Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis Doctoral

# Métodos de dispersión electromagnética aplicados a sistemas SAR

Franco, Mariano Andrés

2014

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Franco, Mariano Andrés. (2014). Métodos de dispersión electromagnética aplicados a sistemas SAR. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:
Franco, Mariano Andrés. "Métodos de dispersión electromagnética aplicados a sistemas SAR". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2014.

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

**Dirección:** Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

**Contacto:** digital@bl.fcen.uba.ar

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

# Métodos de dispersión electromagnética aplicados a sistemas SAR

Trabajo de Tesis para optar por el título de

Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas

por *Lic. Mariano Andrés Franco*

Director: Dr. Esteban Calzetta

Director Asistente: Dr. Francisco Grings

Consejero de Estudios: Dr. Diego Mazzitelli

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCEyN - UBA

*Febrero 2014*

# Resumen

En esta tesis trabajamos con distintos métodos para calcular la sección eficaz observada por sistemas de radar activos, debido su interacción con superficies y medios aleatorios. En primer lugar describimos el método de la ecuación integral usado para calcular el campo dispersado por una superficie rugosa. Mostramos cuales son los resultados usuales del modelo y luego los que no se condicen con las observaciones. Proponemos entonces no usar las simplificaciones habituales para obtener valores no nulos en los coeficientes de retrodispersión de los canales de polarización cruzada. Concretamente, retener términos no lineales en la distribución de alturas de la superficie y calcular, numéricamente, la nueva sección eficaz del modelo. Luego, extendemos la formulación integral a un modelo de medios estratificados en el cual, debajo de la superficie iluminada por el radar, se encuentra una segunda interface (plana). Con este modelo damos una primer contribución a la dispersión de la onda debido a su interacción con el volumen que se haya debajo de la superficie observada por el radar. En particular, desarrollamos este modelo para estudiar el comportamiento de la emisivad respecto a la distancia media entre las capas, y como segundo objetivo, analizar la respuesta polarimétrica del sistema. Finalmente, basados en una teoría estadística de campos, formulamos el marco teórico para calcular la respuesta al radar de un medio inhomogéneo. Consideramos que debajo de la superficie se encuentra un medio caracterizado por una permitividad dieléctrica estocástica y haciendo uso de métodos funcionales resolvemos las ecuaciones para el campo medio observado por los sistemas de teledetección.

*Palabras claves: dispersión electromagnética; ecuaciones integrales; medios aleatorios; métodos funcionales; radares de apertura sintética.*

# Methods in electromagnetic scattering applied to SAR systems


## Abstract

In this thesis we work with different methods to calculate the observed radar cross section by active radar systems due to their interaction with rough surfaces and random media. First, we describe the Integral Equation Method used to compute the scattered field of a random surface. We show that the results are not consistent with the observations and suggest not to use the usual simplifications to obtain nonzero values of the backscattering coefficients for the cross polarized channels. We propose retain the nonlinear terms in the height distribution of the rough surface and calculate, numerically, the new radar cross section. Then, we extend the integral formulation to a model of stratified media which, below the surface illuminated by the radar, there is a second flat interface. With this model we give a first contribution to the wave dispersion due to its interaction with the volume to be below the surface. In particular, we develop this model to study the emissivity behavior as a function of the average distance between the layers, and as a second subject, analyzing the polarimetric response of the system. Finally, based on a statistical field theory, we give the theoretical framework in order to compute the radar cross section response in inhomogeneous medium. We consider that below surface there is a random media characterized by a stochastic dielectric permittivity and we use functional methods to solve the equations of the mean field observed by remote sensing systems.



*Key words: electromagnetic scattering; integral equations; random media; functional methods; synthetic aperture radar.*

A quien leyere:

*Si las páginas de este libro*
*consienten algún verso feliz,*
*perdóneme el lector la descortesía*
*de haberlo usurpado yo,*
*previamente.*
*Nuestras nadas poco difieren;*
*es trivial y fortuita la circunstancia de*
*que tú seas el lector de estos ejercicios,*
*y yo su redactor.*

J.L.B

# Índice general

**Índice de figuras** **XI**

**1 Introducción** **1**

1.1 Contexto . . . . . 3

1.2 Marco físico del trabajo . . . . . 4

1.3 Organización de la tesis . . . . . 6

**2 Antecedentes: dispersión electromagnética en superficies rugosas** **9**

2.1 Motivación . . . . . 9

2.2 Dispersión electromagnética de superficies aleatorias . . . . . 10

2.3 Método de perturbaciones pequeñas (SPM) . . . . . 11

2.4 Método de la ecuación integral (IEM) . . . . . 15

2.4.1 Aproximación de Kirchhoff . . . . . 16

2.4.2 Formulación del IEM . . . . . 16

2.4.3 Campos superficiales . . . . . 21

2.4.4 Campo de Kirchhoff . . . . . 23

2.4.5 Campo complementario . . . . . 26

2.4.6 Cálculo del Coeficiente de retrodispersión . . . . . 31

2.4.7 Resultados principales del IEM . . . . . 40

2.5 Discusión del Capítulo . . . . . 42

**3 Solución completa del IEM: origen del coeficiente $\sigma^0_{vh}$** **45**

3.1 Motivación . . . . . 45

3.2 Reformulación del campo de Kirchhoff . . . . . 49

3.2.1 Expresión completa del campo de Kirchhoff . . . . . 50

3.3 Simulaciones Numéricas . . . . . 52

3.3.1 Perfiles reales . . . . . 53
3.3.2 Resultados . . . . . 55
3.4 Discusión de los resultados . . . . . 56

**4 AIEM con dos interfaces: el modelo de capas 61**
4.1 Motivación . . . . . 61
4.2 Esquema del problema a resolver . . . . . 63
4.3 Relaciones entre los campos superficiales . . . . . 64
4.3.1 Campos sobre la superficie B . . . . . 65
4.3.2 Relación entre campos de las distintas superficies . . . . . 67
4.3.3 Relación entre los campos sobre la superficie aleatoria . . . . . 71
4.4 Componente de Kirchhoff para el modelo de capas . . . . . 79
4.5 Campo dispersado . . . . . 85
4.6 Valor medio del campo dispersado - Métodos funcionales . . . . . 90

**5 Resultados del modelo de capas - implicancias para la estimación de humedad del suelo a partir de datos de microondas 101**
5.1 Validación del campo de Kirchhoff: modelo de capas frente al modelo usual . 102
5.2 Comportamiento del modelo ante variaciones de $D$ . . . . . 105
5.3 Comportamiento del coeficiente de retrodispersión biestático . . . . . 108
5.4 Comportamiento del cociente $p = HH/VV$ . . . . . 110
5.4.1 Esquema de inversión Bayesiana . . . . . 111
5.4.2 Ejemplo de inversión de datos SAR usando el AIEM: Radarsat-2 . . . 112
5.5 Emisividad de un medio estratificado . . . . . 118

**6 Dispersión de volumen en medios aleatorios 123**
6.1 Expansión diagramática para el campo medio . . . . . 124
6.1.1 Ecuaciones para el campo medio . . . . . 125
6.1.2 Operador de masa . . . . . 127
6.1.3 Aproximación no lineal . . . . . 130
6.1.4 Aproximación escalera (*ladder approximation*) . . . . . 131
6.2 Formulación funcional para el campo medio . . . . . 134
6.3 Correspondencias entre las representaciones . . . . . 138

6.3.1 Energía dispersada . . . . . 140
6.3.2 Aproximaciones no lineal y escalera . . . . . 141
6.3.3 Aproximación no lineal vs teoría completa . . . . . 142
6.4 Ecuaciones a partir de la formulación funcional . . . . . 143
6.4.1 Acción efectiva irreducible de dos partículas . . . . . 146
6.4.2 Ecuaciones de movimiento 2PI . . . . . 149
6.4.3 Estrategia para resolver las ecuaciones 2PI . . . . . 153
6.5 Aproximación a dos *loops* de la acción efectiva 2PI . . . . . 156
6.5.1 Representación diagramática de las ecuaciones 2PI . . . . . 157
6.6 Discusión del capítulo . . . . . 164

**7 Conclusiones** **165**
7.1 Aportes de esta tesis . . . . . 168
7.1.1 Aportes de esta tesis a la estimación de humedad del suelo a partir de datos SAR . . . . . 170

**A Identidades matemáticas - Ecuaciones de Maxwell** **171**
A.1 Identidades de Green . . . . . 171
A.2 Relación entre campos tangenciales y normales . . . . . 172
A.3 Condiciones de validez para la aproximación de Kirchhoff . . . . . 173

**B Coeficientes del IEM** **175**
B.1 Coeficientes del campo complementario . . . . . 176
B.2 Expresiones para el campo de Kirchhoff . . . . . 177

**C Cálculo de valores medios** **179**
C.1 Términos del campo medio en el modelo de capas . . . . . 181

**D Variables de Grassman** **185**

**Bibliografía** **187**

# Índice de figuras


2.1 Esquema de la base local. . . . . 23

2.2 Esquema del término complementario en el IEM. . . . . 26

2.3 Coeficientes $\sigma^0_{vv}$ y $\sigma^0_{hh}$ para ACF gaussiana con $l = 3$cm y distintos valores de altura RMS. Resultados presentados en dB. . . . . 41

2.4 Regiones de validez de los métodos de dispersión usados . . . . . 44

3.1 Superficie de suelo de agricultura perpendicular al surco de arado . . . . . 54

3.2 Superficie de suelo de agricultura paralelo al surco de arado . . . . . 54

3.3 Coeficiente medio $\sigma^0$ de los canales VV, HH y VH para el ensamble de perfiles reales. . . . . 56

3.4 Coeficiente $\sigma^0_{vh}$ medio en función de la constante dieléctrica. . . . . 57

4.1 Esquema de medios estratificados. . . . . 63

4.2 Principio de extinción en la región inferior. . . . . 65

4.3 Principio de extinción en la región intermedia. . . . . 67

4.4 Principio de Huygens en la región superior. . . . . 73

5.1 Coeficiente $\sigma^0$ para el campo de Kirchhoff: modelo de capas vs. modelo usual para distintos valores de $\epsilon_2$ ($\theta = 40°$ y $\lambda = 25$cm). . . . . 104

5.2 Coeficiente $\sigma^0_{HH}$ para el campo de Kirchhoff: modelo de capas vs. modelo usual para distintos valores de $D$ ($\theta = 40°$, $\lambda = 25$cm, $\epsilon_1 = 4$ y $\epsilon_2 = 20$). . . . . 105

5.3 Coeficiente $\sigma^0_{VV}$ para el campo de Kirchhoff: modelo de capas vs. modelo usual para distintos valores de $D$ ($\theta = 40°$, $\lambda = 25$cm, $\epsilon_1 = 4$ y $\epsilon_2 = 20$). . . . . 106

5.4 Coeficiente $\sigma^0_{HH}$ en función de la distancia entre las capas ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm). . . . . 106

5.5 Coeficientes $\sigma^0_{vv}$ y $\sigma^0_{VV}$ en función de la distancia entre las capas ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm). . . . . 107
5.6 Coeficiente $\sigma^0_{HH}$ biestático: modelo de capas vs. AIEM ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm). . . . . 109
5.7 Coeficiente $\sigma^0_{VV}$ biestático: modelo de capas vs. AIEM ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm). . . . . 110
5.8 Datos del Radarsat-2 en función de la rugosidad y permitividad dieléctrica (eps), superpuesto con las predicciones del AIEM. . . . . 114
5.9 Estimación de la humedad del suelo usando el método de inversión directa de AIEM a partir de los datos de la campaña Casselman. . . . . 114
5.10 Índice P en función de $\epsilon_1$ para distintos valores de la distancia entre capas ($\theta = 40°$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm). . . . . 116
5.11 Índice P en función de la distancia entre capas para distintos valores de $\epsilon_1$ ($\theta = 40°$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm). . . . . 116
5.12 Emisividad para los canales copolarizados en el modelo de capas. . . . . 119
5.13 Índice de polarización simulado de un arreglo de dos capas en función de $D$, con $\epsilon_2 = 20$. . . . . 121

6.1 Representación diagramática de la ecuación de Dyson para la función de Green. 128
6.2 Diagramas de una partícula, reducible e irreducible respectivamente . . . . . 128
6.3 Definición del operador de masa. . . . . 128
6.4 Ecuación de Dyson escrita en términos del operador de masa. . . . . 129
6.5 Diagramas sin y con línea interna cruzada, respectivamente. . . . . 130
6.6 Operador de masa renormalizado. . . . . 131
6.7 Ecuación de Dyson usando la aproximación no lineal. . . . . 131
6.8 Distintos tipos de diagramas presentes en la ecuación de Bethe-Salpeter. . . . 133
6.9 Ecuación de Bethe-Salpeter en términos del operador intensidad. . . . . 133
6.10 Ecuación de Dyson para el propagador $\langle \epsilon\varphi \rangle$. . . . . 159
6.11 Operador $\Lambda$ desarrollado a dos loops. . . . . 160
6.12 Operador de masa a dos loops con diagramas 2PI. . . . . 160
6.13 Ecuación de Dyson para el propagador $\langle \varphi\varphi^* \rangle$. . . . . 162
6.14 Contribuciones a $\langle \varphi\varphi^* \rangle$ a dos *loops*. . . . . 163

# 1

# Introducción

La estimación de la humedad del suelo a escala regional y resolución media (∼ha) es de vital importancia para monitorear y modelar la oferta hídrica en suelos de agricultura, la cual condiciona fuertemente el rendimiento agrícola. En la actualidad, los radares de apertura sintética (*Synthetic Aperture Radar* , SAR) son los únicos sistemas capaces de generar información sobre la humedad del suelo a escala regional y alta resolución. Con esta motivación, en el marco del Plan Espacial Nacional (PEN) la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE) está desarrollando desde hace mas de 10 años la misión SAOCOM [1], que constará de dos SAR banda L ($\lambda \sim 25$ cm) cuyo objetivo principal es la estimación de humedad del suelo a escala de la Pampa Húmeda para soporte de las actividades agrícolas.

Parte integral del producto humedad del suelo es el **modelo inverso**, que permita estimar las variables biofísicas a partir de las variables físicas efectivamente medidas (matriz de dispersión - *scattering*-, en una frecuencia y geometría de observación dadas). Este problema de inferencia puede resolverse directamente a partir de un esquema Bayesiano si se dispone de un modelo directo, el cual es el encargado de estimar las variables físicas medidas a partir de las variables de interés (en este caso, estimar la humedad del suelo a partir de la matriz de scattering). Por ende, el desarrollo de un modelo de scattering robusto del suelo de agricultura es un objetivo prioritario de la misión SAOCOM. Sin embargo, como veremos a lo largo de esta tesis, el suelo es un medio estratificado complejo, y sus propiedades dispersivas no son fáciles de modelar.

En este contexto, el objetivo de esta tesis es desarrollar un modelo de dispersión electromagnética robusto, que sirva como modelo directo en un esquema de inversión. De esta forma, el modelo de scattering desarrollado podría utilizarse como parte integral de un producto humedad del suelo para la misión SAOCOM. En particular, en el grupo de teledetección del IAFE se está desarrollando un producto humedad del suelo alternativo para esta misión,

[1] `www.conae.gov.ar/eng/satelites/saocom.html`

el cual estará basado en un esquema Bayesiano y utilizará información auxiliar de varias fuentes [1]. Para que un modelo de scattering pueda ser utilizado en este producto operativo, se definieron una serie de requerimientos:

- debe ser un modelo capaz de estimar la sección eficaz biestática polarimétrica ($\sigma^0$) de la superficie observada, en el rango de las microondas de un suelo de agricultura. Como objetivo práctico, en el marco de esta tesis se apunta a desarrollar una metodología para calcular el coeficiente $\sigma_0$ de un arreglo de dos capas dieléctricas (que intentan modelar dos estratos del suelo con características dieléctricas distintas; zona insaturada y saturada), y que presentan a su vez discontinuidades dieléctricas puntuales en su interior (poros de agua y aire).

- debe ser un modelo basado en primeros principios (ecuaciones de Maxwell), de manera de ser generalizable a distintas geometrías de observación, frecuencias de operación y características dieléctricas y geométricas del blanco.

- debe ser un modelo polarimétrico, en el sentido que estime el valor del coeficiente de backscattering de-polarizado $\sigma^0_{vh}$ (que es $\neq 0$ para suelos reales y un parámetro de utilidad para discriminar cambios de rugosidad de cambios de humedad).

- ya que el modelo estará basado en principios físicos, la estimación de la la función amplitud de scattering biestática requerirá de una serie de aproximaciones. Estas aproximaciones deberán estar debidamente explicitadas y justificadas.

- el modelo deberá tener una expresión final que sea implementable numéricamente, con el fin de estimar de manera operativa el scattering de un suelo, dados el conjunto de sus características dieléctricas y geométricas.

- por último, debe ser posible estimar la emisividad en ambas polarizaciones (modos TE y TM) a partir del modelo de scattering (lo cual implica que el modelo debe verificar la conservación de la energía total). Este último punto es importante en el contexto de la misión Argentina SAC-D/Aquarius, que incluye un radiómetro que opera en Banda L.

**Entonces, el objetivo principal de esta tesis es desarrollar distintas aproximaciones para calcular la función amplitud de scattering de un medio estrati-**

**ficado y con una permitividad dieléctrica inhomogénea, para ser utilizado como modelo directo en un producto humedad del suelo de la misión SAOCOM**.

## 1.1. Contexto

Los sistemas de observación satelitales se basan en medir la energía reflejada o emitida por el sistema terrestre en alguna longitud de onda característica, la cual es elegida de acuerdo a requerimientos prácticos. Para monitorear la superficie terrestre, es conveniente diseñar los sensores en la región del espectro electromagnético en donde no existan efectos de interferencia con la atmósfera, es decir, en las longitudes de onda en donde la transmitividad atmosférica sea máxima.

El espectro electromagnético que corresponde a la región de las microondas tiene longitudes de onda que van desde los centímetros hasta los metros ($0{,}01\,\mathrm{m} < \lambda < 1\,\mathrm{m}$). Con respecto a las regiones del infrarrojo y el visible, las microondas tienen propiedades especiales que son importantes para la Teledetección de la superficie terrestre. En la región de longitudes de onda mayores (del orden de los centímetros), las microondas no se ven afectadas por los constituyentes atmosféricos y pueden penetrar, prácticamente cualquier condición atmosférica. Esta característica es de vital importancia en los sistemas de Teledetección, ya que permite monitorear el sistema terrestre en casi cualquier condición ambiental (a excepción de las tormentas mas fuertes). Además, en el rango de las microondas, la energía reflejada/emitida por la tierra es relativamente baja, lo cual facilita el uso de sistema activos, ya que la radiación emitida por la Tierra prácticamente no interfiere con el haz enviado por el radar.

Uno de los objetivos más ambiciosos de las agencias espaciales es la estimación de humedad del suelo sobre regiones de gran extensión ($\sim 100\,\mathrm{Km}^2$) con una importante revisita temporal. La caracterización de la humedad superficial del suelo es complicada debido a que presenta un alto grado de variabilidad espacial a distintas escalas, incluso en áreas relativamente pequeñas. Las variaciones de la humedad responden en general a los gradientes de precipitación, pero hay otros factores como el tipo de suelo, la vegetación o la topografía, que determinan su distribución, tanto espacial como temporal. La posibilidad de estimarla a partir de imágenes adquiridas por satélites es atractiva puesto que permiten adquirir infor-

mación espacialmente distribuida y con una cierta periodicidad. En los últimos años se han realizado numerosos estudios con el fin de intentar estimar la humedad a partir de imágenes ópticas; no obstante, los resultados más prometedores se han obtenido empleando imágenes SAR [2].

## 1.2. Marco físico del trabajo

En los sistemas de radar activos, la onda electromagnética (EM) es emitida por el radar hacia el blanco, midiendo luego la energía reflejada por éste en dirección al sensor (condición de retrodispersión). Desde el punto de vista físico, el blanco es un objeto dispersor de las ondas que inciden sobre él, las cuales una vez que vuelven al radar son usadas para generar una imagen del mismo. Las propiedades electromagnéticas del blanco afectan la señal devuelta al sensor. Dicha señal, por lo tanto, contiene información sobre el blanco.

Esta información está contenida en el coeficiente de retrodispersión $\sigma^0_{qp}$, el cual depende de las características del blanco observado, de la longitud de onda incidente y del posicionamiento relativo del radar (ángulo de incidencia y azimutal). Este coeficiente define a la matriz de *scattering* del blanco observado y los subíndices $qp$ indican, respectivamente, la polarización de la onda dispersada e incidente. En particular, el coeficiente $\sigma^0_{vh}$ mide la potencia depolarizada retro-dispersada por el blanco.

El cálculo del coeficiente de retrodispersión adquiere entonces particular relevancia, ya que es a partir de esta variable física de donde se van a inferir las propiedades de los blancos monitoreados. Como ya adelantamos, el principal objetivo de este trabajo es desarrollar modelos de dispersión EM que incluyan contribuciones de distintos mecanismos de interacción, concretamente:

1. dispersión superficial debida a interfaces con geometrías aleatorias,
2. dispersión en volumen debida a estratificación de capas subterráneas,
3. dispersión en volumen debida a medios subterráneos inhomogéneos

Siguiendo el orden cronológico y conceptual de los conceptos adquiridos en el desarrollo de este trabajo, en el transcurso de esta tesis iremos aumentando gradualmente la complejidad

geométrica y dieléctrica del blanco, de manera de irnos acercando al ideal planteado previamente como modelo de suelo de agricultura (e.g. un medio estratificado e in homogéneo).

Para ello, primero describiremos de manera detallada uno de los métodos frecuentemente usados para calcular el coeficiente de retrodispersión, llamado IEM (*Integral Equation Model*). Veremos cuáles son las limitaciones que presenta el mismo, principalmente en los canales de polarización cruzada. Luego extenderemos este modelo sin tomar las aproximaciones que se suelen hacer para facilitar el cálculo de $\sigma^0$, con el fin de realizar cálculos de orden superior sobre esta variable.

Un segundo paso será extender este modelo geométrico para dar una primer estimación de la contribución al coeficiente $\sigma^0$ debida a la presencia de un medio subterráneo dieléctricamente distinto (con otra humedad). En esta etapa, simplificaremos el sistema físico considerando que debajo de la superficie iluminada por el radar, el medio se encuentra estratificado en capas planas, y en donde cada uno de los semi-espacios entre las interfaces está caracterizado por una permitividad dieléctrica constante.

En la parte final de este trabajo nos dedicaremos a estudiar el problema más general y realista. Calcularemos la dispersión debida a un medio aleatoriamente inhomogéneo. La aleatoriedad del medio subterráneo tiene como objetivo modelar la porosidad del suelo (e.g. en el medio se encuentran dispersas, en forma azarosa, burbujas de aire y agua). Esta porosidad será modelada como una permitividad dieléctrica estocástica. Para tratar este problema haremos una formulación enmarcada en la teoría estadística de campos. En este punto esperamos dar una contribución original y significativa al problema de calcular de manera sistemática y robusta el $\sigma^0$ de suelos de agricultura reales.

## 1.3. Organización de la tesis

Brevemente, el trabajo se presenta de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 describimos los dos modelos de dispersión EM más utilizados en los esquemas de inversión en teledetección: *Small Perturbation Method* (SPM) e *Integral Equation Method* (IEM). Justificamos por qué el primero de los métodos no es apropiado para describir la dispersión debida a las superficies rugosas con las que trabajamos y luego damos un desarrollo completo del IEM, el método usado a lo largo de la primer parte del trabajo. Indicamos qué resultados no concuerdan con las observaciones (concretamente, el valor nulo de los coeficientes de *backscattering* de los canales cruzados) y proponemos una nueva contribución al método para resolver este problema.

En el Capítulo 3 tomamos la propuesta hecha en el Capítulo anterior para generar un modelo de dispersión caracterizado por coeficientes $\sigma^0_{HV}$ no nulos. En este Capítulo se describe cómo la reformulación propuesta en esta tesis logra que el IEM generé valores no nulos de $\sigma^0$ para los canales cruzados, respetando igualmente los resultados consistentes con el método usual para los canales co-polarizados. Esta aproximación se validó experimentalmente con perfiles reales de suelos de agricultura, utilizando simulaciones numéricas.

El Capítulo 4 está dedicado a extender el método IEM al caso en donde debajo de la superficie rugosa no se encuentra un medio semi-infinito, sino que existe una segunda interface plana que separa dos medios dieléctricos (medio estratificado). La inclusión de esta nueva geometría está motivada por las observaciones de campo, que indican a segundo orden, que el suelo de agricultura tiene dos capas; una superior cuya humedad es muy variable, ya que está sometida a forzantes climáticos (precipitación, evaporación) y otra más estable, en general vinculada con la capa freática. Utilizando esta geometría, se derivan las expresiones para la función amplitud de scattering biestática polarimétrica. Las consecuencias de esta geometría compleja fueron evaluadas para sistemas activos (SAR) y para sistemas pasivos (radiómetros). Cabe recalcar que para esta parte del trabajo, los dos medios se consideraron homogéneos (caracterizados por una permitividad dieléctrica constante).

El Capítulo 5 está dedicado a exponer los resultados obtenidos a partir del modelo de capas. Primero mostramos la convergencia del nuevo cálculo a los resultados usuales: en el límite en donde la distancia entre capas es mucho mayor que la longitud de onda incidente

o cuando las constantes dieléctricas de los medios son iguales, el nuevo modelo recupera los resultados previamente conocidos. Luego estudiamos cómo afecta la segunda capa al coeficiente $\sigma_0$, tanto en función de la distancia media como en función de las constantes dieléctricas. Por último, analizamos cómo se pueden aplicar estos resultados en algoritmos de inversión (*retrieval*) de humedad del suelo.

Por último, en el Capítulo 6 calculamos el proceso de dispersión que tiene lugar en el volumen que se encuentra debajo de la superficie asociado a las discontinuidades dieléctricas. En este caso, el medio dieléctrico inferior ya no resulta homogéneo sino que proponemos que sea aleatorio, caracterizado por la estadística de las fluctuaciones en la constante dieléctrica y la correlación espacial de las mismas. Para calcular el proceso de dispersión nos ocupamos a desarrollar ecuaciones de movimiento para el campo medio y sus propagadores, basándonos en métodos funcionales e integrales de camino. Por último, comparamos las contribuciones que se obtienen en la formulación funcional con las halladas haciendo un desarrollo perturbativo en las ecuaciones del campo medio dispersado.

# 2

# Antecedentes: dispersión electromagnética en superficies rugosas

## 2.1. Motivación

La función de un modelo de dispersión o *scattering* es calcular la sección eficaz de un blanco dado. En los sistemás de teledetección, este tipo de modelos se denominan *directos*: dada las características de la señal enviada por el radar (geometría de observación, longitud de onda de operación y polarización) y las características del blanco (geométricas y dieléctricas), la tarea consiste en calcular la señal retro-dispersada a través del coeficiente $\sigma^0_{qp}$ (la sección eficaz del blanco observado), que es la única variable física que puede medir un sensor remoto. Desde el punto de vista matemático, un modelo de scattering es una función que devuelve $\sigma^0_{qp}$ dadas las características de la onda incidente y del blanco. En nuestro caso, donde el blanco es un suelo de agricultura, se habla en general de modelos de scattering superficiales.

En la literatura existen varios enfoques distintos para acercar una propuesta de modelo directo sobre suelos de agricultura. Simplificando, pueden agruparse en tres estrategias distintas: empíricos, semi-empíricos y teóricos. Los primeros se basan en ajustes puramente estadísticos entre $\sigma^0_{qp}$ y las características de la onda incidente y del blanco, y se encuentran actualmente en desuso. Los segundos intentan preservar una estructura funcional derivada de primeros principios, pero dejan coeficientes empíricos para ajustar con datos. Entre ellos, los más relevantes son el modelo de Oh [3] y el de Dubois [4]. Si bien estas dos estrategias generan modelos que presentan buenos ajustes para datos similares con los que fueron generados, en general tienen grandes problemas para extrapolar el comportamiento de $\sigma^0_{qp}$ a zonas donde no hay mediciones. Esta limitación está asociada a que los modelos no están basados totalmente en principios físicos, y por ende no pueden modelar bien cómo el cambio en un parámetro (por ejemplo, frecuencia de operación) afecta las mediciones del coeficiente $\sigma^0$.

La última estrategia de desarrollo de modelos directos son los modelos teóricos. Las bases físicas de este tipo de modelos se encuentran en las ecuaciones de Maxwell. En la literatura, existen del orden de media docena de modelos teóricos que tratan de resolver la dispersión de una onda electromagnética (EM) sobre una superficie aleatoria [5]. Los dos más utilizados son el método de perturbación pequeña (SPM, *Small Perturbation Method*) [6, 7, 8, 9] y el método de la ecuación integral (IEM, *Integral Equation Method*)[10, 11, 12]. Haremos una breve descripción del SPM y un estudio detallado del IEM y compararemos la región de validez de ambos métodos. Es de nuestro interés hacer un desarrollo exhaustivo del IEM, ya que será la base del método utilizado en gran parte de este trabajo para calcular la sección eficaz de un suelo de agricultura observada por el radar.

## 2.2. Dispersión electromagnética de superficies aleatorias

En las próximas dos Secciones desarrollaremos los métodos que son los más usados en la literatura: el SPM y el IEM. Veremos que el primero responde a un desarrollo en serie de las condiciones de contorno sobre la superficie observada mientras que el segundo se deduce directamente de las ecuaciones de Maxwell y por lo tanto su base física queda mejor fundamentada.

El campo EM dispersado por una superficie definida por $z = z(\mathbf{r})$ y suficientemente lejos de la misma (condición de campo lejano) puede ser escrito en términos de la matriz de *scattering* [13] y el campo incidente como,

$$\vec{E}_s(\mathbf{R}) = 2\pi \frac{e^{\imath KR}}{\imath R} \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \cdot \hat{E}_0$$

donde usamos la siguiente notación: $\mathbb{S}$ es la matriz de *scattering*, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z)$ es el punto de observación (que en la aproximación de campo lejano $R \to \infty$); $\mathbf{k}_0$ y $\mathbf{k}$ son las componentes horizontales del vector de onda incidente y reflejado respectivamente, y sus componentes verticales se relacionan mediante $\mathbf{k}_0^2 + k_{z0}^2 = \mathbf{k}^2 + k_z^2 = k^2$, siendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda incidente.

En los sistemas de detección remota se define el coeficiente de retrodispersión como el cociente entre la energía que regresa al radar luego de dispersarse en el área iluminada. En términos matemáticos, es el promedio de la densidad de energía dispersada por el blanco

respecto a la energía incidente y normalizada a una superficie esférica de radio $R$ (distancia entre el radar y la superficie), lo cual define al coeficiente de retrodispersión como [14, 15],

$$\sigma^0 = \frac{\langle |E_s|^2 \rangle}{|E_i|^2/(4\pi R^2)}$$

La señal dispersada por una superficie rugosa puede ser descompuesta en dos contribuciones: la parte coherente, que sólo contribuye en la reflexión especular, y la parte incoherente, que tiene contribuciones en todas las direcciones dispersadas. En el límite de superficies planas, la parte incoherente se anula y sólo hay dispersión en la dirección especular. Por otro lado, para superficies suficientemente rugosas, la contribución especular puede ser ignorada frente a la parte incoherente. Para dar cuenta de los dos efectos, se define a la sección eficaz como la varianza del campo dispersado:

$$\sigma^0 = \frac{\langle \vec{E}_s \, \vec{E}_s^* \rangle - \langle \vec{E}_s \rangle \langle \vec{E}_s^* \rangle}{|E_i|^2/(4\pi R^2)} \tag{2.1}$$

Dado que esta es la magnitud física observada por los sistemas de teledetección, resulta necesario contar con métodos rigurosos que permitan calcular la potencia dispersada por el área iluminada. En las siguientes secciones discutiremos dos de los métodos usados frecuentemente. En la próxima sección vamos a desarrollar brevemente el método de perturbaciones pequeñas y veremos sus limitaciones. Luego describiremos en profundidad el método de la ecuación integral.

## 2.3. Método de perturbaciones pequeñas (SPM)

Este método se basa en hacer una expansión perturbativa de la amplitud del campo dispersado [6, 7, 8, 9], considerando que la altura de la superficie aleatoria es pequeña respecto a la longitud de onda incidente ($z \ll \lambda$). Las condiciones que se deben satisface para usar este método son las siguientes:

1. la altura RMS de la superficie ($s$) es menor que el 5%de la longitud de onda incidente: $s \ll 0{,}05\lambda$.

2. la inclinación promedio de la superficie debe ser del orden del producto entre la longitud

de onda incidente y la altura RMS: $\sqrt{2}s < 0{,}3l$, siendo $l$ la longitud de correlación de la superficie.

Para una semi-región libre de fuentes, el campo EM puede ser escrito con una superposición de ondas planas. La amplitud de las mismas se encuentra imponiendo las condiciones de contorno sobre la superficie que separa los semi-espacios. La estrategia de este método es escribir las condiciones de contorno sobre la superficie aleatoria igualando órdenes del desarrollo perturbativo. Esto permite escribir los campos tangenciales sobre la superficie en términos de la amplitud de scattering.

Si sobre la superficie incide una onda plana con polarización horizontal (modo TE), el campo total sobre la misma será:

$$E_x(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2\pi} \int d^2k_\perp U_x(\mathbf{k}_\perp) e^{\imath \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} e^{\imath k_z z} \tag{2.2}$$

$$E_y(\mathbf{r}, z) = e^{\imath k_x x} \left( e^{-\imath k_z z} + R_\perp e^{\imath k_z z} \right) + \frac{1}{2\pi} \int d^2k_\perp U_y(\mathbf{k}_\perp) e^{\imath \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} e^{\imath k_z z} \tag{2.3}$$

$$E_z(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2\pi} \int d^2k_\perp U_z(\mathbf{k}_\perp) e^{\imath \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} e^{\imath k_z z} \tag{2.4}$$

La componente del campo EM en la dirección $\hat{y}$ consta de dos términos: el campo reflejado por el plano medio de la superficie (proporcional a $R_\perp$) y el campo dispersado por la superficie (con amplitud desconocida $U_y$).

El campo trasmitido al semi-espacio inferior se puede escribir de manera análoga al anterior:

$$E'_x(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2\pi} \int d^2k_\perp D_x(\mathbf{k}_\perp) e^{\imath \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} e^{\imath k'_z z} \tag{2.5}$$

$$E'_y(\mathbf{r}, z) = T_\perp e^{\imath (k'_x x + k'_z z)} + \frac{1}{2\pi} \int d^2k_\perp D_y(\mathbf{k}_\perp) e^{\imath \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} e^{\imath k'_z z} \tag{2.6}$$

$$E'_z(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2\pi} \int d^2k_\perp D_z(\mathbf{k}_\perp) e^{\imath \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}} e^{\imath k'_z z} \tag{2.7}$$

El problema consiste en hallar las amplitudes $U_j$ y $D_j$ (seis incógnitas). Estas amplitudes se encuentran imponiendo las condiciones de contorno sobre la superficie: dado que no hay cargas libres sobre la misma, la componente tangencial de los campos debe ser continua. Por lo tanto:

$$\left(\vec{E}-\vec{E}'\right)\times\hat{n}\Big|_S=0 \tag{2.8}$$

$$\left(\vec{H}-\vec{H}'\right)\times\hat{n}\Big|_S=0 \tag{2.9}$$

donde $\hat{n}=\frac{-z_x\hat{x}-z_y\hat{y}+\hat{z}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ es la normal local a la superficie y $z_x$ y $z_y$ son las derivadas direccionales de la superficie $z(\mathbf{r})$. Para escribir la condición de contorno del campo magnético usamos una dependencia en modos de Fourier para la parte temporal del campo, con lo cual, la tercer ecuación de Maxweel es $\imath\omega\epsilon\mu\vec{H}=\nabla\times\vec{E}$.

Cada una de las condiciones de contorno da tres ecuaciones para relacionar las amplitudes de los campos, pero sólo dos de estas son linealmente independientes. Por lo tanto, con las condiciones de contorno, generamos sólo cuatro ecuaciones. Las dos restantes se obtienen de pedir que tanto en el medio superior como en el inferior vale $\nabla\vec{E}=0$. Las seis ecuaciones que resuelven el problema son:

$$\Delta E_y+z_y\Delta E_z=0 \tag{2.10a}$$

$$\Delta E_x+z_x\Delta E_z=0 \tag{2.10b}$$

$$\frac{\partial\Delta E_x}{\partial z}-\frac{\partial\Delta E_z}{\partial x}+z_y\left(\frac{\partial\Delta E_y}{\partial x}-\frac{\partial\Delta E_x}{\partial y}\right)=0 \tag{2.10c}$$

$$\frac{\partial\Delta E_z}{\partial y}-\frac{\partial\Delta E_y}{\partial z}+z_x\left(\frac{\partial\Delta E_y}{\partial x}-\frac{\partial\Delta E_x}{\partial y}\right)=0 \tag{2.10d}$$

$$k_zU_z=k_xU_x+k_yU_y \tag{2.10e}$$

$$k_z'D_z=-(k_x'D_x+k_y'D_y) \tag{2.10f}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se introduce una expansión perturbativa en las amplitudes de los campos: $U_j=U_j^{(1)}+U_j^{(2)}+U_j^{(3)}+\cdots$. Además, se hace uso de que la altura media de la superficie es mucho menor que la longitud de onda incidente, $k_0s\ll 1$. Bajo esta condición, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$e^{\imath k_z z}\approx 1+\imath k_z z-\frac{1}{2}(k_z z)^2+\mathcal{O}(3) \tag{2.11}$$

Usando el desarrollo perturbativo para la amplitud de los campos y la aproximación par la exponencial, las componentes del campo eléctrico resultan,

$$E_x(\mathbf{r},z) = \frac{1}{2\pi}\int d^2\mathbf{k}_\perp e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\left[U_x^{(1)} + U_x^{(2)} + \cdots\right]\left[1 + \imath k_z z - \frac{1}{2}(k_z z)^2 + \cdots\right]$$
$$E_x(\mathbf{r},z) = \frac{1}{2\pi}\int d^2\mathbf{k}_\perp e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\left[U_x^{(1)} + U_x^{(2)} + \imath k_z z U_x^{(1)} + \mathcal{O}(3)\right] \tag{2.12}$$

Si calculamos la diferencia de los campos (hasta orden dos) obtenemos lo siguiente:

$$\Delta E_x(\mathbf{r},z) \approx \int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\left[U_x^{(1)} - D_x^{(1)} + U_x^{(2)} - D_x^{(2)} + \imath z(k_z U_x^{(1)} - k_z' D_x^{(1)})\right] \tag{2.13}$$

$$\Delta E_y(\mathbf{r},z) \approx \int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\left[U_y^{(1)} - D_y^{(1)} + U_y^{(2)} - D_y^{(2)} + \imath z(k_z U_y^{(1)} - k_z' D_y^{(1)})\right]$$
$$+e^{\imath k_x x}\left[1 + R_\perp - \imath k_z z(1 - R_\perp) - \frac{1}{2}k_z^2 z^2(1 - R_\perp) - T_\perp(1 + \imath k_z' z - \frac{1}{2}k_z'^2 z^2)\right] \tag{2.14}$$

$$\Delta E_z(\mathbf{r},z) \approx \int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\left[U_z^{(1)} - D_z^{(1)} + U_z^{(2)} - D_z^{(2)} + \imath z(k_z U_z^{(1)} - k_z' D_z^{(1)})\right] \tag{2.15}$$

Para calcular las derivadas hay que tener en cuenta dos factores: el término que es proporcional a $z$ en las amplitudes $U$ o $D$ y el término que proviene de derivar la exponencial. Quedándonos a segundo orden, las derivadas de $E_x$ resultan,

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta E_x \approx \int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\imath\frac{\partial z}{\partial y}\left[k_z U_x^{(1)} - k_z' D_x^{(1)}\right]$$
$$+\int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\imath k_y\left[U_x^{(1)} - D_x^{(1)} + U_x^{(2)} - D_x^{(2)} + \imath z(k_z U_x^{(1)} - k_z' D_x^{(1)})\right] \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta E_x \approx \int \frac{d^2k_\perp}{2\pi} e^{\imath\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}}\imath\left[k_z U_x^{(1)} - k_z' D_x^{(1)} + k_z U_x^{(2)} - k_z' D_x^{(2)} - \imath z(k_z^2 U_x^{(1)} - k_z'^2 D_x^{(1)})\right] \tag{2.17}$$

Expresiones análogas se obtienen para las derivadas de las componentes $E_y$ y $E_z$. Para encontrar las amplitudes del campo dispersado hay que sustituir las expresiones anteriores en el sistema de ecuaciones (2.10). Igualando orden a orden se encuentran relaciones entre las amplitudes $\left\{U_j^{(n)}\right\}$ y $\left\{D_j^{(n)}\right\}$.

En resumen, el SPM es una solución al problema de scattering de una superficie aleatoria basado sólo en consideraciones cinemáticas: la única condición que se pide sobre los campos es la continuidad sobre la superficie iluminada. El SPM no resuelve de manera formal

las ecuaciones de Maxwell. Solo hace una estimación de los campos superficiales proponiendo un *ansatz* para el campo dispersado, basado en una expansión perturbativa cuyo parámetro pequeño es la altura RMS de la superficie respecto a la longitud de onda incidente.

Para los fines práctica de este trabajo, la consecuencia principal de este enfoque es que a orden uno la sección eficaz de los canales cruzados es nula, $\sigma^0_{hv} = 0$. Para obtener un coeficiente no nulo es necesario calcular las amplitudes a segundo orden. Dado que el rango de validez del método es limitado, resulta conveniente desarrollar otro método que sea más eficiente para obtener $\sigma^0_{HV} \neq 0$.

A pesar de todo esto, el método de perturbaciones pequeñas resulta una referencia apropiada con qué comparar cualquier otro método de dispersión en el límite de longitud de onda grande, ya que cualquier resultado debería converger a la aproximación del SPM [5].

## 2.4. Método de la ecuación integral (IEM)

En contraste con el SPM, el método de la ecuación integral (IEM) sí se basa en resolver las ecuaciones de Maxwell para encontrar el campo dispersado y no propone un ansatz para el mismo. No es un método cerrado, ya que como se verá más adelante, este método propone una manera iterativa para encontrar el campo dispersado. Partiendo de las identidades de Green se puede escribir de manera autoconsistente el campo sobre un semi-espacio. Esto brinda una ecuación integral para el campo eléctrico total. La idea es encontrar un núcleo que resuelva de manera iterativa esta ecuación. El núcleo del IEM es la aproximación de plano tangente (APT) o aproximación de Kirchhoff [16, 17]: cada punto de la superficie puede ser reemplazado por el plano tangente a éste y calcular el campo dispersado simplemente usando los coeficientes de Fresnel. Claramente esta aproximación es local: cada punto de la superficie será aproximado por un plano diferente; en este límite, como el campo dispersado es dado por un plano, la APT no dará cuenta de efectos de dispersión múltiple.

La condición de validez del método es totalmente diferente a la del SPM. En este caso la condición necesaria es que la superficie sea localmente plana, esto es, respecto a la longitud de onda incidente el radio de curvatura debe ser grande.

### 2.4.1. Aproximación de Kirchhoff

La estimación principal de esta aproximación es que el campo sobre cada punto de la superficie es el que produciría un plano tangente ubicado en el mismo punto. Resulta inmediato que esta aproximación no da cuenta de los efectos de curvatura. La aproximación supone una superficie suave en donde se pueden ignorar los efectos de dispersión múltiple y de sombreado.

En términos estadísticos de la superficie, la aproximación de Kirchhoff es válida siempre que, para cualquier punto P de la superficie, la distancia ente el plano tangente a P y los puntos de la superficie próximos a él sea pequeña [16, 17]. En términos de las características de la superficie, esto puede ser reformulado de la siguiente manera: [1]:

- la escala vertical de rugosidad (altura RMS, $s$) es lo suficientemente chica tal que el radio de curvatura de la superficie resulte mucho más grande que la longitud de onda incidente: $l^2 > 2{,}76 s\lambda$ [18].

Esta condición muestra que la altura RMS debe ser pequeña frente a la longitud de correlación aunque puede ser del orden de la longitud de onda incidente. Esto es un avance respecto al SPM, ya que bajo esta aproximación se pueden aceptar alturas RMS grandes siempre y cuando la longitud de correlación preserve la condición de un radio de curvatura mayor a la longitud de onda.

### 2.4.2. Formulación del IEM

De manera formal, las ecuaciones de Maxwell pueden ser resueltas en forma autoconsistente partiendo de las identidades de Green. En el Apéndice A mostramos como se puede escribir el campo eléctrico total en un semi-espacio a través de una ecuación integral. Dada esta ecuación, se puede proponer un núcleo que la resuelva de manera iterativa. Para el IEM el núcleo usado es la aproximación de Kirchhoff: punto a punto la superficie se reemplaza por el plano tangente a la misma y se calculan los campos superficiales que se generarían en dicho plano. De esta manera se puede iterar hasta orden $N$ la ecuación integral para aumentar el orden de exactitud de la solución propuesta. A continuación vamos a desarrollar esta

[1] En el Apéndice A.3 se detalla el cálculo.

idea, veremos como es la estructura general del IEM y luego sí calcularemos en detalle cada término de la iteración.

El principio de Huygens se deduce a partir de las identidades de Green (Apéndice A.1) y da el campo eléctrico total sobre un semi-espacio en el cual existe un campo eléctrico incidente $\vec{E}_i$. A través del principio de Hyugens, el campo eléctrico se puede escribir como [14, 19]:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \vec{E}_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int ds' \left\{ \imath\omega\mu G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \hat{n}' \times \vec{H}(\mathbf{r}') + (\hat{n}' \times \vec{E}(\mathbf{r}')) \times \nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right\} \tag{2.18}$$

donde $\vec{E}_i(\mathbf{r})$ es el campo incidente, $\hat{n}$ es la normal a cada punto de la superficie y la integral es hecha sobre la superficie iluminada. La función de Green retardada, en el espacio libre, es $G(\overline{\overline{\mathbf{r}}},\mathbf{r}') = \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] \frac{e^{\vec{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

Para el campo magnético se obtiene una expresión análoga:

$$\vec{H}(\mathbf{r}) = \vec{H}_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int ds' \left\{ \imath\epsilon\omega G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{n}' \times \vec{E}(\mathbf{r}') - (\hat{n}' \times \vec{H}(\mathbf{r}')) \times \nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right\} \tag{2.19}$$

En la aproximación de campo lejano, la función de Green y su gradiente se pueden aproximar por [14, 19]:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k_s^2}\hat{k}_s\,\hat{k}_s\right] \frac{e^{\imath k_s r}}{r} e^{-\imath\vec{k}_s\mathbf{r}'} \tag{2.20}$$

$$\nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\imath\vec{k}_s \left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k_s^2}\hat{k}_s\,\hat{k}_s\right] \frac{e^{\imath k_s r}}{r} e^{-\imath\vec{k}_s\mathbf{r}'} \tag{2.21}$$

Si bien las expresiones (2.18 - 2.19) dan los campos dispersados debido a su interacción con la superficie, no se ha resuleto el problema de manera concreta. Estas expresiones son ecuaciones integrales, ya que dependen de los campos tangenciales sobre la superficie iluminada ($\hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}')$ y $\hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}')$). Para encontrar una solución a esta ecuación integral lo que se hace es un nueva iteración: los campos incógnitas son reemplazados por su expresión integral; esta nueva expresión va a tener dos contribuciones, similar a la acuación (2.18): una proporcional al campo incidente y otra proporcional a una nueva integral (sobre $\mathbf{r}''$ esta vez). Para ver cómo trabajar de manera recursiva con el principio de Huygens, vamos primero a definir la siguiente notación:

$$
\begin{aligned}
G_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= (\hat{n}' \cdot \nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')) - \nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{n}' \ \cdot \\
G_{12}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \imath\omega\mu G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\ \hat{n}' \\
G_{21}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \imath\omega\epsilon G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\ \hat{n}' \\
G_{22}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -(\hat{n}' \cdot \nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')) + \nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{n}' \ \cdot
\end{aligned}
$$

Usando esta notación, el principio de Huygens para el campo EM puede ser escrito como:

$$
\vec{E}(\mathbf{r}) = \vec{E}_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int ds' \left\{ G_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \vec{E}(\mathbf{r}') + G_{12}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \times \vec{H}(\mathbf{r}') \right\} \tag{2.22a}
$$

$$
\vec{H}(\mathbf{r}) = \vec{H}_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int ds' \left\{ G_{21}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \times \vec{E}(\mathbf{r}') + G_{22}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \vec{H}(\mathbf{r}') \right\} \tag{2.22b}
$$

Podemos dar una expresión matricial para simplificar aún más la escritura:

$$
\bar{\Psi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \vec{E}(\mathbf{r}) \\ \vec{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} G_{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & G_{12}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\ G_{21}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & G_{22}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{bmatrix}
$$

De manera compacta, el principio de Huygens puede ser escrito de la siguiente manera:

$$
\bar{\Psi}(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}_i(\mathbf{r}) + \int\ ds' \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\bar{\Psi}(\mathbf{r}') \tag{2.23}
$$

La expresión anterior es la ecuación integral que debe ser resuelta de manera recursiva. Vamos a reemplazar el campo que está dentro de la integral con la misma ecuación (2.23). Esto tendrá como consecuencia que el campo total resulta de dos términos: uno que se puede calcular de manera explícita, ya que depende del campo incidente; y otro término que volverá a ser dependiente del mismo campo incógnita. Haciendo una nueva iteración se puede poner este campo en función del incidente y escribir un nuevo término (ya de tercer orden), que estará nuevamente escrito en función del campo incógnita. Obviamente, se puede realizar una nueva iteración, escribir un nuevo término (de cuarto orden) y continuar iterando. La solución formal de la ecuación se obtendría escribiendo la serie que se obtendría con este proceso de recursión.

Este tipo de ecuaciones, que se resuelve de manera iterativa, recibe el nombre de Dyson-Schwinger. La manera formal y correcta de resolver este tipo de ecuaciones es invertir el operador $\mathbb{I} - \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, el cual proviene de reescribir la ecuación (2.23), y escribir el campo total como $\bar{\Psi}(\mathbf{r}) = (\mathbb{I} - \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))^{-1}\bar{\Psi}_i(\mathbf{r})$. Dada la estructura del operador $\bar{\bar{G}}$, no se puede resolver la ecuación por esta vía y resulta necesario entonces recurrir a una serie perturbativa para poder hallar el campo EM dispersado.

Tomando la primer iteración en (2.23), obtenemos la siguiente ecuación integral:

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}_i(\mathbf{r}) + \int ds' \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}) + \int ds' ds'' \; \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}'') + \\ + \sum_n \int ds^1 \cdots ds^n \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \cdots \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n)\bar{\Psi}(\mathbf{r}_n)$$

Aunque este procedimiento parece ser inmediato y fácil de repetir, debe ser notado lo siguiente: la función de Green, evluada en los puntos $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$ (ambos pertenecientes a la superficie iluminada), puede ser singular. Basta ver que cuando los dos puntos coinciden, el denominador en (2.20) se anula. Para evitar esta singularidad, el nuevo punto de integración debe ser de la forma $\mathbf{r}'' = (x'', y'', \delta)$ y luego tomar el límite cuando $\delta \to z(x'', y'')$. Este límite trae como consecuencia que el campo $\vec{E}(\mathbf{r}'')$ toma la siguiente expresión [19]:

$$\vec{E}(\mathbf{r}') = 2\vec{E}_i(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\mathrm{VP}\int ds'' \left\{ \imath\omega\mu G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot \hat{n}'' \times \vec{H}(\mathbf{r}'') + (\hat{n}'' \times \vec{E}(\mathbf{r}'')) \times \nabla'' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right\} \tag{2.24}$$

donde VP indica el valor principal de la integral.

Como el campo dispersado es simplemente $\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) = \bar{\Psi}(\mathbf{r}) - \bar{\Psi}_i(\mathbf{r})$, podemos escribir una ecuación integral para él:

$$\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) = \int ds' \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}) + \int ds' ds'' \; \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}'') \\ + \sum_{n\geq 3} \int ds^1 \cdots ds^n \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \cdots \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n)\bar{\Psi}(\mathbf{r}_n)$$

El método de la ecuación integral solo retiene hasta el segundo orden de la recursión. En lugar de tener $\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}')$ como fuente tiene el campo de Kirchhoff, que es simplemente sumar

el campo reflejado por el plano tangente al punto $\mathbf{r}'$. Esta contribución extra es suprimida en el segundo término, al cual vamos a llamar *complementario*.

La aproximación de Kirchhoff se implementa de la siguiente manera: en cada punto de la superficie el campo total es el incidente más el reflejado por el plano tangente: $2\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) = \bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) + \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1) + \bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1)$, donde $\bar{\Psi}_r(\mathbf{r}') = R\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}')$ es el campo reflejado por el plano tangente al punto $\mathbf{r}'$ de la superficie, siendo $R$ el coeficiente de Fresnel. Vamos a definir a $\bar{\Psi}_k(\mathbf{r}_1) = \bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) + \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1)$ como la componente de Kirchhoff del campo.

El campo dispersado queda escrito como:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) &= \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) + \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1) \\ &+ \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\left[\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1) + \int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\Psi}(\mathbf{r}_2)\right]\end{aligned} \tag{2.25}$$

Iterando una vez más llegamos a:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) &= \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_k(\mathbf{r}_1) \\ &+ \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\left[\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1) + \int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_2) + \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_2)\right] \\ &+ \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\left[\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_2) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_2) + \int ds_3\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)\bar{\Psi}(\mathbf{r}_3)\right]\end{aligned}$$

Si definimos el campo complementario como

$$\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_1) = \bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_1) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_1) + \int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_2) + \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_2) \tag{2.26}$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) &= \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_k(\mathbf{r}_1) + \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\left[\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_2) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_2) + \int d\mathbf{r}_3\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)\bar{\Psi}(\mathbf{r}_3)\right]\end{aligned}$$

Con una nueva iteración:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) &= \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_k(\mathbf{r}_1) + \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_1) + \\
&+ \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) \int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \left[\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_2) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_2) + \int d\mathbf{r}_3 \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)\left(\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_3) + \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_3)\right)\right] \\
&+ \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) \int ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \int d\mathbf{r}_3 \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3) \left[\bar{\Psi}_i(\mathbf{r}_3) - \bar{\Psi}_r(\mathbf{r}_3) + \int ds_4\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4)\bar{\Psi}(\mathbf{r}_4)\right] \\
&= \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_k(\mathbf{r}_1) + \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_1) + \int ds_1 ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_2) \\
&+ \int ds_1 ds_2 ds_3\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_3) + \cdots
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Podemos entonces escribir la recursión para el campo dispersado en función del campo de Kirchhoff y el complementario:

$$
\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) = \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_k(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) + \sum_{n\geq 2} \int ds_1 \cdots ds_n\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\cdots\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_{n-1},\mathbf{r}_n)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_n) \tag{2.28}
$$

Dado que el IEM solo retiene hasta la segunda iteración, la expresión con la cual trabajaremos de ahora en adelante resulta:

$$
\bar{\Psi}_s(\mathbf{r}) \approx \int ds_1\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\Psi}_k(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) + \int ds_1 ds_2\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\Psi}_c(\mathbf{r}_2) \tag{2.29}
$$

Lo que debemos hacer a continuación es escribir explícitamente los campos de Kirchhoff y complementario. Estos quedarán escritos en función de los coeficientes de reflexión de Fresnel y las coordenadas locales de la superficie, dadas por $\hat{n}(\mathbf{r})$ y el plano tangente a este punto.

### 2.4.3. Campos superficiales

Ya establecido el camino iterativo que usaremos para calcular el campo dispersado por una superficie aleatoria, vamos a reescribir la ecuación (2.29) de manera manifiesta, en términos de los campos eléctricos y magnéticos que debemos calcular.

El campo EM dispersado requiere los campos tangenciales generados sobre la superficie iluminada. Esto se observa en las ecuaciones (2.18) y (2.19), las cuales dependen de $\hat{n}\times\vec{E}(\mathbf{r}')$ y $\hat{n}\times\vec{H}(\mathbf{r}')$, donde $\mathbf{r}'$ indica el punto en la superficie iluminada. Vamos a calcular cada uno de estos campos tangenciales separándolos en la contribución de Kirchhoff y la complementaria.

Los campos tangenciales pueden ser calculados a partir del mismo principio de Huygens. Tomando el producto vectorial entre la normal a la superficie y la ecuación (2.18) el campo tangencial sobre la superficie resulta,

$$\hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}) = 2\hat{n} \times \vec{E}_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}') \tag{2.30}$$

$$\hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}) = 2\hat{n} \times \vec{H}_i(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}') \tag{2.31}$$

con

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}') = \imath\omega\mu G\, \hat{n}' \times \vec{H}(\mathbf{r}') - (\hat{n}' \times \vec{E}(\mathbf{r}')) \times \nabla' G - (\hat{n}' \cdot \vec{E}(\mathbf{r}'))\nabla' G \tag{2.32}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}') = \imath\omega\epsilon G\, \hat{n}' \times \vec{E}(\mathbf{r}') + (\hat{n}' \times \vec{H}(\mathbf{r}')) \times \nabla' G + (\hat{n}' \cdot \vec{H}(\mathbf{r}'))\nabla' G \tag{2.33}$$

donde hemos suprimido la dependencia espacial de la función de Green para aliviar la notación: $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Ahora sumamos y restamos el campo reflejado por el plano tangente al punto $\mathbf{r}'$. Esto nos permite separar el campo tangencial en la componente de Kirchhoff y la componente complementaria. Para el campo eléctrico, los dos términos resultan en:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}) &= \hat{n} \times \left(\vec{E}_i(\mathbf{r}) + \vec{E}_r(\mathbf{r})\right) + \hat{n} \times \left[\vec{E}_i(\mathbf{r}) - \vec{E}_r(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int ds' \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}')\right] \\ \hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}) &= \hat{n} \times \vec{E}_k(\mathbf{r}) + \hat{n} \times \vec{E}_c(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Análogamente, para el campo magnético obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}) &= \hat{n} \times \left(\vec{H}_i(\mathbf{r}) + \vec{H}_r(\mathbf{r})\right) + \hat{n} \times \left[\vec{H}_i(\mathbf{r}) - \vec{H}_r(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi}\int ds' \vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}')\right] \\ \hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}) &= \hat{n} \times \vec{H}_k(\mathbf{r}) + \hat{n} \times \vec{H}_c(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Lo que resta para completar la formulación del IEM es dar las expresiones de los campos de Kirchhoff y complementario. Para ello va a ser necesario definir un sistema de coordenadas local en cada punto de la superficie. Vamos a usar la siguiente terna como base: el vector de onda incidente $\hat{k}_i$, la dirección tangente al plano de incidencia, dada por $\hat{t} = \hat{k}_i \times \hat{n}$ y la dirección normal al plano de incidencia, $\hat{d} = \hat{k}_i \times \hat{t}$ (en el Apéndice B se detallan estos

vectores). Con estas tres direcciones, $\hat{k}_i$, $\hat{t}$, $\hat{d}$, vamos a calcular las dos componentes de los campos superficiales. Resultará conveniente distinguir entre los modos transverso eléctrico (TE) y transverso magnético (TM) de la onda incidente, ya que para los distintos casos la descomposición de $\vec{E}_i$ en la base local resultará de gran utilidad.

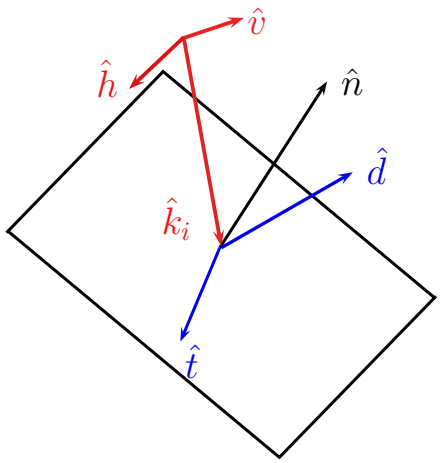



Figura 2.1: Esquema de la base local.

En la base local, el campo eléctrico incidente $\vec{E}_i(\mathbf{r}) = E_i(\mathbf{r})\hat{p}$, se puede escribir como sigue:

$$\vec{E}_i(\mathbf{r}) = \vec{E}_{i\perp}(\mathbf{r}) + \vec{E}_{i\|}(\mathbf{r}) = (\hat{p}\cdot\hat{t})\hat{t}E_i(\mathbf{r}) + (\hat{p}\cdot\hat{d})\hat{d}E_i(\mathbf{r}) \tag{2.36}$$

Una descomposición similar se hace para el campo magnético:

$$\vec{H}_i(\mathbf{r}) = \vec{H}_{i\perp}(\mathbf{r}) + \vec{H}_{i\|}(\mathbf{r}) = (\hat{p}\cdot\hat{t})\hat{d}\sqrt{\epsilon}E_i(\mathbf{r}) - (\hat{p}\cdot\hat{d})\hat{t}\sqrt{\epsilon}E_i(\mathbf{r}) \tag{2.37}$$

donde usamos el hecho que $\vec{H}_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\hat{k}_i \times \vec{E}_i$, siendo $\epsilon$ y $\mu$ las permitividades diléctrica y magnética del medio en donde se propaga la onda. Dada esta descomposición, ahora sí pasamos a describir los campos superficiales.

### 2.4.4. Campo de Kirchhoff

La componente de Kirchhoff del campo tangencial es sencilla de calcular, ya que solo usamos el hecho de que este campo es la suma del incidente y el reflejado por el plano tangente

en cada punto de la superficie. Sólo debemos distinguir entre los modos TE y TM, los cuales resultan:

$$\hat{n} \times \vec{E}_{k\perp}(\mathbf{r}) = (1 + R_\perp)\hat{n} \times \vec{E}_i(\mathbf{r}) = E_i(1 + R_\perp)(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} \tag{2.38}$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_{k\|}(\mathbf{r}) = (1 - R_\|)\hat{n} \times \vec{E}_i(\mathbf{r}) = E_i(1 - R_\|)(\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{n} \times \hat{d} \tag{2.39}$$

Entonces, para un caso general, en donde la onda incidente es una combinación de ambos modos, el campo de Kirchhoff puede ser escrito como:

$$\hat{n} \times \vec{E}_k(\mathbf{r}) = E_i(1 + R_\perp)(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} + E_i(1 - R_\|)(\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{n} \times \hat{d} \tag{2.40}$$

Si bien este es el campo tangencial más general que se puede escribir, vamos a escribirlo de una manera que será útil más adelante. Usando que la polarización incidente puede ser descompuesta sobre el plano tangente (definido por los vectores locales $\hat{t}$ y $\hat{d}$) como: $\hat{p} = (\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{t} + (\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{d}$. Por lo tanto, la componente de Kirchhoff del campo tangencial puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\hat{n} \times \vec{E}_k(\mathbf{r}) = E_i\hat{n} \times \left[(1 + R_\perp)(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{t} + (1 - R_\|)(\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{d}\right]$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_k(\mathbf{r}) = E_i\hat{n} \times \left[(1 + R_\perp)\hat{p} - (R_\perp + R_\|)(\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{d}\right] \tag{2.41}$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_k(\mathbf{r}) = E_i\hat{n} \times \left[(1 - R_\|)\hat{p} + (R_\perp + R_\|)(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{t}\right] \tag{2.42}$$

donde usamos, en la segunda igualdad que $(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{t} = \hat{p} - (\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{d}$ y una expresión análoga (intercambiando $\hat{t}$ por $\hat{d}$) en la tercer igualdad.

