

Tesis Doctoral

Bariones en la expansión en la inversa del número de colores de la cromodinámica cuántica

González de Urreta, Emiliano José

2015-03-20

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

González de Urreta, Emiliano José. (2015-03-20). Bariones en la expansión en la inversa del número de colores de la cromodinámica cuántica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

González de Urreta, Emiliano José. "Bariones en la expansión en la inversa del número de colores de la cromodinámica cuántica". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2015-03-20.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Bariones en la expansión en la inversa del número de colores de la
Cromodinámica Cuántica

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos
Aires en el área Ciencias Físicas

por Lic. Emiliano José Gonzalez de Urreta

Director de Tesis: Dr. Norberto Nerio Scoccola
Consejero de Estudios: Dr. Pablo Daniel Mininni

Lugar de Trabajo: Tandara(CAC)/CNEA

Buenos Aires, Marzo de 2015

Fecha de defensa: 20/03/2015

Resumen

Se investigan las propiedades de los bariones excitados pertenecientes al primer multiplete de paridad negativa en el marco de la expansión en la inversa del número de colores de la Cromodinámica Cuántica. En particular, se busca realizar un análisis de las masas y los decaimientos de los correspondientes bariones no-extraños y sentar las bases para la inclusión en dicho análisis de los bariones con extrañeza. Para investigar las propiedades de los bariones en la expansión en la inversa del número de colores, primero se determinan las funciones de onda debidamente simetrizadas de los bariones relevantes cuando el número de colores es grande. Una vez establecidas dichas funciones de onda, se procede a calcular los elementos de matriz de los operadores que aparecen en distintos observables. De esta manera se obtienen sus dependencias con el número de colores. A partir de los elementos de matriz relevantes se hallan los coeficientes libres que acompañan a cada uno de los operadores que aparecen a un cierto orden de potencia en $1/N_c$. Para ello se ajustan los observables calculados a los datos empíricos disponibles. Se busca realizar un análisis global de estos observables ya que, en general, las posibles mezclas entre estados con los mismos números cuánticos vinculan a dichos observables entre sí. Determinamos que un estudio numérico simultáneo de las masas y los anchos de decaimiento fuerte y electromagnéticos de los bariones del sector no-extraño predice valores de los ángulos de mezcla que son compatibles con los obtenidos en los análisis independientes para los decaimientos electromagnéticos y fuertes. Además se observa que la degeneración presente en las soluciones para los estudios independientes de masas y decaimientos fuertes desaparece en el análisis simultáneo. Por último, se llega a una conclusión sobre el problema de la asignación de los estados teóricos con los estados físicos, que se puede dar de cuatro maneras diferentes. Se encuentra que hay una asignación favorecida. En cuanto a la inclusión en el análisis de los bariones con extrañeza, se consideran primeramente los decaimientos fuertes en forma independiente, ya que no existían estudios previos de este tipo. Para ello se debieron considerar operadores de decaimiento que tuvieran en cuenta los efectos de ruptura de simetría debido a la diferencia entre las masas de los quarks “up” y “down” con la del “strange”. Entre otras conclusiones se obtuvo que en algunos casos los efectos de ruptura de simetría son importantes y que los operadores de 1-cuerpo son los más relevantes, a pesar que los de 2-cuerpos son importantes para obtener un mejor ajuste. Por último realizamos un primer estudio consistente de las masas y los decaimientos fuertes del multiplete completo de bariones en el marco de un esquema perturbativo para el tratamiento de la ruptura de simetría en las masas previamente utilizado en la literatura. Los resultados obtenidos indican que si bien las características generales de los ajustes independientes se siguen conservando en el ajuste global realizado, las dificultades encontradas para describir

algunos decaimientos sugieren la necesidad de considerar mejores aproximaciones en futuros cálculos.

PALABRAS CLAVES: QCD, N_c grande, simetrías, bariones del multiplete $[70, 1^-]$, masas y anchos de decaimiento, mezcla de estados.

BARYONS IN THE INVERSE COLOR NUMBER EXPANSION OF QUANTUM CHROMODYNAMICS

Abstract

We investigate the properties of excited baryons belonging to the first negative parity multiplet within the inverse color number expansion formalism of Quantum Chromodynamics. In particular, we seek to make an analysis of the masses and decays of the corresponding non-strange baryons and to set the base for the inclusion in this analysis of strange baryons. To investigate the baryon properties using the inverse colour number expansion, first the properly symmetrized wave functions are determined, for the relevant baryons when the number of colours is large. Once such wavefunctions are established, the matrix elements of the operators appearing in different observables are calculated, obtaining in this way, their dependence on color number. Starting from the relevant matrix elements, we find the free coefficients of each operator at a given order of a power of $1/N_c$. For that purpose, the calculated observables are fitted to available empirical data. A global analysis of these observables is sought for, since, in general, the possible mixtures between states with equal quantum numbers relate these observables amongst themselves. It is found that a simultaneous numerical study of the masses and the strong and electromagnetic decay widths of baryons in the non-strange sector predicts mixing angles that are compatible with those obtained from the independent analysis of the electromagnetic and strong decay widths. Also, it is observed that the degeneracy present in the solutions for the independent studies of the masses and strong decays disappears in the simultaneous analysis. Finally a conclusion is reached for the problem of assigning the theoretical states to the physical states, which can be done in for different ways. It is found that there is one favoured assignment. Concerning the inclusion in the analysis of strange baryons, we first consider strong decays independently, since there were no previous studies of this kind. For this purpose we had to consider the decay operators that took into account the effects of symmetry breaking due to the differences between the up and down quark masses and that of the strange quark. Amongst other conclusions, we obtained that in some cases the effects of symmetry breaking are important and that the one body operators are the most relevant, even though the two body operators are important to obtain a better fit. Finally, we make a first consistent study of the masses and strong decays of the complete baryon multiplet within a perturbative scheme for the treatment of symmetry breaking in the masses previously used in the literature. The results obtained indicate that even though the general characteristics of the independent fits are still conserved in the global fit, difficulties are found to describe some decays, which suggests the need to consider better approximations in future calculations.

KEY WORDS: QCD, Large N_c , symmetries, $[70, 1^-]$ -plet baryons, masses and decay widths, state mixings.

Índice general

1..	<i>Introducción</i>	7
2..	<i>QCD y su extensión a N_c grande</i>	11
2.1.	Introducción	11
2.2.	Diagramas de Feynman para N_c grande	13
2.3.	Mesones en QCD con N_c grande	18
2.4.	Bariones en QCD con N_c grande	20
3..	<i>Bariones con sabores livianos: clasificación en modelos de quarks</i>	25
3.1.	Introducción	25
3.2.	Funciones de onda de bariones con tres quarks	26
3.2.1.	La parte de spin-sabor	26
3.2.2.	La parte orbital	27
3.3.	Generalización al caso de N_c grande	32
3.3.1.	Bariones en el estado fundamental	32
3.3.2.	Bariones excitados	35
4..	<i>Bariones con sabores livianos en el marco de la expansión en $1/N_c$</i>	38
4.1.	Introducción	38
4.2.	Condiciones de consistencia para N_c grande en el sector de bariones no-excitados	39
4.3.	Método de expansión de operadores para bariones no-excitados	42
4.3.1.	Un ejemplo: el operador de masa	46
4.4.	Método de expansión de operadores para bariones excitados	47
5..	<i>Análisis global de masas y decaimientos de bariones no-extraños pertenecientes al $[70, 1^-]$-plete</i>	52
5.1.	Introducción	52
5.2.	Estados y observables de interés	53
5.2.1.	Estados $[20', 1^-]$ para N_c arbitrario	54
5.2.2.	Bases de operadores asociados a los observables de interés	55
5.2.3.	Operadores de masa	55
5.2.4.	Decaimientos fuertes	59
5.2.5.	Amplitudes de helicidad electromagnética	62
5.3.	Análisis y discusión de los resultados	64

6..	<i>Análisis independiente de los decaimientos fuertes del multiplete $[\mathbf{70}, 1^-]$ completo</i>	74
6.1.	Introducción	74
6.2.	Expansión $1/N_c$ para bariones con simetría $SU(3)$ de sabor	74
6.3.	Base de operadores	79
6.4.	Análisis y discusión de los resultados	83
7..	<i>Análisis global de masas y decaimientos fuertes de todos los bariones del $[\mathbf{70}, 1^-]$-plete</i>	93
7.1.	Introducción	93
7.2.	Masas y estados de los bariones del $[\mathbf{70}, 1^-]$ -plete	93
7.2.1.	Operador de masa	94
7.2.2.	Tratamiento perturbativo del problema	95
7.3.	Análisis y discusión de resultados	96
8..	<i>Conclusiones</i>	105
 <i>Apéndice</i>		110
A..	<i>Teorema de Wigner-Eckart y convenciones adoptadas</i>	111
A.1.	Teorema de Wigner-Eckart para $SU(2)$	111
A.2.	Teorema de Wigner-Eckart para $SU(3)$	111
B..	<i>Elementos de matriz reducidos (EMRs) de los generadores de spin-sabor y momento angular orbital</i>	113
B.1.	EMR de operadores de $SU(4) \times O(3)$	113
B.2.	EMR de operadores de $SU(6) \times O(3)$	113
C..	<i>Factores Isoescalares de $SU(3)$</i>	115
D..	<i>Elementos de matriz de los operadores de los observables para el caso de simetría $SU(2)$</i>	119
E..	<i>Elementos de matriz de los operadores de los observables para el caso de simetría $SU(3)$</i>	125

