las fluctuaciones turbulentas [87, 88].

Landau fue el primero en mostrar que la conservación de I es una consecuencia directa de la conservación del momento angular [175]. El momento angular total de una nube turbulenta, es decir, de un dado volumen de control V moviéndose solidario al flujo medio, se puede calcular como la suma de los momentos angulares de todos los vórtices presentes en la nube,

$$\mathbf{H} = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV. \quad (4.19)$$

Se puede mostrar que midiendo \mathbf{H} para una nube turbulenta de volumen $V \gg l^3$ con l una longitud característica del flujo (pero con V menor que el volumen total ocupado por el fluido), el valor medio de \mathbf{H}^2 sobre muchas realizaciones del experimento cumple [175]

$$\langle \mathbf{H}^2 \rangle \sim V. \quad (4.20)$$

Este resultado es consecuencia del tamaño finito de V , gracias a lo cual la cancelación del momento angular de los vórtices con orientaciones aleatorias dentro de la nube es imperfecto, existiendo un momento angular residual $\sim V^{1/2}$. Landau mostró que la magnitud $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ es constante en una nube turbulenta evolucionando libremente, y que dicha magnitud es exactamente igual a la integral de Loitsyansky, es decir $I = \langle \mathbf{H}^2 \rangle$.

En esta sección nos interesa el caso axisimétrico y por lo tanto se estudiará el comportamiento de $\langle H_z \rangle$ y su relación con la magnitud I_\perp . Si se mide H_z^2 en una nube turbulenta de volumen $V \gg l^3$ evolucionando libremente en un recinto esférico con $R \gg l$, en cada realización del experimento se obtiene

$$H_z^2 = \int_V (\mathbf{x}_\perp \times \mathbf{u}_\perp) dV \cdot \int_{V'} (\mathbf{x}'_\perp \times \mathbf{u}'_\perp) dV', \quad (4.21)$$

donde $\mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{r}_\perp$ y $\mathbf{u}'_\perp = \mathbf{u}_\perp(\mathbf{x}'_\perp)$. Se puede mostrar fácilmente que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_\perp \times \mathbf{u}_\perp) \cdot (\mathbf{x}'_\perp \times \mathbf{u}'_\perp) = & -(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp)^2 \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp + \mathbf{x}'_\perp{}^2 \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp + \\ & + \mathbf{x}_\perp^2 \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp - \nabla_\perp \cdot (\mathbf{u}_\perp (\mathbf{u}'_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp) (\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp)'). \end{aligned} \quad (4.22)$$

El segundo y tercer término del lado derecho de la ecuación (4.22) son idénticamente nulos ya que para turbulencia de Batchelor se asume que el flujo tiene momento lineal igual a cero, es decir, $\int \mathbf{u} dV = \mathbf{0}$. Por otro lado, el término con la divergencia desaparece al integrar en volumen. Entonces,

$$H_z^2 = - \int \int (\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp)^2 \mathbf{u}_\perp \mathbf{u}'_\perp dV dV'. \quad (4.23)$$

Tomando un promedio de ensamble sobre muchas repeticiones de la medición, se obtiene

$$\langle H_z^2 \rangle = - \int \int \mathbf{r}_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r}_\perp dV \quad (4.24)$$

donde \mathbf{r}_\perp es la coordenada radial en coordenadas cilíndricas. A esta altura, al igual que en la derivación usando las ecuaciones de von Kàrmàn-Howarth, es necesario suponer que las correlaciones decaen lo suficientemente rápido con \mathbf{r}_\perp como para que la presencia de los bordes del recinto no afecte a las correlaciones en el interior de la nube V y el flujo pueda considerarse axisimétrico (homogéneo e isótropo en planos perpendiculares al eje de rotación, y sin variación a lo largo del eje z). De esta manera, la ecuación (4.24) se convierte en

$$\langle H_z^2 \rangle = -V \int \mathbf{r}_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r}_\perp + \mathcal{O}[(l/R)V] \quad (4.25)$$

donde en el primer término se usa que la correlación entre \mathbf{u}_\perp y \mathbf{u}'_\perp no depende de V y el término $\mathcal{O}[(l/R)V]$ es una corrección debida al tamaño finito del recinto de integración. En el límite $R/l \rightarrow \infty$ se obtiene,

$$\frac{\langle H_z^2 \rangle}{V} = \int \mathbf{r}_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r}_\perp = I_\perp. \quad (4.26)$$

Así, si las correlaciones decaen lo suficientemente rápido como para que las condiciones de borde no influyan sobre el momento angular de los vórtices interiores a la nube, I_\perp resulta proporcional a H_z .

La variación del momento angular H_z está dada por el torque T_z ejercido por los contornos del dominio cilíndrico de radio R . Suponiendo que T_z tiene una influencia despreciable sobre la nube turbulenta para $R/l \rightarrow \infty$, se sigue que H_z es invariante en cada realización del experimento y por ende lo es también I_\perp . Resumiendo,

$$\frac{\langle H_z^2 \rangle}{V} = - \int \mathbf{r}_\perp^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r}_\perp = I_\perp = \text{constante}. \quad (4.27)$$

Por otra parte, para turbulencia de Saffman la relación entre el momento lineal y L_\perp fue obtenida por otros autores en [35] resultando

$$\frac{\langle P_z^2 \rangle}{V} = \int \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle d\mathbf{r}_\perp = L_\perp = \text{constante}. \quad (4.28)$$

4.4. Teoría fenomenológica

En esta sección se presentan argumentos fenomenológicos que resultan útiles para contrastar con las diferentes tasas de decaimiento que se observan en las simulaciones numéricas en la próxima sección. Las predicciones suponen un espectro inicial $E(k) \sim k^4$ y utilizan primero argumentos isotropos tal como fueron usados por otros autores [94]. Las predicciones se extienden luego a una variedad más extensa de casos, incluyendo argumentos anisotropos y el estudio independiente de la energía contenida en modos lentos 2D y modos rápidos 3D. Estos argumentos son novedosos y forman parte de los resultados de esta tesis (ver [179]).

4.4.1. Flujos sin rotación

Como se mostró en la sección anterior, a partir de la ecuación de balance para la energía

$$\frac{dE}{dt} \sim \epsilon \quad (4.29)$$

la fenomenología clásica de Kolmogorov resulta en

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{E^{3/2}}{l}, \quad (4.30)$$

donde $E = E(t) \sim kE(k)$ y l es una escala característica del sistema.

Si el fluido no se encuentra confinado, una solución auto-similar de la ecuación (4.30) requiere algún conocimiento sobre el comportamiento en el tiempo de la escala integral l , la cual a su vez se encuentra relacionada con la evolución temporal de $E(k)$ en los números de onda pequeños. En el caso de un espectro inicial $E(k) \sim k^4$, el análisis dimensional aplicado a la cuasi-invariancia de la integral de Loitsyanski I (ver [35, 77]) resulta en $I \sim l^5 E \approx \text{cte}$. A partir de esta expresión se despeja trivialmente el comportamiento para l , el cual puede ser reemplazando en la ecuación (4.30) para obtener

$$E(t) \sim t^{-10/7}, \quad (4.31)$$

donde nuevamente se supuso que la energía $E(t)$ decae en forma autosimilar. Este decaimiento, obtenido originalmente por Kolmogorov en uno de sus trabajos seminales de 1941 [83], se observó en estudios tanto numéricos como experimentales [77, 83, 179]. De dicha ley se desprende trivialmente la ley de crecimiento para l ,

$$l(t) \sim t^{2/7}. \quad (4.32)$$

4.4.2. Argumentos isótropos para flujos rotantes

En el caso rotante se pueden utilizar argumentos similares reemplazando en la ecuación de balance de energía el espectro isótropo usualmente aceptado para turbulencia rotante $E(k) \sim \epsilon^{1/2} \Omega^{1/2} k^{-2}$, y asumiendo que las integrales L o I se conservan aún en presencia de rotación. Aunque esto no es cierto, tal como se sigue del hecho de que no todos los elementos en la diagonal de los tensores I_{ijmn} y L_{ij} se conservan, los argumentos fueron usados en el pasado por diferentes autores (ver [94]). Se obtiene así

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{E^2}{\Omega l^2}. \quad (4.33)$$

Para flujos con $E(k) \sim k^4$ en escalas grandes, asumiendo una evolución constante de I y despejando l en la ecuación (4.33) se obtiene

$$E(t) \sim t^{-5/7}, \quad (4.34)$$

y

$$l(t) \sim t^{1/7}. \quad (4.35)$$

La extensión al caso helicoidal, de interés para esta tesis, puede obtenerse fácilmente. En flujos rotantes helicoidales el espectro de energía en las escalas pequeñas presenta una forma diferente. Según los argumentos esgrimidos en el capítulo anterior el espectro de energía resulta $E(k) \sim \epsilon^{1/4} \Omega^{5/4} k^{-5/2}$ y, reemplazando en la ecuación de balance, se obtiene

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{E^4}{\Omega^5 l^6}. \quad (4.36)$$

En este caso, asumiendo valores constantes de I y reemplazando en la ecuación (4.36) se obtiene [179]

$$E(t) \sim t^{-1/5}, \quad (4.37)$$

y

$$l(t) \sim t^{1/25}. \quad (4.38)$$

4.4.3. Argumentos anisótropos para flujos rotantes

El análisis que resultó en las leyes (4.31), (4.34) y (4.37) se basa en el espectro isótropo de la energía $E(k)$ y en la invariancia de la magnitud isótropa I . Como se mostró en la sección 4.2, en un flujo anisótropo se espera que otras magnitudes sean cuasi-invariantes durante el decaimiento [35, 88, 112, 179]. En el capítulo 2 se mostró que a un espectro isótropo de la forma $E(k) \sim k^4$ le corresponde un espectro perpendicular $E(k_\perp) \sim k_\perp^3$. Por otro lado, en la sección 4.2 se mostró que para un flujo con $E(k_\perp) \sim k_\perp^3$ se espera invarianza de la magnitud I_\perp durante el decaimiento. Esta constancia permitirá derivar nuevas leyes de decaimiento para flujos rotantes, distintas a las encontradas previamente.

En el siguiente análisis se supondrá que los modos 2D y 3D se encuentran débilmente acoplados y se deducirán leyes de decaimiento para la energía en los modos bidimensionales, E_{2D} . La hipótesis de acoplamiento débil puede justificarse, por un lado, gracias al hecho de que el número de Rossby decrece a medida que los flujos evolucionan y la energía del sistema decae. Para números de Rossby lo suficientemente pequeños, por los argumentos teóricos presentados en el capítulo 2, podemos esperar que los modos estén desacoplados. Por otro lado, en el próximo capítulo se corroborará cuantitativamente mediante simulaciones que la transferencia de energía entre modos 2D y 3D

es despreciable luego de un transitorio. De esta forma, se puede escribir una ecuación análoga a la ecuación (4.33) pero para los modos 2D, esto es

$$\frac{dE_{2D}}{dt} \sim \frac{E_{2D}^2}{\Omega l_{\perp}^2} \quad (4.39)$$

La conservación de I_{\perp} conduce en este caso a $I_{\perp} \sim E_{2D} l_{\perp}^4 l_{0\parallel} \approx \text{cte.}$, donde $l_{0\parallel}$ es el tamaño del dominio de simulación en la dirección paralela a Ω (el eje z). Reemplazando esta dependencia en la ecuación (4.39):

$$\frac{dE_{2D}}{dt} \sim \frac{E_{2D}^{5/2} l_{0\parallel}^{1/2}}{\Omega I_{\perp}^{1/2}}. \quad (4.40)$$

Asumiendo decaimiento auto-similar para E_{2D} , la ecuación (4.40) resulta en el decaimiento

$$E_{2D}(t) \sim t^{-2/3}, \quad (4.41)$$

y

$$l_{\perp}(t) \sim t^{1/6}, \quad (4.42)$$

Los argumentos pueden extenderse a flujos rotantes helicoidales utilizando la ecuación (4.36). Siendo I_{\perp} la magnitud conservada, se obtiene

$$\frac{dE_{2D}}{dt} \sim \frac{E_{2D}^{11/2} L_{0\parallel}^{3/2}}{\Omega^5 I_{\perp}^{3/2}}, \quad (4.43)$$

lo cual resulta en el decaimiento

$$E_{2D}(t) \sim t^{-2/9}, \quad (4.44)$$

y

$$l_{\perp}(t) \sim t^{1/18}. \quad (4.45)$$

4.4.4. Decaimiento de la enstrofía

En cualquiera de los casos anteriores se pueden computar leyes para el decaimiento de la enstrofía $Z(t) = \langle \omega^2 \rangle / 2$ utilizando la ecuación de balance isotropa y reemplazando $\epsilon = \nu Z(t)$, resultando $Z(t) = \nu^{-1} dE/dt$ [121]. Según esta ecuación, para cada solución en la cual la energía decae como $E(t) \sim t^{\alpha}$, la enstrofía decae según

$$Z(t) \sim t^{\alpha-1}. \quad (4.46)$$

Si bien los flujos rotantes son anisótropos, la enstrofía es una magnitud concentrada predominantemente en escalas pequeñas, y es esperable que el flujo recupere progresivamente la isotropía en las escalas más pequeñas [66]. Se verá que los argumentos isótropos resultan en una muy buena predicción de los resultados numéricos para los casos con y sin rotación. Respecto a la helicidad, al estar relacionada con la energía y la enstrofía sólo a través de una desigualdad de Schwarz, no se puede derivar una ley de decaimiento simple utilizando solamente argumentos fenomenológicos.

4.5. Resultados numéricos

En esta sección se presentan resultados numéricos para el decaimiento de la energía, la enstrofía y la helicidad para los casos listados en el cuadro 4.1. Los resultados de todas estas simulaciones son originales y fueron publicados en [179]. Entre ellas se diferencian simulaciones directas y LES para las cuales se utilizaron distintos tamaños de grilla. Todos los flujos poseen un espectro isótropo inicial $E(k) \sim k^4$ para $k \in [1, 14]$, $[1, 25]$ ó $[1, 30]$, seguido de un decaimiento exponencial. El valor de k_0 para el cual $E(k)$ alcanza su valor máximo depende de la grilla utilizada. Por un lado, k_0 debe ser lo suficientemente grande para permitir el crecimiento de la longitud característica l durante el tiempo necesario para observar leyes de potencia durante el decaimiento de la energía. Por otro lado, se desea que exista suficiente separación (en el espacio Fourier) entre el máximo del espectro inicial y el rango disipativo, para poder observar un rango inercial en un amplio intervalo de escalas. Se consideran flujos con y sin rotación, helicoidales y no helicoidales.

4.5.1. Flujos sin rotación

En la figura 4.2 se muestran resultados para algunas de las simulaciones sin rotación. En todas las simulaciones se observa un decaimiento cercano a $E \sim t^{-10/7}$ independientemente de la presencia ó no de helicidad. El decaimiento es consistente con la ecuación (4.31) para un espectro inicial $\sim k^4$. La enstrofía también decae consistentemente con lo expresado en la ecuación (4.46), siendo su decaimiento compatible con $Z \sim t^{-17/7}$ en todos los casos. Al igual que lo visto en el capítulo 3, en ausencia de rotación la helicidad sólo retarda el inicio del decaimiento auto-similar, demorando el momento en el que la enstrofía alcanza su valor máximo [9, 15, 17]. Esto es más visible en las simulaciones directas. Ver, por ejemplo, los máximos de enstrofía

Cuadro 4.1: Parámetros usados en las simulaciones: viscosidad cinemática ν , frecuencia de rotación Ω , número de Reynolds Re , número de Rossby Ro , número de Rossby en la micro escala Ro^ω , helicidad relativa inicial h , helicidad relativa al momento de máxima disipación h^* , y el tiempo de máxima disipación t^* . La última columna describe en forma abreviada el espectro de energía inicial $E(k)$: la ley de potencias del espectro, el rango de longitudes de onda en donde se cumple dicha ley, y el tipo de flujo (ABC para Arn'old-Beltrami-Childress, y ALT para flujos aleatorios). En el nombre de las simulaciones, la D o la L inicial indica respectivamente simulación directa o LES, seguida por la resolución espacial. Las simulaciones con H son helicoidales, y las que tienen una A final tienen condiciones iniciales anisótropas.

Simulación	ν	Ω	Re	Ro	Ro^ω	h	h^*	t^*	$E(k)$ Inicial
D512-2	$8,5 \times 10^{-4}$	0	420	∞	∞	$8,0 \times 10^{-5}$	8×10^{-4}	0,60	k^4 (1-14) ALT
D512-3	$8,5 \times 10^{-4}$	10	450	0,10	0,95	4×10^{-3}	4×10^{-3}	0,70	k^4 (1-14) ALT
D512H-2	$8,0 \times 10^{-4}$	0	440	∞	∞	0,90	0,38	0,94	k^4 (1-14) ALT
D512H-3	8×10^{-4}	10	530	0,07	0,70	0,99	0,5	1,50	k^4 (1-14) ABC
L96-1	$8,5 \times 10^{-4}$	0	550	∞	∞	0,03	0,02	0,30	k^4 (1-14) ALT
L96-2	$8,5 \times 10^{-4}$	2	540	0,42	2,90	-0,03	-0,02	0,30	k^4 (1-14) ALT
L96-3	$8,5 \times 10^{-4}$	4	540	0,21	1,45	-0,03	-0,02	0,30	k^4 (1-14) ALT
L96-4	$8,5 \times 10^{-4}$	6	550	0,14	0,95	-0,03	-0,02	0,30	k^4 (1-14) ALT
L96-5	$8,5 \times 10^{-4}$	8	550	0,11	0,73	-0,03	-0,02	0,30	k^4 (1-14) ALT
L96-6	$8,5 \times 10^{-4}$	10	530	0,08	0,65	0,03	0,02	0,30	k^4 (1-14) ALT
L96H-1	$8,0 \times 10^{-4}$	0	500	∞	∞	0,90	0,51	0,70	k^4 (1-14) ALT
L96H-2	$8,5 \times 10^{-4}$	10	540	0,08	0,63	0,90	0,70	0,70	k^4 (1-14) ALT
L96H-3	$8,5 \times 10^{-4}$	10	490	0,08	0,60	0,99	0,80	1,15	k^4 (1-14) ABC
L192-1	$2,0 \times 10^{-4}$	0	1200	∞	∞	-7×10^{-3}	-6×10^{-3}	0,10	k^4 (1-30) ALT
L192-2	$2,0 \times 10^{-4}$	10	1100	0,22	1,65	-7×10^{-3}	-6×10^{-3}	0,13	k^4 (1-30) ALT
L192H-1	$2,0 \times 10^{-4}$	0	950	∞	∞	0,90	0,60	0,30	k^4 (1-30) ALT
L192H-2	$2,0 \times 10^{-4}$	10	1000	0,20	1,60	0,94	0,71	0,38	k^4 (1-30) ABC
L192HA-1	$2,0 \times 10^{-4}$	10	1200	0,16	1,40	0,90	0,56	0,50	k^4 (1-25) ALT
L192HA-2	$2,0 \times 10^{-4}$	10	1300	0,14	1,35	0,90	0,59	0,46	k^4 (1-25) ALT
L192HA-3	$2,0 \times 10^{-4}$	10	1300	0,15	1,35	0,90	0,58	0,45	k^4 (1-25) ALT

para las simulaciones D512-3 y D512H-3 en la figura 4.2 (b). Finalmente, en las simulaciones con flujos helicoidales, la helicidad decae siguiendo la ley $H(t) \sim t^{-17/7}$, al igual que la enstrofia.

Es interesante notar que las simulaciones realizadas con un modelo de subgrilla, con resoluciones espaciales de 192^3 y 96^3 puntos de grilla, reproducen correctamente los resultados obtenidos utilizando simulaciones directas con las mismas condiciones iniciales y parámetros dimensionales, aunque a resoluciones mucho más altas.

4.5.2. Flujos rotantes

Cantidades globales isótropas

A medida que en un flujo rotante se incrementa la intensidad de la rotación, las simulaciones muestran leyes de decaimiento con exponentes cada vez más pequeños. A modo de ilustración, la figura 4.3 muestra el decaimiento de energía para simulaciones sin helicidad y con frecuencia de rotación en aumento. Como fue observado en simulaciones numéricas [92] y en experimentos [89, 95] previos, a medida que aumenta Ω la tasa de decaimiento disminuye hasta alcanzar una saturación para $Ro \approx 0,1$. En lo que sigue, el enfoque se pondrá en simulaciones con $Ro \approx 0,1$, lo suficientemente pequeño para estudiar el rango de parámetros correspondiente a esta saturación, pero a su vez lo suficientemente grande para que la rotación no predomine sobre las interacciones no lineales, caso en el cual se obtendrían decaimientos puramente exponenciales. Un estudio detallado sobre la transición entre flujos no rotantes y con rotación puede encontrarse en [95].

La figura 4.4 muestra el decaimiento de la energía, la enstrofia y la helicidad para simulaciones rotantes con y sin helicidad. La energía en los casos sin helicidad muestra en algunas simulaciones un decaimiento ligeramente más rápido que el predicho por la ecuación (4.34) ($E \sim t^{-5/7}$), mientras que en otras no se identifica una ley de potencias clara. La enstrofia, sin embargo, muestra un mejor acuerdo con las leyes fenomenológicas, decayendo como $\sim t^{-12/7}$. Como se mostrará más adelante, se puede conseguir un mejor acuerdo entre los argumentos fenomenológicos y las simulaciones si se considera el decaimiento de los modos 2D y 3D de manera independiente.

Por otro lado, las simulaciones con helicidad (líneas gruesas en la figura 4.4) muestran un decaimiento $E(t) \sim t^{-1/3}$ ó ligeramente más rápido (pero siempre más lento que $\sim t^{-5/7}$). Las simulaciones con condiciones iniciales ABC tienden a desarrollar leyes de potencias más claras y cercanas a $\sim t^{-1/3}$ que las simulaciones inicializadas con condiciones helicoidales aleatorias, en las cuales la reducción de la tasa de decaimiento de la energía es menos

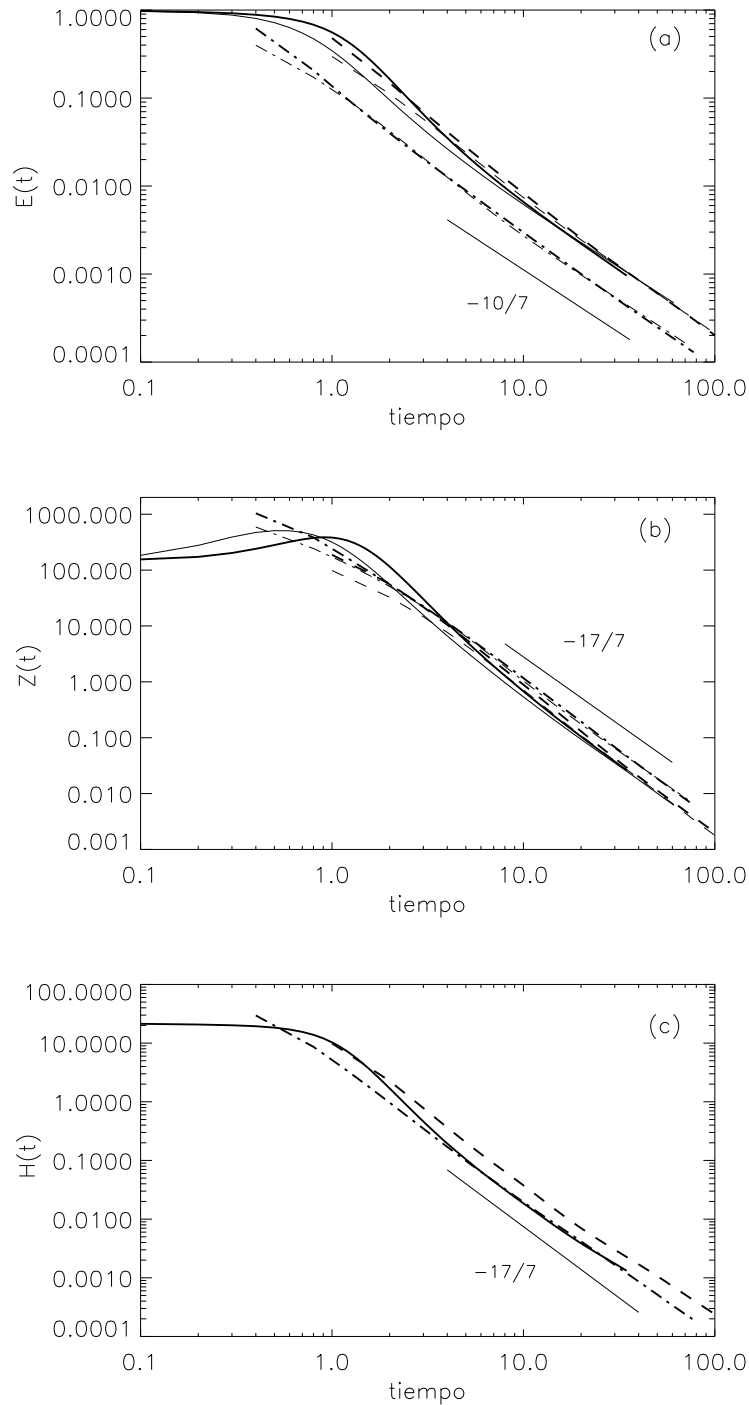


Figura 4.2: (a) Decaimiento de la energía para simulaciones sin rotación. Simulaciones directas sin helicidad D512-2 (trazo continuo) y LES L96-1 (guiones) y L192-1 (guiones-puntos), y simulaciones directas con flujo helicoidal D512H-2 (trazo grueso continuo) y LES L96H-1 (guiones gruesos) y L192H-1 (guiones y puntos gruesos). Se muestra una pendiente $-10/7$ como referencia. (b) Decaimiento de la enstrofia para los mismos casos, con referencia $-17/7$. (c) Decaimiento de la helicidad para las simulaciones con condiciones iniciales helicoidales de la figura (a).

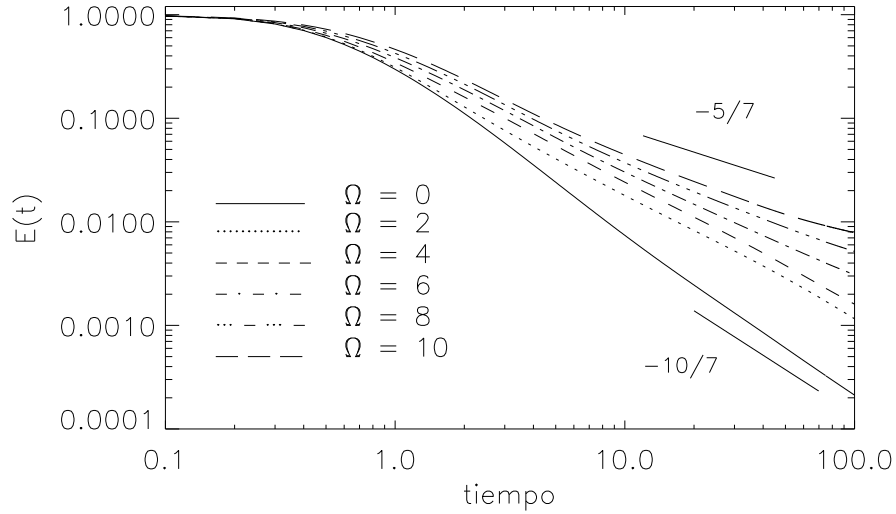


Figura 4.3: Decaimiento de la energía para diferentes valores de Ω desde $\Omega = 0$ hasta $\Omega = 10$ para las simulaciones sin helicidad L96-1, L96-2, L96-3, L96-4, L96-5, L96-6.

pronunciada. Este comportamiento también será explicado al considerar el decaimiento de modos 2D y 3D independientemente. Se verá también que la anisotropía inicial es especialmente relevante en los casos helicoidales. Por su parte, la enstrofia y la helicidad decaen en buen acuerdo con $\sim t^{-12/7}$. Más allá de la diversidad de decaimientos, al igual que en el capítulo 3 se observa que en presencia de rotación la helicidad no sólo retrasa la ocurrencia del máximo de enstrofia [17], sino que también afecta la ley de decaimiento.

Cantidades globales anisótropas

Si bien en las simulaciones se observa claramente el impacto de la rotación y la helicidad en el decaimiento de la energía, también es cierto que las predicciones deducidas en la sección 4.4.2 a partir de argumentos fenomenológicos isótropos no coinciden en todos los casos con los resultados numéricos. Esto se debe al hecho de que dichos argumentos asumen una distribución isótropa de la energía, mientras que la rotación rompe esa simetría, volviendo la distribución espectral axisimétrica con una dirección privilegiada paralela al eje de rotación. Asimismo, la tendencia hacia la bidimensionalización de este tipo de flujos [15, 92], así como el acoplamiento débil entre modos 2D y 3D para números de Rossby suficientemente pequeños, ha sido reportado en muchos trabajos [44, 49, 120] y debería tener un impacto en el decaimiento.