Estas expresiones resultan útiles para hacer simplificaciones en los distintos modos de incidencia. Por ejemplo, en el caso TM, en donde $\hat{p} = \hat{v}$, el producto $\hat{v} \cdot \hat{t} \ll 1$, por lo que podemos simplificar el campo de Kirchhoff a

$$\hat{n} \times \vec{E}_{k\|} \approx E_i\,(1 - R\,\|)\hat{n} \times \hat{v} \tag{2.43}$$

En correspondencia, para el caso TE podemos ignorar el término con $\hat{h} \cdot \hat{d}$ y escribir la componente tangencial como

$$\hat{n} \times \vec{E}_{k\perp} \approx E_i\,(1 + R_\perp)\hat{n} \times \hat{h} \tag{2.44}$$

Con un análisis similar podemos escribir la componente de Kirchhoff del campo magnético tangencial. En el caso general la misma resulta:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\hat{n} \times \vec{H}_k(\mathbf{r}) = E_i\,(1 - R_\perp)(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{d} - E_i\,(1 + R_\parallel)(\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{n} \times \hat{t} \tag{2.45}$$

En el modo TM se reduce a

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\hat{n} \times \vec{H}_{k\parallel} \approx E_i\,(1 + R_\parallel)\hat{n} \times (\hat{k}_i \times \hat{v}) \tag{2.46}$$

Y en el modo TE es

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\hat{n} \times \vec{H}_{k\perp} \approx E_i\,(1 - R_\perp)\hat{n} \times (\hat{k}_i \times \hat{h}) \tag{2.47}$$

Estas expresiones son útiles y sencillas para trabajar en los canales copolarizados, cuando se quiere observar el campo dispersado en la misma polarización que el campo incidente. Sin embargo, cuando se observa en los canales cruzados, las simplificaciones anteriores no pueden ser hechas, ya que no podemos considerar que la descomposición de la onda incidente tiene una componente que puede ser ignorada. Esto se debe a que la componente ingorada en el campo incidente es justamente la relevante para describir el campo dispersado. Por lo tanto, lo que debemos hacer es considerar las dos descomposiciones válidas para la onda incidente. Sumando ambas descomposiciones para la onda incidente, el campo de Kirchhoff de los canales cruzados se escribe como:

$$\begin{aligned} 2\hat{n} \times \vec{E}_{\times k} &\approx E_i\,(1 - R_\parallel + R_\perp)\hat{n} \times \hat{p} + E_i\,(R_\parallel + R_\perp)\,\hat{n} \times \left[(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{t} - (\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{d}\right] \\ \hat{n} \times \vec{E}_{\times k} &\approx E_i\,(1 - R)\hat{n} \times \hat{p} + \frac{1}{2}E_i\,(R_\parallel + R_\perp)\,\hat{n} \times \left[(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{t} - (\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{d}\right] \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde definimos el coeficiente $R = \frac{1}{2}(R_\parallel - R_\perp)$.

Para el campo magnético, en el caso de polarización cruzada, usaremos

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\hat{n}\times\vec{H}_{\times k}\approx E_i\,(1+R)\hat{n}\times(\hat{k}_i\times\hat{p})+\frac{1}{2}E_i\,(R_{\parallel}+R_{\perp})\hat{n}\times\left[(\hat{p}\cdot\hat{t})\hat{k}_i\times\hat{t}+(\hat{p}\cdot\hat{d})\hat{k}_i\times\hat{d}\right] \quad (2.49)$$

Con estas expresiones calcularemos los coeficientes de retrodispersión (*backscattering*) para los distintos canales. Nos resta calcular los campos tangenciales complementarios, que es lo que haremos a continuación.

### 2.4.5. Campo complementario

Esta componente del campo tangencial resulta más compleja de calcular que la descrita en la subsección anterior. Es la corrección a la aproximación del plano tangente, resulta de segundo orden y en consecuencia requiere de una integración intermedia para poder calcularla. Este término da cuenta de los procesos de dispersión múltiple: el campo EM incidente no sólo se refleja y retro-dispersa (lo cual es descrito por el término de Kirchhoff) sino que debido a las ondulaciones de la superficie, la onda puede reflejarse en direcciones tales qué, después de la primera dispersión, la onda vuelva a encontrar a la superficie. Esta segunda interacción es descripta por el término complementario.[2]

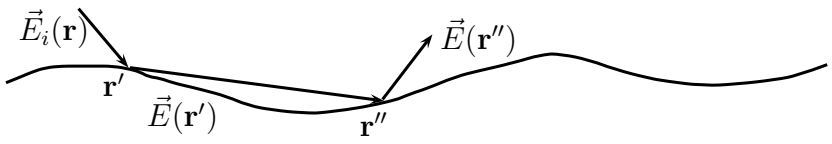



Figura 2.2: Esquema del término complementario en el IEM.

Al igual que lo hicimos con la componente de Kirchhoff, vamos a describir el término complementario en términos de la base local y vamos a dar expresiones que sean de utilidad para cada tipo de polarización.

Los campos complementarios fueron definidos en las ecuaciones (2.34) y (2.35). En estas ecuaciones aplicamos el principio de Huygens para obtener el campo EM total sobre la superficie iluminada. También podríamos aplicar este principio en el semi-espacio inferior de la superficie para calcular el campo total transmitido. Obtendríamos ecuaciones similares a

[2]Está claro que el campo incidente podría interactuar un número $N$ de veces, pero el IEM sólo da cuenta de la segunda interacción. Para ir a ordenes más altos en la dispersión del campo incidente con la superficie habría que mantener en la ecuación (2.28) hasta el orden deseado.

las anteriores con la diferencia de que no tendríamos el término que es proporcional al campo incidente (debajo de la superficie no hay tal campo).

El par de ecuaciones a partir de las cuales tenemos que hallar el término complementario son las que provienen de aplicar el principio de Huygens en ambos medios:

$$\hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}') = \hat{n} \times \vec{E}_i(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \tag{2.50a}$$

$$\hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\hat{n}_t \times \int ds' \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \tag{2.50b}$$

donde $\hat{n}_t = -\hat{n}$ y $\vec{\mathcal{E}}_t$ es el equivalente a $\vec{\mathcal{E}}$ en el medio inferior.

Igualando las dos ecuaciones se puede poner el término del campo incidente en función de $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{E}}_t$:

$$\hat{n} \times \vec{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right) \tag{2.51}$$

Para calcular el campo de Kirchhoff descompusimos el campo incidente en la base local, proyectando sobre las direcciones $\hat{t}$ y $\hat{d}$. Vamos a hacer uso de esa proyección a ambos lados de la igualdad anterior:

$$E_i \left[(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} + (\hat{p} \cdot \hat{d})\hat{n} \times \hat{d}\right] = \hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right)$$

usando que $\hat{n} \times \hat{d} = -(\hat{n} \cdot \hat{k}_i)\hat{t}$, nos queda que

$$\begin{aligned} E_i \left[(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} - (\hat{p} \cdot \hat{d})(\hat{n} \cdot \hat{k}_i)\hat{t}\right] &= \hat{n} \times \hat{t} \left[\hat{n} \times \hat{t} \cdot \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right)\right] \\ &+ \hat{t} \left[\hat{t} \cdot \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right)\right] \end{aligned} \tag{2.52}$$

Podemos igualar las componentes que están presentes en cada dirección ($\hat{n} \times \hat{t}$ y $\hat{t}$) y escribir el campo incidente en términos de la integral que hay que calcular en el campo complementario.

El campo reflejado por el plano tangente puede ser descompuesto de igual modo, ya que que este campo es simplemente multiplicar al campo incidente por el coeficiente de Fresnel correspondiente a cada modo. Dado que en el término complementario debemos computar

la corrección $\vec{E}_i - \vec{E}_r$, resulta conveniente descomponer esta corrección en las direcciones $\hat{t}$ y $\hat{n} \times \hat{t}$:

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_i(\mathbf{r}) - \vec{E}_r(\mathbf{r})\right) = E_i(1 - R_\perp)(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} - E_i(1 + R_\parallel)(\hat{p} \cdot \hat{d})(\hat{n} \cdot \hat{k}_i)\hat{t} \tag{2.53}$$

Esta diferencia puede ser reescrita igualando cada componente a su correspondiente en la ecuación (2.52); para cada una de ellas tenemos lo siguiente:

$$(1 - R_\perp)E_i(\mathbf{r})(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} = (1 - R_\perp)\frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \hat{t} \cdot \hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right) \tag{2.54}$$

$$(1 - R_\perp)E_i(\mathbf{r})(\hat{p} \cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{t} = (1 + R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\hat{t} \cdot \hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right) \tag{2.55}$$

Usando estas dos últimas igualdades podemos escribir el término complementario solo en función de las integrales sobre los campos $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{E}}_t$. De esta manera el término complementario muestra, en forma explícita, los efectos de dispersión múltiple.

El campo complementario resulta entonces

$$\begin{aligned}
2\hat{n} \times \vec{E}_c(\mathbf{r}) &= \hat{n} \times \left(\vec{E}_i(\mathbf{r}) - \vec{E}_r(\mathbf{r})\right) + \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right) \\
&= \left[(1 - R_\perp)\frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \hat{t} \cdot \hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right)\right] \hat{n} \times \hat{t} \\
&+ \left[(1 + R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\hat{t} \cdot \hat{n} \times \int ds' \left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right)\right] \hat{t} \\
&+ \frac{1}{4\pi}\hat{n} \times \int ds' \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Como el último término del campo complementario es ortogonal a $\hat{n}$, puede ser desarrollado en una base que contenga a dicho plano. Y una base posible es justamente la que forman $\hat{t}$ y $\hat{n} \times \hat{t}$. Por lo tanto, descomponiendo el último término en estas direcciones, el campo complementario resulta:

$$
\begin{aligned}
& \hat{n} \times \vec{E}_c(\mathbf{r}) = \\
= & \left[(1-R_\perp)\frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)+\frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\hat{n}\times\hat{t} \\
+ & \left[(1+R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\left(\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)+\frac{1}{4\pi}\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\hat{t} \\
= & \left[\frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'(1+R_\perp)\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'(1-R_\perp)\vec{\mathcal{E}}_t(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\hat{n}\times\hat{t} \\
+ & \left[\frac{1}{4\pi}\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'(1-R_\parallel)\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\frac{1}{4\pi}\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int(1+R_\parallel)ds'\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\hat{t} \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

De la misma manera que hicimos para el campo de Kirchhoff, vamos a dar expresiones simplificadas para las distintas polarizaciones de la onda incidente. Sumando y restando convenientemente se puede mostrar que los campos complementarios, para las distintos canales de observación, pueden ser escritos como [10]

- polarización vertical (modo TM)

$$
\begin{aligned}
\hat{n}\times\vec{E}_{c\parallel}(\mathbf{r}) \quad & \approx \frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\int ds'\left[(1-R_\parallel)\vec{\mathcal{E}}_v(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(1+R_\parallel)\vec{\mathcal{E}}_{tv}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right] \\
& +(R_\perp+R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\left[\hat{n}\times\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\left(\vec{\mathcal{E}}_v(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\vec{\mathcal{E}}_{tv}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)\right]\hat{n}\times\hat{t} \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

- polarización horizontal (modo TE)

$$
\begin{aligned}
\hat{n}\times\vec{E}_{c\perp}(\mathbf{r}) \quad & \approx \frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\int ds'\left[(1+R_\perp)\vec{\mathcal{E}}_h(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(1-R_\perp)\vec{\mathcal{E}}_{th}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right] \\
& +(R_\perp+R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\left[\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\left(\vec{\mathcal{E}}_h(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\vec{\mathcal{E}}_{th}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)\right]\hat{t} \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

- polarización cruzada

$$
\begin{aligned}
\hat{n}\times\vec{E}_{c\times}(\mathbf{r}) \quad & \approx \frac{1}{4\pi}\hat{n}\times\int ds'\left[(1-R)\vec{\mathcal{E}}_p(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(1+R)\vec{\mathcal{E}}_{tp}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right] \\
& +\frac{1}{2}(R_\perp+R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\left[\hat{n}\times\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\left(\vec{\mathcal{E}}_p(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\vec{\mathcal{E}}_{tp}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)\right]\hat{n}\times\hat{t} \\
& +\frac{1}{2}(R_\perp+R_\parallel)\frac{1}{4\pi}\left[\hat{t}\cdot\hat{n}\times\int ds'\left(\vec{\mathcal{E}}_p(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\vec{\mathcal{E}}_{tp}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)\right]\hat{t} \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

donde en esta última expresión, el subíndice $p$ indica la polarización del campo eléctrico incidente.

Debemos dar ahora expresiones adecuadas para los campos $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{E}}_t$. Estos campos vuelven a depender de los campos incógnitas: la integral que define a $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ (dada por la ecuación (2.34)) depende de los campos superficiales $\vec{E}(\mathbf{r}')$ y $\vec{H}(\mathbf{r}')$, y depende de las dos proyecciones de los campos: de los que son tangentes a la superficie ($\hat{n}\times\vec{E}(\mathbf{r}')$) y de los que son normales a la misma ($\hat{n}\cdot\vec{E}(\mathbf{r}')$).

Para poder calcular explícitamente $\vec{\mathcal{E}}$ volvemos a reemplazar los campos incógnitas con la aproximación de plano tangente: los campos que están dentro de la integral son los que produciría el plano tangente al punto $\mathbf{r}'$. Estos campos ya los calculamos en detalle. Los escribimos en función de los coeficientes de Fresnel y los descompusimos en la base local de cada punto de la superficie iluminada. Lo que no hemos calculado todavía son los campos normales a la superficie. En el Apéndice A.2 mostramos como relacionar la componente normal del campo magnético con la tangencial del eléctrico. Integrando respectivamente la segunda y cuarta ecuación de Maxwell se muestra que (ver Apéndice A.2)

$$-\imath\omega\epsilon\hat{n}\cdot\vec{E}(\mathbf{r}) = \nabla\cdot(\hat{n}\times\vec{H}(\mathbf{r}))$$

Por lo tanto, los campos normales a la superficie se escriben con su recíproco tangencial: $\hat{n}\cdot\vec{H}\to\hat{n}\times\vec{E}$, $\hat{n}\cdot\vec{E}\to\hat{n}\times\vec{H}$. Los campos tangenciales ya los hemos desarrollado con suficiente detalle, de manera que solo resta escribir a los campos $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ como función explícita de los mismos.

Finalmente, solo queda dar la función $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Esta función es la función de Green retardada, solución de la ecuación de Helmolthz en el espacio libre de cargas. Su interpretación física es la de una onda esférica propagándose desde el punto $\mathbf{r}'$ hacia el $\mathbf{r}$ y en el espacio de coordenadas, usando la representación de Weyl [11, 10], se escribe como

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\imath}{2\pi}\int du\, dv\, e^{\imath[u(x-x')+v(y-y')]}\frac{e^{\imath q|z-z'|}}{q} \tag{2.61}$$

donde $q=\left[k^2-u^2-v^2\right]^{1/2}$ si $k^2\geq u^2+v^2$ o $q=\imath\left[u^2+v^2-k^2\right]^{1/2}$ si $k^2\leq u^2+v^2$.

El gradiente de la función de Green es simplemente

$$\nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\int du\, dv\, e^{\imath[u(x-x')+v(y-y')]}\frac{e^{\imath q|z-z'|}}{q}\vec{g} \tag{2.62}$$

siendo $\vec{g} = u\hat{x} + v\hat{y} + q\dfrac{z-z'}{|z-z'|}\hat{z}$

Ahora sí estamos en condiciones de calcular la sección eficaz de la superficie iluminada. Ya hemos definido el método por el cual vamos a calcular el campo dispersado; hemos separado este campo en dos contribuciones que calculamos explícitamente; hemos dado cuenta que la componente de Kirchhoff solo da contribuciones de una sola dispersión (reflexión en el plano tangente a la superficie) y hemos mostrado cómo y de qué manera el término complementario da cuenta de los efectos de dispersión múltiple. Lo que debemos desarrollar ahora es el cálculo del coeficiente de retrodispersión generado por la superficie iluminada.

### 2.4.6. Cálculo del Coeficiente de retrodispersión

En la Sección 2.2 definimos el coeficiente de retrodispersión. Este es la sección eficaz del área iluminada normalizado a una superficie esférica. Mencionamos que debemos calcular la potencia incoherente dispersada por la región iluminada. Por lo tanto, lo que debemos calcular es la siguiente cantidad:

$$\sigma^0_{qp} = \frac{4\pi R^2}{E_i^2 A_0}\left[\left\langle E_{sqp}E^*_{sqp}\right\rangle - \left\langle E_{sqp}\right\rangle\left\langle E^*_{sqp}\right\rangle\right] \tag{2.63}$$

donde $E_{sqp}$ es el campo dispersado en la polarización $q$ cuando el campo incidente está en la polarización $p$, $E_i$ es el campo incidente, $A_0$ es el área iluminada y $R$ es la distancia entre el radar y la superficie. Para calcular el campo dispersado hemos desarrollado en método de la ecuación integral, el cual proviene de escribir el principio de Huygens en el semi-espacio en donde se encuentra la onda incidente. Este principio escribe al campo dispersado como

$$\vec{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int ds'\left[\imath\omega\mu G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{n}'\times\vec{H}(\mathbf{r}') + (\hat{n}'\times\vec{E}(\mathbf{r}'))\times\nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right] \tag{2.64}$$

Ya hemos desarrollado como calcular los campos tangenciales que deben ser integrados. Sin embargo, podemos hacer una simplificación. Dado que la distancia entre la superficie iluminada y el radar es mucho más grande que la longitud de onda incidente ($R \gg \lambda$) podemos considerar que estamos trabajando con los campos en la zona de radiación y aproximar la

función de Green por su expresión en la región de campo lejano. Esta aproximación del principio de Huygens se conoce como la integral de Stratton-Chu [20], que para el campo $E_{sqp}$ es

$$
\begin{aligned}
E_{sqp} &= C \int ds' \; \hat{q} \cdot \left[ \hat{k}_s \times (\hat{n} \times \vec{E}_p(\mathbf{r}')) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}) \right] e^{\imath \vec{k}_s \mathbf{r}} \\
E_{sqp} &= C \int ds' \; \left[ \hat{q} \times \hat{k}_s \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_p(\mathbf{r}')) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \hat{q} \cdot \hat{n} \times \vec{H}_p(\mathbf{r}) \right] e^{\imath \vec{k}_s \mathbf{r}}
\end{aligned} \tag{2.65}
$$

donde $C = -\imath \frac{k_i}{4\pi R} e^{\imath k_i R}$

Escribiendo a los campos tangenciales como sus componentes de Kirchhoff y complementaria, el campo dispersado resulta

$$
\begin{aligned}
E_{sqp} &= E^k_{sqp} + E^c_{sqp} \\
E_{sqp} &= C E_i \int ds' f_{qp} e^{\imath (\vec{k}_s - \vec{k}_i) \mathbf{r}'} \\
&+ C E_i \int ds' ds'' du dv \; F_{qp} e^{\imath [u(x'-x'') + v(y'-y'')]} e^{\imath (\vec{k}_s - \vec{k}_i) \mathbf{r}''}
\end{aligned} \tag{2.66}
$$

con

$$
f_{qp} = \frac{D_1}{E_i} \left[ \hat{q} \times \hat{k}_s \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_{kp}(\mathbf{r}')) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \hat{q} \cdot \hat{n} \times \vec{H}_{kp}(\mathbf{r}) \right] \tag{2.67}
$$

$$
F_{qp} = \frac{D_1}{E_i} \left[ \hat{q} \times \hat{k}_s \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_{cp}(\mathbf{r}')) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \hat{q} \cdot \hat{n} \times \vec{H}_{cp}(\mathbf{r}) \right] \tag{2.68}
$$

siendo $D_1 = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ el módulo de la normal a la superficie. Los campos de Kirchhoff y complementarios ya los tenemos calculados. Lo que debemos hacer es escribirlos para los distintos canales de observación. Entonces, el campo de Kirchhoff para los cuatro canales es [10]:

$$
\begin{aligned}
f_{vv} &\approx -D_1 \left[ (1 - R_\parallel) \hat{h}_s \cdot (\hat{n} \times \hat{v}) + (1 + R_\parallel) \hat{v}_s \cdot (\hat{n} \times \hat{h}) \right] \\
f_{vv} &\approx (1 - R_\parallel) \left[ z_y \sin\theta \sin\phi_s + (\cos\theta + z_x \sin\theta) \cos\phi_s \right] \\
&\quad -(1 + R_\parallel)(\cos\theta_s \cos\phi_s - z_x \sin\theta_s)
\end{aligned} \tag{2.69}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{hh} &\approx -D_1\left[(1+R_\perp)\hat{v}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{h})+(1-R_\perp)\hat{h}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})\right] \\
f_{hh} &\approx -(1-R_\perp)\left[z_y\sin\theta\sin\phi_s+(\cos\theta+z_x\sin\theta)\cos\phi_s\right] \\
&\quad +(1+R_\perp)(\cos\theta_s\cos\phi_s-z_x\sin\theta_s)
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{vh} &= D_1\left[(1-R_\perp)\hat{v}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})-(1+R_\perp)\hat{h}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{h})\right] \\
&\quad -(R_\perp+R_\parallel)(\hat{h}\cdot\hat{d})\left[\hat{v}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{t})-\hat{h}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{d})\right] \\
f_{vh} &\approx (1+R)\left[z_y\sin\theta\cos\theta_s\cos\phi_s-(\cos\theta+z_x\sin\theta)\cos\theta_s\cos\phi_s\right] \\
&\quad +(1-R)\sin\phi_s+(1+R)z_y\cos\theta\sin\theta_s
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

donde $\hat{h}_s=\sin\phi_s\hat{x}-\cos\phi_s\hat{y}$ y $\hat{v}_s=\cos\theta_s\hat{x}-\cos\theta_s\cos\phi_s\hat{y}+\sin\theta_s\hat{z}$ son las polarizaciones (horizontal y vertical) de la onda dispersada.

En estas expresiones hemos usado que los coeficientes de Fresnel no dependen de las coordenadas espaciales. Aunque deberían ser los coeficientes locales, los cuales dependen del ángulo que existe entre la dirección de incidencia y la normal a la superficie, estos pueden ser aproximados por los coeficientes que se obtendrían de la reflexión con un plano horizontal. Además, en la amplitud $f_{vh}$ hemos despreciado el término que es proporcional a la suma de los coeficientes de Fresnel por dos motivos: $R_\perp+R_\parallel\ll 1$ y $\hat{n}\cdot\hat{v}\approx 0$.

Todas las funciones $f_{qp}$ dependen linealmente de las derivadas $z_x$ y $z_y$, por lo que con una simple integración por partes (y despreciando los efectos de borde), la dependencia espacial de $f_{qp}$ puede eliminarse completamente:

$$
\int ds' z_x e^{\imath[\vec{k}_s-\vec{k}_i]\mathbf{r}'} = -\int ds' \frac{k_{sx}-k_{ix}}{k_{sz}-k_{iz}} e^{\imath[\vec{k}_s-\vec{k}_i]\mathbf{r}'}
$$

$$
\Rightarrow \qquad z_x=\frac{k_{sx}-k_{ix}}{k_{sz}-k_{iz}} \tag{2.72}
$$

$$
\text{análogamente:} \qquad z_y=\frac{k_{sy}-k_{iy}}{k_{sz}-k_{iz}} \tag{2.73}
$$

Con estos reemplazos para las derivadas direccionales de la superficie eliminamos toda dependencia espacial de las amplitudes $f_{qp}$. Sin embargo debe remarcarse lo siguiente: la

amplitud del canal cruzado es lineal en las derivadas direccionales debido a que se despreció la contribución del término proporcional a $R_\perp + R_\parallel$; si este no fuera el caso, la amplitud $f_{vh}$ tendría términos cuadráticos y cúbicos en las derivadas y la sustitución que hemos hecho antes no tendría validez.

Con la sustitución de las derivadas espaciales, las amplitudes de Kirchhoff resultan [10]:

$$f_{vv} \approx \frac{2R_\parallel}{\cos\theta + \cos\theta_s}\left[\sin\theta\sin\theta_s - (1+\cos\theta\cos\theta_s)\cos(\phi-\phi_s)\right] \tag{2.74}$$

$$f_{hh} \approx \frac{2R_\perp}{\cos\theta + \cos\theta_s}\left[\sin\theta\sin\theta_s - (1+\cos\theta\cos\theta_s)\cos(\phi-\phi_s)\right] \tag{2.75}$$

$$f_{vh} \approx R\sin(\phi-\phi_s) \tag{2.76}$$

Pasemos ahora a analizar las amplitudes del término complementario. Las amplitudes para los distintos canales son [10]:

$$\begin{aligned} F_{vv}(u,v) \approx & \frac{1-R_\parallel}{q}\left[-k(1+R_\parallel)C_1 + (1-R_\parallel)C_2 + (1+R_\parallel)C_3\right] \\ + & \frac{1+R_\parallel}{q}\left[k(1-R_\parallel)C_4 + (1+R_\parallel)C_5 + (1-R_\parallel)C_6\right] \\ - & \frac{1+R_\parallel}{q_t}\left[-k(1+R_\parallel)C_{t1} + (1-R_\parallel)C_{t2} + (1+R_\parallel)\frac{C_{t3}}{\epsilon}\right] \\ - & \frac{1-R_\parallel}{q_t}\left[k\epsilon(1-R_\parallel)C_{t4} + (1+R_\parallel)C_{t5} + (1-R_\parallel)C_{t6}\right] \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} F_{hh}(u,v) \approx & \frac{1+R_\perp}{q}\left[-k(1-R_\perp)C_4 - (1+R_\perp)C_5 - (1-R_\perp)C_6\right] \\ + & \frac{1-R_\perp}{q}\left[k(1+R_\perp)C_1 - (1-R_\perp)C_2 - (1+R_\perp)C_3\right] \\ - & \frac{1-R_\perp}{q_t}\left[-k(1-R_\perp)C_{t4} - (1+R_\perp)C_{t5} - (1-R_\perp)\frac{C_{t6}}{\epsilon}\right] \\ - & \frac{1+R_\perp}{q_t}\left[k\epsilon(1+R_\perp)C_{t1} - (1-R_\perp)C_{t2} - (1+R_\perp)C_{t3}\right] \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$
\begin{aligned}
F_{vh}(u,v) &\approx \frac{1+R}{q}\left[(1-R)B_1-(1+R)B_2-(1-R)B_3\right] \\
&+ \frac{1-R}{q}\left[(1+R)B_4-(1-R)B_5-(1+R_\perp)B_6\right] \\
&- \frac{1-R}{q_t}\left[(1-R)\epsilon B_{t1}-(1+R)B_{t2}-(1-R)B_{t3}\right] \\
&- \frac{1+R}{q_t}\left[(1+R)B_{t4}-(1-R)B_{t5}-(1+R)\frac{B_{t6}}{\epsilon}\right]
\end{aligned} \tag{2.79}
$$

Los coeficientes $C_j$, $B_j$, $C_{tj}$ y $B_{tj}$ se detallan en el Apéndice B y mostramos que son independientes de las coordenadas espaciales. La única dependencia espacial de estas amplitudes está en las derivadas direccionales. Al igual que con la amplitud del campo de Kirchhoff, la dependencia con las derivadas espaciales es lineal. Se puede hacer entonces una integración por partes similar y sustituir estas derivadas por un factor que es independiente de las coordenadas espaciales.

Esquemáticamente, las amplitudes del campo complementario dependen de las derivadas direccionales de la siguiente manera [10, 11]:

$$
F_{qp} \propto \int d\xi\, z_\xi\, e^{\imath[u(x'-x'')+v(y'-y'')+q|z'-z''|]} e^{\imath(\vec{k}_i\mathbf{r}''-\vec{k}_s\mathbf{r}')}, \quad \text{con } \xi = x', y', x'', y'' \tag{2.80}
$$

La integración por partes dará como resultados las siguientes sustituciones:

$$
z_{x'} = \frac{u-k_{sx}}{k_{sz}\mp q} \;\;,\;\; z_{y'} = \frac{v-k_{sy}}{k_{sz}\mp q} \tag{2.81}
$$

$$
z_{x''} = \frac{u-k_x}{k_z\mp q} \;\;,\;\; z_{y''} = \frac{v-k_y}{k_z\mp q} \tag{2.82}
$$

Habiendo eliminado toda dependencia espacial de las amplitudes de los campos de Kirchhoff y complementario, el cálculo de la potencia incoherente dispersada por la superficie se reduce simplemente a calcular valores medios de exponenciales, o sea, a calcular las funciones características de los distintos tipos de estadística que puedan describir a las superficies. Vamos a tomar como hipótesis a lo largo de todo el trabajo que las superficies aleatorias tienen una distribución Normal (gaussiana) de alturas con valor medio cero. Concretamente:

$$p(z) = \frac{e^{-z^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$
$$\sigma^2 = \left\langle z^2 \right\rangle - \left\langle z \right\rangle^2 = \left\langle z^2 \right\rangle$$

Los dos resultados básicos que necesitamos para calcular la potencia dispersada son los siguientes:

$$\left\langle e^{\imath kz} \right\rangle = e^{-k^2/(2\sigma^2)} \tag{2.83}$$
$$\left\langle e^{\imath k(z-z')} \right\rangle = e^{-k^2\sigma^2(1-\rho(x-x',y-y'))} \tag{2.84}$$

donde $\rho(\vec{x} - \vec{x}')$ es la función de autocorrelación de la superficie (ACF), sobre la cual ya hemos supuesto que el proceso estocástico es estacionario.

Vamos a calcular la potencia incoherente para cada término. Comencemos por el de Kirchhoff:

$$P_{qp}^k = \left\langle E_{qp}^k E_{qp}^{k*} \right\rangle - \left\langle E_{qp}^k \right\rangle \left\langle E_{qp}^{k*} \right\rangle$$
$$P_{qp}^k = \left\langle |CE_i|^2 \int ds\, ds'\, |f_{qp}|^2 e^{\imath(\vec{k}_s - \vec{k}_i)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right\rangle - \left| \left\langle CE_i \int ds\, f_{qp} e^{\imath(\vec{k}_s - \vec{k}_i)\mathbf{r}} \right\rangle \right|^2 \tag{2.85}$$

Como las amplitudes $f_{qp}$ son independientes de las coordenadas espaciales las podemos sacar fuera de la integral y del cálculo del valor medio, por lo tanto la potencia del término de Kirchhoff se reduce a:

$$P_{qp}^k = |CE_i|^2 |f_{qp}|^2 \left[ \left\langle \int ds\, ds'\, e^{\imath(\vec{k}_s - \vec{k}_i)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right\rangle - \left| \left\langle \int ds\, e^{\imath(\vec{k}_s - \vec{k}_i)\mathbf{r}} \right\rangle \right|^2 \right]$$

Haciendo el cambio de variables $\xi = x - x'$, $\zeta = y - y'$, integrando sobre $ds'$ (lo cual da un factor $A_0$, el área iluminada), y usando los resultados dados por (2.83) y (2.84), llegamos a

$$P_{qp}^k = |CE_i|^2 |f_{qp}|^2 A_0 e^{-\sigma^2(k_{sz}-k_z)^2} \int d\xi\, d\zeta\, \left( e^{\sigma^2(k_{sz}-k_z)^2\rho(\xi,\zeta)} - 1 \right) e^{\imath(k_{sx}-k_x)\xi} e^{\imath(k_{sy}-k_y)\zeta} \tag{2.86}$$

El factor exponencial que involucra a la función de correlación puede ser expandido en serie de potencias:

$$e^{\sigma^2(k_{sz}-k_z)^2\rho(\xi,\zeta)} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma^{2n}(k_{sz}-k_z)^{2n}\rho^n(\xi,\zeta)}{n!} \tag{2.87}$$

Con esta expansión, la potencia dispersada debido al termino de Kirchhoff se puede escribir como [10]

$$\begin{aligned} P_{qp}^k &= |CE_i|^2|f_{qp}|^2 A_0 e^{-\sigma^2(k_{sz}-k_z)^2} \int d\xi\, d\zeta \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma^{2n}(k_{sz}-k_z)^{2n}\rho^n(\xi,\zeta)}{n!} e^{\imath(k_{sx}-k_x)\xi} e^{\imath(k_{sy}-k_y)\zeta} \\ P_{qp}^k &= |CE_i|^2|f_{qp}|^2 A_0 e^{-\sigma^2(k_{sz}-k_z)^2} 2\pi \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma^{2n}(k_{sz}-k_z)^{2n}}{n!} W^{(n)}(k_{sx}-k_x, k_{sy}-k_y) \end{aligned} \tag{2.88}$$

donde usamos que la transformada de Fourier de la función de la ACF es el espectro de rugosidad de la superficie [21]:

$$W^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int d\xi\, d\zeta \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma^{2n}(k_{sz}-k_z)^{2n}}{n!} \rho^n(\xi,\zeta) e^{\imath(k_{sx}-k_x)\xi} e^{\imath(k_{sy}-k_y)\zeta} \tag{2.89}$$

En la expresión calculada para $P_{qp}^k$ podemos ver que el término de Kirchhoff solo da cuenta de procesos de dispersión simple, ya que el espectro de rugosidad de la superficie quedó evaluado en la diferencia entre la dirección dispersada y la dirección incidente. Si hubieran procesos de dispersión múltiple tendría que existir un término que muestre el paso, entre todas las direcciones posibles, de la dirección incidente a la dispersada.

De la misma manera que calculamos $P_{qp}^k$ podemos calcular el término que proviene del producto entre el campo de Kirchhoff y el complementario. Haciendo uso de que las amplitudes $f_{qp}$ y $F_{qp}$ no dependen de las variables espaciales, pueden ser sacadas fuera de las integrales y de los valores medios

$$\begin{aligned} P_{qp}^{kc} &= 2\mathrm{Re}\left[\left\langle E_{qp}^c E_{qp}^{k*}\right\rangle - \left\langle E_{qp}^c\right\rangle \left\langle E_{qp}^k\right\rangle^*\right] \\ P_{qp}^{kc} &= |CE_i|^2 \mathrm{Re}\left[F_{qp} f_{qp}^* \left\langle \int ds\, ds'\, ds''\, du\, dv\, e^{\imath\vec{k}_s(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')} e^{\imath\vec{k}_i(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')} e^{\imath u(x-x')} e^{\imath v(y-y')}\right\rangle\right. \\ &- \left.\left\langle \int ds\, ds'\, ds''\, du\, dv\, e^{\imath\vec{k}_s\mathbf{r}} e^{-\imath\vec{k}_i\mathbf{r}')} e^{\imath u(x-x')} e^{\imath v(y-y')}\right\rangle \left\langle \int ds''\, e^{\imath(\vec{k}_s-\vec{k}_i)\mathbf{r}''}\right\rangle\right] \end{aligned} \tag{2.90}$$

El cambio de variables correspondiente a este término es el siguiente: $\xi = x - x''$, $\zeta = y - y''$, $\xi' = x' - x''$, $\zeta' = y' - y''$. Después de integrar en $ds''$ y tomar la transformada de

Fourier en la expansión de los factores exponenciales que contengan a la función de correlación, la potencia incoherente dada por el producto del término de Kirchhoff y el complementario es la siguiente [10]:

$$
\begin{aligned}
P_{qp}^{ck} &= |CE_i|^2 A_0 e^{-\sigma^2(k_{sz}-k_z)^2} \mathrm{Re}\,[ \\
& f_{qp}^* F_{qp}(-k_x,-k_y) \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\sigma^2 k_{sz}(k_{sz}-k_z)\right)^n}{n!} W^{(n)}(k_{sx}-k_x, k_{sy}-k_y) \\
& + f_{qp}^* F_{qp}(-k_{sx},-k_{sy}) \sum_{n\geq 1} \frac{\left(\sigma^2 k_{sz}(k_{sz}-k_z)\right)^n}{n!} W^{(n)}(k_x-k_{sx}, k_y-k_{sy}) \\
& + \frac{f_{qp}^*}{2\pi} \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{\left(\sigma^2 k_{sz}(k_{sz}-k_z)\right)^n}{n!} \frac{\left(\sigma^2 k_{sz}(k_{sz}-k_z)\right)^m}{m!} \\
& \int du\, dv\, F_{qp}(u,v) W^{(n)}(k_{sx}+u, k_{sy}+v) W^{(m)}(k_x+u, k_y+v) \Big]
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

En este término sí aparecen efectos de dispersión múltiple. Los dos primeros términos son de dispersión simple, pero el tercero involucra una integración sobre pares de componentes espectrales de la rugosidad, indicando una interacción entre las mismás, lo que se debe a un proceso de dispersión múltiple.

La potencia dispersada dada término complementario es de la forma

$$
\begin{aligned}
P_{qp}^{c} &= \left\langle E^c - qpE_{qp}^{c*} \right\rangle - \left\langle E_{qp}^c \right\rangle \left\langle E_{qp}^c \right\rangle^* \\
P_{qp}^{c} &= |CE_i|^2 \Big\langle \int ds\, ds'\, ds''\, ds'''\, dudv\, du'dv'\, F_{qp}F_{qp}^* \\
& \quad e^{\imath \vec{k}_s(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')} e^{\imath \vec{k}_i(\mathbf{r}'''-\mathbf{r}')} e^{\imath u(x-x')-\imath u'(x''-x''')} e^{\imath v(y-y')+\imath v'(y''-y'')} \Big\rangle \\
& - \left| \int ds\, ds'\, dudv\, F_{qp} e^{\imath \vec{k}_s \mathbf{r}} e^{-\imath \vec{k}_i \mathbf{r}'} e^{\imath u(x-x')} e^{\imath v(y-y')} \right|^2
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

Después de hacer los cambios de variables correspondientes, los desarrollos en serie de potencias de las exponenciales que contienen a la función de correlación, se obtiene la siguiente expresión para la potencia dispersada [10]:

$$
\begin{aligned}
P_{qp}^{c} = |CE_i|^2 A_0 e^{-\sigma^2(k_{sz}^2+k_z^2)} \Bigg[ & |F_{qp}(-k_x,-k_y)|^2 \sum_{n\geq 1} \frac{(\sigma^2 k_{sz}^2)^n}{n!} W^{(n)}(k_{sx}-kx, k_{sy}-k_y) \\
& + F_{qp}(-k_x,-k_y) F_{qp}^{*}(-k_{sx},-k_{sy}) \sum_{n\geq 1} \frac{(\sigma^2 k_{sz} k_z)^n}{n!} W^{(n)}(k_{sx}-kx, k_{sy}-k_y) \\
& + F_{qp}^{*}(-k_x,-k_y) F_{qp}(-k_{sx},-k_{sy}) \sum_{n\geq 1} \frac{(\sigma^2 k_{sz} k_z)^n}{n!} W^{(n)}(k_{sx}-kx, k_{sy}-k_y) \\
& + |F_{qp}(-k_{sx},-k_{sy})|^2 \sum_{n\geq 1} \frac{(\sigma^2 k_z^2)^n}{n!} W^{(n)}(k_{sx}-kx, k_{sy}-k_y) \\
& + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{(\sigma^2 k_z^2)^n}{n!} \frac{(\sigma^2 k_{sz}^2)^m}{m!} \int du\, dv\, |F_{qp}(u,v)|^2 W^{(n)}(k_x+u, k_y+v) W^{(m)}(k_{sx}+u, k_{sy}+v) \\
& + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{(\sigma^2 k_z k_{sz})^{(}m+n)}{n!m!} \int du\, dv\, F_{qp}(u,v) F_{qp}^{*}(-u-k_x-k_{sx}, -v-k_y-k_{sy}) \\
& W^{(n)}(k_x+u, k_y+v) W^{(m)}(k_{sx}+u, k_{sy}+v) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

Al igual que en el término cruzado, el término complementario muestra procesos de dispersión múltiple. Son los últimos dos factores, que involucran una integral sobre pares de componentes espectrales.

Para calcular el coeficiente de retrodispersión hay que sumar las distintas contribuciones a la potencia dispersada. Debemos recordar también que la potencia debe ser normalizada con la potencia incidente y respecto a una superficie esférica de radio $R$ (siendo $R$ la distancia entre el radar y la superficie iluminada). Todos los términos que dan procesos de dispersión simple se pueden reagrupar de la siguiente manera [10, 22]:

$$
\sigma_{qp}^{0} = \frac{k_i^2}{2} e^{-\sigma^2(k_{sz}^2+k_z^2)} \sum_{m\geq 1} \frac{\sigma^{2n}}{n!} |\mathcal{I}_{qp}^{n}|^2 W^{(n)}(k_{sx}-k_x, k_{sy}-k_y) \tag{2.94}
$$

siendo

$$
\mathcal{I}_{qp}^{n} = f_{qp} e^{-\sigma^2 k_{sz} k_z} (k_{sz+k_z})^n + F_{qp}(-k_x,-k_y) \frac{k_{sz}^n}{2} + F_{qp}(-k_{sx},-k_{sy}) \frac{k_z^n}{2}. \tag{2.95}
$$

Esta expresión es la que vamos a usar para estudiar la sección eficaz de superficies aleatorias observada por el radar.

### 2.4.7. Resultados principales del IEM

Para finalizar el estudio del IEM, vamos a analizar los resultados que se obtienen cuando se propone una función de autocorrelación (ACF) gaussiana. Como ya detallamos previamente, las hipótesis que se asumen sobre la superficie son: i) que es un proceso estacionario; ii) que es isótropa y iii) que tiene una sóla escala característica. La segunda condición implica que la función de correlación solo depende de la diferencia entre dos puntos de la superficie y no de la posición absoluta. La tercera hipótesis implica que la superficie puede ser descrita por una sola longitud de correlación ($l$), independientemente de la dirección que se tome en la misma. Es importante recalcar que estas suposiciones son únicamente necesarias para calcular valores medios del $\sigma^0_{qp}$ de manera explícita. Por ende, sería posible utilizar el IEM relajando algunas de estas hipótesis y calculando $\sigma^0_{qp}$ de manera numérica.

Proponiendo una función de correlación que sea de la forma $\rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/l^2}$, el comportamiento del coeficiente de retro-dispersión se muestra en las siguientes figuras. El coeficiente $\sigma^0_{qp}$ es graficado en función del ángulo de incidencia ($\theta$) suponiendo que la onda incidente se puede escribir (sin pérdida de generalidad) usando un sistema de referencia tal que $\phi = 0$ y en la condición de retrodispersión: $\theta_s = \theta$ y $\phi_s = \pi$.

Los siguientes gráficos corresponden a los canales co-polarizados, $\sigma^0_{vv}$ y $\sigma^0_{hh}$ y fueron obtenidos usando la implementación del AIEM hecha por M. Brogioni en FORTRAN [23]. Estos resultados son similares a los reportados en toda la literatura del AIEM [12, 24, 25], y la cual es actualizada en [22].

#### Comportamiento para distintas alturas rms

En las siguientes figuras se observa el comportamiento de $\sigma^0$ para una onda incidente de frecuencia $f = 5$GHz, lo que equivale a una longitud de onda incidente de 6cm (banda C). Se usa que la constante dieléctrica relativa entre los medios separados por la superficie es $\epsilon = 80 - \imath 50$ (lo que corresponde al agua pura) y una longitud de correlación $l = 3$cm.

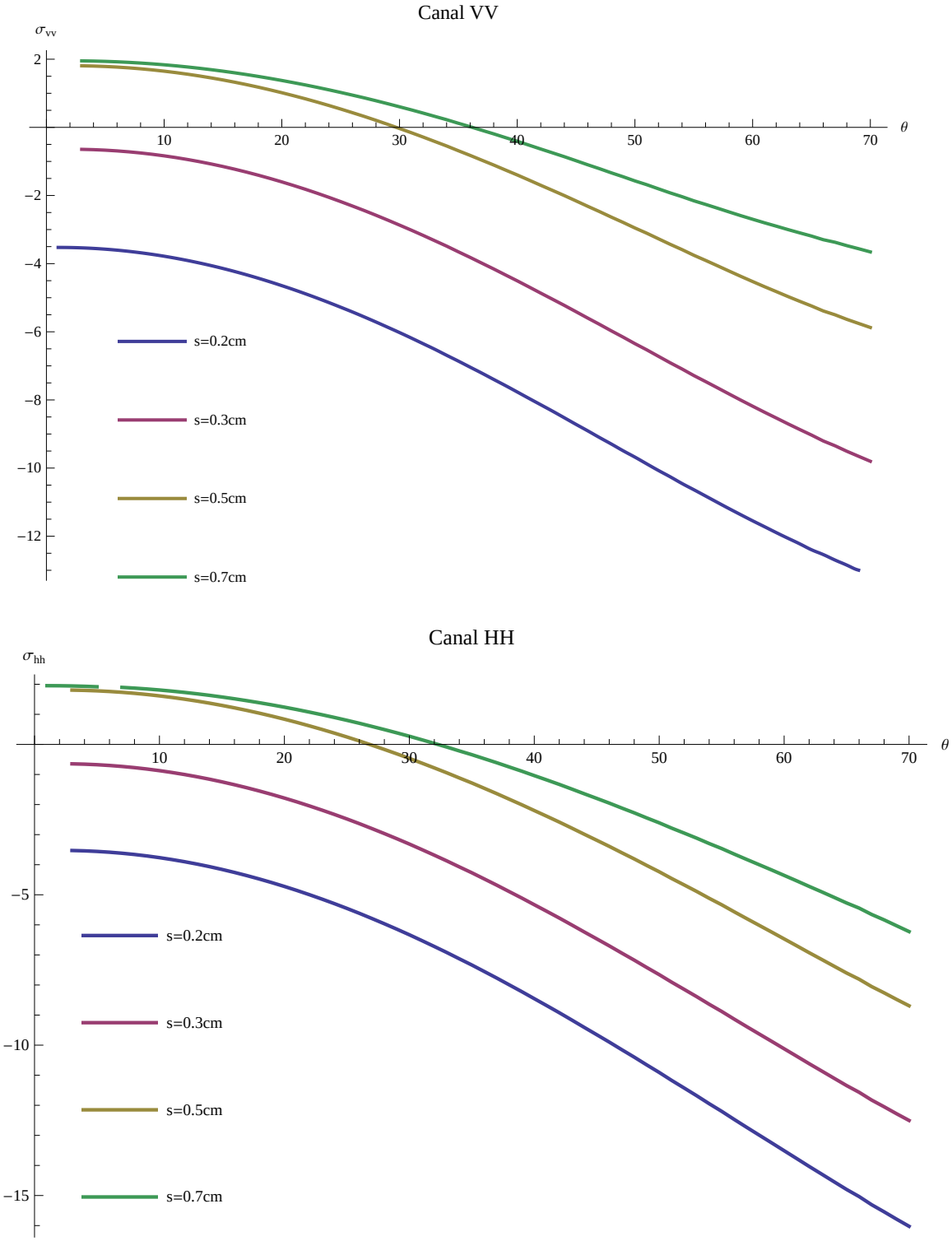



Figura 2.3: Coeficientes $\sigma^0_{vv}$ y $\sigma^0_{hh}$ para ACF gaussiana con $l = 3$cm y distintos valores de altura RMS. Resultados presentados en dB.

Lo que observamos es que a medida que aumenta la altura rms de la superficie, el coeficiente de retrodispersión aumenta su valor de manera continua: a mayor altura rms mayor es $\sigma^0$ (para el mismo ángulo de incidencia). Sin embargo, cuando el ángulo de incidencia es cercano a la posición de nadir ($\theta \sim 0°$), la respuesta de $\sigma^0$ respecto a $s$ comienza a ser menos sensible: se observa cómo las curvas para $s = 0,5$cm y $l = 0,7$cm comienzan a tomar valores similares para ángulos de incidencia chicos. Si continúa aumentando la altura rms la sección eficaz comienza a disminuir ya que la dispersión debe ser más isótropa para los distintos ángulos de observación. Además, se puede ver que $\sigma^0_{vv}$ y $\sigma^0_{hh}$ toman valores similares a medida que aumenta la altura rms, lo cual indica que la dispersión se hace más isótropa cuanto más rugosa es la superficie.

Ninguno de estos resultados pueden obtenerse para los canales de polarización cruzada. De hecho, el coeficiente $\sigma^0_{vh} = 0$ en el caso de retro-dispersión (el único caso que puede medirse con un sensor remoto). Esto se observa claramente en la ecuación (2.76). Como usamos un sistema de referencia en donde $\phi = 0$, en el caso de retrodispersión $\phi_s = \pi$, de acuerdo con (2.76) se obtiene que $f_{vh} = 0$. Un estudio similar puede hacerse para las amplitudes del término complementario mostrando que en la condición de retrodispersión estas amplitudes también se anulan. Por lo tanto, debido a las simplificaciones hechas para poder calcular los campos tangenciales, el IEM da coeficientes de retrodispersión nulos en los canales de polarización cruzada.

## 2.5. Discusión del Capítulo

En este capítulo hemos seguido en detalle el desarrollo de los dos métodos teóricos para calcular la dispersión de ondas electromagnéticas sobre superficies aleatorias. Estudiamos en primer lugar el método de perturbaciones pequeñas (SPM). Vimos que este método tiene una región de aplicación limitada, ya que la condición necesaria para poder utilizarlo es que la altura rms de la superficie debe ser mucho menor que la longitud de onda incidente. Además, este método no está basado en la resolución formal de las ecuaciones de Maxwell, sino que solo pide la continuidad de los campos tangenciales sobre la superficie y propone un ansatz para el campo dispersado. Aunque no lo mostramos, es un resultado bien conocido que para obtener coeficientes de retrodispersión no nulos en polarización cruzada, el SPM debe ser

desarrollado al menos hasta segundo orden.

Por otro lado, hemos estudiado con gran detalle el método de la ecuación integral (IEM). Este método sí está basado en la resolución formal de las ecuaciones de Maxwell, aunque no propone una solución cerrada sino que resuelve las mismas de manera iterativa. El IEM es formulado recurriendo hasta la segunda iteración en las ecuaciones y el resultado básico que utiliza para resolver las ecuaciones es la aproximación de plano tangente, la cual es menos restrictiva que la aproximación hecha en SPM. La condición necesaria en el IEM es que la superficie sea suave, esto es, que tenga un radio de curvatura mucho mayor que la longitud de onda incidente.

En la siguiente tabla mostramos cuáles son las condiciones de validez de los dos modelos que describimos en este capítulo. Lo que debemos recordar es que para longitudes de onda grandes, el IEM debe tender al SPM, ya que en este límite las perturbaciones de la superficie pueden considerarse pequeñas.

| Método | Condiciones de validez |
|---|---|
| SPM | $s < 0{,}05\lambda$ , $\sqrt{2}s < 0{,}3l$ |
| IEM | $l^2 > 2{,}76s\lambda$ |

En la Figura 2.4 mostramos un mapa de los parámetros estadísticos utilizados para definir la rugosidad de la superficie ($kl$ y $ks$) para marcar los límites de validez de los distintos métodos de dispersión electromagnética (el gráfico está hecho considerando un ángulo de incidencia de 35°). Se puede observar que el rango de validez del IEM cubre las regiones en donde la longitud de onda es mayor que la altura RMS de la superficie, condición que se encuentra en la mayoría de los suelos de agricultura. Al disminuir la longitud de onda incidente los suelos que muestran una mayor rugosidad ($ks$ grandes) caen dentro de la región de la óptica geométrica (GO) [5].

Aunque el IEM es un método más robusto y mejor fundamentado que el SPM, para poder hallar expresiones relativamente fáciles de manejar, este método necesita ir despreciando términos (debido principalmente a cuestiones geométricas) para que las amplitudes de los campos tangenciales tengan una dependencia lineal respecto a las derivadas direccionales. Esta dependencia lineal permite luego sustituir las derivadas por un factor que es independiente de las coordenadas espaciales y llegar así a dar una expresión analítica para el coeficiente

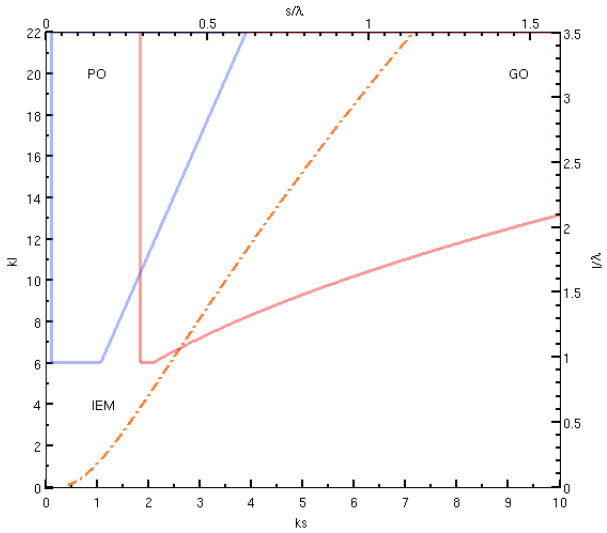



Figura 2.4: Regiones de validez de los métodos de dispersión usados

de retrodispersión (ecuación (2.94)). Aunque este tipo de resultados es deseable, tiene una falencia importante: en la dirección de retrodispersión ($\phi_s = \pi$) el coeficiente $\sigma^0_{vh} = 0$ para cualquier ángulo de incidencia. Este resultado está en clara oposición a los datos observados en las imágenes SAR, por lo que es necesario contar con alguna reformulación del método para conseguir coeficientes de retro-dispersión no nulos para los canales de polarización cruzada.

En el próximo capítulo vamos a dar el desarrollo más general del IEM, llamado AIEM (Advanced IEM [24]), el cual no es lineal en las derivadas direccionales. Vamos a mostrar cuál es la innovación hecha en este trabajo para obtener $\sigma^0_{vh} \neq 0$ y los contrastes con los resultados usuales [12], en donde se recalculan las amplitudes de los campos de Kirchhoff y complementario pero no se informan resultados para los canales de polarización cruzada [12, 22, 24].

# 3

# Solución completa del IEM: origen del coeficiente $\sigma^0_{vh}$

## 3.1. Motivación

Como vimos anteriormente, el IEM es el modelo estándar teórico para calcular la sección eficaz de superficies aleatorias en el rango de las microondas. Esto se debe a su robustez teórica, como a su amplio rango de validez en términos de las características de la rugosidad de la superficie. Sin embargo, como fue detallado en el capitulo anterior, se llega a la solución analítica del modelo sólo después de tomar una serie de aproximaciones. Estas aproximaciones están asociadas a un conjunto de hipótesis, que pueden categorizarse en dos grandes grupos,

1. Hipótesis sobre la superficie.
2. Hipótesis sobre el campo EM en la superficie.

Con respecto a la superficie, se asume generalmente que:

a. es un proceso estacionario;

b. es isotrópica;

c. tiene una sola escala característica;

d. su distribución de alturas y $ACF$ son conocidas.

Estas simplificaciones son críticas para dar una solución analítica del problema, pero no son limitaciones explícitas del enfoque. Esto significa que sería posible calcular de manera numérica una solución para una superficie aleatoria más general. Mas aún, la validez de estas hipótesis están vinculadas al objeto de estudio (las superficies aleatorias) y por ende deben

validarse con mediciones y una modelización exhaustiva de suelos de agricultura típicos. Estas tareas exceden claramente el alcance de este trabajo.

En el segundo conjunto de hipótesis, se considera que es apropiado hacer:

2.1 la aproximación de plano tangente (APT) o aproximación de Kirchhoff en cada punto de la superficie;

2.2 un esquema recursivo (perturbativo) para obtener el campo dispersado;

2.3 la aproximación local en el cálculo de los coeficientes de Fresnel;

2.4 el reemplazo de las derivadas superficiales por cocientes del número de onda incidente y dispersado.

Estas hipótesis no son sobre las características de la superficie aleatoria, sino sobre sobre los campos en la superficie. Algunas de ellas son fundamentales y de alguna manera ineludibles en este tipo de enfoques. Por el contrario, otras tienen una historia vinculada al desarrollo mismo del método (relativamente reciente) y a la capacidad de cómputo del momento en que fueron desarrolladas.

Por ejemplo, al evaluar el campo en la superficie, siempre es necesario hacer algún tipo de aproximación con respecto al campo en la interface. La aproximación 2.1 es una aproximación local estándar desarrollada hace 150 años, cuyos rangos de validez, robustez y defectos están bien caracterizados [16, 17]. Sin embargo, si existiese una superficie donde la aproximación de plano tangente no fuese ya válida porque la misma no es suave, siempre sería posible aproximar el campo sobre ella por el campo que se induciría sobre una parábola o sobre alguna otra superficie sobre la cual sea relativamente sencillo calcular el campo.

La hipótesis 2.2 es generalmente válida ya que siempre es posible (al menos formalmente) sumar más términos en la recursión y hacer que la solución converja al valor real. Esto puede ser engorroso desde el punto de vista operativo, pero siempre es posible realizarlo de manera algorítmica.

Suponer que los coeficientes de Fresnel no dependen de las coordenadas espaciales (hipótesis 2.3) es una aproximación típica en este tipo de problemas, y está generalmente justificada. Como ya aclaramos previamente, aunque deberían aparecer los coeficientes calculados en los ángulos locales, éstos pueden ser aproximados bastante bien por los coeficientes

que se obtendrían de la reflexión con un plano horizontal. Esto se debe a la dependencia suave de los coeficientes de Fresnel con el ángulo de incidencia.

Por último, la eliminación de la dependencia espacial de las amplitudes $f_{qp}$ es sencillamente una aproximación para simplificar el cálculo del coeficiente $\sigma^0$. Sin embargo, la amplitud del canal cruzado es lineal en las derivadas direccionales únicamente debido a que se despreció la contribución del término proporcional a $R_\perp + R_\parallel$; si este no fuera el caso, la amplitud $f_{vh}$ tendría términos cuadráticos y cúbicos en las derivadas y esta aproximación dejaría de ser apropiada. Recordemos que esta aproximación condujo a que $\sigma^0_{vh} = 0$ en todos los casos.

Este último punto es de crucial importancia. Todas las agencias espaciales (NASA, ESA, JAXSA, CONAE) se están reorientando al desarrollo de misiones SAR polarimétricas. Esto se debe a que puede probarse que la matriz de scattering provee toda la información disponible sobre el blanco, dada una geometría de observación y una frecuencia de operación. El contenido de información disponible en los canales cruzados ($\sigma^0_{vh}$) puede ser evaluado directamente de las imágenes, y el coeficiente $\sigma^0_{vh}$ es en muchos casos una magnitud crítica para la estimación de parámetros biofísicos. En el caso de la obtención de humedad del suelo a partir de imágenes SAR, se demostró experimentalmente que $\sigma^0_{vh}$ es sensible diferencialmente a la humedad con respecto a la rugosidad [3], y por ende aporta información extra que los canales co-polarizados no poseen. Por ende, es muy importante disponer de un modelo de scattering que genere valores de $\sigma^0_{vh}$ realistas.

Hay que anticipar aquí que la modelización del $\sigma^0_{vh}$ de suelos de agricultura es un problema muy complejo [21, 22]. Es un tema de discusión actual en la comunidad de Teledetección, y regularmente se incluyen en el debate nuevos datos experimentales y enfoques numéricos al problema de dispersión, que intentan explicar estos datos [26, 27]. En esta tesis en particular, la obtención de un coeficiente $\sigma^0_{vh} \neq 0$ fue quizá el motivo más importante para generar la introducción de estructuras del blanco cada vez más complejas, cuyas propiedades de scattering pudiesen explicar los datos disponibles.

La importancia de utilizar $\sigma^0_{vh}$ en la estimación de humedad del suelo no es menor. Se ha demostrado experimentalmente que los algoritmos típicos de obtención de humedad del suelo (algoritmos de *retrieval*), que hacen uso solamente de los datos de los canales co-polarizados ($\sigma^0_{hh}$, $\sigma^0_{vv}$), tienen asociados errores muy grandes [3]. La inclusión en la tarea de inferencia del

coeficiente $\sigma^0_{vh}$ tiene el potencial para mejorar el desempeño de los algoritmos de *retrieval*, ya que incluye información independiente sobre el blanco.

La mayoría de los experimentos basados en *scatterómetros* y/o datos SAR reportan valores no despreciables de $\sigma^0_{vh}$ en los regímenes de microondas (1cm $< \lambda <$ 25cm), para suelos agrícolas en condiciones normales de humedad (0,05$cm^3/cm^3 \leq mv \leq 0,35cm^3/cm^3$), con altura RMS 0,5cm $\leq s \leq$ 3cm [2, 3]. Por otra parte, se ha demostrado experimentalmente que $\sigma^0_{vh}$ es sensible a la humedad del suelo y a las variaciones de rugosidad [3]. Estos hechos condujeron al desarrollo de esquemas de obtención de humedad que utilizan el coeficiente de polarización cruzada [3, 28]. Esto se ve reflejado en el hecho de que, en el marco de la próxima misión SMAP, la NASA está poniendo esfuerzos significativos para medir el coeficiente $\sigma^0_{vh}$ en banda L, a fin de usarlo para estimar la humedad del suelo [29].

La relación entre $\sigma^0_{vh}$ y los parámetros del suelo se ha estudiado utilizando datos experimentales y modelos de scattering. Los modelos usuales subestiman fuertemente el coeficiente de polarización cruzada [15, 22] respecto a los valores medidos en suelos agrícolas. En particular, la aproximación de Kirchhoff en la formulación usual del IEM [10] conduce a $\sigma^0_{vh} = 0$. Sólo algunos modelos numéricos son capaces de producir valores significativos de $\sigma^0_{vh}$ para superficies reales [30], pero estos modelos siguen siendo computacionalmente costosos y muy difíciles de generalizar, por ejemplo, a medios estratificados en capas o a superficies con vegetación.

En general, se asume que el $\sigma^0_{vh}$ de suelos de agricultura proviene de al menos dos mecanismos de interacción: dispersión superficial y dispersión en volumen, dividiéndose este último en un componente debido a varios estratos dentro del suelo y al scattering en volumen debido a inhomogeneidades como poros de agua y aire. En este contexto, los resultados presentados en este Capítulo dan una contribución relevante para entender el peso relativo de los mecanismos responsables del $\sigma^0_{vh}$ de un suelo. En particular, del scattering superficial depolarizado.

En este Capítulo vamos a presentar la solución completa del IEM, la cual posee términos no lineales en las derivadas direccionales y por ende $\sigma^0_{vh} \neq 0$. Para ello, vamos a calcular de manera numérica el coeficiente de retrodispersión para esta nueva formulación, ya que al incluir todos los términos en las amplitudes de los campos de Kirchhoff y complementario no es posible seguir usando las aproximaciones hechas en el Capítulo 2.

En particular, presentamos resultados para el coeficiente $\sigma^0_{vh}$ basados en la formulación completa del campo de Kirchhoff [24], la cual incluye varios términos que en la formulación original del IEM no fueron tenidos en cuenta. Realizamos las simulaciones sin utilizar la aproximación de fase estacionaria (ecuaciones (2.72) y (2.73)) ya que las mismas son válidas únicamente cuando la amplitud del campo de Kirchhoff es lineal en las derivadas.

Con el fin de evaluar los resultados de esta aproximación, se presentaran dos conjuntos de simulaciones. Los primeros son los resultados para una superficie aleatoria genérica. Los segundos son resultados de simulaciones numéricas del coeficiente $\sigma^0_{vh}$ calculado usando la aproximación desarrollada, pero sobre superficies reales de agricultura. La simulaciones fueron realizadas sobre un conjunto de suelos de agricultura, adquiridos con un perfilómetro láser bidimensional [31]. Mostraremos que usando sólo el campo de Kirchhoff es posible obtener coeficientes $\sigma^0_{vh} \neq 0$ para perfiles reales de suelos de agricultura y que los coeficientes de los canales co-polarizados dan resultados similares a los predichos por el IEM.