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo al Modelo Estándar de partículas elementales y sus interacciones, los hadrones están formados por fermiones (quarks) que interactúan entre sí a través de los bosones mediadores de las interacciones fuertes (gluones). La teoría que describe las interacciones fuertes es una teoría de campos de “gauge” no-abeliana llamada Cromodinámica Cuántica (Quantum Chromo Dynamics, QCD sus siglas en inglés) [1]. El hecho de que el grupo de simetría interna (color) sea no-abeliano hace que QCD tenga características muy diferentes a las de la Electrodinámica Cuántica (QED). En particular, QCD tiene dos propiedades sumamente importantes: libertad asintótica y confinamiento. La libertad asintótica implica que en el rango de altas energías (y alto momento transferido) los quarks se comporten como casi-libres, es decir que la interacción entre dos quarks se anula en el límite de impulso infinito. Por lo tanto en dicho régimen las interacciones entre quarks pueden ser tratadas en forma perturbativa, considerando a la constante de acoplamiento quark-gluón como el correspondiente parámetro perturbativo. En este rango de altas energías, las amplitudes de probabilidad correspondientes a los distintos procesos de interés pueden ser calculadas con una gran precisión. Por el contrario, para bajas energías (~ 1 GeV) QCD es altamente no lineal y da lugar al confinamiento: los quarks no pueden ser separados indefinidamente, ya que la energía de interacción entre ellos aumenta con la distancia.

En el estudio de ciertas propiedades de los hadrones tales como sus masas, anchos de decaimiento, etc., el rango de interés es justamente el de bajas energías. De esta manera, si bien uno tiene la forma explícita del lagrangiano de QCD que determina toda la dinámica del sistema, resulta muy complicado obtener una descripción precisa de la mayor parte de dichos observables. Por esta razón, diversos métodos fueron desarrollados para tratar QCD en el rango de bajas energías. Entre ellos está la “QCD en red”[2]. Este método, que puede ser considerado como de “ab initio”, intenta resolver las ecuaciones resultantes de QCD en un espacio-tiempo discreto para luego tomar el límite al continuo. Si bien esto fue concebido poco después de la formulación de QCD, la necesidad de disponer de computadores de alto poder de cálculo, sumado a ciertas dificultades conceptuales al tomar el límite al continuo, ha hecho que el avance en la obtención de resultados confiables haya sido lento. Solo recientemente se ha comenzado a obtener una descripción relativamente precisa para los observables más sencillos [3]. Otra opción es la de los modelos efectivos: se busca proponer lagrangianos simplificados que contengan las características principales de QCD a bajas energías, como por ejemplo, sus simetrías, y que a la vez den lugar a ecuaciones sencillas de resolver (ver por ej. Ref. [4, 5]). El principal inconveniente aquí es que, en general, no hay una manera sistemática de corregir las imprecisiones inherentes a cada modelo. Una tercer alternativa

consiste en la posibilidad de encontrar aún en el régimen de bajas energías, algún parámetro no trivial que permita organizar en forma sistemática las diferentes contribuciones de QCD a un proceso físico dado, en distintos grados de importancia. En esta tercera opción se basa el método de la expansión en $1/N_c$ utilizado en la presente tesis. La idea original fue propuesta por 't Hooft [10] y consiste en considerar el número de colores N_c en QCD como un parámetro que puede tomar valores arbitrariamente grandes de manera de asociar a su inversa con un parámetro perturbativo, por supuesto al final de los cálculos se considera $N_c = 3$, que es el valor que se asigna a N_c en el Modelo Estándar y que está en acuerdo con los resultados experimentales. Tal como se menciona en los artículos de revisión Ref. [6, 7], este método ha demostrado ser una poderosa herramienta en el desarrollo de diversos aspectos del estudio teórico de QCD. Asimismo, ha dado lugar a una gran variedad de aplicaciones [8, 9].

En la Ref. [10] 't Hooft determinó de qué orden en $1/N_c$ debe ser la constante de acoplamiento quark-gluón para obtener una teoría consistente en el límite del gran número de colores introduciendo, además, las llamadas reglas de conteo de N_c grande que permiten determinar el orden en N_c de los diagramas de Feynman. Utilizando dichas reglas fue capaz de demostrar que para N_c grande solo cierto tipo de diagramas (llamados diagramas planares) sobreviven, lo cual da lugar a una simplificación de la teoría. Asumiendo que QCD en el caso de N_c grande es confinante, estos resultados permitieron determinar en forma cualitativa ciertas propiedades de los mesones y las “glue-balls” para N_c grande [10]. Por ejemplo, para $N_c \rightarrow \infty$ los mesones y los estados “glue-ball” (estados ligados formados solo por gluones) son estables y no interactuantes, siendo las amplitudes de decaimiento de orden $\mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$.

La aplicación de este marco teórico a la descripción de los bariones fue por primera vez llevada a cabo por Witten en 1979 [11]. Dicho autor demostró que para N_c grande emerge una descripción de campo medio para los bariones de manera que, si bien la masa de los mismos es de orden $\mathcal{O}(N_c)$, el tamaño y forma es de $\mathcal{O}(N_c^0)$. Asimismo demostró que la amplitud de dispersión mesón-barión también es de $\mathcal{O}(N_c^0)$. Este importante resultado llevó algunos años más tarde [12, 13, 14] a descubrir que en el sector bariónico existe, en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, una simetría exacta de spin-sabor contraída $SU(2N_f)_c$, donde N_f es el número de sabores livianos. Esta simetría surge como consecuencia de ciertas relaciones de consistencia que deben cumplir los operadores involucrados en el acoplamiento mesón-barión e implica la existencia de una torre infinita de estados degenerados de los bariones no-excitados. Es posible [14, 15] generalizar dichas relaciones de manera de tener en cuenta la ruptura de degeneración que aparece al considerar valores de N_c finitos. Este método de implementar la expansión en $1/N_c$ para bariones se conoce como “método de relaciones de consistencia”. Por otro lado, para $N_c \rightarrow \infty$, el álgebra de $SU(2N_f)_c$ usualmente utilizada en los modelos de quarks [4], coincide con la de $SU(2N_f)_c$. Esta observación permite introducir un método alternativo al anterior conocido como “método de operadores” [16, 17, 18, 19]. En este método se realiza una expansión sistemática en $1/N_c$ de los operadores de QCD asociados a observables de los bariones tales como la masa, la corriente axial, el momento magnético, etc. en términos de operadores formados por productos de los generadores de spin-sabor de $SU(2N_f)$. Un punto importante a destacar es que no todos los productos de generadores son linealmente independientes, ya que existen identidades [19] que vinculan los

correspondientes elementos de matriz tomados en la representación irreducible de interés. Esto hace que el número de productos de generadores a considerar para cada orden en $1/N_c$ sea relativamente pequeño. Los productos de operadores que aparecen en la expansión son acompañados por coeficientes desconocidos que representan elementos de matriz reducidos dados por la dinámica de QCD. Estos coeficientes se obtienen ajustando con datos experimentales de observables. Adicionalmente es posible, en algunos casos, encontrar relaciones entre observables que surgen de eliminar estos coeficientes desconocidos y que son válidas a un orden dado en $1/N_c$.

Entre las aplicaciones de la expansión en $1/N_c$ al estudio de las propiedades de los bariones podemos mencionar el análisis de las masas de los bariones no-excitados [16, 17, 18, 19, 20]. Dicho análisis permite comprender el hecho de que las masas experimentales satisfagan con muy buena precisión las conocidas relaciones de masas de Gell-Mann–Okubo [21] y de Coleman–Glashow [22]. Asimismo, este formalismo ha permitido obtener otras relaciones de masas que también resultan ser satisfechas experimentalmente. Además de las masas, otras propiedades de los bariones no-excitados tales como sus momentos magnéticos [23, 24, 25, 26] y cargas axiales [16, 19, 27] han sido estudiadas utilizando la expansión $1/N_c$. Como consecuencia de los resultados mencionados, surgió en forma natural la idea de aplicar estos métodos al estudio de las propiedades de los bariones excitados [28, 29]. Recordemos que, tradicionalmente, tales propiedades han sido estudiadas en el marco de los modelos de quarks en sus diferentes versiones cuya simetría asociada es $SU(2N_f) \times O(3)$ [4]. En estos modelos los bariones excitados están agrupados en bandas que puede ser asociadas aproximadamente a $N = 0, 1, 2, \dots$ unidades de energía de excitación, como en el caso de las energías de una partícula en un potencial tipo oscilador armónico. Cada banda contiene un cierto número de multipletes de $SU(2N_f) \times O(3)$. La banda $N = 1$ contiene un solo multiplete, el $[70, 1^-]$, la banda $N = 2$ tiene cinco multipletes, el $[56', 0^+]$, el $[56, 2^+]$, el $[70, 0^+]$, el $[70, 2^+]$ y el $[20, 1^+]$, etc. Para la extensión del análisis $1/N_c$ al estudio de estos estados excitados se ha utilizado, en general, el “método de operadores”. Un inconveniente que aparece al emplear este método es que la simetría $SU(2N_f) \times O(3)$ no es exacta en el límite $N_c \rightarrow \infty$. Esto hace que una representación irreducible (irrep) de $SU(2N_f) \times O(3)$ contenga más de una irrep de $SU(2N_f)_c$, simetría esta última que sigue siendo válida para bariones excitados aún en el límite $N_c \rightarrow \infty$ [30, 31, 32, 33]. Esto implica que, por ejemplo, en la expansión del operador de masa para los estados del multiplete $[70, 1^-]$ aparezcan operadores de $\mathcal{O}(N_c^0)$ que dan lugar a la ruptura de la degeneración de las masas incluso cuando $N_c \rightarrow \infty$ [29, 34, 35]. De esta manera, para $N_f = 2$ los bariones pertenecientes a dicho multiplete se agrupan en tres torres [36] para $N_c \rightarrow \infty$, mientras que para $N_f = 3$ el número de torres es cinco [37]. Afortunadamente, existe numerosa evidencia de que lo que domina la ruptura de simetría spin-sabor en las masas son los efectos hiperfinos tipo spin-spin que son de orden $1/N_c$ mientras que los efectos de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$, como por ejemplo el spin-órbita, son substancialmente menos importantes. Por lo tanto, un esquema basado en el uso del “método de operadores” a partir de la simetría aproximada de spin-sabor resulta ser muy conveniente, al menos desde el punto de vista fenomenológico. Por este motivo, dicho esquema ha sido utilizado para analizar no solo las masas de los bariones excitados [34, 35, 38,