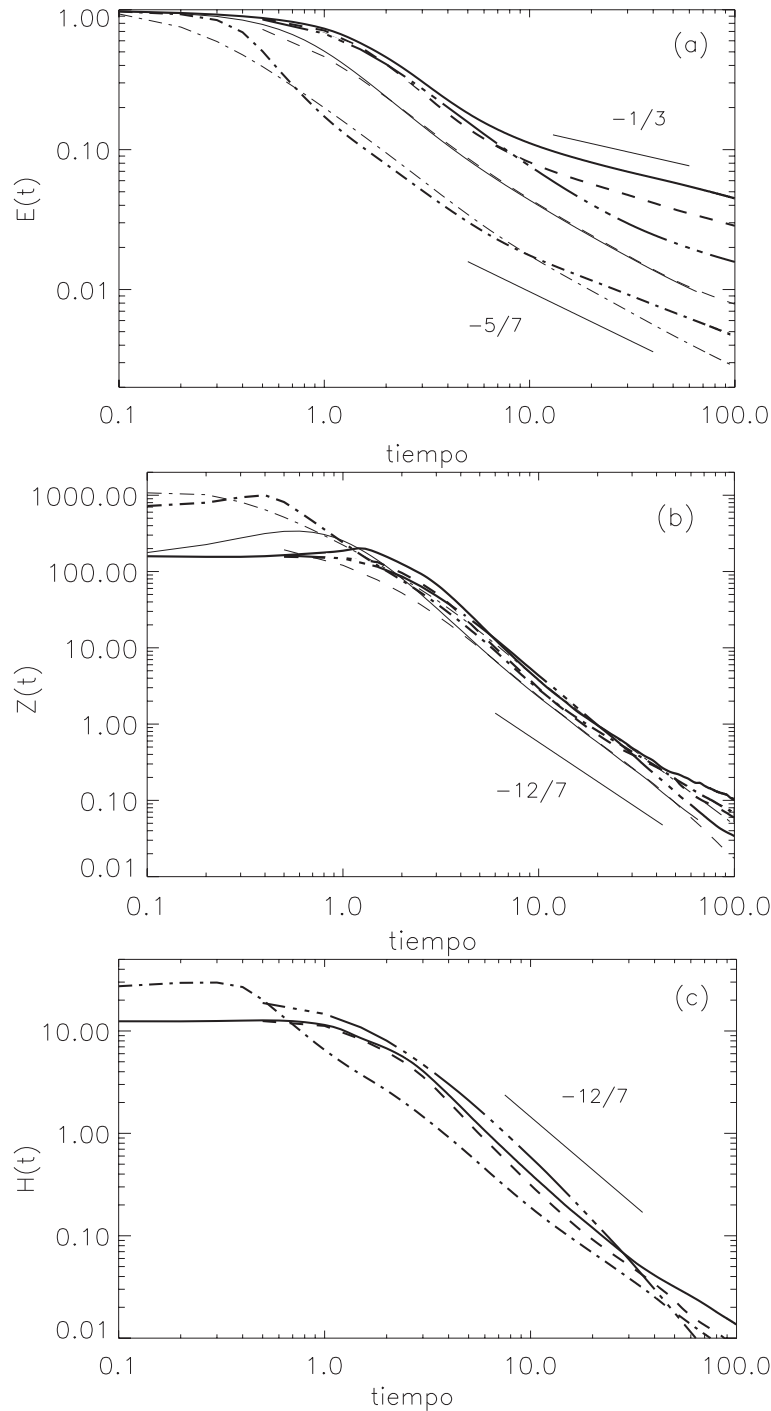


Figura 4.4: (a) Decaimiento de simulaciones rotantes con $\Omega = 10$. Simulaciones sin helicidad D512-3 (trazo continuo), L96-6 (guiones) y L192-2 (guiones y puntos), y simulaciones helicoidales D512H-3 (trazo continuo grueso), L96H-3 (guiones gruesos), L96H-2 (guiones y tres puntos gruesos) y L192H-2 (guiones y puntos gruesos). A tiempos largos las simulaciones no helicoidales decaen ligeramente más rápido que $t^{-5/7}$, mientras que las simulaciones helicoidales decaen aproximadamente como $t^{-1/3}$. (b) Decaimiento de la enstrofia para las mismas simulaciones, con una pendiente $-12/7$ como referencia. (c) Decaimiento de la helicidad para los casos en (a).

En base a estos dos fenómenos, discriminaremos entre la energía contenida en los modos 3D con $k_{\parallel} \neq 0$ (E_{3D}) y la energía en los modos lentos (o 2D) con $k_{\parallel} = 0$ (E_{2D}).

En la figura 4.5 se muestra la evolución temporal de E_{3D} y E_{2D} para varias simulaciones. En cada caso se pueden identificar distintos comportamientos que obedecen a diferentes leyes de potencia. Por un lado, E_{3D} siempre presenta un decaimiento cercano a alguna de las leyes de potencia esperadas para flujos isótropos (sin rotación). En algunas simulaciones, dependiendo de las condiciones iniciales, la longitud integral en la dirección paralela a Ω (l_{\parallel}) crece más rápido que en otras. Cuando l_{\parallel} crece rápidamente durante el transitorio previo a $t \approx 10$ (el tiempo del máximo de enstrofia y a partir del cual la turbulencia está desarrollada), y alcanza la saturación al tomar el valor del dominio (es decir, $l_{\parallel} \approx 2\pi$), E_{3D} evoluciona como en flujos isótropos confinados ($E_{3D} \sim t^{-2}$), ver las figuras 4.5(b)-(d). Por otro lado, si al comenzar el decaimiento auto-semejante l_{\parallel} es todavía menor a 2π , $E_{3D} \sim t^{-10/7}$ de acuerdo a la ecuación (4.31) para flujos no rotantes y no confinados; ver la figura 4.5(a). El crecimiento de las escalas integrales parece ser más rápido en las simulaciones con helicidad, ya que la mayoría de estas simulaciones muestran en E_{3D} un comportamiento compatible con el decaimiento de flujos isótropos confinados.

Por otro lado, E_{2D} decae según la predicción de las ecuaciones (5.11) y (4.41). Los casos sin helicidad son compatibles con $E_{2D} \sim t^{-2/3}$, mientras que las simulaciones con helicidad muestran decaimientos $t^{-1/2}$ ó $t^{-1/3}$ (el decaimiento $t^{-1/2}$ se explicará en el siguiente capítulo). Recordar que las leyes de potencia predichas para los casos helicoidales corresponden siempre a casos con helicidad máxima. Para casos con helicidad intermedia, las leyes de potencia están acotadas entre aquellas correspondientes a los casos no helicoidales y con helicidad máxima.

Los resultados de la figura 4.5 muestran que al analizar las energías E_{3D} y E_{2D} de forma independiente, las leyes de potencia en el decaimiento son más claras y cercanas a los argumentos fenomenológicos anisótropos que en el caso de la energía total (figura 4.4). Se puede comparar fácilmente, por ejemplo, la extensión de las leyes de potencia en cada caso. Los casos más claros están dados por los flujos no helicoidales, donde E_{2D} decae en forma consistente con la ecuación (4.41), y E_{3D} es consistente con la ecuación (4.31).

En los flujos sin helicidad, la evolución de E_{3D} y E_{2D} es independiente de la proporción inicial de energía presente en los modos 2D y 3D, al menos para el rango de parámetros explorados en estas simulaciones. Más adelante se verá que para flujos helicoidales, el efecto de la helicidad es más sensible al valor inicial del cociente E_{2D}/E_{3D} , es decir, a la anisotropía inicial del flujo.

Para convalidar las predicciones de la teoría con los resultados numéricos

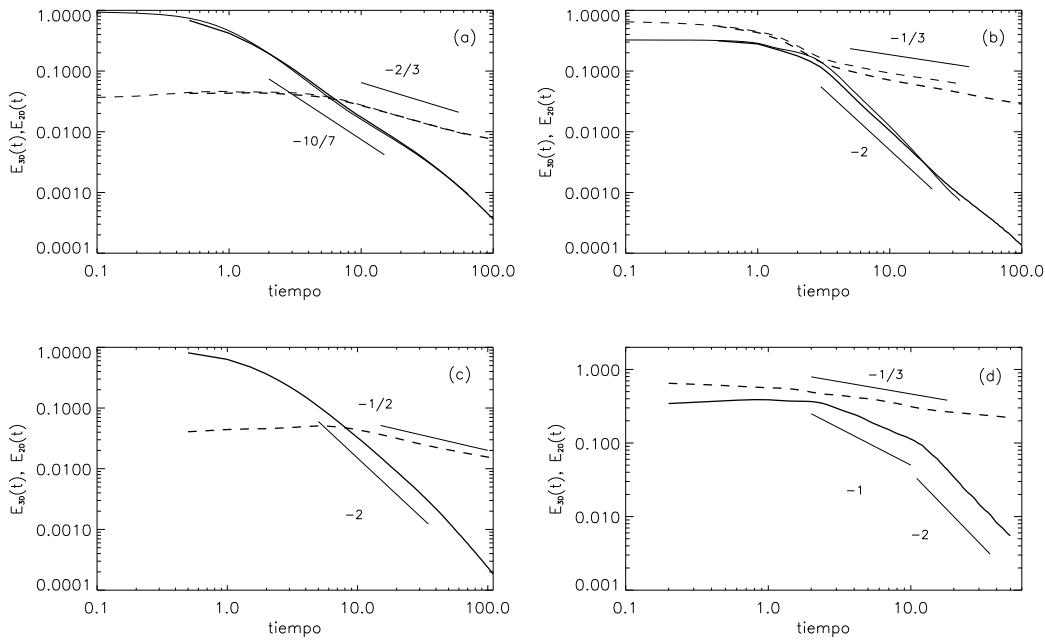


Figura 4.5: Decaimiento de la energía E_{3D} (trazo continuo) y E_{2D} (guiónes) para simulaciones con rotación. (a) Simulaciones no confinadas y no helicoidales D512-3 (trazo fino) y L96-6 (trazo grueso); se indican decaimientos $E_{3D} \sim t^{-10/7}$ y $E_{2D} \sim t^{-2/3}$ como referencia. (b) Simulaciones no confinadas y helicoidales con condiciones iniciales ABC D512H-3 (trazo fino) y L96H-3 (trazo grueso); E_{2D} decae aproximadamente como $t^{-1/3}$. (c) Simulaciones no confinadas y helicoidales con condiciones iniciales aleatorias L96H-2; E_{2D} decae aproximadamente según $t^{-1/2}$. (d) Simulación confinada helicoidal D512H-1 con condiciones iniciales ABC.

se debe verificar además que las magnitudes conservadas según el teorema de von Kármán-Howarth sean efectivamente constantes a lo largo del decaimiento en las simulaciones. Las leyes de potencia derivadas en la sección 4.4 se basan en la constancia de las magnitudes integrales I o I_\perp . Para calcular estas integrales y estudiar su evolución temporal en las simulaciones, es necesario calcular las funciones de correlación a dos puntos para la velocidad $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \rangle$ y $\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle$. En el caso isótropo, la función de correlación puede estimarse a partir del espectro de energía según [35]

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \rangle (r) = 2 \int_0^\infty E(k)(\sin kr - kr \cos kr)/(kr)^3 dk. \quad (4.47)$$

Para el caso axisimétrico, la función de correlación longitudinal a dos puntos se puede calcular mediante funciones de Bessel y el espectro anisótropo $E(k_\perp)$ invirtiendo la fórmula [35]

$$E(k_\perp) = \int \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle k_\perp r_\perp J_o(k_\perp r_\perp) dr, \quad (4.48)$$

de manera que

$$\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}'_\perp \rangle (r) = \int 2E(k_\perp) J_o(k_\perp r_\perp) dk_\perp. \quad (4.49)$$

A modo de ejemplo, se muestra en la figura 4.6 la evolución de las magnitudes I e I_\perp normalizadas por sus valores iniciales, para las dos simulaciones rotantes cuyos decaimientos se muestran en la figura 4.5(a). Mientras que I crece monótonamente hasta un factor ≈ 40 del valor inicial, I_\perp permanece aproximadamente constante, fluctuando lentamente alrededor de su valor inicial. Este comportamiento es común a todas las simulaciones rotantes y corrobora el uso de la hipótesis $I_\perp \approx \text{cte.}$ para derivar el decaimiento $E_{2D} \sim t^{-2/3}$. Se verificó explícitamente que los demás casos rotantes presentan comportamientos similares, en donde la magnitud isótropa I crece y la anisótropa I_\perp se mantiene aproximadamente constante. Notar que en el intervalo de tiempo estudiado ($t \approx 1$ a 100), aunque I_\perp varía lentamente, la energía del flujo turbulento decae en al menos tres órdenes de magnitud, por lo que I_\perp puede considerarse una magnitud conservada.

La evolución de las energías 2D y 3D en las simulaciones helicoidales son más dispares. Las energías E_{3D} decaen como lo esperado para flujos confinados ($\sim t^{-2}$), mientras que las energías E_{2D} decaen a veces como en flujos confinados y otras veces de acuerdo a lo esperado para flujos no confinados (figuras 4.5 (b) y (c)) según las condiciones iniciales sean ABC ó aleatorias respectivamente. Puede ser el caso que en presencia de helicidad se requiera más separación de escalas entre aquella asociada al máximo del espectro de

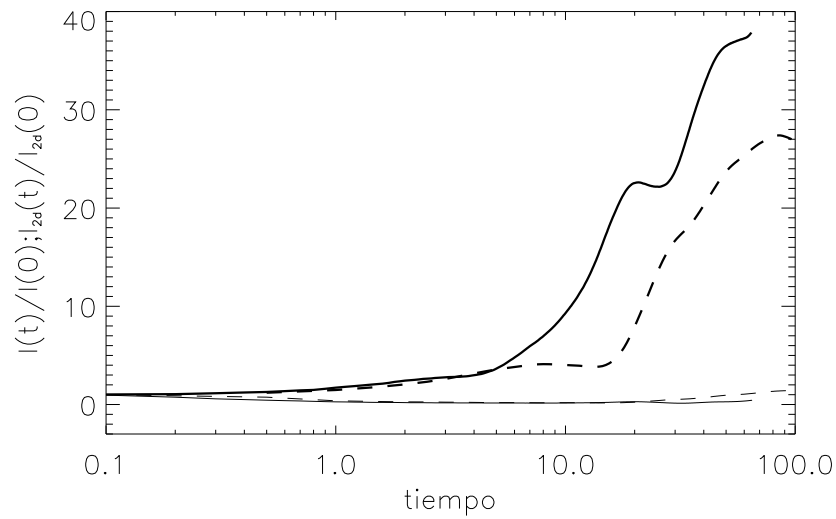


Figura 4.6: Evolución temporal de $I/I(0)$ (trazo grueso) y $I_{\perp}/I_{\perp}(0)$ (trazo fino) para simulaciones D512-3 (trazo continuo) y L96-6 (guiones). Mientras que en ambas simulaciones I_{\perp} se mantiene aproximadamente constante, I es monótonamente creciente, aumentando su amplitud aproximadamente un orden de magnitud durante el decaimiento autosimilar.

energía inicial y el tamaño del dominio, para poder observar decaimiento no confinado. Ese sería el caso de la simulación L192H-2 (no se muestra), por ejemplo, cuyo espectro inicial de energía tiene un máximo en $k = 30$ (en lugar de $k = 14$ en las simulaciones de la figura 4.5), y que tiene un decaimiento $E_{3D} \sim t^{-10/7}$. Sin embargo, las condiciones iniciales ABC difieren también de las aleatorias en otro aspecto. En flujos ABC, dos tercios de los modos excitados inicialmente se encuentran en el plano $k_{\parallel} = 0$, mientras que las condiciones iniciales aleatorias excitan modos distribuidos de forma más isotropa en el espacio Fourier, resultando en una proporción menor de energía en el plano $k_{\parallel} = 0$ respecto a la energía presente en el resto del espacio complejo. Esta dependencia en el grado de isotropía de la distribución espectral inicial puede indicar un mayor acoplamiento entre modos 2D y 3D en flujos rotantes helicoidales. Es por esto que en la sección 4.5.3 se estudiará el efecto de la anisotropía inicial en flujos helicoidales.

El mayor impacto de la anisotropía inicial en el acoplamiento entre modos 3D y 2D en flujos rotantes helicoidales puede esperarse por razones fenomenológicas. Si el desacoplamiento realmente ocurre en el límite de rotación rápida, debería mantenerse hasta un tiempo $t^* \sim Ro^{-2}$, luego del cual los términos de orden superior en la expansión del término no lineal hacen que las interacciones no resonantes sean no despreciables [49, 50]. Como en el decaimiento de turbulencia no helicoidal $E \sim t^{-5/7}$ y $l \sim t^{1/7}$ (asumiendo la conservación aproximada de I), el número de Rossby Ro decae según

$$Ro = \frac{E^{-1/2}}{2^{1/2}l\Omega} \sim t^{-1/2}, \quad (4.50)$$

y por lo tanto, t^* crece igual que t . De esta forma, si se desarrolla un desacoplamiento en el caso no helicoidal, el mismo puede sostenerse por tiempos muy largos. El mismo resultado se obtiene para flujos rotantes confinados como los estudiados en el capítulo anterior, y también si se usan los argumentos anisótropos basados en la conservación de I_{\perp} . Sin embargo, en el caso helicoidal (usando, por ejemplo, la ecuación 3.10), se obtiene un decaimiento para Ro mucho más lento

$$Ro \sim t^{-1/6}, \quad (4.51)$$

y por lo tanto $t^* \sim t^{1/3}$ (el mismo resultado se obtiene con los argumentos anisótropos). En este caso, el desacoplamiento sólo puede ser válido por tiempos más cortos. De ahí que la razón inicial entre energías en modos 2D y 3D pueda tener un mayor impacto en su evolución.

Evolución espectral

En las figuras 4.7(a) y (b) se muestra la evolución temporal de espectros isótropos $E(k)$ y anisótropos $E(k_{\perp})$ para LES de flujos rotantes ($\Omega = 10$) con y sin helicidad. En ambos casos $E(k)$ crece en las escalas grandes, evidenciando transferencia de energía hacia esas escalas. En el caso de $E(k_{\perp})$, es interesante notar que el crecimiento de su amplitud en las escalas grandes es mucho menor al de $E(k)$. La amplitud de los espectros en dichas escalas se encuentra ampliamente relacionada con la conservación de las magnitudes integrales I o I_{\perp} . Esto se estudiará en detalle en el próximo capítulo, donde un análisis más exhaustivo de los espectros permitirá ganar mayor intuición respecto al comportamiento de las magnitudes integrales.

Para estudiar con mayor detalle la distribución espectral de la energía en las distintas direcciones del espacio Fourier, se muestran gráficos del espectro axisimétrico de energía $e(k_{\parallel}, k_{\perp})$ para las simulaciones L96-6 (rotante sin helicidad) y L96H-3 (rotante y helicoidal) en la figura 4.8. Notar que para obtener contornos de nivel circulares para el caso isótropo, es necesario dividir el espectro de energía axisimétrico por $\sin \theta$, donde $\theta = \arctg(k_{\parallel}/k_{\perp})$.

En los casos sin rotación, el espectro presenta una distribución isótropa de energía, evidenciada por contornos de nivel circulares que mantienen su forma a medida que el flujo decae (no se muestra). Por otro lado, en presencia de rotación, la distribución de la energía se vuelve anisótropa, con más energía cerca del plano $k_{\parallel} = 0$ a tiempos largos. La concentración de energía cerca del plano $k_{\parallel} = 0$ es aún mayor para el caso rotante con helicidad, como puede verse al comparar las figuras 4.8(a) y (b). Además, la energía se encuentra más concentrada en las escalas horizontales grandes (longitudes de onda k_{\perp} chicas), confirmando las observaciones previas de que las escalas integrales crecen más rápido en presencia de helicidad.

4.5.3. Efecto de la anisotropía inicial

En esta sección se muestra que las diferencias observadas en la evolución de las energías E_{2D} y E_{3D} en simulaciones con helicidad están asociadas a diferencias en las condiciones iniciales. En particular, las simulaciones con condiciones iniciales ABC y con condiciones iniciales aleatorias difieren en la proporción inicial de energía en el plano $k_{\parallel} = 0$. Un flujo ABC posee inicialmente $2/3$ de los modos excitados en la variedad lenta (modos 2D), mientras que el flujo aleatorio distribuye la energía isótopamente, con menos proporción de energía en los modos 2D respecto a la presente en modos 3D. Este efecto aumenta a medida que las condiciones iniciales se excitan en escalas más pequeñas, ya que el número de modos en el espacio Fourier en

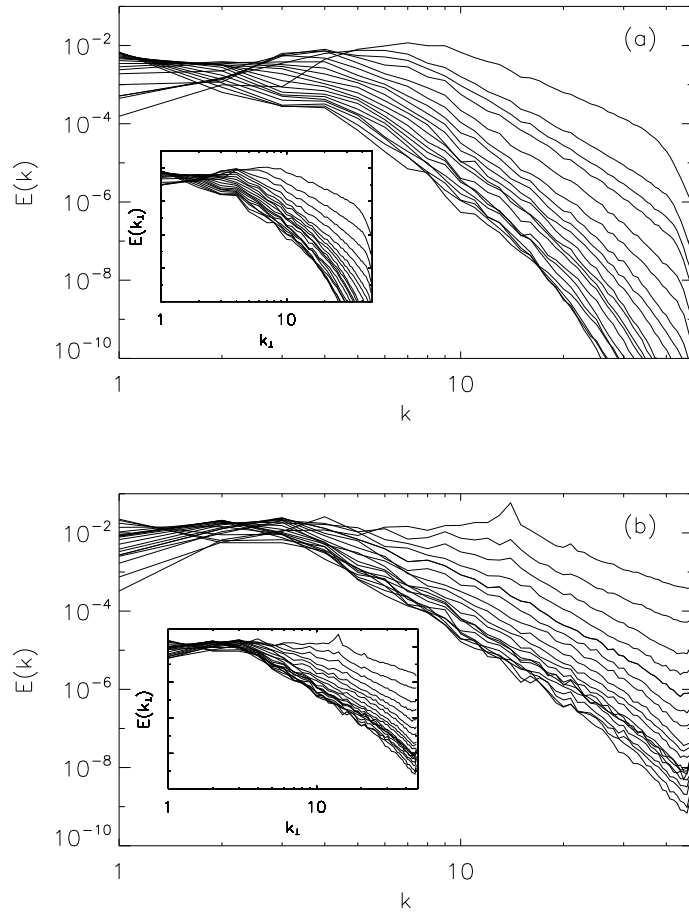


Figura 4.7: (a) Evolución del espectro isotrópico de energía $E(k)$ para la simulación sin helicidad y con $\Omega = 10$ L96-6 desde $t = 5$ hasta $t = 100$ con incrementos $\Delta t = 5$. Recuadro: espectros anisótropos $E(k_{\perp})$ para los mismos tiempos. (b) Evolución del espectro isotrópico de energía $E(k)$ para las simulación L96-6, helicoidal y con $\Omega = 10$, para los mismos tiempos que en (a). El espectro $E(k_{\perp})$ correspondiente se muestra en el recuadro.

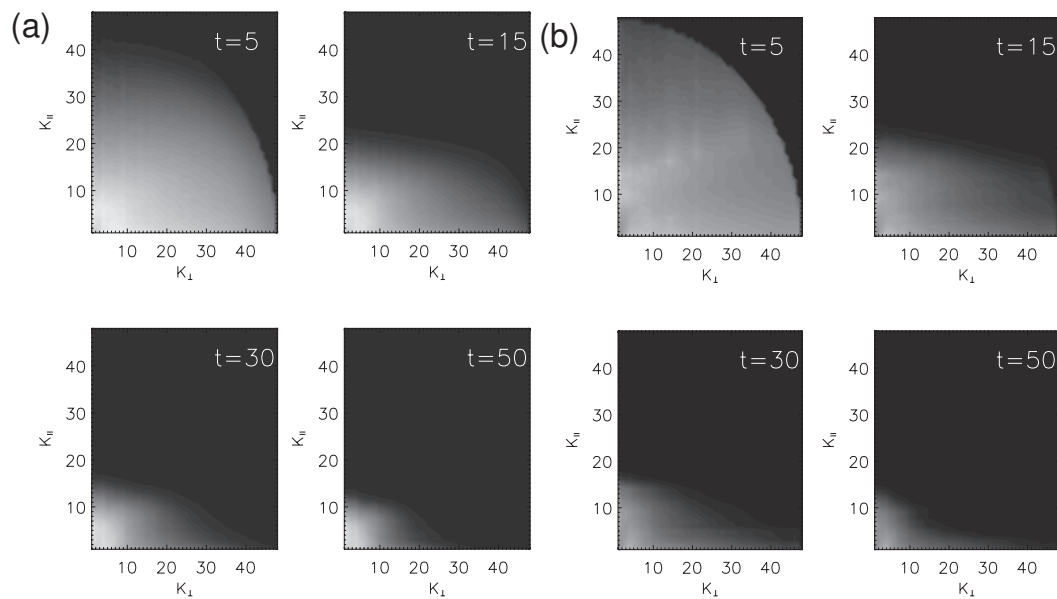


Figura 4.8: Espectro axisimétrico de energía $e(k_{\parallel}, k_{\perp})/\sin\theta$ para diferentes tiempos. (a) Simulación L96-6, no helicoidal con $\Omega = 10$. (b) Simulación L96H-3 helicoidal con $\Omega = 10$. En ambos casos se advierte una progresiva tendencia hacia un estado anisótropo con más energía en los modos cercanos a $k_{\parallel} = 0$.

anillos con número de onda pequeño es bajo (este es el motivo por el que el efecto no fue importante al estudiar flujos confinados en el capítulo anterior).

Para investigar el efecto de la anisotropía inicial, consideramos un conjunto de simulaciones helicoidales con condiciones iniciales aleatorias pero con un grado creciente de anisotropía inicial (L192HA-1, L192HA-2 y L192HA-3). La anisotropía se introdujo pesando la amplitud de todos los modos con $k_{\parallel} = 0$ usando un parámetro α : $\alpha = 1$ corresponde a condiciones iniciales isotrópicas como las consideradas anteriormente, mientras que $\alpha > 1$ corresponde a una amplitud inicial creciente de los modos 2D en relación a los 3D. Se utilizaron los valores $\alpha = 1$ (L192HA-1), 5 (L192HA-2) y 10 (L192HA-3), resultando en valores para el cociente entre las energías $E_{2D}/E_{3D} \approx 0,024, 0,260$ y $2,408$ respectivamente. Todas las simulaciones poseen espectros iniciales de energía y helicidad con máximos en $k = 25$, permitiendo estudiar casos no confinados con mayor separación de escala entre el dominio de simulación y la escala que contiene la mayor parte de la energía inicial.

En la figura 4.9 se muestra que E_{3D} decae aproximadamente como $\sim t^{-10/7}$ en todas las simulaciones sin importar el nivel de anisotropía de las condiciones iniciales, mientras que E_{2D} decae más lentamente a medida que la anisotropía aumenta. Por un lado, el caso $\alpha = 1$ es el más cercano a una ley $E_{2D} \sim t^{-1/3}$, resultado consistente con el decaimiento 2D mostrado en las figuras 4.5(b) y (d). Por otro lado, el caso con mayor anisotropía ($\alpha = 10$) se aproxima a $E_{2D} \sim t^{-1/6}$, que es consistente con el decaimiento para flujos helicoidales con espectro inicial de Saffman y con la conservación de L_{\perp} (la ecuación que explica este decaimiento se estudiará en el próximo capítulo).

4.5.4. Momentos de asimetría y curtosis

En esta sección se analiza la evolución temporal de las magnitudes estadísticas denominadas momento de asimetría S_i (del inglés “skewness”) y curtosis K_i (del inglés “kurtosis”) para las componentes cartesianas i -ésimas de las derivadas de la velocidad. Las mismas se definen según

$$S_i = \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^3 \right\rangle / \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle^{3/2}, \quad (4.52)$$

y

$$K_i = \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^4 \right\rangle / \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle^2, \quad (4.53)$$

donde i denota las coordenadas cartesianas x, y ó z . El factor S mide el grado de asimetría de la distribución de probabilidad. Es positiva si la cola

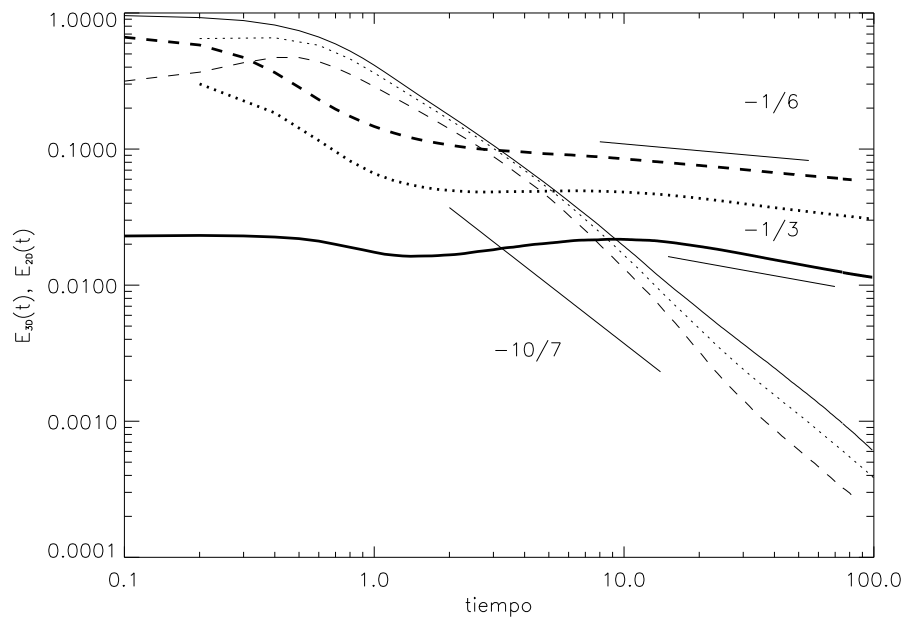


Figura 4.9: Decaimiento de la energía para distinto grado de anisotropía inicial en simulaciones rotantes helicoidales. Líneas gruesas refieren a la energía 2D y líneas finas corresponden a energía 3D. Las simulaciones que se muestran son: L192HA-1 (trazo continuo), L192HA-2 (puntos), y L192HA-3 (guiones), en orden creciente de anisotropía.