## 3.2. Reformulación del campo de Kirchhoff

En el Capítulo 2 desarrollamos en detalle el método de la ecuación integral (IEM). En su primera formulación [10] se hicieron varias simplificaciones para poder calcular de manera analítica el coeficiente de retrodispersión $\sigma^0$. Dos de las simplificaciones más importantes hechas son las siguientes:

1. en el campo de Kirchhoff y en el complementario se eliminan los términos proporcionales a $\hat{v}\cdot\hat{t}$ y $\hat{h}\cdot\hat{d}$;

2. en el campo complementario se elimina la fase $\imath q|z-z'|$ en la representación espectral de la función de Green.

Debido a la primera simplificación, el coeficiente $\sigma^0_{vh}$ es nulo en la condición de retrodispersión. Este resultado se explica rápidamente viendo la expresión (2.76), la cual es cero si $\phi_s = \pi$. Como la amplitud $f_{vh}$ es lineal en las derivadas direccionales, a través de una integración por partes, las mismas pueden ser sustituidas por un factor que es independiente de las coordenadas espaciales (ecuaciones (2.72) y (2.73)). Estos factores se anulan en la condición de retrodispersión.

Después de varias correcciones, el IEM fue completamente desarrollado en [11, 12, 25], donde se dan las expresiones completas para los campos de Kirhhoff y complementario, sin las simplificaciones que se hicieron en [10]. En [11] y [25] (llamados IEM2M y AIEM respectivamente) la corrección principal fue mantener el término $\imath q|z - z'|$ en la fase de la función de Green. En [12], los términos proporcionales a $R_v + R_h$ no son ignorados. Sin embargo, en ambos casos, la aproximación de fase estacionaria es utilizada para reemplazar las derivadas direccionales por factores que son independientes de las coordenadas espaciales. Aunque estos factores son correctos cuando las amplitudes de los campos son lineales en las derivadas, dejan de ser válidos en el caso de mantener todos los términos en la amplitud de los campos ya que no se puede realizar la integración por partes.

En este Capítulo, nuestro trabajo se basa en calcular el coeficiente de retrodispersión sin hacer las aproximaciones antes mencionadas, manteniendo la dependencia espacial de las amplitudes de los campos a través de las derivadas direccionales.

Para obtener coeficientes $\sigma^0_{vh}$ no nulos vamos a proceder de la siguiente manera: primero calcularemos de manera numérica, sobre perfiles reales de suelos de agricultura, las amplitudes completas del término de Kirchhoff. Luego, para validar los resultados obtenidos, compararemos las amplitudes completas de los canales co-polarizados con los resultados usuales del AIEM. En el próximo Capítulo, desarrollaremos de manera analítica el procedimiento para calcular valores medios de campos que no son lineales en las derivadas espaciales.

### 3.2.1. Expresión completa del campo de Kirchhoff

En la Sección 2.4.4 hemos descrito detalladamente cómo calcular la amplitud del campo de Kirchhoff usando la aproximación de plano tangente. Las expresiones que obtuvimos, tanto para el campo eléctrico como el magnético, son las siguientes [10]:

$$(\hat{n} \times \overrightarrow{E}_p)_k = \hat{n} \times [(1 + R_h)(\hat{p}\cdot \hat{t})\hat{t} + (1 - R_v)(\hat{p}\cdot \hat{d})\hat{d}]E^i \tag{3.1a}$$

$$\eta(\hat{n} \times \overrightarrow{H}_p)_k = \hat{n} \times [(1 - R_h)(\hat{p}\cdot \hat{t})\hat{d} - (1 + R_v)(\hat{p}\cdot \hat{d})\hat{t}]E^i. \tag{3.1b}$$

Usando el hecho de que la polarización incidente puede ser descompuesta en la base local, $\hat{p} = (\hat{p}\cdot \hat{t})\hat{t} + (\hat{p}\cdot \hat{d})\hat{d}$, mostramos que el campo de Kirchhoff puede escribirse convenientemente según la polarización de onda incidente. Convenientemente significa que para

cada modo de incidencia (TE o TM) uno de los factores (el que es proporcional a $R_h + R_v$) puede ser despreciado. Concretamente, para el campo eléctrico hallamos que la componente de Kirchhoff de los campos superficiales es:

$$(\hat{n} \times \overrightarrow{E}_p)_k = \hat{n} \times [(1 + R_h)\hat{p} - (R_h + R_v)(\hat{p}\cdot \hat{d})\hat{d}]E^i \tag{3.2a}$$

$$(\hat{n} \times \overrightarrow{E}_p)_k = \hat{n} \times [(1 - R_v)\hat{p} + (R_h + R_v)(\hat{p}\cdot \hat{t})\hat{t}]E^i \tag{3.2b}$$

mientras que para el campo mangnético tenemos

$$\eta(\hat{n} \times \overrightarrow{H}_p)_k = \hat{n} \times \hat{k}_i \times [(1 - R_h)\hat{p} + (R_h + R_v)(\hat{p}\cdot \hat{d})\hat{d}]E^i \tag{3.3a}$$

$$\eta(\hat{n} \times \overrightarrow{H}_p)_k = \hat{n} \times \hat{k}_i \times [(1 + R_v)\hat{p} + (R_h + R_v)(\hat{p}\cdot \hat{t})\hat{t}]E^i. \tag{3.3b}$$

Los vectores $\hat{d}$ y $\hat{t}$ definen la base local a cada punto de la superficie; $R_h$ y $R_v$ son los coeficiente de Fresnel y $E^i$ es la amplitud del campo incidente. Los vectores $\hat{t}$ y $\hat{d}$ están desarrollados en el Apéndice B. Las amplitudes completas del campo de Kirchhoff, teniendo en cuenta los términos no incluídos en la Sección 2.4.4, son [24]:

$$\begin{aligned} f_{vv} = &\left[(1 - R_v)\hat{h}_s\cdot (\hat{n} \times \hat{v}) + (1 + R_v)\hat{v}_s\cdot (\hat{n} \times \hat{h})\right] D_1 \\ &- (R_v + R_h)(\hat{v}\cdot \hat{t}) \left[(\hat{h}_s\cdot \hat{d})(\hat{n}\cdot \hat{k}_i) - (\hat{n}\cdot \hat{d})(\hat{h}_s\cdot \hat{k}_i) - (\hat{v}_s\cdot \hat{t})(\hat{n}\cdot \hat{k}_i)\right] D_1 \end{aligned} \tag{3.4a}$$

$$\begin{aligned} f_{hh} = &\left[(1 + R_h)\hat{v}_s\cdot (\hat{n} \times \hat{h}) + (1 - R_h)\hat{h}_s\cdot (\hat{n} \times \hat{v})\right] D_1 \\ &- (R_v + R_h)(\hat{h}\cdot \hat{d}) \left[(\hat{h}_s\cdot \hat{d})(\hat{n}\cdot \hat{k}_i) - (\hat{n}\cdot \hat{d})(\hat{h}_s\cdot \hat{k}_i) - (\hat{v}_s\cdot \hat{t})(\hat{n}\cdot \hat{k}_i)\right] D_1 \end{aligned} \tag{3.4b}$$

$$\begin{aligned} f_{hv} = &\left[(1 - R_v)\hat{v}_s\cdot (\hat{n} \times \hat{v}) - (1 + R_v)\hat{h}_s\cdot (\hat{n} \times \hat{h})\right] D_1 \\ &- (R_v + R_h)(\hat{v}\cdot \hat{t}) \left[(\hat{h}_s\cdot \hat{t})(\hat{n}\cdot \hat{k}_i) - (\hat{n}\cdot \hat{d})(\hat{v}_s\cdot \hat{k}_i) - (\hat{v}_s\cdot \hat{d})(\hat{n}\cdot \hat{k}_i)\right] D_1 \end{aligned} \tag{3.4c}$$

Las expresiones explícitas, en función de las derivadas direccionales, están dadas en el Apéndice B.

De estas ecuaciones podemos ver que las amplitudes $f_{qp}$ dependen de las derivadas direccionales, $z_x = z_x(x, y)$ y $z_y = z_y(x, y)$, de manera no lineal. Por lo tanto, la sustitución hecha con las ecuaciones (2.72) y (2.73) no son válidas en este caso, ya que dicha sustitución

sólo puede conseguirse al integrar por partes una expresión que es lineal en las derivadas. La dependencia espacial de las derivadas es calculada a través de perfiles reales de suelos, los cuales serán usados para obtener las simulaciones del coeficiente de retrodispersión.

Aunque los coeficiente de Fresnel también dependen de las variables espaciales (rigurosamente, los mismos dependen del ángulo de incidencia local, que es función de cada punto de la superficie), podemos aproximarlos tomando el ángulo de incidencia respecto a la vertical [10] y [24]. Esto queda justificado debido a que $R_h$ y $R_v$ tienen un rango dinámico acotado para los ángulos de incidencia usuales en los sistemas de radar. Por ejemplo, para incidencias en el rango $0° - 60°$ y para una permitividad eléctrica dada ($\epsilon_r \approx 20$) los coeficientes de Fresnel quedan acotados de la siguiente manera: $-0{,}7 \leq R_h \leq -0{,}6$ y $0{,}4 \leq R_v \leq 0{,}6$

## 3.3. Simulaciones Numéricas

Nuestro objetivo en esta Sección es calcular numéricamente el coeficiente $\sigma^0$ a partir de la formulación AIEM. Desde una perspectiva computacional, resulta eficiente poder ignorar el término complementario, ya que el mismo involucra integrar en un espacio de seis dimensiones una función que en algunos puntos es singular y que en todo el rango de integración es altamente oscilante.

En el límite de altas frecuencias (longitudes de onda cortas respecto a la escala de rugosidad de la superficie) el término complementario tiene una contribución despreciable frente a la componente de Kirchhoff. Para $l \gg \lambda$ la superficie es suficientemente plana y el término complementario, que da cuenta de los efectos de estructura pequeña de la superficie, y por lo tanto de múltiple scattering, puede ser ignorado. [12]. Para poder calcular $\sigma_0$ con una precisión aceptable, elegimos trabajar en el límite de las altas frecuencias usando banda X ($\lambda \approx 2$cm) para la longitud de onda incidente.

Esta elección responde a dos requerimientos: el mencionado anteriormente (eliminar el cálculo del término complementario) y, por otro lado, satisfacer la condición de que los perfiles usados deben ser del orden de $8\lambda \times 8\lambda$ [30]. Por último, aunque la decisión de ignorar el término complementario queda justificada desde bases teóricas, la misma puede ser reafirmada analizando los resultados mostrados en la Figura 3.3, donde se ve que para los canales co-polarizados los resultados que se obtienen usando sólo la componente de Kirchhoff son

similares a los obtenidos usando la formulación completa del AIEM. Por lo tanto, aunque un cálculo completo del coeficiente de retrodispersión requiere incluir al campo complementario, usar sólo el campo de Kirchhoff resulta una aceptable (y necesaria) primer instancia para estudiar el proceso completo de dispersión de superficies reales.

### 3.3.1. Perfiles reales

Los perfiles de suelos de agricultura fueron obtenidos usando un *scanner* bidimensional [31]. Estos tipos de suelo cuentan con dos tratamientos de labranza diferentes: arado de vertedera y doble efecto de disco. Por inspección visual, el primero presenta una superficie más rugosa que el segundo. La rugosidad bidimensional de la superficie se caracteriza por una altura RMS $s_{2D}$ y con una función de autocorrelación bidimensional, ambas estimadas a partir del perfil 2D escanneado [21] . Para una superficie 2D discretizada en $N \times M$ puntos, la altura RMS y la función $ACF$ se calculan de la siguiente manera:

$$s_{2D} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} z^2(r_{ij}) \tag{3.5}$$

$$ACF(R) = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} z(r_{ij}) z(r_{ij} + R)}{s_{2D}^2} \tag{3.6}$$

donde $z(r_{ij})$ es la altura de la superficie (respecto del plano medio) en el punto $r_{ij} = (x_i, y_i)$, y $R$ es la distancia entre cualquier par de puntos de la superficie para los cuales la función $ACF(R)$ es evaluada. Para superficies estocásticas, $ACF(R) \to 0$ cuando $R \to \infty$, indicando que luego de cierta distancia característica los puntos de la superficie no están correlacinados. Además, en la definición de $ACF$ (ecuación (3.6)), la función está normalizada de manera tal que $ACF(R) \to 1$ cuando $R \to 0$. Un detalle a remarcar es que no se asume isotropía en la superficie, ya que en (3.6) $R$ es un vector que apunta en cualquier dirección.

El perfilómetro láser es capaz de digitalizar la superficie del suelo en porciones de 780mm $\times$ 270mm, con 1mm de resolución. Se tomaron setenta y un perfiles de superficies de suelos de agricultura, de dos maneras marcadamente distintas: perfiles en dirección perpendicular y longitudinales a la estructura de surco. La altura RMS $s_{2D}$ varía entre $1,16$cm a $3,90$cm para perfiles tomados en dirección perpendicular con respecto a la estructura del surco y 0,925cm a $2,74$cm para perfiles tomados en dirección longitudinal. Sólo 49 de 71 de los

perfiles cumplen con la condición $ks < 3$, que para $\lambda = 2$cm implica $s < 0,95$cm. Únicamente estos perfiles se utilizaron en las simulaciones. La Figura 3.1 presenta un perfil de superficie 2D a lo largo de la dirección perpendicular y su correspondiente ACF; el período de surco es del orden de 50cm. La Figura 3.2 muestra el perfil a lo largo de la dirección longitudinal y su correspondiente ACF.

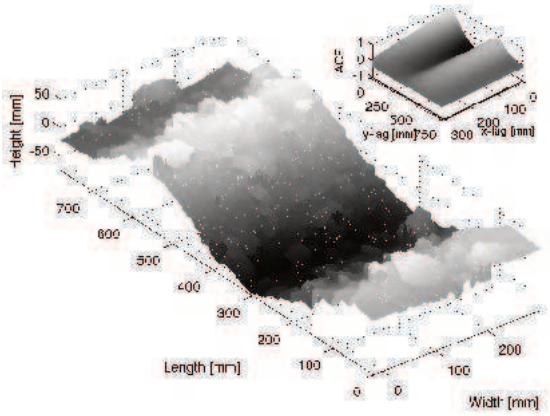



Figura 3.1: Superficie de suelo de agricultura perpendicular al surco de arado

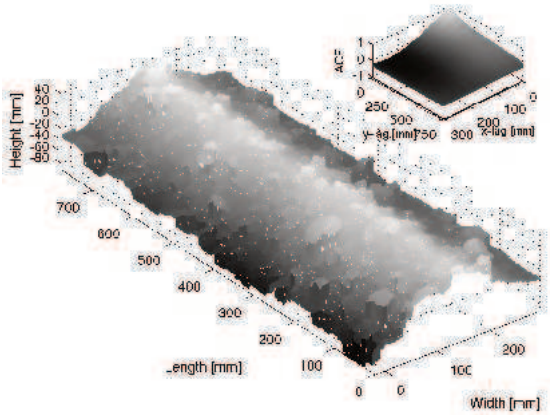



Figura 3.2: Superficie de suelo de agricultura paralelo al surco de arado

En las Figuras 3.1 y 3.2 se observan diferencias cualitativas en la rugosidad superficial para las distintas direcciones tomadas. Se puede observar que los suelos agrícolas reales presentan perfiles complejos y por lo tanto los parámetros de rugosidad, la ACF en particular, son difíciles de modelar usando las técnicas estándar [32]. Por otra parte, las superficies observadas violan diversas hipótesis relacionadas con los modelos teóricos. En primer lugar,

no son isótropas. En segundo lugar, no pueden ser caracterizadas con un proceso aleatorio estacionario con una sola escala de rugosidad y una sola ACF.

### 3.3.2. Resultados

En la Figura 3.3 mostramos el coeficiente de retrodispersión medio para el ensamble de los 49 perfiles (longitudinales a las filas de arado) usados para integrar el campo de Kirchhoff. El gráfico muestra el coeficiente $\sigma^0$ como función del ángulo de incidencia en la configuración de *backscattering* ($\theta_s = \theta$ y $\phi_s = \pi$) para los canales HH, VV y HV.

Todos los perfiles usados verifican $s_{2D} < 0{,}95$cm, que para una longitud de onda incidente de 2cm implica $ks < 3$, lo cual está dentro del rango de validez de la aproximación de Kirchhoff. La longitud de correlación media obtenida de los perfiles es $l = 2{,}86cm$. En general, los valores y tendencias angulares de los canales co-polarizados obtenidos con las superficies reales son similares a los valores predichos por AIEM [24]. Esto es visto en la Figura 3.3, donde comparamos nuestros resultados con los resultados del AIEM para una ACF gaussiana con altura RMS de $s = 0{,}95$cm y longitud de correlación $l = 2{,}86$cm. Estas curvas fueron obtenidas usando la implementación del AIEM de M. Brogioni [23].

Se observa un comportamiento oscilatorio en las curvas obtenidas con los perfiles reales, lo cual es consistente con el scattering proveniente de una estructura surcada, como es mostrado en [33], [34]. Lo más relevante sin embargo es que $\sigma_{0HV}$ presenta valores no nulos, los cuales alcanzan un máximo de $-25$dB para esta elección particular de $\lambda$, constante dieléctrica ($\epsilon = 10$) y conjunto deperfiles reales. Como ya mencionamos, $\sigma_{0HV}$ es no nulo debido a que todos los términos en el campo de Kirchhoff son considerados. Por último, la aproximación de fase estacionaria parece ser adecuada para la simulación de los canales co-polarizados.

En la próximo resultado el coeficiente de *backscattering* medio como función de la constante dieléctrica del suelo (Figura 3.4), para un ángulo de incidencia fijo en $\theta = 30°$. El comportamiento de los canales co-polarizados es similar a los predichos por el AIEM. Sin embargo, $\sigma_{0HV}$ presenta comportamiento no monótono, con un máximo en $\epsilon_r \sim 8$ para esta elección particular de $\theta$.

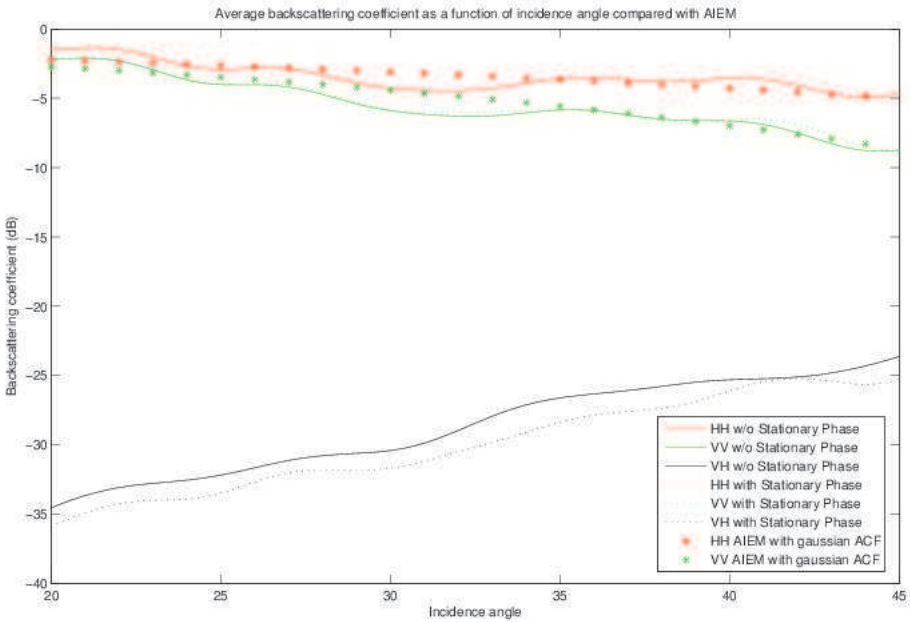



Figura 3.3: Coeficiente medio $\sigma^0$ de los canales VV, HH y VH para el ensamble de perfiles reales.

## 3.4. Discusión de los resultados

Hasta aquí hemos propuesto una manera de obtener coeficientes de retrodispersión no nulos para los canales de polarización cruzada usando sólo la aproximación de Kirchhoff y utilizando perfiles de superficies reales.

Al incluir, en el campo de Kirchhoff, los términos no lineales en las derivadas direccionales, físicamente se está habilitando a que el plano tangente sobre cada punto de la superficie tenga una dirección normal que no esté contenida en el plano de incidencia (formado por $\hat{z}$ y $\hat{k}_i$) [16]. Esto se pone de manifiesto en las ecuaciones (3.4) al retener términos proporcionales a $\hat{v} \cdot \hat{t}$ o $\hat{h} \cdot \hat{d}$. Estos términos, en una primer instancia fueron ignorados [10], toman valores no nulos cuando la normal a cada punto de la superficie no queda contenida en el plano de incidencia.

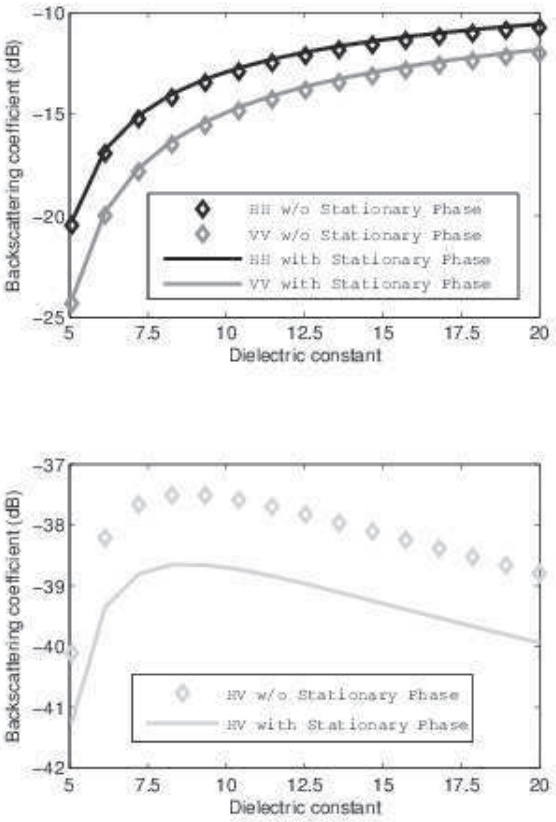
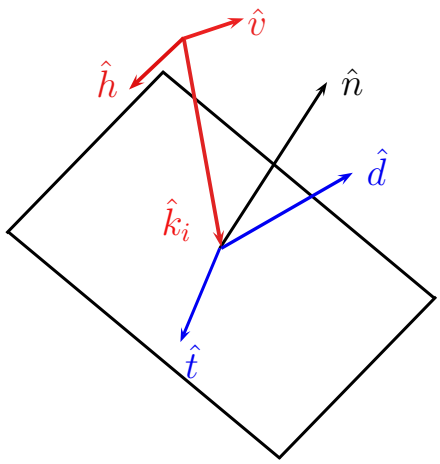



Figura 3.4: Coeficiente $\sigma^0_{vh}$ medio en función de la constante dieléctrica.




Esquema de la base local con la normal contenida en el plano de incidencia.

Cuando la normal a la superficie está contenida en el plano de incidencia, el factor $\hat{v} \cdot \hat{t}$ se anula. Esto se debe a la definición de $\hat{t}$, que marca en la base local, la dirección ortogonal al plano de incidencia. Explícitamente, el factor es

$$\hat{v} \cdot \hat{t} = \hat{v} \cdot \left(\hat{k} \times \hat{n}\right) = \hat{k} \cdot (\hat{n} \times \hat{v})$$

Si $\hat{n}$ está contenida en el plano de incidencia, $\hat{v} \times \hat{n}$ es ortogonal al mismo; como la polarización vertical también está contenida en este plano, el producto final resulta nulo. Con el mismo análisis podemos mostrar que el producto $\hat{h} \cdot \hat{d} = -\hat{h} \cdot \hat{n} \neq 0$ sólo si la normal tiene una componente fuera del plano de incidencia.

Usando la formulación completa del campo de Kirchhoff del AIEM, el rango de valores de $\sigma_0$ para los canales co-polarizados esta dentro del rango de las observaciones reportadas en trabajos anteriores [3, 4], asi mismo que la diferencia $\sigma_{0VV} - \sigma_{0HH}$ incrementa con el ángulo dispersado. Por el contrario, los valores de $\sigma_{0HV}$ son no nulos para todos los perfiles usados. Esto es consecuencia directa del método de dispersión que hemos usado, el cual contiene los términos no lineales en las derivadas direccionales. Observamos que el coeficiente de retrodispersión del canal cruzado aumenta a medida que aumenta el ángulo de de azimut $\theta_s$ y que alcanza un valor máximo de $-25$dB. Sin embargo, estos valores son inferiores a las observaciones realizadas sobre suelos de agricultura en banda X ([Figuras. 6c y 7c] de [3]).

Los resultados obtenidos son relevantes para los algoritmos de inversión basados en imágenes SAR, ya que las aproximaciones semi-empíricas se basan en desacoplar los efectos

de la rugosidad de la superficie y la humedad del suelo para obtener $\sigma^0_{vh}$ [3, 35]. Sin embargo, los mecanismos de interacción responsables para explicar los valores observados de $\sigma^0_{vh}$ no están bien estudiados. En particular, todavía no queda claro qué fracción de los valores observados en $\sigma^0_{vh}$ proviene del scattering en superficie y cuanto es debido a la interacción de la onda incidente en el medio inferior a la superficie iluminada (scattering en volumen), sobre todo el longitudes de onda grande (banda L). Un caso típico es el incremento de $\sigma^0_{vh}$ debido a un aumento en la humedad del suelo, reportados en [3] y [36].

El campo de Kirchhoff con todos sus términos muestra un incremento y luego una disminución de $\sigma^0_{vh}$ en función de la constante dieléctrica (Figura 3.4). Esto es una consecuencia directa del hecho que en la configuración de *backscattering*, la amplitud del campo de Kirchhoff es modulada por el factor $R_h + R_v$, el cual tiene un comportamiento no trivial con $\epsilon$: primero aumenta hasta alcanzar un valor máximo (el cual depende de $\theta$) y luego decae monotonamente con $\epsilon_r$. Esto es lo observado en la Figura 3.4.

Para concluir esta parte del Capítulo cabe señalar que lo desarrollado hasta aquí es útil para hallar una cota inferior al coeficiente $\sigma^0_{vh}$ total, el cual es un factor crítico para probar hipótesis hechas sobre la fracción de $\sigma^0_{vh}$ que está asociada al scattering en volumen.

# 4

# AIEM con dos interfaces: el modelo de capas

## 4.1. Motivación

Los Capítulos anteriores los hemos dedicado a estudiar los efectos de superficie en la dispersión de ondas electromagnéticas. Hemos desarrollado en detalle el método de la ecuación integral para calcular el *scattering* debido a superficies aleatorias. En el Capítulo 3 describimos como, usando sólo la aproximación de Kirchhoff, se pueden obtener valores no nulos del coeficiente $\sigma^0_{vh}$. También hemos mencionado que, desde el punto el punto de vista experimental, los mecanismos responsables de generar estos valores no están bien entendidos en la actualidad.

En particular, no se conoce con certeza qué fracción de los valores de $\sigma^0_{vh}$ observados provienen del *scattering* superficial y qué fracción del scattering dentro del suelo. Por *scattering* superficial entendemos al originado por la interface aire-suelo, mientras que el scattering dentro del suelo puede deberse a distintos fenómenos. El suelo presenta una estructura compleja, pero a primer orden puede considerarse como un medio estratificado. Esta estructura dieléctrica vertical puede estar debida a cambios en la textura del suelo (contenidos de arcilla, arena y limo), pero está más comúnmente asociada al gradiente osmótico del agua y la altura de la napa. En particular, en suelos de agricultura en zonas de gran precipitación o en zonas con riego, es común observar una discontinuidad en el perfíl vertical de humedad del suelo, asociada a la zona de saturación. Asimismo, dentro de cada capa (saturada y no saturada) pueden existir discontinuidades dieléctricas vinculadas a poros de aire y agua. Entonces, hay al menos dos mecanismos de *scattering* vinculados a discontinuidades dielétricas (con geometrías distintas) que deben ser considerados al desarrollar un modelo de suelo más realista: *scattering* debido a discontinuidades verticales (estratos) y *scattering* debido a discontinuidades discretas (poros).

El primer tema es generalmente abordado suponiendo un arreglo vertical de capas suficientemente finas y dieléctricamente homogéneas, de manera de poder utilizar el formalismo de transferencia radiativa [13, 14]. Sin embargo, este formalismo calcula únicamente la potencia total y desprecia los efectos coherentes. Esta última en particular es una suposición muy grosera para los estratos característicos de suelos de agricultura, que tienen una separación del orden de $\lambda$. Por ende, para implementar un modelo de *scattering* del suelo más robusto es relevante desarrollar un formalismo coherente. Uno de los enfoques para calcular la potencia dispersada en medios estratificados es extender el método de perturbaciones pequeñas (a primer orden) sobre las distintas capas, calculando la corriente inducida en el plano medio de cada interface [37, 38, 39]. Como ya discutimos, el método de perturbaciones pequeñas impone restricciones severas sobre la superficie. Por lo tanto, lo que buscamos es dar una contribución al modelo de capas basándonos en el método integral.

En este Capítulo nos proponemos dar una primera respuesta a cuál es la contribución generada por la interacción de la onda incidente con un medio que esté debajo de la superficie iluminada. Hasta ahora hemos considerado que debajo de esta superficie se encuentra un medio semi-infinito y homogéneo. En estas condiciones, la onda transmitida hacia el medio inferior se propaga libremente y no aporta contribución alguna a la sección eficaz observada por el radar. Lo que proponemos ahora es que debajo de la superficie haya dos medios con constantes dieléctricas distintas, y en donde la interface que separa a ambos medios puede aproximarse con un plano. Como aclaramos anteriormente, esta configuración queda motivada en las observaciones directas que se hacen sobre muchos suelos de agricultura: debajo de la superficie el medio se encuentra estratificado. En general, existe una primera capa superficial caracterizada por una humedad muy variable asociada a forzantes atmosféricos (precipitación, evaporación, escorrentia) y debajo se suele encontrar una segunda capa asociada a una humedad mucho mayor (punto de saturación) mucho más estable temporalmente. Si bien ambos medios no son espacialmente homogéneos, ya que en los mismos se encuentran burbujas de aire y agua, en primera instancia vamos a suponer que sí lo son. Luego, en el capítulo final de esta tesis vamos a incluir dichas inhomogeneidades para dar una descripción un tanto más completa al problema de dispersión electromagnética en un medio material aleatorio.

## 4.2. Esquema del problema a resolver

En este Capítulo queremos hallar la dispersión de una onda plana incidiendo sobre un medio estratificado con dos interfaces. La superficie superior es un proceso estocástico del cual se conoce la distribución de alturas (gaussiana) y la función de autocorrelación (ACF). La superficie inferior es un plano ubicado en $z = -D$.

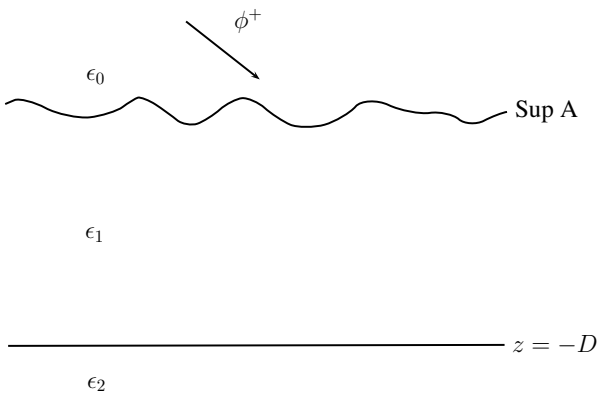



Figura 4.1: Esquema de medios estratificados.

Para resolver el problema de *scattering* la estrategia es usar el principio de extinción para obtener expresiones de los campos (eléctrico y magnético) tangenciales en cada interface. Este método ya lo hemos usado en el Capítulo 2 y lo desarrollamos en detalle. A partir de una ecuación integral calculamos el campo dispersado usando la aproximación de plano tangente como resultado de orden cero. Llamamos a esta manera de calcular el campo dispersado por una superficie aleatoria el método de la ecuación integral (IEM).

Aplicar esta estrategia en el nuevo problema nos lleva a escribir un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Una vez resuelto este sistema vamos a tener expresiones para los campos tangenciales sobre la superficie aleatoria, los cuales van a ser usados en el principio de Huygens para calcular el campo dispersado.

El principio de extinción aplicado en cada medio da las siguientes cuatro expresiones:

$$\bar{S}_{A01}\left[\bar{E}_A, \bar{H}_A\right](\bar{x}_1) = -\bar{E}^i(\bar{x}_1) \tag{4.1a}$$

$$\bar{S}_{A10}\left[\bar{E}_A, \bar{H}_A\right](\bar{x}_0) - \bar{S}_{B10}\left[\bar{E}_B, \bar{H}_B\right](\bar{x}_0) = 0 \tag{4.1b}$$

$$\bar{S}_{A12}\left[\bar{E}_A, \bar{H}_A\right](\bar{x}_2) - \bar{S}_{B12}\left[\bar{E}_B, \bar{H}_B\right](\bar{x}_2) = 0 \tag{4.1c}$$

$$\bar{S}_{B21}\left[\bar{E}_B, \bar{H}_B\right](\bar{x}_1) = 0 \tag{4.1d}$$

La función $\bar{S}_{\sigma ij}$ es una manera compacta de escribir el principio de extinció, y se define como:

$$\bar{S}_{\sigma ij}[\bar{E}_\sigma, \bar{H}_\sigma](\bar{x}_j) = \int_\sigma ds' \left[\imath\omega\mu_i G_i(\bar{x}_j, \bar{x}')\hat{n}'_\sigma \times \bar{H}(x') - \hat{n}'_\sigma \times \bar{E}(x') \times \nabla' G_i(\bar{x}_j, \bar{x}')\right] \tag{4.2}$$

donde $\sigma$ indica la superficie sobre la cual se está integrando y los índices $ij$ marcan el medio al que pertenece el punto fuente y el punto campo respectivamente.

La función de Green y su gradiente, para la ecuación de Helmholtz, son [40]:

$$\begin{aligned} G_i(\bar{x}_j, \bar{x}') &= 2\pi\imath \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{\imath\bar{k}(\bar{x}_j - \bar{x}')} \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_i^2}\right) \\ &\quad \left[\Theta(\hat{n}_\sigma\bar{k})\Theta(\hat{n}_\sigma(\bar{x}_j - \bar{x}')) + \Theta(-\hat{n}_\sigma\bar{k})\Theta(-\hat{n}_\sigma(\bar{x}_j - \bar{x}'))\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \nabla' G_i(\bar{x}_j, \bar{x}') &= -2\pi\imath^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{\imath\bar{k}(\bar{x}_j - \bar{x}')} \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_i^2}\right) \\ &\quad \bar{k}\left[\Theta(\hat{n}_\sigma\bar{k})\Theta(\hat{n}_\sigma(\bar{x}_j - \bar{x}')) + \Theta(-\hat{n}_\sigma\bar{k})\Theta(-\hat{n}_\sigma(\bar{x}_j - \bar{x}'))\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

siendo $\Theta(x) = 1$ sólo si $x > 0$ la función de Heaviside.

El camino propuesto será el siguiente: resolveremos el sistema de ecuaciones comenzando por (4.1d); a partir de esta ecuación relacionaremos el campo magnético con el campo eléctrico sobre la superficie inferior. Luego usaremos (4.1b) y (4.1c) para relacionar los campos entre ambas superficies. Finalmente, con (4.1a) pondremos los campos superficiales en función de la onda incidente.

## 4.3. Relaciones entre los campos superficiales

Vamos a usar el principio de extinción para encontrar las relaciones que existen entre los campos eléctricos y magnéticos tangenciales en las distintas superficies. Primero vamos

a relacionar los campos sobre la superficie B usando (4.1d); luego vamos a usar (4.1c) para relacionar $\bar{E}_B$ con los campos en la superficie A. Seguidamente vamos a relacionar el campos sobre la superficie A con (4.1b) y (4.1a). Resolviendo este par de ecuaciones se obtiene las expresiones para los campos tangenciales que son necesarios para calcular la dispersión total debida a las capas estratificadas. Mostraremos claramente cuál es la contribución de la capa inferior y en cuánto cambia el scattering total comparando con los resultados obtenidos con el IEM usual.

Antes de pasar a desarrollar las cuentas vamos a dejar en claro la notación usada:

$$\bar{k} \in \epsilon_0 \ ; \ \bar{k}' \in \epsilon_1 \ ; \ \bar{k}'' \in \epsilon_2 \ ; \ \bar{k} = \bar{k}_\perp + k_z \hat{z}$$
$$k_{zj}(k_\perp) = k_{zj} = \sqrt{\epsilon_j \mu_j \omega^2 - k_\perp^2} > 0 \ ; \ \mu_j = 1 \forall j$$

### 4.3.1. Campos sobre la superficie B

Comencemos escribiendo explícitamente la ecuación (4.1d). El espacio sobre el cual trabajaremos queda esquematizado en la siguiente Figura:

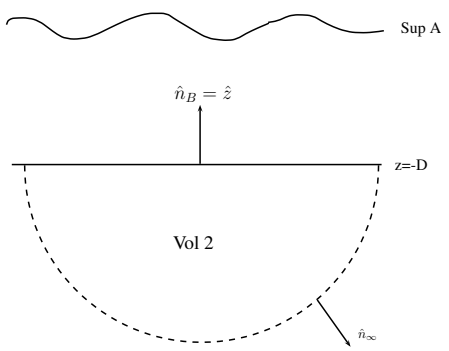



Figura 4.2: Principio de extinción en la región inferior.

El principio de extinción integra los campos sobre un volumen cerrado. Podemos hacer que la superficie semiesférica que encierra el volumen de integración tienda a infinito. En este caso, los campos sobre esta superficie (matemática, sin sentido físico) se anulan, por lo que la función $\vec{S}_{\sigma ij}$ definida en (4.2) sólo tiene que ser calculada sobre el plano $z = -D$:

$$\int \frac{d^3k''}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}''\bar{x}_1} \delta\left(k''^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right) \int_B ds'\ e^{-\imath \bar{k}''\bar{x}'}$$
$$\left[\Theta(\hat{n}_B(\bar{x}_1 - \bar{x}'))\Theta(\hat{n}_B\bar{k}'') + \Theta(-\hat{n}_B(\bar{x}_1 - \bar{x}'))\Theta(-\hat{n}_B\bar{k}'')\right]$$
$$\left[-\omega\mu_2\hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{x}') - (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{x}')) \times \bar{k}''\right] = 0 \tag{4.5}$$

Usando que la normal exterior al volumen considerado sobre el plano $z = -D$ es $\hat{n}_B = \hat{z}$, obtenemos:

$$\int \frac{d^2k''_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}''_\perp \bar{x}_{1\perp}} \int dk''_z \delta\left(k''^2_z + k''^2_\perp - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right) e^{\imath k''_z(z_1+D)}$$
$$\int_B ds'\ e^{-\imath \bar{k}''_\perp \bar{x}'_\perp} \left[\Theta(z_1 + D)\Theta(k''_z) + \Theta(-z_1 - D)\Theta(-k''_z)\right]$$
$$\left[-\omega\mu_2\hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{x}') - (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{x}')) \times \bar{k}''\right] = 0 \tag{4.6}$$

Y dado que $z_1 + D > 0$ y $-z_1 - D < 0$ para todo $-D < z_1 < 0$, la primer función de Heaviside [multiplicada por $\Theta(k''_z)$] vale siempre uno, mientras que la segunda [multiplicada por $\Theta(-k''_z)$] se anula siempre, por lo tanto

$$\int \frac{d^2k''_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}''_\perp \bar{x}_{1\perp}} \int dk''_z \delta\left(k''^2_z + k''^2_\perp - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right) e^{\imath k''_z(z_1+D)} \Theta(k''_z)$$
$$\int_B ds'\ e^{-\imath \bar{k}''_\perp \bar{x}'_\perp} \left[-\omega\mu_2\hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{x}') - (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{x}')) \times \bar{k}''\right] = 0$$

Integrando primero sobre la superficie B obtenemos la transformada de Fourier de los campos tangenciales en el modo $\bar{k}_\perp$. Luego, al integrar en $k''_z$ surge un factor $1/(2k_{2z})$ debido a la delta de Dirac en $k''^2$. Al realizar estas dos integraciones (sobre la suiperficie B y sobre $k''_z$), se obtiene la siguiente relación integral entre el campo eléctrico y el magnético sobre B:

$$\int \frac{d^2k''_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}''_\perp \bar{x}_{1\perp}} \frac{1}{2k_{2z}} e^{\imath k_{2z}(z_1+D)} \left[-\omega\mu_2\hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{k}_\perp) - (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times (\bar{k}_\perp + k_{2z}\hat{z})\right] = 0$$

La relación que encontramos para la transformada de Fourier entre los campos sobre la superficie $z = -D$ es la siguiente:

$$\omega\mu_2\hat{z}\times\bar{H}_B(\bar{k}_\perp)+(\hat{z}\times\bar{E}_B(\bar{k}_\perp))\times(\bar{k}_\perp+k_{2z}\hat{z})=0$$
$$\hat{z}\times\bar{H}_B(\bar{k}_\perp)=-\frac{1}{\omega\mu_2}(\hat{z}\times\bar{E}_B(\bar{k}_\perp))\times(\bar{k}_\perp+k_{2z}\hat{z}) \tag{4.7}$$

la cual es válida sólo para $k''_z>0$.

### 4.3.2. Relación entre campos de las distintas superficies

Vamos ahora a calcular (4.1c). El volumen de integración en este caso es el delimitado por las dos superficies y unas paredes laterales que haremos tender a infinito con la idea de anular los campos sobre ellas. La siguiente Figura muestra el espacio en el cual trabajaremos.

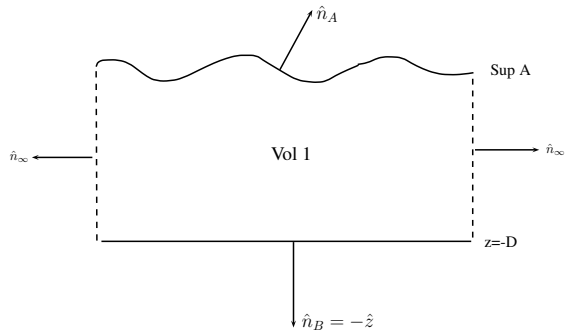



Figura 4.3: Principio de extinción en la región intermedia.

En esta configuración el punto campo, indicado con $\bar{x}_2$, pertenece a la región que está por debajo de la superficie inferior, mientras que el punto fuente ($\bar{x}'$) está en la región intermedia. La ecuación (4.1c) resulta entonces:

$$\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^2}e^{\imath\bar{k}'\bar{x}_2}\delta\left(k'^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$$
$$\int_A ds'\ e^{-\imath\bar{k}'\bar{x}'}\left[\Theta\left(\hat{n}'_A(\bar{x}_2-\bar{x}')\right)\Theta\left(\hat{n}'_A\bar{k}'\right)+\Theta\left(-\hat{n}'_A(\bar{x}_2-\bar{x}')\right)\Theta\left(-\hat{n}'_A\bar{k}'\right)\right]$$
$$\left[-\omega\mu_1\hat{n}'_A\times\bar{H}_A(\bar{x}')-(\hat{n}'_A\times\bar{E}_A(\bar{x}'))\times\bar{k}'\right]$$
$$=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^2}e^{\imath\bar{k}'\bar{x}_2}\delta\left(k'^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$$
$$\int_B ds'\ e^{-\imath\bar{k}'\bar{x}'}\left[\Theta\left(-\hat{z}(\bar{x}_2-\bar{x}')\right)\Theta(-\hat{z}\bar{k}')+\Theta\left(\hat{z}(\bar{x}_2-\bar{x}')\right)\Theta(\hat{z}\bar{k}')\right]$$
$$\left[\omega\mu_1\hat{z}\times\bar{H}_B(\bar{x}')-(-\hat{z}\times\bar{E}_B(\bar{x}'))\times\bar{k}'\right] \tag{4.8}$$

Para simplificar esta ecuación podemos tomar el límite $z_2 \to -\infty$ sin perder generalidad en los resultados que obtengamos. El punto $\bar{x}_2$ pertenece a la región que está por debajo de la superficie $B$, por lo tanto es válido pedir que la coordenada $z_2 \to -\infty$. En este caso, como $\hat{n}_A$ es la normal exterior a la superficie $A$, con dirección el medio superior, obtenemos que $\hat{n}'_A(\bar{x}_2 - \bar{x}') < 0$ y por lo tanto $\Theta(\hat{n}'_A(\bar{x}_2 - \bar{x}')) = 0$ y $\Theta(-\hat{n}'_A(\bar{x}_2 - \bar{x}')) = 1$. En el mismo límite, como la normal exterior a la superficie $B$ es en este caso $\hat{n}_B = -\hat{z}$ conseguimos que $\Theta(\hat{z}(\bar{x}_2 - \bar{x}')) = 0$ y $\Theta(-\hat{z}(\bar{x}_2 - \bar{x}')) = 1$.

Usando estas simplificaciones podemos escribir lo siguiente:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_2} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$$
$$\int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_2} e^{\imath k'_z D} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \Theta(-k'_z)$$
$$\int_B ds'\, e^{-\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}'_\perp} \left[\omega\mu_1 \hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{x}') + (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$

La integral sobre la superficie $B$ nos da la transformada de Fourier de los campos tangenciales en el modo $\bar{k}_\perp$; con ayuda de la ecuación (4.7) podemos escribir $\bar{H}_B$ en términos de $\bar{E}_B$. Luego de hacer estas sustituciones, el principio de extinción en el volumen intermedio se simplifica a:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_2} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}_{2\perp}} \int dk'_z e^{\imath k'_z (D+z_2)} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \Theta(-k'_z)(\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \left[\bar{k}' - \frac{\mu_1}{\mu_2}(\bar{k}_\perp + k_{2z}\hat{z})\right]$$

Debido a la función de Heaviside en el segundo renglón, $k'_z < 0$. La integral sobre $dk'_z$ la hacemos usando la raíz negativa de la delta de Dirac, la cual introduce un factor $1/k_{1z}$. Por lo tanto, nos queda

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_2} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{-2k_{1z}} e^{\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}_{2\perp}} e^{-\imath k_{1z}(D+z_2)} (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \left[\bar{k}_\perp - k_{1z}\hat{z} - \frac{\mu_1}{\mu_2}(\bar{k}_\perp + k_{2z}\hat{z})\right]$$

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_2} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\ e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{-2k_{1z}} e^{\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}_{2\perp}} e^{-\imath k_{1z}(D+z_2)} (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \left[\bar{k}_\perp \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} k_{2z} + k_{1z}\right) \hat{z}\right]$$

Usando que $\mu_1 = \mu_2$ (los suelos no son magnéticos) llegamos a

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_2} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\ e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{-2k_{1z}} e^{\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}_{2\perp}} e^{-\imath k_{1z}(D+z_2)} (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \left[-\frac{1}{\mu_2} (\mu_1 k_{2z} + \mu_2 k_{1z}) \hat{z}\right] \tag{4.9}$$

Observando que $(\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \hat{z} = \bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp)$ podemos escribir la transformada de Fourier del campo eléctrico tangencial sobre la superficie B como función de los campos en la superficie A:

$$\int \frac{d^2k'_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}_{2\perp}} \int dk'_z\ e^{\imath k'_z z_2} \delta\left(k_z'^2 + k_\perp'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$$
$$\int_A ds'\ e^{-\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}'_\perp} e^{-\imath k'_z z'} \Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= -\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{-2k_{1z}} e^{\imath \bar{k}'_\perp \bar{x}_{2\perp}} e^{-\imath k_{1z}(D+z_2)} \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 k_{2z} + \mu_2 k_{1z}) \bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp) \tag{4.10}$$

Vamos a desarrollar un poco esta ecuación. En el término que contiene los campos sobre la superficie A ambos signos para $k'_z$ deben ser considerados. Además vamos a usar que $\hat{n}'_A \bar{k}' = k'_z - \bar{k}'_\perp \nabla'_\perp z(\bar{x}')$. Luego, reescribimos la ecuación igualando a cero, e intercambiando el orden de integración sobre los campos en la superficie A.

$$\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{2k_{1z}} e^{\imath \bar{k}_\perp \bar{x}_{2\perp}}$$
$$\Big\{ e^{\imath k_{1z} z_2} \int_A ds'\ e^{-\imath \bar{k}_\perp \bar{x}'_\perp} e^{-\imath k_{1z} z'} \Theta(-k_{1z} + \bar{k}_\perp \nabla'_\perp z)$$
$$\left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times (\bar{k}_\perp + k_{1z}\hat{z})\right]$$
$$-e^{-\imath k_{1z} z_2} \int_A ds'\ e^{-\imath \bar{k}_\perp \bar{x}'_\perp} e^{\imath k_{1z} z'} \Theta(k_{1z} + \bar{k}_\perp \nabla'_\perp z)$$
$$\left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times (\bar{k}_\perp - k_{1z}\hat{z})\right]$$
$$-\frac{1}{\mu_2} (\mu_1 k_{2z} + \mu_2 k_{1z}) e^{-\imath k_{1z}(z_2+D)} \bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp) \Big\} = 0$$

Podemos resumirla en la siguiente forma:

$$\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}\frac{1}{2k_{1z}}e^{\imath\bar{k}_\perp\bar{x}_{2\perp}}e^{-\imath k_{1z}z_2}\left\{e^{2\imath k_{1z}z_2}\vec{\Psi}_1(\bar{k}_\perp)-\vec{\Psi}_2(\bar{k}_\perp)-\vec{\Psi}_3(\bar{k}_\perp)\right\}=0$$

con

$$\begin{cases}\Psi_1(\bar{k}_\perp)=e^{\imath k_{1z}z_2}\int_A ds'\ e^{-\imath\bar{k}_\perp\bar{x}'_\perp}e^{-\imath k_{1z}z'}\Theta\left(-k_{1z}+\bar{k}_\perp\nabla'_\perp z\right)\\ \left[-\omega\mu_1\hat{n}'_A\times\bar{H}_A(\bar{x}')-(\hat{n}'_A\times\bar{E}_A(\bar{x}'))\times(\bar{k}_\perp+k_{1z}\hat{z})\right]\\ \\ \Psi_2(\bar{k}_\perp)=\int_A ds'\ e^{-\imath\bar{k}_\perp\bar{x}'_\perp}e^{\imath k_{1z}z'}\Theta(k_{1z}+\bar{k}_\perp\nabla'_\perp z)\\ \left[-\omega\mu_1\hat{n}'_A\times\bar{H}_A(\bar{x}')-(\hat{n}'_A\times\bar{E}_A(\bar{x}'))\times(\bar{k}_\perp-k_{1z}\hat{z})\right]\\ \\ \Psi_3(\bar{k}_\perp)=\frac{1}{\mu_2}\left(\mu_1k_{2z}+\mu_2k_{1z}\right)e^{-\imath k_{1z}D}\bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp)\end{cases}$$

En el límite $z_2\to-\infty$ despreciamos la contribución de $\vec{\Psi}_1$ debido a que este término presenta oscilaciones mucho más grande que los otros dos, haciendo que su contribución a la integral sea despreciable. Además, este término representa la amplitud de las ondas que inciden sobre la superficie B y que se propagan desde $z\to-\infty$, las cuales no existen en realidad. El medio representado con $\epsilon_2$ es semi-infinito y no tiene una segunda interface en la cual se reflejen ondas, por lo tanto, en él sólo pueden existir ondas que se propaguen en la dirección $-\hat{z}$,

Anulando entonces la amplitud dada por $\Psi_1$ tenemos:

$$\int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}\frac{1}{2k_{1z}}e^{\imath\bar{k}_\perp\bar{x}_{2\perp}}e^{-\imath k_{1z}z_2}\left\{-\vec{\Psi}_2(\bar{k}_\perp)-\vec{\Psi}_3(\bar{k}_\perp)\right\}\approx 0$$
$$\Rightarrow\vec{\Psi}_3(\bar{k}_\perp)=-\vec{\Psi}_2(\bar{k}_\perp)$$

Explícitamente,

$$\frac{1}{\mu_2}(\mu_1k_{2z}+\mu_2k_{1z})e^{-\imath k_{1z}D}\bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp)$$
$$=-\int_A ds'\ e^{-\bar{k}_\perp\bar{x}'_\perp}e^{\imath k_{1z}z'}\Theta(-k_{1z}-\bar{k}_\perp\nabla'_\perp z)\left[-\omega\mu_1\hat{n}'_A\times\bar{H}_A(\bar{x}')-(\hat{n}'_A\times\bar{E}_A(\bar{x}'))\times(\bar{k}_\perp-k_{1z}\hat{z})\right]$$

De esta ecuación encontramos el campo eléctrico sobre la superficie inferior en términos de los campos tangenciales sobre la superficie $A$:

$$\bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp) = -\mu_2 \frac{e^{-\imath k_{1z} D}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}}$$
$$\int_A ds'\, e^{-\bar{k}_\perp \bar{x}'_\perp} e^{\imath k_{1z} z'} \Theta(k_{1z} + \bar{k}_\perp \nabla'_\perp z) \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times (\bar{k}_\perp - k_{1z}\hat{z})\right] \tag{4.11}$$

Ya tenemos expresada la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie B en función de los campos sobre la superficie A. Nos queda encontrar la relación entre $\bar{H}_A$ y $\bar{E}_A$.

### 4.3.3. Relación entre los campos sobre la superficie aleatoria

Para hallar cómo se relacionan los campos sobre la superficie $A$ debemos usar la ecuación (4.1b). Esta ecuación incluye los campos sobre la superficie inferior, pero a estos campos ya los hemos escrito en función de los campos sobre la superficie aleatoria. La configuración que usaremos es la misma que en el caso anterior, dada por la Figura (4.3), sólo que ahora el punto campo está en la región que está sobre la superficie $A$.

La ecuación (4.1b) resulta:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}' \bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}' \bar{x}'} \left[\Theta(\hat{n}'_A(\bar{x}_0 - \bar{x}'))\Theta(\hat{n}'_A \bar{k}') + \Theta(-\hat{n}'_A(\bar{x}_0 - \bar{x}'))\Theta(-\hat{n}'_A \bar{k}')\right]$$
$$\left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}' \bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_B ds'\, e^{-\imath \bar{k}' \bar{x}'} \left[\Theta(-\hat{z}(\bar{x}_0 - \bar{x}'))\Theta(-\hat{z}\bar{k}') + \Theta(\hat{z}(\bar{x}_0 - \bar{x}'))\Theta(\hat{z}\bar{k}')\right]$$
$$\left[\omega\mu_1 \hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{x}') + (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$

Para simplificar esta ecuación procedemos de manera análoga a lo hecho en el caso anterior; tomamos el límite $z_0 \to \infty$, con lo cual podemos simplificar las funciones de Heaviside de la siguiente manera: $\Theta(\hat{n}'_A(\bar{x}_0 - \bar{x}')) = 1$ y $\Theta(\hat{z}(\bar{x}_0 - \bar{x}')) = 1$. Usando este límite e integrando sobre la superficie $B$ obtenemos:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}' \bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}' \bar{x}'} \Theta(\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$
$$= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}' \bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) e^{\imath k'_z D} \Theta(k'_z) \left[\omega\mu_1 \hat{z} \times \bar{H}_B(\bar{k}_\perp) + (\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \bar{k}'\right]$$

Usamos (4.7) para poner $\bar{H}_B$ en función de $\bar{E}_B$.

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$

$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}_\perp \bar{x}_{0\perp}} \int dk'_z\, \delta\left(k_z'^2 + k_\perp'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) e^{\imath k'_z(z_0+D)} \Theta(k'_z)(\hat{z} \times \bar{E}_B(\bar{k}_\perp)) \times \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} k_{2z} + k_{1z}\right) \hat{z}$$

Integramos en $dk'_z$ teniendo en cuenta esta vez que $k'_z$ debe ser positivo.

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$

$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}_\perp \bar{x}_{0\perp}} \frac{1}{2k_{1z}} e^{\imath k_{1z}(z_0+D)} \frac{1}{\mu_2} \left(\mu_2 k_{1z} - \mu_1 k_{2z}\right) \bar{E}_{B\perp}(\bar{k}_\perp))$$

Reemplazando $\bar{E}_{B\perp}$ con (4.11) podemos escribir una ecuación integral para los campos tangenciales sobre la superficie A, la cual resulta:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$$

$$\int_A ds'\, e^{-\imath \bar{k}'\bar{x}'} \Theta(\hat{n}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}'\right]$$

$$= -\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) R_{12} e^{\imath(k_{1z}+k'_z)D}$$

$$\int_A ds'\, e^{-\bar{k}_\perp \bar{x}'_\perp} e^{\imath k_{1z} z'} \Theta(k_{1z} + \bar{k}_\perp \nabla'_\perp z) \left[-\omega\mu_1 \hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times (\bar{k}_\perp - k_{1z}\hat{z})\right] \tag{4.12}$$

con

$$R_{12} = \frac{\mu_2 k_{1z} - \mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}} \tag{4.13}$$

La ecuación anterior marca cuál es la relación entre los campos tangenciales sobre la superficie $A$ considerando que ahora hay también una contribución que proviene de las reflexiones en la superficie inferior. Para resolver esta ecuación nos queda para usar el principio de Huygens, dado por la ecuación (4.1a) (en este caso la geometría que usamos es dada en la Figura 4.4).

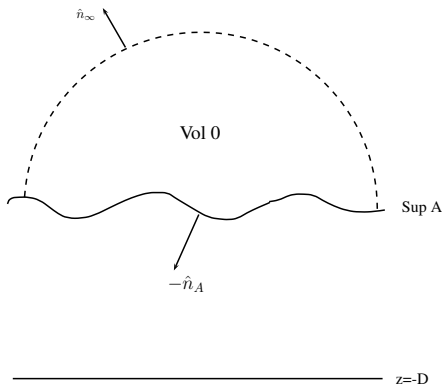



Figura 4.4: Principio de Huygens en la región superior.

Aquí, la normal exterior sobre la superficie A es $\hat{n}'_{At} = -\hat{n}'_A$, ya que apunta hacia la región intermedia. Además, el punto campo se encuentra en la región intermedia entre las superficies. Para poder dar un signo bien definido a los argumentos de las funciones de Heaviside que se encuentran en la integral vamos a usar que el punto campo, $\bar{x}_1$, está muy próximo a la superficie, con lo cual se consigue $\Theta(\hat{n}'_A(\bar{x}_1 - \bar{x}')) = 0$. La ecuación (4.1b) se reduce entonces a:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\, e^{\imath\bar{k}\bar{x}_1}\delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right)\int_A ds'\, e^{-\imath\bar{k}\bar{x}'}\Theta(-\hat{n}'_A\bar{k})\left[\omega\mu_0\hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') + (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')) \times \bar{k}\right]$$
$$= \bar{E}_i(\bar{x}_1)$$

El campo eléctrico incidente es una onda plana con una polarización $\hat{p}$ arbitraria: $\bar{E}_i(\bar{x}) = E_i e^{\imath(\bar{k}_i\bar{x}_{i\perp} - k_{iz}z)}\hat{p}$. Para posterior conveniencia vamos a reescribir el campo incidente usando la transformada de Fourier de una onda plana:

$$e^{\imath(\bar{k}_\perp\bar{x}_\perp - k_{iz}z)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{\imath\bar{k}\bar{x}}\delta(k^2 - k_i^2)\,(-2k_{iz})\Theta(-k_z)\delta(\bar{k}_\perp - \bar{k}_{i\perp}) \tag{4.14}$$

Reemplazando en la última ecuación obtenemos la segunda ecuación para los campos superficiales:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\, e^{\imath\bar{k}\bar{x}_1}\delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right)\int_A ds'\, e^{-\imath\bar{k}\bar{x}'}\Theta(-\hat{n}'_A\bar{k})\left[\omega\mu_0\hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') + (\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(x')) \times \bar{k}\right]$$
$$= E_i\hat{p}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{\imath\bar{k}\bar{x}}\delta(k^2 - k_i^2)\,(-2k_{iz})\Theta(-k_z)\delta(\bar{k}_\perp - \bar{k}_{i\perp}) \tag{4.15}$$

Sin pérdida de generalidad podemos elegir un sistema de referencia tal que el vector $\bar{k}_i$ esté contenido en el plano $xz$, en cuyo caso $k_{iy} = 0$ y por consiguiente $\delta(\bar{k}_\perp - \bar{k}_{i\perp}) = \delta(k_x - k_{ix})\delta(k_y)$.

Ya tenemos el par de ecuaciones que nos dan los campos tangenciales sobre la superficie A: (4.12) y (4.15). Este conjunto de ecuaciones las resolveremos usando la aproximación de Kirchhoff: sobre cada punto de la superficie $\bar{x}'_p$, calcularemos los campos tangenciales que se inducirían sobre el plano tangente a dicho punto.

Con el fin de simplificar las ecuaciones resulta conveniente realizar un cambio de sistema de referencia, que consiste en una traslación al punto $\bar{x}'_p$ más una rotación que nos deje los nuevos ejes $\tilde{x}, \tilde{z}$ solidarios al plano tangente: el eje $\tilde{x}$ estará sobre el plano tangente y el eje $\tilde{z}$ será la normal a dicho plano. El nuevo eje $\hat{y}$ coincide con el original, y resulta perpendicular al plano de incidencia formado por los versores $\hat{k}_i$ y $\hat{n}_A$.