39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46], sino también los anchos de decaimiento fuerte [28, 38, 47, 48, 49] y la amplitudes de helicidad electromagnética [50, 51, 52, 53] de los multipletes más bajos. Cabe señalar que un método alternativo, en el que los estados excitados se tratan como resonancias en la dispersión mesón-nucleón, también ha sido aplicado al estudio de bariones excitados [32, 33, 37, 54, 55, 56, 57]. Al estar directamente basado en la simetría contraída, este método no presenta algunas de las dificultades del “método de operadores”. Sin embargo, la comparación de los resultados obtenidos con la información fenomenológica, que para los bariones excitados muchas veces es extraída mediante aproximaciones basadas en modelos de quarks, resulta más dificultosa. En esta tesis de doctorado nos concentraremos en el estudio de las propiedades de los bariones pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$ basándonos en la aplicación del “método de operadores” para llevar a cabo la expansión $1/N_c$. En particular se realizará un análisis global de las masas y los decaimientos de los bariones no-extraños pertenecientes a dicho multiplete y se sentarán las bases para una extensión de dicho análisis que permita incluir en el mismo a los bariones con extrañeza.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentará una breve introducción a QCD y su extensión a un número de colores arbitrario. En el Capítulo 3 se mostrará cómo se clasifican los bariones con sabores livianos dentro de los modelos de quarks. En el Capítulo 4 se indicará de qué manera aparece la simetría de spin-sabor contraída en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, y cómo esto permite establecer la expansión en $1/N_c$ de los operadores asociados a los observables bariónicos. En el Capítulo 5 se presentará el análisis consistente de las masas, los decaimientos fuertes y las amplitudes de helicidad electromagnética realizado en este trabajo de tesis para los bariones no-extraños pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$ junto con la correspondiente discusión de los resultados. En el Capítulo 6 se presentará el análisis independiente de los decaimientos fuertes para el conjunto completo de los bariones pertenecientes al mismo multiplete junto con la discusión de los resultados obtenidos. En el Capítulo 7 se presentarán los resultados de un primer análisis global de las masas y los decaimientos fuertes para el mismo conjunto de bariones, junto con la discusión de los mismos. En el Capítulo 8 se presentarán las conclusiones obtenidas a partir del trabajo realizado. Por último, en los Apéndices se dan detalles de algunas convenciones usadas, fórmulas y resultados de algunos de los cálculos realizados.

2. QCD Y SU EXTENSIÓN A N_C GRANDE

2.1. Introducción

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría de campos de “gauge” no-abeliana basada en el grupo de simetría interna $SU(3)$ de color. Esta teoría describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones [1]. Los quarks se presentan en tres colores por lo que pertenecen a la representación fundamental del grupo $SU(3)$, mientras que los gluones pertenecen a la representación adjunta de dicho grupo, y por lo tanto son ocho. Los hadrones son combinaciones de quarks, antiquarks y gluones, que de acuerdo con la propiedad de confinamiento, las mismas transforman como singletes de color.

El lagrangiano de QCD con simetría de color $SU(3)$ viene dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{c,c',f} \bar{\mathbf{q}}_{cf}(x) (i\boldsymbol{\gamma}_\mu \mathbf{D}_{c,c'}^\mu - m_f) \mathbf{q}_{c'f}(x) - \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde los índices $c, c' = r, g, b$ corresponden a los $N_c = 3$ colores de los campos spinoriales $\mathbf{q}_{cf}(x)$ de los quarks y $f = u, d, s, \dots b$ a los seis sabores conocidos. Además, m_f son las masas corrientes de los quarks, $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ son las matrices de Dirac, $\mathbf{D}_\mu = \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \boldsymbol{\lambda}^a B_\mu^a / 2$ es la derivada covariante que incluye a los campos gluónicos B_μ^a (con índice de color $a = 1, \dots, 8$), g_s es la constante de acoplamiento fuerte y $\boldsymbol{\lambda}^a$ son las matrices de Gell-Mann, que representan a los generadores del grupo $SU(3)$. Dichos generadores satisfacen las propiedades

$$[\boldsymbol{\lambda}^a, \boldsymbol{\lambda}^b] = 2if^{abc} \boldsymbol{\lambda}^c, \quad \{\boldsymbol{\lambda}^a, \boldsymbol{\lambda}^b\} = \frac{4}{3}\delta^{ab} \mathbf{1} + 2d^{abc} \boldsymbol{\lambda}^c, \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\lambda}^a \boldsymbol{\lambda}^b) = 2\delta^{ab} \mathbf{1}, \quad (2.2)$$

siendo f^{abc} las constantes de estructura del grupo $SU(3)$. El campo $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ viene dado por $\mathbf{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a \boldsymbol{\lambda}^a / 2$, con el tensor de campo gluónico $G_{\mu\nu}^a$ definido por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g_s f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c. \quad (2.3)$$

Debido a su complejidad no ha sido posible hasta el momento resolver QCD en forma cerrada. Por lo tanto, para estudiar procesos en los cuales las interacciones fuertes juegan un rol relevante, es necesario recurrir a métodos aproximados. Una posibilidad es tratar de realizar (como en el caso de la Electrodinámica Cuántica (QED)), una expansión perturbativa en la constante de acoplamiento g_s . Como es sabido en una teoría renormalizable, dicha constante depende de la escala de energía del proceso de interés. La Fig. 2.1 representa la evolución de la constante de acoplamiento con la escala de energía para el caso de QCD. Este

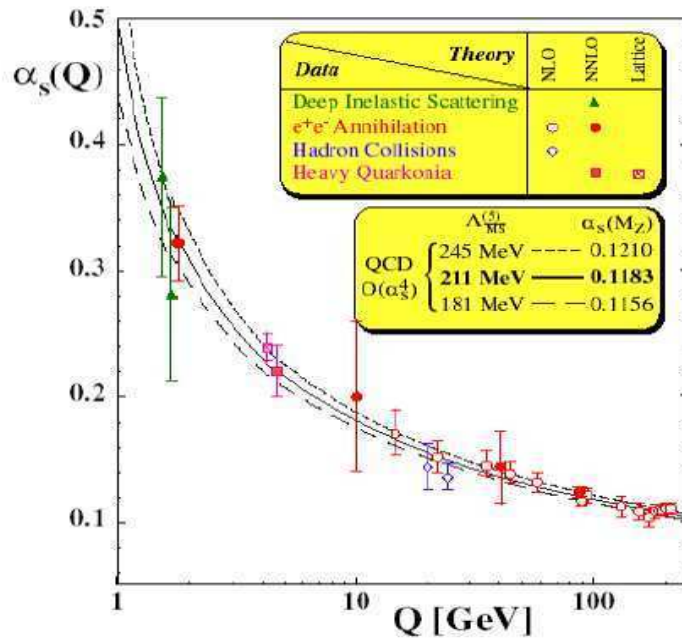


Fig. 2.1: Evolución de la constante de acoplamiento efectiva $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ con la escala de energía Q . Comparación de cálculos teóricos con datos experimentales.

gráfico nos sugiere que existen dos regímenes distintos. A energías (o momentos transferidos Q) grandes, la constante de acoplamiento es pequeña, tendiendo a cero en el límite de $Q \rightarrow \infty$. Este es el fenómeno de “libertad asintótica”. En este régimen, se puede utilizar la constante de acoplamiento como parámetro perturbativo, pudiéndose de esta manera calcular las amplitudes de probabilidad correspondientes a los procesos físicos de interés mediante métodos similares a los utilizados en QED.

A bajas energías (~ 1 GeV), típicas en espectroscopía de bariones, un método perturbativo como el descrito en el párrafo anterior no es apropiado ya que la constante de acoplamiento es de orden mayor o igual que 1. Por lo tanto ha sido necesario desarrollar métodos no perturbativos para poder estudiar los fenómenos correspondientes, o alternativamente, encontrar algún parámetro perturbativo no-trivial. En lo que sigue describiremos el método empleado en el presente trabajo que se basa en extender QCD a un número de colores arbitrariamente grande.