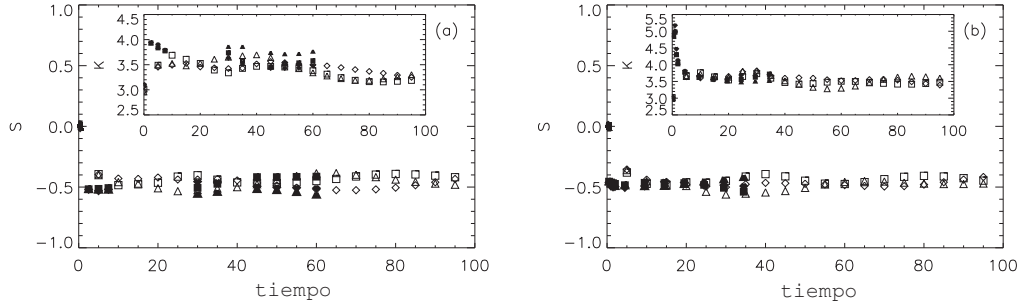


Figura 4.10: Evolución del momento de asimetría S para las derivadas de la velocidad en flujos sin rotación (a) D512-2 y L96-1 (sin helicidad) y (b) D512H-2 y L96H-1 (helicoidales). Los símbolos rellenos corresponden a simulaciones directas y los vacíos a LES, con cuadrados para S_x , triángulos para S_y y diamantes para S_z . Las tres componentes de S oscilan alrededor de $\approx -0,5$ independientemente del contenido de helicidad del flujo. El recuadro muestra las tres componentes de la curtosis para las derivadas de la velocidad en las mismas simulaciones.

derecha de la distribución de probabilidad es más larga que la izquierda, cero si es simétrica, y negativa en caso contrario. En particular, resulta igual a cero en el caso de un campo de velocidad \mathbf{u} con derivadas parciales que responden a estadística Gaussiana. Por su parte, K mide si la distribución es más chata o puntiaguda en relación a una distribución normal. Un valor alto de K representa una distribución con un pico abrupto y largas colas, mientras que un valor bajo representa una función más chata y con colas más cortas siempre en relación a una distribución normal, para la cual $K = 3$.

La figura 4.10 muestra S y K para las simulaciones sin rotación D512-2 y L96-1 (no helicoidales) y para las simulaciones sin rotación D512H-2 y L96H1 (helicoidales). En todos los casos, las tres componentes de S fluctúan alrededor de $\approx -0,5$, valor que fue observado anteriormente en experimentos [45] y en simulaciones [111]. Por otro lado, los valores de K para las tres componentes espaciales evolucionan hacia un valor cercano a 3,5. Al comparar las figuras 4.11 (a) y (b), se nota que la presencia de helicidad no afecta los valores de S ni de K en ausencia de rotación.

En presencia de rotación, los valores de S se reducen substancialmente, fluctuando todas sus componentes alrededor de $S \approx 0$. Esto puede verse claramente en la figura 4.11 para L96-6 y L96H-3 (las simulaciones directas no se muestran por razones de claridad, siendo su comportamiento similar en las LES). La disminución de S , asociada a la rotación e indicadora de un menor flujo de energía, fue observada anteriormente en simulaciones [47]. La

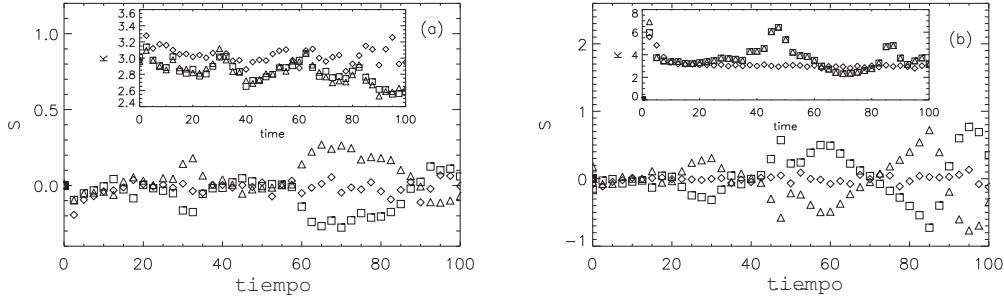


Figura 4.11: Evolución del momento de asimetría S para las derivadas de la velocidad en flujos con rotación (a) L96-6 y (b) L96H-3. Los cuadrados corresponden a S_x , los triángulos a S_y y los diamantes a S_z . El recuadro muestra la evolución de la curtosis para las derivadas de la velocidad en las mismas simulaciones.

anisotropía de estos flujos es evidente, manifestándose en distintos valores para S_x , S_y y S_z . Mientras que S_z presenta pequeñas fluctuaciones alrededor de $S_z \approx 0$, S_x y S_y muestran fluctuaciones más grandes y repentinas, donde además $S_x \approx -S_y$ durante toda la simulación. La anti-correlación entre las componentes x e y de S se puede entender cualitativamente si se tiene en cuenta que estos flujos evolucionan hacia un estado cuasi-bidimensional. Precisamente, para un flujo puramente 2D, la relación de incompresibilidad se reduce a

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (4.54)$$

que conduce a $S_x \approx -S_y$. Es importante aclarar que los flujos rotantes no son enteramente bidimensionales y que presentan diferencias con aquellos, como por ejemplo, la asimetría entre actividad ciclónica y anti-ciclónica observada en experimentos [124]. Los valores de K en las simulaciones rotantes presentan más fluctuaciones pero parecen evolucionar hacia valores más cercanos a 3 (es decir, más cercanos a una distribución Gaussiana y menos intermitente). Esto se ve más claramente para K_z y en la simulación con helicidad. K_x y K_y también muestran signos de cuasi-bidimensionalización siendo para todo tiempo $K_x \approx K_y$.

Las visualizaciones de la vorticidad en el espacio real indican que los máximos y mínimos de S_x y S_y en las simulaciones de flujos rotantes corresponden a instantes en los cuales dos estructuras en forma de columna se acercan y se unen. A modo de ejemplo, la figura 4.12 muestra dichas uniones en la evolución volumétrica de la componente z de la vorticidad en la

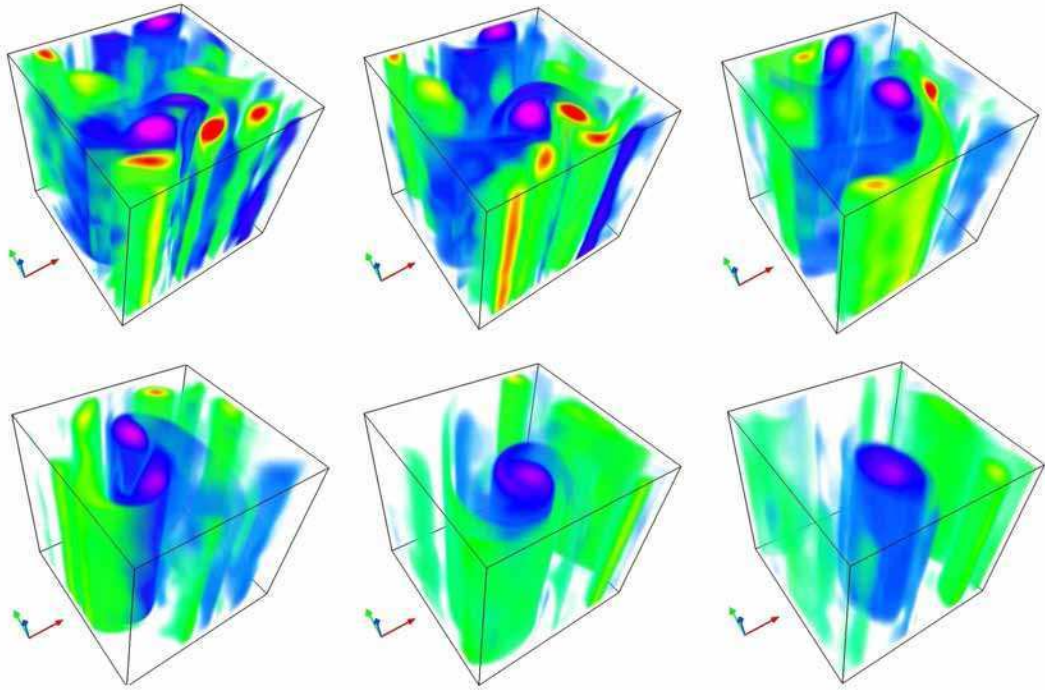


Figura 4.12: Visualización de ω_z para la simulación L96H-3. De arriba hacia abajo, izquierda a derecha, las imágenes corresponden a $t \approx 42, 47, 55, 70, 87$ y 100 . Notar que los cuatro vórtices ciclónicos en $t \approx 42$ colapsan de a pares para formar dos vórtices más grandes en $t \approx 47$. Eventualmente vuelven a colapsar para formar una única columna.

simulación L96H-3. Cuando dos columnas con el mismo signo de vorticidad colapsan, se crean gradientes de u_x y u_y muy intensos, dando lugar a las desviaciones repentinas de S_x y S_y observadas en la figura 4.11. Al analizar las visualizaciones de ω_z , se observó que las estructuras anti-ciclónicas colapsan fundiéndose para formar estructuras más grandes, mientras que las columnas ciclónicas tienden a destruirse, desapareciendo cada vez que dos ó más de ellas se encuentran. Esta antisimetría entre vórtices ciclónicos y anti-ciclónicos parece ser general en los flujos rotantes.

4.6. Conclusiones

En este capítulo se estudiaron distintas leyes de decaimiento auto-similar para la energía que aparecen en flujos turbulentos con escala integral mucho menor que la escala del dominio, y un espectro inicial del tipo Batchelor. Se

consideraron diferentes decaimientos dependiendo de la escala característica de las condiciones iniciales, la presencia ó ausencia de rotación y helicidad, los valores de los números de Reynolds y Rossby, y el grado de anisotropía en las condiciones iniciales. Para cada caso se derivaron leyes de potencia utilizando argumentos teóricos y fenomenológicos, y se contrastaron con resultados numéricos para simulaciones directas y LES sometidas a distintas condiciones iniciales.

Se identificó un gran número de decaimientos posibles. Las simulaciones corroboraron que la rotación decrece la tasa de decaimiento de la energía, como fuera observado previamente en [38, 89, 92, 94, 95, 118, 174]. Además, en buen acuerdo con lo estudiado en el capítulo anterior para flujos confinados, la helicidad puede disminuir aún más la tasa de decaimiento energético también en flujos rotantes no confinados. Este resultado, junto a estudios previos de flujos rotantes forzados [16, 116, 123], confirma que la helicidad juega un rol mucho más importante en turbulencia rotante que en turbulencia isótropa y homogénea.

En flujos rotantes sin helicidad, la energía decrece con una tasa ligeramente mayor a la derivada mediante argumentos isótopos $E \sim t^{-5/7}$, por lo que dichos argumentos no resultan del todo satisfactorios. Se obtuvo mayor consistencia entre fenomenología y simulaciones al considerar la evolución de la energía en los modos 2D y 3D separadamente. En este caso, se observaron decaimientos cercanos a $E_{2D} \sim t^{-2/3}$ para los modos 2D, mientras que los modos 3D se comportan como en un flujo sin rotación, decayendo según $E_{3D} \sim t^{-10/7}$.

El decaimiento de la energía en presencia de rotación y helicidad es más complejo, presentando una mayor variedad de casos. El decaimiento de la energía total $E(t)$ se encuentra acotado entre los casos $E \sim t^{-5/7}$ y $E \sim t^{-1/3}$ pero, al igual que en los casos no helicoidales, se observaron leyes de potencia más claras si se considera E_{2D} y E_{3D} por separado. En estos casos E_{2D} decae entre $\sim t^{-1/2}$ y $\sim t^{-1/6}$, mientras que E_{3D} decae entre $\sim t^{-2}$ y $\sim t^{-10/7}$ dependiendo de si las longitudes integrales del flujo están saturadas o no.

Los resultados con helicidad mostraron depender fuertemente de la separación entre la escala integral inicial y el tamaño del dominio de simulación, ya que en este tipo de flujos la escala integral parece crecer más rápidamente. Asimismo, los decaimientos para este tipo de flujos dependen también de la anisotropía inicial, siendo mayor el efecto de la helicidad a medida que aumenta la proporción de energía inicial en el plano 2D respecto a la contenida en el plano 3D. Cabe destacar que la importancia de las condiciones iniciales en el decaimiento de la turbulencia rotante fue observada recientemente también en experimentos [124].

A pesar de la variedad de soluciones obtenidas, los argumentos teóri-

cos basados en la conservación de magnitudes integrales axisimétricas, junto con los argumentos fenomenológicos, nos permitieron explicar exitosamente todos los casos observados en las simulaciones. Los resultados presentados permiten, si se conocen las condiciones iniciales, predecir el decaimiento de la turbulencia para condiciones iniciales de Batchelor. En el próximo capítulo se generalizarán los resultados a turbulencia de Saffman.

El decaimiento de la enstrofia fue descrito exitosamente utilizando argumentos fenomenológicos isótropos, tanto para flujos rotantes como para flujos sin rotación. El uso de argumentos isótropos aún en flujos anisótropos se justifica al notar que la enstrofia, al igual que la helicidad, es una magnitud concentrada predominantemente en escalas chicas.

Finalmente, se presentó un estudio de la evolución temporal de los momentos de asimetría y curtosis de las derivadas de la velocidad. La evolución de los flujos rotantes hacia un estado cuasi-bidimensional resulta en la anti-correlación de las componentes x e y de los momentos de asimetría. La componente z de dicha magnitud se mantiene aproximadamente igual a cero mientras que las otras dos componentes oscilan alrededor de este valor, mostrando excursiones grandes y repentinas que están asociadas al colapso de dos ó más estructuras columnares en el fluido. Finalmente, los valores observados para la curtosis indican una fuerte reducción de la intermitencia en flujos rotantes en comparación con el caso isótropo y homogéneo.

Capítulo 5

Decaimiento de turbulencia k^2

5.1. Introducción

En el capítulo anterior se definieron las magnitudes integrales isótropas I y L junto a sus variantes anisótropas I_\perp y L_\perp . Se mostró que bajo hipótesis apropiadas sobre el decaimiento de la función de correlación de tercer orden $\langle u_i u_j u'_k \rangle$, dichas magnitudes se mantienen aproximadamente constantes durante el decaimiento de flujos isótropos y anisótropos respectivamente. La conservación de I , L , I_\perp o L_\perp sugieren una relación entre sus expresiones y magnitudes físicas básicas. Precisamente, se puede mostrar que I y L resultan respectivamente proporcionales al cuadrado del momento angular y lineal total de una región turbulenta con tamaño mayor que la escala integral del flujo, pero menor que el tamaño del dominio.

Landau mostró que la conservación de I es una consecuencia directa de la conservación del momento angular [175]. Su demostración, a través de un “experimento pensado” en un recinto cerrado, se presentó en el capítulo anterior en una versión axisimétrica. También se vio que la invariancia de I puede ser demostrada a través de la ecuación de von Kármán-Howarth cuando se asume que las correlaciones de tercer orden $\langle u_i u_j u'_k \rangle$ decaen más rápido que r^{-4} . El hecho de que la invariancia de I pueda ser demostrada mediante dos caminos independientes y de que la ley de decaimiento de Kolmogorov ($E(t) \sim t^{-10/7}$) basada en la conservación de I concuerde con experimentos le dieron credibilidad a la teoría de Landau-Loitsyansky.

En 1967, Saffman mostró que es posible que las correlaciones de tercer orden $\langle u_i u_j u'_k \rangle$ sean como máximo de orden r^{-2} [109]. En ese caso la integral de Saffman L es constante pero la integral de Loitsyansky no lo es. Se puede mostrar que L es proporcional al cuadrado del momento lineal contenido en una nube turbulenta P^2 [35], siendo

$$P^2 = \left\langle \left[\int \mathbf{u} dV \right]^2 \right\rangle / V, \quad (5.1)$$

donde V es el volumen de la nube turbulenta.

El desarrollo del espectro de energía para escalas grandes $E(k) \sim Lk^2 + Ik^4 + \dots$ permite asociar las integrales L e I a espectros de la forma $E(k) \sim k^2$ y $E(k) \sim k^4$ respectivamente. Cual de estos espectros se observa depende de las condiciones iniciales. Si la turbulencia se genera de forma tal que

$$\left\langle \int \mathbf{u} dV \right\rangle \ll V^{1/2} \quad (5.2)$$

entonces $L \approx 0$ a $t = 0$ y se mantendrá igual a cero al ser invariante. En este caso se observa un espectro de Batchelor $E(k) \sim k^4$ y la integral de Loitsyansky existe y es constante. Por otro lado, si inicialmente se tiene

$$\left\langle \int \mathbf{u} dV \right\rangle \sim V^{1/2} \quad (5.3)$$

entonces $L \neq 0$ es constante y se obtiene un espectro de Saffman $E(k) \sim k^2$.

La turbulencia de Saffman se puede pensar entonces como un mar de vórtices, cada uno de los cuales aporta una cantidad finita al impulso lineal total del fluido. Por otro lado, el espectro de Batchelor puede representarse como un mar de vórtices cada uno de los cuales aporta una cantidad finita de impulso angular pero con un impulso lineal neto despreciable (ver figura 5.1). Ambos espectros iniciales $E(k) \sim k^2$ y $E(k) \sim k^4$ son fáciles de reproducir en simulaciones numéricas ajustando las condiciones iniciales convenientemente. En lo que respecta a los experimentos, no existe hoy consenso sobre qué tipo de turbulencia se genera, por ejemplo, cuando se usa una grilla para excitar inicialmente la turbulencia.

En este contexto, surge naturalmente la pregunta sobre el efecto de la rotación en la conservación de los momentos lineal y angular. La rotación introduce una dirección privilegiada, el flujo se vuelve anisótropo, y las componentes relevantes de los momentos serán aquellas paralelas al eje de rotación (figura 5.2). En este aspecto la presencia de rotación es similar al efecto producido por un campo magnético constante en turbulencia magnetohidrodinámica [178].

Resulta entonces natural pensar en términos de la conservación de las componentes de P y H paralelas a dicho eje. Las componentes paralelas de P y H se pueden asociar a las magnitudes L_{\perp} y I_{\perp} como fue demostrado en el capítulo anterior, y estarán entonces asociadas a condiciones iniciales de Saffman o de Batchelor.

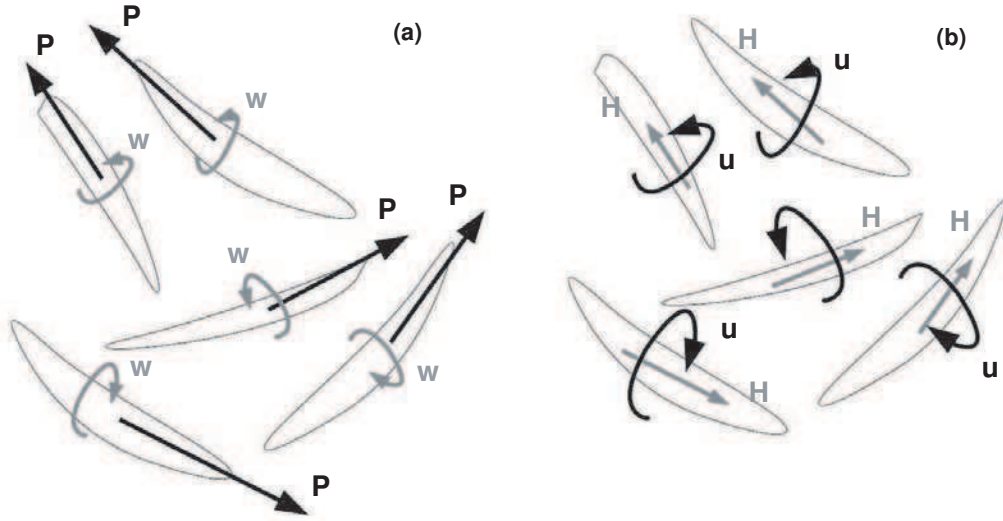


Figura 5.1: (a) La turbulencia de Saffman puede representarse como un mar de vórtices que tienen predominantemente impulso lineal. (b) La turbulencia de Batchelor corresponde a un mar de vórtices con una cantidad no nula de momento angular y con impulso lineal pequeño.

Considerando la existencia de estas dos condiciones iniciales, en este capítulo se extienden los resultados obtenidos en el capítulo anterior al caso de turbulencia de Saffman, correspondiente a espectros iniciales de la forma $E(k) \sim k^2$. Se muestran también algunas simulaciones con espectro inicial $E(k) \sim k^4$ con fines comparativos. Los resultados de este capítulo fueron publicados en [120].

5.2. Fenomenología

Al igual que en el capítulo anterior, pero ahora a partir de la conservación de las magnitudes L y L_{\perp} , se pueden derivar leyes de decaimiento para turbulencia de Saffman. Para el caso isótropo sin rotación, a partir de la ecuación (4.31) y usando $L \sim El^3$ se obtiene un resultado muy conocido que se debe a Saffman [84, 109],

$$E(t) \sim t^{-6/5}, \quad (5.4)$$

y

$$l(t) \sim t^{2/5}. \quad (5.5)$$

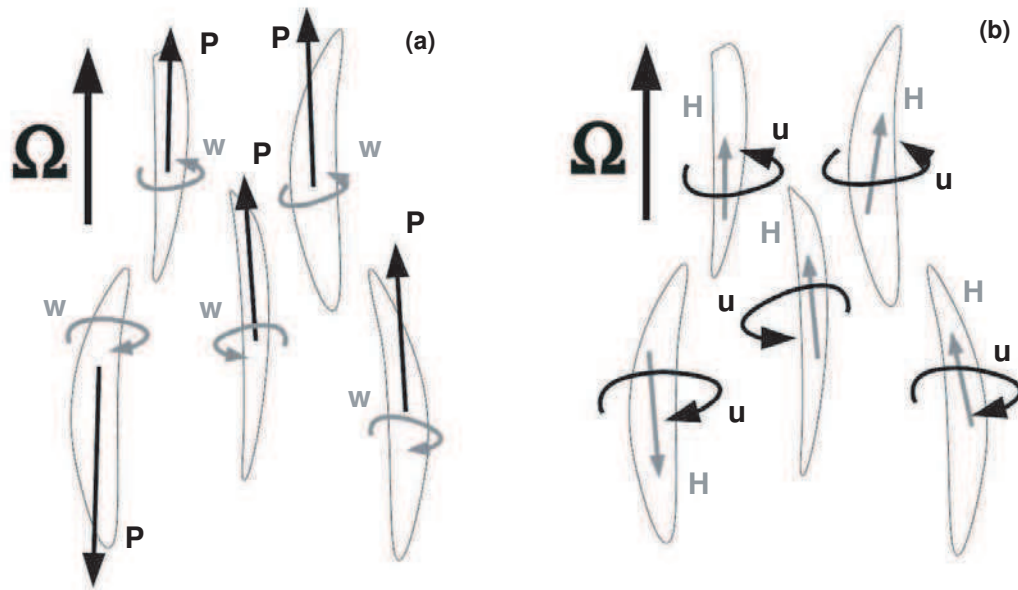


Figura 5.2: (a) La turbulencia de Saffman en presencia de rotación puede representarse como un mar de vórtices con momento lineal y cuya componente conservada es aquella paralela al eje de rotación. (b) La turbulencia de Batchelor corresponde a un mar de vórtices dominados por sus momentos angulares, y cuyas componentes relevantes son aquellas alineadas con el eje de rotación.

Si $\Omega \neq 0$, usando la ecuación (4.33) se obtiene la extensión isótropa trivial al caso rotante [94]

$$E(t) \sim t^{-3/5}, \quad (5.6)$$

y

$$l(t) \sim t^{1/5}. \quad (5.7)$$

Como parte de los trabajos de esta tesis, se extendieron los resultados anteriores para turbulencia de Saffman para el caso helicoidal y al caso axi-simétrico, que fueron publicados en [120]. Para el caso rotante helicoidal, a partir de (4.36) se obtiene la extensión isótropa

$$E(t) \sim t^{-1/5}, \quad (5.8)$$

y

$$l(t) \sim t^{1/15}. \quad (5.9)$$

Si se utilizan argumentos anisótropos para el caso rotante, al igual que en la sección anterior pero para la conservación de $L_{\perp} \sim E_{2D} l_{\perp}^2 l_{0\parallel}$, al reemplazar en la ecuación (4.39) para flujos no helicoidales resulta

$$\frac{dE_{2D}}{dt} \sim \frac{E_{2D}^3 l_{0\parallel}}{\Omega L_{\perp}}, \quad (5.10)$$

por lo cual

$$E_{2D} \sim t^{-1/2} \quad (5.11)$$

y

$$l_{\perp}(t) \sim t^{1/4}. \quad (5.12)$$

En el caso helicoidal se puede utilizar la ecuación (4.36) y se obtiene

$$\frac{dE_{2D}}{dt} \sim \frac{E_{2D}^7 l_{0\parallel}^3}{\Omega^5 L_{\perp}^3}, \quad (5.13)$$

entonces

$$E_{2D} \sim t^{-1/6} \quad (5.14)$$

y

$$l_{\perp}(t) \sim t^{1/12}. \quad (5.15)$$

Cuadro 5.1: Parámetros utilizados en las simulaciones: viscosidad cinemática ν , frecuencia de rotación Ω , número de Reynolds Re , número de Reynolds basado en la escala de Taylor Re_λ , número de Rossby Ro , número de Rossby en la micro escala Ro^ω , y una breve descripción de espectro de energía inicial $E(k)$: la ley de potencias en las escalas grandes y el rango de escalas en donde dicha ley se satisface. Los valores de Re , Ro , y Ro^ω se dan a $t = 0$ y a $t = 20$ entre paréntesis. Todas las simulaciones fueron realizadas con $N = 256$ puntos de grilla y usando el modelo e subgrilla descripto en el capítulo 2.

Sim.	ν	Ω	Re	Ro	Ro^ω	$E(k)$ Inicial
A	$1,3 \times 10^{-4}$	0	1580(330)	$\infty(\infty)$	$\infty(\infty)$	k^2 (1 – 40)
B	$1,3 \times 10^{-4}$	33	1580(1090)	0,15(0,004)	0,9(0,024)	k^2 (1 – 40)
C	$1,3 \times 10^{-4}$	0	1280(150)	$\infty(\infty)$	$\infty(\infty)$	k^4 (1 – 40)
D	$1,3 \times 10^{-4}$	33	1285(360)	0,18(0,002)	1,0(0,015)	k^4 (1 – 40)

5.3. Resultados numéricos

En este capítulo se estudia numéricamente el decaimiento de la turbulencia con condiciones iniciales de Saffman. Ya que en el capítulo anterior se estudió con detalle el efecto de la anisotropía y la intermitencia, interesa estudiar aquí los cambios introducidos en el decaimiento por un espectro inicial de Saffman $E(k) \sim k^2$ en lugar del espectro de Batchelor $E(k) \sim k^4$. Para estudiar sólo este efecto, se usaron condiciones iniciales lo más isótropas posibles generándolas a partir de un campo de velocidades aleatorio utilizando la descomposición de Craya-Herring [74, 125]. También por razones de claridad, se consideran solamente condiciones iniciales no helicoidales (algunas simulaciones de flujos helicoidales que muestran el decaimiento de la energía $\sim t^{-1/6}$ fueron discutidas en el capítulo anterior).

Se presentan a continuación resultados derivados de cuatro simulaciones numéricas cuyos parámetros pueden verse en la tabla 5.1. Las simulaciones tienen inicialmente un espectro isótropo $E(k) \sim k^2$ entre $0 < k \leq 40$ para los casos A y B, y $E(k) \sim k^4$ entre $0 < k \leq 40$ para los casos C y D. Las simulaciones A y C son isótropas y homogéneas (sin rotación) mientras que las simulaciones B y D son rotantes y homogéneas y por lo tanto desarrollan anisotropía a medida que transcurre el tiempo. Aunque los casos $\sim k^4$ fueron analizados en el capítulo anterior, son considerados en este capítulo solamente con fines comparativos.