El cambio de sistema de referencia implica hacer las siguientes transformaciones

$$\bar{x}' = \bar{x}'_p + R_\varphi \bar{\tilde{x}}' \quad , \quad R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$
$$\bar{k}\bar{x} = \bar{\tilde{k}}(\bar{x}'_p + R_\varphi \bar{\tilde{x}}) \Rightarrow \bar{k}\bar{x} = \bar{\tilde{k}}\bar{x}'_p + \bar{\tilde{k}} R_\varphi \bar{\tilde{x}}$$

De ahora en más omitiremos el subíndice $\varphi$ en la matriz de rotación. Usando este cambio de sistema de referencia vamos a reescribir la ecuación (4.15):

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\, e^{\imath \bar{k}\bar{x}_1} \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right)$$
$$\int_{\tilde{A}} d\tilde{s}'\, e^{-\imath \bar{k}(\bar{x}'_p + R\bar{\tilde{x}}')} \Theta(-\hat{\tilde{n}}'_A \bar{k}) \left[\omega\mu_0 \hat{\tilde{n}}'_A \times \bar{\tilde{H}}_A(\bar{\tilde{x}}') + (\hat{\tilde{n}}'_A \times \bar{\tilde{E}}_A(\bar{\tilde{x}}')) \times R\bar{k}\right]$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{\imath \bar{k}\bar{x}_1)} \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) (-2k_{iz}) E_i \Theta(-k_z) \delta(k_x - k_{ix}) \delta(k_y) \hat{p}$$

Usamos la aproximación de plano tangente para integrar en $\tilde{A}$. En el nuevo sistema de referencia, el punto de la superficie sobre el que queremos hallar los campos tangenciales es el origen ($\bar{\tilde{x}}' = 0$). Mas aún, en el sistema $\tilde{S}$ el plano tangente al origen es $\tilde{z} = 0$, por lo tanto el diferencial de superficie es simplemente $d\tilde{x}dy$. Además, desde este sistema de referencia la normal al plano tangente es simplemente $\hat{\tilde{z}}$. Por lo tanto, la última ecuación se convierte en:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\, e^{\imath\bar{k}\bar{x}_1}\delta\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_0^2}\right)\int_{\tilde{z}'=0} d\tilde{x}'dy\; e^{-\imath\bar{k}\bar{x}'_p}e^{\imath\bar{k}R\bar{\tilde{x}}'}\Theta(-k_z\cos\varphi+k_x\sin\varphi)$$

$$\left[\omega\mu_0\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A(\bar{\tilde{x}}')+(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A(\bar{\tilde{x}}'))\times R\bar{k}\right]$$

$$=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{\imath\bar{k}\bar{x}_1)}\delta\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_0^2}\right)(-2k_{iz})E_i\Theta(-k_x\sin\varphi-k_z\cos\varphi)\delta(k_x-k_{ix})\delta(k_y)\hat{p}$$

La integral sobre $d\tilde{x}dy$ da la transformada de Fourier de los campos superficiales en el modo $\tilde{k}_\perp = k_\perp\cos\varphi + k_z\sin\varphi$, ya que la única dependencia en la coordenada espacial quedó en los campos. La exponencial con el factor $\bar{x}'_p$ sale de la integral ya que este punto lo único que marca es la traslación entre ambos sistemas de referencia. Teniendo en cuenta que $\tilde{k}_z = -k_z\cos\varphi + k_x\sin\varphi$ y que $k_z = \tilde{k}_z\cos\varphi - \tilde{k}_x\sin\varphi$, el principio de extinción se reduce a:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\, e^{\imath\bar{k}\bar{x}_1}\delta\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_0^2}\right)e^{-\imath\bar{k}\bar{x}'_p}\Theta(-\tilde{k}_z)\left[\omega\mu_0\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A(\tilde{k}_\perp)+(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}_p))\times R\bar{k}\right]$$

$$=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{\imath\bar{k}\bar{x}_1}\delta\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_0^2}\right)(-2k_{iz})E_i\Theta(-\tilde{k}_x\sin\varphi-\tilde{k}_z\cos\varphi)\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi-\tilde{k}_z\sin\varphi-k_{ix})\delta(k_y)\hat{p}$$

Esto nos da la primer ecuación para los campos superficiales:

$$\begin{aligned}&e^{-\imath\bar{k}\bar{x}'_p}\Theta(-\tilde{k}_z)\left[\omega\mu_0\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A(\tilde{k}_\perp)+(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}_p))\times R\bar{k}\right]=\\&(-2k_{iz})E_i\Theta(-\tilde{k}_x\sin\varphi-\tilde{k}_z\cos\varphi)\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi-\tilde{k}_z\sin\varphi-k_{ix})\delta(k_y)\hat{p}\end{aligned}\tag{4.16}$$

En el lenguaje usual del IEM hay que escribir la polarización incidente en la base $\{\hat{d},\hat{t}\}$, como lo hicimos en el Capítulo 2. Esta es la primera ecuación que vincula los campos superficiales en A. En realidad es una ecuación para los campos sobre el plano tangente al punto $\bar{x}'_p$, pero como este punto es arbitrario, puede ser cualquier punto de la superficie $A$. Cuando obtengamos una ecuación similar desde (4.12) vamos a poder hallar los campos tangentes a un punto cualquiera de la superficie aleatoria; luego vamos a usar estos campos en el principio de Huygens para calcular el campo dispersado usando el mismo proceso iterativo que describimos en la Sección 2.4. Nos queda por reescribir la ecuación (4.12) en el nuevo sistema de referencia:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)$$

$$\int_{\tilde{A}} d\tilde{s}'\, e^{-\imath \bar{k}'(\bar{x}'_p + R\bar{\tilde{x}}')} \Theta(\hat{\tilde{n}}'_A \bar{k}') \left[-\omega\mu_1 \hat{\tilde{n}}'_A \times \bar{\tilde{H}}_A(\bar{\tilde{x}}') - (\hat{\tilde{n}}'_A \times \bar{\tilde{E}}_A(\bar{\tilde{x}}')) \times R\bar{k}'\right]$$

$$= -\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_0} e^{\imath(k_{1z}+k'_z)D} \frac{\mu_1 k_{2z} - \mu_2 k_{1z}}{\mu_1 k_{2z} + \mu_2 k_{1z}}$$

$$\int_{\tilde{z}'=0} d\tilde{s}'\, e^{-\bar{k}_1(\bar{x}'_p + R\bar{\tilde{x}}')} \Theta(\hat{\tilde{n}}'_A(k_x\hat{x} - k_{1z}\hat{z})) \left[-\omega\mu_1 \hat{\tilde{n}}'_A \times \bar{\tilde{H}}_A(\bar{\tilde{x}}') - (\hat{\tilde{n}}'_A \times \bar{\tilde{E}}_A(\bar{\tilde{x}}')) \times R(\bar{k}_\perp - k'_{1z}\hat{z})\right]$$

Dado que $k_{jz} = \sqrt{\epsilon_j k_0^2 - k_x^2}$ es el módulo de la componente $z$ del vector de onda respecto al sistema fijo debemos transformarla al sistema solidario al plano tangente a $\bar{x}'_p$:

$$k_{jz} = \sqrt{\epsilon_j k_0^2 - k_x^2} \rightarrow \tilde{k}_{jz} = \sqrt{\epsilon_j k_0^2 - (\tilde{k}_x^{(j)} \cos\varphi - k_z^{(j)} \sin\varphi)^2}$$

$$\tilde{k}_{jz}(\tilde{k}_x) = \sqrt{\epsilon_j k_0^2 - \left[\tilde{k}_x^{(j)} \cos\varphi - \sqrt{\epsilon_j k_0^2 - \tilde{k}_x^{(j)2}} \sin\varphi\right]^2}$$

Integrando sobre el plano tangente a $\bar{x}'_p$ obtenemos la segunda ecuación para los campos tangentes a ese punto:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}'\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \Theta\left(\tilde{k}'_z\right) e^{-\imath \bar{k}\bar{x}'_p} \left[-\omega\mu_1 \hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A(\tilde{k}'_\perp) - (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}'_\perp)) \times R\bar{k}'\right]$$

$$= -\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^2} e^{\imath \bar{k}\bar{x}_0} \delta\left(k'^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) \frac{\mu_2 \tilde{k}_{1z} - \mu_1 \tilde{k}_{2z}}{\mu_2 \tilde{k}_{1z} + \mu_1 \tilde{k}_{2z}} e^{\imath(\tilde{k}_{1z}+\tilde{k}'_z)D} \Theta(k_{1z} + k_x \tan\varphi) e^{-\imath \bar{k}_1 \bar{x}'_p}$$

$$e^{-\imath \bar{k}_1 \bar{x}'_p} \left[-\omega\mu_1 \hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A(\tilde{k}_{1\perp}) - (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}_{1\perp})) \times R\bar{k}_1\right]$$

Por lo tanto la segunda ecuación para los modos es

$$\Theta(\tilde{k}'_z) e^{-\imath(\bar{k}-\bar{k}_1)\bar{x}'_p} \left[-\omega\mu_1 \hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A(\tilde{k}'_\perp) - (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}'_\perp)) \times R\bar{k}'\right]$$

$$= -\frac{\mu_2 \tilde{k}_{1z} - \mu_1 \tilde{k}_{2z}}{\mu_2 \tilde{k}_{1z} + \mu_1 \tilde{k}_{2z}} e^{\imath(\tilde{k}_{1z}+\tilde{k}'_z)D} \Theta(k_{1z} + k_x \tan\varphi) \left[-\omega\mu_1 \hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A(\tilde{k}_1 1\perp) - (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}_1 1\perp)) \times R\bar{k}_1\right] \tag{4.17}$$

Ahora tenemos que resolver el par de ecuaciones (4.16)-(4.17). Usaremos una manera recursiva para resolverlas: primero ignoraremos en (4.17) la contribución del plano inferior con lo cual encontraremos una solución a orden cero, lo que debería dar el mismo campo dispersado que el IEM. Luego vamos a corregir esta solución considerando el plano inferior.

**Solución a orden cero para los campos tangenciales**

El par de ecuaciones que debemos resolver es:

$$e^{-\imath\bar{k}\bar{x}'_p}\Theta(-\tilde{k}_z)\left[\omega\mu_0\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp)+(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}_p))\times R\bar{k}\right]$$
$$=(-2k_{iz})E_i\Theta(-\tilde{k}_x\sin\varphi-\tilde{k}_z\cos\varphi)\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi-\tilde{k}_z\sin\varphi-k_{ix})\delta(k_y)\hat{p} \tag{4.18}$$

$$\Theta(\tilde{k}'_z)e^{-\imath(\bar{k}-\bar{k}_1)\bar{x}'_p}\left[-\omega\mu_1\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A^{(0)}(\tilde{k}'_\perp)-(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}'_\perp))\times R\bar{k}'\right]=0 \tag{4.19}$$

Como estamos situados en el plano tangente al punto $\bar{x}'_p$, el cual separa el medio $\epsilon_0$ del medio $\epsilon_1$, podemos usar que la componente tangencial del número de onda se conserva: $\tilde{k}_\perp=\tilde{k}'_\perp$. Esto no es trivial ya que la transformada de los campos quedaron evaluadas en $\tilde{k}_\perp$ y $\tilde{k}'_\perp$. De la segunda ecuación vemos que $\tilde{k}'_z>0$; bajo esta condición obtenemos

$$\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp)=-\frac{1}{\omega\mu_1}(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp))\times R\bar{k}'\ ,\ \ k'_z<0 \tag{4.20}$$

En la primer ecuación debemos usar $\tilde{k}_z<0$ y además que $|\tilde{k}_z|\cos\varphi-\tilde{k}_x\sin\varphi>0$, condición que para ángulos pequeños ($\varphi\ll 1$, superficies suaves en el sentido de Kirchhoff) se verifica. Reemplazando (4.20) en la primer ecuación (y usando que $\mu_0=\mu_1$) llegamos a

$$-(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp))\times(\tilde{k}_x\hat{\tilde{x}}+|\tilde{k}'_z|\hat{\tilde{z}})+(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp))\times(\tilde{k}_x\hat{\tilde{x}}-|\tilde{k}_z|\hat{\tilde{z}})=(-2k_{iz})\delta(k_x-k_{ix})E_ie^{\imath\bar{k}\bar{x}'_p}\delta(k_y)\hat{p}$$

Usando que $k_x=\tilde{k}_x\cos\varphi-\tilde{k}_z\sin\varphi=\tilde{k}_x\cos\varphi+|\tilde{k}_z|\sin\varphi$ (dado que $\tilde{k}_z<0$) podemos reescribir la última ecuación como:

$$(|\tilde{k}_z|+|\tilde{k}'_z|)(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\vec{\tilde{k}}_\perp))\times\hat{\tilde{z}}=-2k_{iz}E_ie^{\imath\bar{k}\bar{x}'_p}\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi-\tilde{k}_z\sin\varphi-k_0\sin\theta_i)\delta(k_y)\hat{p}$$

Notando que $(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp))\times\hat{\tilde{z}}=\bar{\tilde{E}}_{A\perp}^{(0)}(\tilde{k}_\perp)$ es el campo sobre el plano tangente, el mismo queda definido por

$$\bar{\tilde{E}}_{A\perp}^{(0)}(\tilde{k}_\perp)=\frac{2k_{iz}}{|\tilde{k}_z|+|\tilde{k}'_z|}\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi+|\tilde{k}_z|\sin\varphi-k_0\sin\theta_i)\delta(k_y)E_ie^{\imath\bar{k}\bar{x}'_p}\hat{p} \tag{4.21}$$

En el lenguaje del IEM [10] la base solidaria al plano tangente la dan los versores $\left\{\hat{t}, \hat{d}, \hat{n}\right\}$. En nuestra notación esta base quedó definida como $\left\{\hat{\tilde{x}}, \hat{y}, \hat{\tilde{z}}\right\}$. Lo único que nos queda es reescribir la polarización del campo incidente en la base local: $\tilde{\hat{p}} = (\hat{p} \cdot \hat{\tilde{x}})\hat{\tilde{x}} + (\hat{p} \cdot \hat{\tilde{y}})\hat{\tilde{y}}$ teniendo en cuenta la asignación $\hat{t} \to \hat{\tilde{x}}$, $\hat{d} \to \hat{y}$. Mas adelante mostraremos que usando sólo la solución de orden cero recuperamos que el campo dispersado es el coeficiente de Fresnel por el campo incidente.

**Solución a orden uno para los campos tangenciales**

En la ecuación (4.16) la componente cero es la que contiene la reflexión del campo incidente, por lo tanto, en esta ecuación la corrección de los campos debe verificar lo siguiente

$$\Theta(-\tilde{k}_z)\left[\omega\mu_0\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A^{(1)}(\tilde{k}_\perp) + (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A^{(1)}(\tilde{k}_\perp)) \times R\bar{k}\right] = 0$$

Considerando $\tilde{k}_z < 0$ llegamos a

$$\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A^{(1)}(\tilde{k}_\perp) = -\frac{1}{\omega\mu_0}(\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A^{(1)}(\tilde{k}_\perp)) \times (\tilde{k}_x\hat{\tilde{x}} - |\tilde{k}_z|\hat{\tilde{z}}) \tag{4.22}$$

La ecuación (4.17) será resuelta como sigue: en el lado izquierdo tenemos la corrección a los campos, mientras que en lado derecho pondremos la solución a orden cero para los mismos.

$$(\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A^{(1)}(\vec{\tilde{k}}_\perp)) \times (\tilde{k}_x\hat{\tilde{x}} - |\tilde{k}_z|\hat{\tilde{z}}) - (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A^{(1)}(\vec{\tilde{k}}_\perp)) \times (\tilde{k}'_x\hat{\tilde{x}} - |\tilde{k}'_z|\hat{\tilde{z}})$$

$$= \frac{\mu_1\tilde{k}_{2z} - \mu_2\tilde{k}_{1z}}{\mu_1\tilde{k}_{2z} + \mu_2\tilde{k}_{1z}} e^{\imath(\bar{k}'-\bar{k}_1)\bar{x}'_p} e^{\imath(\tilde{k}_{1z}+\tilde{k}'_z)D}\left[-\omega\mu_1\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp) - (\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}_A^{(0)}(\tilde{k}_\perp)) \times R\bar{k}_1\right]$$

$$\bar{\tilde{E}}_{A\perp}^{(1)}(\tilde{k}_\perp) = \frac{\mu_2\tilde{k}_{1z} - \mu_1\tilde{k}_{2z}}{\mu_2\tilde{k}_{1z} + \mu_1\tilde{k}_{2z}} \frac{|\tilde{k}'_z| + \tilde{k}_{1z}}{|\tilde{k}_z| + |\tilde{k}'_z|} e^{\imath(\tilde{k}_{1z}+\tilde{k}'_z)(z'_p+D)} \bar{\tilde{E}}_{A\perp}^{(0)}(\tilde{k}_\perp) \tag{4.23}$$

Esta ecuación, junto con (4.22), nos permitirán calcular cual es la contribución del plano inferior a la dispersión total.

## 4.4. Componente de Kirchhoff para el modelo de capas

Tenemos calculadas las componentes de Fourier de los campos inducidos sobre el plano tangente a un punto genérico de la superficie rugosa. Lo que nos resta por hacer es usar estas componentes para calcular el campo reflejado por el plano tangente. Este cálculo lo usaremos posteriormente para re-escribir el campo dispersado de manera recursiva, usando el método desarrollado en la Sección 2.4. Debería quedar claro que la componente cero que ya calculamos tiene que dar el coeficiente de Fresnel visto por el plano tangente, o sea, un coeficiente de reflexión que dependa del ángulo local en cada punto. La corrección de orden uno acopla el plano inferior y resulta proporcional al coeficiente de Fresnel de la segunda interface corregido por la geometría local del plano tangente, más la trasmisión de la onda desde el medio uno al cero y además una corrección en la fase que proviene del camino óptico realizado por la onda.

El principio de Huygens, el cual da el campo dispersado en la región superior (ecuación 2.18) es:

$$\bar{E}_s(\bar{x}_0) = -\int ds' \left\{ \imath\omega\mu_0 G_0(\bar{x}_0, \bar{x}')\hat{n}'_A \times \bar{H}_A(\bar{x}') - \left(\hat{n}'_A \times \bar{E}_A(\bar{x}')\right) \times \nabla' G_0(\bar{x}_0, \bar{x}') \right\} \tag{4.24}$$

Usando los resultados de la sección anterior vamos a calcular el campo reflejado por el plano tangente al punto $\bar{x}'_p$ de la superficie.

### Contribución de Orden cero

En el sistema de coordenadas solidario al plano tangente la normal es simplemente $\hat{\tilde{z}}$. Para hallar el campo en el punto $\bar{x}'_p$ de la superficie debemos calcular el principio de Huygens el la base local y usar que el punto campo, desde este sistema de referencia, es simplemente $\vec{\tilde{x}} = 0$.

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}} = 0) = -\int_{\tilde{z}'=0} d\tilde{x}dy \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\, e^{-\imath\bar{k}R\vec{\tilde{x}}'}\delta(k^2 - k_0^2)\Theta(k_z\cos\varphi - k_x\sin\varphi)$$

$$\left\{\omega\mu_0\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{H}}^{(0)}(\vec{\tilde{x}}') + \left(\hat{\tilde{z}} \times \bar{\tilde{E}}^{(0)}(\vec{\tilde{x}}')\right) \times \vec{\tilde{k}}\right\}$$

Dado que la única dependencia en $\vec{\tilde{x}}'$ quedó en los campos eléctrico y magnético y en la exponencial, la integral sobre el plano tangente da la transformada de Fourier de ellos en el modo $\tilde{k}_\perp$, por lo tanto

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}}=0) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\delta(k^2-k_0^2)\Theta(k_z\cos\varphi - k_x\sin\varphi)$$

$$\left\{\omega\mu_0\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}^{(0)}(\tilde{k}_\perp) - \left(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}^{(0)}(\tilde{k}_\perp)\right)\times R\bar{k}\right\}$$

Las componente a orden cero de la transformada de los campos están dadas por las expresiones (4.20) y (4.21). Observando que $(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A(\tilde{k}_\perp))\times R\bar{k} = \tilde{k}_z\bar{\tilde{E}}_{A\perp}(\tilde{k}_\perp)$, el principio de Huygens se reduce a

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}}=0) = -\int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^2}\delta(\tilde{k}^2-k_0^2)\Theta(k_z\cos\varphi - k_x\sin\varphi)\left\{-|\tilde{k}_z'|\frac{\omega\mu_0}{\omega\mu_1}+\tilde{k}_z\right\}\bar{\tilde{E}}^{(0)}(\tilde{k}_\perp)$$

donde rotamos los modos de Fourier para hacer más fácil la integral.

$$\begin{aligned}
&\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}}=0) = \\
= \;& -\int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^2}\delta(\tilde{k}^2-k_0^2)\Theta(\tilde{k}_z)\delta(k_y)\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi + |\tilde{k}_z|\sin\varphi - k_0\sin(\theta_i-\varphi)) \\
& \frac{2E_ik_{iz}}{|\tilde{k}_z|+|\tilde{k}_z'|}\left\{-|\tilde{k}_z'|+\tilde{k}_z\right\}e^{\bar{k}\bar{x}_p'}\hat{p}
\end{aligned}$$

Luego de integrar en $\tilde{k}_y$ y de usar la raíz positiva para $\tilde{k}_z$ en la delta que depende de $\tilde{k}^2$, el campo reflejado resulta

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}}=0) = -\int d\tilde{k}_x \frac{E_ik_{iz}}{\sqrt{k_0^2-\tilde{k}_x^2}}\frac{\sqrt{k_0^2-\tilde{k}_x^2}-\sqrt{\epsilon_1k_0^2-\tilde{k}_x^2}}{\sqrt{k_0^2-\tilde{k}_x^2}+\sqrt{\epsilon_1k_0^2-\tilde{k}_x^2}}\delta(\tilde{k}_x\cos\varphi+\sqrt{k_0^2-\tilde{k}_x^2}\sin\varphi-k_{ix})e^{\bar{k}\bar{x}_p'}\hat{p}$$

Para hacer la integral debemos hallar los ceros de la delta de Dirac:

$$\tilde{k}_x \cos\varphi + \sqrt{k_0^2 - \tilde{k}_x^2}\sin\varphi - k_{ix} = 0$$

proponemos: $\tilde{k}_x = k_0 \sin\Phi \ , \tilde{k}_z = k_0 \cos\Phi$

sabemos: $k_{ix} = k_0 \sin\theta_i$

entonces: $\cos\varphi \sin\Phi + \sin\varphi \cos\Phi - \sin\theta_i = 0$

$$\sin(\Phi + \varphi) = \sin\theta_i \Rightarrow \Phi = \theta_i - \varphi$$

por lo tanto: $\tilde{k}_x = k_0 \sin(\theta_i - \varphi) \ \ , \ \ \tilde{k}_z = k_0 \cos(\theta_i - \varphi)$

Con estos valores para $\tilde{k}_x$ y $\tilde{k}_z$ nos queda: $\sqrt{k_0^2 - \tilde{k}_x^2} = k_0\sqrt{1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}$ y $\sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}_x'^2} = k_0\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}$. El campo reflejado resulta

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}} = 0) = \frac{E_i \cos\theta_i}{\cos(\theta_i - \varphi)} \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)} - \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)} + \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}} e^{\imath \bar{k}_r \bar{x}_p'} \hat{p}$$

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}} = 0) = E_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i - \varphi)} \tilde{R}_\perp(\varphi) e^{\imath \bar{k}_r \bar{x}_p'} \hat{p} \tag{4.25}$$

donde $\bar{k}_r = k_0 \sin(\theta_i - \varphi)\hat{x} + k_0 \cos(\theta_i - \varphi)\hat{z}$.

El resultado es el esperado: el campo reflejado es el coeficiente de Fresnel local (depende de $\theta_i - \varphi$) por el campo incidente. Dado que este cálculo se basa en la aproximación de plano tangente, sólo es un buen resultado en los alrededores de $\vec{\tilde{x}} = 0$. Vamos a usar este resultado sólo en ese punto y para cada punto vamos a usar un plano tangente distinto, el cual quedará definido por el ángulo $\tan\varphi = \partial_x z(x)$. Esta elección implica que la normal $\hat{n}$ esté contenida en el plano de incidencia.

Ahora debemos re-escribir este campo en el sistema fijo. Dado que vamos a usar el resultado en $\vec{\tilde{x}} = 0$, sólo debemos transformar la polarización del campo ($\tilde{\hat{p}}$). Como lo único que hicimos es reflejar el campo incidente en un plano, la polarización del campo dispersado debe ser la misma, y esto se ve cuando invertimos el sentido de la rotación para pasar del sistema solidario a $\bar{x}_p'$ al sistema fijo: $R^{-1}\tilde{\hat{p}} = \hat{p}$.

Para obtener este resultado supusimos que la polarización del campo eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia. Podríamos hacer el mismo desarrollo para el caso en que el campo magnético tenga polarización transversa. El desarrollo es análogo, lo único que

debemos hacer es usar el principio de reciprocidad e intercambiar $\mu\bar{H} \to \epsilon\bar{E}$ y $\bar{E} \to -\bar{H}$. El campo magnético reflejado sería

$$\bar{\tilde{H}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}}=0) = H_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i-\varphi)} \frac{\epsilon_1\sqrt{1-\sin^2(\theta_i-\varphi)} - \sqrt{\epsilon_1-\sin^2(\theta_i-\varphi)}}{\epsilon_1\sqrt{1-\sin^2(\theta_i-\varphi)} + \sqrt{\epsilon_1-\sin^2(\theta_i-\varphi)}} e^{\imath\bar{k}_r\bar{x}'_p}\hat{p}$$

$$\bar{\tilde{H}}_r^{(0)}(\vec{\tilde{x}}=0) = H_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i-\varphi)} \tilde{R}_{\parallel}(\varphi) e^{\imath\bar{k}_r\bar{x}'_p}\hat{p} \tag{4.26}$$

Observaciones: en los coeficientes $\tilde{R}_\perp$ y $\tilde{R}_\parallel$ hemos supuesto $\epsilon_0 = 1$. La notación que vamos a usar es que para el modo TE los coeficientes de reflexión y transmisión son $\tilde{R}_{ij\perp}$ y $\tilde{T}_{ij\perp}$, mientras que para el modo TM son $\tilde{R}_{ij\parallel}$ y $\tilde{T}_{ij\parallel}$.

### Contribución de Orden uno

El campo reflejado a orden uno lo calculamos a través de

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}}=0) = -\int d\tilde{x}dy \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{-\imath\bar{k}\vec{\tilde{x}}'} \delta\left(k^2-k_0^2\right)\Theta(k_z\cos\varphi - k_x\sin\varphi)$$
$$\left\{\omega\mu_0\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{H}}_A^{(1)}(\vec{\tilde{x}}') + \left(\hat{\tilde{z}}\times\bar{\tilde{E}}_A^{(1)}(\vec{\tilde{x}}')\right)\times R\bar{k}\right\}$$

Integrando sobre el plano tangente (definido por $\tilde{z}=0$) hallamos la transformada de Fourier de los campos en el modo $\tilde{k}_\perp$. Usamos el par de ecuaciones (4.22)-(4.23) para estos modos. La integral en el espacio de Fourier es sencilla ya que los modos involucrados son los ceros de la delta de Dirac, los cuales ya calculamos para calcular la contribución cero. Después de reemplazar el campo magnético por (4.22) llegamos a,

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}}=0) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}\delta\left(k^2-k_0^2\right)\Theta(k_z\cos\varphi - k_x\sin\varphi)2|\tilde{k}_z|\bar{\tilde{E}}_{A\perp}^{(1)}(\tilde{k}_\perp)$$

Como hicimos en la solución a orden cero, rotamos los modos para hacer la cuenta más sencilla. Usando (4.23) tenemos

$$\bar{\tilde{E}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}}=0) = -\int \frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^2)}\delta\left(\tilde{k}^2-k_0^2\right)\Theta(\tilde{k}_z)2k_{iz}E_i\frac{\mu_2\tilde{k}_{1z}-\mu_1\tilde{k}_{2z}}{\mu_2\tilde{k}_{1z}+\mu_1\tilde{k}_{2z}}\frac{|\tilde{k}'_z|+\tilde{k}_{1z}}{|\tilde{k}_z|+|\tilde{k}'_z|}\frac{2|\tilde{k}_z|}{|\tilde{k}_z|+|\tilde{k}'_z|}$$
$$e^{\imath(\tilde{k}'_z+\tilde{k}_{1z})(z'_p+D)}e^{\imath\bar{k}\bar{x}'_P}\delta\left(\tilde{k}_x\cos\varphi+|\tilde{k}_z|\sin\varphi-k_{ix}\right)\delta(k_y)\hat{p}$$

El procedimiento es similar al hecho para calcular el campo de orden cero. Tenemos la misma delta de Dirac que en el caso anterior, por lo tanto, los modos sobre los cuales queda evaluada la integral son los mismos: $\tilde{k}_x = k_0 \sin(\theta_i - \varphi)$ y $\tilde{k}_z = k_0 \cos(\theta_i - \varphi)$. Lo que debemos calcular con cuidado son los prefactores que acompañan a las exponenciales.

Vamos a comenzar por el cociente entre $\tilde{k}_{jz}$, que debería ser el coeficiente de Fresnel de la interface 1-2.

$$\tilde{k}_{1z} = \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \left[\tilde{k}_x \cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}_x^2}\sin\varphi\right]^2}$$

$$\tilde{k}_{1z} = k_0\sqrt{\epsilon_1 - \left[\sin(\theta_i - \varphi)\cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}\sin\varphi\right]^2}$$

$$\tilde{k}_{2z} = k_0\sqrt{\epsilon_2 - \left[\sin(\theta_i - \varphi)\cos\varphi - \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}\sin\varphi\right]^2}$$

$$\tilde{R}_{12\perp}(\varphi) = \frac{\tilde{k}_{1z} - \tilde{k}_{2z}}{\tilde{k}_{1z} + \tilde{k}_{2z}}$$

Este resultado es el esperado: el factor $R_{12\perp}(\varphi)$ que se obtiene de reemplazar los modos $k_{1z}$ y $k_{2z}$ es el coeficiente de Fresnel entre la interface 1-2 visto desde un sistema solidario al plano tangente al punto $\bar{x}_0'$. Cuando $\varphi = 0$ el resultado se reduce a la expresión usual.

Seguimos con el segundo prefactor:

$$\frac{\tilde{k}_z' + \tilde{k}_{1z}}{|\tilde{k}_z| + |\tilde{k}_z'|} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}_x^2} + \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \left[\tilde{k}_x \cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}_x^2}\sin\varphi\right]^2}}{\sqrt{k_0^2 - \tilde{k}_x^2} + \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}_x^2}}$$

$$\frac{\tilde{k}_z' + \tilde{k}_{1z}}{|\tilde{k}_z| + |\tilde{k}_z'|} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)} + \sqrt{\epsilon_1 - \left[\sin(\theta_i - \varphi)\cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}\sin\varphi\right]^2}}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)} + \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}}$$

Este resultado también tiene una interpretación inmediata: es el coeficiente de transmisión cuando la onda pasa del medio con $\epsilon_1$ al medio con $\epsilon_0$ a través del plano tangente. Esto es claro cuando tomamos el límite $\varphi = 0$. Vamos a llamar a este prefactor $\tilde{T}_{10}(\varphi)$.

El tercer prefactor se reduce a

$$\frac{2|\tilde{k}_z|}{|\tilde{k}_z| + |\tilde{k}_z'|} = \frac{2\sqrt{1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)} + \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}}$$

Y es el coeficiente de transmisión del medio cero al medio uno a través del plano tangente, $\tilde{T}_{01}(\varphi)$.

Seguimos con la exponencial que tiene el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{1z} + \tilde{k}'_z &= \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \left[\tilde{k}'_x \cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}'^2_x}\sin\varphi\right]^2} + \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - \tilde{k}'^2_x} \\
&= k_0 \left[ [\sqrt{\epsilon_1 - \left[\sin(\theta_i - \varphi)\cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}\sin\varphi\right]^2} + \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i - \varphi)}\right] \\
&= k_0 \Delta(\varphi)
\end{aligned}$$

Para superficies suaves vale que $\varphi << 1$; y para ángulos pequeños $\partial_x z(x) = \tan\varphi \approx \varphi$. Podemos aproximar este factor como,

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi) &\approx 2\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta_i} + \left(\sin\theta_i + \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_i}{\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta_i}}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \mathcal{O}((\partial_x z)^2) \\
\Delta(\varphi) &\approx 2\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta_i} + \xi\partial_x z(x) + \mathcal{O}((\partial_x z)^2) \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

El factor $\Delta(\varphi)$ también tiene una rápida interpretación: $\Delta(\varphi = 0) = 2k_{1z}$. Este factor está multiplicado por $z_p + D$ en la exponencial y muestra la fase que adquiere la onda al recorrer dos veces la distancia entre la primera interface y la segunda cuando las mismas son paralelas. A primer orden en $z$ y su derivada, la fase se reduce a

$$k_0\Delta(\varphi)(z'_p + D) \approx 2\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta_i}k_0(z'_p + D) + k_0 D\xi\partial_x z'(x'_p)$$

Usando todos estos prefactores y exponenciales el campo reflejado a orden uno toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\bar{\tilde{E}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}} = 0) &= -E_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i - \varphi)}\tilde{R}_{12\perp}(\varphi)\tilde{T}_{01\perp}(\varphi)\tilde{T}_{10\perp}(\varphi)e^{\imath\Delta(\varphi)k_0(z'_p+D)}e^{\imath\bar{k}_r\bar{x}'_p}\hat{p} \\
\bar{\tilde{E}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}} = 0) &= -E_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i - \varphi)}\tilde{A}_\perp(\varphi)e^{\imath\Delta(\varphi)k_0(z'_p+D)}e^{\imath\bar{k}_r\bar{x}'_p}\hat{p} \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Para el caso TM tenemos

$$\bar{\tilde{H}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}}=0) = H_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i-\varphi)} \tilde{R}_{12\|}(\varphi)\tilde{T}_{01\|}(\varphi)\tilde{T}_{10\|}(\varphi) e^{\imath\Delta(\varphi)k_0(z'_p+D)} e^{\imath\bar{k}_r\bar{x}'_p}\hat{p}$$
$$\bar{\tilde{H}}_r^{(1)}(\vec{\tilde{x}}=0) = H_i \frac{\cos\theta_i}{\cos(\theta_i-\varphi)} \tilde{A}_{\|}(\varphi) e^{\imath\Delta(\varphi)k_0(z'_p+D)} e^{\imath\bar{k}_r\bar{x}'_p}\hat{p} \tag{4.29}$$

siendo los coeficientes

$$\tilde{R}_{12\|}(\varphi) = \frac{\epsilon_2 k_{1z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}}$$

$$\tilde{T}_{10\|}(\varphi) = \frac{\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2(\theta_i-\varphi)} + \sqrt{\epsilon_1 - \left[\sin(\theta_i-\varphi)\cos\varphi - \sqrt{\epsilon_1-\sin^2(\theta_i-\varphi)}\sin\varphi\right]^2}}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_i-\varphi)} + \sqrt{\epsilon_1-\sin^2(\theta_i-\varphi)}}$$

$$\tilde{T}_{01\|}(\varphi) = \frac{2\epsilon_1\sqrt{1-\sin^2(\theta_i-\varphi)}}{\epsilon_1\sqrt{1-\sin^2(\theta_i-\varphi)} + \sqrt{\epsilon_1-\sin^2(\theta_i-\varphi)}}$$

La corrección que obtuvimos es proporcional a los coeficientes de transmisión entre los medios $0-1$, al de reflexión entre 1 y 2 y al de transmisión del medio 1 hacia el vacío. El resultado se obtuvo partiendo de un planteo autoconsistente para los campos: propusimos que en las regiones superior e intermedia hay dos campos, uno que se propaga en $\hat{z}$ y otro en $-\hat{z}$; en la última región sólo hay campo en la dirección $\hat{z}$. Lo que nos queda por hacer es escribir el campo de manera explícita con los resultados obtenidos en esta Sección, y luego calcular el valor medio del mismo.

## 4.5. Campo dispersado

En la Sección 2.4 hemos mostrado cómo escribir el campo dispersado por una superficie a través de una ecuación integral (Principio de Huygens) y cómo se usa la aproximación de plano tangente para resolver la misma. Mostramos también que la ecuación integral puede ser resuelta proponiendo dos términos, el de Kirchhoff y el complementario. Concretamente, mostramos que el campo dispersado (ecuación (2.64)) se puede escribir como:

$$\bar{E}_s(\bar{x}_0) = \frac{1}{4\pi}\int ds' \ \left[\imath\omega\mu_0\, G_0(\bar{x}_0,\bar{x}')\hat{n}'_A \times \bar{H}_k(\bar{x}') + \left(\hat{n}'_A \times \bar{E}_k(\bar{x}')\right) \times \nabla' G_0(\bar{x}_0,\bar{x}')\right]$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int ds' \ \left[\imath\omega\mu_0\, G_0(\bar{x}_0,\bar{x}')\hat{n}'_A \times \bar{H}_c(\bar{x}') + \left(\hat{n}'_A \times \bar{E}_c(\bar{x}')\right) \times \nabla' G_0(\bar{x}_0,\bar{x}')\right] \tag{4.30}$$

Debemos remarcar lo siguiente: en esta expresión, tanto el campo de Kirchhoff ($\bar{E}_k(\bar{x}')$) como el complementario ($\bar{E}_c(\bar{x}')$) dependen de $\bar{E}_r(\bar{x}')$ y que éste es el campo reflejado por el plano tangente a la superficie $A$ en el punto $\bar{x}'$. Este campo ahora lo calculamos considerando que debajo de la superficie aleatoria hay una interface plana a una distancia $D$ de la misma. El campo que obtuvimos es $\bar{E}_{A\perp}(\bar{x}') = \bar{E}^{(0)}_{A\perp}(\bar{x}') + \bar{E}^{(1)}_{A\perp}(\bar{x}')$, donde la componente cero sólo tiene en cuenta el plano tangente al punto $\bar{x}'$ de la superficie rugosa y la componente uno da la contribución del plano inferior. Por lo tanto, cuando calculemos explícitamente el campo dispersado la componente cero debe dar el mismo resultado que el método integral usual [10] y la componente uno da la corrección por tener una interface debajo de la superficie $A$.

El campo dispersado en la región de campo lejano [20] está dado por la ecuación (2.65):

$$\bar{E}_s(\bar{x}_0) = C\int ds' \ \left[\omega\mu_0\hat{n}'_A \times \bar{H}_k(\bar{x}') + \bar{k}_s \times \left(\hat{n}'_A \times \bar{E}_k(\bar{x}')\right)\right] e^{\imath\bar{k}_s\bar{x}'}$$
$$+C\int ds' \ \left[\omega\mu_0\hat{n}'_A \times \bar{H}_c(\bar{x}') + \bar{k}_s \times \left(\hat{n}'_A \times \bar{E}_c(\bar{x}')\right)\right] e^{\imath\bar{k}_s\bar{x}'} \tag{4.31}$$

donde $C = -\frac{\imath e^{\imath k_0 R}}{4\pi R}$.

Ahora tenemos que escribir de manera explícita el campo de Kirchhoff usando los resultados desarrollados en la Sección anterior. Este campo, escrito para una polarización arbitraria, debe contar con la contribución del modo TE (asociado al subíndice $\perp$ y a la dirección $\hat{t}$) dada por las ecuaciones (4.25)-(4.28) y con la contribución TM (subíndice $\|$ y dirección $\hat{d}$) dada por las ecuaciones (4.26)-(4.29).

Cualquier polarización incidente se puede expresar en la base local definida por los versores $\hat{t}$ y $\hat{d}$, los cuales definen el plano ortogonal a $\bar{k}_i$. Recordar que en el modo TE el campo magnético se define a partir del eléctrico como $\bar{H} = \frac{1}{\eta}\hat{k} \times \bar{E}(\bar{x})$ mientras que en el modo TM tenemos $\bar{E} = -\eta\hat{k} \times \bar{H}(\bar{x})$, donde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ es la impedancia del medio en donde se propaga la onda.

El campo de Kirchhoff, desarrollado en la base local, multiplicado por la normal a la superficie (que es lo que debemos calcular para obtener el campo dispersado) es entonces

$$\hat{n}\times\bar{E}_k(\bar{x}) = \frac{1}{2}\hat{n}\times\left[\bar{E}_{i\perp}(\bar{x})+\bar{E}_{r\perp}(\bar{x})+\bar{E}_{i\parallel}(\bar{x})+\bar{E}_{r\parallel}(\bar{x})\right]$$
$$\hat{n}\times\bar{E}_k(\bar{x}) = \frac{1}{2}E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}}\left[1+\tilde{R}_{01\perp}(\varphi)+\tilde{A}_\perp(\varphi)e^{\imath 2\sqrt{\epsilon_1-\sin^2\theta_i}k_0(z+D)}e^{\imath K_0 D\xi z'_x}\right](\hat{p}\cdot\hat{t})\hat{n}\times\hat{t}$$
$$+\frac{1}{2}E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}}\left[1-\tilde{R}_{01\parallel}(\varphi)-\tilde{A}_\parallel(\varphi)e^{\imath 2\sqrt{\epsilon_1-\sin^2\theta_i}k_0(z+D)}e^{\imath k_0 D\xi z'_x}\right](\hat{p}\cdot\hat{d})\hat{n}\times\hat{d} \tag{4.32}$$

Aunque este desarrollo para la componente de Kirchhoff del campo eléctrico es completo y correcto, se pueden dar sin embargo otros desarrollos que van a resultar más útiles cuando se tenga que calcular el campo dispersado en un canal determinado. Vamos a re-escribir la expresión usando que la polarización del campo eléctrico incidente se puede escribir como $\hat{p} = (\hat{p}\cdot\hat{t})\hat{t} + (\hat{p}\cdot\hat{d})\hat{d}$.

$$\hat{n}\times\bar{E}_k(\bar{x}) = \hat{n}\times\left[(1+C_\perp)\left(\hat{p}\cdot\hat{t}\right)\hat{t}+(1-C_\parallel)\left(\hat{p}\cdot\hat{d}\right)\hat{d}\right]E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}}$$
$$\hat{n}\times\bar{E}_k(\bar{x}) = \hat{n}\times\left[(1+C_\perp)\hat{p}-(C_\perp+C_\parallel)\left(\hat{p}\cdot\hat{d}\right)\hat{d}\right]E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}} \tag{4.33}$$
$$\hat{n}\times\bar{E}_k(\bar{x}) = \hat{n}\times\left[(1-C_\parallel)\hat{p}+(C_\perp+C_\parallel)\left(\hat{p}\cdot\hat{t}\right)\hat{t}\right]E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}} \tag{4.34}$$

con

$$C_\perp = \tilde{R}_{01\perp}(\varphi)+\tilde{A}_\perp(\varphi)e^{\imath 2\sqrt{\epsilon_1-\sin^2\theta_i}k_0(z+D)}e^{\imath k_0 D\xi z'_x}$$
$$C_\parallel = \tilde{R}_{01\parallel}(\varphi)+\tilde{A}_\parallel(\varphi)e^{\imath 2\sqrt{\epsilon_1-\sin^2\theta_i}k_0(z+D)}e^{\imath k_0 D\xi z'_x}$$

Cuando la polarización incidente es horizontal (caso TE) tenemos que $\hat{h}\cdot\hat{d} << 1$, por lo tanto podemos retener solamente el término que es proporcional a $1+C_\perp$; cuando el campo incidente tiene polarización vertical $\hat{v}\cdot\hat{t} << 1$ y sólo retenemos el término con $1-C_\parallel$. La ventaja de estas expresiones es que no dependen de los versores $\hat{t}$ y $\hat{d}$, los cuales dependen del punto de la superficie.

Con el fin de calcular el campo dispersado nos quedaremos con las siguientes expresiones:

- canal HH: $\hat{n}\times\bar{E}_{kH} \approx E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}}\left(1+C_\perp\right)\hat{n}\times\hat{h}$
- canal VV: $\hat{n}\times\bar{E}_{kV} \approx E_i e^{\imath\bar{k}_i\bar{x}}\left(1-C_\parallel\right)\hat{n}\times\hat{v}$

- canal VH o HV: $\hat{n} \times \bar{E}_{kcross} E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \approx \left[1 - \frac{1}{2}\left(C_{\parallel} - C_{\perp}\right)\right] \hat{n} \times \hat{p}$

La expresión para los canales de polarización cruzada se obtiene de tomar el promedio de las dos descomposiciones posibles para el campo de Kirchhoff.

Análogamente, para el campo magnético tenemos,

$$\begin{aligned}
\hat{n} \times \bar{H}_k(\bar{x}) &= \frac{1}{2}\hat{n} \times \left[\bar{H}_{i\perp}(\bar{x}) + \bar{H}_{r\perp}(\bar{x}) + \bar{H}_{i\parallel}(\bar{x}) + \bar{H}_{r\parallel}(\bar{x})\right] \\
\eta\hat{n} \times \bar{H}_k(\bar{x}) &= -\frac{1}{2} E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \left[1 + \tilde{R}_{01\parallel}(\varphi) + \tilde{A}_{\parallel}(\varphi)\varphi e^{\imath 2\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta_i} k_0 (z+D)} e^{\imath k_0 D \xi z'_x}\right] (\hat{p}\cdot \hat{d})\hat{n} \times \hat{t} \\
&-\frac{1}{2} E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \left[1 - \tilde{R}_{01\perp}(\varphi) - \tilde{A}_{\perp}(\varphi) e^{\imath 2\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta_i} k_0 (z+D)} e^{\imath k_0 D \xi z'_x}\right] (\hat{p}\cdot \hat{t})\hat{n} \times \hat{d} \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Además de usar la descomposición para la polarización incidente, usamos que $\hat{d} = \hat{k}_i \times \hat{t}$ y $\hat{t} = -\hat{k}_i \times \hat{d}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_k &= \hat{n} \times \left[(1 - C_{\perp})\left(\hat{p}\cdot \hat{t}\right)\hat{d} - \left(1 + C_{\parallel}\right)\left(\hat{p}\cdot \hat{d}\right)\hat{t}\right] E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \\
\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_k &= \hat{n} \times \left\{\hat{k}_i \left[(1 - C_{\perp})\left(\hat{p}\cdot \hat{t}\right)\hat{t} + \left(1 + C_{\parallel}\right)\left(\hat{p}\cdot \hat{d}\right)\hat{d}\right]\right\} E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \\
\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_k &= \hat{n} \times \left\{\hat{k}_i \left[(1 - C_{\perp})\,\hat{p} + \left(C_{\perp} + C_{\parallel}\right)\left(\hat{p}\cdot \hat{d}\right)\hat{d}\right]\right\} E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \qquad (4.36) \\
\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_k &= \hat{n} \times \left\{\hat{k}_i \left[\left(1 + C_{\parallel}\right)\hat{p} - \left(C_{\perp} + C_{\parallel}\right)\left(\hat{p}\cdot \hat{t}\right)\hat{t}\right]\right\} E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Recordando que $\hat{p}$ marca la polarización del campo eléctrico incidente, las expresiones que vamos a usar para cada canal son,

- canal HH: $\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_{kH} \approx E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} (1 - C_{\perp})\, \hat{n} \times \left(\hat{k}_i \times \hat{h}\right)$
- canal VV: $\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_{kV} \approx E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \left(1 + C_{\parallel}\right) \hat{n} \times \left(\hat{k}_i \times \hat{v}\right)$
- canal VH o HV: $\omega\mu_0 \hat{n} \times \bar{H}_{kcross} \approx E_i e^{\imath \bar{k}_i \bar{x}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(C_{\parallel} - C_{\perp}\right)\right] \hat{n} \times \left(\hat{k}_i \times \hat{p}\right)$

Con estas expresiones vamos a calcular el campo dispersado $E_{qp}$ en donde el subíndice $p$ indica la polarización incidente y $q$ la dispersada. Primero desarrollamos los canales co-polarizados y luego los canales cruzados.

- Canal HH: debemos tomar el producto escalar entre el vector $\hat{h}_s$ y la expresión (4.31). Considerando la componente de Kirchhoff que calculamos para el canal HH tenemos que

$$
\begin{aligned}
E_{hh}(\bar{x}_0) &= \hat{h}_s\cdot \bar{E}_s(\bar{x}_0) = C\int ds' \left[\omega\mu_0\hat{h}_s\left(\hat{n}'_A\times\bar{H}_k(\bar{x}')\right)+\hat{h}_s\left(\bar{k}_s\times\left(\hat{n}'_A\times\bar{E}_k(\bar{x}')\right)\right)\right]e^{\imath\bar{k}_s\bar{x}'}\\
E_{hh}(\bar{x}_0) &= C\int ds' \left[(1-C_\perp)\hat{h}_s\cdot\left(\hat{n}\times\left(\hat{k}_i\times\hat{h}\right)\right)+(1+C_\perp)\hat{h}_s\cdot\left(\hat{k}_s\times\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'}\\
E_{hh}(\bar{x}_0) &= C\int ds' \left[(1-C_\perp)\hat{h}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})+(1+C_\perp)\left(\hat{h}_s\times\hat{k}_s\right)\cdot\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'}\\
E_{hh}(\bar{x}_0) &= C\int ds' \left[(1-C_\perp)\hat{h}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})+(1+C_\perp)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'} \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

- De manera similar, multiplicando por $\hat{v}_s$, calculamos el canal VV:

$$
\begin{aligned}
E_{vv}(\bar{x}_0) &= \hat{v}_s\cdot \bar{E}_s(\bar{x}_0) = C\int ds' \left[\omega\mu_0\hat{v}_s\left(\hat{n}'_A\times\bar{H}_k(\bar{x}')\right)+\hat{h}_s\left(\bar{k}_s\times\left(\hat{n}'_A\times\bar{E}_k(\bar{x}')\right)\right)\right]e^{\imath\bar{k}_s\bar{x}'}\\
E_{vv}(\bar{x}_0) &= C\int ds' \left[(1+C_\parallel)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{n}\times\left(\hat{k}_i\times\hat{v}\right)\right)+(1-C_\parallel)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{k}_s\times(\hat{n}\times\hat{v})\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'}\\
E_{vv}(\bar{x}_0) &= C\int ds' \left[-(1+C_\parallel)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)-(1-C_\parallel)\left(\hat{v}_s\times\hat{k}_s\right)\cdot(\hat{n}\times\hat{v})\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'}\\
E_{vv}(\bar{x}_0) &= C\int ds' \left[-(1+C_\parallel)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)-(1-C_\parallel)\hat{h}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'} \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

- Análogamente, para el canal cruzado obtenemos

$$
\begin{aligned}
E_{vh}(\bar{x}_0) &= \hat{v}_s\cdot \bar{E}_s(\bar{x}_0) = C\int ds' \left[\omega\mu_0\hat{v}_s\left(\hat{n}'_A\times\bar{H}_k(\bar{x}')\right)+\hat{h}_s\left(\bar{k}_s\times\left(\hat{n}'_A\times\bar{E}_k(\bar{x}')\right)\right)\right]e^{\imath\bar{k}_s\bar{x}'}\\
E_{vh}(\bar{x}_0) &= K\int ds' \left[(1+C_\times)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{n}\times\left(\hat{k}_i\times\hat{h}\right)\right)+(1-C_\times)\hat{v}_s\cdot\left(\hat{k}_s\times\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'}\\
E_{vh}(\bar{x}_0) &= K\int ds' \left[(1+C_\times)\hat{v}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})+(1-C_\times)\left(\hat{v}_s\times\hat{k}_s\right)\cdot\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'}\\
E_{vh}(\bar{x}_0) &= K\int ds' \left[(1+C_\times)\hat{v}_s\cdot(\hat{n}\times\hat{v})-(1-C_\times)\hat{h}_s\cdot\left(\hat{n}\times\hat{h}\right)\right]e^{\imath(\bar{k}_i-\bar{k}_s)\bar{x}'} \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

donde $C_\times = \frac{1}{2}(C_\parallel - C_\perp)$. Vamos a usar también $R = \frac{1}{2}(R_\parallel(0) - R_\perp(0))$ y $A^{(1)} = \frac{1}{2}(A^{(1)}_\parallel(0) - A^{(1)}_\perp(0))$.

Lo que nos queda por resolver es el cálculo de los valores medios. Pero aquí debemos tomar un camino diferente al realizado por el cálculo usual [10, 11, 12, 24, 25]. En estos desarrollos se podía realizar una integración por partes para reescribir las derivadas de la

superficie (que provienen exclusivamente de los productos escalares que involucran a $\hat{n}$) como el cociente $(k_{sx} - k_{ix})/(k_{sz} - k_{iz})$. La condición para poder hacer esta sustitución era que los coeficientes de Fresnel deben ser constantes. En cambio, nuestros coeficientes $C_\alpha$ ($\alpha = \perp, \|$) dependen de la derivada de la superficie a través del ángulo $\varphi = z'_x$. Una primer aproximación es poner $\varphi = 0$; esto se puede hacer en los coeficientes de Fresnel y de transmisión, pero no en los factores exponenciales ya que si se anula la derivada se pierde la información de la segunda interface. Nuestro objetivo es entonces calcular valores medios de un campo estocástico que depende de las variables espaciales a través de las derivadas de su término aleatorio ($z_x$ , $z_y$). En la siguiente Sección vamos a desarrollar brevemente la técnica que usaremos para calcular estos valores medios. Concretamente, usaremos métodos funcionales [40, 41, 42, 43] para calcular los valores medios, los cuales usaremos en lo que resta de este trabajo, tanto para calcular los valores medios del problema de dos capas como en el problema de medios no homogéneos que desarrollaremos en la parte final de esta tesis.

## 4.6. Valor medio del campo dispersado - Métodos funcionales

Nuestro objetivo es calcular valores medios del campo eléctrico dispersado por una superficie aleatoria cuando éste tiene una dependencia no trivial en la variable aleatoria. Una manera de llevar adelante el cálculo es usar métodos funcionales (o funcionales generatrices), los que son frecuentemente usados en teorías estadísticas de campos [40, 41, 42, 43] para calcular de manera perturbativa funciones de Green (valores de expectación de los campos físicos respecto al estado fundamental).

Nuestra variable de interés es un campo escalar, ya que queremos calcular los valores medios de $E_{sqp}$. El carácter estocástico de este campo lo da su dependencia con la función $z(\bar{x})$ y sus derivadas direccionales, donde $z(\bar{x})$ es la función que da la altura de la superficie aleatoria y la cual tiene una distribución de probabilidad $\mathcal{P}[z(\bar{x})]$.

En particular, el campo escalar con el que debemos trabajar depende en forma polinómica de la variable $z(\bar{x})$, el cual podemos escribir esquemáticamente de la siguiente manera:

$$E_{sqp} = K \int ds\, e^{\imath \bar{k}_\perp \bar{x}} e^{\imath k_z z} \left[ \left( a_j + b_j\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) z_j + \left( a_{ij} + b_{ij}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) z_i z_j \right] \quad (4.41)$$

En lo sucesivo vamos a adoptar la convención de Einstein respecto a índices repetidos: $a_j z_j = a_0 z + a_x z_x + a_y z_y$. El subíndice $j$ marca la derivada direccional sobre $z$; cuando $j = 0$ no se efectúa derivada alguna. Los coeficientes $a_j$, $b_j$, $a_{ij}$ y $b_{ij}$ son factores geométricos que provienen de la descomposición de la onda incidente en el sistema de coordenadas local $\{\hat{d}; \hat{t}, \hat{n}\}$ y que se obtienen escribiendo explícitamente las ecuaciones (4.38), (4.39) y (4.40). Los parámetros presentes en esta ecuación son:

$$\begin{cases} C = \frac{k_i}{4\pi R} \\ \kappa = k_i \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta} \\ \xi = k_i D \left( \sin\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta}} \right) \end{cases}$$

Además, para abreviar notación, hemos escrito que la resta entre el número de onda dispersado e incidente es simplemente $\bar{k}_{s\perp} - \bar{k}_{i\perp} = \bar{k}_\perp$ y $k_{sz} - k_{iz} = k_z$.

La ventaja de los métodos funcionales se basa en introducir una variable auxiliar que permita escribir de manera sistemática el cálculo de los valores medios. Esto se consigue definiendo una *corriente externa* $J(x)$ de manera tal que cualquier función polinómica de la variable estocástica se escriba como derivadas sucesivas respecto a esta corriente. Para ello, basta notar lo siguiente:

$$z_j = \frac{1}{\imath} \frac{\partial}{\partial J_j} e^{\imath J^c z_c} \Big|_{J^c=0} \tag{4.42}$$

Cuando el subíndice $j$ es cero significa que no se debe efectuar variación alguna, ya que el coeficiente $a_0$ es independiente de las derivadas direccionales de $z$. El campo estocástico puede ser reescrito a partir de las corrientes externas como sigue:

$$\begin{aligned} E_{sqp} = C \int ds\, e^{\imath \bar{k}_\perp \bar{x}} e^{\imath k_z z} \quad & \Bigg[ \left( a_j + b_j\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) \frac{1}{\imath} \frac{\partial}{\partial J_j} e^{\imath J^c z_c} \\ & + \left( a_{ij} + b_{ij}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) \frac{1}{\imath^2} \frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} e^{\imath J^c z_c} \Bigg] \Big|_{J=0} \end{aligned} \tag{4.43}$$

Ahora debemos usar la definición del valor medio. Dado un campo estocástico $F[z(x)]$ que tiene una dependencia polinómica en $z(x)$, el valor medio del mismo puede ser calculado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
< F[z(x)] > \quad &= \int \mathcal{D}z\ \mathcal{P}[z(x)] z^n(x) \\
< F[z(x)] > \quad &= \int \mathcal{D}z\ \mathcal{P}[z(x)] \frac{1}{\imath^n} \frac{\partial^n}{\partial J^n} e^{\imath J\ z(x)} \Big|_{J=0} \\
< F[z(x)] > \quad &= \frac{1}{\imath^n} \frac{\partial^n}{\partial J^n} \left[ \int \mathcal{D}z\ \mathcal{P}[z(x)] e^{\imath J\ z(x)} \right] \Big|_{J=0}
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

en donde $\mathcal{D}z$ indica la suma sobre todas las realizaciones posibles de $z(x)$ las cuales tienen una densidad de probabilidad $\mathcal{P}[z(x)]$. Esta idea puede ser extendida de igual manera a las derivadas direccionales de $z(\bar{x})$ usando las variables auxiliares $J_x$ y $J_y$.

Por lo tanto, el valor medio del campo dispersado resulta:

$$
\begin{aligned}
\langle E_{sqp} \rangle = K \int ds\ e^{\imath \bar{k}_\perp \bar{x}} \Bigg[ a_j \frac{1}{\imath} \frac{\partial}{\partial J_j} \left\langle e^{\imath k_z z}\ e^{\imath J^c z_c} \right\rangle + b_j\ e^{\imath \kappa D} \frac{1}{\imath} \frac{\partial}{\partial J_j} \left\langle e^{\imath(\kappa + k_z) z}\ e^{\imath (J^c z_c + \xi z_x)} \right\rangle \\
+ a_{ij} \frac{1}{\imath^2} \frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} \left\langle e^{\imath k_z z}\ e^{\imath J^c z_c} \right\rangle + b_{ij}\ e^{\imath \kappa D} \frac{1}{\imath^2} \frac{\partial^2}{\partial J_i \partial J_j} \left\langle e^{\imath(\kappa + k_z) z}\ e^{\imath (J^c z_c + \xi z_x)} \right\rangle \Bigg] \Big|_{J=0}
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

Como en todos los casos en esta tesis, asumiremos que la superficie estocástica tiene una distribución gaussiana de alturas con valor medio nulo. Un resultado básico que necesitamos para calcular valores medios de $z(\bar{x})$ o sus derivadas (y que está detallado en el Apéndice C) es el siguiente:

$$
\left\langle e^{\imath(az + bz_x + cz_y)} \right\rangle = \left\langle \exp \left[ \imath \int d\eta z(\eta) \left( a\delta(x-\eta) + b \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-\eta) + c \frac{\partial}{\partial y} \delta(x-\eta) \right) \right] \right\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e^{\imath(az + bz_x + cz_y)} \right\rangle = \quad & \exp \Bigg[ -\frac{\sigma^2}{2} \int d\eta d\eta' \left\{ a\ \delta(x-\eta) + b\ \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-\eta) + c\ \frac{\partial}{\partial y} \delta(x-\eta) \right\} \\
& \rho(\eta, \eta') \left\{ a\ \delta(x-\eta') + b\ \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-\eta') + c\ \frac{\partial}{\partial y} \delta(x-\eta') \right\} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle e^{\imath(az + bz_x + cz_y)} \right\rangle = \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \left( a^2 + b^2 \alpha + c^2 \beta + 2bc\gamma \right) \right] \tag{4.46}
$$

donde usamos que $\sigma$ es el valor rms de $z(\bar{x})$, que la función de autocorrelación está normalizada en el origen ($\rho(0) = 1$), sus derivadas primeras se anulan en ese punto y sus derivadas segundas son $\alpha = \rho''_{xx}(0)$, $\beta = \rho''_{yy}(0)$ y $\gamma = \rho''_{xy}(0)$.

Para calcular los distintos términos del valor medio del campo dispersado sólo hay que tomar las variaciones correspondientes en la ecuación (4.46). Por ejemplo, para el término con $a_x$ tenemos que poner $a = k_z$, $b = J^x$, $c = 0$ y tomar la variación respecto a $J_x$:

$$\begin{aligned}
\left\langle z_x\, e^{\imath k_z z}\right\rangle &= \frac{\partial}{\partial J^x}\left\langle e^{\imath(k_z z + J^x z_x)}\right\rangle\Big|_{J=0} \\
\left\langle z_x\, e^{\imath k_z z}\right\rangle &= \frac{\partial}{\partial J^x} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\left[k_z^2 + J^{x2}\alpha\right]}\Big|_{J=0} \\
\left\langle z_x\, e^{\imath k_z z}\right\rangle &= \left[2\alpha\, J^x\, e^{-\frac{1}{2}k_z^2\sigma^2}\right]\Big|_{J=0} = 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

De manera similar, el término que es proporcional a $a_y$ se anula. El término que es proporcional a $a_0$ es distinto de cero porque no hay que efectuar variaciones respecto a las corrientes; sólo debemos evaluar (4.46) en $a = k_z$, $b = c = 0$. Para calcular los términos proporcionales a $b_j$ hay que usar el funcional generador en el punto $a = k_z + \kappa$, tomar $b = J^x$ y $c = J^y$ según corresponda, y efectuar la variación correspondiente.

Los términos de segundo orden se computan efectuando dos variaciones de (4.46) respecto a las corrientes necesarias. En el Apéndice C se detalla el cálculo de los mismos.

El campo medio, luego de tomar las variaciones correspondientes, es

$$\begin{aligned}
\langle E_{sqp}\rangle = \quad & C\int ds\;\; e^{\bar{x}\bar{k}}\Big\{e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k_z^2}\left[a_0 + \sigma^2\left(\alpha\, a_{xx} + \beta\, a_{yy} + \gamma\, a_{xy}\right)\right] \\
& e^{\imath\kappa D}\, e^{-\frac{1}{2}\xi\sigma^2\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(k_z+\kappa)^2}\left[b_0 + \imath\xi\sigma^2\left(\alpha\, b_x + \beta\, b_y\right)\right. \\
& \left.+\sigma^2\left(b_{xx}\,\alpha(1-\xi^2\sigma^2\alpha) + b_{yy}\left(\beta - \xi^2\sigma^2\gamma^2\right) + b_{xy}\,\gamma(1-\xi^2\sigma^2\alpha)\right)\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Para calcular la potencia incoherente dispersada, necesitamos el valor medio del cuadrado del campo. Procederemos de la misma manera para computarlo. A través de las variaciones de un nuevo generador expresaremos todos los términos que se necesiten calcular.

Escribimos el campo medio cuadrático, primero notando que $z'$ es $z(\bar{x}')$ y no su derivada. Luego, lo que debemos calcular es lo que sigue:

$$\begin{aligned}
&\left\langle E_{sqp}\, E^*_{sqp}\right\rangle = |C|^2 \int ds\, ds'\; e^{\imath \bar{k}(\bar{x}-\bar{x}')}\; \Big\langle e^{\imath k_z (z-z')} \\
&\left[\left(a_j + b_j\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x}\right)\frac{1}{\imath}\frac{\delta}{\delta J_j} e^{\imath J^c z_c} + \left(a_{ij} + b_{ij}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x}\right)\frac{1}{\imath^2}\frac{\delta^2}{\delta J_i \delta J_j} e^{\imath J^c z_c}\right]\Big|_{J=0} \\
&\left[\left(a^*_j + b^*_j\, e^{-\imath\kappa(z+D)}\, e^{-\imath\xi z_x}\right)\frac{1}{\imath^*}\frac{\delta}{\delta J_j} e^{-\imath J^c z_c} + \left(a^*_{ij} + b^*_{ij}\, e^{-\imath\kappa(z+D)}\, e^{-\imath\xi z_x}\right)\frac{1}{\imath^2}\frac{\delta^2}{\delta J_i \delta J_j} e^{-\imath J^c z_c}\right]\Big|_{J=0}\Bigg\rangle
\end{aligned} \tag{4.49}$$

El cálculo de este término involucra distintas combinaciones de la función $z(\bar{x})$ y sus derivadas, evaluadas ambas en distintos puntos. Vamos a definir un funcional que generaliza todas las combinaciones posibles del producto de $z$ y sus derivadas en un mismo punto o dos distintos y del cual se pueden derivar todos los términos (treinta y seis en total) que están presentes en (4.49).