QCD para N_c grande es una teoría de “gauge” no-abeliana basada en el grupo de simetría $SU_c(N_c)$, donde N_c es el número de colores. La forma explícita del lagrangiano es similar a la de la Ec. (2.1), solo que ahora el índice de color de los campos de quarks puede tomar N_c valores distintos y, en consecuencia, existen $N_c^2 - 1$ campos de gluones. Debido a que hay $\mathcal{O}(N_c)$ más grados de libertad gluónicos que fermiónicos, los gluones dominan la dinámica de QCD en el caso de N_c grande. Volveremos sobre esto más adelante. Esta generalización

del grupo de color de QCD fue propuesta originalmente por 't Hooft en el año 1974 [10], cuando sugirió al mismo tiempo la utilización de $1/N_c$ como parámetro de expansión para la teoría.

Un argumento en favor de la viabilidad de la expansión en $1/N_c$ para la descripción de propiedades hadrónicas, a pesar de que el orden dominante de la misma está dado por el límite $N_c \rightarrow \infty$ (siendo que experimentalmente se sabe que $N_c = 3$), se apoya en el hecho de que los resultados que se obtienen están en buen acuerdo con la información experimental, la cual en general tiene una precisión del orden del 30 %. Además, se debe remarcar que en los cálculos se trabaja con un valor genérico de N_c , considerandco correcciones en el parámetro $1/N_c$, y al final de los mismos se toma $N_c = 3$.

El resto de este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sec. 2.2 se introduce el método para determinar el orden en $1/N_c$ de los distintos diagramas de Feynman de QCD, para luego establecer cuáles de ellos permanecen en el límite $N_c \rightarrow \infty$. En la Sec. 2.3 se utilizan los métodos de la Sec. 2.2 para determinar las características generales de los mesones para N_c grande, mientras que en la Sec. 2.4 se hace lo mismo para los bariones.

2.2. Diagramas de Feynman para N_c grande

En los diagramas de Feynman de QCD para N_c grande, aparecen una gran cantidad de nuevos estados intermedios, que no están presentes en el caso $N_c = 3$. Esto se debe a que si bien el color de los estados final e inicial está especificado, los estados intermedios pueden tener cualquier color. La suma sobre estos nuevos estados da lugar a un factor combinatorio grande. Como el número de estados intermedios difiere de un proceso a otro, también lo hacen estos factores combinatorios obteniéndose en consecuencia que algunos diagramas de Feynman resultan estar suprimidos frente a otros.

Para hallar el orden en $1/N_c$ de los diagramas de Feynman, es muy útil usar la notación de doble línea introducida por 't Hooft [10]. Esta notación resulta de reemplazar el campo de gluones $(B^\mu)^a$ en la representación adjunta del grupo $SU(N_c)$ por el campo tensorial $(B^\mu)^i_j$ con los índices i y j pertenecientes a la representación fundamental. Este procedimiento se ilustra en la Fig. 2.2. Cabe mencionar que al efectuar este reemplazo se está cometiendo un error de $\mathcal{O}(1/N_c^2)$ que es despreciable para $N_c \rightarrow \infty$. Como resultado, el campo gluónico pasa a tener un índice superior como el campo de quarks $q^i(x)$ y uno inferior como el campo de antiquarks $\bar{q}_j(x)$.

Usando la notación de doble línea, vamos a considerar primero un diagrama de polarización del vacío debida a un lazo gluónico (Fig. 2.3). Observando la parte derecha de la Fig. 2.3, es fácil calcular el factor combinatorio asociado al diagrama ya que, si bien los números cuánticos de color de los estados inicial i y final j están especificados, el del estado intermedio k no lo está. Por lo tanto, este diagrama tiene asociado un factor combinatorio de N_c , que hace que en el límite $N_c \rightarrow \infty$ la contribución correspondiente sea divergente. Es claro que este tipo de divergencias no pueden existir en una teoría consistente. La solución propuesta por 't Hooft para obtener contribuciones finitas para este tipo de procesos es renormalizar la teoría introduciendo una nueva constante de acoplamiento $g_s/\sqrt{N_c}$, con la

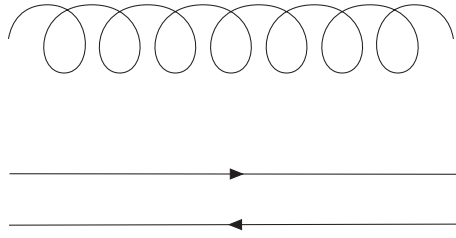


Fig. 2.2: Un propagador de gluón en la notación tradicional y en la notación de doble línea .

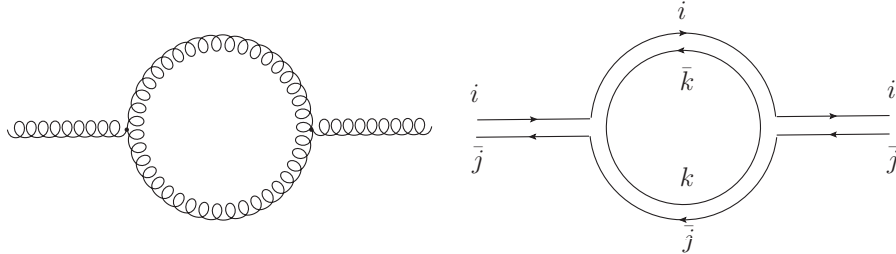


Fig. 2.3: Diagrama de polarización del vacío por lazo gluónico. La representación de doble línea se indica en la parte derecha de la figura.

condición de que g_s se mantenga fija cuando $N_c \rightarrow \infty$. Con esta renormalización, el orden del diagrama de Feynman de la Fig. 2.3 se torna

$$\left(\frac{g_s}{\sqrt{N_c}} \right)^2 N_c = g_s^2 \quad (2.4)$$

ya que en el mismo aparecen dos vértices (cada uno de los cuales introduce un factor $g_s/\sqrt{N_c}$), y un factor combinatorio N_c debido a la suma sobre estados intermedios. En consecuencia, en el límite $N_c \rightarrow \infty$, la amplitud correspondiente resulta ser finita tal como se requiere para obtener una teoría consistente.

Con esta renormalización, el vértice quark-gluón y el vértice de tres gluones son de orden $1/\sqrt{N_c}$. Sin embargo, el vértice de cuatro gluones es de orden $1/N_c$, ya que las reglas de Feynman de QCD dan para este vértice un orden g_s^2 . La Fig. 2.4 resume estos resultados.

Para determinar las características de QCD para N_c grande es conveniente obtener el orden en N_c de algunos diagramas típicos de la teoría. Comenzaremos con las correcciones al propagador gluónico que aparecen en la Fig. 2.5. El diagrama de la Fig. 2.5 (a) tiene dos lazos gluónicos. El orden de este diagrama es $(1/\sqrt{N_c})^4 \times N_c^2 = 1$. En efecto, en el lado derecho de la figura, podemos observar dos lazos internos, por lo que el factor combinatorio es N_c^2 , y además hay 4 vértices. La Fig. 2.5 (b) es otro ejemplo, con tres lazos internos y seis vértices de interacción, de un diagrama de orden 1. Observando el diagrama de cuatro lazos de la Fig. 2.5 (c), el orden es $(1/\sqrt{N_c})^8 \times N_c^4 = 1$. Repitiendo el cálculo para otros diagramas planos— es decir, que pueden dibujarse en el plano — se puede concluir que todos ellos son de $\mathcal{O}(N_c^0)$ y por lo tanto sobreviven en el límite de $N_c \rightarrow \infty$.

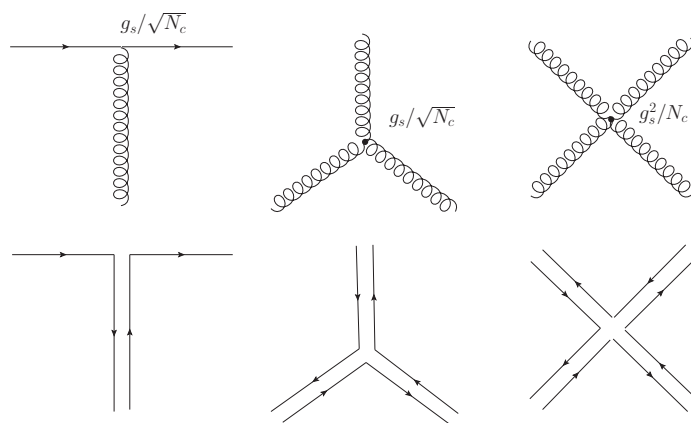


Fig. 2.4: Vértices de quark-gluón, tres gluones y cuatro gluones en notación clásica y de doble línea.