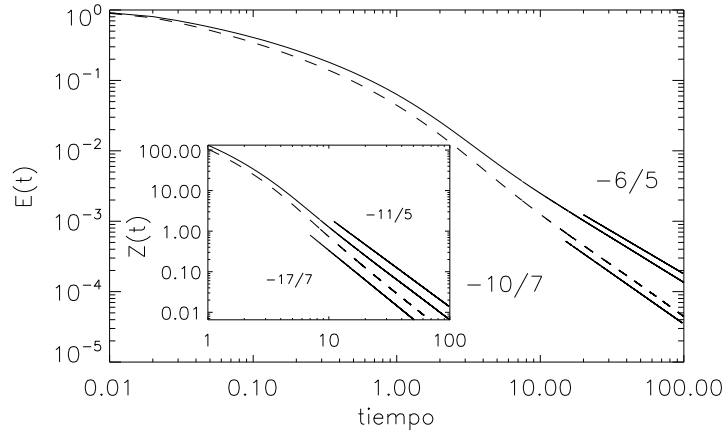


Figura 5.3: Evolución de la energía total para las simulaciones A ($E(k) \sim k^2$, trazo continuo) y C ($E(k) \sim k^4$, guiones). Luego de un transitorio inicial hasta $t \approx 10$, se observan decaimientos con exponentes $\approx -6/5$ y $\approx -10/7$ respectivamente, que se indican a modo de referencia. Recuadro: decaimiento de la enstrofia para las mismas simulaciones. Luego de $t \approx 10$, los decaimientos se aproximan a $t^{-11/5}$ y $t^{-17/7}$.

5.3.1. Flujos sin rotación

La figura 5.3 muestra el decaimiento de la energía y la enstrofia para las simulaciones no rotantes A y C. Luego de un transitorio hasta $t \approx 10$, ambas simulaciones decaen con leyes diferentes. En la simulación A, la energía decae aproximadamente como $E \sim t^{-6/5}$, en buen acuerdo con la ecuación (5.4), y como se espera a partir de la forma del espectro $\sim k^2$ en las escalas grandes. La tasa de decaimiento de la enstrofia es mayor, siendo cercana a $Z \sim t^{-11/5}$. Esto es consistente con los argumentos fenomenológicos presentados en el capítulo anterior (ecuación 4.46). Respecto a la simulación C, el decaimiento de la energía $\sim t^{-10/7}$ es consistente con la ecuación (4.31) para turbulencia de Batchelor, mientras que la enstrofia decae aproximadamente como $Z \sim t^{-17/7}$, consistente con la ecuación (4.46). Todos estos resultados son compatibles con resultados anteriores, tanto numéricos como teóricos [77, 83, 179].

La figura 5.4 muestra la evolución del espectro de energía isótropo para la simulación A entre los tiempos $t = 0$ y $t = 20$. En los números de onda más chicos, la ley inicial k^2 es aproximadamente preservada al transcurrir el tiempo, mientras que en las escalas chicas el espectro decae por efecto de la disipación. Este comportamiento es consistente con una posible conservación

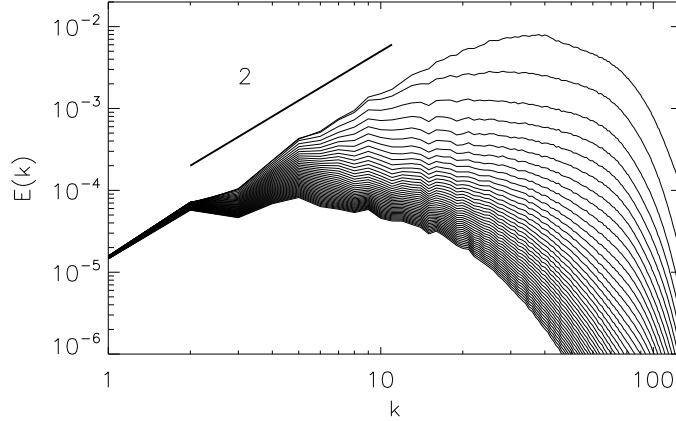


Figura 5.4: Evolución del espectro de energía isotrópico $E(k)$ para la simulación A desde $t = 0$ hasta $t = 20$ con incrementos temporales $\Delta t = 0,5$. Notar que en las escalas más grandes, la forma del espectro inicial $\sim k^2$ se preserva aproximadamente en el tiempo.

de L .

La predicción $E \sim t^{-6/5}$ para la simulación A asume un valor constante de L en el tiempo. Para verificar esto explícitamente, y para estudiar si L se mantiene constante aún en el caso rotante con espectro inicial $E(k) \sim k^2$, se muestra la evolución temporal de la magnitud L para las simulaciones A (sin rotación) y B (con rotación) en la figura 5.7 (a). La integral L fue estimada de dos maneras. Por un lado, se realizó un ajuste al espectro isotrópico con una función $\sim k^2$ para encontrar el prefactor multiplicativo en el término k^2 de la expansión (4.7). Dicho prefactor debiera ser proporcional a L siempre y cuando el espectro en el rango de números de onda chicos preserve su forma $\sim k^2$. Este método fue utilizado anteriormente en [77]. Por otro lado, se calculó la función de correlación a dos puntos a partir del espectro de energía utilizando la ecuación (4.47) [35] y luego se usó la ecuación (4.5) para calcular L . Dado que ambos métodos arrojaron resultados consistentes, en adelante se presentan únicamente aquellos obtenidos mediante el último.

En la simulación A, L decae hasta la mitad de su valor en $t \approx 10$ para luego variar muy lentamente, pudiéndose considerar aproximadamente constante a partir de dicho tiempo (notar que entre $t = 10$ y $t = 100$ la energía disminuye en más de un orden de magnitud). Sin embargo, L dista mucho de poder considerarse constante en la simulación B, por lo que se desestimarás su conservación al estudiar el caso rotante.

En las simulaciones C y D se encontraron resultados similares para la

evolución de I , como puede verse en la figura 5.7 (b). En C, I crece durante un breve transitorio, para luego mantenerse constante durante el rango de tiempo en el cual la energía decae de forma auto-similar. El comportamiento de I en turbulencia isótropa y homogénea es similar al encontrado en [77]. Por otra parte, la simulación con rotación D muestra un claro crecimiento monótono de I .

Mientras que el comportamiento de L e I en las simulaciones A y C es compatible con los argumentos teóricos y fenomenológicos discutidos en la sección 5.1 y en el capítulo anterior, el rápido crecimiento de dichas magnitudes en las simulaciones rotantes cuestiona nuevamente el uso de integrales isótropas al derivar leyes de decaimiento para flujos anisótropos.

5.3.2. Flujos con rotación

El análisis de las simulaciones A y C se basó en el espectro isótropo de energía y en la cuasi-invariancia de las integrales isótropas L e I . Sin embargo, el crecimiento de L (I) en la simulación B (D) sugiere la necesidad de usar otros argumentos para predecir el decaimiento de la energía en estos casos. Desde este punto de vista, se considerarán las cantidades anisótropas introducidas en el capítulo 4, L_{\perp} y I_{\perp} , y se mostrará que el estudio del decaimiento de la energía en los modos 2D y 3D separadamente, dá mejor acuerdo entre los argumentos teóricos y las simulaciones. El método es similar al utilizado en el capítulo 4 para turbulencia $\sim k^4$.

La evolución de la energía total en la simulación B muestra que el decaimiento es ligeramente más rápido que $E \sim t^{-3/5}$ como puede verse en la figura 5.5 (también se muestra el decaimiento para el caso $\sim k^4$ correspondiente a la simulación D con fines comparativos). El decaimiento de B se desvía entonces de la ley $\sim t^{-3/5}$ derivada por otros autores a partir de argumentos isótropos. De la misma forma, D se desvía del decaimiento $\sim t^{-5/7}$ y, estrictamente hablando, es difícil identificar alguna ley de potencia en cualquiera de los dos casos. Precisamente, como se ve en la figura 5.7, tanto L como I crecen rápidamente en flujos rotantes. Es esperable entonces que los argumentos basados en la cuasi-conservación de estas dos cantidades fallen al intentar predecir las tasas de decaimiento de la energía. La razón por la cual estos argumentos fallan en flujos rotantes puede ser asociada a la ruptura de la isotropía de los mismos.

En la figura 5.6 se muestra la evolución del espectro isótropo para la simulación B entre los tiempos $t = 0$ y $t = 20$. Al igual que para la simulación A, su dependencia $\sim k^2$ en las escalas grandes se preserva en el tiempo. Sin embargo, la amplitud del espectro en las escalas grandes aumenta con el tiempo, de acuerdo con la evolución creciente de L observada en la figura 5.7

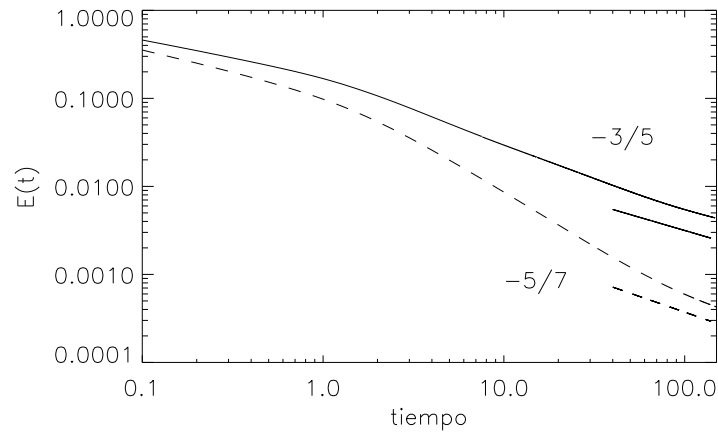


Figura 5.5: Decaimiento de la energía para las simulaciones B (trazo continuo) y D (guiones). Se muestran como referencia las leyes $t^{-3/5}$ y $t^{-5/7}$ correspondientes a predicciones fenomenológicas para turbulencia rotante del tipo de Saffman y de Batchelor respectivamente. Estas predicciones asumen la conservación de las magnitudes isotropas L e I respectivamente. Las predicciones no se ajustan satisfactoriamente a los resultados numéricos.

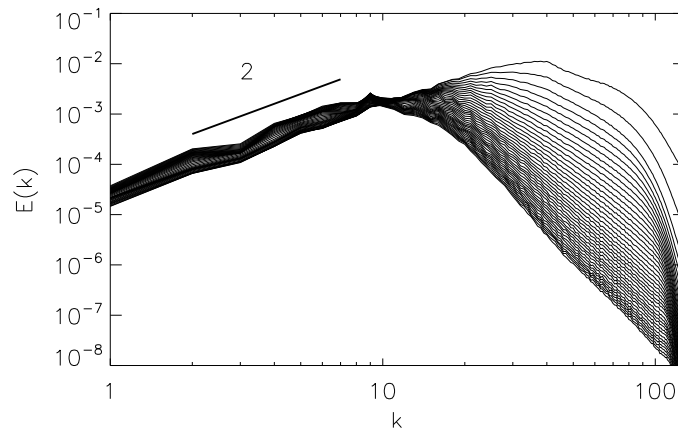


Figura 5.6: Evolución del espectro de energía isotropo $E(k)$ para la simulación B desde $t = 0$ hasta $t = 20$ con incrementos temporales $\Delta t = 0,5$. Notar que la forma $\sim k^2$ del espectro en las escalas grandes se conserva en el tiempo, aunque la amplitud total del espectro aumenta en dichas escalas.

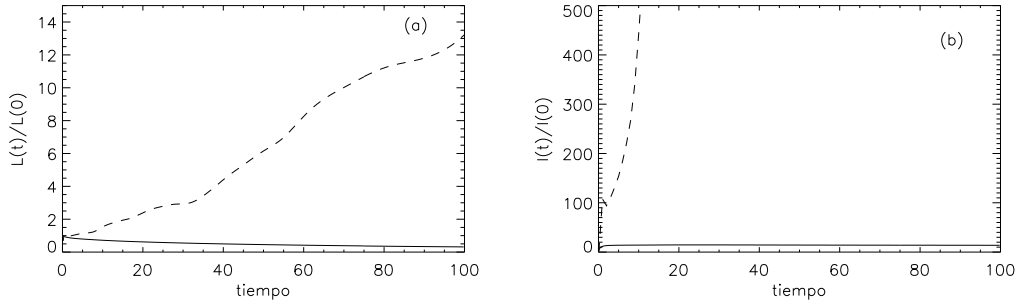


Figura 5.7: (a) Evolución de la integral L normalizada por su valor inicial $L(0)$ para la simulación isótropa A (trazo continuo) y para la simulación rotante B (guiones). (b) Evolución de la integral I normalizada por su valor inicial $I(0)$ para la simulación isótropa C (trazo continuo) y la simulación rotante D (guiones).

(b).

A partir de los argumentos esgrimidos en el capítulo 4, se espera que se preserven únicamente las correlaciones en la dirección perpendicular al eje de rotación, y que sean L_{\perp} o I_{\perp} las magnitudes que se mantienen constantes dependiendo de las condiciones iniciales. Es por esto que se analizan las simulaciones B y D con la ayuda de la expansión (4.18) y del espectro anisótropo $E(k_{\perp})$. Asimismo, se diferenciará entre la energía E_{2D} presente en la variedad lenta y aquella presente en los modos rápidos E_{3D} , como se hizo en el capítulo anterior.

En la figura 5.8 se muestra la evolución de $E(k_{\perp})$ en la simulación B. Dado que el espectro isótropo inicial para esta simulación se comporta como $E(k) \sim k^2$ en las escalas grandes, la ecuación (2.85) predice un espectro perpendicular $E(k_{\perp}) \sim k_{\perp}$ como efectivamente se observa en la figura. Por otro lado, los resultados muestran que tanto el espectro isótropo inicial $E(k)$ como $E(k_{\perp})$ mantienen su forma en las escalas grandes a lo largo del tiempo. Sin embargo, sólo $E(k_{\perp})$ mantiene su amplitud luego de un corto transitorio inicial, mientras que la amplitud de $E(k)$ en los mismos números de onda aumenta durante toda la simulación. Esto se encuentra intrínsecamente asociado a la conservación de L_{\perp} y al crecimiento monótono de L . La simulación D muestra un comportamiento similar para $E(k)$ y $E(k_{\perp})$ pero respetando leyes $\sim k^4$ y $\sim k_{\perp}^3$ respectivamente.

En las secciones 4.1 y 5.1 se concluyó que para espectros iniciales $E(k) \sim k^2$ ($\sim k^4$) se pueden esperar valores constantes de L_{\perp} (I_{\perp}) siempre y cuando las correlaciones en la velocidad decaigan lo suficientemente rápido. En ese

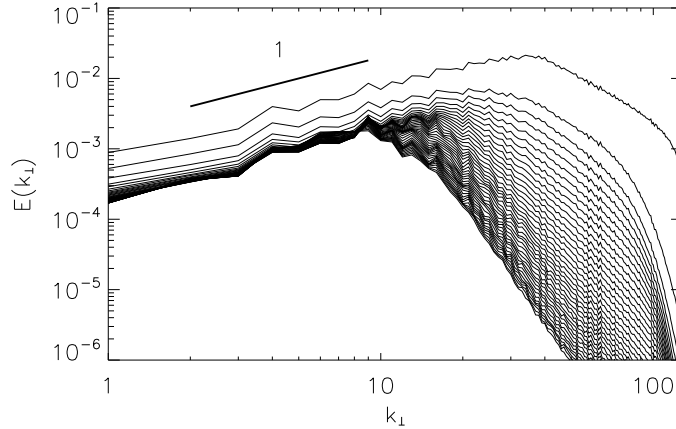


Figura 5.8: Evolución del espectro de energía perpendicular $E(k_{\perp})$ para la simulación B desde $t = 0$ hasta $t = 20$ con incrementos temporales $\Delta t = 0,4$. La forma inicial del espectro en las escalas grandes $\sim k_{\perp}$ se conserva aproximadamente durante toda la simulación.

caso, mediante análisis fenomenológico se derivó $E_{2D} \sim t^{-1/2}$ ($E_{2D} \sim t^{-2/3}$). Al igual que para L e I , L_{\perp} e I_{\perp} se estimaron utilizando dos métodos distintos: ajustando el espectro $E(k_{\perp})$ para valores chicos de k_{\perp} y utilizando las ecuaciones (4.48), (4.49), (4.16) y (4.17). Al igual que en el caso isótropo, ambas estimaciones dieron resultados similares y las curvas que se muestran a continuación se obtuvieron mediante el segundo método. En la figura 5.9 se muestra la evolución de L_{\perp} y I_{\perp} normalizadas por sus respectivos valores iniciales a $t = 0$ para las simulaciones rotantes B y D respectivamente. A tiempos cortos sus valores decrecen rápidamente, para mantenerse luego aproximadamente constantes durante el resto de la simulación. Notar que en las mismas simulaciones y en el mismo intervalo de tiempo L y I crecen al menos un orden de magnitud (ver la figura 5.7).

El decaimiento de la energía en los modos rápidos y lentos para la simulación B presenta propiedades muy interesantes (figura 5.10 (a)). E_{2D} crece inicialmente hasta $t \approx 10$, cuando alcanza su valor máximo y comienza a decaer. E_{3D} decrece más rápido que E_{2D} y a $t \approx 20$ ambas energías son comparables. A partir de ese instante, el sistema está dominado por la energía en los modos lentos. Pero ya desde $t \approx 10$ ambas energías decaen con leyes de potencia con distintos exponentes. El decaimiento de E_{2D} es cercano a $\sim t^{-1/2}$, de acuerdo con la ecuación (5.11) y con la conservación aproximada de L_{\perp} , mientras que E_{3D} decae aproximadamente como $\sim t^{-6/5}$, el valor esperado para el decaimiento de turbulencia isótropa del tipo Saffman según

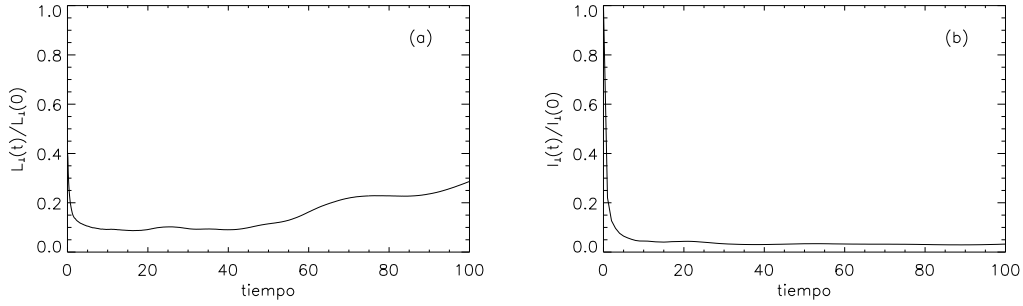


Figura 5.9: (a) Cociente $L_{\perp}(t)/L_{\perp}(0)$ en función del tiempo para la simulación B. (b) Evolución de $I_{\perp}(t)/I_{\perp}(0)$ para la simulación D. Notar que en ambos casos las magnitudes se mantienen aproximadamente constantes luego de un transitorio inicial.

la ecuación (5.4).

La simulación D también muestra diferentes decaimientos para E_{2D} y E_{3D} (figura 5.10 (b)). La energía en los modos lentos es compatible con $E_{2D} \sim t^{-2/3}$, en acuerdo con el resultado de la ecuación (4.41) para turbulencia de Batchelor discutido en el capítulo anterior y derivado suponiendo constancia de I_{\perp} . La energía 3D, por su parte, decae aproximadamente según $E_{3D} \sim t^{-10/7}$ como se espera en el caso isótropo.

En la figura 5.11 se compara en detalle la evolución de E_{2D} para las simulaciones B y D. Se observa claramente una diferencia en las leyes de potencia para cada caso. Este resultado indica que el decaimiento de la energía en sistemas rotantes en régimen turbulento es efectivamente afectado por las correlaciones en las escalas grandes, al observarse distintas leyes de potencia para espectros iniciales $E(k) \sim k^2$ ó $\sim k^4$.

5.3.3. Transferencia de energía entre modos

El hecho de que en todas las simulaciones rotantes las energías E_{2D} y E_{3D} respeten leyes de potencia distintas luego de un breve transitorio sugiere que el intercambio de energía entre modos rápidos y lentos es despreciable a tiempos largos, como es necesario para que relaciones de la forma de la ecuación (5.10) tengan validez. Los valores iniciales del número de Rossby en las simulaciones B y D corresponden al rango intermedio estudiado en [56]. En dicho rango diversos autores observaron una transferencia máxima de energía desde modos 3D hacia modos 2D a tiempos cortos, resultando en un posible crecimiento de E_{2D} a expensas de la energía transferida desde modos 3D (en acuerdo con la evolución de la figura 5.10). Sin embargo, el

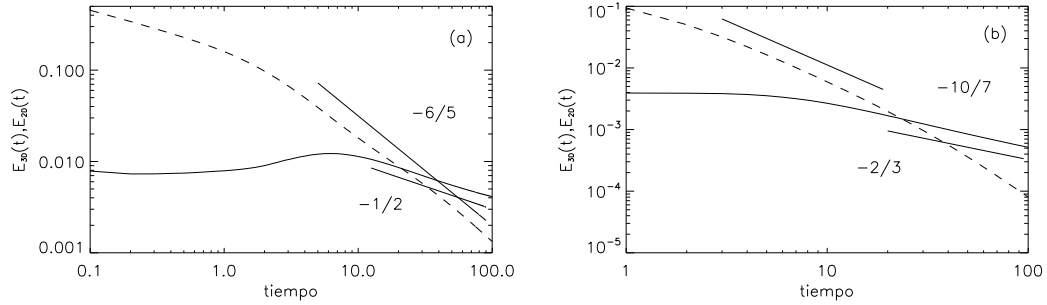


Figura 5.10: (a) Evolución temporal de la energía E_{3D} contenida en los modos con $k_{\parallel} \neq 0$ (guiones), y de la energía E_{2D} en los modos con $k_{\parallel} = 0$ (trazo continuo); ambas curvas corresponden a la simulación B. Se muestran como referencia las leyes $t^{-6/5}$ y $t^{-1/2}$ correspondientes a las predicciones fenomenológicas para el decaimiento de E_{3D} y E_{2D} para turbulencia de Saffman. (b) Mismas energías pero para la simulación D. Las leyes $t^{-10/7}$ y $t^{-2/3}$ corresponden a predicciones fenomenológicas para turbulencia de Batchelor.

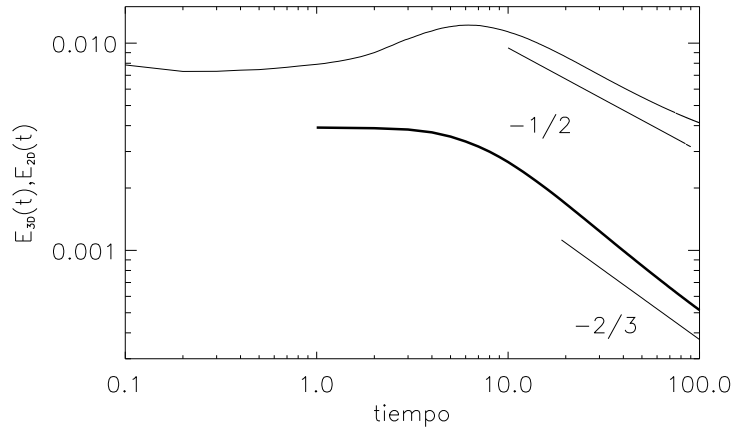


Figura 5.11: Decaimiento de E_{2D} en función del tiempo para las simulaciones B (trazo fino) y D (trazo grueso). Las predicciones $t^{-1/2}$ y $t^{-2/3}$ que se muestran como referencia asumen un comportamiento constante de cantidades anisótropas L_{\perp} y I_{\perp} respectivamente. Estos resultados fenomenológicos se cumplen mejor que los que se siguen de la conservación de integrales isótropas L e I (ver la figura 5.5).

decaimiento independiente de las energías 2D y 3D observado a tiempos más largos en la misma figura, implica un intercambio pequeño de energía entre modos 2D y 3D que no fue reportado antes.

Se puede obtener una medida cuantitativa del intercambio de energía entre los modos 2D y 3D por unidad de tiempo a partir del flujo de energía entre planos $k_{\parallel} = \text{cte.}$ en el espacio Fourier. La energía por unidad de tiempo atravesando cualquiera de estos planos está dada por

$$\Pi(k_{\parallel}) = - \iiint_{k_z=0}^{k_{\parallel}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^* \cdot (\widehat{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}})_{\mathbf{k}} dk_x dk_y dk_z, \quad (5.16)$$

donde las integrales en k_x y k_y corren sobre todo el rango disponible en la simulación y el sombrero denota transformada de Fourier (para mayor referencia ver las definiciones de flujos anisótropos y funciones de transferencia espectral en [57]). La energía transferida por unidad de tiempo desde modos 2D hacia modos 3D corresponde entonces a

$$S = \Pi(k_{\parallel} = 0). \quad (5.17)$$

Valores positivos de S representan transferencia de energía de modos 2D a modos 3D, es decir, energía del plano $k_{\parallel} = 0$ hacia valores mayores de k_{\parallel} , resultando en una fuente de energía 3D proveniente de modos 2D. La situación inversa se da cuando S es negativo, representando transferencia de energía 3D hacia el plano 2D (es decir, S es una fuente de energía 2D debido a pérdidas de energía 3D). Para que la transferencia de energía entre modos pueda suponerse despreciable, debe compararse con las tasas de decaimiento dE_{2D}/dt y dE_{3D}/dt . Si el cociente entre la transferencia S y las derivadas anteriores es pequeño, entonces cobra sentido considerar los decaimientos E_{2D} y E_{3D} en forma independiente.

La figura 5.12 muestra la evolución de S normalizada por $|dE_{2D}/dt|$ y $|dE_{3D}/dt|$ para las simulaciones B y D. En ambos casos S es negativa antes de $t \approx 10$, indicando transferencia de energía de modos 3D hacia modos 2D, y explicando el crecimiento inicial de E_{2D} en B. Notar que en esta simulación, $|dE_{2D}/dt|$ es nulo en $t \approx 5$, resultando en un valor infinito de $S/|dE_{2D}/dt|$ en la figura 5.12(a). Más adelante, para $t \approx 10$ en la simulación B y $t \approx 20$ en D, los valores de $S/|dE_{2D}/dt|$ y $S/|dE_{3D}/dt|$ se vuelven muy chicos, indicando una transferencia despreciable de energía entre modos 2D y 3D en comparación con las tasas de decaimiento de energía 2D y 3D. Este comportamiento justifica el uso de ecuaciones de balance independientes para E_{2D} y E_{3D} como se hizo en este capítulo y el anterior.

Vale la pena aclarar que el hecho de que $S/|dE_{2D}/dt|$ y $S/|dE_{3D}/dt|$ sean mucho menores que la unidad no implica que los modos 2D y 3D estén

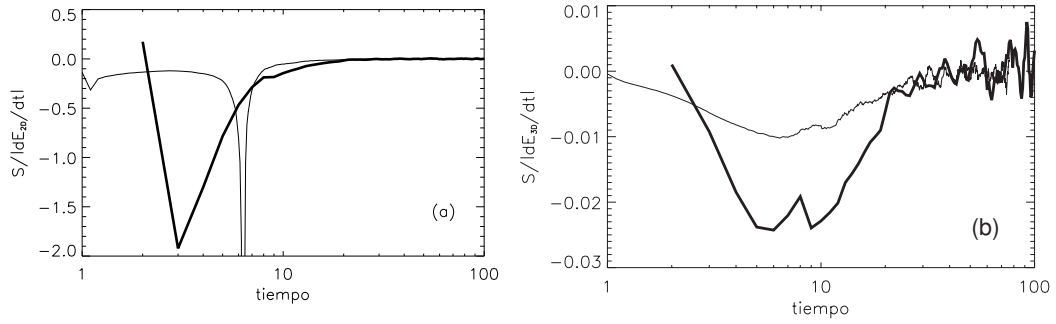


Figura 5.12: Energía intercambiada por unidad de tiempo S entre modos 2D y 3D, (a) normalizada por $|dE_{2D}/dt|$ y (b) normalizada por $|dE_{3D}/dt|$, para las simulaciones B (trazo fino) y D (trazo grueso). Los valores positivos de S representan flujo de energía desde modos 2D hacia modos 3D, mientras que valores negativos indican flujo desde modos 3D hacia modos 2D. A tiempos cortos S es negativo, indicando transferencia de energía hacia los modos 2D. El flujo S se vuelve despreciable luego de $t \approx 10$, momento a partir del cual se observan distintas leyes de potencia para E_{2D} y E_{3D} (comparar con la figura 5.10).

completamente desacoplados. Los resultados solamente implican que el intercambio de energía es muy pequeño durante el decaimiento auto-similar. Pero todavía pueden tener lugar interacciones triádicas entre dos modos rápidos y uno lento, siempre y cuando el modo lento actúe sólo como intermediario y no reciba ni entregue energía a los modos rápidos (ver [34] para una explicación más extensa sobre este tipo de interacciones). Tales interacciones entre modos lentos y rápidos que preservan la energía 2D y 3D por separado son necesarias para que dE_{2D}/dt sea proporcional a $1/\Omega$ en la ecuación (5.10), ya que de no existir dichas interacciones, el decaimiento de E_{2D} debería ser el mismo que para Navier-Stokes en dos dimensiones e independiente de Ω (notar que las interacciones triádicas entre tres modos lentos son trivialmente resonantes e independientes de Ω).