De manera similar a lo hecho para calcular valores de expectación del campo en un punto, damos un nuevo funcional, $\mathcal{F}[J_a, \xi_j, k_j]$, del cual derivaremos todos los términos involucrados en el cálculo:

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\sigma^2}{2}\mathcal{F}[J_a,\xi_j,k_j]} &= \left\langle e^{\imath(k_1 z - k_2 z')} e^{\imath(J_x+\xi_1)z_x} e^{-\imath(J_{x'}+\xi_2)z_{x'}} e^{\imath(J_y z_y - J - y' z_{y'})}\right\rangle \\
&= \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\int d\vec{\eta}\, d\vec{\eta}'\; f(\bar{x},\bar{x}',\vec{\eta}; J_a,\xi_j,k_j)\; \rho(\vec{\eta},\vec{\eta}')\; f(\bar{x},\bar{x}',\vec{\eta}'; J_a,\xi_j,k_j)\right]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

con

$$\begin{aligned}
f(\bar{x},\bar{x}',\vec{\eta}; J_a,\xi_j,k_j) &= k_1\delta(\bar{x}-\vec{\eta}) - k_2\delta(\bar{x}'-\vec{\eta}) \\
&+ (J_x+\xi_1)\frac{\partial}{\partial x}\delta(\bar{x}-\vec{\eta}) - (J_{x'}+\xi_2)\frac{\partial}{\partial x'}\delta(\bar{x}'-\vec{\eta}) \\
&+ J_y\frac{\partial}{\partial y}\delta(\bar{x}-\vec{\eta}) - J_{y'}\frac{\partial}{\partial y'}\delta(\bar{x}'-\vec{\eta})
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Luego de integrar sobre $\vec{\eta}$ y $\vec{\eta}'$, obtenemos el funcional generador para el cuadrado del campo:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}[J_a,\xi_j,k_j] = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\ \rho(\bar{x},\bar{x}') \\
&-2k_1(J_{x'}+\xi_2)\frac{\partial\rho}{\partial x} - 2k_2(J_x+\xi_1)\frac{\partial\rho}{\partial x'} - 2k_1J_{y'}\frac{\partial\rho}{\partial y} - 2k_2J_y\frac{\partial\rho}{\partial y} \\
&+\alpha\left[(J_x+\xi_1)^2+(J_{x'}+\xi_2)^2\right] + \beta\left(J_y^2+J_{y'}^2\right) + 2\gamma\left[J_y(J_x+\xi_1)+J_{y'}(J_{x'}+\xi_2)\right] \\
&-2(J_x+\xi_1)(J_{x'}+\xi_2)\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial x'} - 2J_yJ_{y'}\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial y'} - 2\left[J_y(J_{x'}+\xi_2)+J_{y'}(J_x+\xi_1)\right]\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x'}
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

Para llegar a este resultado usamos que la función de autocorrelación es simétrica respecto de los argumentos, $\rho(\bar{x},\bar{x}') = \rho(\bar{x}',\bar{x})$, y que la derivada respecto a las distintas variables tienen el signo cambiado, $\rho'_x(\bar{x},\bar{x}') = -\rho'_{x'}(\bar{x},\bar{x}')$.

Las variaciones que se pueden hacer respecto a este funcional generador logran resumir en las siguientes dos:

- $\frac{\partial}{\partial J_a}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\mathcal{F}[J,\xi,k]\right] = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial J_a}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\mathcal{F}[J,\xi,k]\right]$

- $\frac{\partial^2}{\partial J_a\partial J_b}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\mathcal{F}[J,\xi,k]\right] = -\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial J_a\partial J_b} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial J_a}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial J_b}\right]\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\mathcal{F}[J,\xi,k]\right]$

Veamos como operar con el funcional $\mathcal{F}[J_a,\xi_j,k_j]$. Por ejemplo, uno de los términos que tenemos que calcular en (4.49) es:

$$
a_xa_y^*\frac{\partial^2}{\partial J_x\partial J_{y'}}\left\langle e^{\imath k_z(z-z')}e^{\imath(J_xz_x-J_{y'}z_{y'})}\right\rangle\Big|_{J=0}
$$

Este término se alcanza evaluando al funcional generador en $k_1=k_2=k_z$, $\xi_1=\xi_2=0$ y $J_{x'}=J_y=0$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial J_x\partial J_{y'}}\left\langle e^{\imath k_z(z-z')}e^{\imath(J_xz_x-J_{y'}z_{y'})}\right\rangle\Big|_{J=0} = \exp\left[-\sigma^2k_z^2(1-\rho(\bar{x},\bar{x}'))\right] \\
&\frac{\partial^2}{\partial J_x\partial J_{y'}}\left\{\exp\left[-\sigma^2\left(-k_zJ_x\rho'_x(\bar{x},\bar{x}')-k_zJ_{y'}\rho'_{y'}(\bar{x},\bar{x}')+\alpha\ J_x^2+\beta\ J_{y'}^2-J_xJ_{y'}\rho''_{xy'}(\bar{x},\bar{x}')\right)\right]\right\}\Big|_{J=0}
\end{aligned}
$$

Luego de tomar las variaciones y anular las corrientes externas, se llega a que,

$$\frac{\partial^2}{\partial J_x \partial J_{y'}} \left\langle e^{\imath k_z (z-z')} e^{\imath (J_x z_x - J_{y'} z_{y'})} \right\rangle \Big|_{J=0} =$$
$$= \sigma^2 \left[ \rho''_{xy'}(\bar{x},\bar{x}') + \sigma^2 k_z^2 \rho'_x(\bar{x},\bar{x}') \rho'_{y'}(\bar{x},\bar{x}') \right] e^{-\sigma^2 k_z^2 [1-\rho(\bar{x},\bar{x}')]} \tag{4.53}$$

Otro término puede ser el que proviene de $b_0\, b_x^*$:

$$b_0\, b_x^* \frac{\partial}{\partial J_x} \left\langle e^{\imath (k_z+\kappa)(z-z')} e^{\imath \xi z_x} e^{-\imath (\xi + J_{x'}) z_{x'}} \right\rangle \Big|_{J=0}$$

Alcanza con determinar a $\mathcal{F}[J_a, \xi_j, k_j]$ en $k_1 = k_2 = k_z + \kappa$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ y $J_x = J_y = J_{y'} = 0$. El resultado es inmediato:

$$\frac{\partial}{\partial J_x} \left\langle e^{\imath (k_z+\kappa)(z-z')} e^{\imath \xi z_x} e^{-\imath (\xi + J_{x'} z_{x'})} \right\rangle \Big|_{J=0} =$$
$$= \sigma^2 \left[ (k_z+\kappa)^2 + \xi \left( \rho''_{xx'} - \alpha \right) \right] e^{-\sigma^2 \left[ (k_z+\kappa)^2 (1-\rho(\bar{x},\bar{x}')) - \xi \left( \rho''_{xx'} - \alpha \right) \right]}$$

Como se puede ver de la ecuación (4.49), el valor medio del cuadrado del campo involucra calcular treinta y seis términos. No vamos a desarrollar todos estos términos aquí; sólo alcanza con mencionar que los mismos se obtienen de tomar las variaciones que correspondan en cada caso, usar la paridad de la función de autocorrelación, que su derivada se anula en el origen y que al derivar respecto a variables distintas hay un factor $(-1)$ a tener en cuenta.

La sección eficaz, que definimos en la ecuación (2.63), es

$$\sigma_{qp}^0 = \frac{4\pi R^2}{A} \left[ \left\langle E_{sqp}\, E_{sqp}^* \right\rangle - \left\langle E_{sqp} \right\rangle \left\langle E_{sqp}^* \right\rangle \right] \tag{4.54}$$

Usando las ecuaciones (4.41) y (4.49) ponemos la sección eficaz en función de los valores medios que calculamos más arriba.

$$
\begin{aligned}
\sigma^0_{qp} = & \frac{4\pi R^2}{A}|C|^2 \int ds\, ds'\; e^{\imath \bar{k}_\perp (\bar{x}-\bar{x}')} \\
& \Big[ \Big\langle e^{\imath k_z (z-z')} \left( a_k + b_k\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) \left( a_j^* + b_j^*\, e^{-\imath\kappa(z'+D)}\, e^{-\imath\xi z'_x} \right) z_k z'_j \Big\rangle \\
& - \Big\langle e^{\imath k_z z} \left( a_k + b_k\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) z_k \Big\rangle \Big\langle e^{-\imath k_z z'} \left( a_k^* + b_k^*, e^{-\imath\kappa(z'+D)}\, e^{-\imath\xi z'_x} \right) z'_k \Big\rangle \\
& + 2 \Big\langle e^{\imath k_z (z-z')} \left( a_{kl} + b_{kl}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) \left( a_j^* + b_j^*\, e^{-\imath\kappa(z'+D)}\, e^{-\imath\xi z'_x} \right) z_k\, z_l\, z'_j \Big\rangle \\
& - 2 \Big\langle e^{\imath k_z z} \left( a_{kl} + b_{kl}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) z_k\, z_l \Big\rangle \Big\langle e^{-\imath k_z z'} \left( a_j^* + b_j^*\, e^{-\imath\kappa(z'+D)}\, e^{-\imath\xi z_x} \right) z'_j \Big\rangle \\
& + \Big\langle e^{\imath k_z (z-z')} \left( a_{kl} + b_{kl}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) \left( a_{ij}^* + b_{ij}^*\, e^{-\imath\kappa(z'+D)}\, e^{-\imath\xi z'_x} \right) z_k\, z_l\, z'_i\, z'_j \Big\rangle \\
& - \Big\langle e^{\imath k_z z} \left( a_{kl} + b_{kl}\, e^{\imath\kappa(z+D)}\, e^{\imath\xi z_x} \right) z_k\, z_l \Big\rangle \Big\langle e^{-\imath k_z z'} \left( a_{ij}^* + b_{ij}^*\, e^{-\imath\kappa(z'+D)}\, e^{-\imath\xi z'_x} \right) z'_i\, z'_j \Big\rangle \Big]
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

A lo largo de esta sección hemos mostrado cómo calcular de manera sistemática todos los términos presentes en esta igualdad. En el Apéndice C desarrollamos cada uno de ellos.

Para finalizar el cálculo de la sección eficaz debemos poner (4.55) como función de la función de correlación o sus derivadas, las que están presentes en los distintos valores medios que deben ser computados. Luego, corresponde integrar sobre las superficies $ds$ y $ds'$. Al integrar la función de correlación se obtiene el espectro de rugosidad de la superficie, el cual hemos definido en (2.89):

$$
W(\bar{k}) = \frac{1}{2\pi} \int dxdy\; \rho(\bar{x}) e^{\imath \bar{k}\bar{x}}
$$

Los términos que dependan de las derivadas de $\rho(\bar{x}, \bar{x}')$ también pueden escribirse en función del espectro $W(\bar{k})$. Esto se logra luego de una integración por partes, la cual genera para la derivada primera y segunda de la función de correlación, los siguientes resultados:

$$
\begin{aligned}
\int dx\, dy\; \frac{\partial \rho(\bar{x})}{\partial x_j}\; e^{\imath \bar{k}\bar{x}} &= -2\pi \imath k_j W(\bar{k}) \\
\int dx\, dy\; \frac{\partial^2 \rho(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}\; e^{\imath \bar{k}\bar{x}} &= 2\pi k_i k_j W(\bar{k})
\end{aligned}
$$

La estrategia que usaremos para finalizar el cálculo de $\sigma^0$ es la siguiente: antes de integrar en las superficies $ds$ y $ds'$ desarrollaremos la sección eficaz en potencias de $\rho$ y sus derivadas. En la Sección 2.4.6 mostramos que el coeficiente $\sigma^0$ dependía de la función de

correlación de una sola manera: a través de un factor exponencial, el cual era desarrollado en serie y en consecuencia, se lograba escribir a la sección eficaz en función del espectro $W^n(\bar{k})$. En este caso, a diferencia del modelo de una sola capa, la sección eficaz depende de $\rho$, sus derivadas y de productos entre las mismas. Esto se debe a la inclusión de la superficie subterranea; el producto entre la función de corrección y sus derivadas da cuenta de efectos de múltiple scattering [10].

En una primera instancia, luego de desarrollar las exponenciales, sólo nos quedaremos con los términos lineales en $\rho(\bar{x}, \bar{x}')$ y sus derivadas. Con ello lograremos escribir a la sección eficaz como un producto entre $W(\bar{k})$ y un factor que es estríctamente geométrico, el cual contiene la descomposición de la onda incidente en el plano local y los efectos de la capa ubicada en $z = -D$. De manera abreviada, el coeficiente de dispersión que obtendremos tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\sigma^0_{qp} = W(\bar{k}) \qquad & \Big\{ e^{-\sigma^2 k z^2} \mu_{aa} \\ & + e^{-\sigma^2 (k_z+\kappa)^2} e^{-\xi^2 \sigma^2 \alpha} \mu_{bb} \\ & + e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 (k_z^2 + (k_z+\kappa)^2)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \sigma^2 \alpha} \left[ \mu_{1ab} \cos(\kappa D) + \mu_{2ab} \sin(\kappa D) \right] \Big\} \end{aligned} \tag{4.56}$$

El primero de los términos proviene sólo del scattering producido en la superficie rugosa, de ahí que dependa sólo de los coeficientes $a$. El segundo se debe a la reflexión de la onda transmitida al medio inferior y que luego de reflejarse en el plano ubicado en $z = -D$ se trasmite nuevamente a través de la superficie rugosa; esto queda indicado por la dependencia en los coeficientes $b$, los cuales son proporcionales a los coeficientes de transmisión $T_{01}$, $T_{10}$ y al coeficiente de reflexión $R_{12}$. Además, decae exponencialmente con la distancia media entre las superficies, ya que $\xi \propto D$. El último de los términos se debe a la interferencia de las ondas debido a las múltiples reflexiones entre las dos superficies, de ahí que sea proporcional a senos y cosenos del producto $\kappa D$. También decae exponencialmente con la distancia entre las superficies.

Analizando estos términos se recupera de manera inmediata el coeficiente de dispersión calculado con el IEM. Cuando la segunda capa está suficientemente lejos, esto es, cuando $D k_i \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2\theta} \gg 1$, el segundo y tercer término pueden ser despreciados ya que decaen exponencialmente con la distancia entre las superficies. Por otra parte, el primer término es

$$\sigma^2 \left(a_0^2 + +a_x^2 k_x^2 + a_y^2 k_y^2 + 2a_x a_y k_x k_y - 2a_0 a_x k_x - 2a_0 a_y k_y\right)$$
$$+\sigma^4 \left((\alpha\, a_{xx} + \beta\, a_{yy})^2 + 2\,\alpha\,\gamma\, a_{xx} a_{yy} + 2\,\beta\,\gamma\, a_{yy} a_{xy}\right)$$

El segundo término de esta expresión proviene de haber retenido derivadas de ordenes superiores al lineal, los cuales no son tenidos en cuenta en el modelo usual. El primer renglón es exactamente el término de Kirchhoff del método integral. Cuando se hace la integración por partes, las derivadas se reescriben como $z_x = -\frac{k_x}{k_z}$ y $z_y = -\frac{k_y}{k_z}$; con este reemplazo la amplitud del campo es constante, sale fuera de las integrales y la expresión que se obtiene para el coeficiente de *backscattering* es proporcional a

$$\sigma^2 k_z^2 |f_{qp}|^2 = \sigma^2 k_z^2 \left[a_0 - \frac{k_x}{k_x} a_x - \frac{k_y}{k_z} a_y\right]^2$$

que coincide con el coeficiente dado por (2.88). Con esta observación mostramos que, como esperábamos, el modelo de capas desarrollado en este Capítulo converge al IEM usual tomando los límites adecuados.

Para finalizar, en este capitulo de desarrolló una solución coherente al problema de *scattering* de un medio estratificado con una interface aleatoria. La solución se basa en la aproximación de Kirchhoff para calcular el campo en la superficie, pero utiliza la solución completa del IEM desarrollada en el capitulo 3. La aproximación analítica derivada es compleja, pero se probó que en los limites $D \to \infty$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ el nuevo campo de Kirchhoff converge al modelo de una sola superficie.

Como aclaramos en la introducción, la motivación para desarrollar este tipo de modelos esta basada en la estructura vertical del suelos. En el capitulo siguiente, evaluaremos los resultados de este modelo comparándolos con los resultados del AIEM estándar, de manera de evaluar en que condiciones la capa subterreanea produce un efecto significativo en el *backscattering* o la emisividad del suelo. Asimismo, estudiaremos que tipo de *artifacts* podrían estar asociados a la contribución al scattering total de esta capa subterranea.

# 5

# Resultados del modelo de capas - implicancias para la estimación de humedad del suelo a partir de datos de microondas

Luego de haber desarrollado el nuevo campo de Kirchhoff del método integral para la geometría de capas, nos proponemos estudiar cuál es el efecto de esta segunda capa sobre el coeficiente de dispersión $\sigma_0$. Para ello, primero validaremos el modelo de capas comparándolo con el modelo AIEM, desarrollado en los Capítulos 2 y 3. Veremos que en los límites en donde los efectos de la segunda capa se anulan, el campo de Kirchhoff desarrollado en el capítulo anterior converge a los resultados esperados, esto es: cuando $\epsilon_2 \to \epsilon_1$ o cuando $D \gg \lambda$ el modelo de capas recupera la aproximación de plano tangente del modelo usual. Luego de haber verificado estos resultados, estudiaremos cómo es la dependencia de la nueva sección eficaz, tanto en función del ángulo dispersado como de la distancia media entre las capas.

Posteriormente, haremos un estudio detallado del modelo de capas con vista a ser implementado en un esquema de *retrieval* para la humedad del suelo. Para ello analizaremos la dependencia del cociente $\sigma_{HH}/\sigma_{VV}$ (índice $p$ en la nomenclatura de [3]) para distintos valores de las constantes dieléctricas (que implican distintos valores de humedad del suelo [44, 45]) y de la distancia entre las capas. Por último, veremos cuál es el impacto de la capa subterránea en los modelos de emisividad.

Estos datos serán puestos en relevancia en el contexto de los modelos de *retrieval* basados en el AIEM. En particular, se estudiará si los *artifacts* observados en la humedad estimada a partir de un enfoque Bayesiano que utiliza como modelo directo el AIEM [1], pueden ser explicados mediante la existencia de una segunda capa.

## 5.1. Validación del campo de Kirchhoff: modelo de capas frente al modelo usual

Con el objetivo de validar los cálculos hechos en el Capítulo 4, compararemos el modelo de capas con el IEM usual. En los límites en donde los efectos del plano inferior pueden ser ignorados, el modelo de capas debe recuperar los resultados usuales. Concretamente, cuando la constante dieléctrica del segundo medio toma valores similares al del primero, la reflexión en el plano ubicado en $z = -D$ no debe aportar potencia a la sección eficaz, ya que en este límite ($\epsilon_2 \to \epsilon_1$) la onda trasmitida al medio inferior no debe volver a reflejarse hacia la superficie rugosa. El otro límite en donde se deben recuperar de manera inmediata los resultados usuales es cuando la capa inferior está lo suficientemente lejos de la primera, concretamente, cuando $D \gg \lambda$ los efectos de múltiple rebote entre las superficies comienzan a atenuarse y en consecuencia, la segunda capa no debe aportar potencia a la sección eficaz observada.

Para estudiar la convergencia del modelo de capas al usual vamos a trabajar con el siguiente conjunto de parámetros: la longitud de onda incidente es seleccionada en 25cm (lo que corresponde a banda L); el ángulo de incidencia está fijado en 40° (valor típico en la mayoría de las aplicaciones obtención de humedad del suelo); fijando $\phi_s = 180°$ se ubica a la señal dispersada en el mismo plano que la onda incidente (la condición de retrodispersión se da cuando $\theta_s = \theta$); los valores de las constantes dieléctricas oscilan entre 4 y 20, lo que corresponde a suelos secos (punto de marchitez permanente) y húmedos (capacidad de campo), respectivamente. Además, sólo trabajaremos con valores reales para la constane dieléctrica. Esto se debe a que la parte imaginaria de $\epsilon$ está asociada al contenido salino del medio dieléctrico, y que para suelos de agricultura se epera que éste contenido sea bajo. La caracterización de la superficie rugosa está dada por los valores de la longitud de correlación y altura rms; para este estudio estos valores quedarán en valores típicos de suelos de agricultura en el régimen de siembra directa ($l$ = 10cm y $s$ = 1cm) [31]. Estos valores de $l$ y $s$ fueron usados en el Capítulo 3 para calcular el coeficiente de retrodispersión con los campos de Kirchhoff completos y para los cuales se obtuvo valor no nulo en el canal de polarización cruzada.

Todos los resultados para el coeficiente de dispersión $\sigma_0$ están presentados en escala

logarítmica.

### Comportamiento del modelo cuando $\epsilon_2 \to \epsilon_1$

La inclusión de una segunda interface debajo de la superficie rugosa debería aumentar la sección eficaz observada por el radar. Esto se debe a que cuando solo se tiene la superficie rugosa la onda transmitida al medio dieléctrico se propaga libremente y, al no encontrar un nuevo cambio en la permitividad, esta fracción de la energía se pierde en forma definitiva. En cambio, cuando se agrega una nueva interface, parte de la onda trasmitida al primer medio se refleja en esta segunda superficie y vuelve a ser observada. Es esperable que cuanto menor sea la diferencia entre las constantes dieléctricas de los medios subterráneos, menor sea el incremento en la señal observada. En el caso límite en que los dos dieléctricos sean iguales, la onda transmitida se propagará sin retornar a la superficie superior.

Este comportamiento es el que se observa en la Figura 5.1, en donde se presenta el coeficiente de retrodispersión $\sigma_0$ de los canales co-polarizados en función del ángulo dispersado $\theta_s$, para un ángulo de incidencia de $\theta = 40°$ y una longitud de onda de $\lambda = 25$cm. Vemos que cuanto mayor es la diferencia entre las permitividades dieléctricas, mayor es la ganancia de la señal dispersada. En el límite $\epsilon_2 \to \epsilon_1$ se recupera el comportamiento del modelo usual. También se observa que tanto los valores absolutos de $\sigma_{HH}$ y $\sigma_{VV}$ como su dependencia con $\theta_s$ para distintos $\epsilon$ es distinta.

### Comportamiento del modelo cuando $D \gg \lambda$

La dependencia de la sección eficaz con la distancia entre las capas no tiene un comportamiento monótono, como sí lo tiene la dependencia con las constantes dieléctricas. Si bien es esperable que el efecto de la segunda capa sea poco significativo para distancias mucho más grandes que la longitud de onda incidente, en el rango intermedio, en donde $D$ es comparable con $\lambda$, la sección eficaz puede presentar oscilaciones. Físicamente , lo esperable es que se presenten efectos de interferencia debido a las múltiples reflexiones de la onda entre las dos superficies. Esta interferencia puede aportar de manera constructiva a la señal observada, o también puede darse el caso contrario, en donde los múltiples rebotes quiten potencia a la señal total. Matemáticamente, los efectos de atenuación e interferencia se ven expresados en

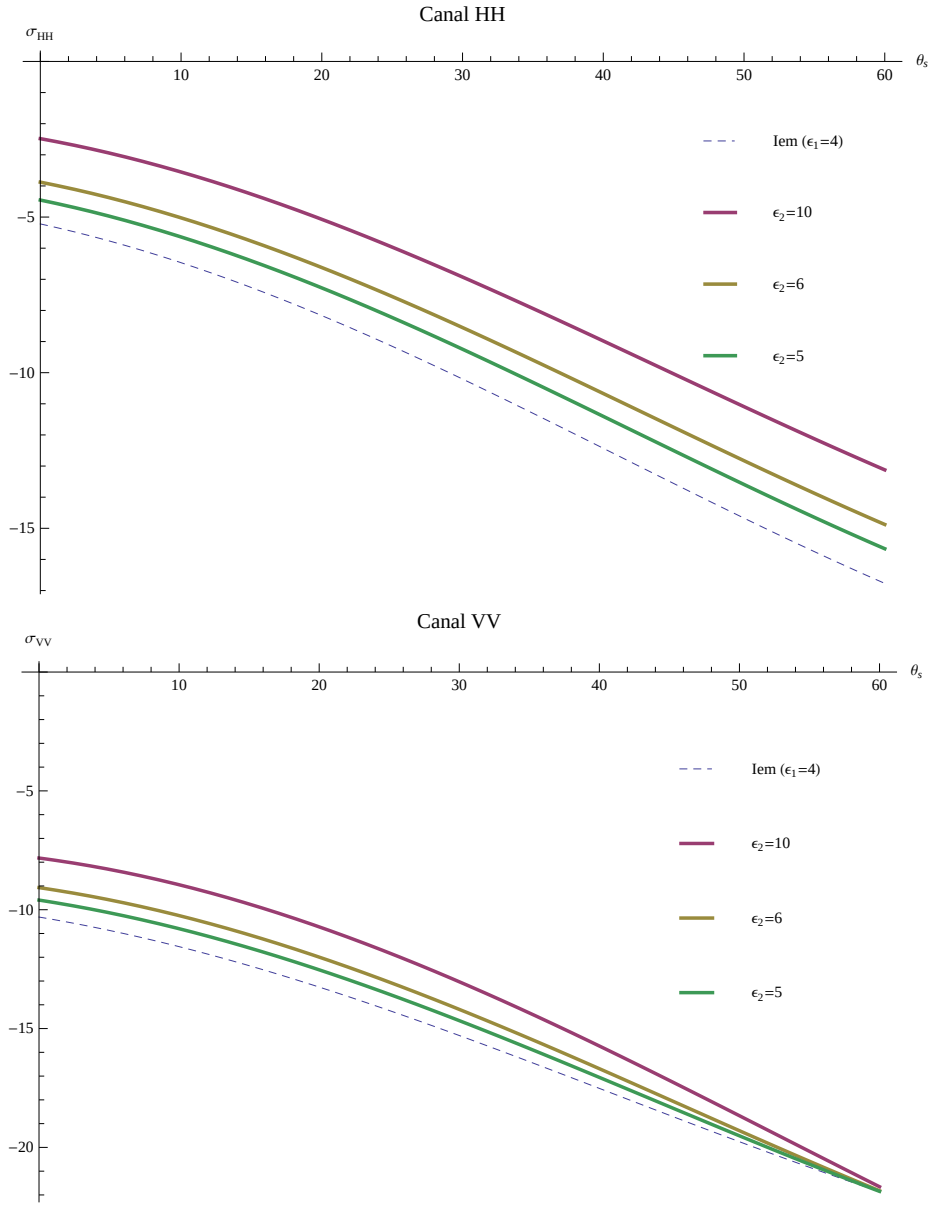



Figura 5.1: Coeficiente $\sigma^0$ para el campo de Kirchhoff: modelo de capas vs. modelo usual para distintos valores de $\epsilon_2$ ($\theta = 40°$ y $\lambda = 25$cm).

(4.56): los efectos de la capa inferior se incluyen en los términos $\mu_{bb}$, que decaen exponencialmente con la distancia y en los términos $\mu_{ab}$, que también decaen de manera exponencial y que además son los que presentan las oscilaciones con la distancia.

En las Figuras 5.2 y 5.3 mostramos la sección eficaz para distintas distancias entre capas. Vemos que cuando $D \approx 4\lambda$, el efecto de la segunda capa es prácticamente nulo,

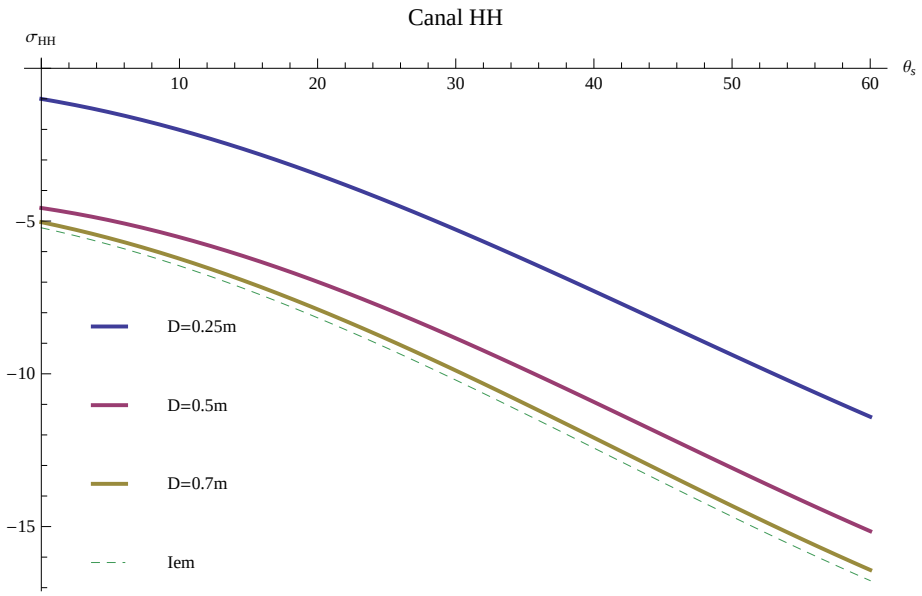



Figura 5.2: Coeficiente $\sigma^0_{HH}$ para el campo de Kirchhoff: modelo de capas vs. modelo usual para distintos valores de $D$ ($\theta = 40°$, $\lambda = 25$cm, $\epsilon_1 = 4$ y $\epsilon_2 = 20$).

convergiendo así al modelo usual.

Dado que el análisis respecto a la distancia entre las capas no es monótono, para ver los efectos de interferencia que se producen con los múltiples rebotes entre las dos superficies, vamos a estudiar cuál es el comportamiento de la sección eficaz con respecto a $D$.

## 5.2. Comportamiento del modelo ante variaciones de $D$

Para estudiar el efecto de la distancia entre las capas sobre la sección eficaz, vamos a situarnos en la condición de retrodispersión, en donde $\theta_s = \theta = 40°$ y $\phi_s = 180°$. Las constantes dieléctricas están fijadas en $\epsilon_1 = 4$ y $\epsilon_2 = 20$, lo que corresponde a una capa seca y otra saturada. La superficie rugosa está caracterizada por $s = 1$cm y $l = 10$cm. La longitud de onda incidente corresponde a banda L ($\lambda = 25$cm), la cual verifica la condición de validez para la aproximación de plano tangente ($l \gg 2,76s\lambda$). En las Figuras 5.4 y 5.5 mostramos el coeficiente $\sigma^0$ para los canales $HH$ y $VV$ del modelo de capas comparado con el modelo usual (el cual no tiene a $D$ como parámetro y por lo tanto, es constante).

Podemos observar el comportamiento oscilatorio de la sección eficaz en el rango $\lambda < D < 3\lambda$ y el decaimiento exponencial de la amplitud; para distancias mayores a $3\lambda$ el modelo

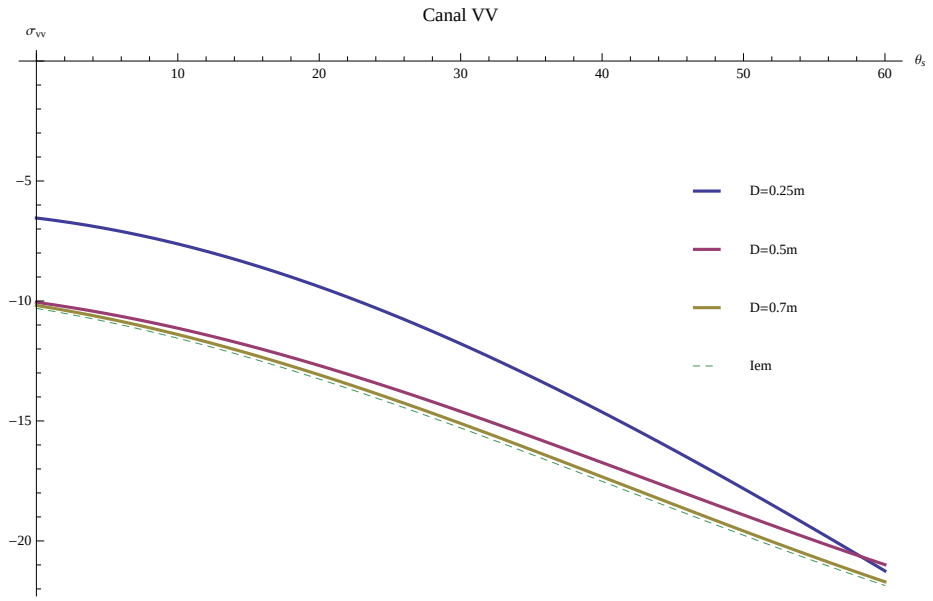



Figura 5.3: Coeficiente $\sigma^0_{VV}$ para el campo de Kirchhoff: modelo de capas vs. modelo usual para distintos valores de $D$ ($\theta = 40°$, $\lambda = 25$cm, $\epsilon_1 = 4$ y $\epsilon_2 = 20$).

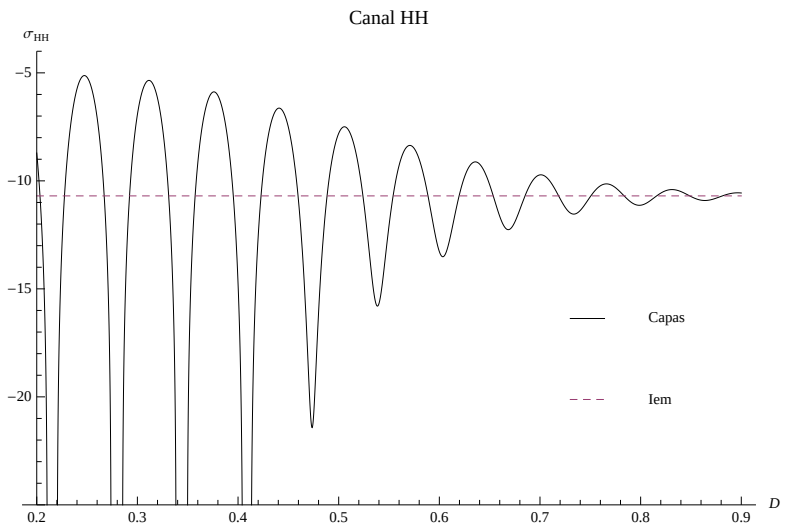



Figura 5.4: Coeficiente $\sigma^0_{HH}$ en función de la distancia entre las capas ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm).

comienza a converger a los resultados del AIEM. En ambos canales vemos que para distancias cercanas a 1m la sección eficaz coincide con el valor constante del AIEM. Esto se debe a que la atenuación viene dada por el factor $\exp[-2\pi D/\lambda]$, que para $D \gtrsim 3\lambda$ genera valores menores al 4%de la potencia máxima.

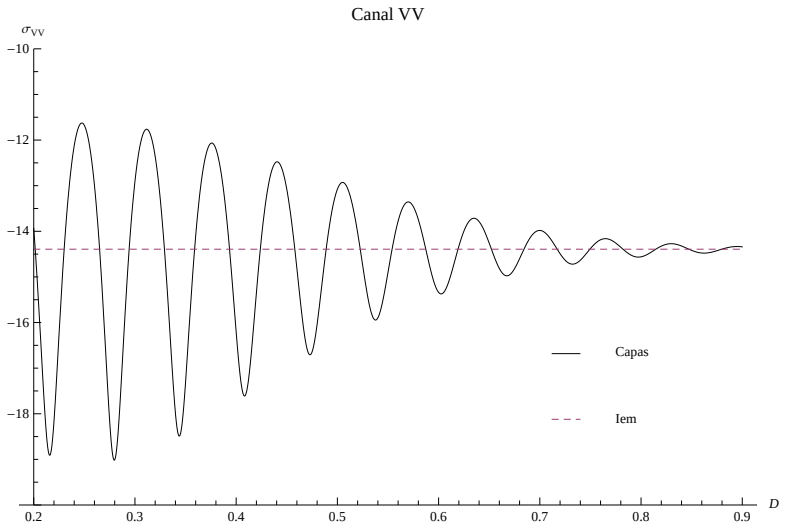



Figura 5.5: Coeficientes $\sigma^0_{vv}$ y $\sigma^0_{VV}$ en función de la distancia entre las capas ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm).

Una de las características notorias de estos resultados es que en el canal $HH$ se pueden apreciar distancias en las cuales la potencia dispersada se anula, y por lo tanto $\sigma_{HH} \to -\infty$ (en escala logarítmica). El canal $VV$, en cambio, presenta un comportamiento más suave con respecto a $D$. Vale la pena recalcar que estos comportamientos tan extremos están asociados a dos hipótesis simplificadoras del modelo: que la capa inferior es plana o muy lisa, y que la distancia $D$ es constante. En una situación más realista, podría esperarse que exista una variación de la distancia media entre capas, punto a punto, asociada a la pendiente local de la superficie inferior. Además, una de las aproximaciones hechas en el modelo teórico, es que la fase que adquiere la onda al propagarse entre las superficies sólo depende de la derivada superficial en la dirección $\hat{x}$ [dada por la ecuación (4.27)], lo cual rompe la simetría entre los modos TM (asociado al canal VV) y TE (asociado al canal HH). la intepretación geométrica de este resultado es que la normal al plano tangente sobre la superficie rugosa está contenida en el plano de incidencia (formado por $hatk_i$ y $\hat{z}$). En el caso general, en donde el plano tangente puede estar ladeado, el camino óptico de la onda trasmitida dependerá del gradiente de la superficie en su forma mas general, y por lo tanto, la fase adquirida dependerá de ambas derivadas direccionales ($z_x$ y $z_y$).

## 5.3. Comportamiento del coeficiente de retrodispersión biestático

El objetivo principal de los métodos de dispersión electromagnética - en el marco de los sistemas de teledetección- es calcular la sección eficaz de los blancos observados, ya que esta es la variable física que observan dichos sistemas. Como hemos descrito en el Capítulo 2, uno de los métodos para calcular la sección eficaz es el de la ecuación integral (IEM). El mismo es un desarrollo perturbativo de la ecuación de Dyson para el campo EM que se induce por la superficie iluminada. Dentro de este esquema, el campo sobre la superficie tiene dos contribuciones: la del campo inducido sobre el plano tangente en cada punto (campo de Kirchhoff), y el término complementario, que es la corrección a segundo orden en el desarrollo perturbativo. En el Capítulo 4 hemos recalculado el campo de Kirchhoff para un esquema de medios estratificados. Además, hemos calculado el campo medio sin hacer las aproximaciones usuales que simplifican los cálculos de manera considerable; estas aproximaciones, cuando los campos tienen una dependencia explícita de la posición, dejan de ser válidas. Sin embargo, lo que no hemos hecho es calcular el campo complementario del modelo de capas. Esto, para dar una estimación realista de la sección eficaz, es ineludible: el campo de Kirchhoff solo da cuenta de efectos de dispersión simple y no tiene en cuenta los efectos de múltiple dispersión que sufre la onda al reflejarse más de una vez en la superficie aleatoria. Como consecuencia, si sólo se considera el campo de Kirchhoff para calcular la sección eficaz, se sobre estima el valor de esta variable, ya que los efectos de dispersión múltiple disminuyen la potencia recibida por el radar.

Para dar resultados del coeficiente de retrodispersión que tengan en cuenta los efectos de múltiple *scattering*, es necesario entonces dar alguna estimación de la potencia debida a ellos. Una manera de pesar esta potencia es invertir los valores de $\sigma_0$ del modelo completo del AIEM, el cual tiene las tres contribuciones: Kirchhoff + KirchhoffComplementario + Complementario [ver ecuaciones (2.88), (2.91) y (2.93)]. Está claro que esta estimación no tiene en cuenta los efectos de la segunda capa, pero dado que el campo complementario es una corrección de segundo orden y que en ella la contribución del plano inferior entra como potencias del producto $T_{01}R_{12}T_{10}$, se puede, en una primer instancia, dar la estimación de los efectos de múltiple scattering sin considerar la capa inferior. Además, el campo complementario

es particularmente importante para rugosidades grandes, que es un régimen lejano al que estamos trabajando ($s = 0{,}01$m, $l = 0{,}1$m).

A partir del coeficiente $\sigma_0$ completo del AIEM y del coeficiente $\sigma^{(K)}$ del campo de Kirchhoff, se puede estimar la contribución del campo complementario de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = 10\log\left[P_K + P_{KC} + P_C\right] \ , \ \sigma^{(K)} = 10\log P_K \\
&10^{0,1\sigma_0} = P_K + P_{KC} + P_C \ , \ 10^{0,1\sigma^{(k)}} = P_K \\
&\Rightarrow P_{KC} + P_C = P_K\left(10^{0,1(\sigma_0-\sigma^{(k)})} - 1\right)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

En este apartado, nuestro interés es ver cuánto aporta al *backscattering* la inclusión de una capa saturada ($\epsilon_2 = 20$) debajo de la superficie rugosa ($\epsilon_1 = 4$), y cómo depende con la distancia de ésta capa a la superficie. Para ello graficamos $\sigma_0(\theta_s)$ para $D = \lambda$, $D = 2\lambda$, $D = 3\lambda$ y $D = 4\lambda$. La contribución del campo complementario la estimamos usando el modelo AIEM con $\epsilon_1 = 4$. Además, graficamos la sección eficaz del AIEM para el suelo seco y el suelo húmedo.

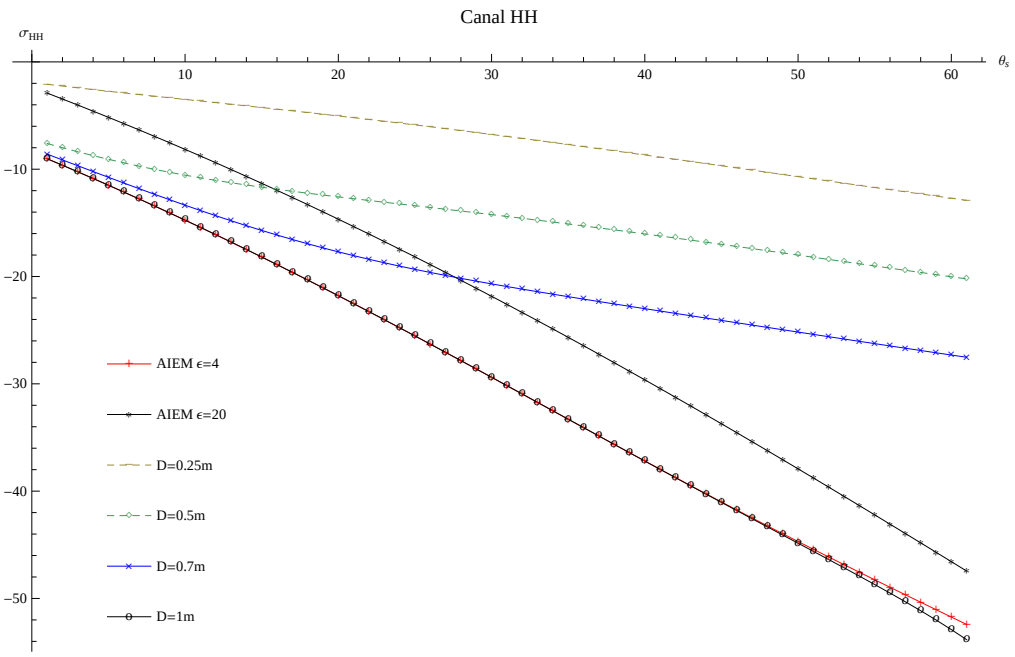



Figura 5.6: Coeficiente $\sigma^0_{HH}$ biestático: modelo de capas vs. AIEM ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm).

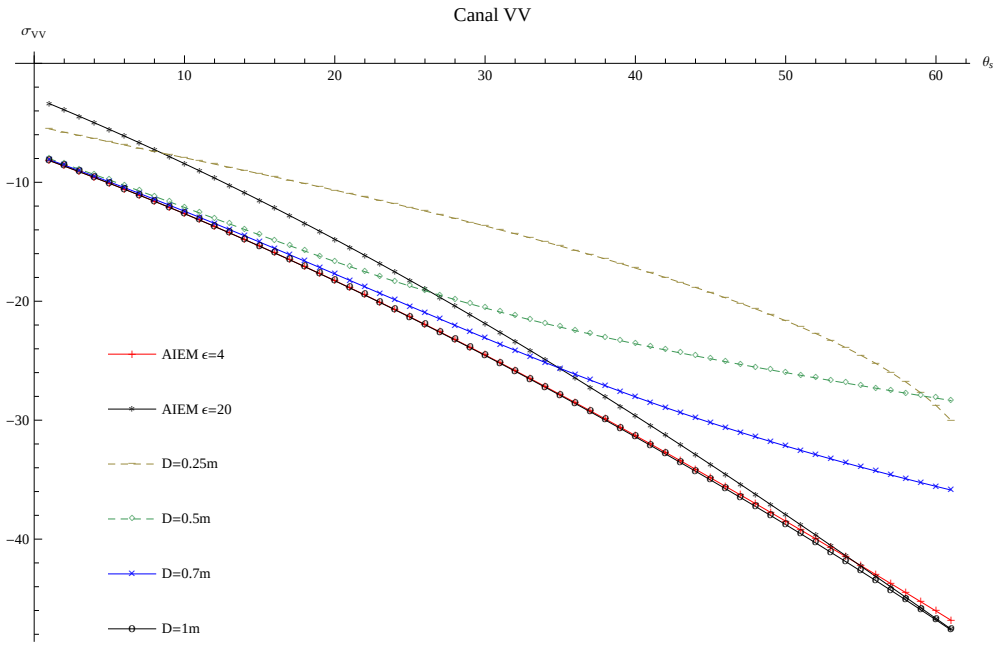



Figura 5.7: Coeficiente $\sigma^0_{VV}$ biestático: modelo de capas vs. AIEM ($\theta = 40°$, $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm).

Los resultados son los esperados: la capa inferior incrementa el valor de la sección eficaz en casi todo el rango de $\theta_s$, salvo para las proximidades del nadir ($\theta_s = 0$), en donde para $D \geq 2\lambda$ no se observan ganancias en los dos canales. Además, para todas las distancias que son menores a la longitud de onda, el modelo de capas aumenta la sección eficaz en la condición de *backscattering*, ya que en todos los casos $\sigma_{capas}(\epsilon_1 = 4, \epsilon_2 = 20) > \sigma_{AIEM}(\epsilon_1 = 20)$. Por otro lado, en el límite $D \sim 4\lambda$, el modelo de capas coincide con el AIEM en todo el rango de valores para $\theta_s$.

Globalmente, la inclusión de una capa subterránea saturada genera una dependencia más suave con la longitud de onda, con un decaimiento menor cuanto más cercana está la capa de la superficie.

## 5.4. Comportamiento del cociente $p = HH/VV$

En la introducción, hicimos hincapié en el rol fundamental de los modelos de scattering para las aplicaciones operativas. Este rol es particularmente importante en los esquemas de *retrieval* basados en inferencia Bayesiana [46, 47], que utilizan de manera explícita el modelo

directo para calcular el *likelihood*. Sin embargo, la gran ventaja de los esquemas Bayesianos (utilizar un modelo riguroso para modelar la física que vincula las características geométricas del suelo con sus características de scattering), se convierte en un limitante decisivo si el modelo no ajusta bien a las observaciones. En este sentido, es muy importante trabajar con modelos de scattering que estén satisfactoriamente validados con observaciones a campo. Esta validación es raramente posible, y en general existen pocas campañas con datos en simultáneo. Entonces, es en el contexto del *retrieval* de humedad del suelo donde es posible evaluar los modelos directos. Para evaluar el impacto de la calidad del modelo de scattering en el *retrieval*, es necesario detallar conceptualmente un esquema de inversión Bayesiana.

### 5.4.1. Esquema de inversión Bayesiana

El problema inverso consiste en determinar una serie de variables biofísicas de interés a partir de una variable física medida. En Teledetección de microondas, el problema inverso consiste en determinar parámetros del blanco a partir de datos SAR. En general, esta dependencia de la variable física medida con la variable de interés no es trivial, lo que conlleva la necesidad de plantear un modelo de inversión.

El enfoque Bayesiano se basa en el caso multivariado del Teorema de Bayes. Dadas tres variables aleatorias $Z_1, Z_2, Z_3$, cada una función de la humedad del suelo $m_v$ y de la rugosidad normalizada $ks$. Se permite que cada $\sigma_i^0$ dependa de cierto número de parámetros (longitud de correlación, ángulo de incidencia, textura del suelo, otros). Cada $Z_i$ representa eventualmente una imagen SAR para las distintas polarizaciones ($\sigma_{hh}^0$, $\sigma_{hv}^0$ y $\sigma_{vv}^0$) adquiridas en una misma pasada sobre un mismo blanco. La distribución conjunta de las variables biofísicas $m_v$ y $ks$ se obtiene del teorema de Bayes

$$P(m_v, ks|z_1, z_2, z_3) = \frac{P_{Z_1Z_2Z_3}(z_1, z_2, z_3|m_v, ks)P_{M_VKS}(m_v, ks)}{P_{Z_1Z_2Z_3}(z_1, z_2, z_3)}, \tag{5.2}$$

donde $P_{Z_i}(z_i|m, ks)$ es la distribución de los $Z_i$ conocidos $mv$ y $ks$ (llamada verosimilitud o *likelihood*), $P_{MVKS}(m, ks)$ es la distribución conjunta de información previa (*prior*) y $P_Z(z)$ (*evidencia*) es una constante positiva cuya finalidad es hacer que $P(m,ks|z_i)$ (*posterior*) sea una probabilidad condicional.

El *likelihood* es una medida del grado de compatibilidad o verosimilitud entre una

cierta medición SAR y un cierto conjunto de parámetros del suelo, restringido al modelo directo considerado. A mayor valor del *likelihood*, más probable es que la medición SAR provenga de aquella combinación particular de parámetros del suelo. El *likelihoood* toma en cuenta el modelo directo al igual que el modelo para el ruido *speckle*. La dispersión del *likelihood* es consecuencia de la incerteza en los parámetros del suelo y del ruido *speckle*. El prior involucra toda la información previa disponible sobre los parámetros del terreno. Puede estar disponible a partir de registros históricos, estimaciones de otros sensores, mediciones en el terreno y/o información contextual. El posterior se interpreta como la probabilidad (condicional) de medir cierto conjunto de parámetros $m_V$ (o $\epsilon$) y $ks$ dada una medición de coeficientes de retrodispersión $Z1, Z2, Z3$ (por ejemplo HH, VV y HV). Conocidos el *likelihood* y el prior, el posterior se calcula sencillamente multiplicando dichas distribuciones punto a punto.

Una vez evaluado el posterior, es posible obtener diversos estimadores Bayesianos de $m_v$ o $ks$. Por ejemplo:

- $m_v^{Media}$: media
- $m_v^{MAP}$: máximo a posteriori.

La media es aquel valor de $m_v$ que deja a ambos lados la misma área en la distribución posterior, es decir:

$$m_v^{Media} = \iint_D m_v P(m_v, ks|z_1, z_2, z_3) dm_v dks. \tag{5.3}$$

El error en la estimación de la media se obtiene a partir del desvío estándar de (5.3):

$$std(m_v^{Media})^2 = \iint_D (m_v - m_v^{Media})^2 P(m_v, ks|z_1, z_2, z_3) dm_v dks. \tag{5.4}$$

Siempre que la función de densidad condicional 5.2 sea exacta, el estimador Bayesiano no sesgado óptimo de $m_v$ que posee la varianza mínima es la media de 5.2 [48].

### 5.4.2. Ejemplo de inversión de datos SAR usando el AIEM: Radarsat-2

Con el fin de analizar un caso vinculado a las necesidades reales de un algoritmo de *retrieval*, es relevante analizar la campaña de Radarsat-2 de Casselman, Ontario, Canadá (45° 22′N

$75° 56'$ O). Esta área es una zona agrícola. Una gama de texturas de suelo se encuentran a lo largo del sitio, incluyendo suelos franco limosos, arenosos y arcillosos. Los campos en esta región de Canadá en general tienden a ser pequeños en tamaño (15 hectáreas en promedio). Los métodos de labranza varían a lo largo del área de estudio, desde labranza de otoño y sembrado (sin labranza de primavera) a labranza mínima o convencional en primavera. Las mediciones de humedad del suelo y de rugosidad superficial se tomaron en múltiples sitios de muestreo, los cuales se definieron en zonas homogéneas dentro de los campos, con variaciones mínimas en el tipo de suelo, pendiente, y cobertura de residuos vegetales (rastrojo). Cada sitio de muestreo se definió sobre un área de $120 \times 120$m. En cada sitio de muestreo las mediciones se llevaron a cabo en una cuadrícula regular de 16 puntos de muestreo con cada punto distanciado 30 m de sus vecinos. Se tomaron de 3 a 4 réplicas de lecturas de humedad del suelo por punto de muestreo resultando en 48-64 mediciones de humedad por sitio de muestreo. Coincidente con las adquisiciones SAR (dentro de un plazo de cuatro horas) se midió la humedad superficial del suelo empleando una sonda Theta Probe. Esta sonda mide la humedad volumétrica del suelo en los 6 cm superiores del perfil del suelo. Simultáneamente se midió la rugosidad del suelo con un perfilómetro de agujas.

### Sensibilidad de $\sigma^0_{pq}$ al AIEM

La Figura 5.8 muestra la sensibilidad de los datos de la campaña Casselman con respecto a la humedad y rugosidad, superpuestos con las predicciones del AIEM [1].

Se puede notar claramente que el ajuste entre modelos y observaciones es bastante pero. Los datos reales parecen ser siempre mayores a las predicciones del AIEM. En particular, el ajuste empeora para valores bajos de rugosidad, donde el scattering de un suelo con humedad media ($\epsilon \sim 10$) debería ser menor al observado [1].

### Inversión

A continuación presentamos los resultados de la inversión usando como modelo directo el AIEM. Se observa una tendencia tanto hacia la subestimación como a la sobrestimación, con errores RMSE $\sim$ 0,1 y correlaciones $\sim$ 0,44.

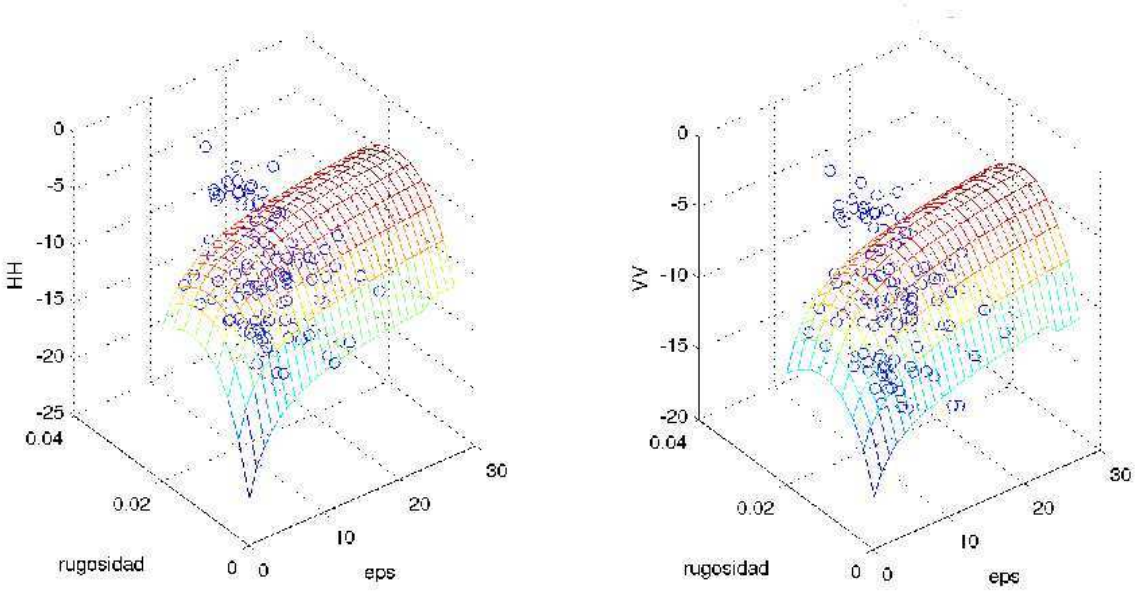



Figura 5.8: Datos del Radarsat-2 en función de la rugosidad y permitividad dieléctrica (eps), superpuesto con las predicciones del AIEM.

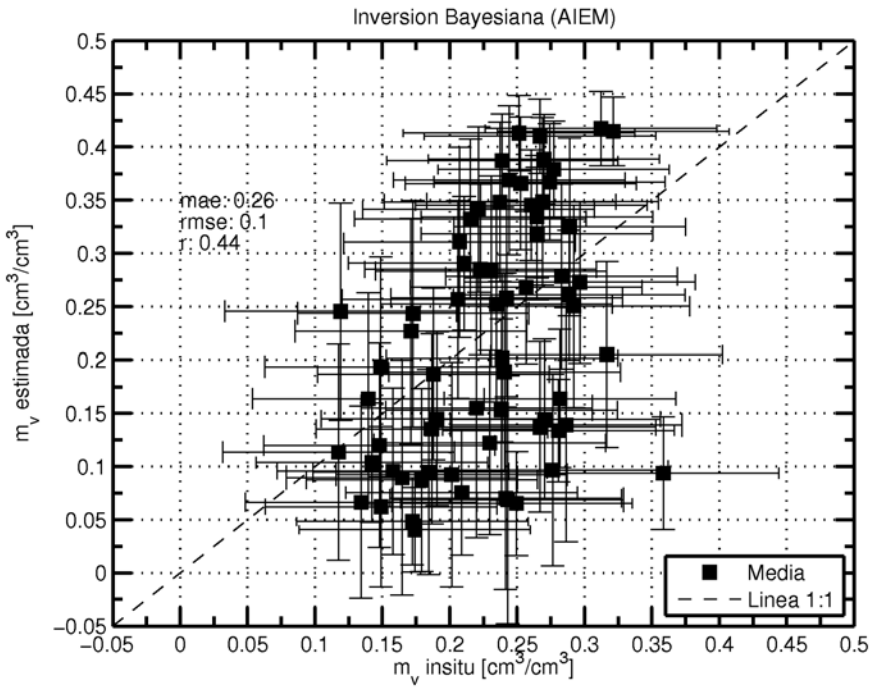



Figura 5.9: Estimación de la humedad del suelo usando el método de inversión directa de AIEM a partir de los datos de la campaña Casselman.

Si bien es ruidosa, la estructura de estos datos es característica de muchos de los análisis actuales de experimentos en condiciones reales. La varianza de la humedad del suelo a campo es importante, debido a la diversidad de condiciones del suelo encontradas. Asimismo, los errores en la estimación también son mayores que en el caso del scatterómetro, ya que se está intentando estimar el valor medio de las variables de las que depende el scattering (humedad y rugosidad) de una parcela grande ($\sim$ decenas de hectáreas), con una decena de mediciones. Esta varianza en los parámetros auxiliares se propaga necesariamente a la estimación con el sistema SAR. Sin embargo, al igual que en el caso de los datos de scatterómetro, los datos presentan una estructura de tipo *vertical*, con mucha más varianza en la estimación que en los datos *in situ*. Más aún, el rango dinámico de la humedad del suelo estimada es grande como el rango dinámico posible de la humedad del suelo, cuando en la realidad sabemos que en la mayoría de los parcelas en el terreno los valores de humedad del suelo estaban confinados al rango 0.15-0.35 $g/g$.

**Inversión: predicción del modelo de capas**

Estos resultados pueden interpretarse en términos de falencias del modelo de scattering. En particular, la mayor varianza en los parámetros estimados (Figura 5.9), en conjunto con las discrepancias entre modelo y observaciones (Figura 5.8), sugieren que existen características del suelo que no se están considerando que afectan el *backscattering*. Entre ellas, la más sugerente es la estudiada en este Capítulo; la existencia de una capa de suelo saturada, localizada a una profundidad $D$ debajo de la superficie. Los efectos de ésta en función de $\epsilon$ y $D$ se muestran el las Figuras 5.10 y 5.11.

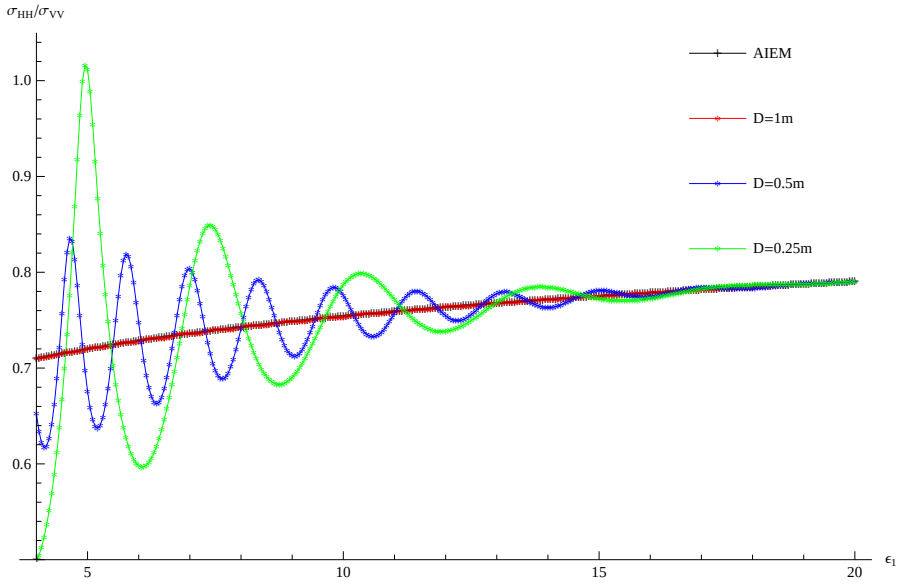



Figura 5.10: Índice P en función de $\epsilon_1$ para distintos valores de la distancia entre capas ($\theta = 40°$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm).

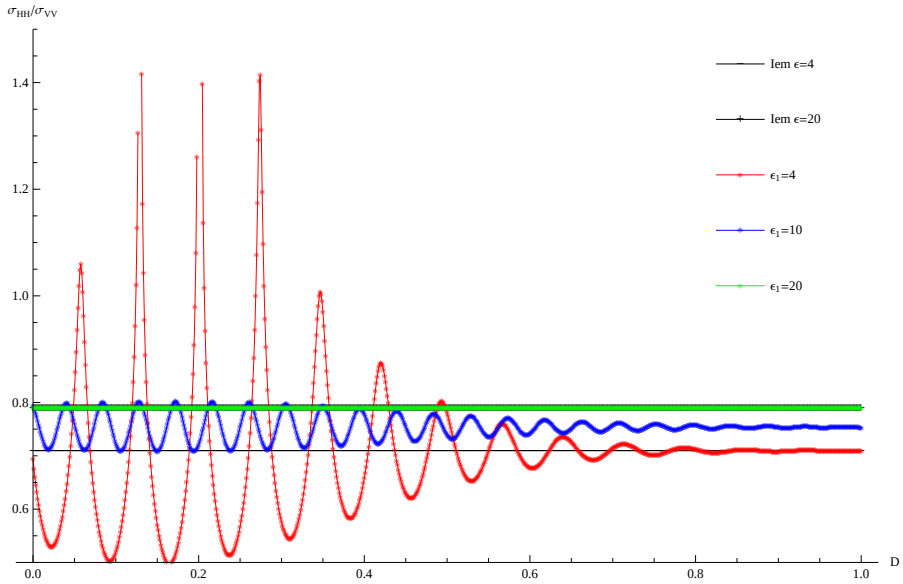



Figura 5.11: Índice P en función de la distancia entre capas para distintos valores de $\epsilon_1$ ($\theta = 40°$, $\epsilon_2 = 20$, $\lambda = 25$cm).

Como vimos previamente, tanto la variación de la humedad de la capa saturada como su distancia a la superficie afectan el *backscattering*. Sin embargo, estas figuras muestran que no solamente afectan la potencia total, sino que afectan de manera diferente a las distintas

polarizaciones. El cociente $p = HH/VV$, que suele utilizarse como indicador de humedad del suelo, se ve fuertemente afectado por la presencia de la capa húmeda cuando $D < 2\lambda$. Como discutimos previamente, si bien este comportamiento fuertemente oscilatorio es característico de aproximaciones que quizá no se cumplan perfectamente en la práctica, es esperable que $p$ sea función de $D$. En este contexto, gran parte de la varianza observada en la Figura 5.9 podría explicarse asumiendo que existe esta capa saturada debajo de la superficie.