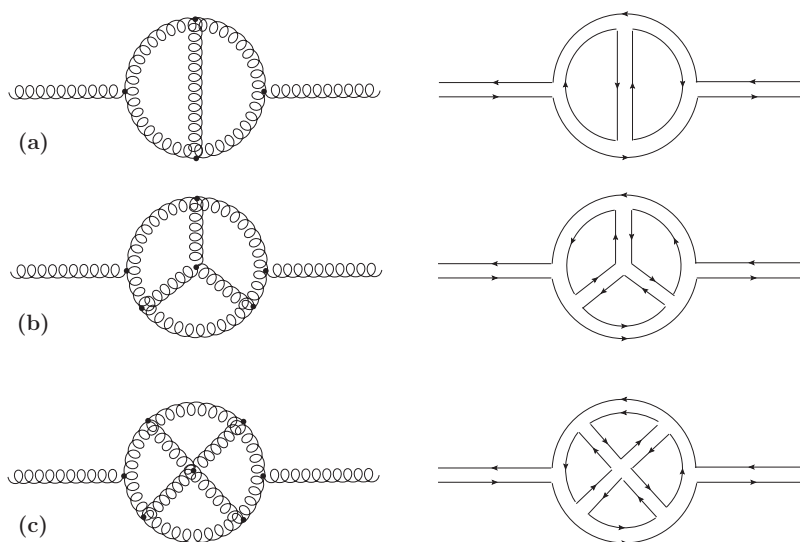
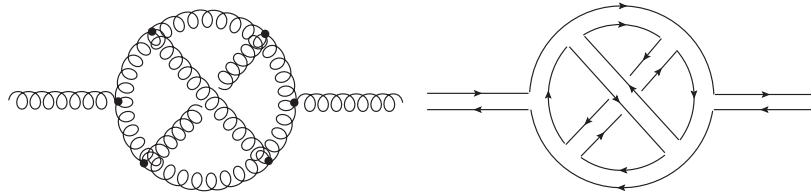


Fig. 2.5: Diagramas de dos, tres y cuatro lazos gluónicos de orden 1.

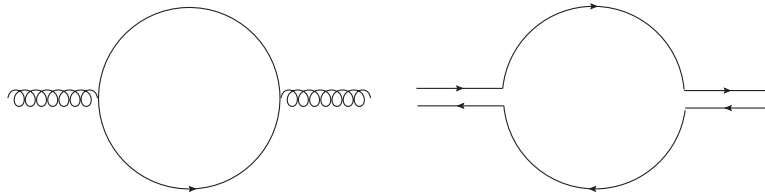
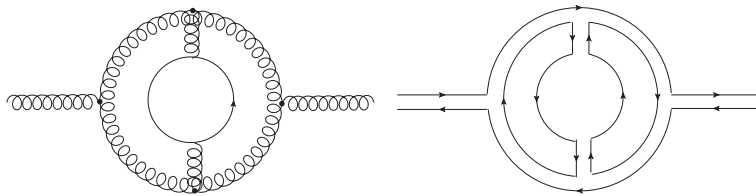
Consideremos la Fig. 2.6. Esta es un ejemplo de diagrama “no-plano”, es decir, de aquellos que no es posible dibujar en el plano sin que se corten entre sí las líneas que lo componen en puntos donde no hay vértices de interacción. Este diagrama está suprimido en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ ya que es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c = 1/N_c^2$.

Considerando otros procesos de este tipo, es posible mostrar que todos los diagramas de Feynman no-planos son como máximo de orden $1/N_c^2$ y, por lo tanto, están suprimidos en el límite $N_c \rightarrow \infty$. Por el contrario, según hemos visto, todos los diagramas planos con un número arbitrario de lazos gluónicos son de orden 1.

En la Fig. 2.7 se representa un diagrama que contiene un lazo fermiónico. En este caso no hay un factor combinatorio ya que los índices de color de los estados intermedios están

Fig. 2.6: Diagrama no-plano de orden $1/N_c^2$.

fijos por los correspondientes al estado inicial y final. Dado que hay dos vértices, el orden del diagrama resulta ser $1/N_c$. Por lo tanto resulta suprimido en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. Consideremos finalmente la Fig. 2.8, con un lazo fermiónico interno. Este diagrama también está suprimido en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, ya que es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c^2 = 1/N_c$.

Fig. 2.7: Burbuja de quark de orden $1/N_c$.Fig. 2.8: Un lazo de quark dentro de un lazo de gluón de orden $1/N_c$.

A partir de estos resultados, se pueden establecer las siguientes reglas de conteo para N_c grande:

- Las inserciones de diagramas planos compuestos solo por líneas gluónicas no cambian el orden del diagrama.
- Cada diagrama no-plano de gluón está suprimido por un factor $1/N_c^2$.
- Los lazos fermiónicos internos están suprimidos por un factor $1/N_c$.

En conclusión, los diagramas de Feynman dominantes son planos y podemos suponer que serán aquellos con solo el número mínimo posible de lazos de quarks.

Antes de terminar con esta sección, haremos algunas observaciones con respecto a la función de correlación de dos puntos $\langle J(x)J(y) \rangle$ de una corriente J . Esta función crea un par $\bar{q}q$ en el punto x y lo aniquila en el punto y . En la Fig. 2.9 están representados dos ejemplos de dichos diagramas. El diagrama de la izquierda es de orden N_c ya que no hay vínculos respecto del color del lazo fermiónico. En la parte derecha se ha agregado un lazo fermiónico interno. Este diagrama, con seis vértices y tres lazos internos, es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c^3 = 1$, y no es dominante en comparación con el diagrama de la parte izquierda de la figura. Se puede mostrar en forma similar que los diagramas con un lazo gluónico interno son de orden N_c . La Fig. 2.10 muestra que un diagrama “no-plano” de gluón tiene un factor de supresión de $1/N_c$. Se debe notar aquí que la no-planaridad queda establecida una vez que se impone la condición que, antes de pasar a la notación de doble línea, solo existan líneas de quarks en los bordes del diagrama.

La conclusión general es que los diagramas dominantes de la función de dos puntos para N_c grande son diagramas planos con un solo lazo de quark que “corre” por la parte externa del diagrama.

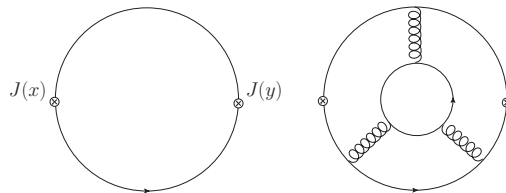


Fig. 2.9: A la izquierda, contribución a la función de dos puntos, en una teoría libre. A la derecha, contribución con un lazo interno de quark.

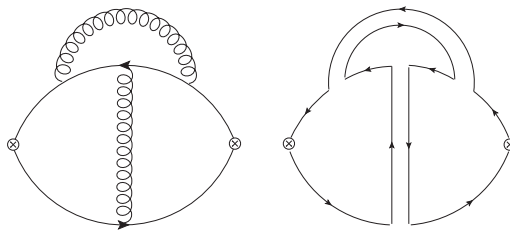


Fig. 2.10: Contribución no-dominante a la función de correlación.

Órdenes superiores de diagramas de Feynman pueden ser muy complicados de calcular. Por ejemplo, como ya se vio, si se reemplaza un lazo fermiónico interno en el diagrama de la parte derecha de la Fig. 2.9 por un lazo gluónico, se obtiene un diagrama de orden N_c como

el de la parte izquierda de esta figura. Este tipo de diagramas con un número arbitrariamente grande de líneas gluónicas internas no son posibles de evaluar en forma cerrada. Por lo tanto no se puede sumar sobre todos los diagramas planos y, en consecuencia, parecería que no se puede conocer demasiado acerca de las características de QCD en el caso del gran número de colores. Sin embargo, como veremos a continuación, si se supone que QCD sigue siendo una teoría confinante para N_c grande [10] es posible deducir una serie de propiedades interesantes de los mesones y bariones en este marco teórico.

2.3. Mesones en QCD con N_c grande

Los mesones en el marco de N_c grande son estados ligados “no-coloreados” formados por un quark y un antiquark. La función de onda de color de un mesón (que transforma como un singlete), viene dada por [10]

$$|1\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \underbrace{(\bar{l}l + \bar{m}m + \dots + \bar{n}n)}_{N_c \text{ términos}}, \quad (2.5)$$

donde l, m, \dots, n representan distintos colores. Es fácil ver que la suma sobre los N_c valores posibles de color hace que aparezca el factor de normalización $1/\sqrt{N_c}$.

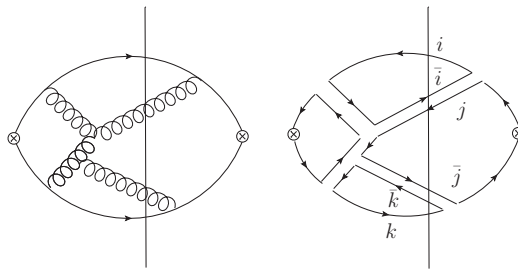


Fig. 2.11: Contribución dominante típica al elemento de matriz $\langle JJ \rangle$ [11].