5.3.4. Distribución espectral de la energía

Para ganar un conocimiento más profundo sobre el desarrollo temporal de la anisotropía en el flujo no alcanza con analizar los espectros $E(k_{\perp})$ y $E(k)$. En las figuras 5.13 y 5.14 se presentan curvas de contorno de los espectros axisimétricos $e(k_{\parallel}, k_{\perp})$ para las simulaciones A, B y D respectivamente. Con el fin de obtener curvas de contorno circulares para las distribuciones espectrales isotópicas, como en el capítulo anterior, los espectros de las figuras se

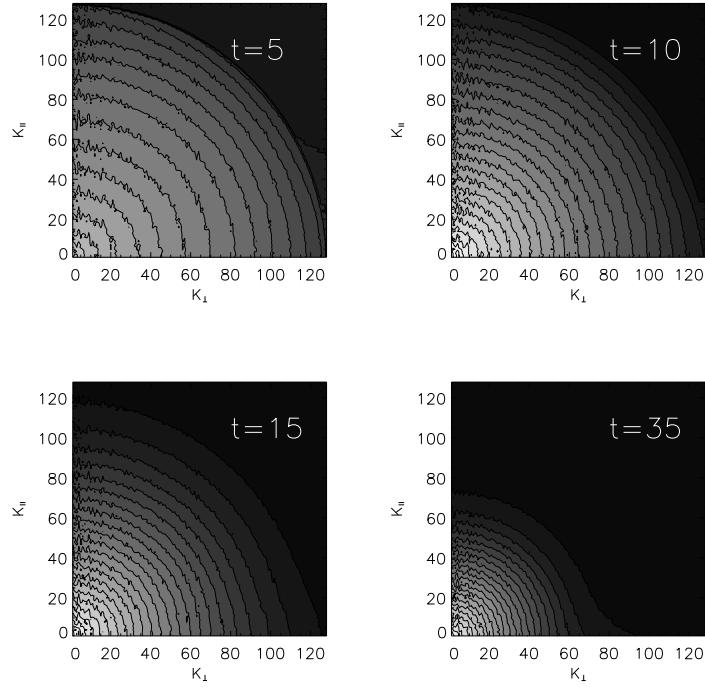


Figura 5.13: Curvas de nivel del espectro axisimétrico $e(k_{\parallel}, k_{\perp})/\text{sen}\theta$ a distintos tiempos para la simulación A. Los contornos circulares indican una distribución isotrópica de la energía.

dividieron por $\text{sen } \theta$, donde $\theta = \text{arctg}(k_{\parallel}/k_{\perp})$.

En ausencia de rotación (figura 5.13) el espectro muestra una distribución isotrópica evidenciada por contornos circulares que mantienen su forma mientras el flujo decae. Sin embargo, en presencia de rotación, la distribución espectral de energía se vuelve anisótropa, con más energía cerca del eje $k_{\parallel} = 0$ (figura 5.14). A tiempos tan tempranos como $t = 10$ el máximo de los espectros axisimétricos ya se encuentra en el plano $k_{\parallel} = 0$ como se indica mediante cruces en la misma figura. Esto concuerda con la transferencia de energía de modos 3D hacia modos 2D observada en la figura 5.10.

A partir de $t \approx 10$, el intercambio de energía entre modos 3D y 2D se vuelve despreciable y como fuera observado en la evolución de E_{2D} y E_{3D} , la energía en los modos 3D decae más rápido que la contenida en los modos 2D. Como resultado, la anisotropía espectral aumenta con el tiempo y la mayor parte de la energía se acumula cerca del eje $k_{\parallel} = 0$ a tiempos largos. Al mismo tiempo, el máximo del espectro se mueve lentamente a lo largo del eje $k_{\parallel} = 0$ hacia valores más chicos de k_{\perp} , aunque aún a tiempos largos el

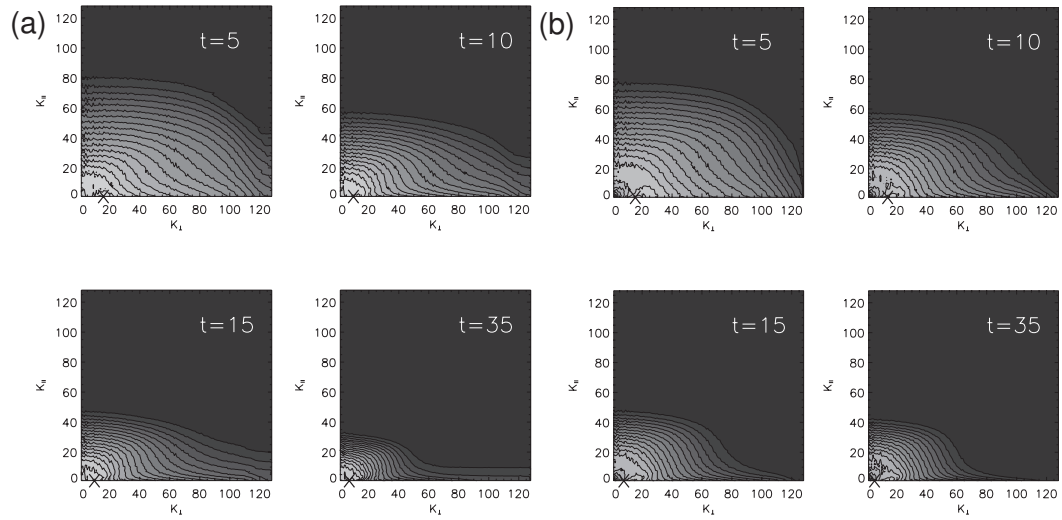


Figura 5.14: Curvas de nivel del espectro axisimétrico $e(k_{\parallel}, k_{\perp})/\sin\theta$ a distintos tiempos para la simulación B (a) y la simulación D (b). Para los casos rotantes la distribución espectral se vuelve axisimétrica, con más energía cerca del plano $k_{\parallel} = 0$. Las cruces indican el valor máximo del espectro en cada tiempo.

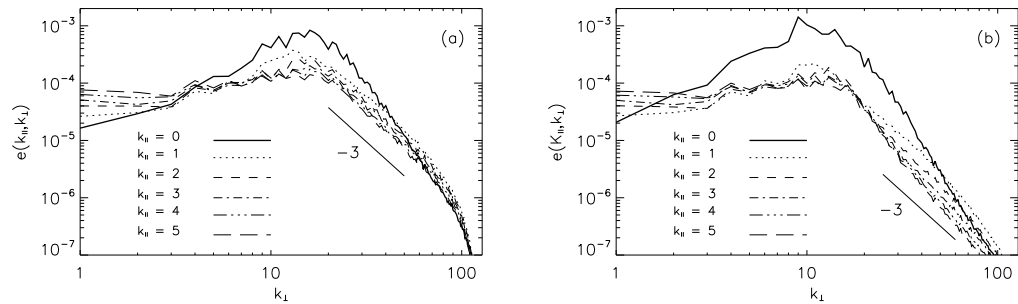


Figura 5.15: Espectro axisimétrico $e(k_{\parallel}, k_{\perp})$ para la simulación B para diferentes valores de k_{\parallel} a tiempos $t = 5$ (a) y $t = 10$ (b). Se muestra una ley k_{\perp}^{-3} como referencia.

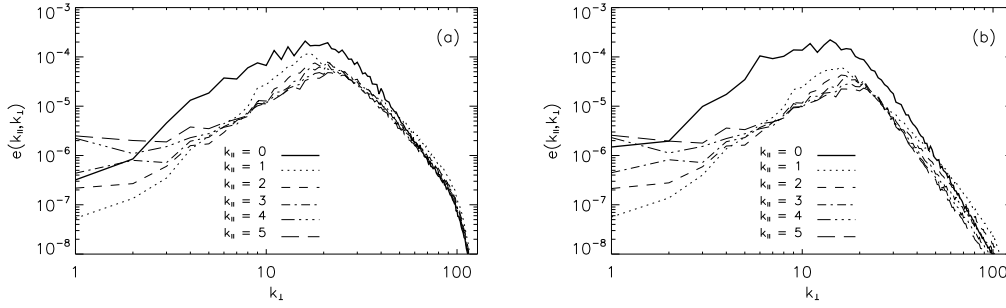


Figura 5.16: Espectro axisimétrico $e(k_{\parallel}, k_{\perp})$ para la simulación D para diferentes valores de k_{\parallel} a tiempos $t = 5$ (a) y $t = 10$ (b).

máximo se encuentra lejos de $k_{\perp} = 1$.

En las figuras 5.15 y 5.16 se estudia la forma del espectro cerca del plano $k_{\parallel} = 0$ para las simulaciones B y D a dos tiempos distintos $t = 5$ y $t = 10$. Ambas figuras confirman que la mayor parte de la energía se encuentra en modos 2D ($k_{\parallel} = 0$) y que la longitud de onda k_{\perp} del máximo de energía decrece lentamente con el tiempo. Por ejemplo, en la simulación B el máximo del espectro para $k_{\parallel} = 0$ se encuentra en $k_{\perp} \approx 17$ a $t = 5$, en $k_{\perp} \approx 13$ a $t = 10$ y en $k_{\perp} \approx 8$ a $t = 35$.

El espectro para modos con $k_{\parallel} = 0$ muestra una pendiente positiva para números de onda pequeños, y dicha pendiente preserva aproximadamente su valor mientras el sistema evoluciona. Por lo tanto, los espectros $e(k_{\parallel}, k_{\perp})$ para $k_{\parallel} \geq 1$ son aproximadamente planos para números de onda chicos, y presentan una pendiente compatible con k_{\perp}^{-3} , especialmente para tiempos tempranos y para el espectro correspondiente a $k_{\parallel} = 1$. Esto es consistente con la ley $e(k_{\parallel}, k_{\perp}) \sim k_{\parallel}^{-1/2} k_{\perp}^{-3}$ válida para $k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$, derivada a partir de ecuaciones para turbulencia de ondas inerciales en [96] y también observada en simulaciones numéricas en [177].

5.4. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se presentaron argumentos fenomenológicos para predecir el decaimiento de turbulencia rotante con espectro de Saffman, y se analizaron simulaciones numéricas de decaimiento libre de flujos turbulentos en dominios periódicos y en el régimen de números de Rossby grandes a intermedios ($Ro \rightarrow \infty$ y $Ro \approx 0,1$). Se recuperaron los resultados conocidos anteriormente para el decaimiento de turbulencia isótropa $\sim k^2$, verificando asimismo que la integral L se mantiene aproximadamente constante a lo lar-

go de la simulación. Por otro lado, se analizó el caso de interés para esta tesis de turbulencia rotante. En ese caso fue difícil identificar un decaimiento auto-similar para la energía total, y se observó que para condiciones iniciales de Saffman la integral isótropa L crece rápidamente durante toda la simulación. Por otro lado, la energía E_{2D} (contenida en $k_{\parallel} = 0$) y la energía E_{3D} (contenida en el resto del espacio Fourier) evolucionan según leyes de potencia distintas e independientes una de la otra. Estas leyes de potencia son compatibles con las predicciones fenomenológicas que asumen valores de L_{\perp} aproximadamente constantes durante el decaimiento auto-similar, comportamiento que también fue verificado en las simulaciones.

Las distintas leyes observadas para $E_{2D}(t)$ y $E_{3D}(t)$ en este capítulo y en el anterior requieren que la transferencia de energía entre los modos rápidos y los modos lentos sea despreciable. Esto se verificó estudiando en las simulaciones el flujo de energía entre planos $k_{\parallel} = \text{cte.}$ en el espacio Fourier. Los resultados mostraron que la energía se transfiere inicialmente de los modos 3D a los 2D, como se espera en turbulencia rotante para números de Rossby intermedios [56]. Sin embargo, más tarde el flujo de energía entre modos 2D y 3D se vuelve despreciable. En buen acuerdo con esto, las curvas de nivel de la distribución espectral axisimétrica de energía muestran que en presencia de rotación la energía se acumula rápidamente en el plano $k_{\parallel} = 0$ y que luego del transitorio la anisotropía aumenta con el tiempo como resultado de las distintas tasas de decaimiento de la energía E_{2D} y E_{3D} .

Los resultados obtenidos en este capítulo, junto con los del capítulo anterior, brindan una descripción completa de las leyes de decaimiento que puede sufrir la turbulencia rotante. En particular, dado el contenido de helicidad inicial en el flujo, si el flujo está confinado o no, y conocida la correlación inicial del campo de velocidad en escalas grandes (o equivalentemente, la forma del espectro), pueden predecirse las leyes de decaimiento auto-similar que seguirá la energía en los modos lentos y los modos rápidos. En el próximo capítulo se considera el decaimiento de flujos rotantes y estratificados, en el marco particular de la aproximación cuasi-geostrófica de superficie, de interés en flujos atmosféricos y oceánicos.

Capítulo 6

Aproximación cuasi-geostrófica de superficie

6.1. Introducción

En los capítulos anteriores, se mostró que la presencia de helicidad en flujos rotantes retrasa el decaimiento de la turbulencia y de las estructuras en el seno del fluido, tal como fuera propuesto originalmente por Lilly para flujos atmosféricos [18]. Se encontraron además otros mecanismos que afectan al decaimiento, como ser la anisotropía inicial, la correlación inicial del campo de velocidades en escalas grandes, el confinamiento del flujo y la presencia de estructuras coherentes.

La extensión de estos resultados a flujos atmosféricos requiere considerar otros efectos físicos como el de la estratificación. En este capítulo se considera un modelo simplificado de flujos rotantes y estratificados como una primera extensión y aplicación de los resultados anteriores, con especial énfasis en el efecto de las estructuras coherentes en las escalas más grandes en el decaimiento del flujo. Para dicho fin, será necesario introducir algunas herramientas nuevas en el marco de esta tesis, pero usuales en el estudio de flujos turbulentos.

La necesidad de estudiar la dinámica de flujos atmosféricos y oceánicos generó una gran variedad de modelos aproximados derivados a partir la ecuación de Navier-Stokes en tres dimensiones para flujos rotantes y estratificados (ver ejemplos en [24, 33, 127]).

Una descripción bastante completa de los flujos estratificados puede obtenerse usando la aproximación de Boussinesq, en la cual se ignoran las variaciones de la densidad excepto cuando se encuentra acoplada a la gravedad (término de Buoyancy), es decir, se permiten desviaciones de la densidad, la

presión y la temperatura respecto al balance hidrostático en la dirección vertical pero la densidad se considera constante en el plano horizontal. En esta aproximación, el flujo continúa considerándose incompresible pero $u_z \neq 0$.

Uno de los modelos más simples corresponde a la llamada aproximación geostrófica, en donde se resuelve una ecuación hidrostática para la dirección vertical, al suponerse nula la componente vertical de la velocidad ($u_z = 0$), mientras que en el plano horizontal se resuelve un balance lineal entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión.

De la aproximación de Boussinesq se desprende también otra familia de modelos, relacionados con la llamada aproximación cuasi-geostrófica (QG). Dicha aproximación fue derivada en el capítulo 2 a partir de las ecuaciones de Boussinesq. Desarrollado principalmente por Charney [23–25], aunque esbozado antes por Rossby [128], QG es el primer modelo aplicable a escalas sinópticas (~ 100 km) que permitió realizar un tratamiento analítico de los movimientos atmosféricos y oceánicos básicos para números de Rossby pequeños.

La ecuación cuasi-geostrófica de superficie o SQG (del inglés “surface quasi-geostrophic”) fue introducida originalmente como un modelo para regiones de la atmósfera o los océanos cercanas a superficies de contorno, tales como la superficie oceánica o la tropopausa. Es así que Blumen [26] desarrolló el modelo de superficie SQG cuya dinámica es influenciada enteramente por la evolución de la temperatura potencial (o la densidad) en la superficie. Este modelo es utilizado actualmente para estudiar la dinámica de las altas capas de la tropósfera [27–29] y de las capas superiores del océano con relativa precisión hasta aproximadamente los 500 m de profundidad [30–32].

Más allá de las potenciales aplicaciones atmosféricas u oceánicas, la ecuación SQG ha despertado gran interés desde un punto de vista enteramente matemático. Esto se debe a que, a pesar de representar un sistema bidimensional, la dinámica de la ecuación SQG comparte similitudes con la ecuación de Euler en tres dimensiones. Varios trabajos matemáticos y numéricos se han dedicado a estudiar si los flujos SQG desarrollan singularidades en el gradiente del campo escalar (la temperatura o la densidad) a partir de condiciones iniciales suaves y en tiempo finito [129–131, 133]. También se han realizado estudios numéricos comparando la dinámica de sistemas SQG con y sin viscosidad [134]. Recientemente se le ha prestado mayor atención desde el punto de vista físico a la presencia de cascadas en los sistemas SQG, al encontrarse que las escalas grandes de estos sistemas poseen propiedades de invariancia conforme [135].

Antes de que se considere el decaimiento de turbulencia en flujos SQG, se debe considerar una de las preguntas fundamentales a la hora de estudiar la dinámica de la atmósfera y los océanos: la forma a través de la cual se

establece el espectro de equilibrio de energía y el tipo de transferencia y acoplamiento que se desarrolla entre distintas escalas. Interesará el caso de flujos bajo la aproximación SQG. Como se vió en los capítulos anteriores, conocer el espectro de energía es necesario para poder predecir el decaimiento. En particular, sistemas SQG disipativos y en presencia de un forzante externo han sido estudiados en simulaciones numéricas, incluyendo sus leyes de escala y la dirección de cascadas [136–138].

Una forma de estudiar este problema es mediante ensambles de Gibbs. Ensamblés clásicos de Gibbs han sido aplicados extensamente en el estudio de representaciones de Galerkin de sistemas turbulentos. En general, los ensambles clásicos de Gibbs pueden aplicarse a sistemas con cantidades cuadráticas conservadas y que satisfacen el teorema de Liouville, el cual implica la incompresibilidad del flujo en el espacio de fases (por ejemplo, el espacio complejo de modos Fourier). La ecuación SQG cumple estas condiciones [157]

En [140] se pueden encontrar los primeros estudios sobre la mecánica estadística de distribuciones discretas de vórtices en flujos bidimensionales utilizando un formalismo Hamiltoniano. Más tarde se mostró en [126] que la estadística de Gibbs puede ser aplicada a las ecuaciones hidrodinámicas y magnetohidrodinámicas (MHD). Esto permitió realizar estudios de distribuciones continuas de vorticidad en flujos invíscidos 2D [141–143, 180], en donde se derivaron los espectros de equilibrio para las magnitudes cuadráticas conservadas. Como continuación de [141], el espectro de equilibrio para flujos dados por la ecuación de Euler 3D fue considerado en [145]. Soluciones de equilibrio para flujos magnetohidrodinámicos ideales (3D) fueron investigadas en [144] y recientemente el enfoque fue extendido a las ecuaciones Hall-MHD en [147].

En el estado de equilibrio absoluto, los campos poseen estadística Gaussiana y las magnitudes cuadráticas conservadas del sistema poseen temperaturas asociadas, que pueden ser tanto positivas como negativas. En el primer caso, se dice que la cantidad termaliza y se distribuye igualmente en todos los modos del sistema. En el segundo, la cantidad condensa y se acumula en los modos más bajos. Sin embargo, los sistemas disipativos turbulentos están lejos del equilibrio ya que el efecto de la viscosidad evita la relajación hacia un estado de equilibrio ideal, dando lugar a soluciones con flujo distinto de cero (cascadas). Es así como una comparación directa con soluciones en equilibrio no es del todo adecuada. A pesar de esto, los ensambles de Gibbs son útiles para predecir la dirección de las cascadas en muchos sistemas disipativos forzados, dependiendo de si la magnitud de interés termaliza o condensa en el sistema invíscido truncado (ver [143, 145, 148, 149]). Sin embargo, es importante notar que no todas las cascadas inversas en sistemas disipativos forzados están asociadas con condensados en el equilibrio estadístico del

sistema ideal truncado [49, 150]. Un ejemplo es el caso de turbulencia rotante 3D en donde el estudio de un sistema inviscido truncado muestra que el sistema relaja hacia un estado termalizado con la energía distribuida isotrópamente en todas sus escalas, mientras que el sistema forzado con viscosidad presenta una cascada inversa de energía hacia escalas grandes. La presencia de rotación en el sistema inviscido sólo retrasa el tiempo de relajación hacia el equilibrio [181].

Además, estudios recientes sobre transitorios y estados cuasi-estables en flujos inviscidos truncados mostraron que bajo ciertas condiciones los modos no termalizados se comportan como en el caso viscoso (ver por ejemplo [151–154]), indicando que se puede extraer más información de los ensambles de Gibbs que sólo la dirección de las cascadas. En particular, se encontró que a tiempos cortos y a medida que el sistema evoluciona hacia el equilibrio, se puede hacer una comparación directa entre la evolución del sistema inviscido y del viscoso considerando en el sistema inviscido al efecto de los modos que ya han termalizado como una viscosidad efectiva que actúa sobre los modos no termalizados [151, 152]. La validez de esta analogía fue verificada en varios sistemas, incluyendo las ecuaciones de Euler en 3D [151–153], flujos rotantes en 3D [150], MHD en 2D [146], y condensados de Bose-Einstein usando las ecuaciones de Gross-Pitaevskii [156]. En este último caso las ecuaciones truncadas permitieron el estudio de la termalización de condensados de Bose-Einstein a temperatura finita.

En este capítulo se utilizan ensambles de Gibbs clásicos para investigar soluciones de equilibrio de las ecuaciones truncadas de sistemas SQG inviscidos. En particular, se derivan soluciones teóricas para los espectros de equilibrio de la energía y la enstrofia, y se verifica numéricamente la convergencia de las soluciones del sistema SQG truncado con las soluciones estadísticas de equilibrio, comparando con resultados numéricos.

Las soluciones de equilibrio estadístico indican que la enstrofia termaliza mientras que la energía condensa, en buen acuerdo con resultados numéricos previos donde se reporta una cascada directa de enstrofia y una cascada inversa de energía para el caso disipativo forzado [136, 139]. Durante el transitorio anterior a la solución de equilibrio, se observa en el caso ideal el desarrollo de un espectro inercial que coincide con el obtenido anteriormente en simulaciones del sistema viscoso, a diferencia de simulaciones previas del sistema inviscido donde se observaron espectros más empinados [134]. Se presenta luego una analogía entre la fracción sin termalizar de la energía y la enstrofia en las simulaciones inviscidas con el decaimiento libre de la energía y la enstrofia en las ecuaciones SQG con viscosidad para números de Reynolds grandes. Esta analogía permite identificar comportamientos asintóticos del decaimiento del sistema para números de Reynolds muy grandes. Los

resultados de este capítulo fueron publicados en [170]

6.2. Ensamble canónico en la aproximación SQG

El sistema considerado en este capítulo corresponde a un fluido en dos dimensiones, incompresible y cuya dinámica responde a la aproximación SQG. Dicha aproximación suele presentarse en la literatura como parte de una familia de ecuaciones para la advección de un escalar activo [136]

$$q = (-\Delta)^{\alpha/2}\psi, \quad (6.1)$$

donde ψ es la función corriente tal que $\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \hat{z})$.

Estas ecuaciones incluyen la ecuación SQG para $\alpha = 1$ [26, 161], la ecuación para la vorticidad en un flujo Euleriano si $\alpha = 2$, y la ecuación de movimiento para un flujo poco profundo en un dominio rotante forzado por una fuente interna de calor uniforme si $\alpha = 3$ [162]. Asimismo, el caso $\alpha = -2$ corresponde a la ecuación QG de aguas poco profundas en el límite de escalas grandes en comparación con la escala de deformación [163].

En todos estos modelos el flujo se describe a través de la función corriente ψ cuya dinámica respeta las llamadas ecuaciones de turbulencia- α , que en el caso ideal generalmente se escriben en la forma

$$\partial_t q + [\psi, q] = 0, \quad (6.2)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Poisson

$$[A, B] = \partial_x A \partial_y B - \partial_x B \partial_y A. \quad (6.3)$$

Es fácil ver que para $\alpha = 1$ las ecuaciones 6.1 y 6.3 corresponden a las ecuaciones SQG derivadas a partir de las ecuaciones de Boussinesq en el capítulo 2.

Para SQG, la ecuación (6.1) en el espacio Fourier se reduce a

$$\hat{q}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad (6.4)$$

mientras que la ecuación (6.2) resulta

$$\partial_t \hat{\psi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \left(\widehat{\partial_x q \partial_y \psi} - \widehat{\partial_x \psi \partial_y q} \right), \quad (6.5)$$

donde los sombreros denotan transformada de Fourier. La dinámica SQG ideal posee dos magnitudes cuadráticas conservadas, análogas a la energía y a la enstrofía en un fluido Euleriano en dos dimensiones. Se definen como

$$E = -\frac{1}{A} \int q\psi \, dx dy, \quad (6.6)$$

y

$$G = \frac{1}{A} \int q^2 \, dx dy, \quad (6.7)$$

donde A es el área total del dominio de integración. A continuación nos referiremos a dichas magnitudes como la pseudo-energía y pseudo-enstrofía respectivamente.

En el caso de un sistema SQG forzado con disipación, la teoría de Kolmogorov-Batchelor-Kraichnan (KBK) predice dos rangos inerciales para estas magnitudes [136]: una cascada inversa de pseudo-energía con espectros

$$E(k) \sim k^{-2}; \quad G(k) \sim k^{-1}, \quad (6.8)$$

y una cascada directa de pseudo-enstrofía con espectros

$$E(k) \sim k^{-8/3}; \quad G(k) \sim k^{-5/3}. \quad (6.9)$$

La pseudo-energía y la pseudo-enstrofía en cada modo Fourier \mathbf{k} se relacionan según

$$G(\mathbf{k}) = kE(\mathbf{k}) = |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2. \quad (6.10)$$

Usando que

$$\hat{u}_x(\mathbf{k}) = -ik_y \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad \hat{u}_y(\mathbf{k}) = ik_x \hat{\psi}(\mathbf{k}) \quad (6.11)$$

y que la relación entre la pseudo-energía y la función corriente en cada modo es

$$|\hat{\mathbf{u}}|^2 = (k_x^2 + k_y^2) |\hat{\psi}|^2 = k^2 |\hat{\psi}|^2, \quad (6.12)$$

se puede escribir a la pseudo-energía y a la pseudo-enstrofía en el espacio Fourier como

$$E = \sum_{\mathbf{k}/k \in N'} k |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2, \quad (6.13)$$

$$G = \sum_{\mathbf{k}/k \in N'} k^2 |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2, \quad (6.14)$$

donde $N' = \{1, \dots, N\}$ incluye a todos los grados de libertad del sistema.

A partir de estas relaciones se pueden derivar las soluciones de equilibrio estadístico para un sistema SQG truncado y sin viscosidad. En este contexto,

truncado significa que el espacio Fourier es limitado a un número finito de grados de libertad N .

La distribución canónica da la probabilidad de encontrar al sistema en una configuración con una dada pseudo-energía y pseudo-ensstrofia. En este caso esta dada por

$$P = \frac{1}{Z} e^{-(\beta E + \gamma G)}. \quad (6.15)$$

La función de partición Z se obtiene integrando dicha probabilidad en todo el espacio de fases y usando que

$$\int_{\text{espacio de fases}} P d\xi = 1, \quad (6.16)$$

con $d\xi = \prod_{\mathbf{k}} d\mathbf{u}_1(\mathbf{k}) d\mathbf{u}_2(\mathbf{k})$ el diferencial de volumen en el espacio de fases, y donde \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 se definen de forma tal que $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{u}_2(\mathbf{k})$. Se obtiene así

$$Z = \int_{\text{espacio de fases}} e^{-(\beta E + \gamma G)} d\xi. \quad (6.17)$$

Debido a la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (o $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$ en el espacio Fourier) las componentes de \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 se relacionan según

$$k_x \hat{u}_{1x} + k_y \hat{u}_{1y} = 0, \quad (6.18)$$

$$k_x \hat{u}_{2x} + k_y \hat{u}_{2y} = 0. \quad (6.19)$$

Utilizando las ecuaciones (6.12), (6.13) y (6.14),

$$E = \sum_{\mathbf{k}/k\epsilon N'} \frac{|\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2}{k}, \quad (6.20)$$

$$G = \sum_{\mathbf{k}/k\epsilon N'} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \quad (6.21)$$

y la función de partición resulta

$$\begin{aligned} Z &= \int e^{-\beta \sum \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2}{k} - \gamma \sum |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2} \prod_{\mathbf{k}/k\epsilon N'} d\mathbf{u}_1(\mathbf{k}) d\mathbf{u}_2(\mathbf{k}) \\ &= \prod_{\mathbf{k}/k\epsilon N'} 2\pi \int e^{-|\mathbf{u}_1(\mathbf{k})|^2 (\frac{\beta}{k} + \gamma)} |\mathbf{u}_1(\mathbf{k})| d\mathbf{u}_1(\mathbf{k}) \times \\ &\quad \times 2\pi \int e^{-|\mathbf{u}_2(\mathbf{k})|^2 (\frac{\beta}{k} + \gamma)} |\mathbf{u}_2(\mathbf{k})| d\mathbf{u}_2(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Sabiendo que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2(\frac{\beta}{k}+\gamma)} x dx = \frac{k}{2(\gamma k + \beta)}, \quad (6.23)$$

siempre y cuando $Re(\gamma + \beta/k) > 0$, la función de partición se reduce a

$$Z = \prod_{\mathbf{k}/k \in N'} \left(\frac{\pi k}{\gamma k + \beta} \right)^2 = \prod_{\mathbf{k}/k \in N'} Z_{\mathbf{k}} \quad (6.24)$$

A partir de la función de partición se pueden derivar los espectros medios para la pseudo-energía y la pseudo-estrofia por modo

$$E(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{2}{\gamma k + \beta}, \quad (6.25)$$

$$G(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \gamma} = \frac{2k}{\gamma k + \beta}. \quad (6.26)$$

Estos espectros dan la pseudo-energía y la pseudo-estrofia contenida en cada modo \mathbf{k} en el equilibrio. Notar su carácter isótropo, al depender únicamente del módulo del vector de onda. Suponiendo que los modos en cada capa k son lo suficientemente densos en todo el espectro [142], se pueden obtener los espectros isótropos usuales integrando las ecuaciones (6.25) y (6.26) a lo largo de circunferencias de radio k , de forma tal que $E(k) = \pi k E(\mathbf{k})$ y $G(k) = \pi k G(\mathbf{k})$. Se obtienen finalmente las expresiones para los espectros isótropos de pseudo-energía y pseudo-estrofia,

$$E(k) = \int E(\mathbf{k}) k d\varphi = \pi k E(\mathbf{k}) = \frac{2\pi k}{\gamma k + \beta}, \quad (6.27)$$

$$G(k) = \int G(\mathbf{k}) k d\varphi = \pi k G(\mathbf{k}) = \frac{2\pi k^2}{\gamma k + \beta}, \quad (6.28)$$

donde φ es el ángulo polar en el espacio Fourier en dos dimensiones.