### Calibración de un modelo de scattering

En este contexto, es interesante estudiar qué sería necesario para validar este nuevo modelo. El proceso de desarrollo y validación de un modelo de scattering es necesariamente una tarea iterativa. Se plantea un modelo M basado en alguna aproximación física que depende de un conjunto de características del suelo relevantes al *backscattering* S, se miden esos parámetros en el terreno en simultáneo con la medición de un instrumento O (un scatterometro o un SAR) y se comparan las observaciones con las predicciones. Las discrepancias entre observaciones y predicciones se asocian a:

- errores en la medición de S,
- errores en la medición de O
- y errores en las aproximaciones del modelo M.

Los dos primeros tipos de errores son instrumentales, y pueden evaluarse y reducirse en condiciones controladas (por ejemplo, usando un scatterometro en una torre). Por el contrario, los errores asociados a la aproximación física son más complejos de caracterizar, y pueden incluir fallas en el modelado de algún elemento de S, o el hecho de haber ignorado alguna característica del suelo que afecte de manera relevante el *backscattering*. En este último caso, es muchas veces necesario desarrollar un nuevo modelo M', que tome en cuenta estas características incluyéndolos entre la características del suelo relevantes al *backscattering* S' y repetir el proceso de validación. Entonces, una vez planteado este modelo, es relevante comenzar a diseñar experimentos de campo que midan las nuevas entradas del modelo ($\varepsilon_2$ y $D$) en simultaneo con el coeficiente de *backscattering*.

## 5.5. Emisividad de un medio estratificado

Por último, es interesante explorar un subproducto interesante de desarrollar un modelo de *scattering* riguroso. Si el modelo genera una estimación del coeficiente de scattering biestático, siempre es posible estimar la emisividad del medio. Esto es relevante, ya que los productos humedad del suelo más exitosos a escala regional para aplicaciones agro-meteorológicas (tamaño de píxel $\sim$ 25Km $\times$ 25Km) están basados en observaciones de la emisividad de la superficie terrestre en las longitudes de onda de las microondas. Por ejemplo, cabe mencionar el producto a desarrollarse para el instrumento Aquarius en la misión SAC-D. Estos productos están basados en la evidencia experimental que apunta a que la emisividad de un suelo desnudo disminuye ante aumentos de la humedad volumétrica del suelo. Más aún, la emisividad en el canal H ($\mathcal{E}_h$, campo eléctrico siempre paralelo a la superficie) disminuye más rápidamente que la emisividad en el canal V ($\mathcal{E}_v$, campo eléctrico perpendicular). Por ende, el índice de polarización $PI$ [definido como $2\,\frac{\mathcal{E}_v-\mathcal{E}_h}{\mathcal{E}_v+\mathcal{E}_v}$], que es el indicador típico utilizado para estimar humedad del suelo a partir de observaciones de radiómetros, aumenta ante aumentos de humedad del suelo. Actualmente, todos los productos operativos de humedad del suelo (AMSR-E NASA, AMSR-E LPRM, SMOS LPRM) se basan en este principio.

Desde el punto de vista físico, esto puede explicarse a partir de un aumento en la reflectividad de la superficie vinculado a un aumento en la constante dieléctrica (el coeficiente Fresnel aumenta con la constante dieléctrica). Asimismo, el comportamiento con el ángulo de incidencia puede explicarse a primer orden utilizando la aproximación de Kirchhoff. Sin embargo, un suelo de agricultura no puede considerarse plano, inclusive para $\lambda = 25$cm. Por ende, la dependencia con la constante dieléctrica y el ángulo de incidencia es más compleja que la esperada. Además, la emisividad de capas interiores del suelo, dispersada dentro del mismo, aporta también a la energía medida.

Para evaluar de manera cuantitativa estos fenómenos, es necesario desarrollar un modelo de la emisividad de suelos de agricultura. Considerando que la energía medida por el radar es la dispersada por la superficie más la emitida por la misma (comportamiento radiativo), podemos escribir lo siguiente:

$$E_t = E_s + E_a \rightarrow 1 = \frac{E_s}{E_t} + \frac{E_a}{E_t} \tag{5.5}$$

donde $Es/Et$ es la reflectividad total del medio y $Ea/Et$ su emisividad.

Es posible calcular la emisividad de un medio a partir de su coeficiente $\sigma^0$. Es importante recalcar que esa expresión supone que el medio no tiene pérdidas ($Im(\epsilon) = 0$), lo cual es una aproximación razonable en microondas. La reflectividad total del medio $Es/Et$ es la integral sobre todo el semi-espacio superior de la sección eficaz de la superficie. Entonces, la emisividad puede escribirse como [14, 15],

$$\mathcal{E}_q(\theta, \lambda, \epsilon) = 1 - \frac{1}{4\pi} \iint d\theta_s d\phi_s \; \sigma_{qp}(\theta_s, \phi_s; \theta, \lambda, \epsilon) \tag{5.6}$$

Para el caso de nuestro modelo de capas, esta integral se calcula a partir de la expresión (4.56). A partir de este formalismo, es posible derivar una expresión para la emisividad en microondas de suelos de agricultura con una estructura geométrica y dieléctrica compleja. El único requerimiento extra para que esta derivación sea válida es que la varianza del perfil del suelo sea mucho menor que la separación entre capas, $s \ll D$.

A modo de ejemplo, los coeficientes de emisividad para cada canal muestran el siguiente comportamiento en función de la distancia media entre las capas ($D$) para condiciones típicas de suelos de agricultura.

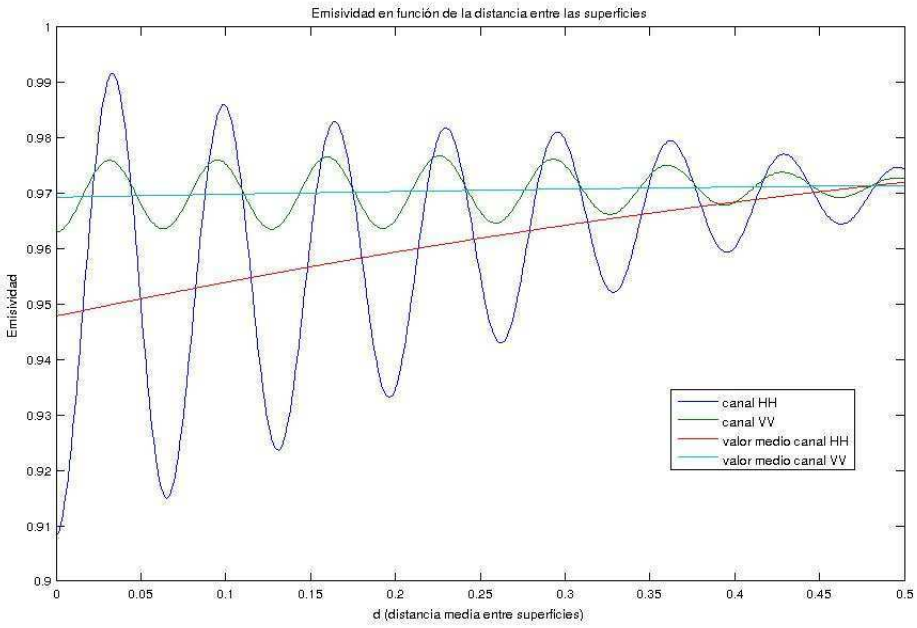



Figura 5.12: Emisividad para los canales copolarizados en el modelo de capas.

De la figura se pueden desprender varias conclusiones relevantes a la estimación de la humedad del suelo desde el espacio.

- La emisividad para ambas polarizaciones esta acotada al rango $0 < \mathcal{E} < 1$. Esto es muy importante, ya que corresponde al rango físico de la variable medida. Que la integral del coeficiente $\sigma_0$ este acotada es otra prueba de que el formalismo desarrollado en esta tesis cumple el principio de conservación de la energía, ya que la derivación independiente de $Es/Et$ está también en el rango $0 - 1$. En última instancia, esto se debe a que este formalismo esta basado en el principio de Huygens para calcular el campo dispersado.

- La emisividad en ambas polarizaciones presenta un comportamiento ondulatorio, característico de los patrones de interferencia coherente entre dos planos. Sin embargo, es relevante notar que estos patrones raramente se observan en la realidad, ya que ninguna de las dos interfaces se compone de planos perfectos a la escala de un radiómetro (25Km $\times$ 25Km). Sin embargo, las simulaciones muestran que los valores medios de ambas emisividades sí dependen fuertemente de $D$.

- Los valores iniciales de $\mathcal{E}_h$ y $\mathcal{E}_v$ son significativamente distintos a los correspondientes a un medio sin capa inferior ($D \to \infty$). Esto implica que la existencia de un estrato de suelo más húmedo debajo de un suelo seco tiene un efecto sustancial en la emisividad observada para $D \lesssim \lambda$.

- la emisividad en ambos canales recupera los resultados usuales cuando la distancia entre las capas se hace mucho más grande que la longitud de onda incidente. Esto es, cuando la segunda interface entre ambos medios está suficientemente lejos ($\lambda \gg D$).

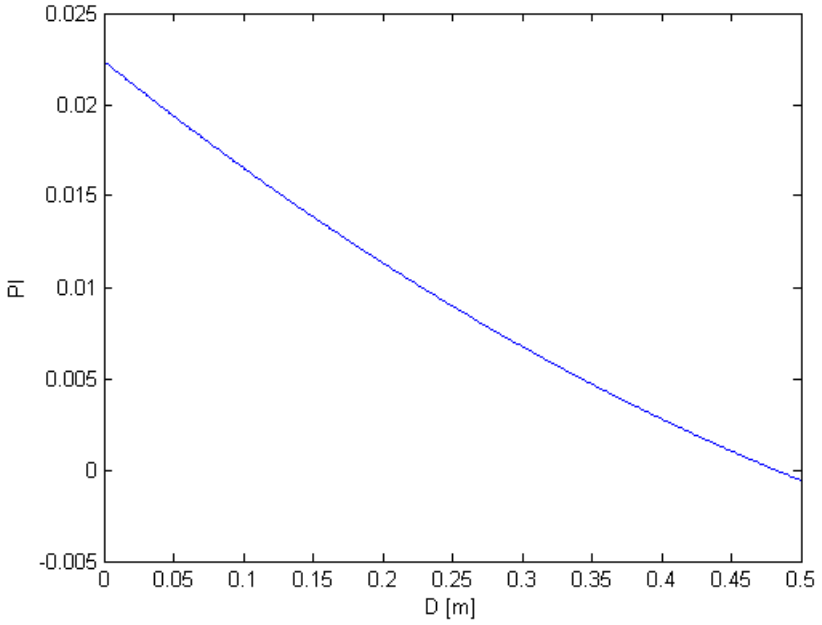



Figura 5.13: Índice de polarización simulado de un arreglo de dos capas en función de $D$, con $\epsilon_2 = 20$.

Por último, el índice de polarización $PI$, que es el indicador típico utilizado para estimar humedad del suelo a partir de observaciones de radiómetros, resulta función de las características y posición de la capa inferior. En particular, para $\epsilon_2$ fijo (humedad del estrato de suelo saturado) y $D \sim \lambda$, las simulaciones del modelo desarrollado predicen que el $PI$ es inversamente proporcional a $D$. En otras palabras, los productos humedad del suelo basados en datos de radiómetros que utilicen modelos que asuman una única capa, confundirán un aumento en la humedad superficial del suelo con una disminución en la distancia al estrato de suelo saturado.

# 6

# Dispersión de volumen en medios aleatorios

El capítulo final de este trabajo está dedicado a resolver la dispersión que produce un medio no homogéneo ubicado debajo de la superficie aleatoria. En los Capítulos 4 y 5 hemos estudiado cuáles son los efectos que produce la inclusión de una capa plana debajo de la superficie que ilumina el satélite. En ese problema, consideramos que tanto el medio que se encuentra entre las dos superficies como el que está debajo de la segunda son homogéneos, descriptos cada uno por sus respectivas constantes dieléctricas.

Para hacer más realista el modelo de scattering, el siguiente paso es considerar que debajo de la superficie aleatoria se encuentra un medio semi-infinito (no hay una segunda interface) pero el mismo no tiene una permitividad eléctrica constante, sino que presenta fluctuaciones. La motivación de este problema está basada en que en los medios reales se encuentran inhomogeneidades debidas a burbujas de aire y agua presentes en las capas subterraneas.

En este capítulo nos proponemos resolver este problema escribiéndolo desde una perspectiva basada en la Teoría estocástica de campos [40, 49, 50, 51]. Para ello primero haremos una correspondencia entre la expansión diagramática [9, 52, 53, 54, 55, 56], con una teoría de campos estocástica basada en la formulación de integrales de camino [57, 58, 59, 60]. Luego, usaremos esta última técnica para resolver de manera más eficiente el problema de scattering, haciendo uso de la expansión de diagramas irreducibles de dos partículas (2 *particle irreducible*, 2PI) [40, 43].

A continuación describiremos brevemente la expansión diagramática, dando las aproximaciones que se utilizan para resolver a orden más bajo el problema de scattering. Luego, expondremos la formulación funcional para calcular valores medios y funciones de correlación de un campo estocástico, dando una breve descripción de la acción efectiva 2PI. Con estas

herramientas calcularemos el campo dispersado por el medio aleatorio y mostraremos que, al mismo orden perturbativo, el método funcional da resultados cualitativamente distintos a los obtenidos con la primer presentación del problema.

## 6.1. Expansión diagramática para el campo medio

Al igual que en el problema de scattering superficial, el cual describimos en el Capítulo 2, en el caso de medios inhomogéneos no se puede dar una solución cerrada para el campo dispersado. La estrategia para resolver la dispersión EM es escribir una serie perturbativa en donde los términos de mayor orden vayan dando cuenta de los distintos niveles de scattering que adquiere la onda incidente en el medio. Este tipo de formulación se conoce como ecuación de Dyson [9, 40, 41, 43, 49, 50, 51]. Esta ecuación ya la hemos escrito en el Capítulo 2; la ecuación (2.29) que da el campo dispersado por la superficie aleatoria es la ecuación de Dyson del problema. En ese caso era posible dar una serie para el propio campo, tomando como resultado básico la aproximación de plano tangente. En el problema que resolveremos en estos Capítulos finales no es posible dar una ecuación para el campo mismo, sino que el problema requiere resolver la ecuación de Dyson para la función de Green del campo, lo cual aumenta el grado de complejidad del problema. El resultado básico que usaremos, análogo a la aproximación de Kirchhoff del Capítulo 2, es la función de Green en el espacio homogéneo, la cual se puede calcular analíticamente.

Nuestro objetivo en esta parte del trabajo es resolver las ecuaciones de Maxwell en donde la permitividad dieléctrica no es constante sino que es una variable aleatoria. La naturaleza estocástica viene dada porque la distribución de burbujas de aire y agua que se encuentran en las capas subterráneas es totalmente azarosa. Por lo tanto, la manera de describir ese proceso es definir un medio dieléctrico con una permitividad dieléctrica compuesta de dos términos: valor medio más fluctuaciones; además, para caracterizar completamente al medio, es necesario dar la densidad de probabilidad y la función de correlación de las fluctuaciones.

### 6.1.1. Ecuaciones para el campo medio

La formulación del problema puede darse escribiendo la ecuación dinámica para el campo eléctrico en el medio ó dar la ecuación para la función de Green y luego sí escribir el campo eléctrico a partir de ella.

La ecuación que verifica la función de Green ($\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\nabla\times\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)-\omega^2\mu\epsilon\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\bar{\bar{I}}\\
&\nabla\times\nabla\times\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)-\omega^2\mu<\epsilon>\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\bar{\bar{I}}+Q(\mathbf{r})\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)
\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde escribimos a la permitividad eléctrica como la suma de su valor medio y una parte fluctuante: $\epsilon(\mathbf{r})=<\epsilon>+\epsilon(\mathbf{r})$ y definimos $Q(\mathbf{r})=\omega^2\mu\epsilon(\mathbf{r})$.

La solución a $\bar{\bar{G}}$ puede ser dada de manera integral, procediendo exactamente como lo hicimos para hallar la ecuación (2.29). Formalmente, la solución a (6.1) es

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\int d\mathbf{r}_1\ \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_0)\\
&\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\int d\mathbf{r}_1\ \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_0)\\
&+\int d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2\ \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2)\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_0)+\cdots
\end{aligned}\tag{6.2}$$

Esta ecuación tiene la misma estructura que la ecuación (2.29). Hay un término de orden cero, que en este caso representa la propagación de una onda esférica en un medio homogéneo en donde no hay dispersión, luego hay un término que considera solo un proceso dispersivo; el término $n-esimo$ dará cuenta de una dispersión con $n$ procesos.

El campo dispersado se escribe, usando la función de Green, como:

$$\vec{E}_s(\mathbf{r})=\int d\mathbf{r}'\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})Q(\mathbf{r}')\vec{E}(\mathbf{r}')\tag{6.3}$$

El fin que buscamos es calcular el coeficiente de retrodispersión $\sigma^0$, el cual es proporcional a la potencia incoherente dispersada por el medio. Esto requiere calcular valores medios del campo y del cuadrado del campo dispersado. En la formulación que estamos llevando a

cabo, se traduce en calcular valores medios de la función de Green y del producto entre dos de ellas. Por lo tanto, lo que debemos calcular se puede resumir en las siguientes dos ecuaciones:

- Valor medio de la función de Green

$$
\begin{aligned}
&< \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) >= \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\; \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_0) < Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2) > \\
&+ \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3\, d\mathbf{r}_4\; \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_4,\mathbf{r}_0) \\
&[< Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2) >< Q(\mathbf{r}_3)Q(\mathbf{r}_4) > + < Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_3) >< Q(\mathbf{r}_2)Q(\mathbf{r}_4) > \\
&+ < Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_4) >< Q(\mathbf{r}_2)Q(\mathbf{r}_3) >] + \cdots
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

en donde asumimos que las fluctuaciones $Q(\mathbf{r})$ tienen una estadística gaussiana con media cero, y en consecuencia valores medios con un número impar de fluctuaciones se anulan.

- Valor medio del producto de dos funciones de Green

$$
\begin{aligned}
&< \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\bar{\bar{G}}^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0') >= \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\bar{\bar{G}}^{0*}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0') \\
&+\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \int d\mathbf{r}_1'\, d\mathbf{r}_2'\; \bar{\bar{G}}^{0*}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_1')\bar{\bar{G}}^{0*}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')\bar{\bar{G}}^{0*}(\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_0') < Q^*(\mathbf{r}_1')Q^*(\mathbf{r}_2') > \\
&+\bar{\bar{G}}^{0*}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0') \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\; \bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\bar{\bar{G}}^0(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_0) < Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2) > + \cdots
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Para resolver estos valores medios vamos a usar las siguientes aproximaciones: en (6.4), llamada ecuación de Dyson, usaremos la aproximación bilocal y la aproximación no lineal [9] para sumar las distintas contribuciones de los valores medios $< Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2) >$. En la ecuación (6.5), conocida como ecuación de Bethe-Salpeter, usaremos la aproximación escalera (o *ladder approximation*) para retener los primeros términos no nulos de la misma. Además, con cada aproximación daremos la expansión diagramática correspondiente, con el objetivo final de comparar estos diagramas con los calculados usando la técnica 2PI y ver cuál de las dos expansiones es más eficiente, en el sentido de que al mismo orden perturbativo, se tengan en cuenta más procesos físicos debidos a la interacción con el medio aleatorio.

Si bien las ecuaciones del problema eléctrico tienen carácter vectorial, para estudiar cómo funcionan las aproxiamciones descriptas arriba pasaremos a trabajar con el problema

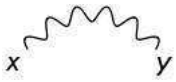
escalar (o acústico), en donde la ecuación fundamental para el campo físico $\Phi(\mathbf{r})$ es la de Helmholtz: $(\nabla^2 + Q^2)\Phi = 0$, donde $\nabla^2$ representa el operador diferencial que actúa sobre el campo. En lo que resta del capítulo trabajermos con la variable $\Phi$ y los puntos espaciales serán notados con $x$ simplemente.

### 6.1.2. Operador de masa

La ecuación (6.4) es una serie perturbativa que se basa en expandir la función de Green real del problema en potencias de dos cantidades fundamentales: la función de Green en el espacio libre ($G^{(0)}$) y los valores de expectación de la fluctuación $Q(\mathbf{r})$. Es usual, y conveniente, representar este tipo de ecuación a través de diagramas de Feynman. Vamos a introducir la siguiente correspondencia entre cantidades matemáticas y diagramas:

- función de Green libre: $G^{(0)}(x, y) =$

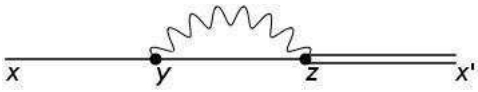
;
- valor medio de la función de Green: $\langle G(x, y)\rangle =$

- correlación para las inhomogeneidades: $C(x, y) = \langle Q(x)Q(y)\rangle =$ 


Además, un punto de la forma $\bullet$ indica que se debe integrar sobre esa posición en el espacio. Por ejemplo, el diagrama correspondiente a

$$\int dy\, dz\, G^{(0)}(x, y)\, G^{(0)}(y, z)\langle Q(y)Q(z)\rangle\langle G(z, x')\rangle$$

es




Usando la representación diagramática, la ecuación 6.4 se puede reescribir de la siguiente manera:

Con este tipo de representación se puede observar que en la ecuación de Dyson hay dos tipos de términos bien definidos:

1. los que no se pueden obtener de diagramas más simples cortando sólo una línea correspondiente a la función de Green libre ($G^{(0)}$);

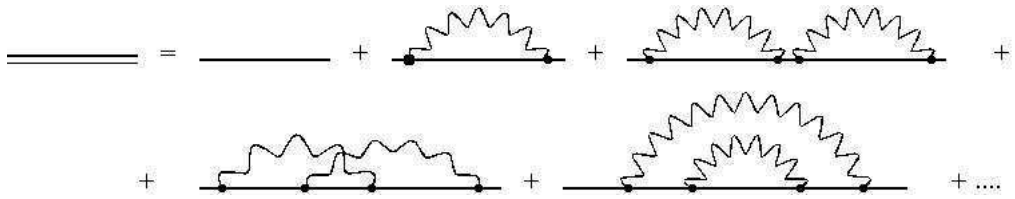


Figura 6.1: Representación diagramática de la ecuación de Dyson para la función de Green.

2. los que resultan del producto de diagramas anteriores.

Ejemplos del primer tipo de diagramas son los que aparecen en segundo, cuarto y quinto lugar en la figura 6.1, los cuales son llamados diagramas irreducibles de una partícula (1PI). Los diagramas reducibles o factorizables (que no son 1PI) son como el tercer diagrama de la serie, el cual es un producto del segundo diagrama, y por lo tanto puede ser reducido cortando una línea de la función de Green libre.

Figura 6.2: Diagramas de una partícula, reducible e irreducible respectivamente

Dado que los diagramas que no son 1PI se pueden obtener de los que sí lo son, es útil definir un operador que contenga a todos los diagramas irreducibles, ya que a partir de productos sucesivos se pueden obtener todos los diagramas no 1PI. El operador de masa ($\mathcal{Q}$, $\otimes$) se define entonces como el operador que contiene a todos los diagramas que no se pueden reducir cortando una línea de la función $G^{(0)}$. Su representación diagramática es la siguiente:

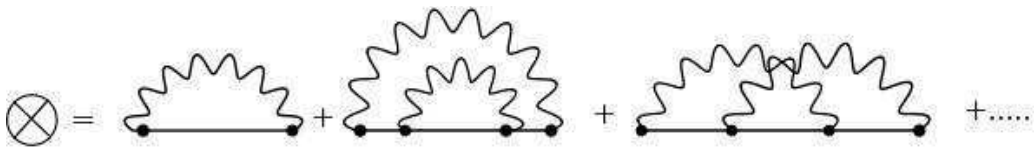


Figura 6.3: Definición del operador de masa.

A partir del operador de masa podemos obtener el diagrama no 1PI que usamos como ejemplo más arriba. Dado que el primer término de $\mathcal{Q}$ es $C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ el primer diagrama reducible se obtiene multiplicando dos veces el diagrama anterior.

La principal utilidad que tiene el operador de masa es que permite reescribir la ecuación de Dyson de una manera compacta:

$$\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle = G^0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1'\, d\mathbf{r}_2'\, G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1')\mathcal{Q}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')\langle G(\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_0)\rangle \tag{6.6}$$

o diagramáticamente como

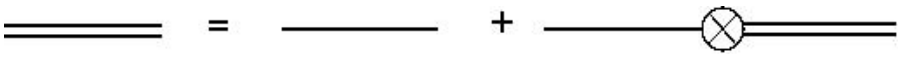


Figura 6.4: Ecuación de Dyson escrita en términos del operador de masa.

Dado que el operador $\mathcal{Q}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ es la suma de todos los diagramas 1PI no se puede dar una expresión cerrada para él. Resulta necesario entonces contar con alguna aproximación para poder calcularlo explícitamente.

La aproximación más sencilla que se puede dar es la bilocal, la cual define al operador de masa como

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \approx C(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)G^{(0)}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \tag{6.7}$$

donde $C(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ es la función de correlación que caracteriza a las fluctuaciones en el medio aleatorio.

Lo que implica que

$$\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle \approx G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}_1'\, d\mathbf{r}_2' G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1')\, G^{(0)}(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2')C(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\langle G(\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_0)\rangle \tag{6.8}$$

A pesar de que la aproximación bilocal es la más simple que se puede dar, la ecuación de Dyson sigue siendo una ecuación integral, ya que la función de Green real del problema aparece en ambos lados de la igualdad. Este comportamiento será general: sin importar qué tipo de aproximación se haga sobre el operador de masa, la ecuación para la función de Green estará dada siempre de manera integral. Lo que permitirán las diferentes aproximaciones hechas sobre $\mathcal{Q}$ es sumar de manera sistemática distintos tipos de diagramas. Cuanto más compleja sea la expresión dada para el operador de masa, más diagramas serán sumados en la ecuación de Dyson.

Una de las restricciones que impone la aproximación bilocal es que la varianza que caracteriza a las fluctuaciones del medio aleatorio sea chica [9]. Físicamente significa que la permitividad dieléctrica de las burbujas no difiera mucho del medio material en el cual están inmersas. Esto es una gran limitación ya que en los casos reales las fluctuaciones y el medio material de fondo pueden tener permitividades dieléctricas muy distintas. Por ejemplo, para un suelo húmedo, la constante dieléctrica puede ser veinte veces más grande que la permitividad del aire.

Una manera de mejorar la aproximación no lineal es redefinir al operador de masa usando una aproximación que dependa de la función de Green del problema real. Esta aproximación es no lineal, ya que como veremos a continuación, la ecuación integral para el valor medio de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ tendrá un término con el producto de dos funciones de Green.

### 6.1.3. Aproximación no lineal

A través del operador de masa, el valor medio para la función de Green quedó escrito de manera compacta en la ecuación (6.6). Esta ecuación contiene todos los diagramas 1PI, a partir de los cuales se pueden reobtener todos los diagramas que no son 1PI. Los diagramas 1PI pueden, a su vez, ser distinguidos en dos tipos:

1. aquellos que quedan encerrados por una línea de la función de correlación y no tienen líneas internas cruzadas;

2. los que tienen líneas cruzadas de la función de correlación.

Figura 6.5: Diagramas sin y con línea interna cruzada, respectivamente.

El segundo tipo de diagrama puede ser obtenido a partir del primero. Esto sugiere definir un nuevo operador. Así como definimos el operador de masa (que contiene sólo los diagramas 1PI) para dar todos los diagramas que están presentes en la ecuación de Dyson, podemos dar un nuevo operador, que llamaremos *operador de masa renormalizado*, que sólo

contiene los diagramas 1PI que no posean líneas cruzadas de la función de correlación. Este operador se define usando la función de Green del problema real y no a través de la función libre $G^{(0)}$ usada en el primer caso.

El operador de masa que utilizamos en (6.6) se puede reescribir como

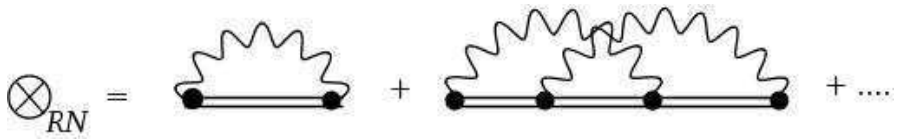



Figura 6.6: Operador de masa renormalizado.

$$\mathcal{Q}_{RN} \approx \langle Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2)\rangle \langle G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\rangle \tag{6.9}$$

La aproximación no lineal se reduce a tomar sólo el primer término de esta serie. La ecuación de Dyson queda reescrita como

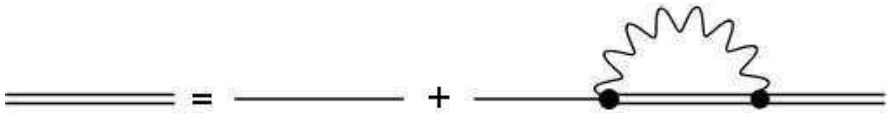



Figura 6.7: Ecuación de Dyson usando la aproximación no lineal.

$$\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle = G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \int d\mathbf{r}1\; d\mathbf{r}_2\; G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\,\langle Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_2)\rangle\,\langle G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\rangle\,\langle G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_0)\rangle \tag{6.10}$$

En esta ecuación se aprecia el carácter no lineal de la aproximación. Al redefinir el operador de masa con aquellos diagramas 1PI que no tienen líneas internas cruzadas, la ecuación integral para la función de Green quedó con un término que es el producto de la propia función incógnita del problema.

### 6.1.4. Aproximación escalera (*ladder approximation*)

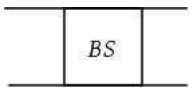
El cálculo de la potencia incoherente dispersada por el medio aleatorio involucra conocer tanto el campo medio dispersado como el valor medio del cuadrado del campo. Respectivamente, estas cantidades vienen dadas por las ecuaciones (6.4) y (6.5). Ya mostramos cómo

trabajar con la primera de estas ecuaciones. Vamos ahora a desarrollar, de manera análoga, la segunda de ellas.

La ecuación para valor medio del cuadrado del campo dispersado es conocida como la ecuación de Bethe-Salpeter (BS) [9]. Es una serie perturbativa basada en la función de Green libre y en la función de correlación de las fluctuaciones. Cortar la expansión en un orden arbitrario puede resultar problemático, ya que cuando se calcula la potencia dispersada, si no se retienen términos del mismo orden tanto en (6.4) como en (6.5), no se puede asegurar la conservación de la energía. Además, truncar la ecuación de BS es poco eficiente. Al igual que lo hecho para trabajar la ecuación de Dyson, se puede definir un operador que resume todos los diagramas de cierto tipo y, aún trabajando a órdenes bajos en la expansión de (6.5), dar un resultado para la varianza del campo que provenga de la suma de infinitos diagramas.

Para representar con diagramas el valor medio del producto de dos funciones de Green es necesario introducir un diagrama para el valor medio del producto de dos funciones $G$:

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\, G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0')\rangle =$$




Cuando se toma el valor medio se obtienen términos (o diagramas) que pueden ser separados en tres tipos de familias:

1. los que sólo involucran funciones de correlación entre puntos sucesivos del desarrollo de una sóla de las funciones de Green;

2. los que involucran funciones de correlación entre puntos que provienen del desarrollo de las distintas funciones de Green, pero cuyas líneas internas no se cruzan;

3. los que tienen líneas cruzadas, ya sea entre puntos de la misma función de Green o entre puntos de las distintas funciones de Green.

Los primeros provienen exclusivamente de $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\rangle$ y pueden ser representados por los diagramas desarrollados en la subsección anterior.

Los segundos pueden ser factorizados cortando dos líneas que correspondan a $G^{(0)}$.

Los terceros son los diagramas fundamentales, los cuales no pueden ser reducidos cortando una sola línea. Los diagramas del segundo tipo se pueden obtener a partir de estos.

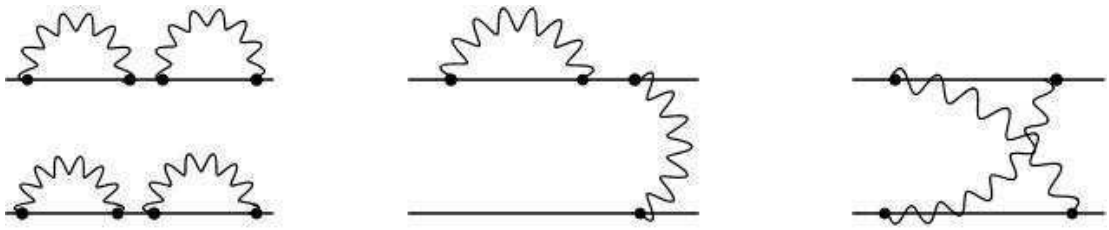


Figura 6.8: Distintos tipos de diagramas presentes en la ecuación de Bethe-Salpeter.

La suma de todos los diagramas irreducibles definen al operador intensidad ($\mathcal{I}$). Todos los diagramas reducibles se obtienen con un producto de este operador.

La estructura para la ecuación de BS es totalmente análoga a la desarrollada para la ecuación de Dyson. Existe un operador (de masa o de intensidad) que suma todos los diagramas fundamentales y a partir del cual se puede reescribir la ecuación integral (de Dyson o de BS). A través del operador intensidad, la ecuación BS es:

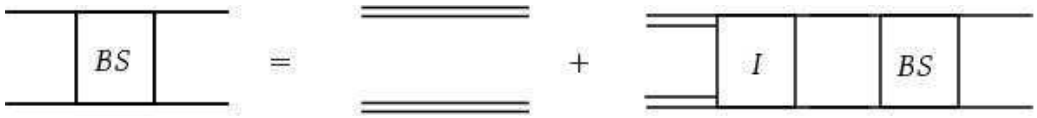



Figura 6.9: Ecuación de Bethe-Salpeter en términos del operador intensidad.

$$\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, G^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0')\rangle = \langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle\, \langle G(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0')\rangle$$
$$+ \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_1'\, d\mathbf{r}_2'\, \langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\rangle\, \langle G^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}_1')\rangle \mathcal{I}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_2') \langle G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_0)\, G^*(\mathbf{r}_2',\mathbf{r}_0')\rangle \quad (6.11)$$

Del mismo modo que fue dada una aproximación para trabajar con el operador de masa, se debe dar una aproximación para el operador intensidad. Ambos son la suma de infinitos diagramas de la ecuación de Dyson o BS, aún así, cada uno tiene una expansión en serie de potencias de la función de correlación de las fluctuaciones del medio dieléctrico y de la función de Green del problema real. Para el operador de masa, luego de una redefinición del mismo, sólo se retuvo el primer término de la serie, dando lugar a la aproximación no lineal. En el caso del operador intensidad, también se retiene sólo el primer término de la serie.

$$\mathcal{I}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2;\mathbf{r}_1',\mathbf{r}'2) \approx \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2')\, \langle Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1')\rangle \quad (6.12)$$

Esta es la aproximación escalera o *ladder approximation.*

La ecuación de BS se reduce por lo tanto a

$$\begin{aligned}&\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, G^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0')\rangle \approx \langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle\, \langle G^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0')\rangle \\ &+ \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_1' \langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\rangle\, \langle G^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}_1')\rangle \langle Q(\mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1')\rangle \langle G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_0)\, G^*(\mathbf{r}_1',\mathbf{r}_0')\rangle \end{aligned} \tag{6.13}$$

La ecuación de Dyson y la ecuación de BS son exactas. Pero son ecuaciones integrales que sólo pueden ser resultas usando un esquema perturbativo. Con las aproximaciones hechas sobre los operadores de masa e intensidad se pueden resolver las dos ecuaciones a orden más bajo cada una y de manera tal que, con estas aproximaciones, la energía del sistema se conserve [9].

## 6.2. Formulación funcional para el campo medio

Una manera alternativa para resolver el problema del scattering sobre medios inhomogéneos es pensar a la magnitud física que quiere ser observada como un campo estocástico. Desde esta perspectiva, los métodos funcionales resultan una herramienta natural para calcular valores medios del campo y de sus productos [40, 49, 50, 51, 61]. La idea es escribir un funcional generador que permita derivar los cálculos de manera sistemática, de similar a lo hecho en la Sección 4.5.

Para un campo estocástico, el funcional generador es la extensión natural de la función de partición usada en mecánica estadística [49, 51]. Como introducción, vamos a describir las ideas del funcional generador para un campo escalar; la extensión a un campo vectorial luego será inmediata.

Consideremos que un campo físico estocástico ($\Phi(x)$) tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\nabla^2\Phi(x) - \varepsilon(x)\Phi(x) = -j(x) \tag{6.14}$$

en donde $\varepsilon(x) = \bar{\epsilon} + \epsilon(x)$ es una variable estocástica y $\nabla^2 = \mathbf{\Delta} - \partial_{tt}$ representa el operador diferencial para la ecuación de ondas. En un medio no dispersivo las derivadas

temporales se reemplzan por un factor $\imath\omega$, ya que el problema general se puede descomponer en modos de Fourier.

El funcional generador a partir del cual se obtienen los valores medios del campo se define como [40, 49, 50, 51]

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}(x),\mathcal{J}^*(x')] = e^{\imath W[\mathcal{J}(x),\mathcal{J}^*(x')]} \equiv \int \mathcal{D}\Phi\,\mathcal{D}\Phi^*\;\mathcal{P}[\Phi(x),\Phi^*(x')]e^{\imath(\mathcal{J}(x)\Phi(x)+\mathcal{J}^*(x')\Phi^*(x'))} \tag{6.15}$$

donde $\mathcal{P}[\Phi(x),\Phi^*(x')]$ es la densidad de probabilidad conjunta para los campos $\Phi(x)$ y $\Phi^*(x')$. Además, el término $\mathcal{J}(x)\Phi(x)$ lleva implícito una integración espacial.

A partir de este funcional, es sencillo ver que los valores medios se obtienen tomando variaciones respecto a las variables auxiliares $\mathcal{J}(x)$ y $\mathcal{J}^*(x')$:

$$\langle\Phi(x)\rangle = \frac{1}{\imath}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}}W[\mathcal{J},\mathcal{J}^*]\big|_{\mathcal{J}=0} \tag{6.16}$$

Para hallar $\mathcal{P}[\Phi(x),\Phi^*(x')]$ consideremos los campos $\Phi[\epsilon,j]$ y su conjugado, los cuales son solución de $[\mathbf{\Delta}+\omega^2-\bar{\epsilon}-\epsilon(x)]\Phi(x) = -j(x)$ para una dada realización de $\varepsilon(x)$. La probabilidad del campo $\Phi$ se puede pensar como la probabilidad de que ocurra $\Phi[\epsilon,j]$ pesado por la densidad de probabilidad de $\epsilon$:

$$\mathcal{P}[\Phi(x),\Phi(x')] = \int \mathcal{D}\epsilon\;\mathcal{P}[\epsilon]\;\delta\left[\Phi-\Phi[\epsilon,j]\right]\;\delta\left[\Phi^*-\Phi^*[\epsilon,j^*]\right] \tag{6.17}$$

Teniendo en cuenta que $\Phi[\epsilon,j]$ verifica

$$\begin{aligned}&(\mathbf{\Delta}+\omega^2-\bar{\epsilon}-\epsilon(x))\Phi[\epsilon,j] = -j\\ &\mathbf{D}_\epsilon\Phi[\epsilon,j]+j=0,\;\;\text{siendo}\;\mathbf{D}_\epsilon = \mathbf{\Delta}+\omega^2-\bar{\epsilon}-\epsilon(x)\end{aligned} \tag{6.18}$$

entonces $\delta\left[\Phi-\Phi[\epsilon,j]\right]\neq 0 \Leftrightarrow \Phi-\Phi[\epsilon,j]=0$. Usando (6.18), podemos reescribir la última igualdad como sigue: $\delta\left[\Phi-\Phi[\epsilon,j]\right]\neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{D}_\epsilon\Phi+j=0$. Las deltas de Dirac cambian de variables según [62, 63, 64, 65]:

$$\delta\left[\Phi-\Phi[\epsilon,j]\right] = K\delta\left[\mathbf{D}_\epsilon\Phi(x)+j(x)\right] \tag{6.19}$$

donde $K = Det(\mathbf{D}_\epsilon)$ es el *Jacobiano* del cambio de variables. En rigor, no es un cambio de variables sino un cambio de funciones; el Jacobiano en este caso es un operador diferencial, el cual no siempre es posible de calcular. Una manera de evitar este cálculo es exponenciarlo, introduciendo nuevos campos auxiliares ($\xi$ y $\eta$) [49, 51, 62, 63]:

$$K = Det(\mathbf{D}_\epsilon) = \int \mathcal{D}\xi\, \mathcal{D}\eta\; e^{\imath \xi \mathbf{D}_\epsilon \eta} \tag{6.20}$$

Estos nuevos campos auxiliares ($\eta$ y $\xi$) verifican el álgebra de Grassman [49, 51]. La propiedad fundamental de estos campos es que anticonmutan y que permiten escribir un determinante como una integral gaussiana. En el apéndice D se desarrolla brevemente la manera de exponenciar un determinante usando las variables de Grassman.

Las deltas de Dirac también pueden ser exponenciadas. Haciendo un análogo a la relación de completitud de la expansión en modos de Fourier para una función ordinaria, las deltas funcionales pueden ser exponenciadas como sigue:

$$\delta\left[\mathbf{D}_\epsilon \Phi + j\right] = \int \mathcal{D}\psi^*\; e^{\imath \psi^* (\mathbf{D}_\epsilon \Phi + j)} \tag{6.21}$$

Reemplazando esta exponenciación en la densidad de probabilidad de los campos $\Phi$, obtenemos que

$$\mathcal{P}[\Phi(x), \Phi(x')] = \int \mathcal{D}\epsilon\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^*\; K K^*\; \mathcal{P}[\epsilon]\; e^{\imath \psi [\mathbf{D}_\epsilon \Phi(x) + j(x)]}\, e^{\imath \psi^* [\mathbf{D}_\epsilon \Phi^*(x) + j^*(x)]} \tag{6.22}$$

Considerando que el término estocástico $\epsilon$ tiene una densidad de probabilidad, gaussiana podemos escribir que $\mathcal{P}[\epsilon] = e^{-\frac{1}{2}\epsilon(x) C^{-1}(x,x')\epsilon(x')}$, donde $C^{-1}(x,x')$ es la función de autocorrelación.

Con los resultados desarrollados hasta aquí podemos finalmente escribir la densidad de probabilidad para los campos físicos, la cual resulta

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}[\Phi(x), \Phi(x')] = \int \mathcal{D}\epsilon\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^*\, \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}\xi\, \mathcal{D}\eta^*\, \mathcal{D}\xi^*\, \mathcal{D}\xi\, \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}\xi'\, \mathcal{D}\eta' \\
&\exp\left[-\frac{1}{2}\epsilon(x) C^{-1}(x,x')\epsilon(x')\right] \exp\left[\imath \xi \mathbf{D}_\epsilon \eta\right] \exp\left[\imath \xi' \mathbf{D}_\epsilon \eta'\right] \\
&\exp\left[\imath \psi^* \left(\mathbf{D}_\epsilon \Phi(x) + j(x)\right)\right] \exp\left[\imath \psi \left(\mathbf{D}_\epsilon \Phi^*(x') + j^*(x')\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Ya calculada la densidad de probabilidad de los campos, podemos finalmente escribir el funcional generador para los mismos. Reemplazando esta última ecuación en (6.15) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}[\mathcal{J}(x),\mathcal{J}^*(x')] = e^{\imath W[\mathcal{J}(x),\mathcal{J}^*(x')]} = \\
&\int \mathcal{D}\Phi\,\mathcal{D}\Phi^*\,\mathcal{D}\epsilon\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^*\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}\eta^*\,\mathcal{D}\xi^*\,\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\xi'\,\mathcal{D}\eta' \\
&\exp\left[\mathcal{J}(x)\Phi(x)+\mathcal{J}^*(x')\Phi^*(x')\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\epsilon(x)C^{-1}(x,x')\epsilon(x')\right]\exp\left[\imath\xi\mathbf{D}_\epsilon\eta\right]\exp\left[\imath\xi'\mathbf{D}_\epsilon\eta'\right] \\
&\exp\left[\imath\psi\left(\mathbf{D}_\epsilon\Phi(x)+j(x)\right)\right]\exp\left[\imath\psi^*\left(\mathbf{D}_\epsilon\Phi^*(x')+j^*(x')\right)\right] \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

A partir de este funcional generador desarrollaremos una acción 2PI, la cual impone una restricción sobre las fluctuaciones de los campos. De manera análoga a la variable $\mathcal{J}(x)$, que está asociada al valor medio de los campos (ecuación (6.16)), introduciremos una nueva variable, $\mathcal{K}^{AB}(x,x')$, que estará asociada al valor medio del producto de los campos. Variaciones del funcional $\mathcal{K}^{AB}(x,x')$ darán lugar a las funciones de dos puntos (propagadores de la teoría) del tipo $\langle\chi^A(x)\chi^B(x)\rangle$, en donde $\chi^j$ puede ser cualquiera de los campos que están presentes en el funcional generador [40, 43]. La tarea será ver cuáles son las variables $\mathcal{K}^{AB}$ que resultan adecuadas para calcular la varianza de los campos físicos (dados por $\Phi(x)$ en este caso) y mostrar por qué y de qué manera, este método funcional resulta más eficiente que resolver la ecuación de Dyson y la ecuación de Bethe-Salpeter, descriptas ambas en la Sección anterior.

En resumen, con la formulación estadística del problema, la teoría estocástica original resulta equivalente a una teoría de campos definida por el funcional

$$e^{\imath W[\mathcal{J},\mathcal{J}^*]} = \int D\chi^A\ \exp\left[\imath S[\chi^A]\right]\ \exp\left[\mathcal{J}(x)\Phi(x)+\mathcal{J}^*(x')\Phi^*(x')\right] \qquad (6.25)$$

con los campos $\chi^A = (\epsilon,\Phi,\psi^*,\Phi^*,\psi,\eta,\xi,\eta',\xi')$, cuya acción clásica es

$$S[\chi^A] = \frac{i}{2}\epsilon C^{-1}\epsilon + \psi^*\left[\mathbf{D}_\epsilon\Phi + j\right] + \psi\left[\mathbf{D}_\epsilon\Phi^* + j^*\right] + \xi\mathbf{D}_\epsilon\eta + \xi'\mathbf{D}_\epsilon\eta' \qquad (6.26)$$

En las siguientes secciones vamos a introducir el núcleo $\mathcal{K}^{AB}(x,x')$ que permite calcular los propagadores de la teoría, definiremos los diagramas irreducibles de dos partículas

(diagramas 2PI) y la acción asociada a ellos; también veremos cuáles son las ecuaciones de movimiento que surgen de esta acción. Finalmente mostraremos que usando estas herramientas, los resultados obtenidos para el valor medio del campo y del cuadrado del campo no sólo tienen las contribuciones dadas por las aproximaciones no lineal y escalera, sino que además dan contribuciones de orden superior con resultados cualitativamente distintos.

## 6.3. Correspondencias entre las representaciones

Antes de emplear la formulación funcional para tratar el problema de dispersión es conveniente identificar los operadores definidos en la formulación diagramática con las cantidades usadas en la formulación funcional.

La ecuación dinámica que obedece el campo $\Phi$ es la de Helmholtz:

$$\left[\mathbf{\Delta} + \omega^2 - \varepsilon(x)\right] \Phi = -j \tag{6.27}$$

donde $\varepsilon(x) = \bar{\epsilon} + \epsilon(x)$ es una variable estocástica con estadística gaussiana y media distinta de cero. Así como separamos la constante dieléctrica en un valor medio y una fluctuación, podemos hacer la misma división en el campo físico, por lo tanto $\Phi = \phi + \varphi$, donde $\langle\varphi\rangle = 0$.

Independientemente del esquema perturbativo que se use para resolver el problema, el sistema físico presenta una serie de propiedades que pueden ser derivadas de la ecuación de movimiento. A continuación se presentan algunas de estas propiedades.

Para una dada realización del ruido (un dado $\epsilon(x)$ en (6.27)), la ecuación de movimiento es lineal en $\Phi$ y por lo tanto admite una solución a través de su correspondiente función de Green:

$$\left[\mathbf{\Delta} + \omega^2 - \bar{\epsilon} - \epsilon\left(x\right)\right] G_\epsilon\left(x, y\right) = -\delta\left(x - y\right) \tag{6.28}$$

El campo medio $\phi$ no está presente en esta ecuación, por lo tanto, $G_\epsilon$ es independiente de este valor. La solución formal para el campo físico es entonces

$$\Phi\left(x\right) = \int dy\, G_\epsilon\left(x, y\right) j\left(y\right) \tag{6.29}$$

Tomando el valor de expectación en la última ecuación se obtiene

$$\phi\left(x\right)=\int dy\,G\left(x,y\right)j\left(y\right) \tag{6.30}$$

donde

$$G\left(x,y\right)=\left\langle G_{\epsilon}\left(x,y\right)\right\rangle \tag{6.31}$$

es independiente de $\phi$. Es importante remarcar que $G(x,y)$ es el valor medio de la función de Green del problema real. La correspondencia entre el método diagrmático y el funcional, para las funciones de Green, es la siguiente: $G(x,y)\leftrightarrow G_{\epsilon}(x,y)$, $\langle G(x,y)\rangle\leftrightarrow G(x,y)$. La función de Green del medio homogéneo, $G^{(0)}$, sigue teniendo la misma expresión en las dos representaciones.

Tomando el valor de expectación en (6.28) se obtiene

$$\left[\boldsymbol{\Delta}+\omega^{2}-\bar{\epsilon}\right]G\left(x,y\right)=-\delta\left(x-y\right)+\left\langle\epsilon\left(x\right)G_{\epsilon}\left(x,y\right)\right\rangle \tag{6.32}$$

Esta ecuación tiene la misma estructura que (6.6). Con el objetivo de identificar cómo se recupera el operador de masa en la formulación funcional resulta útil definir entonces un operador de auto energía, $\Sigma\left(x,y\right)$, a partir de la identidad

$$\left\langle\epsilon\left(x\right)G_{\epsilon}\left(x,y\right)\right\rangle=\int dz\,\Sigma\left(x,z\right)G\left(z,y\right) \tag{6.33}$$

Por lo tanto

$$\left[\boldsymbol{\Delta}+\omega^{2}-\bar{\epsilon}\right]G\left(x,y\right)-\int dz\,\Sigma\left(x,z\right)G\left(z,y\right)=-\delta\left(x-y\right) \tag{6.34}$$

Además, definimos un operador $\mathcal{Q}\left(x,y\right)$ como

$$\left\langle\epsilon\left(x\right)\varphi\left(x\right)\right\rangle=\int dz\,\mathcal{Q}\left(x,z\right)\phi\left(z\right) \tag{6.35}$$

La ecuación para el campo medio, en términos de $\mathcal{Q}$, es

$$\left[\boldsymbol{\Delta}+\omega^{2}-\bar{\epsilon}\right]\phi\left(x\right)-\int dz\,\mathcal{Q}\left(x,z\right)\phi\left(z\right)=-j\left(x\right) \tag{6.36}$$

Por otro lado, actuando con $\left[\mathbf{\Delta} + \omega^2 - \bar{\epsilon} - \Sigma\right]$ sobre ambos lados de la ecuación (6.30) se obtiene lo siguiente:

$$\left[\mathbf{\Delta} + \omega^2 - \bar{\epsilon}\right] \phi\left(x\right) - \int dz\, \Sigma\left(x, z\right) \phi\left(z\right) = -j\left(x\right) \tag{6.37}$$

Entonces, independientemente del esquema usado para resolver las ecuaciones del campo medio, se obtiene que $\mathcal{Q} = \Sigma$. Más adelante mostraremos que usando la aproximación no lineal esta identidad no se cumple.

### 6.3.1. Energía dispersada

El objetivo principal, tanto en la formulación diagramática como en la funcional, es calcular la potencia dispersada por el medio. En la Sección 5.1 mostramos que para calcular esta cantidad es necesario resolver las ecuaciones de Dyson y BS, usando para cada una de ellas, distintas aproximaciones.

La energía dispersada siempre se puede escribir como

$$\left\langle \Phi^*\left(x'\right) \Phi\left(x\right)\right\rangle = \phi^*\left(x'\right) \phi\left(x\right) + \left\langle \varphi^*\left(x'\right) \varphi\left(x\right)\right\rangle \tag{6.38}$$

De esta expresión sólo tenemos la ecuación de movimiento para el campo medio ($\phi(x)$, dada por (6.36)). Para el valor medio del producto de las fluctuaciones del campo todavía no hemos dado ninguna expresión, ni hemos hecho aproximaciones para calcularlo. Vamos a definir un operador, $\mathcal{I}$, de la siguiente manera:

$$\left\langle \varphi^*\left(x'\right) \varphi\left(x\right)\right\rangle = \int dz dz' dy dy'\, G\left(x, z\right) G^*\left(x', z'\right) I\left[z, y; z', y'\right] \left\langle \Phi^*\left(y'\right) \Phi\left(y\right)\right\rangle \tag{6.39}$$

La definición de este operador tiene que ser compatible con la conservación de la energía. Para hallar las condiciones que éste debe cumplir resulta apropiado dar el vector de Poyting del problema, el cual da el flujo de energía. Este vector es simplemente

$$J\left(x, x'\right) = \phi\left(x\right) \nabla G\left(x, x'\right) - G\left(x, x'\right) \nabla \phi\left(x\right) \tag{6.40}$$

cuya divergencia es

$$\nabla J\left(x,x'\right)=-\phi\left(x'\right)\delta\left(x,x'\right)+j\left(x\right)G\left(x,x'\right)-\int d^3y\ \mathcal{Q}\left(x,y\right)\left[\phi\left(x\right)G\left(y,x'\right)-G\left(x,x'\right)\phi\left(y\right)\right] \tag{6.41}$$

Si requerimos que la energía del sistema se conserve, debemos pedir que

$$\partial_k\left\langle J^k\right\rangle=-j\phi^*+j^*\phi \tag{6.42}$$

que es la ecuación de continuidad (en valor medio) para la corriente de probabilidad $J$. Las componentes del vector de Poyting son

$$\begin{aligned}&\left\langle J^k\right\rangle=\phi^*\partial^k\phi-\phi\partial^k\phi^*+\\&\int dzdz'dydy'\ \left[G^*\left(x,z'\right)\partial^kG\left(x,z\right)-G\left(x,z\right)\partial^kG^*\left(x,z'\right)\right]\mathcal{I}\left[z,y;z',y'\right]\left\langle\Phi^*\left(y'\right)\Phi\left(y\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{6.43}$$

Promediando espacialmente la última ecuación, y asumiendo que $\mathcal{Q}=\Sigma$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int dx\ \left[\nabla_k\left\langle J^k\right\rangle+j\phi^*-j^*\phi\right]=-\int dydy'\ \left[\mathcal{Q}^*\left(y,y'\right)-\mathcal{Q}\left(y',y\right)\right]\left\langle\Phi^*\left(y'\right)\Phi\left(y\right)\right\rangle\\-&\int dx\int dzdz'dydy'\ \left[G^*\left(x,z'\right)\delta\left(x,z\right)-G\left(x,z\right)\delta\left(x,z'\right)\right]\mathcal{I}\left[z,y;z',y'\right]\left\langle\Phi^*\left(y'\right)\Phi\left(y\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{6.44}$$

Por lo tanto, para que se verifique la conservación de la energía (en promedio), los operadores $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{I}$ deben satisfacer la siguiente relación:

$$\mathcal{Q}^*\left(y,y'\right)-\mathcal{Q}\left(y',y\right)+\int dzdz'\left[G^*\left(z,z'\right)-G\left(z',z\right)\right]\mathcal{I}\left[z,y;z',y'\right]=0 \tag{6.45}$$

la cual es la identidad de Ward [41].

### 6.3.2. Aproximaciones no lineal y escalera

Para resolver las ecuaciones de Dyson y Bethe-Salpeter, usamos la aproximación no lineal sobre el operador de masa (ecuación (6.9)) y la aproximación escalera en el operador intensidad (ecuación (6.12)), las cuales son:

$$\Sigma\left(x,x'\right)=\mathcal{Q}\left(x,x'\right)=-C\left(x,x'\right)G\left(x,x'\right) \tag{6.46}$$

$$\mathcal{I}\left[x,y;x',y'\right]=C\left(x,x'\right)\delta\left(x-y\right)\delta\left(x'-y'\right) \tag{6.47}$$

Para recuperar estas aproximaciones desde la perspectiva funcional podemos aplicar la fórmula de Novikov [66] (dado que $\epsilon$ es una variable gaussiana):

$$\left\langle\epsilon\left(x\right)G_{\epsilon}\left(x,y\right)\right\rangle=\int dz\,C\left(x,z\right)\left\langle\frac{\delta G_{\epsilon}\left(x,y\right)}{\delta\epsilon\left(z\right)}\right\rangle \tag{6.48}$$

Usando esta relación en (6.28)

$$\left[\boldsymbol{\Delta}+\omega^{2}-\bar{\epsilon}\left(x\right)-\epsilon\right]\frac{\delta G_{\epsilon}\left(x,y\right)}{\delta\epsilon\left(z\right)}=\delta\left(x-z\right)G_{\epsilon}\left(z,y\right) \tag{6.49}$$

y como

$$\frac{\delta G_{\epsilon}\left(x,y\right)}{\delta\epsilon\left(z\right)}=-G_{\epsilon}\left(x,z\right)G_{\epsilon}\left(z,y\right) \tag{6.50}$$

La aproximación no lineal proviene de asumir que

$$\left\langle G_{\epsilon}\left(x,z\right)G_{\epsilon}\left(z,y\right)\right\rangle=G\left(x,z\right)G\left(z,y\right) \tag{6.51}$$

Impuesta esta aproximación sobre el operador de masa, la aproximación escalera es la más simple que se puede usar para verificar la identidad de Ward (ecuación (6.45)).

### 6.3.3. Aproximación no lineal vs teoría completa

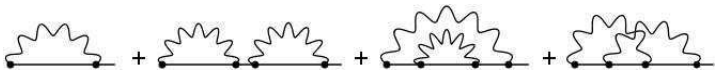
Mostramos que en la teoría exacta los operadores de auto energía y de masa son los mismos. El operador $\Sigma$ quedó definido a partir de la ecuación (6.33). Si aplicamos la aproximación no lineal al operador de energía, éste toma la expresión dada por (6.46). Vamos a comparar los distintos diagramas dan las dos definiciones del operador de auto energía (o de masa) y veremos que con la aproximación no lineal hay diagramas que, al mismo orden perturbativo, no pueden obtenerse.

Si se expande la ecuación (6.33) iterando la función de Green $G_\epsilon$ con la ayuda de la ecuación (6.28), se obtiene (a orden tres) la siguiente sucesión

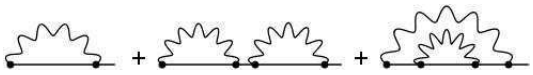
$$\begin{aligned}
&\langle \epsilon(x) G_\epsilon(x,y)\rangle = \int dx_1\, G^{(0)}\langle Q(x)Q(x_1)\rangle G^{(0)}(x_1,y) \\
&+\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, G^{(0)}(x,x_1)G^{(0)}(x_1,x_2)G^{(0)}(x_2,x_3)\langle \epsilon(x)\epsilon(x_1)\epsilon(x_2)\epsilon(x_3)\rangle G^{(0)}(x_3,y) \\
&+\mathcal{O}(\epsilon^6)+\cdots
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Usando que $\epsilon(x)$ tiene una estadística gaussiana, el término con cuatro $\epsilon$ puede ser descompuesto como: $\langle \epsilon(x)\epsilon(x_1)\epsilon(x_2)\epsilon(x_3)\rangle = \langle \epsilon(x)\epsilon(x_1)\rangle\langle \epsilon(x_2)\epsilon(x_3)\rangle + \langle \epsilon(x)\epsilon(x_2)\rangle\langle \epsilon(x_1)\epsilon(x_3)\rangle + \langle \epsilon(x)\epsilon(x_3)\rangle\langle \epsilon(x_1)\epsilon(x_2)\rangle$.

La representación diagramática de esta ecuación es

$\langle \epsilon(x) G_\epsilon(x,y)\rangle =$ 

Por otro lado, la expansión diagramática para el operador de auto energía, usando la aproximación no lineal, es

$\Sigma(x,y) = \mathcal{Q}(x,y) \approx \langle \epsilon(x)\epsilon(y)\rangle\langle G(x,y)\rangle =$ 

Comparando las dos representaciones vemos que hay gráficos que con la aproximación no lineal no se van a poder obtener, sin importar hasta qué orden se itere. Aquellos gráficos que tienen cruzada una línea de la función de autocorrelación quedan excluidos con la aproximación no lineal. En las próximas secciones mostraremos cómo, usando los gráficos 2PI al mismo orden de iteración, estos diagramas sí son capturados, haciendo entonces que este último método sea más efectivo para resumar los términos de una ecuación integral (la ecuación de Dyson en el caso del operador de masa).

## 6.4. Ecuaciones a partir de la formulación funcional

Las ecuaciones dinámicas que siguen el campo medio y los propagadores se obtienen variando el funcional generador dado por la ecuación (6.25), el cual depende de la acción (6.26). La forma funcional de esta acción trae asociada un número de consecuencias sobre los valores de expectación de los campos.

En primer lugar, cabe observar que cuando las fuentes externas son cero ($\mathcal{J} = 0$), la correcta normalización del funcional generdor garantiza que

$$\mathcal{Z}\left[0,0\right] = \exp\left[\imath W[0,0]\right] = \int \mathcal{D}\chi^A \exp\left[\imath S[\chi^A]\right] = 1 \Rightarrow W\left[0,0\right] = 0 \tag{6.53}$$

Esta identidad es válida en general, sin importar cuales sean las corrientes $j(x)$ y $j^*(x)$ presentes en la ecuación de Helmholtz. Cuando $\mathcal{J} = 0$, la única dependencia del funcional generador queda sobre las $j$. Estas corrientes únicamente están acopladas a los campos auxiliares $\psi$ en (6.26), por lo tanto, variaciones de la acción clásica respecto a $j(x)$ generan lo siguiente: $S[\chi^A]_{,j(x)} = \psi^*(x)$. Entonces, usando que $W[0,0] = 0$ y que las variaciones de $S$ derivan en campos $\psi$, podemos mostrar que el valor de expectación del producto de dos de estos campos es nulo:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 e^{\imath W[0,0]}}{\delta j(x)\delta j(x')} &= \int \mathcal{D}\chi^A \frac{\delta^2}{\delta j(x)\delta j(x')} \exp\left[\imath S[\chi^A]\right] = 0 \\
&= \int \mathcal{D}\chi^A \, \psi^*(x)\psi^*(x') \exp\left[\imath S[\chi^A]\right] \equiv \langle \psi^*(x)\psi^*(x')\rangle = 0
\end{aligned} \tag{6.54}$$

De la misma manera podemos mostrar que $\langle \psi(x)\psi(x')\rangle = \langle \psi(x)\psi^*(x')\rangle = 0$ y que

$$\begin{aligned}
&\langle \psi^*\epsilon\rangle = \langle \psi\epsilon\rangle = \langle \psi^*\varphi^*\rangle = \langle \psi\varphi\rangle = 0 \\
&\left\langle \epsilon(x)\epsilon(x')\right\rangle = C(x,x')
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Esto es remarcable, ya que implica que $\langle \epsilon\epsilon\rangle$ no tiene correcciones debido al acoplamiento con otros campos. Al introducir campos auxiliares $\xi, \eta$ en (6.20) y $\psi$ en (6.21), éstos se acoplan al campo $\epsilon$, lo cual se pone de manifiesto en la acción clásica $S[\chi^A]$. Sin embargo, el valor de expectación de dos campos $\epsilon$ continúa siendo $C(x,x')$, lo que es deseable, ya que es esta función de correlación del medio aleatorio. Lo que asegura que no haya correcciones de los campos auxiliares es la introducción del *determinante* en la definición del funcional generador, lo que garantiza la norma del mismo.