En lo que sigue vamos a probar que el operador $J(x)$, que corresponde a un bilineal local de quarks (por ejemplo $\bar{q}q$ o $\bar{q}\gamma^\mu q$) con los números cuánticos para crear un mesón, crea *solo un* mesón en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. En la Fig. 2.11 se representa una contribución a la función de dos puntos de un bilineal de quarks. En la parte izquierda de la figura se puede ver que el estado intermedio contiene exactamente un par $\bar{q}q$. En una teoría confinante el par $\bar{q}q$ siempre está ligado formando un mesón, por lo tanto resulta que en el estado intermedio siempre hay un mesón. Sin embargo lo que queremos probar es que hay precisamente *un mesón* y no, por ejemplo, un mesón más “glue-balls”. Si se observa la parte izquierda del diagrama, se puede notar un estado intermedio con un quark, un antiquark y dos gluones. Para tener solamente un estado mesónico, este estado intermedio debe formar un hadrón

no-coloreado. Este es el caso como vamos a ver. En efecto, observando la estructura del estado se tiene

$$\bar{q}_k B_j^k B_i^j q^i, \quad (2.6)$$

que como vemos tiene todos sus índices contraídos, por lo que corresponde a un singlete de color. Si se analizan todos los diagramas planos, es posible probar que siempre se obtendrán esta clase de combinaciones, un par quark-antiquark al final y campos gluónicos en el centro. Con los diagramas no-planos como el de la Fig. 2.10, se tiene una estructura del tipo

$$\bar{q}_k B_l^k q^l B_m^j B_j^m, \quad (2.7)$$

que es un producto de dos operadores singlete de color, $\bar{q}_k B_l^k q^l$ y $B_m^j B_j^m$. Este estado intermedio se puede interpretar como compuesto por un mesón y gluones formando un singlete de color (estados “glue-ball”). Como los diagramas no-planos están suprimidos en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, solo estados intermedios como los de la Ec. (2.6) existen cuando $N_c \rightarrow \infty$.

Como el estado intermedio de la función de dos puntos de la corriente J es un mesón se puede escribir

$$\langle J(k)J(-k) \rangle = \sum_n \frac{\langle 0|J|n \rangle^2}{k^2 - m_n^2} \sim N_c, \quad (2.8)$$

donde la suma es sobre todos los estados físicos intermedios sin grados de libertad de color, lo que significa sumar sobre todos los diagramas planos que contribuyen a la función de dos puntos. El factor combinatorio de cada diagrama de Feynman es absorbido dentro del factor $\langle 0|J|n \rangle^2$, que es la probabilidad de crear un mesón a partir del vacío. Entonces, el factor $\sqrt{N_c}$ se coloca en los puntos de creación y aniquilación de cada mesón. En otras palabras, el elemento de matriz de la corriente $\langle 0|J|n \rangle$ es de orden $\sqrt{N_c}$. La constante de decaimiento del mesón f_m es entonces de orden,

$$f_m \sim \langle 0|J|n \rangle \sim \mathcal{O}(\sqrt{N_c}). \quad (2.9)$$

Este resultado no es sorprendente si observamos la Ec. (2.5). La suma sobre los N_c colores en esta ecuación, corresponde a N_c términos que aparecen por la indeterminación en el número cuántico de color en el lazo del quark de la Fig. 2.11, lo que arroja finalmente un factor $\sqrt{N_c}$.

Se pueden resumir todos estos resultados correspondientes a la función de dos puntos para N_c grande: $\langle J(x)J(y) \rangle$ es una suma de diagramas de Feynman planos en donde J crea un mesón con amplitud $\langle n|J|0 \rangle$, que se propaga con un propagador $1/(k^2 - m_n^2)$.

Consideremos ahora la Fig. 2.12 que representa una típica función de tres puntos. Cada cruz representa un punto de creación o aniquilación de un mesón. Para cada inserción de un mesón en un lazo de quark, se coloca un factor $\sqrt{N_c}$. Como este diagrama es de orden N_c , el vértice de tres mesones es de orden $1/\sqrt{N_c}$.

Estos resultados se pueden generalizar para el caso de una función de k puntos. Dado

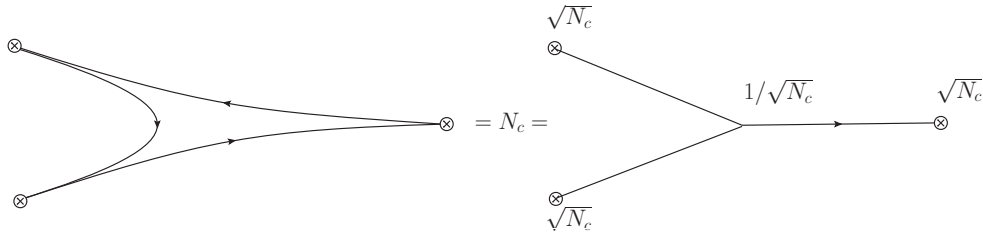


Fig. 2.12: Diagrama dominante de tres mesones. En la parte izquierda de la figura está dibujado en la notación de doble línea el diagrama de la parte derecha. Como este diagrama es de orden N_c , el vértice de tres mesones representado debe ser de orden $1/\sqrt{N_c}$.

que cada corriente crea un mesón y el diagrama plano de lazo de quark es de orden N_c ,

$$\underbrace{\widehat{N_c}}_{\text{lazo de quark}} = \underbrace{\left(\sqrt{N_c}\right)^k}_{k \text{ mesones}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^{k-2}}_{k \text{ vértices mesónicos}}. \quad (2.10)$$

Es decir que el vértice de k mesones es de orden $(1/\sqrt{N_c})^{k-2}$.

Resumiendo las propiedades de mesones para N_c grande.

- La constante de decaimiento del pión f_π es de orden $\sqrt{N_c}$.
- La masa de un mesón es de orden N_c^0 , como se deduce de la Ec. (2.5).
- La amplitud de decaimiento de un mesón en dos mesones es de orden $1/\sqrt{N_c}$.
- Cuando el número de mesones entrantes en un vértice crece, la potencia en $1/N_c$ del vértice crece (Ec. (2.10)). Por ejemplo, el auto acoplamiento de tres mesones es de orden $1/\sqrt{N_c}$; el auto acoplamiento de cuatro mesones es de orden $1/N_c$; etc.
- Como el número de diagramas de Feynman planos que describen la función de dos puntos es infinito, el número de estados de mesones intermedios es infinito.

En conclusión, los mesones para N_c grande son estables y no interactuantes.

2.4. Bariones en QCD con N_c grande

Los bariones con N_c grande fueron estudiados por primera vez por Witten [11]. Estos se describen como estados ligados “no-coloreados” compuestos de N_c quarks de valencia completamente antisimétricos en los índices de color. Es decir, su función de onda de color es de la forma

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{N_c}} q^{i_1} q^{i_2} \dots q^{i_{N_c}}. \quad (2.11)$$

donde $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{N_c}}$ es el tensor completamente antisimétrico de $SU(N_c)$. De esta manera el estado es un singlete de color tal como requiere la propiedad de confinamiento de QCD. Remarquemos que para que los bariones conserven su carácter fermiónico el número de colores N_c debe ser impar. Al orden dominante, los bariones ordinarios (es decir, que están compuestos por quarks de valencia y ningún antiquark) pueden ser representados por diagramas de quark-gluón constituidos por N_c líneas de quarks de valencia con un número arbitrario de gluones planos intercalados con líneas de quarks.

Consideremos los diagramas de la Fig. 2.13 que representan algunas correcciones al propagador libre del barión. Como resulta de la Sec. 2.2, la interacción entre dos quarks es de orden $1/N_c$. Por otro lado, esta interacción puede darse entre cualquier par de quarks, lo que da lugar a un factor combinatorio de orden N_c^2 . En consecuencia el diagrama de la izquierda es de $\mathcal{O}(N_c)$, el del centro de $\mathcal{O}(N_c^2)$ y el de la derecha de $\mathcal{O}(N_c^3)$. Da la impresión entonces que siendo estas contribuciones cada vez más divergentes no es posible obtener una descripción consistente para bariones en el caso de N_c grande.

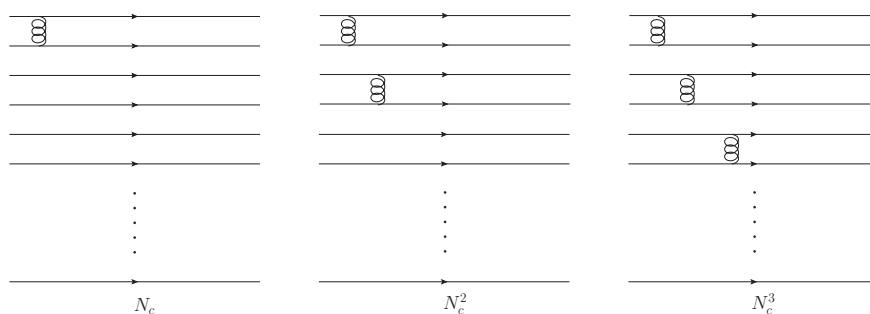


Fig. 2.13: Contribuciones al propagador de quark en un barión compuesto por N_c quarks. En la parte inferior de cada diagrama se muestra el orden en N_c de los mismos. Se puede ver como cada diagrama diverge aún más que el anterior.

Para entender lo que está ocurriendo vamos a comenzar por asumir que los quarks son pesados. En ese caso se puede usar la aproximación no relativista y escribir el Hamiltoniano del sistema de la siguiente manera

$$H = N_c m + N_c t + V, \quad (2.12)$$

donde m es la masa corriente de cada quark, y t su energía cinética, ambas de $\mathcal{O}(N_c^0)$. V es el potencial de interacción entre quark. Notemos que si solo se consideran los diagramas conectados, de los cuales se muestran algunos ejemplos en la Fig. 2.14, dicho potencial es $\mathcal{O}(N_c)$.