Tanto la pseudo-energía como la pseudo-estrofia son magnitudes cuadráticas y, por ende, las expresiones (6.27) y (6.28) deben ser positivas. Pidiendo que la pseudo-energía y la pseudo-estrofia sean positivas para todo $k > 0$, aún en el límite de infinitos grados de libertad, se obtiene $\gamma > 0$. La relación $\gamma k + \beta > 0$ debe cumplirse para cada valor de k , y siendo entonces $k = 1$ el caso más restrictivo, se le debe pedir al sistema que satisfaga la condición

$$\gamma > -\beta. \quad (6.29)$$

Esta condición es suficiente para que la integral (6.23) converja. Por ende, como $\gamma > 0$ y β puede ser positiva o negativa, la pseudo-estrofia es la

magnitud que termaliza mientras que la pseudo-energía puede condensar en los números de onda más pequeños.

Se espera que a tiempos largos el sistema SQG truncado alcance las soluciones de equilibrio (6.27) y (6.28). Los valores de γ y β resultan unívocamente determinados por la cantidad total de pseudo-energía y pseudo-estrosfía contenida en las condiciones iniciales y pueden ser calculados resolviendo el sistema de ecuaciones

$$E(t = 0) = \sum_k \frac{2\pi k}{\gamma k + \beta}, \quad (6.30)$$

$$G(t = 0) = \sum_k \frac{2\pi k^2}{\gamma k + \beta}. \quad (6.31)$$

Estas ecuaciones se pueden convertir en dos ecuaciones polinómicas con dos incógnitas α y β . El número de términos en el lado derecho de las ecuaciones (6.30) y (6.31) depende del máximo número de onda que se preserva al truncar el sistema (en simulaciones numéricas dependerá de la resolución N). Al ser $E(t = 0)$ y $G(t = 0)$ conocidos, el sistema de ecuaciones 6.30 y 6.31 puede resolverse fácilmente en forma numérica. Los valores de (α, β) que se obtuvieron para las resoluciones y valores iniciales de E y G que se usarán en la próxima sección son: (346,23, -342,60) para $N = 32$, (1344,79, -1341,39) para $N = 64$, (5044,05, -5040,75) para $N = 128$, (19504,20, -19500,90) para $N = 256$, (77579,35, -77576,13) para $N = 512$ y (311246,27, -311243,06) para $N = 1024$.

6.3. Resultados numéricos

En esta sección se presentan simulaciones numéricas de las ecuaciones SQG. En primer lugar, se comparan resultados numéricos de espectros invíscidos a tiempos largos con los resultados teóricos derivados en la sección anterior. En la segunda parte se estudia la transición desde las condiciones iniciales hacia el espectro de equilibrio en simulaciones con mayor resolución espacial, y se compara el comportamiento de la fracción de pseudo-energía y pseudo-estrosfía no termalizada en los casos invíscidos con la pseudo-energía y la pseudo-estrosfía en las simulaciones con viscosidad. Finalmente, se usan los resultados para estudiar el decaimiento de la turbulencia SQG.

6.3.1. Simulaciones ideales

Se utilizó el mismo código pseudoespectral paralelizado que en los capítulos anteriores [58, 59], el cual fue extendido para resolver numéricamente la ecuación (6.5) en un dominio periódico de superficie $(2\pi)^2$. Para evolucionar las ecuaciones en el tiempo se utilizó el método de Runge-Kutta de segundo orden, y los términos no lineales se calcularon con la regla de los dos tercios. Vale la pena recordar que según esta regla, el espacio de Fourier para un sistema de N^2 puntos de grilla se encuentra truncado a un número de onda máximo dado por $k_{max} = N/3$. Bajo estas condiciones, los métodos pseudo-espectrales se vuelven no disipativos y conservan todos los invariantes cuadráticos en el espacio de Fourier truncado, resultando equivalentes a métodos Galerkin [22]. A modo de ejemplo, en simulaciones de la ecuación SQG ideal con resolución de 512^2 puntos de grilla y paso temporal $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$, la energía se conserva hasta el cuarto dígito significativo luego de 500 revoluciones de los vórtices más grandes en el dominio. Se utilizaron resoluciones espaciales entre 32^2 y 1024^2 puntos de grilla y la condición inicial para todas las simulaciones es una superposición de modos de Fourier con fases aleatorias, con un espectro de pseudo-energía $E(k) \sim k^{-2}$ para $1 \leq k \leq 4$ y nulo en otro caso.

Todas las simulaciones sin viscosidad evolucionan de la misma manera. Comienzan mostrando una termalización progresiva en la pseudo-enstrofia, de los modos de mayor a menor número de onda, alcanzando un estado de equilibrio luego de transcurrido un cierto tiempo que depende de la resolución espacial. Las simulaciones con mayor resolución demoran más tiempo en alcanzar el equilibrio en todas las escalas. Una vez alcanzado el estado de equilibrio, los espectros deberían ser compatibles con las soluciones (6.27) y (6.28) halladas anteriormente.

En la figura 6.1 se muestran los resultados numéricos para el espectro isótropo de pseudo-enstrofia una vez alcanzado el equilibrio en simulaciones ideales con 32^2 , 64^2 y 128^2 puntos de grilla. Los datos numéricos representados con diferentes símbolos se comparan con las predicciones teóricas indicadas con guiones. Los espectros numéricos son consistentes con la teoría en todos los números de onda, mostrando un máximo en $k = 1$ asociado a la condensación de la pseudo-energía, y un comportamiento $\sim k$ para números de onda mayores asociado a la termalización de la pseudo-enstrofia. Notar que el tiempo en el que se alcanza el equilibrio aumenta rápidamente con la resolución. Los resultados de la figura 6.1 corresponden a tiempos $t = 20$, $t = 1000$ y $t = 24000$ en orden creciente de resolución.

Simulaciones con mayor resolución $N = 256$, $N = 512$ y $N = 1024$ se muestran en la figura 6.2, todas a tiempo fijo $t = 200$. Para estas resoluciones

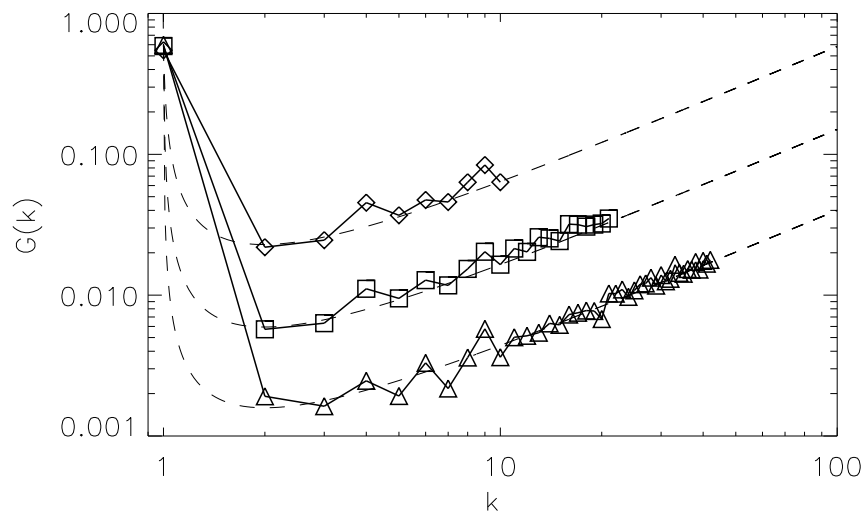


Figura 6.1: Espectros isotrópicos de la pseudo-energía para simulaciones ideales con 32^2 (rombos), 64^2 (cuadrados) y 128^2 (triángulos) puntos de grilla a tiempos $t = 20, 1000$ y 24000 respectivamente. La predicción utilizando el ensamble de Gibbs (ecuación 6.28) se muestra con guiones. Los resultados numéricos coinciden con la teoría en todo el rango de números de onda.

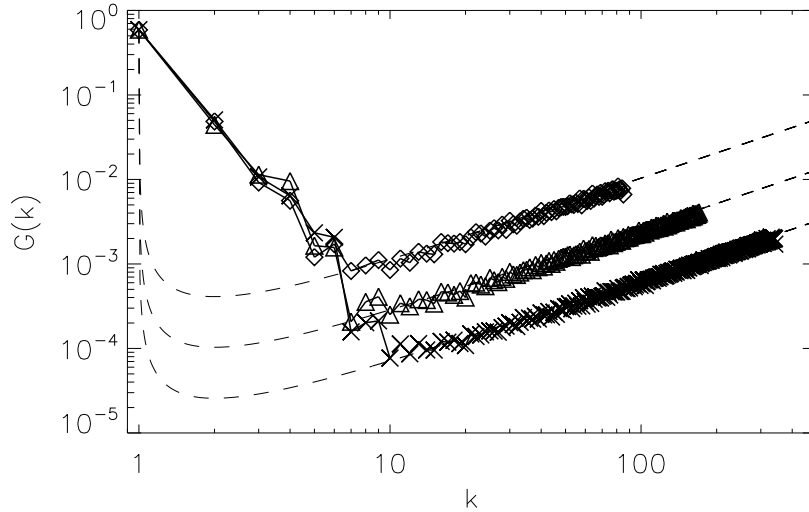


Figura 6.2: Espectros isotropos de la pseudo-estrofia para simulaciones ideales $N = 256$ (rombos), $N = 512$ (triángulos) y $N = 1024$ (cruces) en $t = 200$. La predicción teórica del ensamble de Gibbs (ecuación 6.28) se muestra con guiones. Al incrementar la resolución, aumenta el tiempo en el cual las escalas grandes alcanzan el equilibrio; sin embargo, la termalización en las escalas chicas se alcanza rápidamente en todas las resoluciones.

el proceso de termalización es más lento y la convergencia hacia la solución de equilibrio para los números de onda más pequeños requiere más tiempo. En la figura se presentan los resultados en un mismo instante con el propósito de comparar el grado de termalización alcanzado en cada sistema. Si bien las simulaciones se continuaron durante varios miles de unidades de tiempo, no se pudo alcanzar un estado de completo equilibrio para estas resoluciones. De todas maneras, los resultados numéricos y teóricos son consistentes a partir de números de onda medios en adelante.

El aumento del tiempo necesario para alcanzar la termalización a medida que la resolución aumenta puede verse en la figura 6.3, que muestra el tiempo t_* para el cual los sistemas con $N = 128, 256, 512$ y 1024 termalizan un porcentaje arbitrario (el 50%) de su pseudo-estrofia. Notar que la termalización ocurre predominantemente (y rápidamente) en números de onda grandes, de forma tal que alcanzar el equilibrio en los número de onda pequeños demora un tiempo apreciablemente mayor.

A partir de los resultados numéricos de las figuras 6.1 y 6.2 se concluye que para verificar la validez de la predicción teórica de los ensambles de

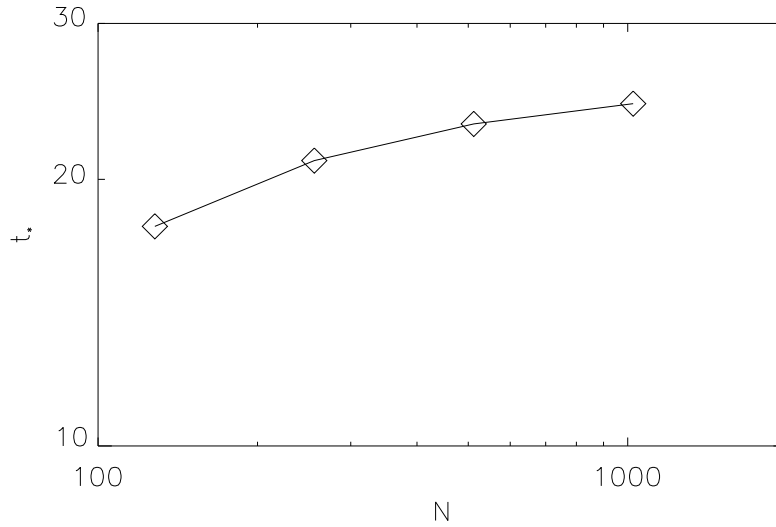


Figura 6.3: Tiempo t_* para el cual los sistemas ideales termalizan el 50% de su enstrofía en función de la resolución N . La forma creciente de esta función muestra que los sistemas demoran más tiempo en termalizar su pseudo-enstrofía a medida que aumenta el tamaño del sistema.

Gibbs alcanza con considerar resoluciones bajas, por ejemplo, $N = 64$. Sin embargo, y como se verá más adelante, para estudiar la transición que sufren estos sistemas al evolucionar hacia el equilibrio, las simulaciones con mayor resolución permiten identificar mejor las leyes de escala y comparar en forma más precisa con casos similares pero con viscosidad. Es por esto que en lo que resta de este capítulo se estudiará únicamente la simulación con mayor resolución $N = 1024$.

La figura 6.4 muestra la evolución temporal de los espectros de pseudo-energía y pseudo-enstrofía para la simulación $N = 1024$. A tiempos cortos, ambos espectros desarrollan rangos inerciales similares a los esperados para el decaimiento de un sistema viscoso, con pendientes compatibles con la fenomenología de Kolmogorov-Batchelor-Kraichnan (KBK) aplicada a la ecuación SQG [136]. El espectro de pseudo-enstrofía muestra una ley $\sim k^{-5/3}$ mientras que en el de pseudo-energía puede identificarse una ley $\sim k^{-8/3}$. Al evolucionar, la pseudo-enstrofía muestra una termalización progresiva comenzando en los números de onda más grandes. El rango con comportamiento viscoso-inercial observado inicialmente se acorta progresivamente a medida que el espectro termalizado $G(k) \sim k$ se ensancha, avanzando en dirección a números de onda menores. Se considera al mínimo del espectro de pseudo-enstrofía

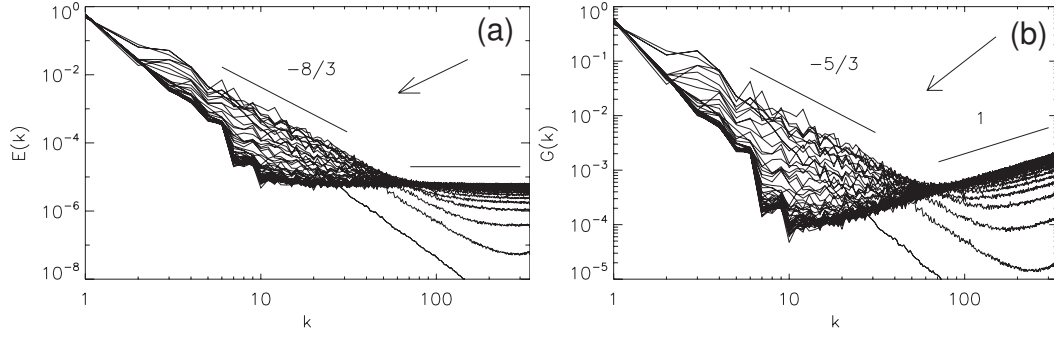


Figura 6.4: (a) Evolución del espectro de pseudo-energía para la simulación ideal con $N = 1024$ entre $t = 1$ y $t = 204$ con incrementos $\Delta t = 4$. Inicialmente se observa una ley $\sim k^{-8/3}$ seguida de un rango en equilibrio. Al transcurrir el tiempo, más modos se aproximan al equilibrio. La línea horizontal indica la predicción del ensamble de Gibbs. (b) Evolución del espectro de pseudo-estropía para los mismo tiempos que en (a). Inicialmente se observa una ley $\sim k^{-5/3}$ seguida de un rango en equilibrio. Más y más modos se aproximan al equilibrio a medida que el tiempo transcurre. La línea $\sim k$ indica la predicción del ensamble de Gibbs. Las flechas indican la dirección en la que evolucionan los espectros con el tiempo.

$k = k_{th}$ como al número de onda que divide estos dos rangos. En lo que a la pseudo-energía respecta, su espectro plano para $k > k_{th}$, y su valor máximo en $k = 1$ evidencian condensación de esta cantidad para valores pequeños de k , en lugar de la termalización para números de onda grandes observada en la pseudo-estropía.

A continuación se define la pseudo-energía y la pseudo-estropía termalizada como la suma de estas cantidades contenidas en los modos con $k > k_{th}$,

$$E_{th} = \sum_{k=k_{th}}^{k_{max}} E(k), \quad G_{th} = \sum_{k=k_{th}}^{k_{max}} G(k). \quad (6.32)$$

Asimismo, se pueden definir las pseudo-energía y pseudo-estropía no termalizadas como la diferencia entre el valor total de estas cantidades y sus valores termalizados, es decir,

$$E_{nth} = E - E_{th}, \quad G_{nth} = G - G_{th}. \quad (6.33)$$

En la figura 6.5 se muestra la evolución de E_{th} , E_{nth} , G_{th} y G_{nth} normalizados por E y G respectivamente. Inicialmente, E_{th} y G_{th} crecen monótonamente hasta converger a valores constantes a tiempos largos. Esto es consistente con lo observado en la figura 6.4, en donde más y más modos se

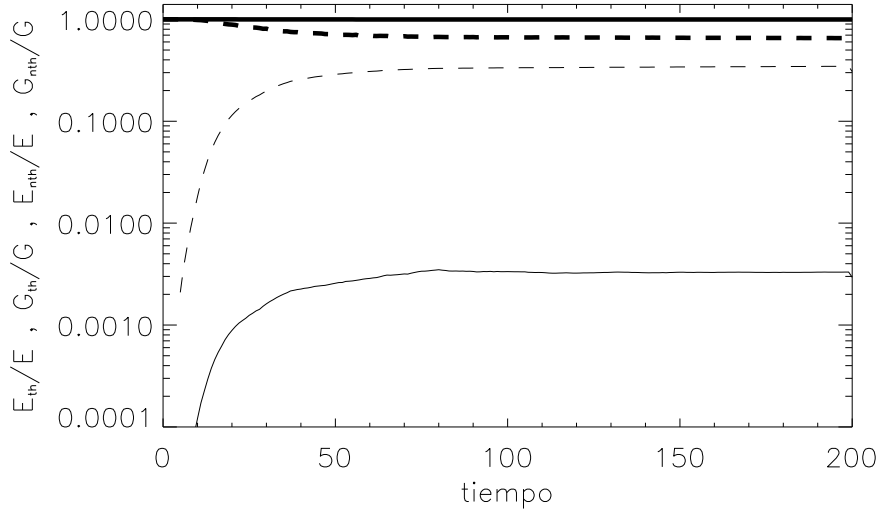


Figura 6.5: Evolución temporal de las pseudo-energía (trazo fino continuo) y pseudo-entropía termalizadas (trazo fino con guiones) normalizadas por la pseudo-energía y la pseudo-entropía total respectivamente, para la simulación con $N = 1024$. Ambas magnitudes crecen monótonamente hacia su valor asintótico de equilibrio. También se muestra la evolución de las pseudo-energía (trazo grueso continuo) y pseudo-entropía no termalizadas (trazo grueso con guiones) en la misma simulación, normalizadas respectivamente por el valor total de la pseudo-energía y la pseudo-entropía.

aproximan a la solución estadística de equilibrio con el transcurso del tiempo. La evolución decreciente de k_{th} que se muestra en la figura 6.6 también corrobora este comportamiento. Mientras que la mayor parte de la pseudo-energía condensa en $k = 1$, E_{th} continúa representando una pequeña fracción de la pseudo-energía total mientras que E_{nth} (que en este caso representa a la pseudo-energía condensada) se mantiene prácticamente constante. Por otro lado, G_{th} crece hasta representar una fracción mucho mayor de la pseudo-entropía total ya que su espectro termalizado sigue una ley $\sim k$ en números de onda grandes, conteniendo una fracción significativa de la entropía total del sistema.

Como se encontró en [152] para las ecuaciones de Euler truncadas, aún en un sistema inviscido la transferencia de entropía hacia modos termalizados antes de alcanzarse el equilibrio puede interpretarse como un transitorio en el cual los modos termalizados se comportan como una viscosidad efectiva actuando sobre los modos en el rango no termalizado. Esta viscosidad efectiva

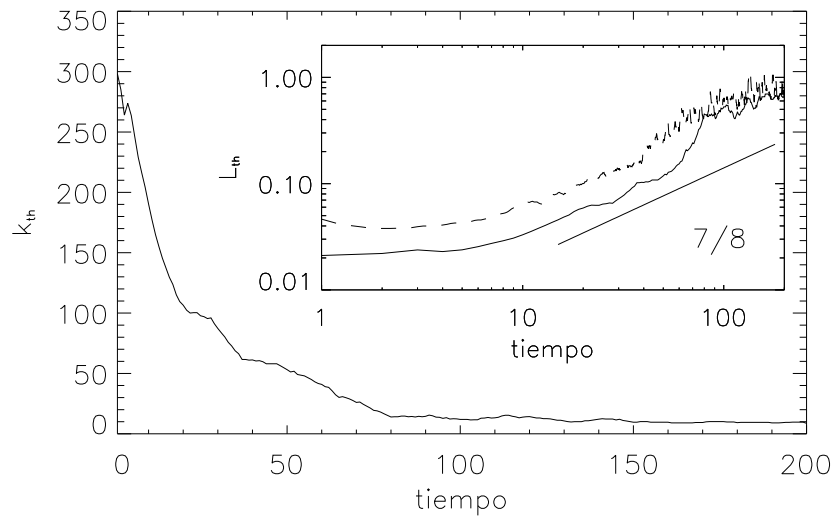


Figura 6.6: Evolución temporal de k_{th} para la simulación ideal con $N = 1024$. A medida que transcurre el tiempo más y más modos termalizan, aunque k_{th} no converge a cero debido a la condensación de la pseudo-energía en las escalas grandes. Recuadro: evolución temporal de $L_{th} = 2\pi/k_{th}$ para las simulaciones ideales con $N = 1024$ (trazo continuo) y $N = 512$ (guiones). Se muestra una ley de potencia $\sim t^{7/8}$ como referencia.

es la responsable del desarrollo de rangos inerciales turbulentos como los que se observan en los espectros a tiempos cortos (figura 6.4). En la próxima sección se analizará con más detalle esta etapa transitoria, comparando el sistema inviscido con $N = 1024$ con soluciones de sistemas viscosos sometidos a la misma condición inicial.

6.3.2. Comparación entre sistemas con y sin disipación

Esta sección se concentra en el período temporal durante el cual E_{th} y G_{th} dependen del tiempo, es decir, antes de alcanzar sus valores asintóticos. Durante este período, el flujo de pseudo-estrofia hacia modos termalizados puede interpretarse como una solución fuera del equilibrio para los modos $k < k_{th}$, con una viscosidad efectiva asociada a los modos termalizados con $k > k_{th}$. Se mostrará que durante este régimen, el modelo ideal truncado analizado anteriormente puede brindar información muy valiosa sobre el comportamiento de un sistema similar pero con viscosidad (por *similar*, se entiende un sistema viscoso sujeto a las mismas condiciones iniciales). Con este fin se compararán espectros y decaimientos de ambos sistemas.

Para estudiar sistemas viscosos se debe resolver la ecuación (6.5) con la adición de un término disipativo,

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \left(\widehat{\partial_x q \partial_y \psi} - \widehat{\partial_x \psi \partial_y q} \right) - \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\psi}. \quad (6.34)$$

Esta ecuación fue resuelta de la misma forma que en el caso ideal, con un método pseudoespectral, la regla de los 2/3, y un método de Runge-Kutta de segundo orden para evolucionar en el tiempo. La ecuación (6.34) se puede escribir en términos del escalar q en el espacio real, resultando:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla q + \nu \nabla^2 q, \quad (6.35)$$

lo cual puede verificarse fácilmente a partir de la ecuación (6.2). Esta ecuación puede también transformarse en una ley de conservación multiplicando primero ambos miembros por q ,

$$q \frac{\partial q}{\partial t} = -q \mathbf{u} \cdot \nabla q + \nu q \nabla^2 q. \quad (6.36)$$

Utilizando la hipótesis de incompresibilidad, el primer término de la derecha se puede escribir como

$$q \frac{\partial q}{\partial t} = -q \nabla \cdot (q \mathbf{u}) + \nu q \nabla^2 q, \quad (6.37)$$

para finalmente obtener la siguiente ley de conservación,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (q^2 \mathbf{u}) + \nu q \nabla^2 q. \quad (6.38)$$

Integrando sobre todo el dominio, el primer término a la derecha se cancela y la ecuación (6.38) en el espacio Fourier resulta

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^\infty G(k) dk = -2\nu \int_0^\infty k^2 G(k) dk = -\sigma, \quad (6.39)$$

donde σ representa la tasa de disipación de la enstrofia. Introduciendo un número de onda k_η tal que toda la disipación esté concentrada entre $k = 1$ y $k = k_\eta$, para un estado turbulento estadísticamente estacionario se puede aproximar

$$\sigma \approx 2\nu \int_1^{k_\eta} k^2 G(k) dk. \quad (6.40)$$

La termalización de la pseudo-enstrofia obtenida por medio del ensamble de Gibbs permite asumir la existencia de una cascada directa de pseudo-enstrofia. Análisis dimensional aplicado a $G(k) \sim \sigma^A k^B$ resulta en un espectro para el caso forzado-viscoso

$$G(k) \sim \sigma^{2/3} k^{-5/3}, \quad (6.41)$$

al igual que el obtenido en [136]. El espectro de pseudo-energía se obtiene trivialmente a partir de la ecuación (6.10), resultando

$$E(k) \sim \sigma^{2/3} k^{-8/3}. \quad (6.42)$$

Notar que estas leyes de potencia son las mismas que se observan en los rangos no termalizados durante el transitorio estudiado en la sección anterior (figura 6.4). Reemplazando la ecuación (6.41) en la ecuación (6.40) se obtiene

$$k_\eta \sim \left(\frac{\sigma}{\nu^3} \right)^{1/4}. \quad (6.43)$$

Esta relación es importante ya que permite fijar la resolución espacial en simulaciones viscosas de manera tal que todas las escalas relevantes del fluido estén bien resueltas. Para esto, se necesita que el número de onda k_η sea menor que el mayor número de onda disponible $k_{max} = N/3$, o dicho de otra forma, debe cumplirse la condición

$$\left[\sum_1^{k_{max}} \frac{k^2 G(k)}{\nu^2} \right]^{1/4} \leq \frac{N}{3} \quad (6.44)$$

para todo tiempo.

En la figura 6.7(a) se muestra el espectro de pseudo-energía en diferentes tiempos para la simulación ideal truncada con $N = 1024$ y para una simulación viscosa con $N = 1024$ y con $\nu = 4 \times 10^{-4}$. A tiempos cortos, la energía contenida en escalas grandes es transferida a escalas más chicas, siendo afectada, eventualmente, por efectos de la termalización en el caso ideal o de la viscosidad en el caso disipativo. Estos efectos difieren entre si: la termalización es un proceso fuera del equilibrio que da como resultado una viscosidad efectiva dependiente del tiempo (ver por ejemplo [151, 152]), mientras que la viscosidad en la simulación disipativa es constante. Sin embargo, las escalas grandes de ambos sistemas se comportan de forma similar, desarrollando espectros de pseudo-energía $\sim k^{-8/3}$ de acuerdo a los resultados teóricos (notar que el rango en el cual se observa una ley de potencia es más extenso en el caso ideal). A tiempos posteriores, se pierde la ley de potencia en la simulación ideal, pero la amplitud del espectro en los modos con número de onda pequeño coincide aún con la del sistema viscoso. La evolución del espectro de pseudo-energía muestra un comportamiento similar.