La ecuación de movimiento para el campo $\Phi$ (ecuación (6.27)) se recupera a partir de la siguiente identidad:

$$\int \mathcal{D}\chi^A \, \frac{\delta S}{\delta \psi^*} \, e^{iS} = 0 \tag{6.56}$$

La variación de la acción clásica (6.26) respecto al campo auxiliar $\psi^*$ es $\frac{\delta S}{\delta \psi^*} = \mathbf{D}_\epsilon \Phi + j = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\chi^{\mathcal{A}} \, [\mathbf{D}_\epsilon \Phi + j] \, e^{\imath S[\chi^A]} = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{D}_\epsilon \Phi \rangle + j = 0 \\
&\mathbf{D_0}\phi - \langle \epsilon \rangle \phi + \mathbf{D_0} \langle \varphi \rangle - \langle \epsilon \varphi \rangle + j = 0 \\
&\mathbf{D_0}\phi - \langle \epsilon \varphi \rangle + j = 0 \Rightarrow \mathbf{D_0}\phi - \langle \epsilon \varphi \rangle = -j
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Esta es la ecuación (6.37), donde ya se identificó $\langle \epsilon \varphi \rangle$ con el operador $\mathcal{Q}$ a través de (6.35). En la formulación funcional, el campo $\phi$ es el valor de expectación del campo estocástico $\Phi = \phi + \varphi$. Relacionando (6.37) y (6.57) podemos hacer una nueva interpretación para el operador $\mathcal{Q}$. Variando (6.37) respecto a la corriente $j$ y luego, usando (6.35), se encuentra la definición del operador de masa en la formulación funcional:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta j(x')} \left[ \mathbf{D_0}\phi(x) - \int dy \mathcal{Q}(x,y)\phi(y) \right] = -\frac{\delta j(x)}{\delta j(x')} \\
&\left[ \mathbf{D_0} - \frac{\delta \langle \epsilon \varphi \rangle(x)}{\delta \phi(x')} \right] \frac{\delta \phi(x')}{\delta j(x')} = -\delta(x - x')
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Esta es la ecuación para la función de Green del problema (ecuación (6.30)). La relación $\frac{\delta \phi(x)}{\delta j(x')} = G(x, x')$ resulta inmediata al variar (6.30) respecto a la corriente $j(x')$.

Entonces, el operador de masa, desde la formulación funcional se define (de manera exacta) como

$$\mathcal{Q} = \frac{\delta \langle \epsilon \varphi \rangle}{\delta \phi} \tag{6.59}$$

Además, la función de Green puede ser calculada de una manera variacional reescribiendo al campo $\phi$ a través del funcional generador:

$$
\begin{aligned}
G(x,x') &= \frac{\delta\phi(x)}{\delta j(x')} = \frac{\delta}{\delta j(x')}\langle\Phi(x)\rangle \\
G(x,x') &= \frac{\delta}{\delta j(x')}\int \mathcal{D}\chi^A\,\Phi(x)\exp\left[S[\chi^A]\right] \\
G(x,x') &= \frac{1}{\imath}\frac{\delta^2}{\delta j(x')\delta\mathcal{J}(x)}\exp\left[\imath W[\mathcal{J},\mathcal{J}^*]\right]|_{\mathcal{J}=0}
\end{aligned}
$$

Dada la forma de la acción $S[\chi^A]$, la variación doble del generador $W$ respecto a $j(x')$ y $\mathcal{J}(x)$, genera el producto de los campos $\psi^*(x)\phi(x')$, por lo tanto, la función de Green del problema estocástico se puede escribir como el valor de expectación de este producto de campos,

$$
G = \frac{\delta\phi}{\delta j} = i\,\langle\varphi\psi^*\rangle \tag{6.60}
$$

Hasta aquí hemos conseguido identificar dentro del marco funcional, ciertas cantidades que resultan inmediatas cuando se escribe el problema físico de manera directa. Resta dar cuáles son las ecuaciones dinámicas que cumplen estas cantidades (ya sea $G$, $\mathcal{Q}$, el valor medio de cualquiera de los campos $\chi$ y de sus productos). La manera más conveniente de derivar las ecuaciones de movimiento para los campos medios y los propagadores es a través de la acción efectiva de dos partículas (2PIEA). En la siguiente subsección vamos a dar una breve descripción de 2PIEA y luego pasaremos a calcular de manera sistemática las ecuaciones de movimiento.

Para finalizar el Capítulo, luego de dar las ecuaciones mostraremos cuál es la representación diagramática de ellas y las compararemos con las obtenidas usando la aproximación no lineal y escalera. Por último veremos que los diagramas 2PIEA contienen a los primeros y además, dan contribuciones que son cualitativamente distintas a las obtenidas a partir de las ecuaciones de Dyson y Bethe-Salpeter.

### 6.4.1. Acción efectiva irreducible de dos partículas

El funcional generador $W[\mathcal{J},\mathcal{J}^*]$, definido por la ecuación (6.25), genera los valores de expectación de los campos y del producto de los campos a partir de variaciones sucesivas de las corrientes $\mathcal{J}$. Estos valores de expectación, representados de manera diagramática, tienen la propiedad de que no pueden ser reducidos cortando una línea interna. Este tipo

de diagramas, llamados irreducibles de una partícula (1PI), ya han sido usados para dar la representación de las aproximaciones no lineal y escalera. Lo que nos proponemos dar a continuación es hacer la extensión a diagramas que no pueden ser reducidos sin cortar tres líneas internas, o sea, generar diagramas irreducibles de dos partículas (2PI) [40, 43].

Los diagramas 1PI están vinculados a las fuentes $\mathcal{J}(x)$. Estas fuentes sólo dependen de un punto y están acopladas linealmente a los campos físicos en el funcional generador. Para obtener diagramas 2PI es necesario dar una fuente que sea bilocal, o sea, que dependa de dos puntos distintos en el espacio. Esto implica que esta fuente quede acoplada a dos campos físicos. Concretamente, la extensión de diagramas 1PI a 2PI se hace reescribiendo el funcional $W$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J},\mathcal{K}] = \exp\left[W[\mathcal{J},\mathcal{K}]\right] = \int \mathcal{D}\chi^A \, \exp\left[\imath S[\chi^A]\right] \, \exp\left[\imath[\mathcal{J}^{\mathcal{A}}\Phi_A + \frac{1}{2}\mathcal{K}^{AB}\Phi_A\Phi_B]\right] \tag{6.61}$$

donde usamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^A\Phi_A &= \int dx\, \mathcal{J}^a\Phi_a = \int dx\, \left(\mathcal{J}\Phi + \mathcal{J}^*\Phi^*\right)(x) \\
\mathcal{K}^{AB}\Phi_A\Phi_B &= \int dx\, dx'\, \mathcal{K}^{ab}(x,x')\Phi_a(x)\Phi_b(x')
\end{aligned}$$

Ya hemos mostrado que las variaciones respecto a $\mathcal{J}$ generan los valores medios del campo $\Phi$. Vamos a mostrar ahora qué genera la variación respecto al núcleo $\mathcal{K}^{AB}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta W}{\delta \mathcal{K}^{AB}} \quad &= \int \mathcal{D}\chi^A \, \exp\left[\imath S[\chi^A]\right] \frac{1}{2}\Phi_A(x)\Phi_B(x') \\
&= \frac{1}{2}\int \mathcal{D}\chi^A \, \big\{\phi(x)\phi(x') + \phi(x)\varphi(x') + \varphi(x)\phi(x') + \varphi(x)\varphi(x') \\
&+\phi(x)\phi^*(x') + \phi(x)\varphi^*(x') + \varphi(x)\phi^*(x') + \varphi(x)\varphi^*(x') \\
&+\phi^*(x)\phi(x') + \phi^*(x)\varphi(x') + \varphi^*(x)\phi(x') + \varphi^*(x)\varphi(x') \\
&+\phi^*(x)\phi^*(x') + \phi^*(x)\varphi^*(x') + \varphi^*(x)\phi^*(x') + \varphi^*(x)\varphi^*(x')\big\}
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Los términos de la forma $\phi\varphi$ se anulan ya que el valor medio de $\varphi$ es cero. Finalmente, lo que produce la variación respecto a la nueva corriente es

$$\frac{\delta W}{\delta \mathcal{K}^{AB}} = \frac{1}{2}\left[\phi_A(x)\phi_B(x') + \langle\varphi_A(x)\varphi_B(x')\rangle\right] = \frac{1}{2}\phi_A(x)\phi_B(x') + \frac{1}{2}\imath G_{AB}(x,x') \tag{6.63}$$

La acción efectiva, tanto 1PI como 2PI, se define a partir de la transformada de Legendre del funcional generador $W$. En analogía con un sistema termodinámico, el funcional $W$ es la función de partición. Al hacer la transformada de Legendre, se busca el valor de los campos que minimicen la energía del sistema.

La definición formal de la acción efectiva 2PI (2PIEA) es

$$\Gamma[\phi, G] \equiv W[\mathcal{J}, \mathcal{K}] - \phi_A \mathcal{J}^A - \frac{1}{2}\mathcal{K}^{AB}\phi_A\phi_B \tag{6.64}$$

Por su definición, la acción efectiva resulta independiente tanto de $\mathcal{J}$ como de $\mathcal{K}$. A través de variaciones de $\Gamma_2$ respecto a los campos medios o a los propagadores se puede invertir la dependencia de las corrientes externas con los campos y propagadores, poniendo a las primeras en función de estos últimos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_A} = -\mathcal{J}^A - \frac{1}{2}\mathcal{K}^{AB} \ ; \ \frac{\delta\Gamma}{\delta G_{AB}} = -\frac{1}{2}\mathcal{K}^{AB} \\
&\Rightarrow \mathcal{J}^A = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_A} - \frac{\delta\Gamma}{\delta G_{AB}}\phi_B
\end{aligned}$$

Usando estas relaciones se puede escribir una ecuación integro-diferencial para la acción efectiva 2PI [40]

$$\exp\left[\imath\Gamma\right] = \int \mathcal{D}\chi^A \exp\left[\imath S[\chi^A]\right] \exp\left[\left(\Gamma_{,G} - \Gamma_{,\phi}\right)\varphi_A\right] \exp\left[-\Gamma_{,G}\varphi_A\varphi_B\right] \tag{6.65}$$

Un posible *ansatz* para resolver esta ecuación es

$$\Gamma[\phi, G] \approx S[\phi_A] + \frac{1}{2}S_{,AB}G^{AB} - \frac{\imath}{2}Tr[\ln(G)] + \Gamma_2 \tag{6.66}$$

siendo un ansatz para $\Gamma_2$:

$$\begin{aligned}
\exp\left[\imath\Gamma_2\right] \quad &= \frac{1}{[Det(G)]^{1/2}}\int \mathcal{D}\varphi^A \exp\left[\imath S[\varphi^A]\right] \\
&\exp[-\tilde{J}_A\varphi^A]\exp\left[-\frac{1}{2}G^{-1}_{AB}\varphi^A\varphi^B\right] \exp\left[-\tilde{K}^{AB}(\varphi_A\varphi_B - G^{AB})\right]
\end{aligned} \tag{6.67}$$

donde

$$\tilde{J}_A = \frac{1}{2} S_{,ABC} G^{BC} + \frac{\delta \Gamma_2}{\delta \phi_A} \ , \ \tilde{K}_{AB} = \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G^{AB}}$$

Con este ansatz para la acción efectiva, $\Gamma_2$ resulta independiente de los campos medios pero no de los propagadores. Variando la acción efectiva respecto a $\phi_A$ o $G_{AB}$, se obtienen las ecuaciones de movimiento que siguen los valores medios de los campos $\chi^A$ y las funciones de dos puntos de cualquier par de estos campos.

Al buscar los campos y propagadores que extreman la acción efectiva se encuentran las ecuaciones de movimiento [40]:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_A} = 0 \ \rightarrow \ \frac{\delta S}{\delta \phi_A} + \frac{1}{2} S_{,ABC} G^{BC} = 0 \tag{6.68}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta G_{AB}} = 0 \ \rightarrow \ S_{,AB} G^{BC} - \imath \delta_A^C + 2 \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G_{BC}} G^{BC} = 0 \tag{6.69}$$

Lo que resta hacer, para dar las ecuaciones de movimiento, es desarrollar explícitamente el par de ecuaciones que obtuvimos de variar $\Gamma_2$. Para ello vamos a considerar que cada uno de los campos $\chi^A$ quedan definidos por el índice A que corre de 0 a 8, con el siguiente orden: $\chi^A = (\epsilon, \Phi, \psi^*, \Phi^*, \psi, \xi, \eta, \xi', \eta')$. Cabe recordar que los últimos cuatro campos responden al álgebra de Grassman, aunque de todos modos no serán necesarios para dar las ecuaciones de movimiento de los campos medios y propagadores.

### 6.4.2. Ecuaciones de movimiento 2PI

Nuestro interés es encontrar situaciones en donde $\Phi$ and $\Phi^*$ desarrollen valores de expectación no triviales. Los acoplamientos del campo físico con los campos auxiliares $\eta$ y $\xi$ serán ignorados. La función de los campos de Grassman es asegurar la correcta normalización del funcional generador $W$, ya que provienen de exponenciar el determinante del operador diferencial que actúa sobre el campo físico $\Phi$. Estos campos garantizan que, orden a orden en la teoría perturbativa, la función de correlación $C(x, x')$ no reciba correcciones provenientes de la interacción con los campos auxiliares. En lo sucesivo, consideraremos que este es el caso, ignorando así los acoplamientos de los campos de Grassman con los campos físicos.

Recordando que la acción clásica es

$$S[\chi^A] = \frac{i}{2}\epsilon C^{-1}\epsilon + \psi^* \left[\mathbf{D}_\epsilon \Phi + j\right] + \psi \left[\mathbf{D}_\epsilon \Phi^* + j^*\right] + i\xi \mathbf{D}_\epsilon \eta + i\xi' \mathbf{D}_\epsilon \eta' \tag{6.70}$$

las variaciones respecto a los campos $\chi^a = (\epsilon, \Phi, \psi^*, \Phi^*, \psi)$ ($a$ toma valores entre 0 y 4) puede resumirse en

$$S_{,ab} = \begin{pmatrix} iC^{-1} & 0 & -\phi & 0 & -\phi^* \\ 0 & 0 & \mathbf{D_0} & 0 & 0 \\ -\phi & \mathbf{D_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D_0} \\ -\phi^* & 0 & 0 & \mathbf{D_0} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.71}$$

Las ecuaciones para los propagadores son

$$S_{,rt} G^{ts} = i\delta^s_r - 2\frac{\delta \Gamma_2}{\delta G^{rt}} G^{ts} \tag{6.72}$$

Los índices $r$ y $s$ marcan los campos para los cuales se generan las ecuaciones de movimiento. Para darlas de manera sistemática, primero tomaremos un valor para $r$ y, con este valor fijo, iremos dando los correspondientes valores para $s$.

- Comencemos tomando $r = 1$ ($\chi^1 = \varphi$). La ecuación que se obtiene es

$$\mathbf{D}_0 \left\langle \psi^* \chi^s \right\rangle = i\delta^s_1 - 2\frac{\delta \Gamma_2}{\delta \left\langle \varphi \chi^t \right\rangle} \left\langle \chi^t \chi^s \right\rangle \tag{6.73}$$

ya que $\langle \psi^* \psi^* \rangle$ $\langle \psi \psi^* \rangle$ son nulos.

Si además elegimos $s = 2$ y $s = 4$ llegamos a

$$\frac{\delta \Gamma_2}{\delta \left\langle \varphi \varphi \right\rangle} = \frac{\delta \Gamma_2}{\delta \left\langle \varphi \varphi^* \right\rangle} = 0 \tag{6.74}$$

- De la misma manera, para $r = 3$ ($\chi^3 = \varphi^*$), resulta

$$\mathbf{D}_0 \left\langle \psi \chi^s \right\rangle = i\delta^s_4 - 2\frac{\delta \Gamma_2}{\delta \left\langle \varphi^* \chi^t \right\rangle} \left\langle \chi^t \chi^s \right\rangle \tag{6.75}$$

Con $s = 4$ se llega a que

$$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\varphi^*\varphi^*\rangle} = 0 \tag{6.76}$$

Cuando se considera el campo $\epsilon$ ($s = 0$), la ecuación es

$$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\varphi\rangle} = \frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\varphi^*\rangle} = 0 \tag{6.77}$$

dado que $\langle\epsilon\psi^*\rangle = 0$.

Por lo tanto, (6.73) se reduce a

$$\left[\mathbf{D}_0 + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\varphi\psi^*\rangle}\right]\langle\psi^*\varphi\rangle = i\mathbf{1} \tag{6.78}$$

- Tomando $r = 0$ la ecuación (6.72) es

$$\left[iC^{-1} + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\chi^s\rangle + \left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\psi^*\rangle}\right]\langle\psi^*\chi^s\rangle + \left[-\phi^* + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\psi\rangle}\right]\langle\psi\chi^s\rangle = i\delta_0^s \tag{6.79}$$

Si $s = 0$ es simplemente

$$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\epsilon\rangle} = 0 \tag{6.80}$$

y con $s = 1$

$$\langle\epsilon\varphi\rangle = C\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\psi^*\rangle}\right]G' \tag{6.81}$$

$G' = i\langle\psi^*\varphi\rangle$

- Ahora tomamos $r = 2$

$$\begin{aligned}\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\chi^s\rangle \quad &+ \quad \left[\mathbf{D}_0 + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi\rangle}\right]\langle\varphi\chi^s\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi^*\rangle}\langle\psi^*\chi^s\rangle \\ &+ \quad 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi^*\rangle}\langle\varphi^*\chi^s\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi\rangle}\langle\psi\chi^s\rangle = i\delta_2^s\end{aligned} \tag{6.82}$$

Con $s = 2$ esto produce

$$\begin{aligned}\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\psi^*\rangle &+ \left[\mathbf{D}_0 + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi\rangle}\right]\langle\varphi\psi^*\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi^*\rangle}\langle\psi^*\psi^*\rangle \\ &+ +2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi^*\rangle}\langle\varphi^*\psi^*\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi\rangle}\langle\psi\psi^*\rangle = i\mathbf{1} \qquad (6.83)\end{aligned}$$

Como $\langle\epsilon\psi^*\rangle = \langle\psi^*\psi^*\rangle = \langle\psi\psi^*\rangle = \langle\varphi^*\psi^*\rangle = 0$, la última ecuación es simplemente

$$\left[\mathbf{D}_0 + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi\rangle}\right]\langle\varphi\psi^*\rangle = i\mathbf{1} \qquad (6.84)$$

Lo cual nos permite identificar a la función de Green: $G = i\langle\varphi\psi^*\rangle$ y por lo tanto al operador de auto energía:

$$\Sigma = -2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi\rangle} \qquad (6.85)$$

Si $s \neq 2$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\varphi\chi^s\rangle &= G\left\{\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\chi^s\rangle\right. \\ &+ \left. 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi^*\rangle}\langle\psi^*\chi^s\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi^*\rangle}\langle\varphi^*\chi^s\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi\rangle}\langle\psi\chi^s\rangle\right\} \qquad (6.86)\end{aligned}$$

Si $s = 0$

$$\langle\varphi\epsilon\rangle = G\left\{\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]C + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi^*\rangle}\langle\varphi^*\epsilon\rangle\right\} \qquad (6.87)$$

Comparando con la ecuación (6.81) podemos ver que

$$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi^*\rangle} = 0 \qquad (6.88)$$

El mismo resultado se habría obtenido tomando $s = 4$.

Finalmente, con $s = 1$ y $s = 3$ se llega a

$$\langle\varphi\varphi\rangle = G\left\{\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\varphi\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi^*\rangle}\langle\psi^*\varphi\rangle\right\} \qquad (6.89)$$

$$\langle\varphi\varphi^*\rangle = G\left\{\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\varphi^*\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi\rangle}\langle\psi\varphi^*\rangle\right\} \tag{6.90}$$

Como

$$\langle\epsilon\varphi^*\rangle = \langle\epsilon\varphi\rangle^* = C\left[-\phi^* + 2\left(\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\psi^*\rangle}\right)^*\right]G'^* \tag{6.91}$$

se encuentra una nueva identidad para la función de Green:

$$\langle\psi\varphi^*\rangle = -\langle\psi^*\varphi\rangle^* = -iG'^* \tag{6.92}$$

Con lo hecho hasta aquí se obtuvieron las ecuaciones dinámicas para los distintos propagadores de la formulación funcional y relaciones entre la acción efectiva 2PI y el operador de auto energía (o de masa). Si bien estas ecuaciones se generan de manera sistemática a partir de la ecuación (6.72), resulta un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, ya que los propagadores, sus derivadas y las variaciones de $\Gamma_2$ respecto a ellos, aparecen en más de una ecuación. Antes de intentar buscar una solución para las ecuaciones, resulta útil discutir cuál es el método más conveniente para manejarlas.

### 6.4.3. Estrategia para resolver las ecuaciones 2PI

Hemos encontrado las ecuaciones de movimiento para los propagadores y algunas propiedades que deben cumplir los mismos. Sin embargo, a pesar de que obtuvimos un sistema lineal, los propagadores de interés están presentes en más de una ecuación. Las ecuaciones de interés (aquellas que nos permiten calcular la energía dispersada) son las siguientes:

$$\begin{cases} \left[\mathbf{D}_0 + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\varphi\psi^*\rangle}\right]G = i\mathbf{1} \\ \langle\epsilon\varphi\rangle = C\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\psi^*\rangle}\right]G' \\ \langle\varphi\varphi^*\rangle = G\left\{\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\epsilon\rangle}\right]\langle\epsilon\varphi^*\rangle + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\psi\rangle}G'^*\right\} \end{cases}$$

Vemos que la ecuación para el propagador $G = \langle\psi^*\varphi\rangle$ es independiente de las otras dos; la ecuación para $\langle\epsilon\varphi\rangle$ depende de $G$, y que la ecuación para $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ depende de las dos anteriores. Entonces, la estructura de las ecuaciones del movimiento derivadas de la acción efectiva 2PI indica que la manera apropiada de resolverlas es la siguiente: hallar primero $G$

y $G^*$, luego resolverlas para $\langle \varphi(x)\,\epsilon(x')\rangle$ y $\langle \varphi^*(x)\,\epsilon(x')\rangle$, y finalmente, encontrar el valor de expectación de productos de dos campos $\varphi$.

Para ver cómo funciona esta estrategia, primero observemos que la acción efectiva es invariante frente a un cambio de fase global (en otras palabras, según el teorema de Noether, la carga se conserva). Esto se debe a que cada campo físico está multiplicado por su campo auxiliar conjugado (el campo $\epsilon$ es real, por lo tanto es invariante frente a un cambio de fase). Además, cualquier gráfico que provenga de 2PIEA, resulta de haber tomado el valor de expectación de algún término en la expansión de

$$\left\langle e^{i\int dx\,\epsilon(\psi^*\varphi+\psi\varphi^*)}\right\rangle \tag{6.93}$$

ya que es el único término en (6.26) que acopla a los tres campos invlucrados en las ecuaciones de movimiento.

Desde una perspectiva diagramática, estos términos estarán construidos con $N_\varphi$ líneas de campos $\varphi$, y similarmente para los campos $\psi$, $\varphi^*$ y $\psi^*$. Observando que el acoplamiento entre $\varphi$ y $\psi^*$ en (6.93) es lineal, resulta inmediato ver que $N_\varphi = N_{\psi^*}$ y $N_{\varphi^*} = N_\psi$, ya que la acción tiene *carga* cero.

Cualquier diagrama construido a partir de (6.93) tendrá $L_{\langle\varphi\varphi\rangle}$ líneas correspondientes al propagador $\langle\varphi\varphi\rangle$. De la misma manera se pueden enumerar las líneas asociadas a los otros propagadores.

Debido a la invarianza de fase, el número de líneas correspondientes al campo $\varphi$ debe verificar

$$N_\varphi = 2L_{\langle\varphi\varphi\rangle} + L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} + L_{\langle\varphi\psi\rangle} + L_{\langle\varphi\psi^*\rangle} + L_{\langle\varphi\epsilon\rangle} \tag{6.94}$$

y de manera similar

$$N_{\psi^*} = L_{\langle\psi^*\varphi\rangle} + L_{\langle\psi^*\varphi^*\rangle} + L_{\langle\psi^*\psi\rangle} + 2L_{\langle\psi^*\psi^*\rangle} + L_{\langle\psi^*\epsilon\rangle} \tag{6.95}$$

Como $N_\varphi = N_{\psi^*}$, esto implica que

$$2L_{\langle\varphi\varphi\rangle} + L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} + L_{\langle\varphi\psi\rangle} + L_{\langle\varphi\epsilon\rangle} = L_{\langle\psi^*\varphi^*\rangle} + L_{\langle\psi^*\psi\rangle} + 2L_{\langle\psi^*\psi^*\rangle} + L_{\langle\psi^*\epsilon\rangle} \tag{6.96}$$

Análogamente,

$$2L_{\langle\varphi^*\varphi^*\rangle} + L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} + L_{\langle\varphi^*\psi^*\rangle} + L_{\langle\varphi^*\epsilon\rangle} = L_{\langle\psi\varphi\rangle} + L_{\langle\psi\psi^*\rangle} + 2L_{\langle\psi\psi\rangle} + L_{\langle\psi\epsilon\rangle} \tag{6.97}$$

Para hallar $G = i\langle\varphi\psi^*\rangle$ y $G^*$ debemos resolver

$$\left[\mathbf{D}_0 + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\psi^*\varphi\rangle}\right]\langle\varphi\psi^*\rangle = i\mathbf{1} \tag{6.98}$$

y su complejo conjugado.

Cualquier diagrama que provenga de la variación de $\Gamma_2$ debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\textbf{I}.\ L_{\langle\psi\psi\rangle} = L_{\langle\psi\psi^*\rangle} = L_{\langle\psi^*\psi^*\rangle} = L_{\langle\psi^*\epsilon\rangle} = L_{\langle\psi\epsilon\rangle} = L_{\langle\psi^*\varphi^*\rangle} = L_{\langle\psi\varphi\rangle} = 0 \tag{6.99}$$

porque todos estos propagadores son nulos (por ejemplo, $\langle\psi\psi^*\rangle = 0 \rightarrow L_{\langle\psi\psi^*\rangle} = 0$).

$$\textbf{II}.\ L_{\langle\varphi\varphi\rangle} = L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} = L_{\langle\varphi\psi\rangle} = L_{\langle\varphi\epsilon\rangle} = L_{\langle\varphi^*\varphi^*\rangle} = L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} = L_{\langle\varphi^*\psi^*\rangle} = L_{\langle\varphi^*\epsilon\rangle} = 0 \tag{6.100}$$

ya que $N_\varphi = N_{\psi^*}$, $N_{\varphi^*} = N_\psi$ y que el número de líneas no puede ser negativo.

Por lo tanto, los únicos propagadores que quedan habilitados para formar diagramas son $G$, $G^*$ y $C$. En consecuencia, se obtiene una estructura cerrada para resolver las ecuaciones.

Restan considerar los diagramas que contribuyen a $\langle\varphi(x)\,\epsilon(x')\rangle$ y $\langle\varphi^*(x)\,\epsilon(x')\rangle$. Para estos propagadores hay que resolver

$$\langle\epsilon\varphi\rangle = C\left[-\phi + 2\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\langle\epsilon\psi^*\rangle}\right]G' \tag{6.101}$$

Como $G' = i\langle\psi^*\varphi\rangle$, deben buscarse diagramas con $L_{\langle\epsilon\psi^*\rangle} = 1$. Por lo tanto, tendremos la siguiente relación entre las líneas de los propagadores:

$$2L_{\langle\varphi\varphi\rangle} + L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} + L_{\langle\varphi\psi\rangle} + L_{\langle\varphi\epsilon\rangle} = 1 \tag{6.102}$$

Como $\langle\epsilon\psi^*\rangle$ tiene *carga* $-1$ ($\epsilon$ es real), el resto de los propagadores deben contribuir con una *carga* total $+1$, ya que la acción efectiva 2PI tiene *carga* cero. Entonces, como

$L_{\langle\varphi\epsilon\rangle} = 1$, implica la ausencia de los otros propagadores: $L_{\langle\varphi\varphi\rangle} = L_{\langle\varphi\varphi^*\rangle} = L_{\langle\varphi\psi\rangle} = 0$. De esto se desprende que tenemos una ecuación cerrada para $\langle\epsilon\varphi\rangle$, que además, es lineal tanto en el propagador $\langle\epsilon\varphi\rangle$ como en el campo medio $\phi$. En la próxima sección mostraremos explícitamente la ecuación de movimiento que sigue este propagador. Por el momento, lo que importa remarcar es lo siguiente: como este propagador resulta proporcional al campo medio, si éste es cero, debe verificarse entonces que $\langle\varphi\epsilon\rangle = 0$. Por lo tanto, resulta conveniente definir un nuevo operador como:

$$\langle\varphi(x)\,\epsilon(y)\rangle = \int dz\,\Lambda(x,y,z)\,\phi(z) \tag{6.103}$$

Por su definición, el operador $\Lambda$ resulta ser la generalización del operador de masa. Basta comparar las ecuaciones (6.35) y (6.103) para concluir que $\mathcal{Q}(x,z) = \Lambda(x,x,z)$. Más adelante mostraremos cuál es la expansión diagramática para $\Lambda$ y veremos que el primer término es justamente la aproximación no lineal dada en (6.46) y que los diagramas de orden superior generan para el operador de masa una solución que es de orden superior a esta aproximación.

Con un análisis similar podemos mostrar que con la acción efectiva 2PI la ecuación de movimiento para $\langle\varphi\varphi^*\rangle$, dada por (6.90), también es lineal en el propagador.

Lo que resta por hacer es dar las expresiones explícitas para las ecuaciones de movimiento de los propagadores. Para hacerlo es necesario decir quién es $\Gamma_2$, calcular las variaciones que aparecen en las ecuaciones de $\langle\epsilon\varphi\rangle$ y $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ y mostrar, de manera diagramática, que los diagramas 2PI contienen tanto a la aproximación no lineal como a la aproximación escalera. Este el objetivo de la próxima sección, la cual concluirá el objetivo planteado al comienzo del capítulo.

## 6.5. Aproximación a dos *loops* de la acción efectiva 2PI

Todas las ecuaciones dinámicas encotradas para los propagadores contienen derivadas funcionales de la acción efectiva $\Gamma_2$. Hasta ahora, sólo hemos definido formalmente tal acción a partir de la ecuación (6.67) y propusimos un *ansatz* para resolverla. Lo que resta por hacer es dar una expresión explícita para esta acción con la cual poder dar las ecuaciones que siguen tanto $\langle\epsilon\varphi\rangle$ (que está asociado al operador de masa, y por lo tanto, a la aproximación

no lineal), como $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ (vinculado al operador intensidad y a la aproximación escalera) y $\langle\varphi\psi^*\rangle$ (la función de Green del problema).

A dos *loops*, la acción efectiva 2PI tiene la siguiente expresión[40]:

$$\Gamma_2 = \frac{i}{2}\left\langle\left[\int dx\,\epsilon\left(\psi^*\varphi+\psi\varphi^*\right)\right]^2 + \texttt{campos de Grassman}\right\rangle_{2PI} \tag{6.104}$$

El valor de expectación se calcula haciendo uso del teorema de Wick [1]. El subíndice 2PI indica que sólo se consideran diagramas que sean irreducibles de dos partículas. El término `campos de Grassman` es mantenido para asegurar que se varifique (6.80), lo que significa que a dos loops la correlación entre inhomogeneidades del medio no recibe correcciones por acoplamiento del campo $\epsilon$ con otros campos; de todos modos, el acoplamiento entre campos de Grassman y campos físicos no será tenido en cuenta.

A continuación listamos las variaciones necesarias para escribir las ecuaciones (6.90), (6.98) y (6.101).

- $$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\left\langle\psi^*\left(x\right)\varphi\left(x'\right)\right\rangle} = \frac{1}{2}G\left(x,x'\right)C\left(x,x'\right) \tag{6.105}$$

- $$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\left\langle\psi^*\left(x\right)\epsilon\left(x'\right)\right\rangle} = \frac{i}{2}\left\langle\varphi\left(x\right)\psi^*\left(x'\right)\right\rangle\left\langle\epsilon\left(x\right)\varphi\left(x'\right)\right\rangle \tag{6.106}$$

- $$\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\left\langle\psi^*\left(x\right)\psi\left(x'\right)\right\rangle} = \frac{i}{2}\left[\left\langle\varphi\left(x\right)\varphi^*\left(x'\right)\right\rangle C\left(x,x'\right)+\left\langle\epsilon\left(x\right)\varphi^*\left(x'\right)\right\rangle\left\langle\varphi\left(x\right)\epsilon\left(x'\right)\right\rangle\right] \tag{6.107}$$

Lo único que queda por hacer es poner de manifiesto las ecuaciones (6.90), (6.98) y (6.101). Luego hacer el desarrollo diagramático de las mismas. Por último, identificar los términos que son tenidos en cuenta por las aproximaciones no lineal y escalera y reconocer los nuevos diagramas que provienen exclusivamente de la acción 2PI.

### 6.5.1. Representación diagramática de las ecuaciones 2PI

Como discutimos en la Sección 6.4.3, el orden conveniente para resolver las ecuaciones 2PI es: primero hallar la función de Green $G$ (cuya dinámica está dada por (6.98)); luego

[1] el valor de expectación de $2N$ campos se escribe como el producto de $N$ propagadores.

seguir con el propagador $\langle\epsilon\varphi\rangle$ (a través de (6.101)); finalmente estudiar la intensidad del campo dispersado, dada por el propagador $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ que obedece la ecuación (6.90).

**Función de Green:** $G = \langle\varphi\psi^*\rangle$

La dinámica que sigue la función de Green está dada por la ecuación (6.98). Usando (6.105) para calcular la variación de la acción efectiva $\Gamma_2$, la ecuación que resulta es la siguiente:

$$\left[\mathbf{D_0} + \imath C(x,x')G(x,x')\right] G(x,x') = \imath\delta\left(x - x'\right) \tag{6.108}$$

Esta ecuación tiene la misma estructura que (6.34), que fue resuelta usando la aproximación no lineal para el operador de auto energía $\Sigma$. Por lo tanto, con la acción efectiva 2PI, la función de Green tiene la misma contribución diagramática que la hallada resolviendo la ecuación de Dyson a orden más bajo. La representación diagramática para $G$ es la dada en la Figura 6.7.

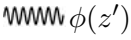
**Propagador** $\langle\epsilon\varphi\rangle$

Usando (6.106) para escribir explícitamente la ecuación para $\langle\epsilon\varphi\rangle$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle\epsilon(x)\varphi(x')\rangle &= \int dz\, C(x,z)G(x',z)\phi(z) \\ &+ \int dz\, dz' C(x,z')G(x',z)G(z,z')\langle\epsilon(z)\varphi(z')\rangle\end{aligned} \tag{6.109}$$

Como ocurrió para $G$, la ecuación obtenida es de la misma forma que (6.34): es una ecuación integral para el propagador. O sea, obtuvimos la ecuación de Dyson para $\langle\epsilon\varphi\rangle$. La diferencia notoria es que es una ecuación que depende de dos puntos espaciales. A diferencia de la ecuación de Bethe-Salpeter (que también es de dos puntos) es que está ecuación que encontramos es lineal en el propagador, mientras que BS es cuadrática en el mismo. Podemos dar entonces una representación diagramática para esta ecuación. Los gráficos asociados a $C(x,x')$ y a $G = \langle\varphi\psi^*\rangle$ fueron introducidos en las secciones anteriores; para las nuevas cantidades vamos a usar los siguientes:

- $\langle \epsilon(x)\varphi(x')\rangle =$


- $\phi(z) = \delta(z-z')\phi(z') = z$  $\phi(z')$

El último diagrama se utiliza para poner de manifiesto el acoplamiento del campo medio con los propagadores; para que la representación gráfica sea más fácil de interpretar conviene ubicar al campo $\phi$ a un punto auxiliar.

En términos de diagramas, la ecuación de Dyson para el propagador $\langle \epsilon\varphi\rangle$ es

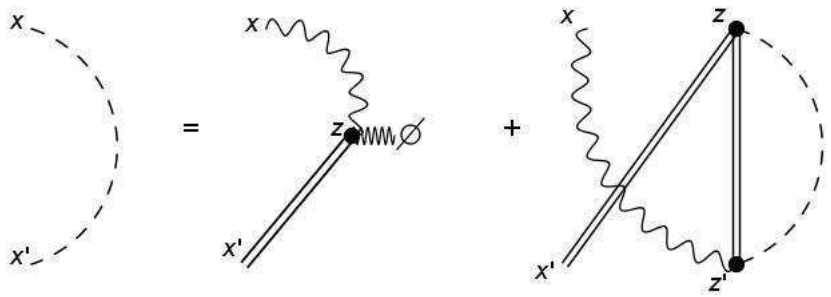



Figura 6.10: Ecuación de Dyson para el propagador $\langle \epsilon\varphi\rangle$.

Para mostrar que las ecuaciones 2PI contienen diagramas que la aproximación no lineal no tiene, vamos a iterar (6.109) dos veces, poniendo la misma sólo en función de cantidades ya conocidas.

Entonces, a dos *loops*, (6.109) se expande a

$$\begin{aligned}
&\langle \epsilon(x)\varphi(x')\rangle \approx \int dz\, C(x,z)G(x',z)\phi(z) \\
&+ \int dz\, dy\, dy'\, C(x,y')G(x',y)G(y,y')C(y',z)G(z,y')\phi(z) \\
&+ \int dz\, dy\, dy\, ds\, ds'\, C(x,y')G(x',y)G(y,y')C(y,s')G(y',s)G(s,s')C(s,z)G(z,s')\phi(z) \\
&+ \cdots
\end{aligned} \tag{6.110}$$

Todos los términos siempre quedan proporcionales al campo medio, por lo tanto, podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\langle \epsilon(x)\varphi(x')\rangle = \int dz\, \Lambda(x,x',z)\phi(z) \tag{6.111}$$

siendo

$$\Lambda(x,x',z) = C(x,z)G(z,x') + \int dy\, dy'\, C(x,y')G(x',y)C(y,z)G(y,y')G(z,y')$$
$$+ \int dydy'\, dsds'\, C(x,y')G(x',y)G(y,y')C(y,s')G(y',s)C(s,z)G(s,s')G(z,y') \quad (6.112)$$

El diagrama asociado a $\Lambda(x,x',z)$ es un círculo con tres puntos. A dos *loops*, su representación es la siguiente:

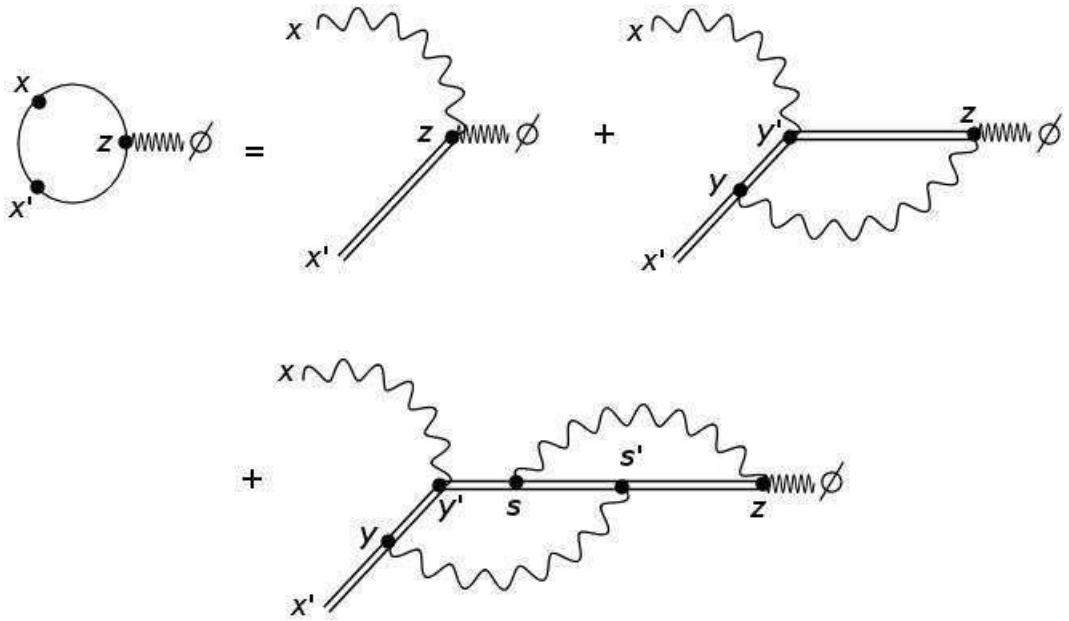



Figura 6.11: Operador $\Lambda$ desarrollado a dos loops.

Por la definición que dimos del operador $\Lambda$, cuando $x = x'$ este operador es el operador de masa $\mathcal{Q}$: $\Lambda(x,x,z) = \mathcal{Q}(x,z)$. A dos *loops*, y a través de las ecuaciones 2PI, el operador de masa tiene la siguiente representación:

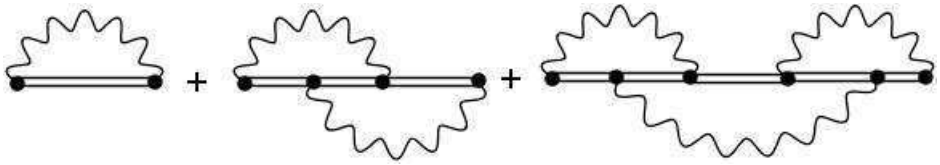



Figura 6.12: Operador de masa a dos loops con diagramas 2PI.

Vemos entonces, que a segundo orden, $\mathcal{Q}$ tiene diagramas que la aproximación no lineal no contenía: aquellos diagramas que tienen cruzada una o dos líneas de la función de

correlación son contribuciones que aportan los diagramas irreducibles de dos partículas.

**Propagador $\langle\varphi\varphi^*\rangle$**

Para concluir este capítulo, mostraremos que la ecuación 2PI para el valor de expectación del propagador que es proporciona la intensidad dispersada por el medio, contiene diagramas que la aproximación escalera no brinda. Recordemos que la aproximación escalera fue introducida en (6.12) para resolver la ecuación de Bethe-Salpeter, la cual es cuadrática en los campos y cuya resolución, de manera perturbativa, resulta poco eficiente. Este es uno de los motivos por el cual se propone usar las ecuaciones 2PI, ya que si bien requiere todo un desarrollo teórico previo a establecer la dinámica de las cantidades de interés, las ecuaciones de movimiento que se obtienen para cada uno de los propagadores es lineal en ellos.

Como mostramos en las secciones anteriores, la estructura de las ecuaciones tiene un nivel de jerarquía en el cual, la solución de un propagador resulta necesaria para encontrar la solución del próximo. Vimos que el propagador $G = \langle\varphi\psi^*\rangle$ es independiente de los otros dos, y por lo tanto fue el primero en ser resuelto. Luego vimos que el propagador $\langle\epsilon\varphi\rangle$ dependía de $G$ pero no de $\varphi\varphi^*$; este fue hallado entonces en segundo lugar. En lo que sigue mostraremos que el único propagador de interés que queda por ser resuelto depende de los dos anteriores, y en consecuencia, tiene el último lugar en la serie de soluciones.

La ecuación de movimiento para $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ es (6.90), que depende de la variación de $\Gamma_2$ respecto a $\langle\epsilon\psi^*\rangle$ y $\langle\psi\psi^*\rangle$, las cuales fueron calculadas en (6.106) y (6.107). Reemplazando entonces las variaciones de la acción efectiva obtenemos la ecuación de movimiento buscada:

$$\begin{aligned}
\left\langle\varphi\left(x\right)\varphi^*\left(x'\right)\right\rangle &= -\int dy\, G\left(x-y\right)\phi\left(y\right)\left\langle\epsilon\left(y\right)\varphi^*\left(x'\right)\right\rangle \\
&+ \int dydy'\, G\left(x-y\right)G\left(y-y'\right)\left\langle\epsilon\left(y\right)\varphi\left(y'\right)\right\rangle\left\langle\epsilon\left(y'\right)\varphi^*\left(x'\right)\right\rangle \\
&+ \int dydy'\, G\left(x-y\right)G\left(x'-y'\right)\left\langle\epsilon\left(y\right)\varphi^*\left(y'\right)\right\rangle\left\langle\varphi\left(y\right)\epsilon\left(y'\right)\right\rangle \\
&+ \int dy\, dy'\, G\left(x-y\right)G\left(x'-y'\right)C(y,y')\left\langle\varphi\left(y\right)\varphi^*\left(y'\right)\right\rangle \qquad (6.113)
\end{aligned}$$

Vemos que se vuelve a repetir la estructura en la ecuación: el propagador buscado resulta estar a ambos lados de la ecuación, en el lado derecho dentro de una integral. Esto es, se vuelve a obtener una ecuación de Dyson. Ahora, el término de orden cero (el que no

depende del propio propagador) tiene tres contribuciones, una que depende linealmente del campo medio $\phi$ y de los dos propagadores hallados anteriormente, $G = \langle \varphi\psi^* \rangle$ y $\langle \epsilon\varphi \rangle$, y otros dos términos que son independientes del campo medio pero cuadráticos en los propagadores. Aquí se pone de manifiesto de manera explícita el nivel de jararquía que tienen las ecuaciones 2PI.

Como en todas las ecuaciones del tipo Dyson que estudiamos en este capítulo, también se puede dar para (6.113) un nuevo operador que resuma la ecuación en dos términos (o dos diagramas), como lo hicimos en (6.109) - esquematizado en la Figura 6.10. Para ello habría que iterar al menos dos veces la ecuación y obtener el nuevo operador. En lugar de ello, lo que vamos a hacer es dar la representación diagramática de (6.113), usar la representación del propagador $\langle \epsilon\varphi \rangle$ y, por último, reconocer los diagramas que están incluídos en la aproximación escalera y los nuevos diagramas que surgen de la acción 2PI.

El diagrama correspondiente a $\langle \varphi\varphi^* \rangle$ es . La ecuación (6.113) tiene la siguiente representación:

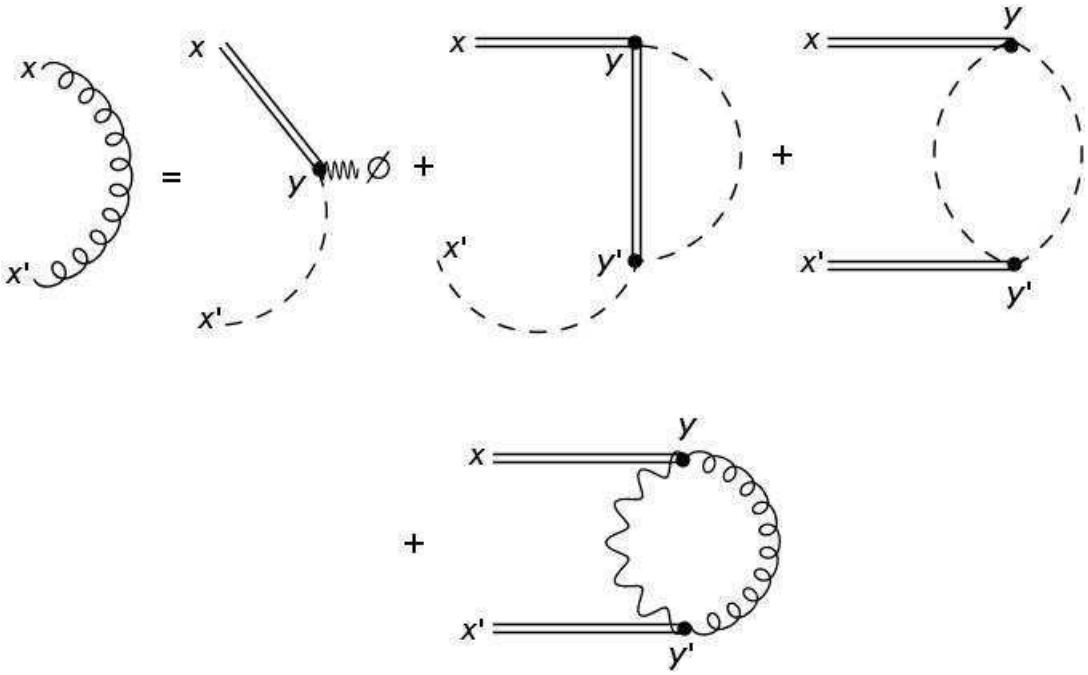



Figura 6.13: Ecuación de Dyson para el propagador $\langle \varphi\varphi^* \rangle$.

A fin de estudiar las distintas contribuciones que genera cada término se puede desarrollar el propagador $\langle \epsilon\varphi \rangle$ en cada uno de los diagramas.

En la Figura 6.14 se muestran los diagramas correspondientes al primer término.

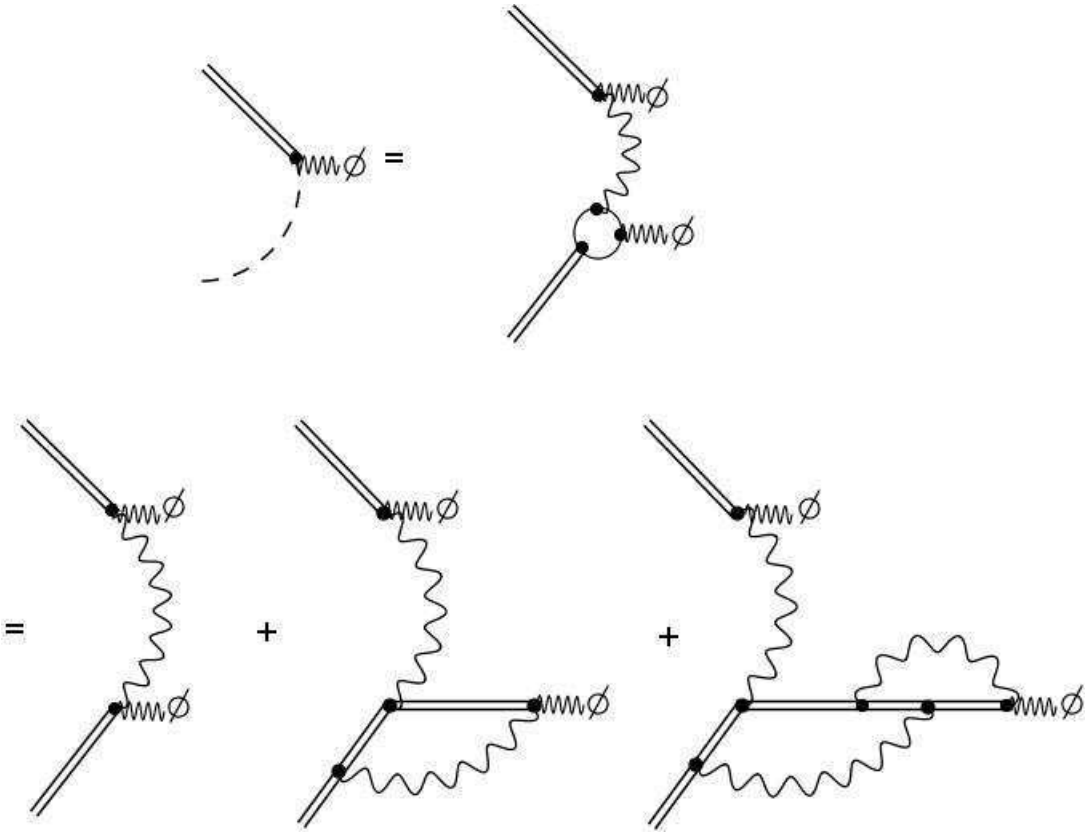



Figura 6.14: Contribuciones a $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ a dos *loops*.

De estos, el primero es exactamente el que se obtiene con la aproximación escalera. Con esta aproximación, el operador intensidad, definido en (6.12) y que resumaba la ecuación de Bethe-Salpeter, tenía la siguiente expresión:

$\mathcal{I}(x,x',z,z') \approx \delta(x-x')\delta(z-z')C(x-z)$, cuyo diagrama es simplemente

.

Los siguientes diagramas del primer término en el propagador $\langle\varphi\varphi^*\rangle$ ya tienen contribuciones que son de órdenes superiores a la aproximación escalera. Consecuentemente, el segundo y tercer diagrama que están presentes en la Figura 6.13 generan contribuciones que también resultan de órdenes superiores a la aproximación escalera.

## 6.6. Discusión del capítulo

La recopilación de este capítulo indica lo siguiente: para hallar la energía dispersada por un medio material que tiene una permitividad dieléctrica aleatoria se puede optar por resolver de manera directa el problema a través de las ecuaciones de Dyson y Bethe-Salpeter, o bien, hacer uso de la formulación funcional del problema. En ambos casos, las soluciones que se encuentran son siempre haciendo un desarrollo perturbativo de las ecuaciones planteadas.

El planteo directo del problema involucra resolver una ecuación no lineal (BS) en las cantidades de interés. La solución a orden más bajo se hace a través de la aproximación escalera. Para que el problema sea consistente con la conservación de la energía es necesario usar la aproximación no lineal en la ecuación de Dyson.

Por otro lado, la resolución a través del método funcional sólo incluye ecuaciones que son lineales. Si bien se introducen nuevos campos, con lo cual se aumenta el número de grados de libertad del sistema, la formulación 2PI permite encontrar de manera sistemática las ecuaciones que siguen los campos, tanto los físicos como los auxiliares. Además, hemos visto que este sistema de ecuaciones tiene una estructura que permite ir resolviendo de manera independiente cada uno de los propagadores necesarios para hallar la energía dispersada. Otra de las ventajas que tienen las ecuaciones 2PI es que, debido a su formulación, conservan la energía, sin importar a qué orden en el desarrollo perturbativo se resuelvan las ecuaciones de movimiento. Por último, hemos comparado las contribuciones que dan las aproximaciones no lineal y escalera frente a las que dan los diagramas 2PI y vimos que estos últimos, no sólo contienen a las primeras, sino que además dan resultados cualitativamente distintos.

# 7

# Conclusiones

La estimación de la humedad del suelo a escala regional y resolución media ($\sim ha$) es de vital importancia para monitorear y modelar la oferta hídrica en suelos de agricultura, la cual condiciona fuertemente el rendimiento agrícola. Los radares de apertura sintética (SAR) son los únicos sistemas capaces de generar información sobre la humedad del suelo a escala regional y alta resolución. Con esta motivación, la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE) está desarrollando desde hace más de 10 años la misión SAOCOM, que constará de dos radares de apertura sintética (SAR) banda L ($\lambda$ 25 cm) cuyo objetivo es la estimación de humedad del suelo a escala de la Pampa Húmeda para soporte de las actividades agrícolas.

El núcleo de todo producto humedad del suelo es el modelo inverso, que permita estimar las variables de interés (humedad del suelo) a partir de las variables físicas medidas (matriz de scattering en una frecuencia y geometría de observación dadas). Este problema de inferencia puede resolverse directamente a partir de un esquema Bayesiano si se dispone de un modelo directo, el cual estima las variables físicas medidas a partir de las variables de interés (estima humedad del suelo a partir de la matriz de scattering). Sin embargo, el suelo es un medio estratificado e inhomogéneo muy complejo, y sus propiedades de scattering no son fáciles de modelar.

En este contexto, en esta tesis se apuntó a desarrollar un modelo de scattering robusto, que pudiese servir como modelo directo en un esquema de inversión. El modelo de scattering desarrollado podría utilizarse como parte integral de un producto humedad del suelo para las misión SAOCOM. Para que pueda ser utilizado en un producto operativo, se definieron una serie de requerimientos sobre el modelo de scattering:

- debe ser un modelo capaz de estimar la función amplitud de scattering biestática polarimétrica (sección eficaz, $\sigma^0$) de un suelo de agricultura. Como objetivo, se intentó desarrollar una metodología para estimar la función de scattering biestática de un arreglo

de dos capas dieléctricas (correspondiente a dos estratos del suelo con características distintas), que presentan discontinuidades dieléctricas puntuales en su interior (poros de agua y aire);

- debe ser un modelo basado en primeros principios (ecuaciones de Maxwell), de manera de ser generalizable a distintas geometrías de observación, ángulos de incidencia y características dieléctricas y geométricas;

- debe ser un modelo polarimétrico, en el sentido que estime el valor del coeficiente de backscattering despolarizado $\sigma^0_{vh}$ (que es $\neq 0$ para suelos reales y que se sabe experimentalmente que es de utilidad para discriminar cambios de rugosidad de cambios de humedad);

- ya que el modelo estará basado en primeros principios, la estimación del coeficiente $\sigma^0$ requiere de una serie de aproximaciones. Estas aproximaciones deberán estar debidamente explicitadas y justificadas;

- el modelo deberá tener una expresión final que sea implementable numéricamente, con el objetivo de estimar de manera operativa el scattering de un suelo dadas e conjunto de sus características dieléctricas y geométricas.

Entonces, el objetivo principal de esta tesis fue desarrollar un método de para estimar la función amplitud de scattering de un medio estratificado dieléctricamente inhomogéneo. Para este fin, se siguió un esquema escalonado, desarrollando modelos simples primero, complejizándolos paulatinamente.

En el Capítulo 2, nos dedicamos a describir con gran detalle el método de la ecuación integral (IEM) ya que es el método en el cual nos basamos para estimar la función amplitud de scattering de una superficie aleatoria. En particular, durante el desarrollo del IEM vimos que en la formulación usual (que incluye las últimas correcciones desarrolladas en las bibliografía), el IEM predice valores nulos para los canales de polarización cruzada en *backscattering*. Este resultado se debe a que en el desarrollo original del método se linealizó la amplitud de los campos superficiales respecto a las derivadas direccionales de la superficie ($z_x$ y $z_y$). Como consecuencia, era posible reescribir las mismas como un cociente independiente de las coordenadas espaciales y que, en la condición de backscattering, implica que la amplitud,

tanto del campo de Kirchhoff como del complementario, se anulen.

En el Capítulo 3 mostramos que cuando todos los términos en las derivadas direccionales son considerados y se mantiene la dependencia espacial de las mismas, se obtienen valores no nulos para $\sigma^0_{vh}$ de una superficie aleatoria. Con el fin de evaluar experimentalmente el alcance de este modelo, se simuló el $\sigma^0$ para superficies de agricultura reales integrando sobre superficies relevadas con un perfilómetro bidimensional láser, y mostramos que los canales co-polarizados tienen una tendencia similar a lo predicho por los resultados sobre superficies aleatorias genéricas. Sin embargo, los resultados obtenidos para el canal de polarización cruzada ($\sim -25$dB en el mejor de los casos) son todavía muy bajos si se los compara a las observaciones de scatterómetros o SAR de suelos de agricultura reales. Entonces, si bien un porcentaje del $\sigma^0_{vh}$ observado puede atribuirse a este scattering superficial corregido, todavía quedan otros mecanismos que aportan a la potencia total.

Las contribuciones del scattering dentro del suelo a la sección eficaz del radar fueron estudiadas en la segunda parte del trabajo. En el Capítulo 4 hemos extendido el método de la ecuación integral para hallar cuál es el coeficiente $\sigma^0$ cuando debajo de la superficie iluminada por el radar el medio se encuentra estratificado. Concretamente, calculamos cuál es la potencia dispersada si debajo de la superficie se hallan dos medios homogéneos caracterizados por permitividades dieléctricas constantes. Observamos un comportamiento oscilatorio de la sección eficaz con respecto a la distancia media entre las superficies y que los coeficientes $\sigma^0_{hh}$ y $\sigma^0_{vv}$ tienden a los valores del modelo de una sola capa en el límite en que $D \gg \lambda$ y $\epsilon_1 = \epsilon_2$. El trabajo pendiente en este tema es calcular la sección eficaz para el canal cruzado teniendo en cuenta las contribuciones no lineales de $z_j$ en la amplitud de los campos superficiales. Esto requiere continuar trabajando con los métodos funcionales que usamos en el modelo de capas y que también usamos en el Capítulo final para resolver el problema de scattering en medios cuya permitividad dieléctrica es una variable estocástica.

El capitulo 6 lo dedicados a contextualizar el problema de un medio aleatorio en el marco de teorías estadísticas de campos. Aquí se desarrollan dos de las técnicas que se utilizan en este tipo de problemas: (1) el desarrollo perturbativo en ecuación de Dyson para el campo medio y, (2) el planteo del problema enfocado desde una perspectiva basada en una teoría estadística de campo. Con esta última técnica esperamos poder abordar de manera general el problema del cálculo de la sección eficaz de de un medio aleatorio genérico.

## 7.1. Aportes de esta tesis

Desde el punto de vista físico, a lo largo de toda la tesis nos enfrentamos de manera distinta al mismo problema: calcular el campo electromagnético dispersado por un blanco complejo del cual sólo se conocen propiedades estadísticas. El esquema más sencillo que propusimos es el de una superficie rugosa caracterizada por una función de correlación. Luego añadimos una segunda interface debajo, considerando que los medios materiales son isótropos y homogéneos. El último de los sistemas estudiados se define a través de las inhomogeneidades dieléctricas del medio. En todos los casos, la física de los sistemas requirió resolver una ecuación integral. Esta es una propiedad fundamental en los problemas de dispersión EM en los cuales no se puede dar de manera explícita las condiciones de contorno que debe cumplir el campo físico. Por lo tanto, lo que hicimos durante gran parte de este trabajo es encontrar la manera más conveniente - según el problema a la vista - de resolver la ecuación de Dyson para el campo electromagnético dispersado.

Primeramente nos dedicamos a estudiar de manera sistemática cómo la aproximación de plano tangente puede ser usada como resultado fundamental para encontrar, de manera iterativa, el campo EM dispersado por una superficie aleatoria. Vimos que se pueden hacer simplificaciones que permiten calcular el coeficiente de retrodispersión de manera analítica, que fue el camino elegido por varios autores durante los desarrollos en la década del 80 y 90. Sin embargo, durante el desarrollo de esta tesis, probamos que estas facilidades de cálculo llevan a algunos resultados que no se condicen con las observaciones disponibles (concretamente, el coeficiente de retrodispersión de los canales cruzados no es nulo). Este fue el primer motivo para revisar las aproximaciones hechas en el IEM. El primer avance logrado en esta tesis fue mostrar que, cuando se trabaja con las amplitudes completas del campo de Kirchhoff, se logran coeficientes de retrodispersión no nulos para los canales de polarización cruzada.

Para evaluar el impacto de estos resultados, nos dedicamos a trabajar con superficies reales, integrando de manera numérica los campos de Kirchhoff recalculados reteniendo los términos no lineales en las derivadas direccionales de la superficie. Mostramos cómo es el comportamiento de la sección eficaz en función del ángulo de incidencia y de la constante dieléctrica, en la condición de retrodispersión. Vimos que los canales co-polarizados no se modifican con la inclusión de los nuevos términos. Sin embargo, los canales cruzados mostraron una

diferencia cualitativamente significante respecto a los cálculos usuales. Físicamente, retener los términos de orden superior en potencias de las derivadas superficiales, permite que el plano tangente a cada punto de la superficie esté ladeado respecto al plano de incidencia, lo que trae consigo la depolarización de la onda. Este es el segundo aporte significativo de esta tesis.

Un nuevo aporte se dio con el calculo del campo EM dispersado para una nueva geometría: una superficie rugosa con una interface plana debajo, que separa dos medio dieléctricos homogéneos. La motivación de esta configuración es modelar, de manera más certera, el estrato húmedo que se encuentra típicamente en suelos de agricultura. La innovación en el cálculo estuvo basada en calcular el campo dispersado haciendo uso de métodos funcionales, generalmente asociados a teorías estadísticas de campo y no utilizados hasta a fecha en modelos de scattering vinculados a teledetección. Este enfoque queda justificado porque, en nuestro caso, el campo con el que estamos trabajando responde a una dinámica estadística: depende de una variable de la cual sólo se conoce su distribución de probabilidad, su valor medio y función de autocorrelación. Por lo tanto, el uso de estas técnicas resulta apropiado.