Por lo tanto el Hamiltoniano del sistema se puede expresar como

$$V = \mathcal{O}(N_c) = N_c v \quad \rightarrow \quad H = N_c(m + t + v) = N_c h. \quad (2.13)$$

De esta manera se espera tener que

$$M_B = N_c \varepsilon = \mathcal{O}(N_c). \quad (2.14)$$

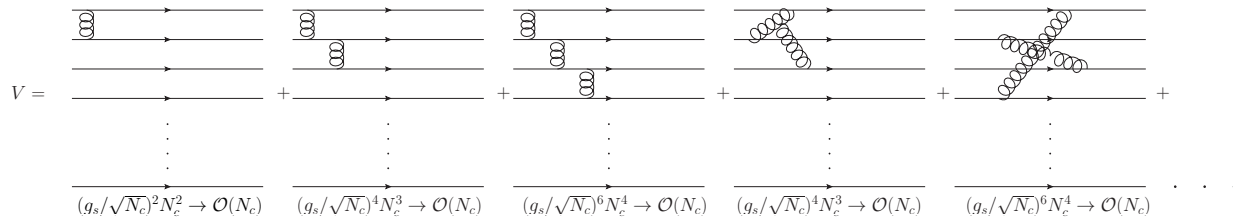


Fig. 2.14: Ejemplar de diagramas conectados que representan las interacciones entre los quarks que forman un barión. Los factores bajo cada diagrama muestran el orden de cada uno que es el producto de la cantidad de vértices y el factor combinatorio asociado a cada uno de ellos.

A partir de esta relación es posible comprender por qué es que los diagramas de la Fig. 2.13 divergen de la manera que lo hacen. La serie que representan dichos diagramas corresponde a la expansión del operador de evolución que tiene la forma

$$e^{-iM_B t} = 1 - iM_B t - \frac{1}{2}M_B^2 t^2 + \frac{i}{3!}M_B^3 t^3 + \dots \quad (2.15)$$

El “mal” comportamiento aparente de esta serie no implica que no existan los bariones en el caso de N_c grande, sino que los mismos tienen una masa de orden N_c .

El problema de los bariones para N_c grande se puede tratar convenientemente usando métodos de teoría de muchos cuerpos, en particular la aproximación de Hartree [11]. La idea detrás de esta aproximación es que, si bien para N_c grande la interacción entre cada par de quarks (por ejemplo por el intercambio de un gluón) es despreciable ya que es de $\mathcal{O}(1/N_c)$, el potencial total experimentado por cada fermión es una $\mathcal{O}(1)$ pues cada uno interactúa con otros $N_c - 1$. Para hallar la función de onda del estado fundamental de bariones, cada quark se coloca en el estado fundamental del potencial medio que experimenta (Fig. 2.15). Esto se puede hacer ya que la función de onda de color es completamente antisimétrica, por lo tanto el resto de la función de onda debe ser completamente simétrica. Es así que la función de onda del sistema formado por N_c quarks tiene la forma

$$\Psi_{a_1 \dots a_{N_c}} = \Lambda_{a_1 \dots a_{N_c}}^S \prod_{i=1}^{N_c} \phi(\mathbf{x}_i), \quad (2.16)$$

donde, $\Lambda_{a_1 \dots a_{N_c}}^S$ es la función de onda de spin-sabor para bariones y $\phi(\mathbf{x}_i)$ son soluciones de la ecuación independiente del tiempo

$$h\phi(\mathbf{x}_i) = (m + t + v)\phi(\mathbf{x}_i) = \varepsilon\phi(\mathbf{x}_i). \quad (2.17)$$

Por ejemplo, si se supone que las interacciones quark-quark están dadas por un potencial Coulombiano, el potencial total tiene la forma

$$V = -g_s^2 \sum_{i < j}^{N_c} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad y \quad v = -g_s^2 \int d^3 y \frac{\phi^*(\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (2.18)$$

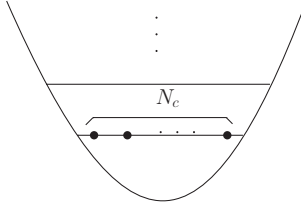


Fig. 2.15: Esquema de la aproximación de Hartree usada para describir la función de onda para bariones.

Es claro que, en general, no se conoce la forma explícita del potencial V , y por lo tanto, del funcional v . Sin embargo, la conclusión importante de este análisis es que la función de onda de los bariones es de orden N_c^0 .

De la aproximación de Hartree propuesta por Witten para la descripción de los bariones, se pueden deducir las siguientes propiedades de estos en el límite de $N_c \rightarrow \infty$:

- La masa de los bariones es de $\mathcal{O}(N_c)$.
- El tamaño y la función de onda de los bariones es de $\mathcal{O}(N_c^0)$.

Para concluir con esta sección determinaremos el comportamiento del acoplamiento mesón-barión para N_c grande, lo cual será de importancia en el Capítulo 4. Consideremos el diagrama de la Fig. 2.16. Los dos vértices quark-gluón proporcionan un factor $(1/\sqrt{N_c})^2$. Por otro lado, dado que el acoplamiento con el mesón puede ocurrir en cualquiera de las líneas de quarks, aparece un factor N_c . Finalmente, la normalización de la función de onda del mesón (ver Ec. (2.5)) aporta con un factor $1/\sqrt{N_c}$ y la suma sobre los colores c' en el mesón un factor N_c adicional. Es decir que se tiene

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^2 (N_c)^2 \frac{1}{\sqrt{N_c}} = \sqrt{N_c}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto resulta que el acoplamiento mesón-barión es de $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$.

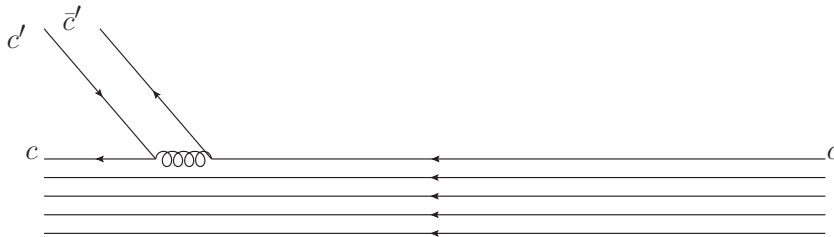


Fig. 2.16: Diagrama que contribuye al orden dominante del acoplamiento de un mesón (indicado por el par de quarks $\bar{c}'c'$), con un barión que contiene un quark de color c .

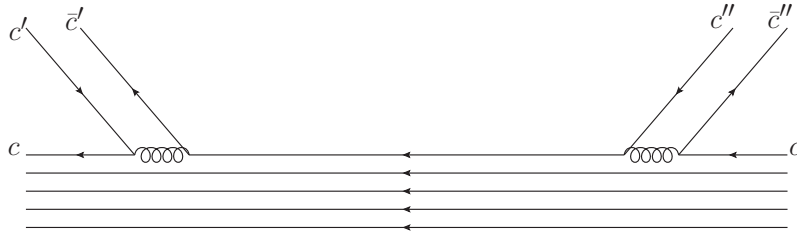


Fig. 2.17: Diagrama que contribuye al orden dominante de la dispersión mesón-barión. Los dos mesones están denotados por quarks de colores $c'\bar{c}'$ y $c''\bar{c}''$.

Consideremos ahora el diagrama de la Fig. 2.17. Este diagrama describe la dispersión barión-mesón. Aquí se tienen cuatro vértices quark-gluón dando un factor $(1/\sqrt{N_c})^4$. La suma sobre los colores c en el nucleón dan un factor más N_c . Otro factor $(1/\sqrt{N_c})^2$ aparece de la constante de normalización de la función de onda de los dos mesones. La suma sobre los colores c' y c'' en cada mesón da un factor $(N_c)^2$. El orden del diagrama resulta entonces ser

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^4 N_c \left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^2 (N_c)^2 = 1. \quad (2.20)$$

El diagrama de dispersión mesón-barión es entonces de $\mathcal{O}(N_c^0)$.

Se pueden generalizar las reglas de conteo para amplitudes de dispersión multimesón-barión. Cada mesón adicional en un proceso de dispersión reduce las amplitudes de dispersión en un factor de $1/\sqrt{N_c}$. El proceso barión + mesón \rightarrow barión + $(n-1)$ mesones es de orden $N_c^{1-n/2}$ [7]. Según veremos en el Capítulo 4, la dependencia en N_c de estos procesos es de vital importancia para establecer la existencia de la simetría dinámica que aparece en el sector bariónico cuando $N_c \rightarrow \infty$.

3. BARIONES CON SABORES LIVIANOS: CLASIFICACIÓN EN MODELOS DE QUARKS

3.1. Introducción

Como se vio en el capítulo anterior, los bariones en QCD para N_c grande son descriptos por un número N_c de quarks de valencia. En este sentido es de esperar que la descripción de los mismos guarde ciertas similitudes con la que resulta de los modelos de quarks no-relativistas. Por lo tanto para comprender la estructura de los bariones en el caso de N_c grande es conveniente recordar la clasificación de los mismos que surge de estos modelos. Consideramos primero el caso usual de los bariones compuestos por tres quarks para luego generalizar al caso de N_c arbitrario. En particular, veremos como escribir las correspondientes funciones de onda teniendo en cuenta los números cuánticos de spin, sabor, paridad, etc.

Los modelos de quarks no-relativistas más sencillos [58, 59] guardan ciertas similitudes con el modelo de capas utilizado en física nuclear en el sentido que se basan en la aproximación de Hartree, considerando a los quarks confinados por un potencial central promedio. Llamaremos a estos modelos como de “quarks no-relativistas en capas” (QNRC). Con este modelo, es posible escribir de forma simple la función de onda para bariones. Aunque esta forma de proceder está limitada a un modelo simplificado, algunas conclusiones resultan ser completamente generales. Más aún, este tipo de modelo de quarks en capas se puede generalizar fácilmente al caso de N_c quarks. Está claro que para obtener una imagen más realista de los bariones y sus propiedades es preciso tener en cuenta interacciones quark-quark que van más allá de la aproximación de Hartree [60]. Sin embargo la clasificación de los bariones que surge de los modelos QNRC sirve como buen punto de partida para estos cálculos más sofisticados.