6.3.3. Decaimiento

La similitud de los espectros en las escalas grandes entre el caso ideal y viscoso invitan a comparar el decaimiento de cantidades cuadráticas en la simulación viscosa, por ejemplo $G(t)$, con la evolución de la componente no termalizada de esa misma cantidad, G_{nth} , del caso ideal. Como se vió en los capítulos anteriores, el decaimiento libre de flujos turbulentos está caracterizado por cantidades cuadráticas que desarrollan decaimientos auto-similares en el tiempo una vez que la turbulencia se encuentra plenamente desarrollada. La determinación de las leyes de potencia que obedecen estas cantidades requiere generalmente de grandes resoluciones espaciales ya que la viscosidad tiende a afectar el decaimiento, dificultando la determinación de dichas leyes. Además, las leyes de decaimiento son afectadas por el desarrollo de estructuras coherentes en las escalas más grandes del flujo, dificultando la determinación de una ley de potencias.

En la figura 6.8 se compara el decaimiento de la pseudo-energía $G(t)$ en simulaciones disipativas, con la evolución de $G_{nth}(t)$ en casos ideales para distintos tamaños de grilla. En todos los casos viscosos, la pseudo-energía se mantiene aproximadamente constante a tiempos cortos para luego desarrollar un decaimiento auto similar con una ley de potencia compatible con $G(t) \sim t^{-1/4}$. Luego de esta etapa autosimilar, el decaimiento se vuelve exponencial como resultado de la viscosidad actuando sobre la pseudo-energía remanente en el sistema (figura 6.9).

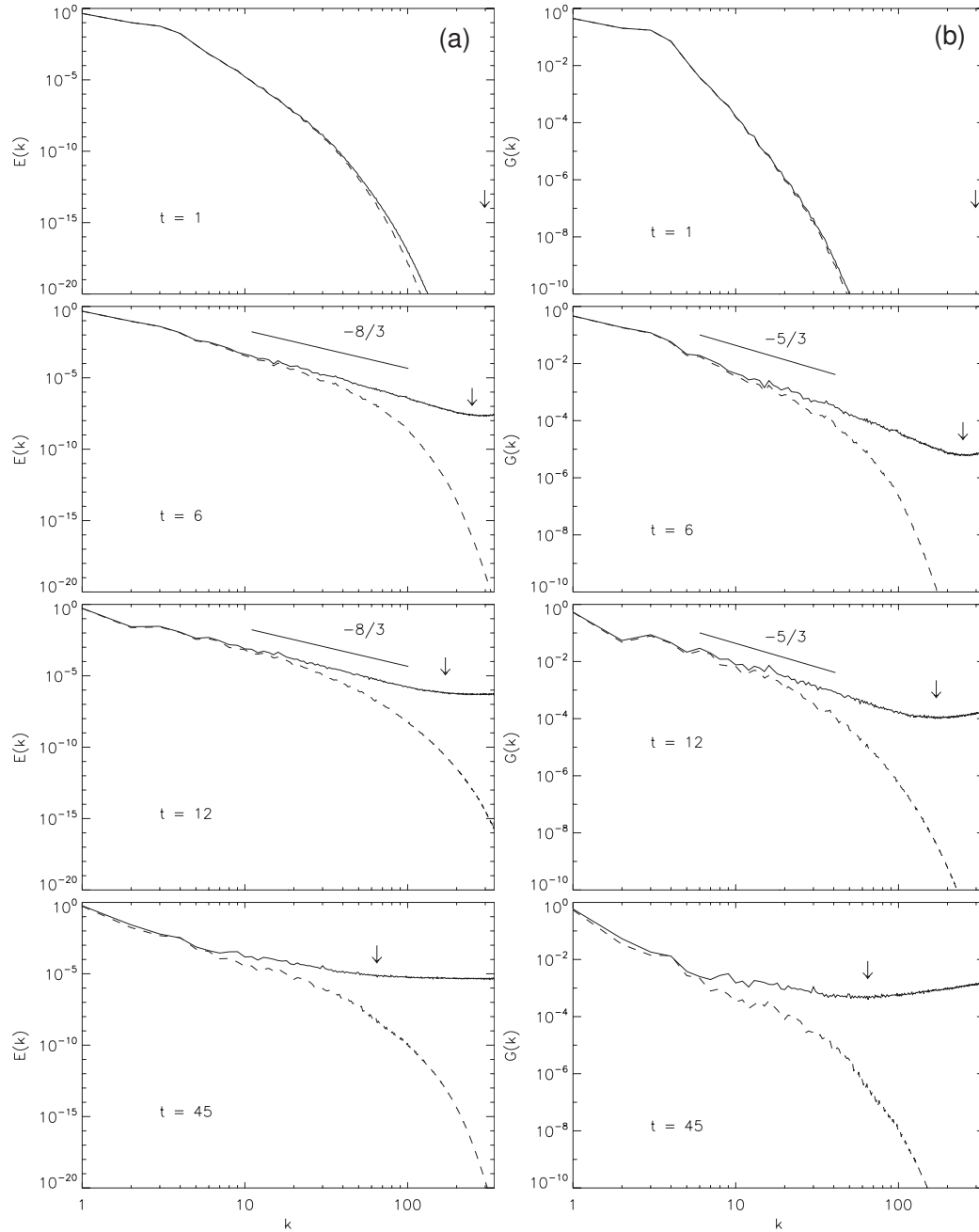


Figura 6.7: (a) Espectro de pseudo-energía a diferentes tiempos para las simulaciones ideal (trazo continuo) y viscosa (guiones) con $N = 1024$. Inicialmente ambas simulaciones desarrollan una ley compatible con $\sim k^{-8/3}$ (indicada como referencia). Más tarde, los espectros difieren en los números de onda intermedios y grandes, mientras que los modos más chicos continúan mostrando amplitudes similares. Las flechas indican los valores de k_{th} en cada instante. (b) Espectros de pseudo-entropía a diferentes tiempos para las mismas simulaciones que en (a). Se muestra una pendiente $\sim k^{-5/3}$ como referencia.

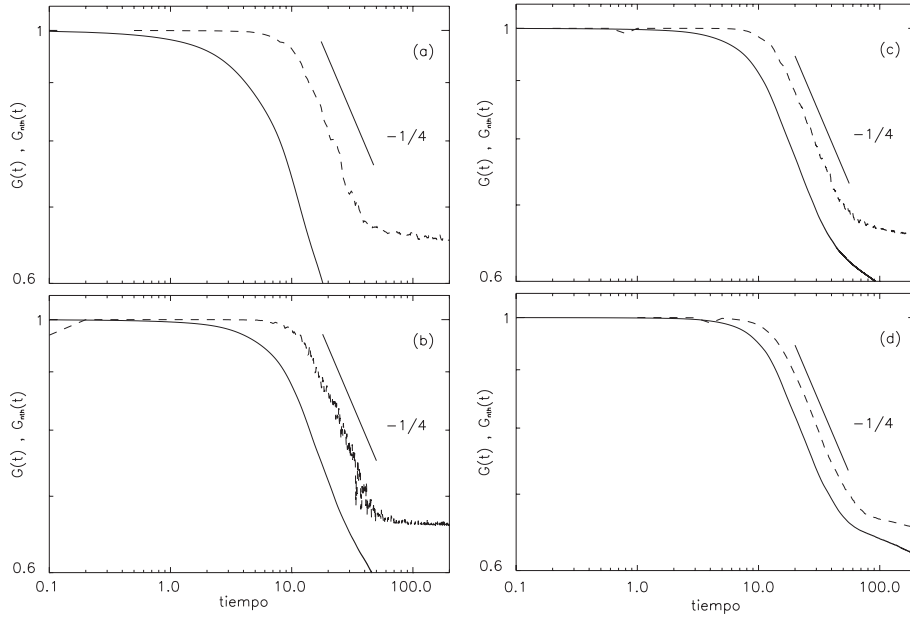


Figura 6.8: Decaimiento de la pseudo-estrofia $G(t)$ para las simulaciones viscosas (trazo continuo) y evolución temporal de $G_{nth}(t) = G - G_{th}(t)$ en las simulaciones ideales (guiones) en orden creciente de resolución: (a) $N = 128$, con $\nu = 2 \times 10^{-3}$ en la simulación viscosa, (b) $N = 256$, $\nu = 5 \times 10^{-4}$, (c) $N = 512$, $\nu = 2,5 \times 10^{-4}$, y (d) $N = 1024$, $\nu = 9 \times 10^{-5}$. El decaimiento viscoso de $G(t)$ se aproxima al de $G_{nth}(t)$ a medida que el número de Reynolds aumenta. Se muestra una ley $\sim t^{-1/4}$ como referencia. Los números de onda de disipación para cada simulación viscosa son: $k_\eta \approx 36$ para $N = 128$, $k_\eta \approx 84$ para $N = 256$, $k_\eta \approx 150$ para $N = 512$, y $k_\eta \approx 318$ para $N = 1024$, mientras que el mayor número de onda bien resuelto es $k_{max} = N/3$.

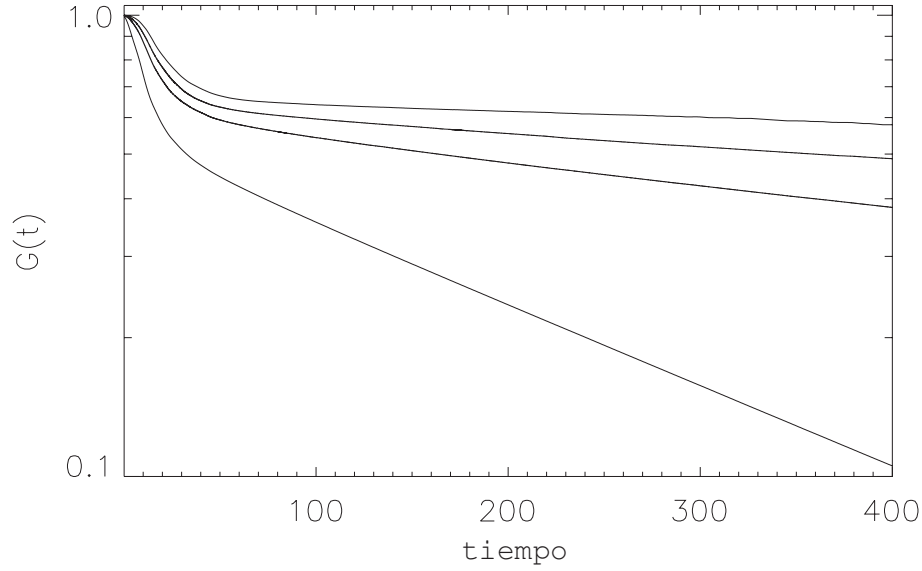


Figura 6.9: Decaimiento de la pseudo-estrofia $G(t)$ en escala semi-logarítmica para las simulaciones viscosas con $N = 128$, $N = 256$, $N = 512$ y $N = 1024$ de abajo hacia arriba. Notar el decaimiento exponencial a partir de $t \approx 80$.

Por otro lado, la evolución de G_{nth} es la misma en todas las simulaciones ideales independientemente de la resolución espacial considerada, con excepción de un pequeño retraso en el tiempo para el cual se rompe la constancia inicial (ver la figura 6.10 y el recuadro). Es interesante ver cómo la evolución de $G(t)$ se aproxima a la de $G_{nth}(t)$ a medida que el número de Reynolds en las simulaciones viscosas aumenta. De hecho, el decaimiento $\sim t^{1/4}$ puede identificarse en $G_{nth}(t)$ a resoluciones mucho más bajas (grillas de 128^2 ó 256^2 puntos) que en los sistemas viscosos.

En este contexto, se puede entender al decaimiento viscoso de SQG de la siguiente manera. A tiempos cortos, $G(t)$ se mantiene aproximadamente constante mientras que el espectro desarrolla su rango inercial. Los efectos de la disipación son despreciables debido a que las escalas chicas aun no han sido excitadas. La ley de similaridad $G(t) \sim t^{-1/4}$ se observa una vez que la turbulencia se desarrolla plenamente. En esta etapa, la tasa de decaimiento está dominada por la transferencia turbulenta de pseudo-estrofia hacia escalas chicas y la evolución temporal está dada por la ecuación de balance $dG/dt = -\sigma$, donde el flujo de pseudo-estrofia σ está controlado por el término no lineal de la ecuación (6.35) y es independiente del valor de la viscosidad ν siempre y cuando el número de Reynolds sea lo suficientemente grande. Como resultado, la simulación ideal truncada muestra el mismo

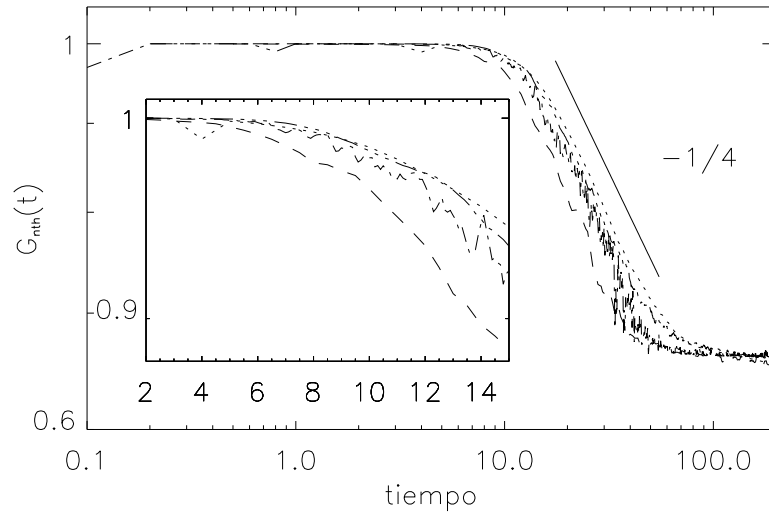


Figura 6.10: Evolución de G_{nth} para diferentes tamaños de grilla: $N = 128$ (guiones), 256 (guiones y puntos), 512 (guiones y tres puntos) y 1024 (puntos). A medida que aumenta la resolución se observa un pequeño retraso en el tiempo para el cual comienza el decaimiento. Esto se muestra con mayor detalle en el recuadro. A excepción de esta pequeña diferencia, todas las simulaciones decaen igual, con una ley compatible con $t^{-1/4}$ que se muestra como referencia.

decaimiento auto-similar a pesar de poseer una viscosidad efectiva diferente. A tiempos largos, la pseudo-estrofia que aún permanece en el sistema está asociada a la pseudo-energía condensada en $k = 1$, y tanto esta pseudo-energía como la pseudo-estrofia sólo pueden decaer de forma exponencial en los casos viscosos (figura 6.9) mientras se mantienen constante en los casos ideales (figura 6.10).

La figura 6.11 compara la fracción de pseudo-energía no termalizada $E_{nth} = E - E_{th}(t)$ en la simulación ideal con $N = 1024$, con el decaimiento de $E(t)$ en simulaciones viscosas con $N = 128$, $N = 256$, $N = 512$ y $N = 1024$. En el caso ideal no hay un cambio significativo en E_{nth} dado que la mayor parte de la energía condensa. Los casos viscosos se aproximan a este comportamiento a medida que disminuye su viscosidad, de acuerdo a la fenomenología de Batchelor-Kraichnan-Leith para sistemas que poseen un invariante que condensa en las escalas grandes (en [158] se dan argumentos similares para el decaimiento de la estrofia mientras la energía se mantiene aproximadamente constante durante el decaimiento de un flujo en las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones). Esta reducción en la tasa de decaimiento de la energía al disminuir la viscosidad fue observada también para estos sistemas en [134], aunque sin identificar un comportamiento asintótico.

Hasta ahora se utilizaron condiciones iniciales aleatorias en todas las simulaciones. Con el fin de estudiar la sensibilidad del decaimiento a las condiciones iniciales, se discuten a continuación los resultados obtenidos para tres condiciones iniciales distintas utilizadas usualmente en el estudio de singularidades en las ecuaciones SQG [129, 134, 165]:

$$\text{I)} \quad q(t = 0) = \sin(x) \sin(y) + \cos(y), \quad (6.45)$$

$$\text{II)} \quad q(t = 0) = -(\cos(2x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)), \quad (6.46)$$

$$\text{III)} \quad q(t = 0) = \cos(2x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y) + \cos(2x) \sin(3y). \quad (6.47)$$

Las condiciones **II** y **III** produjeron el mismo decaimiento para la pseudo-estrofia $\sim t^{-1/4}$ observado anteriormente (figura 6.12). Sin embargo, la condición **I** condujo a un decaimiento mucho más lento y no fue posible identificar una ley de potencia durante el tiempo en el cual fueron integradas las ecuaciones. Estudios adicionales mostraron que el flujo producido por esta condición inicial, la cual activa inicialmente sólo unos pocos modos en el espacio Fourier, desarrolla espectros de pseudo-energía y pseudo-estrofia más empinados. Como resultado no se alcanza un espectro turbulento totalmente desarrollado, el cual es necesario para que la pseudo-estrofia decaiga en forma auto-similar.

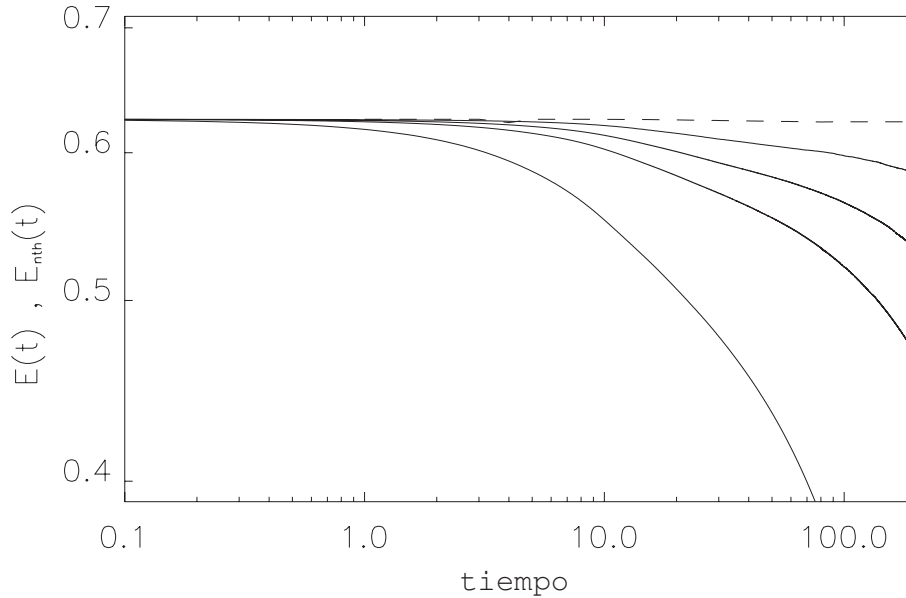


Figura 6.11: Comparación entre E_{nth} en la simulación invíscida con $N = 1024$ (guiones) y $E(t)$ para las simulaciones viscosas con $N = 128$ ($\nu = 2 \times 10^{-3}$), 256 ($\nu = 5 \times 10^{-4}$), 512 ($\nu = 2,5 \times 10^{-4}$) y 1024 ($\nu = 9 \times 10^{-5}$), en trazo continuo de abajo hacia arriba respectivamente.

El decaimiento $G(t) \sim t^{-1/4}$ de las simulaciones es consistente con el límite superior de cotas estrictas para la evolución de la pseudo-ensstrofía derivadas en forma matemática a partir de las ecuaciones SQG (ver [130,131]). Desde el punto de vista físico, es interesante notar que esta ley de decaimiento puede relacionarse con el decaimiento de otros sistemas que tienen condensados en el caso ideal truncado, y que desarrollan estructuras coherentes en las escalas grandes en el caso viscoso [166].

En turbulencia hidrodinámica en dos dimensiones, la energía está concentrada en las escalas grandes mientras que la enstrofía se encuentra concentrada en escalas chicas. La separación de escalas entre energía y enstrofía, junto con la suposición de acoplamiento débil entre dichas escalas [168,169], derivó en la idea de entender a la turbulencia bidimensional como la superposición de un estado coherente (condensado) y una fase aleatoria, separados por una “escala difusa” siguiendo ideas desarrolladas para condensados de Bose-Einstein [167]. Para SQG, a partir de los resultados de la sección 6.3, podemos considerar una escala integral asociada a la condensación de pseudo-energía en los números de onda más pequeños, la cual contiene la mayor parte de la pseudo-energía del sistema (el condensado). Asimismo, se puede considerar una escala asociada a la pseudo-ensstrofía en donde se con-

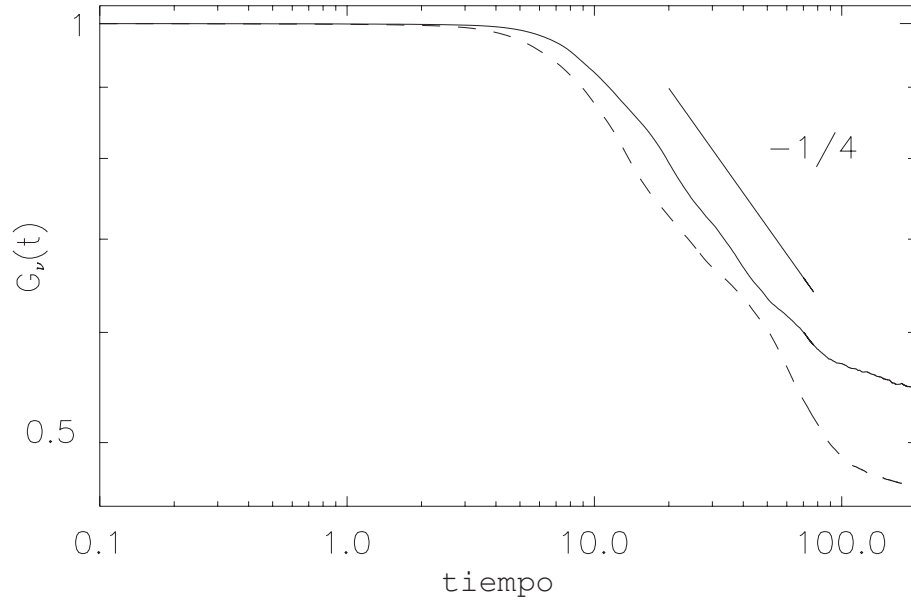


Figura 6.12: Evolución de la pseudo-estrofia para simulaciones viscosas con condiciones iniciales **II** y **III**, $N = 1024$ y $\nu = 9 \times 10^{-5}$. Ambas simulaciones muestran un decaimiento compatible con $G(t) \sim t^{-1/4}$ como muestra la ley de referencia $\sim t^{-1/4}$.

centra la mayor parte de dicha cantidad (con número de onda grande, y que correspondería a la fase aleatoria). En el caso ideal truncado, se puede identificar fácilmente la longitud asociada a la termalización $l_{th} = 2\pi/k_{th}$ con la escala que delimita estas dos fases. A partir de la ecuación (6.39), el análisis dimensional conduce a

$$\frac{dG}{dt} = -\sigma \sim \frac{G^{3/2}}{l} \quad (6.48)$$

donde l es una escala característica. Asociando $l = l_{th}$, ya que l_{th} es la escala más grande a partir de la cual se concentra la mayoría de la pseudo-estrofia, la ecuación (6.48) es consistente con el decaimiento observado $G(t) \sim t^{-1/4}$ sólo si $l_{th}(t) \sim t^{7/8}$. El recuadro de la figura 6.6 muestra la evolución temporal de l_{th} en las simulaciones ideales con $N = 1024$ y $N = 512$ con condiciones iniciales aleatorias. Se observa que una ley $l_{th} \sim t^{7/8}$ da un ajuste razonable a los datos numéricos. Las demás simulaciones también son consistentes con esta ley de potencias.

Es interesante que la analogía encontrada entre el sistema SQG ideal y el disipativo brinda una forma novedosa de estudiar el efecto del desarrollo de estructuras coherentes en el decaimiento de un flujo turbulento. Si bien

par el caso de Navier-Stokes en dos dimensiones la idea de considerar a las estructuras coherentes como un condensado y al resto del flujo como una fase aleatoria fue propuesta originalmente por [166], no resulta inmediatamente claro cómo identificar a estas fases en un flujo turbulento. En el sistema inviscido truncado, ambas fases y la escala difusa que las separa, están claramente determinadas. El estudio realizado para la ecuación SQG puede extenderse a otros flujos turbulentos, una tarea que será realizada en el futuro.

6.4. Conclusiones

A lo largo de este capítulo se derivaron soluciones estadísticas de equilibrio para las ecuaciones SQG ideales y se verificó su validez en el estado de equilibrio de simulaciones numéricas de las ecuaciones truncadas. Los espectros numéricos corroboraron la teoría, aunque a medida que la resolución aumenta, el sistema demora más tiempo en alcanzar el estado de equilibrio, dificultando la comparación entre simulaciones y teoría. El ensamble de Gibbs mostró que mientras la pseudo-energía en SQG condensa, la pseudo-estrofia termaliza. Como resultado, en el caso viscoso la primera cantidad debe sufrir una cascada inversa, mientras que la segunda debe desarrollar una cascada directa (y decaer en forma auto-similar en ausencia de forzado externo). Con esta información se puede usar análisis dimensional para obtener la expresión de los espectros, información necesaria para poder predecir las leyes de decaimiento de la turbulencia en SQG.

Se estudió la evolución hacia el equilibrio de simulaciones ideales, encontrándose que tanto el espectro de pseudo-energía como el de pseudo-estrofia desarrollan transitoriamente rangos inerciales similares al caso viscoso con pendientes $\sim k^{-5/3}$ y $\sim k^{-8/3}$ respectivamente, ambos compatibles con la fenomenología de Kolmogorov-Batchelor-Kraichnan aplicada al caso SQG. Al transcurrir el tiempo, las simulaciones muestran una termalización gradual de la pseudo-estrofia en las escalas grandes con $G(k) \sim k$ que estrecha el rango inercial de tipo viscoso. La energía presenta un espectro independiente de k en las escalas chicas y un máximo de amplitud en $k = 1$, evidenciando la condensación de la pseudo-energía en las escalas grandes.

Definiendo G_{th} y E_{th} como la pseudo-estrofia y la pseudo-energía contenidas en los modos termalizados, se estudió el período de tiempo durante el cual estas magnitudes son dependientes del tiempo. Durante este período, la transferencia de pseudo-estrofia hacia modos termalizados resulta en una transferencia hacia las escalas pequeñas similar a la encontrada en flujos viscosos. Esto permitió comparar espectros y su evolución temporal en las simulaciones ideales con simulaciones sometidas a las mismas condiciones

iniciales pero con la adición de un término disipativo. La evolución de las escalas grandes de ambos sistemas es similar, y ambos desarrollan una ley de potencia $\sim k^{-8/3}$ para la pseudo-energía, corroborando resultados teóricos previos y lo esperado por análisis dimensional.

Estos resultados fueron utilizados para estudiar el decaimiento de la turbulencia en flujos SQG viscosos. En particular, se logró cuantificar el efecto del condensado de pseudo-energía y de la formación de estructuras coherentes en el decaimiento. Se comparó el decaimiento de $G(t)$ en casos viscosos con la evolución temporal de la pseudo-estrofia no termalizada G_{nth} en simulaciones ideales truncadas para diferentes tamaños de grilla. Luego de un período de tiempo en el cual la pseudo-estrofia se mantiene aproximadamente constante, los flujos viscosos desarrollan una ley de potencia compatible con $G(t) \sim t^{-1/4}$ para los números de Reynolds y resoluciones espaciales más grandes consideradas. Más tarde, el decaimiento se vuelve más lento, observándose un comportamiento exponencial debido a la viscosidad actuando sobre la pseudo-estrofia que aún permanece en el sistema. El decaimiento de la pseudo-estrofia es consistente con estrictas cotas matemáticas ([130, 131]), y al parecer es poco sensible a las condiciones iniciales. Desde el punto de vista de las soluciones estadísticas de equilibrio, el decaimiento se puede explicar como el resultado del decaimiento de dos fases débilmente interactuantes y separadas por una escala difusa: un estado coherente, condensado, que contiene la mayoría de la pseudo-energía, y una fase aleatoria que contiene la mayor parte de la pseudo-estrofia. El ensamble de Gibbs y las simulaciones ideales permiten dar una definición precisa de esta escala difusa. La escala corresponde al mínimo del espectro de pseudo-estrofia en el caso ideal, y separa la fase condensada de la termalizada. Así, el decaimiento de la pseudo-estrofia está controlado no sólo por su tasa de disipación, sino también por la persistencia de los vórtices más grandes en la fase condensada. La lenta transferencia de pseudo-estrofia de esta fase hacia la fase termalizada (representada por el crecimiento de l_{th} , que indica que más modos ingresan en el tiempo en la fase aleatoria y que el condensado se reduce lentamente a los vórtices con $k = 1$), resulta en el decaimiento lento $\sim t^{-1/4}$.

Con la excepción de un pequeño retraso en el tiempo en el cual la cuasi-conservación inicial se rompe, todas las simulaciones invíscidas muestran la misma evolución para $G_{nth}(t)$ independientemente de la resolución espacial considerada. Por otro lado, la evolución de $G(t)$ para sistemas viscosos se aproxima a la de $G_{nth}(t)$ a medida que se incrementa el número de Reynolds. Notablemente, sistemas invíscidos tan pequeños como $N = 128^2$ brindan información valiosa sobre la ley de decaimiento esperada para sistemas viscosos con alto número de Reynolds.