Para esta aproximación, en esta tesis mostramos que el campo EM del modelo de capas recupera el campo del IEM en los dos límites físicamente relevantes: cuando las constantes dieléctricas de los medios subterráneos son iguales, y cuando la segunda capa se encuentra suficientemente lejos, esto es, cuando la distancia media entre las superficies es mucho mayor que la longitud de onda incidente. Posteriormente, estudiamos cómo la introducción de esta nueva interface genera un comportamiento oscilatorio en el coeficiente de retrodispersión.

La última parte de esta tesis es quizá el aporte más novedoso a los métodos usuales en el cálculo de la dispersión de ondas EM. Apartándonos de las maneras usuales a través de las cuales se enfrentan los problemas de dispersión en medios desordenados, expusimos cómo las técnicas basadas en teorías de campos estadísticas resultan más eficientes para resolver este tipo de problema. En particular, nuestro enfoque estuvo basado en los diagramas irreducibles de dos partículas y mostramos que, al mismo orden perturbativo que los métodos usuales, se consiguen resultados cualitativamente distintos. Más aún, vimos que a segundo orden perturbativo, las contribuciones a la potencia dispersada dadas por el enfoque diagramático están contenidas en las dadas por las contribuciones calculadas bajo el formalismo de los métodos funcionales. No menos importante, debe remarcarse que se ha resuelto el problema

acústico: la dispersión de un campo escalar en un medio material inhomogéneo. El problema EM puede ser extendido a partir de lo hecho hasta aquí, y es uno de los trabajos que queda pendiente en esta tesis.

### 7.1.1. Aportes de esta tesis a la estimación de humedad del suelo a partir de datos SAR

El desarrollo de una aproximación al problema de scattering de un suelo capaz de explicar las observaciones disponibles es crucial para desarrollar un esquema de inversión robusto. En este contexto, un modelo más complicado requirió (1) complejizar las aproximaciones del problema de scattering y, (2) complejizar la geometría del blanco. Al final de esta tesis, el modelo de scattering desarrollado puede escribirse como, $\sigma_p^0 q = f(\varepsilon_1, s, l, ACF, \varepsilon_2, D)$, una función de la humedad del suelo superficial (función de $\varepsilon_1$), su rugosidad superficial ($s$ y $l$ y ACF) y de las humedad ($\epsilon_2$) y profundidad ($D$) de la cama inferior. La función $f$ engloba todos los desarrollos de esta tesis hasta el capitulo 5. Así descrito, este modelo puede utilizarse directamente en un esquema de *retrieval* Bayesiano. Para ello, es necesario disponer de algún tipo de información auxiliar sobre las últimas dos variables, de manera de al menos poder acotar su impacto sobre el $\sigma^0$ medido.

Sin embargo, el modelo así desarrollado ya es de utilidad: el principal efecto predicho por esta aproximación (el comportamiento oscilatorio del cociente $p = \sigma_{hh}^0/\sigma_{vv}^0$), brinda una explicación razonable al desajuste observado en los esquemas de inversión estudiados. En particular, ya que $p$ se asocia directamente al valor de $\epsilon_1$, variaciones en $p$ debidas a $D$ o $\epsilon_2$ se verán como sobre-estimaciones o subestimaciones de $\epsilon_1$. Es interesante además el hecho de que la introducción de una capa plana subterránea alcanza para generar este tipo de efectos polarimétricos.

Por último, en cuanto se implemente numéricamente el modelo desarrollado en el último capítulo, es posible introducir una variable más para modelar el scattering en volumen: la distribución espacial de $\varepsilon_1$. El efecto de cambios en estas variables podrán ser estudiados mediante simulaciones, de manera de ver si son capaces de explicar las observaciones disponibles. Más importante aún, todas estas variables pueden medirse a campo, y permiten afianzar un modelo de suelo bastante más general que los disponibles actualmente.

# A

# Identidades matemáticas - Ecuaciones de Maxwell

En este apéndice se detallan algunos de los resultados usados en el Capítulo (2).

## A.1. Identidades de Green

Dado un campo vectorial, definido como $\vec{A} = \vec{P} \times \nabla \times \vec{Q}$, la integral de este campo sobre un espacio cerrado se puede escribir usando la Identidad de Green como

$$\begin{aligned} \int_V dv\, \nabla \cdot \vec{A} &= \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{A} \\ \int_V dv\, \nabla \cdot \left(\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q}\right) &= \oint_S d\vec{s} \cdot \left(\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q}\right) \end{aligned}$$

Haciendo uso de identidades vectoriales básicas podemos escribir la identidad anterior como sigue:

$$\int_V dv\, \left[\vec{P}\nabla^2\vec{Q} - \vec{Q}\nabla^2\vec{P}\right] = \oint_S d\vec{s} \cdot \left[\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q} - \vec{Q} \times \nabla \times \vec{P}\right] \tag{A.1}$$

Para poder escribir el principio de Huygens se debe elegir al campo $\vec{P}$ como el eléctrico ($\vec{E}$) y al campo $\vec{Q}$ como la función de Green retardada multiplicada por una dirección arbitraria ($\vec{Q} = G(\mathbf{r})\hat{a}$). Además, vamos a hacer uso de las ecuaciones de Maxwell y de la definición de la función de Green:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \ , \ \nabla \cdot \vec{H} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} - \imath\omega\mu\vec{H} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} - \vec{j} + \imath\omega\epsilon\vec{E} = 0$$
$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Con las ecuaciones de Maxwell y la definición de la función de Green se puede mostrar que la ecuación (A.1) se reduce a [20]:

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int dv\ \imath\omega\mu\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\vec{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi}\int_s ds\left[\imath\omega\mu\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}') - \left(\hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}')\right) \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right]$$

Reconociendo en el primer término al campo incidente ($\vec{j}$ es la fuente del mismo), el campo dispersado por la superficie S puede escribirse como

$$\vec{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_s ds\left[\imath\omega\mu\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\hat{n} \times \vec{H}(\mathbf{r}') + \left(\hat{n} \times \vec{E}(\mathbf{r}')\right) \times \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right] \tag{A.2}$$

Esta es la expresión que usamos en (2.18) y la recíproca en (2.19) para escribir los campos dispersados en el método IEM.

## A.2. Relación entre campos tangenciales y normales

Para poder escribir completamente el principio de Huygens se necesitan calcular los campos normales sobre la superficie iluminada (ver ecuación (2.18)). Vamos a relacionar el campo magnético normal a la superficie con el campo eléctrico tangencial a la misma. Aplicando el principio de reciprocidad entre los campo se puede obtener la relación opuesta.

Integrando la tercer ecuación de Maxwell sobre la superficie iluminada vamos a poder relacionar los campos normales y tangenciales:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E}(\mathbf{r}) &= \imath\omega\mu\vec{H} \\
\int ds\ \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{E}(\mathbf{r}) &= \int ds\ \hat{n} \cdot \imath\omega\mu\vec{H} \\
\int ds\ \left[\nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot \nabla \times \hat{n}\right] &= \int ds\ \imath\omega\mu\ \hat{n} \cdot \vec{H}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Como la normal a la superficie viene dada por el gradiente de $z(x, y)$, entonces: $\nabla \times \hat{n} = \nabla \times (\nabla z) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int ds\ \nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{E}) &= \int ds\ \imath\omega\mu\ \hat{n} \cdot \vec{H} \\
\Rightarrow \nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{E}) &= \imath\omega\mu\ \hat{n} \cdot \vec{H}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Reciprocamente, podemos hallar que $\nabla \cdot (\hat{n} \times \vec{H}) = -\imath\omega\epsilon\hat{n} \cdot \vec{E}$.

## A.3. Condiciones de validez para la aproximación de Kirchhoff

La definición del radio de curvatura medio de una superficie aleatoria es [18]

$$\Gamma \equiv \frac{1}{|K(x)|} \tag{A.5}$$

$$\text{siendo:} \qquad K(x) = \frac{|z_{xx}|}{|[1 + z_x^2]^{3/2}|} \tag{A.6}$$

donde $z_x$ y $z_{xx}$ son la primer y segunda derivada de la superficie respectivamente. Si la superficie es suave (en el sentido de Kirchhoff), podemos despreciar la la derivada primera: $z_x \ll 1$. En este caso $K(x) \approx |z_{xx}|$. El valor medio de la derivada segunda es:

$$< z_{xx}(z) >= s^2 \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4}\Big|_{x=0} \tag{A.7}$$

siendo $\rho(x, x')$ la función de correlación de la superficie y $s$ su altura RMS.

Para una superficie con función de autocorrelación gaussiana y longitud de correlación $l$ se obtiene que $< |K(x)| >\approx \frac{2{,}76\sigma}{l^2}$. Por lo tanto, el radio de curvatura es

$$\Gamma = \frac{l^2}{2{,}76\sigma} \tag{A.8}$$

Pedir que la superficie sea suave, en el sentido de poder usar la aproximación de plano tangente, significa que el radio de curvatura de la superficie sea mucho más grande que la longitud de onda incidente, por lo tanto:

$$\frac{l^2}{2{,}76\sigma} \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad l^2 \gg 2{,}76\sigma\lambda \tag{A.9}$$

Esta es la condición que pedimos para que la aproximación de plano tangente sea válida.

# B

# Coeficientes del IEM

La base local usada en cada punto de la superfice aleatoria queda definida por los siguientes vectores:

$$\begin{cases} \hat{n} = \frac{1}{D_1}\left[-z_x\hat{x} - z_y\hat{y} + \hat{z}\right] \\ \hat{t} = \frac{\hat{k}_i \times \hat{n}}{|\hat{k}_i \times \hat{n}|} \\ \hat{d} = \hat{k}_i \times \hat{t} \end{cases}$$

con $D_1 = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}$ el módulo de la normal a la superficie.

Dado que elegimos un sistema de referencia en donde $\hat{k}_i = \sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{z}$, la base local es la siguiente:

$$\hat{n} = \frac{1}{D_1}\left[-z_x\hat{x} - z_y\hat{y} + \hat{z}\right] \tag{B.1}$$

$$\hat{t} = \frac{1}{D_2}\left[-z_y\cos\theta\hat{x} + (z_x\cos\theta - \sin\theta)\hat{y} - z_y\sin\theta\hat{z}\right] \tag{B.2}$$

$$\hat{d} = \frac{1}{D_2}\left[\cos\theta(z_x\cos\theta - \sin\theta)\hat{x} + z_y\hat{y} + \sin\theta(z_x\cos\theta - \sin\theta)\hat{z}\right] \tag{B.3}$$

con $D_2 = \left[z_y^2 + (z_x\cos\theta - \sin\theta)^2\right]^{1/2}$.

La polarización del campo incidente (tomando $\phi = \pi$) y del dispersado son las siguientes:

$$\hat{h} = \hat{y} \tag{B.4}$$

$$\hat{v} = \cos\theta\ \hat{x} + \sin\theta\ \hat{z} \tag{B.5}$$

$$\hat{h}_s = \sin\phi_s\ \hat{x} - \cos\phi_s\ \hat{y} \tag{B.6}$$

$$\hat{v}_s = \cos\theta_s\cos\phi_s\ \hat{x} - \cos\theta_s\sin\phi_s\ \hat{y} + \sin\theta_s\ \hat{z} \tag{B.7}$$

## B.1. Coeficientes del campo complementario

Los coeficientes $C_j$ presentes en la amplitud del campo complementario, para los canales co-polarizados, son:

$$
\begin{aligned}
C_1(u,v,q) &= (1+z_x\,z_x')\cos\phi_s + z_x'\,z_y\sin\phi_s \\
C_2(u,v,q) &= -\cos\phi_s\left(-q\cos\theta + u\,z_x\,\cos\theta - q\,z_x'\,\sin\theta\right. \\
&\quad \left.+q\,z_x\,z_x'\sin\theta - v\,z_y'\,\cos\theta + v\,z_x\,z_y'\,\sin\theta\right) \\
C_3(u,v,q) &= -\cos\phi_s\left(\sin\theta - q\,z_x\,\sin\theta - u\,z_x'\,\cos\theta + q\,z_x\,z_x'\,\cos\theta\right) \\
&\quad +\sin\phi_s\left(-v\sin\theta + v\,z_x'\cos\theta + q\,z_y\,\sin\theta - q\,z_x'\,z_y\,\cos\theta\right) \\
C_4(u,v,q) &= \cos\theta_s\sin\phi_S\left(z_y'\,\sin\theta - z_x\,z_y'\cos\theta\right) - \cos\theta_s\cos\phi_s\left(\cos\theta + z_x'\sin\theta + z_y\,z_y'\cos\theta\right) \\
&\quad +\sin\phi_s\left(-z_x\,\cos\theta - z_x\,z_x'\,\sin\theta + z_y\,z_y'\sin\theta\right) \\
C_5(u,v,q) &= \cos\theta_s\sin\phi_s\left(v\,z_x - v\,z_x'\right) - \cos\theta_s\cos\phi_s\left(q + u\,z_x + v\,z_x\right) \\
&\quad +\sin\theta_s\left(q\,z_x + u\,z_x\,z_x' + v\,z_x'\,z_y\right) \\
C_6(u,v,q) &= -\cos\theta_s\sin\phi_s\left(-u\,z_x' + q\,z_x\,z_y'\right) - \cos\theta_s\cos\phi_s\left(v\,z_y' - k_z\,z_y\,z_y'\right) \\
&\quad +\sin\theta_s\left(v\,z_x\,z_y' - u\,z_y\,z_y'\right)
\end{aligned}
$$

Los coeficientes $B_j$, usados en los canales de polarización cruzada, son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
B_1(u,v,q) &= \cos\theta_s\sin\phi_s\left(1 - z_x\,z_x'\right) - z_y\left(\sin\theta_s + \cos\theta_s\cos\phi_s\,z_x'\right) \\
B_2(u,v,q) &= \cos\theta\left\{-\sin\theta_s\left(qz_y + uz_x\,z_y' + vz_y\,z_y'\right) + \cos\theta_s\left[u\cos\phi_s\left(z_y' - z_y\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\sin\phi_s\left(q + uz_x + vz_y'\right)\right]\right\} \\
&\quad +\sin\theta\left\{q\sin\theta_s\left(z_x\,z_y' - z_y\,z_x'\right) + \cos\theta_s\left[-\cos\phi_s\left(uz_y\,z_x' + qz_y' + vz_y\,z_y'\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\sin\phi_s\left(qz_x' + uz_x\,z_x' + vz_x\,z_y'\right)\right]\right\} \\
B_3(u,v,q) &= \left(\sin\theta_s - \cos\theta_s\,z_x'\right)\left[\sin\theta_s\left(u\,z_y - v\,z_x\right) + \cos\theta_s\cos\phi_s\left(v - q\,z_y\right)\right. \\
&\quad \left.+\cos\theta_s\sin\phi_s\left(q\,z_x - u\right)\right] \\
B_4(u,v,q) &= z_y'\,\cos\phi_s\left(\sin\theta - z_x\,\cos\theta\right) - \sin\phi_s\left(\cos\theta + \sin\theta\,z_x' + \cos\theta\,z_y\,z_y'\right) \\
B_5(u,v,q) &= \sin\phi_s\left(q + v\,z_y + u\,z_x'\right) - \cos\phi_s\,v\left(z_x' - z_x\right) \\
B_6(u,v,q) &= z_y'\left[\cos\phi_s\left(u - q\,z_x\right) + \sin\phi_s\left(v - qz_y\right)\right]
\end{aligned}
$$

Donde $q = \sqrt{k^2 - u^2 - v^2}$ y las derivadas direccionales están dadas por

$$z_x = \frac{k_{sx} + u}{k_{sz} \mp q}\,,\; z_y = \frac{k_{sy} + v}{k_{sz} \mp q} \begin{cases} - & \text{si } z > z' \\ + & \text{si } z < z' \end{cases}$$

$$z'_x = \frac{k_{ix} + u}{k_{sz} \pm q}\,,\; z'_y = \frac{k_{ix} + v}{k_{sz} \pm q} \begin{cases} + & \text{si } z > z' \\ - & \text{si } z < z' \end{cases}$$

Los coeficientes $C_t$ y $B_t$ se obtienen al cambiar $q$ por $q_t = \sqrt{\epsilon k^2 - u^2 - v^2}$.

## B.2. Expresiones para el campo de Kirchhoff

Tanto en las ecuaciones (3.4) como en (4.38) y en (4.39) usamos la expresión completa para los campos de Kirchhoff. Usamos la siguiente notación: $a_i$ da los coeficientes que son proporcionales a la derivada $z_i$; cuando $i = 0$ son los coeficientes que no están multiplicados por derivada alguna. Los coeficientes $a_{ij}$ son los coeficientes que multiplican a $z_i\, z_j$. A continuación listamos los coeficientes para cada canal.

- Canal HH

$$\begin{cases} a_0 = [(1 + R_\perp)\cos\theta_s - (1 - R_\perp)\cos\theta]\cos\phi_s \\ a_x = [-(1 + R_\perp)\sin\theta_s - (1 - R_\perp)\sin\theta\cos\phi_s] \\ a_y = -(1 - R_\perp)\sin\theta\sin\phi_s \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = A_\perp(\cos\theta + \cos\theta_s)\cos\phi_s \\ b_x = A_\perp(\sin\theta_s - \sin\theta\cos\phi_s) \\ b_y = A_\perp\sin\theta\sin\phi_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{xx} = 0 \\ axy = \left(R_\perp + R_\parallel\right)\left[\cos\theta + \cos\theta_s(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\right]\sin\phi_s \\ a_{yy} = \left(R_\perp + R_\parallel\right)\left[\sin^2\theta - \cos\theta\,\cos\phi_s - \cos^2\theta\cos\theta_s\cos\phi_s\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{xx} = 0 \\ b_{xy} = \left(A_\perp + A_\parallel\right)\left[\cos\theta + \cos\theta_s\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\right]\sin\phi_s \\ b_{yy} = \left(A_\perp + A_\parallel\right)\left[\sin^2\theta - \cos\theta\cos\phi_s - \cos^2\theta\cos\theta_s\cos\phi_s\right] \end{cases}$$

- Canal VV

$$\begin{cases} a_0 = \left[-\left(1+R_{\|}\right)\cos\theta_s + \left(1-R_{\|}\right)\cos\theta\right]\cos\phi_s \\ a_x = \left[\left(1+R_{\|}\right)\sin\theta_s - \left(1-R_{\|}\right)\sin\theta\cos\phi_s\right] \\ a_y = -\left(1-R_{\|}\right)\sin\theta\sin\phi_s \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = -A_{\|}\left(\cos\theta+\cos\theta_s\right)\cos\phi_s \\ b_x = A_{\|}\left(\sin\theta_s+\sin\theta\cos\phi_s\right) \\ b_y = A_{\|}\sin\theta\sin\phi_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{xx} = 0 \\ a_{xy} = \left(R_{\perp}+R_{\|}\right)\left[-\cos\theta-\sin\theta\cos\theta_s\right]\sin\phi_s \\ a_{yy} = \left(R_{\perp}+R_{\|}\right)\left[\cos\phi_s\left(\cos\theta+\cos\theta_s\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\sin\theta_s+\cos\theta_s\cos\phi_s\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{xx} = 0 \\ b_{xy} = \left(A_{\perp}+A_{\|}\right)\left[-\cos\theta-\sin\theta\cos\theta_s\right]\sin\phi_s \\ b_{yy} = \left(A_{\perp}+A_{\|}\right)\left[\cos\phi_s\left(\cos\theta+\cos\theta_s\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\sin\theta_s+\cos\theta_s\cos\phi_s\right)\right] \end{cases}$$

- Canal VH

$$\begin{cases} a_0 = (1-R)\sin\phi_s + (1+R_{\perp})\cos\theta_s\sin\phi_s \\ a_x = (1+R)\sin\theta\sin\theta_s\cos\theta_s \\ a_y = (1+R)\left[\cos\theta\sin\theta_s+\sin\theta\cos\theta_s\cos\phi_s\right] \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = A\left(1+\cos\theta_s\right)\sin\phi_s \\ b_x = A\sin\theta\cos\theta_s\sin\phi_s \\ b_y = A\left(\cos\theta\sin\theta_s+\sin\theta\cos\theta_s\cos\phi_s\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{xx} = \frac{1}{2}\left(R_{\perp}+R_{\|}\right)\left(-\cos\phi_s\cos^2\theta\right) \\ a_{xy} = \frac{1}{2}\left(R_{\perp}+R_{\|}\right)\left[2\sin\phi_s\cos^2\theta-\cos\phi_s\cos\theta_s\cos\theta-\sin\theta\sin\theta_s\right. \\ \left.-2\cos\theta\sin\theta\left(\sin\theta\cos\theta_s\cos\phi_s-\cos\theta\sin\theta_s\right)+\cos\theta\cos\theta_s\cos\phi_s\right] \\ a_{yy} = \frac{1}{2}\left(R_{\perp}+R_{\|}\right)\left[-\cos\phi_s-\cos\theta\cos\theta_s\sin\phi_s\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{xx} = \frac{1}{2}\left(A_{\perp}+A_{\|}\right)\left[-\cos\phi_s\cos^2\theta\right] \\ b_{xy} = \frac{1}{2}\left(A_{\perp}+A_{\|}\right)\left[2\sin\phi_s\cos^2\theta-\cos\phi_s\cos\theta_s\cos\theta\right. \\ \left.-\sin\theta\sin\theta_s-2\cos\theta\sin\theta\left(\sin\theta\cos\theta_s\cos\phi_s-\cos\theta\sin\theta_s\right)+\cos\theta\cos\theta_s\cos\phi_s\right] \\ b_{yy} = \frac{1}{2}\left(A_{\perp}+A_{\|}\right)\left[-\cos\phi_s-\cos\theta\cos\theta_s\sin\phi_s\right] \end{cases}$$

# C

# Cálculo de valores medios

Para el cálculo de valores medios usamos el siguiente resultado fundamental (para distribuciones gaussianas):

$$\langle \exp\left[\imath \int d\zeta\; z(\zeta)\; f(x,\zeta)\right]\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\int d\zeta\, d\zeta'\; f(x,\zeta)\,\rho(\zeta,\zeta')\, f(x,\zeta')\right] \tag{C.1}$$

donde $\rho(\zeta,\zeta') = \langle z(\zeta)z(\zeta')\rangle$ es la función de autocorrelación de la variable aleatoria $z(\zeta)$.

Por ejemplo, si queremos calcular el valor medio de $e^{\imath k z(x)}$ la función que debemos elegir es $f(x,\zeta) = k\delta(x-\zeta)$:

$$\begin{aligned}
\langle \exp\left[\imath k_z(x)\right]\rangle &= \left\langle \exp\left[\imath \int d\zeta\, z(\zeta)\; k\delta(x-\zeta)\right]\right\rangle \\
\langle \exp\left[\imath k_z(x)\right]\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}\int d\zeta\, d\zeta'\; k\delta(x-\zeta)\;\rho(\zeta,\zeta')\; k\delta(x-\zeta')\right] \\
\langle \exp\left[\imath k_z(x)\right]\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}k^2\rho(0)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right]
\end{aligned} \tag{C.2}$$

donde usamos que $\rho(0) = \sigma^2$ es la desviación estandar de la variable $z(x)$.

Calculemos ahora el valor medio de la exponencial en dos puntos distintos: $e^{\imath k(z(x)-z(x'))}$. La función a elegir ahora es $f(x,x',\zeta) = k\left[\delta(x-\zeta)-\delta(x'-\zeta)\right]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \exp\left(\imath k\left[z(x)-z(x')\right)\right]\right\rangle = \left\langle \exp\left[\int d\zeta\, z(\zeta)\; k\left(\delta(x-\zeta)-\delta(x'-\zeta)\right)\right]\right\rangle \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\zeta\, d\zeta'\; k\left[\delta(x-\zeta)-\delta(x'-\zeta)\right]\rho(\zeta,\zeta')\; k\left[\delta(x-\zeta')-\delta(x'-\zeta')\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\left\langle \exp\left(\imath k\left[z(x)-z(x')\right)\right]\right\rangle = \exp\left[-k^2\sigma^2\left(1-\frac{\rho(x,x')}{\sigma^2}\right)\right] \tag{C.3}$$

Ahora podemos introducir una derivada: $e^{\imath[az(x)-bz'(x)]}$. La función que debemos usar es $f(x,\zeta) = a\,\delta(x-\zeta) + b\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-\zeta)$.

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(az(x) - bz'(x)\right)\right]\right\rangle =$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\int d\zeta\, d\zeta' \left(a\,\delta(x-\zeta) + b\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-\zeta)\right)\, \rho(\zeta,\zeta')\, \left(a\,\delta(x-\zeta') + b\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-\zeta')\right)\right]$$

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(az(x) - bz'(x)\right)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2\sigma^2 + 2ab\,\rho'_x(0) + b^2\rho''_{xx}(0)\right)\right] \tag{C.4}$$

si consideramos una función de correlación par, la primer derivada evaluada en el origen se anula; por lo tanto nos queda

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(az(x) - bz'(x)\right)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2\sigma^2 + b^2\rho''_{xx}(0)\right)\right] \tag{C.5}$$

si la derivada estuviera evaluada en un punto direrente, el término con la primer derivada de la función de correlación quedaría evaluado en la diferencia de puntos y no en cero:

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(az(x) - bz'(x')\right)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2\sigma^2 + 2ab\,\rho'_x(x,x') + b^2\rho''_{xx}(0)\right)\right] \tag{C.6}$$

Por último calculemos lo siguiente:

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(az(x) - az(x') + bz'(x) - bz'(x')\right)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\int d\zeta\, d\zeta'\; f(x,x';\zeta)\; \rho(\zeta,\zeta')\; f(x,x';\zeta')\right]$$

siendo $f(x,x';\zeta) = a\,\left[\delta(x-\zeta) - \delta(x'-\zeta)\right] + b\,\left[\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-\zeta) - \frac{\partial}{\partial x'}\delta(x'-\zeta)\right]$. Lo que nos queda es,

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(az(x) - az(x') + bz'(x) - bz'(x')\right)\right]\right\rangle =$$
$$= \exp\left[-a^2\left(\rho(0) - \rho(x-x')\right) + 2ab\,\rho'_x(x,x') - b^2\left(\rho''_{xx}(0) - \rho''_{xx'}(x,x')\right)\right] \tag{C.7}$$

En el término que es proporcional a $2ab$ usamos es hecho de que la derivada respecto a variables distintas tienen un factor $(-1)$ de diferencia: $\rho'_x(x,x') = -\rho'_{x'}(x,x')$.

En todos estos cálculos tomamos la derivada siempre respecto a la misma variable. Pero podríamos querer calcular el valor medio con derivadas de $z(\vec{x})$ tanto en $x$ como en $y$. En este caso calcularíamos lo que sigue:

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(a\,z(x)+b\,z'_x(x)+c\,z'_y(x)\right)\right]\right\rangle = \left\langle \exp\left[\imath\int d^2\zeta\; z(\zeta)\; g(\zeta,x)\right]\right\rangle$$

con $g(\zeta,x) = a\,\delta(x-\zeta_1)\;\delta(y-\zeta_2) + b\,\delta(y-\zeta_2)\;\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-\zeta_1) + c\,\delta(x-\zeta_1)\;\frac{\partial}{\partial y}\delta(y-\zeta_2)$. El resultado que obtenemos es el siguiente:

$$\left\langle \exp\left[\imath\left(a\,z(x)+b\,z'_x(x)+c\,z'_y(x)\right)\right]\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2\,\rho(0)+b^2\,\rho''_{xx}(0)+c^2\,\rho''_{yy}(0)\right)\right] \tag{C.8}$$

los subíndices en $\rho$ indican respecto a que variable debe derivarse. Para obtener este resultado hemos supuesto una función de correlación con simetría polar, en cuyo caso la derivada cruzada en el origen se anula.

## C.1. Términos del campo medio en el modelo de capas

Las ecuaciones (4.41) y (4.49) muestran los campos medios que se deben calcular para obtener el coeficiente $s^0$ en el modelo de capas. Vamos a usar la siguiente notación: $c_j = a_j + b_j\,e^{\imath\kappa D}\,e^{\imath\xi z_x}$; las derivadas segundas en el origen son $\alpha = \rho''_{xx}(0)$, $\beta = \rho''_{yy}(0)$ y $\gamma = \rho''_{xy}(0)$; $\Gamma = \sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho'_x$. Queda implícita la dependencia espacial de la función de correlación, de sus derivadas y del factor $\Gamma$.

A continuación listamos términos necesarios para calcular la varianza del campo medio.

$$\left\langle e^{ik_z\,z} c_i\; z_i\right\rangle = a_0\,e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k_z^2} + e^{\imath\kappa D}\,e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\left((k_z+\kappa)^2+\alpha\,\xi^2\right)}\;\left[b_0+\imath\xi(\alpha\,b_x+\beta\,b_y)\right] \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}\left\langle e^{ik_z z}\; c_{ij}\; z_i\; z_j\right\rangle &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\,k_z^2}\sigma^2\;\left[\alpha\,a_{xx}+\beta\,a_{yy}+\gamma\,a_{xy}\right]\\ &+e^{\imath\kappa D}\;e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(k_z+\kappa)^2}\;e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\,\xi^2\,\alpha}\;\sigma^2\;\left[\alpha\,b_{xx}(1-\alpha\xi^2\sigma^2)+b_{yy}\,(\beta-\gamma^2\xi^2\sigma^2)+\gamma\,b_{xy}(1-\alpha\xi^2\sigma^2)\right]\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e^{ik_z(z-z')} c_i\, c_j^*\, z_i\; z_j' \right\rangle = \\
&= e^{-\sigma^2 k_z^2 (1-\rho)} \left[ a_0^2 + \sigma^2 \left( a_x^2\, \rho''_{xx'} + a_y^2\, \rho''_{yy'} + 2\, a_x a_y\, \rho''_{xy'} \right) \right] \\
&+ e^{-\sigma^2\, (k_z+\kappa)^2 (1-\rho)}\; e^{-\sigma^2\, \xi^2 \left( \alpha - \rho''_{xx'} \right)} \\
&\Big\{ (b_0^2 + 2\, b_0\, b_x\, \sigma^2\, \xi\; \left( \rho''_{xx'} - \alpha \right) + 2\, b_0\, b_y\, \sigma^2\, \xi\; \left( \rho''_{xy'} - \gamma \right) \\
&b_x^2\, \sigma^2 \left[ (1 - 2\alpha\, \sigma^2\, \xi^2) \rho''_{xx'} - \alpha^2\, \sigma^2\, \xi^2 \right] + b_y^2 \left[ \rho''_{yy'} - 2\gamma\, \sigma^2\, \xi^2 \rho''_{xy'} - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2 \right] \\
&+ 2\, b_x\, b_y\, \sigma^2 \left[ (1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2)\, \rho''_{xy'} - \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, \rho''_{xx'} + \alpha\, \gamma\, \sigma^2\, \xi^2 \right] \Big\} \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\, \sigma^2 \left[ k_z^2 + (k_z+\kappa)^2 - 2\, k_z (k_z+\kappa) \rho \right]}\, e^{-\frac{1}{2} \alpha\, \sigma^2\, \xi^2} \left\{ a_0\, b_0 \left( e^{-\imath\kappa D} e^{-\Gamma} + e^{\imath\kappa D} e^{\Gamma} \right) \right. \\
&+ a_0\, b_x\, \sigma^2 \left[ e^{\imath\kappa D} e^{\Gamma} (-\alpha\, \xi + k_z\, \rho'_x) - e^{-\imath\kappa D} e^{-\Gamma} (\alpha\, \xi + k_z\, \rho'_x) \right] \\
&+ a_0\, b_y\, \sigma^2 \left[ e^{\imath\kappa D} e^{\Gamma} (-\gamma\, \xi + k_z\, \rho'_y) - e^{-\imath\kappa D} e^{-\Gamma} (\gamma\, \xi + k_z\, \rho'_y) \right] \\
&+ 2\, a_x\, b_x\, \sigma^2 \left[ (1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2) \rho''_{xx'}\, \cos(\kappa D) + 2\imath\, (k_z + \kappa)\, \alpha\, \sigma^2 \xi\, \rho'_x\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ 2\, a_y\, b_y\, \sigma^2 \left[ \rho''_{yy'} - \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, \rho''_{xy'}\, \cos(\kappa D) + 2\imath\, (k_z + \kappa)\, \gamma\, \sigma^2 \xi\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ 2\, a_x\, b_y\, \sigma^2 \left[ \rho''_{xy'} - \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, \rho''_{xx'}\, \cos(\kappa D) + 2\imath\, (k_z + \kappa)\, \gamma\, \sigma^2 \xi\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ 2\, a_y\, b_x\, \sigma^2 \left[ \rho''_{xy'} - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\, \rho''_{xy'}\, \cos(\kappa D) + 2\imath\, (k_z + \kappa)\, \alpha\, \sigma^2 \xi\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e^{\imath k_z (z-z')}\, c_i c^*_{jk}\, z_i\, z'_j\, z'_k \right\rangle = \\
&= e^{-k_z^2 \sigma^2 (1-\rho)} k_z\, \sigma^2 \left[ -\left(a_x\, a_{xx}\, \alpha + a_x\, a_{xy}\, \gamma + a_x\, a_{yy}\, \beta\right)\, \rho'_x - \left(a_y\, a_{xx}\, \alpha + a_y\, a_{xy}\, \gamma + a_y\, a_{yy}\, \beta\right)\, \rho'_y \right] \\
&+ e^{-(k_z+\kappa)^2\, \sigma^2 (1-\rho)}\, e^{-\sigma^2\, \xi^2 \left(\alpha - \rho''_{xx'}\right)} \sigma^2 \\
&\Big\{ b_0\, b_{xx} \left[ \alpha(\alpha\, \sigma^2\, \xi^2 - 1) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - 2\, \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\, \rho''_{xx'} + 2\, \alpha\, \sigma^2\, \xi\, (k_z + \kappa)\, \rho'_x \right] \\
&+ b_0\, b_{xy} \left[ \gamma(\alpha\, \sigma^2\, \xi^2 - 1) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - \sigma^2\, \xi^2\, \left(\gamma\, \rho''_{xx'} + \alpha\, \rho''_{xy'}\right) + \sigma^2\, \xi\, (k_z + \kappa) \left(\gamma\, \rho'_x + \alpha\, \rho'_y\right) \right] \\
&+ b_0\, b_{yy} \left[ \alpha(\alpha\, \sigma^2\, \xi^2 - 1) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - 2\, \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, \rho''_{xy'} + 2\, \gamma\, \sigma^2\, \xi\, (k_z + \kappa)\, \rho'_y \right] \\
&+ b_x\, b_{xx} \Big[ \alpha^2\, \sigma^2\, \xi^2 (1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - 3\, \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) \rho''_{xx'} \\
&- \alpha\, \sigma^2\, \left(1 + \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, (k_z + \kappa)\, \rho'_x \Big] \\
&+ b_x\, b_{xy} \Big[ \alpha\, \gamma\, \sigma^2\, \xi (1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - 2\, \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) \rho''_{xx'} \\
&- \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi 2\right) \rho''_{xy'} - \gamma\, \sigma^2\, (k_z + \kappa)\, \rho'_x - \alpha\, \sigma^2\, (k_z + \kappa)\, \rho'_y \Big] \\
&+ b_x\, b_{yy} \Big[ \alpha\, \sigma^2\, \xi^2 (\beta - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - \sigma^2\, \xi^2\, \left(\beta - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right) \rho''_{xx'} \\
&- 2\, \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi 2\right) \rho''_{xy'} - \sigma^2\, \left(\gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2 - \beta\right)\, (k_z + \kappa)\, \rho'_x - 2\, \alpha\, \gamma\, \sigma^4\, (k_z + \kappa)\, \rho'_y \Big] \\
&+ b_y\, b_{xx} \Big[ \alpha\, \gamma\, \sigma^2\, \xi (1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} + 2\, \alpha\, \gamma\, \sigma^4\, \xi^2\, \rho''_{xx'} - \alpha\, \sigma^2\, \xi\, \left(3 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) \rho''_{xy'} \\
&- 2\, \alpha\, \gamma\, \sigma^2\, \xi^2\, (k_z + \kappa)\, \rho'_x - \alpha\, \sigma^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) (k_z + \kappa)\, \rho'_y \Big] \\
&+ b_y\, b_{xy} \Big[ \gamma^2\, \sigma^2\, \xi (1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} + \gamma^2\, \sigma^4\, \xi^2\, \rho''_{xx'} - \alpha\, \sigma^2\, \xi\, \rho''_{yy'} \\
&- 2\, \gamma\, \sigma^2\, \xi\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) \rho''_{xy'} - \gamma^2\, \sigma^4\, \xi^2\, (k_z + \kappa)\, \rho'_x - \gamma\, \sigma^2\, (k_z + \kappa)\, \rho'_y \Big] \\
&+ b_y\, b_{yy} \Big[ \gamma\, \sigma^2\, \xi (\beta - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2) e^{\xi^2\, \sigma^2\, \rho''_{xx'}} - 2\, \gamma\, \sigma^2\, \xi\, \rho''_{yy'} - \sigma^2\, \xi\, \left(\beta - 3\, \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right) \rho''_{xy'} \\
&- \sigma^2\, \left(\beta + \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, (k_z + \kappa)\, \rho'_y \Big] \Big\} \\
&+ e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \left[k_z^2 + (k_z+\kappa) - 2 k_z\, \kappa\, \rho\right]}\, e^{-\frac{1}{2}\alpha\, \sigma^2\, \xi^2} 2\, \sigma^4 \\
&\Big\{ a_0\, b_{xx} \left[ 2\imath\, \alpha\, \sigma^2\, \xi\, k_z \left(3 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_x\, \sin(\kappa D) - \alpha\, \sigma^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) \cos(\kappa D) \right] \\
&+ a_0\, b_{xy} \left[ 2\imath\, \sigma^2\, \xi\, k_z \left(\beta + 2\, \gamma - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) - \sigma^2\, \left(\beta - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right) \cos(\kappa D) \right] \\
&+ a_0\, b_{yy} \left[ 2\imath \sigma^2\, \xi\, k_z \left(\gamma\, \rho'_x + \alpha\, \rho'_y\right)\, \sin(\kappa D) - \gamma\, \sigma^2\, \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right) \cos(\kappa D) \right] \\
&+ a_x\, b_{xx} \left[ \alpha\, \xi\, \left(\alpha\, \sigma^2\, \xi^2 - 3\right)\, \rho''_{xx'}\, \cos(\kappa D) + \imath \alpha\, (k_z + \kappa) \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_x\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ a_x\, b_{xy} \left[ \left(\gamma\, \xi (\alpha\, \sigma^2 \xi^2 - 2) \rho''_{xx'} - \alpha\, \xi\, \rho''_{xy'}\right)\, \cos(\kappa D) + \imath \gamma\, (k_z + \kappa) \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_x\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ a_x\, b_{yy} \left[ \left(\xi (\gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2 - \beta) \rho''_{xx'} - 2\gamma\, \xi\, \rho''_{xy'}\right)\, \cos(\kappa D) + \imath (k_z + \kappa) \left(\beta - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_x\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ a_y\, b_{xx} \left[ \alpha\, \xi\, \left(\alpha\, \sigma^2\, \xi^2 - 3\right) \rho''_{xy'}\, \cos(\kappa D) + \imath \alpha\, (k_z + \kappa) \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ a_y\, b_{xy} \left[ \left(\gamma\, \xi (\alpha\, \sigma^2\, \xi^2 - 2) \rho''_{xy'} - \alpha\, \xi\, \rho''_{yy'}\right)\, \cos(\kappa D) + \imath \gamma\, (k_z + \kappa) \left(1 - \alpha\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) \right] \\
&+ a_y\, b_{yy} \left[ \left(\xi (\gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2 - \beta) \rho''_{xy'} - 2\, \gamma\, \xi\, \rho''_{yy'}\right)\, \cos(\kappa D) + \imath (k_z + \kappa) \left(\beta - \gamma^2\, \sigma^2\, \xi^2\right)\, \rho'_y\, \sin(\kappa D) \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{C.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e^{k_z(z-z')}\, c_{ij}\, c^*_{kl}\, z_i\, z_j\, z'_k\, z'_l \right\rangle = \\
&e^{-k_z^2\,\sigma^2(1-\rho)}\,\sigma^4\,\left[\alpha^2\, a_{xx}^2 + \beta^2\, a_{yy}^2 + 2\,\alpha\,\beta\, a_{xx}\, a_{yy} + 2\,\alpha\,\gamma\, a_{xx}\, a_{xy} + 2\,\beta\,\gamma\, a_{xy}\, a_{yy}\right] \\
&+e^{-(k_z+\kappa)^2\,\sigma^2(1-\rho)}\, e^{-\sigma^2\,\xi^2\left(\alpha-\rho''_{xx'}\right)}\sigma^4 \\
&\Big\{ b_{xx}^2\left[\alpha^2\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)^2 - 4\,\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xx'}\right] \\
&+b_{yy}^2\left[\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)^2 + 4\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\rho''_{yy'} + 4\,\gamma\,\sigma^2\,\xi^2\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xy'}\right] \\
&+b_{xy}^2\left[\gamma^2\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)^2 - \gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\left(3-2\,\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xx'} + \alpha^2\,\sigma^2\,\xi^2\,\rho''_{yy'}\right. \\
&\left.+2\,\alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi^2(2-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\,\rho''_{xy'}\right] \\
&+2\,b_{xx}\,b_{xy}\left[\alpha\,\gamma\,\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)^2 + \alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi^2\left(5-2\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xx'} + \alpha^2\,\sigma^2\,\xi^2\left(3-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xy'}\right. \\
&\left.+\alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)(k_z+\kappa)\,\rho'_x - \alpha^2\,\sigma^2\,\xi\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)(k_z+\kappa)\,\rho'_y\right] \\
&+2\,b_{xx}\,b_{yy}\left[\alpha\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right) + 2\,\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xx'} + 2\,\alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi^2\left(3-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xy'}\right. \\
&\left.+2\,\alpha\,\sigma^2\,\xi\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)(k_z+\kappa)\,\rho'_x - 2\,\alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)(k_z+\kappa)\,\rho'_y\right] \\
&+2\,b_{xy}\,b_{yy}\left[\gamma\left(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\right)\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right) + \gamma\,\sigma^2\,\xi^2\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xx'} + 2\,\alpha\,\sigma^2\,\xi^2\rho''_{yy'}\right. \\
&\left.+\sigma^2\,\xi^2\left(4\,\gamma^2+\alpha\,\beta-3\,\alpha\,\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)\rho''_{xy'} + \gamma\,\sigma^2\,\xi\left(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)(k_z+\kappa)\rho'_x\right. \\
&\left.+\sigma^2\,\xi^2\left(2\,\gamma^2-\alpha\,\beta-\alpha\,\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2\right)(k_z+\kappa)\,\rho'_y\right]\Big\} \\
&+e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\left[k_z^2+(k_z+\kappa)^2-2\,k_z\,(k_z+\kappa)\,\rho\right]}\, e^{-\frac{1}{2}\alpha\,\sigma^2\,\xi^2}\,\sigma^4 \\
&\Big\{a_{xx}\,b_{xx}\,\left[\alpha^2(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + 2\,\alpha^2\,\sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho'_x\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{xx}\,b_{xy}\,\left[\alpha\,\gamma(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + \alpha\,\sigma^2\,\xi\,k_z(\gamma\,\rho'_x+\alpha\,\rho'_y)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{xx}\,b_{yy}\,\left[\alpha(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + 2\,\alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho'_y\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{xy}\,b_{xx}\,\left[\alpha\,\gamma(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + 2\,\alpha\,\gamma\,\sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho'_x\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{xy}\,b_{xy}\,\left[\gamma^2(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + \gamma\,\sigma^2\,\xi\,k_z(\gamma\,\rho'_x+\alpha\,\rho'_y)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{xy}\,b_{yy}\,\left[\gamma(\beta-\gamma^2\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + 2\,\gamma^2\,\sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho'_y\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{yy}\,b_{xx}\,\left[\alpha\,\beta(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + 2\,\alpha\,\beta\,\sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho'_x\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{yy}\,b_{xy}\,\left[\beta\,\gamma(1-\alpha\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + \beta\,\sigma^2\,\xi\,k_z(\gamma\,\rho'_x+\beta\,\rho'_y)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right] \\
&+a_{yy}\,b_{yy}\,\left[\beta^2(1-\gamma\,\sigma^2\,\xi^2)\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}+e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right) + 2\,\beta\,\gamma\,\sigma^2\,\xi\,k_z\,\rho' y\left(e^{\imath\kappa D}\,e^{\Gamma}-e^{-\imath\kappa D}\,e^{-\Gamma}\right)\right]\Big\}
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

# D

# Variables de Grassman

Las variables de Grassman se definen mediante las siguientes reglas:

- Dos variables anticonmutan: $\{\xi, \eta\} = 0$; esto implica que $\xi^2 = -\xi^2 \Rightarrow \xi^2 = 0$
- Primer regla de integración: $\int d\xi = 0$
- Segunda regla de integración: $\int d\xi_1 \, \xi_2 = \delta_{12}$

Estas reglas permiten exponenciar un determinante:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Det}(M) &= \int d^2\xi \, d^2\eta \; e^{\xi^T \, M \, \eta} \\
&= \int d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \; \exp\left[\xi_1 \, M_{11} \, \eta_1 + \xi_1 \, M_{12} \, \eta_2 + \xi_2 \, M_{21} \, \eta_1 + \xi_2 M_{22} \, \eta_2\right] \\
&= \int d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \; \left[1 + \xi_i \, M_{ij} \, \eta_j + \frac{1}{2} \left(\xi_i \, M_{ij} \, \eta_j\right)^2 + \mathcal{O}(2N+1) + \mathcal{O}(2N)\right]
\end{aligned}
$$

Usando las reglas de integración es inmediato ver que $\int d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \, 1 = 0$ y que $\int d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \, \xi_i \, M_{ij} \, \eta_j = 0$, porque siempre faltan dos variables sobre las cuales se aplica la primer regla de integración.

En el término de orden dos sólo quedan los factores que contengan a todas las variables (los demás se anulan debido a la primer regla de integración):

$$
\begin{aligned}
&\int d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2 \, \frac{1}{2} \left[\xi_1 \, M_{11} \, \eta_1 \, \xi_2 \, M_{22} \, \eta_2 + \xi_2 \, M_{22} \, \eta_2 \, \xi_1 \, M_{11} \, \eta_1 \right. \\
&\left. + \xi_1 \, M_{12} \, \eta_2 \, \xi_2 \, M_{21} \, \eta_1 + \xi_2 \, M_{21} \, \eta_1 \, \xi_1 \, M_{12} \, \eta_2\right] \\
&= M_{11} \, M_{22} - M_{12} \, M_{21} = \mathrm{Det}(M)
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

Donde se usó la regla de anticonmutación para obtener la última igualdad.

Los términos de orden $2N+1$ se anulan porque siempre queda un término de orden uno sobre alguna variable y la integral sobre ella se anula. Los términos de orden $2N$ se anulan porque $\xi^2 = 0$.

Por lo tanto, el único término que resulta no nulo es el de orden dos que contiene a todas las variables y que es igual al determinante que estabamos calculando. Entonces,

$$\mathrm{Det}(M) = \int d^2\xi \, d^2\eta \, e^{\xi^T \, M \, \eta} \tag{D.2}$$

En el Capítulo 6 usamos estas variables para exponenciar el *determinante* que proviene de realizar un cambio de *variables* (funciones) en la distribución de probabilidad del campo estocástico $\Phi$:

$$\mathcal{P}[\Phi] = \int \mathcal{D}\epsilon \, \mathcal{P}[\epsilon] \, \delta[\Phi_\epsilon - \Phi]$$

donde $\Phi_\epsilon$ es solución de $(\mathbf{\Delta} - \epsilon)\Phi + j = 0$ para alguna realización de $\epsilon$. Si se hace el cambio de variables

$$\Phi_\epsilon - \Phi = 0 \;\rightarrow\; (\mathbf{\Delta} - \epsilon)\Phi + j = 0$$

el Jacobiano que se obtiene es

$$\frac{\delta}{\delta\Phi}\left[(\mathbf{\Delta} - \epsilon)\Phi + j\right] = -\epsilon$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad para $\Phi$ resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[\Phi] &= \int \mathcal{D}\epsilon \, \mathcal{P}[\epsilon] \, |\epsilon| \, \delta[(\mathbf{\Delta} - \epsilon)\Phi + j] \\
\mathcal{P}[\Phi] &= \int \mathcal{D}\epsilon \, \mathcal{D}\psi \, \mathcal{P}[\epsilon] \, \epsilon \, \epsilon^\dagger \, \exp\left[\imath\psi \left((\mathbf{\Delta} - \epsilon)\Phi + j\right)\right] \\
\mathcal{P}[\Phi] &= \int \mathcal{D}\epsilon \, \mathcal{D}\psi \, \mathcal{D}\xi \, \mathcal{D}\eta \, \mathcal{D}\xi^\dagger \, \mathcal{D}\eta^\dagger \mathcal{P}[\epsilon] \, \exp\left[\imath\psi \left((\mathbf{\Delta} - \epsilon)\Phi + j\right)\right] \exp\left[\xi \, \epsilon \, \eta\right] \exp\left[\xi^\dagger \, \epsilon^\dagger \, \eta^\dagger\right]
\end{aligned}$$

Este es el resultado que hemos usado en (6.23) para escribir, a través de integrales de camino, la distribución de probabilidad del campo estocástico que se propaga por un medio material con inhomogeneidades dadas por la naturaleza aleatoria de la permitividad dieléctrica $\epsilon$.

# Bibliografía


[1] Matías Barber, *Parametrización y optimización de modelos de inversión para la obtención de humedad del suelo a partir de datos satelitales de Radares de Apertura Sintética (SAR).* PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, Grupo de Teledetección, IAFE, Diciembre 2014.

[2] Y. Oh, K. Sarabandi, and F. T. Ulaby, "An empirical model and an inversion technique for radar scattering from bare soil surfaces," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 30, no. 2, pp. 370–381, 1992.

[3] Y. Oh, "Quantitative retrieval of soil moisture content and surface roughness from multipolarized radar observations of bare soil surfaces.," *IEEE T. Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, no. 3, pp. 596–601, 2004.

[4] P. C. Dubois, J. Van Zyl, and T. Engman, "Measuring soil moisture with imaging radars," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 33, no. 4, pp. 915–926, 1995.

[5] T. M. Elfouhaily, C.-A. Guérin, *et al.*, "A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces," *Waves in Random Media*, vol. 14, no. 4, pp. R1–R40, 2004.

[6] S. O. Rice, "Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 4, no. 2-3, pp. 351–378, 1951.

[7] G. Valenzuela, "Depolarization of EM waves by slightly rough surfaces," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 15, no. 4, pp. 552–557, 1967.

[8] Thorsos, E and Jackson, D, "The validity of the perturbation approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, p. 261, 1989.

[9] L. Tsang and J. A. Kong, *Scattering of Electromagnetic Waves, Advanced Topics*, vol. 26. Wiley. com, 2004.

[10] A. K. Fung and K.-S. Chen, *Microwave scattering and emission models and their applications.* Artech house Norwood, MA, 1994.

[11] J. L. Álvarez-Pérez, "An extension of the IEM/IEMM surface scattering model," *Waves in Random Media*, vol. 11, no. 3, pp. 307–329, 2001.

[12] T.-D. Wu and K.-S. Chen, "A reappraisal of the validity of the IEM model for backscattering from rough surfaces," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 4, pp. 743–753, 2004.

[13] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, vol. 2. Academic press New York, 1978.

[14] L. Tsang, J. A. Kong, and R. T. Shin, *Theory of microwave remote sensing.* John Wiley & Sons, firts ed., 1985.

[15] F. Ulaby, R. Moore, and A. Fung, *Radar Remote Sensing and Surface Scattering and Emission Theory, Vol. 2.* Addison-Wesley, 1982.

[16] P. Beckmann and A. Spizzichino, *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, vol. 1. 1987.

[17] W. C. Meecham, "On the use of the Kirchhoff approximation for the solution of reflection problems," *J. Rational Mech. Anal*, vol. 56, pp. 323–34, 1955.

[18] R. J. Papa and J. F. Lennon, "Conditions for the validity of physical optics in rough surface scattering," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 36, no. 5, pp. 647–650, 1988.

[19] Kong, J.A., *Electromagnetic wave theory.* John Wiley and Sons, 1986.

[20] J. Stratton and L. Chu, "Diffraction theory of electromagnetic waves," *Physical Review*, vol. 56, no. 1, p. 99, 1939.

[21] Franceschetti, G and Riccio, D, *Scattering, Natural Surfaces, and Fractals.* Elsevier, 2006.

[22] A. K. Fung, K.-S. Chen, and K. S. Chen, *Microwave Scattering and Emission Models for Users.* Artech house Norwood, MA, first ed., 2009.

[23] M. Brogioni, *"Modeling microwave emission from snow covered soil".* PhD thesis, University of Pisa, 2008.

[24] T.-D. Wu, K.-S. Chen, J. Shi, H.-W. Lee, and A. K. Fung, "A Study of an AIEM Model for Bistatic Scattering From Randomly Rough Surfaces.," *IEEE T. Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, no. 9, pp. 2584–2598, 2008.

[25] K.-S. Chen, T.-D. Wu, L. Tsang, Q. Li, J. Shi, and A. K. Fung, "Emission of rough surfaces calculated by the integral equation method with comparison to three-dimensional moment method simulations.," *IEEE T. Geoscience and Remote Sensing*, vol. 41, no. 1, pp. 90–101, 2003.

[26] Tsang, Leung and Xu, Peng and Li, Qin and Chen, Dong, "Numerical simulations of rough surface scattering with UV multi-level partitioning method," in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2004. IEEE*, vol. 1, pp. 615–618, IEEE, 2004.

[27] Huang, Shaowu and Tsang, Leung and Njoku, Eni G and Chan, Kuan Shan, "Backscattering coefficients, coherent reflectivities, and emissivities of randomly rough soil surfaces at L-band for SMAP applications based on numerical solutions of Maxwell equations in three-dimensional simulations," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 6, pp. 2557–2568, 2010.

[28] M. Barber, P. Perna, C. Bruscantinni, F. Grings, H. Karszenbaum, M. Piscitelli, and J. Jacobo-Berlles, "A Bayesian methodology for soil parameters retrieval from SAR images," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International*, pp. 1215–1218, IEEE, 2011.

[29] D. Entekhabi, E. G. Njoku, P. E. O'Neill, K. H. Kellogg, W. T. Crow, W. N. Edelstein, J. K. Entin, S. D. Goodman, T. J. Jackson, J. Johnson, *et al.*, "The soil moisture active passive (SMAP) mission," *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 5, pp. 704–716, 2010.

[30] S. Huang, X. Duan, J. Ouellette, X. Xu, T. H. Liao, J. Johnson, M. Moghaddam, and L. Tsang, "Like polarization and cross polarization of radar remote sensing of soil moisture at L band: 3D numerical simulations of Maxwell equations, Analytical models, and Retrieval Performance in Soil Moisture Retrieval," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2011. IGARSS 2011. IEEE International*, IEEE, 2011.

[31] M. Barber, C. Pepe, P. Perna, F. Grings, J. J. Berlles, M. Thibeault, and H. Karszenbaum, "A Novel Method for 2-D Agricultural Soil Roughness Characterization Based on a Laser Scanning Technique," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2008. IGARSS 2008. IEEE International*, vol. 2, pp. II–731, IEEE, 2008.

[32] Y. Oh, "Precise estimation of surface roughness parameters from field-measured ground truth data," in *Geoscience and Remote Sensing, 1997. IGARSS'97. Remote Sensing-A Scientific Vision for Sustainable Development., 1997 IEEE International*, vol. 2, pp. 708–710, IEEE, 1997.

[33] R. Shin and J. Kong, "Scattering of electromagnetic waves from a randomly perturbed quasiperiodic surface," *Journal of applied physics*, vol. 56, no. 1, pp. 10–21, 1984.

[34] M. Zribi, O. Taconet, V. Ciarletti, and D. Vidal-Madjar, "Effect of row structures on radar microwave measurements over soil surface," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 23, no. 24, pp. 5211–5224, 2002.

[35] Y. Kim and J. J. van Zyl, "A time-series approach to estimate soil moisture using polarimetric radar data," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 8, pp. 2519–2527, 2009.

[36] Y. Oh, S.-G. Kwon, and J.-H. Hwang, "Soil moisture detection algorithm at X-band," in *Synthetic Aperture Radar (APSAR), 2011 3rd International Asia-Pacific Conference on*, pp. 1–4, IEEE, 2011.

[37] Imperatore, P and Iodice, A and Riccio, D, "Transmission through layered media with rough boundaries: first-order perturbative solution," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 5, pp. 1481–1494, 2009.

[38] Franceschetti, G and Imperatore, P and Iodice, A and Riccio, D and Ruello, G, "Scattering from layered structures with one rough interface: A unified formulation of perturbative solutions," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 6, pp. 1634–1643, 2008.

[39] Imperatore, P and Iodice, A and Riccio, D, "Electromagnetic wave scattering from layered structures with an arbitrary number of rough interfaces," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 4, pp. 1056–1072, 2009.

[40] E. A. Calzetta and B.-L. B. Hu, *Nonequilibrium quantum field theory.* Cambridge University Press, 2008.

[41] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, and E. Martinec, *An introduction to quantum field theory*, vol. 49. 1996.

[42] L. H. Ryder, *Quantum field theory.* Cambridge university press, 1996.

[43] J. Rammer, *Quantum field theory of non-equilibrium states.* Cambridge University Press, 2007.

[44] Hallikainen, M and Ulaby, F and Dobson, M and El-Rayes, M and Wu, L, "Microwave dielectric behavior of wet soil-part 1: empirical models and experimental observations," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, no. 1, pp. 25–34, 1985.

[45] Dobson, M and Ulaby, F and Hallikainen, M and El-Rayes, M, "Microwave dielectric behavior of wet soil-Part II: Dielectric mixing models," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, no. 1, pp. 35–46, 1985.

[46] Z. S. Haddad, P. D. Dubois, and J. J. van Zyl, "Bayesian Estimation of Soil Parameters from Radar Backscatter Data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 34, pp. 76–82, Jan. 1996.

[47] C. Notarnicola and F. Posa, "Bayesian algorithm for the estimation of the dielectric constant from active and passive remotely sensed data," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 1, pp. 179–183, Jul. 2004.

[48] D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms.* Cambridge University Press, 2003.

[49] A. Kamenev, *Field theory of non-equilibrium systems.* Cambridge University Press Cambridge, 2011.

[50] G. Parisi, *Statistical field theory.* Addison Wesley, 1988.

[51] A. Vasiliev, *Functional methods in quantum field theory and statistical physics.* Gordon & Breach, 1998.

[52] Tsang, L and Kong, J, "Multiple scattering of electromagnetic waves by random distributions of discrete scatterers with coherent potential and quantum mechanical formalism," *Journal of Applied Physics*, vol. 51, no. 7, pp. 3465–3485, 1980.

[53] L. Tsang and J. Kong, "Scattering of electromagnetic waves from random media with strong permittivity fluctuations," *Radio Science*, vol. 16, no. 3, pp. 303–320, 1981.

[54] L. Tsang and J. A. Kong, "Application of strong fluctuation random medium theory to scattering from vegetation-like half space," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, no. 1, pp. 62–69, 1981.

[55] Lax, Melvin, "Multiple scattering of waves," *Reviews of Modern Physics*, vol. 23, no. 4, p. 287, 1951.

[56] Lax, Melvin, "Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems," *Physical Review*, vol. 85, no. 4, p. 621, 1952.

[57] Dashen, Roger, "Path integrals for waves in random media," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 20, p. 894, 1979.

[58] Grosche, C. and Steiner, F., *Handbook of Feynman path integrals*, vol. 1. 1998.

[59] Das, A, *Field theory: a path integral approach.* World Scientific, 1993.

[60] Feynman, R and Hibbs, A, *Quantum mechanics and path integrals.* McGraw-Hill, New York, 1968.

[61] U. Frisch, "Wave propagation in random media," tech. rep., Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1970.

[62] P. C. Martin, E. Siggia, and H. Rose, "Statistical dynamics of classical systems," *Physical Review A*, vol. 8, no. 1, p. 423, 1973.

[63] D. Hochberg, C. Molina-Paris, J. Perez-Mercader, and M. Visser, "Effective action for stochastic partial differential equations," *Physical Review E*, vol. 60, no. 6, p. 6343, 1999.

[64] H. C. Andersen, "Functional and graphical methods for classical statistical dynamics. I. A formulation of the Martin–Siggia–Rose method," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 41, p. 1979, 2000.

[65] J. Zanella and E. Calzetta, "Renormalization group and nonequilibrium action in stochastic field theory," *Physical Review E*, vol. 66, no. 3, p. 036134, 2002.

[66] E. Novikov, "Functionals and the random-force method in turbulence theory," *Sov. Phys. JETP*, vol. 20, no. 5, pp. 1290–1294, 1965.

## Agradecimientos

En primer término, quiero agradecer al Departamento de Física de la FCEyN y al CONICET, por brindarme el lugar y la financiación que hicieron posible este trabajo.

Muchas fueron las personas que me ayudaron durante estos años. Quiero dar, en estas discretas lineas, mi reconocimiento:

A Marta Pedernera, quien hizo simple todo lo que podía resultar complicado. Y sobre todo, por su calidez y sonrisa.

Al Grupo de Teledetección del IAFE, en donde encontré la puerta abierta permanentemente. Tanto es así que un día fui con una propuesta de tesis y acá estamos. Gracias a Mercedes, Cintia, Vero, Marysol, Pablo, Mati, Fede, Martín, quienes siempre me hicieron un lugar y ayudaron en distintas etapas del trabajo. En especial, agradezco a Haydee Karszenbaum, por alentarme al desafío de tomar una decisión difícil; y a Fran, co-director de esta tesis y amigo, por su empuje, incansable apoyo, aliento constante y por sus ideas para hacer que una confusión de cuentas se vinculen con la realidad.

Las charlas, los mates, los partidos de fútbol. Tan necesarios como las amigas y los amigos con quienes compartí montón de tiempo en estos cinco años. Los mates y las charlas con Luz, Pao, Vero (burlando a la distancia), Caro, Martín y Guillem. El impostergable partido de los jueves con Mati, Sebi, Paco, Alan, Tevo y Pato. Gracias a todos por el tiempo compartido.

Pablo, Román y Ovi, mis amigos de siempre. Casi veinte años de amistad explican mejor que yo por qué están en esta hoja.

A mi hermanita Lumi y a la Nona.

A Fer. Porque no sólo soy su hermano, soy el tío de tres nenes hermosos: Faru, Ornella y Renata.

A mi compañera en la vida. Porque me hace feliz y una mejor persona cada día; porque me quiere, me escucha, me apoya sin condiciones; porque está siempre a mi lado. Y porque los proyectos mas importantes de mi vida están junto a ella. Gracias *Negrita*.

Hace ya cinco años había dejado para el final mi gratitud hacia quien me dirigió en la tesis de grado. Luego continuó haciéndolo durante este tiempo. Su paciencia, generosidad, buen trato y ganas de enseñar fueron virtudes que permanecieron intactas, e hicieron que este trayecto sea no sólo una excelente etapa de formación profesional sino, mas importante aún, un período de crecimiento personal que hubiese sido imposible sin su presencia. Gracias Esteban.

Y por la vida que me dio, a mi mamá.

★

*I would like to say thanks in behealf of the group and ourselves and I hope we passed the audition.*

*fin*