El acuerdo entre la evolución de la componente no termalizada de la

pseudo-estrofia y la pseudo-energía en simulaciones truncadas invíscidas con baja resolución espacial, y el decaimiento de la pseudo-energía y la pseudo-estrofia en simulaciones viscosas con alta resolución, indican una nueva posible aplicación para las simulaciones sin viscosidad: estimar la ley de decaimiento de sistemas viscosos en el régimen de número de Reynolds alto. De esta forma, el decaimiento de la pseudo-estrofia en turbulencia SQG en el límite de número de Reynolds alto sería compatible con $G(t) \sim t^{-1/4}$ siempre y cuando la pseudo-energía inicial se encuentre distribuida principalmente en los modos más bajos del sistema.

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se analizó el decaimiento de flujos turbulentos rotantes y de flujos rotantes y estratificados en la aproximación cuasi-geostrófica de superficie partiendo de una extensa variedad de condiciones iniciales. Los resultados indican que el decaimiento de la energía en estos sistemas, lejos de ser universal, depende fuertemente de la forma en que los flujos son excitados inicialmente, es decir, de las condiciones iniciales, y de propiedades de cada sistema. Las leyes de potencia observadas para el decaimiento de la turbulencia son afectadas por las correlaciones en las escalas grandes, por la cantidad neta de helicidad presente inicialmente en el fluido, por el grado inicial de anisotropía, y por la formación de estructuras coherentes. Para todos los casos estudiados se desarrollaron modelos fenomenológicos que logran predecir las leyes de potencia observadas en las simulaciones, conocidas las condiciones iniciales.

En flujos rotantes en tres dimensiones, para lograr predecir los distintos decaimientos se propuso un método original, al estudiar la energía presente en modos bidimensionales y tridimensionales de manera independiente, aprovechando el proceso de cuasi-bidimensionalización conocido en este tipo de sistemas [12, 56, 92, 99]. También se introdujo el uso de nuevas magnitudes conservadas anisótropas durante el decaimiento, las cuales pueden ser asociadas al momento lineal y angular en la dirección paralela al eje de rotación. La conservación de estas magnitudes se demostró teóricamente bajo hipótesis sobre la correlación de la velocidad a dos puntos en las escalas grandes, utilizando una versión anisótropa de la ecuación de von Kármán-Howarth, y fue corroborada luego a través de simulaciones numéricas. Además, en esta tesis se mostró que el contenido inicial de helicidad afecta el decaimiento de flujos rotantes, explicando las causas detrás de observaciones sobre el decaimiento de estructuras helicoidales en la atmósfera debidas a Lilly [18].

En mayor detalle, en el capítulo 3 se analizó el efecto de la helicidad

en el decaimiento y transferencia de energía en flujos rotantes confinados, es decir, para los cuales la escala integral se encuentra saturada y no crece con el tiempo. Mientras que en flujos rotantes al menos una fracción de la energía se transfiere hacia escalas grandes, la helicidad se transfiere en su totalidad hacia escalas chicas. La acumulación de helicidad en dichas escalas (con el alineamiento entre la velocidad y la vorticidad asociado) disminuye el efecto del término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes, inhibiendo la transferencia directa de energía e impactando fuertemente en la tasa de decaimiento de la energía. Se mostró que a diferencia de los flujos sin rotación, en los cuales la presencia de helicidad no afecta el decaimiento auto-similar de la energía, en flujos rotantes la helicidad disminuye sensiblemente la tasa de disipación y la tasa de decaimiento de energía. El estudio espectral de los resultados numéricos mostró que en presencia de rotación la isotropía inicial se pierde a medida que el flujo evoluciona, con un marcado proceso de bidimensionalización donde gran parte de la energía es transferida a modos con $k_{\parallel} = 0$. En el espacio real, esta bidimensionalización se ve reflejada en la formación de estructuras con forma de columnas que se mueven a lo largo del dominio de la simulación. La estructura interna de estas columnas depende fuertemente de la presencia o ausencia de helicidad en las condiciones iniciales, aún a tiempos muy largos. Esto corrobora que la presencia inicial de helicidad afecta fuertemente la formación y el decaimiento de estructuras en flujos rotantes [17].

Por otra parte, en los capítulos 4 y 5 se estudiaron flujos más generales, con espectros iniciales $E(k) \sim k^2$ y $E(k) \sim k^4$ y para los cuales la escala integral es libre de crecer a medida que el sistema evoluciona. Se realizó un estudio más completo del espacio de fases, considerando diferentes escalas características en las condiciones iniciales, la presencia o ausencia de rotación y helicidad, distintos número de Reynolds y de Rossby, y distintos grados de anisotropía en las condiciones iniciales [17, 121, 179]. El decaimiento mostró mayor variedad de soluciones, pero todas las leyes observadas pudieron ser explicadas mediante los argumentos fenomenológicos que consideran a la energía 2D y 3D independientemente.

Cuando la escala integral no es constante es necesario utilizar la conservación de magnitudes integrales para poder predecir las leyes de decaimiento. En el caso isótropo, y de acuerdo a trabajos anteriores [94], se puede utilizar la cuasi-conservación de las integrales de Loitsyanski o Saffman (dependiendo de la forma inicial del espectro). En la literatura, dichas magnitudes suelen ser usadas también para predecir el decaimiento aún en flujos con rotación. En este trabajo se mostró que las integrales de Loitsyanski y Saffman no se mantienen constantes en este último caso, y que las leyes de potencia derivadas suponiendo su conservación no se ajustan satisfactoriamente a las

simulaciones. Se reemplazaron entonces dichas magnitudes por las integrales anisótropas mencionadas anteriormente, proporcionales a la correlación a dos puntos del campo de velocidad en la dirección perpendicular al eje de rotación. De esta forma, los decaimientos auto-similares derivados fenomenológicamente coinciden ampliamente con las simulaciones.

El acuerdo entre teoría y simulación es muy bueno, tanto respecto a la conservación de las magnitudes integrales axisimétricas como respecto a las leyes de decaimiento. Por otra parte, el decaimiento de la enstrofia también pudo predecirse exitosamente tanto en casos rotantes como sin rotación mediante el uso de argumentos isótropos. El uso de argumentos isótropos en flujos que no lo son se justifica porque la enstrofia se concentra preferentemente en escalas chicas, en las que el flujo mantiene cierta isotropía aun en casos con rotación. Todos estos resultados indican que el decaimiento de la energía es efectivamente afectado por las correlaciones iniciales en las escalas grandes, al observarse distintas leyes de potencia para espectros $E(k) \sim k^2$ o $\sim k^4$.

De esta forma, se lograron predecir las leyes de potencia para el decaimiento de la energía de cualquier flujo rotante conocidas las condiciones iniciales. Como resultado, la teoría desarrollada describe completamente el decaimiento de la turbulencia rotante dependiendo de la longitud característica inicial del flujo, la correlación inicial del campo de velocidad en las escalas más grandes, el contenido de helicidad, y la anisotropía. Los resultados coinciden con lo obtenido en simulaciones numéricas y están en acuerdo con resultados experimentales. En el futuro, sería deseable poder cuantificar la energía en modos lentos en los experimentos, para poder verificar en detalle algunas predicciones que hoy sólo pueden estudiarse en las simulaciones numéricas.

En el último capítulo de esta tesis se extendió el estudio del decaimiento de la turbulencia a flujos estratificados fuertemente rotantes, para considerar otro caso de interés en flujos atmosféricos y oceánicos. Con este fin se utilizó una aproximación realizada en el estudio de fluidos cercanos a superficies de contorno, como la tropopausa o la superficie de los océanos. Dicha aproximación, llamada cuasi-geostrófica de superficie (SQG), se deriva de las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes, y modela la evolución de la temperatura potencial o de la densidad en flujos cuya vorticidad potencial es cero en todo volumen excepto en la superficie de interés [26, 27, 31].

Antes de estudiar el decaimiento auto-similar, es necesario conocer las cascadas que se desarrollan en el flujo turbulento, y caracterizar las leyes de escala que sigue el fluido. Con este fin, se derivaron soluciones estadísticas de equilibrio para las ecuaciones SQG ideales, verificándose su validez a tiempos largos en simulaciones numéricas. El sistema SQG posee dos magnitudes cuadráticas conservadas, y el análisis estadístico permitió conocer que una

de ellas, la pseudo-energía, condensa en las escalas grandes mientras que la otra, la pseudo-estrofía, termaliza en las escalas pequeñas. A pesar de que las soluciones estadísticas corresponden a un sistema ideal en equilibrio, permiten predecir el sentido de la transferencia de estas dos magnitudes y el sentido de las cascadas que han de observarse en sistemas similares pero disipativos.

En el sistema ideal existe un período de tiempo durante el cual la pseudo-energía y pseudo-estrofía contenida en los modos no termalizados es dependiente del tiempo, y en el que las simulaciones ideales desarrollan un transitorio con rangos inerciales para la pseudo-energía y pseudo-estrofía similares a los esperados según la fenomenología de cascadas turbulentas de Kolmogorov-Batchelor-Kraichnan aplicada a la ecuación SQG [136]. Durante dicho período, la transferencia de pseudo-estrofía hacia modos termalizados puede considerarse como una transferencia del mismo estilo a la encontrada en flujos viscosos, pero con una viscosidad efectiva generada por los modos termalizados. De esta manera, se pudieron comparar simulaciones viscosas con simulaciones ideales asociando las pseudo-energía y pseudo-estrofía sin termalizar de las simulaciones ideales con las pseudo-energía y pseudo-estrofía total en los sistemas viscosos.

En el decaimiento de turbulencia SQG confinada, el mecanismo dominante (que resulta en un decaimiento muy lento de la pseudo-estrofía) está asociado a la formación de estructuras coherentes en las escalas más grandes, que decaen muy lentamente. El efecto de las estructuras coherentes en el decaimiento de la turbulencia es en general muy difícil de cuantificar (algo similar ocurre en el decaimiento en la ecuación de Navier-Stokes en dos dimensiones [166]). La analogía entre el sistema ideal y el sistema viscoso permitió identificar dos fases en el fluido: una fase condensada y una fase aleatoria, separadas por una escala difusa cuya evolución temporal puede ser predicha a partir del sistema ideal.

Esta analogía novedosa permitió obtener la tasa de decaimiento de la pseudo-estrofía para valores muy grandes del número de Reynolds [170]. El enfoque presenta gran potencialidad de ser usado para estudiar otros sistemas. Por ejemplo, se espera que un análisis similar aplicado a la ecuación de Navier-Stokes en 2D arroje resultados positivos, y permita estudiar las leyes de decaimiento de la energía y la estrofía en el límite de número de Reynolds muy grande. Esta dirección se encuentra actualmente en exploración.

Bibliografía

- [1] W. K. George, Phys. Fluids A **4**, 1492 (1992).
- [2] L. Woltjer, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **44**, 489 (1958).
- [3] S. Chyrasekhar y P. C. Kendall, Astrophys. J. **126**, 457 (1957).
- [4] H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **35**, 117 (1969).
- [5] H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **44**, 705 (1970).
- [6] H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **41**, 435 (1970).
- [7] H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **53**, 385 (1972).
- [8] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **59**, 745 (1973).
- [9] J. C. André y M. Lesieur, J. Fluid Mech. **81**, 187 (1977).
- [10] D. O. Gomez y P. D. Mininni, Physica A **342**, 69 (2004).
- [11] V. Borue y S. A. Orszag, Phys. Rev. E **55**, 7005 (1997).
- [12] Q. Chen, S. Chen, y G. L. Eyink, Phys. Fluids **15**, 361 (2003).
- [13] Q. Chen, S. Chen, G. L. Eyink, y D. D. Holm, Phys. Rev. Lett. **90**, 214503 (2003).
- [14] P. D. Mininni, A. Alexakis, y A. Pouquet, Phys. Rev. E **74**, 016303 (2006).
- [15] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, y S. Ren, JSME Int. J. Ser. B **44**, 410 (2001).
- [16] P. D. Mininni y A. Pouquet, Phys. Rev. E **79**, 026304 (2009).
- [17] T. Teitelbaum y P. D. Mininni, Phys. Rev. Lett. **103** (2009)

- [18] D. K. Lilly, *Atm. Sc.* **40**, 126 (1986).
- [19] B. W. Kerr y G. L. Darkow, *Weath. y Forecast* **11**, 489 (1996).
- [20] P. M. Markowski, J. M. Straka, E. N. Rasmussen, y D. O. Blanchard, *Mont. Weath. Rev.* **126**, 2959 (1998).
- [21] G. V. Levina y M. T. Montgomery, *Doklady Earth Sciences*, **434** 1285 (2010).
- [22] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains* (Springer, Heidelberg, 2006).
- [23] J. G. Charney, *Journal of Meteo.* **4**, 5 (1947).
- [24] J.G. Charney, *Geofys. Publ.* **17**, 3 (1948).
- [25] E. T. Eady, *Tellus* **1**, 33 (1949).
- [26] W. Blumen, *J. Atmos. Sci.* **35**, 774 (1978).
- [27] M. Juckes, *J. Atmos. Sci.* **51**, 2756 (1994).
- [28] G. Hakim, C. Snyder, y D. Muraki, *J. Atmos. Sci.* **59**, 2405 (2002).
- [29] R. Tulloch y K.S. Smith, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103**, 14690 (2006).
- [30] J. Isern-Fontanet, B. Chapron, G. Lapeyre, y P. Klein, *Geophys. Res. Lett.* **33**, 24608 (2006).
- [31] G. Lapeyre y P. Klein, *J. Phys. Oceanogr.* **36**, 165 (2006).
- [32] J.H. LaCasce y A. Mahadevan, *J. Mar. Res.* **27**, 695 (2006).
- [33] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics* 2da ed. (Springer, New York, 1987).
- [34] F. Waleffe, *Phys. Fluids A* **5**, 677 (1993).
- [35] P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists y Engineers* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [36] H. P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids* (Breukelen, Brookline, MA, 1990).
- [37] C. Cambon, L. Jacquin, y J. L. Lubrano, *Phys. Fluids A* **4**, 812 (1992).

- [38] C. Cambon y L. Jacquin, *J. Fluid Mech.* **202**, 295 (1989).
- [39] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, 2da. ed. (Kluwer Academic, Dordrecht, Holanda, 1990).
- [40] F. Waleffe, *Phys. Fluids A* **4**, 350 (1992).
- [41] A. Majda y P. Embid, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **11**, 155 (1998).
- [42] P. Embid y A. Majda, *Commun. Partial Diff. Eqns.* **21**, 619 (1996).
- [43] H. P. Greenspan, *J. Fluid Mech.* **36**, 257 (1969).
- [44] Q. Chen, S. Chen, G. L. Eyink, y D. Holm, *J. Fluid Mech.* **542**, 139 (2005).
- [45] G. K. Batchelor y A. A. Townsend, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **199**, 238 (1949).
- [46] H. P. Greenspan *The Theory of Rotating Fluids*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).
- [47] C. Cambon, N. N. Mansour, y F. S. Godeferd, *J. Fluid Mech.* **337**, 303 (1997).
- [48] A. C. Newell, *J. Fluid Mech.* **35**, 255 (1969).
- [49] L. Bourouiba, *Phys. Fluids* **20**, 075112 (2008).
- [50] A. Babin, A. Mahalov, y B. Nicolaenko, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **15**, 291 (1996).
- [51] M. S. Longuet-Higgins y A. E. Gill, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **299**, 120 (1967).
- [52] O. M. Phillips, *J. Fluid Mech.* **34**, 407 (1968).
- [53] P. Lelong y J. J. Riley, *J. Fluid Mech.* **232**, 1 (1991).
- [54] P. Bartello, *J. Atmos. Sci.* **52**, 4410 (1995).
- [55] T. Warn, *Tellus* **38A**, 1 (1986).
- [56] L. Bourouiba y P. Bartello, *J. Fluid Mech.* **587**, 139 (2007).
- [57] P. D. Mininni, *Annual Rev. Fluid Mech.* **43**, 377 (2011).

- [58] D. O. Gomez, P. D. Mininni, y P. Dmitruk, *Phys. Scr. T* **116**, 123 (2005).
- [59] D. O. Gomez, P. D. Mininni, y P. Dmitruk, *Adv. Space Res.* **35**, 899 (2005).
- [60] M. Lesieur y O. Métais, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 45 (1996).
- [61] C. Meneveau y J. Katz, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 1 (2000).
- [62] U. Piomelli, *Prog. Aerosp. Sci.* **35**, 335 (1999).
- [63] P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, 2da. ed. (Springer-Verlag, Berlín, 2003).
- [64] S. A. Orszag, en *Fluid Dynamics, Proceedings of Les Houches Summer School 1973*, editado por R. Balian y J.L. Peube (Gordon y Breach, New York, 1977) p. 237.
- [65] J. P. Chollet y M. Lesieur, *J. Atmos. Sci.* **38**, 2747 (1981).
- [66] P. D. Mininni, D. Rosenberg, y A. Pouquet, *J. Fluid Mech.* **699**, 263 (2012).
- [67] S. Fox y P. A. Davidson, *Phys. Fluids* **21**, 125102 (2009).
- [68] J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty, y A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **77**, 046303 (2008).
- [69] J. Baerenzung, P. D. Mininni, A. Pouquet, H. Politano, y Y. Ponty, *Phys. of Fluids* **22** 2 (2010).
- [70] J. Baerenzung, D. Rosenberg, P. D. Mininni, y A. Pouquet, *J. Atmos. Sci.* **68**, 2757 (2011).
- [71] G. I. Taylor y A. E. Green, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A* **158**, 895 (1937).
- [72] S. Childress y A. D. Gilbert, *Stretch, Twist, Fold: The fast dynamo* (Springer-Verlag Berlin, 1995).
- [73] A. Pouquet y G. S. Patterson, *J. Fluid Mech.* **85**, 305 (1978).
- [74] J.R. Herring, *Phys. Fluids* **17**, 859 (1974).
- [75] J. Lee, *Phys. Fluids* **22**, 40 (1979).

- [76] C. Cambon, C. Tesseidre, y D. Jeyel, *J. Mec. Theor. Appl.* **4**, 629 (1985).
- [77] T. Ishida, P. A. Davidson, y Y. Kaneda, *J. Fluid Mech.* **564**, 455 (2006).
- [78] J. B. Klemp, R. B. Willhelmson, y P. S. Ray, *J. Atmos. Sci.* **38**, 1558 (1981).
- [79] R. B. Pelz, V. Yakhot, S. Orszag, L. Shtilman, y E. Levich, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2505 (1985).
- [80] E. Levich y E. Tzvetkov, Helical Cyclogenesis, *Phys. Lett.* **100 A**, 53 (1984).
- [81] E. Levich y E. Tzvetkov, *Phys. Reports* **128**, 1 (1985).
- [82] O. G. Chkhetiani, *JETP Lett.* **63**, 809 (1996).
- [83] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 9-13 (1941) (traducido al inglés en *Proc. R.Soc. Lond. A* **434**, 9-13 (1991)).
- [84] P. G. Saffman, *Phys. Fluids* **10**, 1349 (1967).
- [85] U. Frisch, *Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [86] L. Skrbek y S. R. Stalp, *Phys. Fluids* **12**, 1997 (2000).
- [87] P. A. Davidson, *J. Fluid Mech.* **632**, 329 (2009).
- [88] P. A. Davidson, *J. Fluid Mech.* **663**, 268 (2010).
- [89] C. Morize y F. Moisy, *Phys. Fluids* **18**, 065107 (2006).
- [90] L. Biferale *et al*, *Phys. Fluids* **15**, 2105 (2003).
- [91] V. Borue y S. A. Orszag, *Phys. Rev E* **51** 2, 856 (1995).
- [92] X. Yang y J. A. Domaradzki, *Phys. Fluids* **16**, 4088 (2004).
- [93] N. N. Mansour, C. Cambon, y C. G. Speziale, en *Studies in Turbulence*, editado por T. B. Gatski, S. Sarkar y C. G. Speziale (Springer-Verlag, Berlín 1992).

- [94] K. D. Squires, J. R. Chasnov, N. N. Mansour, y C. Cambon “Investigation of the asymptotic state of rotating turbulence using LES,” Annual Research Briefs-1993, NASA-Stanford Center of Turbulence Research, 1993.
- [95] C. Morize, F. Moisy, y M. Rabaud, *Phys. Fluids* **17**, 095105 (2005).
- [96] C. Cambon, R. Rubinstein, y F. S. Godeferd, *New J. Phys.* **6**, 73 (2004).
- [97] J. Bardina, J. H. Ferziger, y R. S. Rogallo, *J. Fluid Mech.* **154**, 321 (1985).
- [98] P. Bartello, O. Metais, y M. Lesieur, *J. Fluid Mech.* **273**, 1 (1994).
- [99] W. C. Müller y M. Thiele, *Europhy. Lett.* **77**, 34003 (2007).
- [100] Y. Zhou, *Phys. Fluids* **7**, 2092 (1995).
- [101] R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **8**, 1385 (1965).
- [102] O. Zeman, *Phys. Fluids* **6**, 3221 (1994)
- [103] P. D. Mininni, A. Alexakis, y A. Pouquet, *Phys. Fluids* **21**, 015108 (2009).
- [104] F. Bellet *et al*, *J. Fluid Mech.* **562**, 83 (2006).
- [105] P. A. Davidson, P. J. Staplehurst, y S. B. Dalziel, *J. Fluid Mech.* **557**, 135 (2006).
- [106] J. C. McWilliams, *J. Fluid Mech.* **146**, 21 (1984).
- [107] J. V. Shebalin, W. H. Matthaeus, y D. Montgomery, *J. Plasma Phys.* **29**, 525 (1983).
- [108] P. J. Staplehurst, P. A. Davidson, y S. B. DalEziel, *J. Fluid Mech.* **598**, 81 (2008).
- [109] P. G. Saffman, *J. Fluid Mech.* **27**, 581 (1967).
- [110] G. K. Batchelor, *Proc. R. Soc. Lond. A* **195**, 512 (1949).
- [111] S. A. Orszag y J. G. S. Patterson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 76 (1972).
- [112] G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1953).

- [113] C. Lamriben, P-P. Cortet, y F. Moisy, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 024503 (2011).
- [114] P. A. Krogstad y P. A. Davidson, *J. Fluid Mech.* **642**, 373 (2010).
- [115] N. Okamoto, P. A. Davidson, y Y. Kaneda, *J. Fluid Mech.* **651**, 295 (2010).
- [116] P. D. Mininni y A. Pouquet, *Phys. Fluids* **22**, 035105 (2010).
- [117] P. A. Krogstad y P. A. Davidson, *J. Fluid Mech.* **10**, 418 (2011).
- [118] L. J. A. van Bokhoven, C. Cambon, L. Liechtenstein, F. S. Godeferd, y H. J. H. Clercx, *J. of Turbulence* **9**, 6 (2008).
- [119] G. Birkhoff, *Comm. Pure Appl. y Math.* **7**, 19-44 (1954).
- [120] T. Teitelbaum y P. D. Mininni, aceptado en *Phys. Rev. E* (2012)
- [121] T. Teitelbaum y P. D. Mininni, *Phys. Scr.* **T142**, 014003 (2010).
- [122] L. Bourouiba, D.N. Straub, y M.L. Waite, *J. Fluid Mech.* **690**, 129 (2012).
- [123] P. D. Mininni y A. Pouquet, *Phys. Fluids* **22**, 035106 (2010).
- [124] F. Moisy, C. Morize, M. Rabaud, y J. Sommeria, *J. Fluid Mech.* **666**, 5 (2011).
- [125] A. Craya, P. S. T. Ministère de l'Air **345**, (1958).
- [126] T. D. Lee, *Quart. J. Appl. Math.* **10**, 69 (1952).
- [127] J.G. Charney, *J. Atmos. Sci.* **28**, 1087 (1971).
- [128] C. G. Rossby, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc. (suppl)* **66**, 68 (1940).
- [129] P. Constantin, A. J. Majda, y E. Tabak, *Nonlinearity* **7**, 1495 (1994).
- [130] A. Córdoba y D. Córdoba, *Commun. Math. Phys.* **249**, 511 (2004).
- [131] P. Constantin y J. Wu, *Siam J. Math. Anal.* **30**, 937 (1999).
- [132] D. Córdoba, *Ann. of Math.* **148**, 1135 (1998).
- [133] P. Constantin, D. Córdoba, y J. Wu, *Indiana Univ. Math. J.* **50**, 97 (2001).

- [134] K. Ohkitani y M. Yamada, *Phys. Fluids* **9**, 876 (1997).
- [135] D. Bernard, G. Boffetta, A. Celani, y G. Falkovich, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 024501 (2007).
- [136] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, y K. L. Swanson, *Chaos, Solitons, y Fractals* **4**, 1111 (1994).
- [137] C. V. Tran y J. C. Bowman, *J. Fluid Mech.* **526**, 349 (2005).
- [138] C. V. Tran, *Physica D* **213**, 76 (2006).
- [139] K. S. Smith, G. Boffetta, C. Chenning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, y G. K. Vallis, *J. Fluid Mech.* **469**, 13 (2002).
- [140] L. Onsager, *Nuovo Cimento Suppl.* **6**, 279 (1949).
- [141] R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1457 (1967).
- [142] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **67**, 155 (1975).
- [143] D. G. Fox y S. A. Orszag, *Phys. Fluids* **16**, 169 (1973).
- [144] T. Stribling y W. H. Matthaeus, *Phys. Fluids B* **2**, 1979 (1990).
- [145] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **59**, 745 (1973).
- [146] G. Krstulovic, M. Brachet, y A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **84**, 016410 (2011).
- [147] S. Servidio, W. H. Matthaeus, y V. Carbone, *Phys. Plasmas* **15**, 042314 (2008).
- [148] U. Frisch, A. Pouquet, J. Léorat, y A. Mazure, *J. Fluid Mech.* **68**, 769 (1975).
- [149] M. L. Waite y P. Bartello, *J. Fluid Mech.* **517**, 281 (2004).
- [150] P. D. Mininni, P. Dmitruk, W. H. Matthaeus, y A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **83**, 016309 (2011).
- [151] G. Krstulovic, P.D. Mininni, M.E. Brachet, y A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **79**, 056304 (2009).
- [152] G. Krstulovic y M. E. Brachet, *Physica D* **237**, 2015 (2008).

- [153] C. Cichowlas, P. Bonaïti, F. Debbasch, y M. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 264502 (2005).
- [154] U. Frisch, S. Kurien, R. Pyit, W. Pauls, S. S. Ray, A. Wirth, y J.-Z. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 144501 (2008).
- [155] K. S. Smith, G. Boccaletti, C. Chenning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, y G. K. Vallis, *J. Fluid Mech.* **469**, 13 (2002).
- [156] G. Krstulovic y M. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115303 (2011).
- [157] A. J. Majda y X. Wang, *Nonlinear Dynamics y Statistical Theories for Basic Geophysical Flow* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).
- [158] G. K. Batchelor, *Phys. Fluids* **12** (II), 233 (1969).
- [159] H. Wang y W. K. George, *J. Fluid Mech.* **459**, 429 (2002).
- [160] R. Betchov, *Phys. of Fluids* **4**, 925 (1961).
- [161] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, y K. L. Swanson, *J. Fluid Mech.* **282**, 1 (1995).
- [162] C. V. Tran, *Physica D* **191**, 137 (2004).
- [163] V. D. Larichev y J. C. McWilliams, *Phys. Fluids A* **3**, 938 (1991).
- [164] P. D. Mininni, D. Rosemberg, R. Reddy, y A. Pouquet, *Parallel Computing* **37**, 316 (2011).
- [165] K. Ohkitani y T. Sakajo, *Nonlinearity* **23**, 3029 (2010).
- [166] V. Yakhot, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 014502 (2004).
- [167] N. N. Bogolubov, *Sov. Phys. JETP* **7**, 41 (1958).
- [168] J.-P. Laval, B. Dubrille, y S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4061 (1999).
- [169] J.-P. Laval, B. Dubrille, y S. Nazarenko, *Physica (Amsterdam)* **142D**, 231 (2000).
- [170] T. Teitelbaum y P. D. Mininni, *Phys. Rev. E* **86**, 016323 (2012)
- [171] S. B. Pope, *Turbulent flows* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

- [172] G. K. Batchelor y I. Proudman, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **248**, 949 (1956)
- [173] F. Moisy, C. Morize, M. Rabaud, y J. Sommeria, *J. Fluid Mech.* **666**, 5 (2011).
- [174] L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon, y J. Mathieu, *J. Fluid. Mech.* **220**, 1 (1990).
- [175] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* 1ra ed. (Pergamon, 1959).
- [176] C. N. Baroud, B. B. Plapp, H. L. Swinney, y Zhen-Su She, *Phys. Fluids* **15**, 2091 (2003).
- [177] M. Thiele y W. C. Muller, *J. Fluid Mech.* **637**, 425 (2009).
- [178] P. A. Davidson, *J. Fluid Mech.* **336** (1997).
- [179] T. Teitelbaum y P. D. Mininni, *Phys. Fluids* **23**, 065105 (2011).
- [180] R. H. Kraichnan y D. Montgomery, *Rep. Prog. Phys.* **43**, 547 (1980).
- [181] Y. Yamazaki, Y. Kaneda, y R. Rubinstein, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, 81 (2002).