En los modelos de quarks no-relativistas, la forma general de la función de onda para los bariones es

$$\Psi = \psi_{lm} \chi \phi C, \tag{3.1}$$

donde ψ_{lm} es la parte orbital, χ la parte de spin, ϕ la de sabor y C la de color. Como ya se mencionó en los capítulos anteriores, la función de onda de los bariones debe ser antisimétrica ante la permutación de los quarks, ya que estos últimos son fermiones. Para dar cuenta del confinamiento, la función de onda de la parte de color debe ser totalmente antisimétrica. En este caso la parte restante de la función de onda, es decir $\psi_{lm} \chi \phi$ es siempre totalmente simétrica.

El Hamiltoniano H del modelo QNRC tiene la forma

$$H = \sum_{i=1}^3 (T_i + V_i), \quad (3.2)$$

donde T_i representa la energía cinética del quark i , y V_i el potencial de confinamiento promedio que experimenta el quark i , que supondremos independiente del spin y sabor del mismo. En su versión más sencilla se suele suponer que el confinamiento está dado por un potencial tipo oscilador armónico tridimensional.

En lo que sigue, se considerarán solamente bariones formados por sabores livianos, es decir bariones compuestos de quarks de valencia u , d y s únicamente, suponiendo además, por simplicidad, que las masas de los mismos son iguales. En este caso el Hamiltoniano es independiente de: i) el sabor de las partículas, lo cual implica una simetría unitaria $SU(3)$, ii) del spin, lo que implica una simetría $SU(2)$ y iii) del impulso angular, que implica al grupo ortogonal $O(3)$. Como consecuencia de esto, las propiedades de simetría de los bariones corresponden a las del grupo $SU(6) \times O(3)$, donde $SU(6)$ representa al grupo de transformaciones de spin-sabor. Es decir, los estados de bariones deben transformar como las representaciones irreducibles (irreps) del grupo $SU(6) \times O(3)$.

Lo que resta de este capítulo se divide en dos partes. En la primera se discute la función de onda para bariones con $N_c = 3$. En la segunda parte, se expone una generalización al caso $N_c > 3$.

3.2. Funciones de onda de bariones con tres quarks

En esta sección se analizarán por separado la parte orbital de la función de onda y la parte de spin-sabor.

3.2.1. La parte de spin-sabor

Si se combinan los grados de libertad de spin y de sabor en una simetría de spin-sabor $SU(6)$, cada quark puede estar en uno de los siguientes seis estados: $u \uparrow$, $u \downarrow$, $d \uparrow$, $d \downarrow$, $s \uparrow$, $s \downarrow$. Por lo tanto cada quark transforma según $\mathbf{6}$, es decir la irrep fundamental de $SU(6)$. Como los bariones están compuestos de tres quarks, los estados posibles deben corresponder al producto directo $\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6}$. Este producto admite la descomposición [4, 61]

$$\begin{array}{c} \mathbf{6} \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \mathbf{6} \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \mathbf{6} \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{56_S} \\ \square \square \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \mathbf{70_{MS}} \\ \square \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \mathbf{70_{MA}} \\ \square \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \mathbf{20_A} \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}, \quad (3.3)$$

donde la dimensión de las representaciones irreducibles (irreps) está mostrada explícitamente encima de cada diagrama de Young, y los subíndices **S**, **MS**, **MA** y **A** significan simétrico, mixto-simétrico, mixto-antisimétrico y antisimétrico (respectivamente) ante la permutación

de quarks. Por lo tanto los bariones deben pertenecer a alguno de estos multipletes de $SU(6)$. El contenido en irreps de $SU(2) \times SU(3)$ de cada uno de estos está dado por

$$\mathbf{56} = \mathbf{28} \oplus \mathbf{410}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{70} = \mathbf{21} \oplus \mathbf{210} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{48}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{20} = \mathbf{28} \oplus \mathbf{41}. \quad (3.6)$$

Aquí se ha usado la notación $^{2S+1}d_R$, donde S es el spin y d_R la degeneración de la irrep R de $SU(3)$.

Los diagramas de peso de $SU(3)$ correspondientes al decuplete y al octete se muestran en las Figs. 3.1 y 3.2. Las funciones de onda de sabor de $SU(3)$ aparecen en la literatura [4].

$$\begin{array}{cccc} \Delta^- & \Delta^0 & \Delta^+ & \Delta^{++} \\ & \Sigma^{*-} & \Sigma^{*0} & \Sigma^{*+} \\ & & \Xi^{*-} & \Xi^{*0} \\ & & & \Omega^- \end{array}$$

Fig. 3.1: Diagrama de peso para bariones del decuplete de $SU(3)$.

$$\begin{array}{ccc} n & & p \\ \Sigma^- & \Lambda^0, \Sigma^0 & \Sigma^+ \\ & \Xi^- & \Xi^0 \end{array}$$

Fig. 3.2: Diagrama de peso para bariones del octete de $SU(3)$.

3.2.2. La parte orbital

El Hamiltoniano H introducido en la Ec. (3.2) para un sistema de tres partículas con masas idénticas en un potencial central tipo oscilador armónico toma la forma

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_i^2 \right), \quad (3.7)$$

donde se entiende que los grados de libertad de color han sido desacoplados. La parte orbital de la función de onda de un barión se obtiene como el producto de tres funciones de onda de quark independiente. Esta función debe tener la simetría correcta ante la permutación de los índices de quarks para que la función de onda total, incluida la parte de spin-sabor, resulte completamente simétrica. Esto implica que la parte orbital tiene que tener la misma simetría que la parte de spin-sabor.

Para separar el movimiento del centro de masa del sistema en la función de onda, es necesario introducir las llamadas coordenadas de Jacobi. Para quarks con masas iguales estas toman la forma

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3), \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3), \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3.10)$$

Es importante notar que estas coordenadas se pueden usar como base de funciones de las irreps simétrica [3] (Ec. (3.8)) y mixta-simétrica [2,1] (Ecs. (3.9) y (3.10)) del grupo de permutaciones S_3 . En términos de estas coordenadas el Hamiltoniano se puede reescribir como [58]

$$H = \frac{P^2}{6m} + \frac{3}{2}m\omega^2 R^2 + \left[\frac{1}{2m}(p_\lambda^2 + p_\rho^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\lambda^2 + \rho^2) \right], \quad (3.11)$$

donde \mathbf{P} , \mathbf{p}_λ y \mathbf{p}_ρ son los momentos conjugados de las coordenadas \mathbf{R} , $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\rho}$ respectivamente. Una autofunción de este Hamiltoniano se puede escribir de la forma

$$\psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})\psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda})\psi_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.12)$$

donde $\psi_{\mathbf{R}}$, $\psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ y $\psi_{\boldsymbol{\rho}}$ son funciones de onda soluciones de la ecuación de una partícula en un potencial de oscilador armónico. La primera parte describe el movimiento del centro de masa y $\psi_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\psi_{\boldsymbol{\rho}}$ el movimiento relativo de los quarks. Para conservar la invariancia traslacional del modelo, en la función de onda (3.12) el movimiento del centro de masa $\psi_{\mathbf{R}}$ es considerado solamente en el estado fundamental. Los estados con excitaciones del movimiento del centro de masa son considerados como espurios. Estos estados espurios aparecen justamente de considerar a los quarks confinados en un potencial efectivo para describir las interacciones reales entre ellos.

Recordemos que los autovalores del operador Hamiltoniano correspondientes a una partícula en un potencial armónico tienen la siguiente forma

$$E = \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.13)$$

donde N es el número de “cuantos” excitados que puede ser escrito como

$$N = 2n + l. \quad (3.14)$$

Aquí l es el momento angular orbital y $n = 0, 1, 2, \dots$ está asociado con el número de nodos de la función de onda radial. La función de onda se puede encontrar, por ej., en Ref. [58].

Para cada valor de $N > 1$, más de un valor de l y n son posibles. Además, para cada valor de l , se tiene que $-l \leq m \leq l$. La paridad de la función de onda esta dada por la paridad de los armónicos esféricos y es

$$P = (-1)^l. \quad (3.15)$$

En una notación compacta algunos de los estados de energía más baja corresponden a $(0s)$, $(0p)$, $(0d)$, $(1s)$, donde el primer número indica el número cuántico radial y la letra el orbital (en forma análoga al caso de un electrón en los niveles de energía de un átomo).

La paridad de la función de onda es

$$P = (-1)^{\sum_{i=1}^3 l_i}, \quad (3.16)$$

donde l_i es el momento angular de cada quark.

La masa asociada a este estado es la suma de las energías individuales E_i de los quarks que componen el barión, menos la energía del centro de masa $3/4\hbar\omega$. Para etiquetar los distintos niveles, suele usarse la notación $[\mathbf{D}, l^P]$ donde \mathbf{D} la dimensión de una irrep de $SU(6)$, con l el momento angular de los bariones del multiplete y P su paridad. Notar que en un modelo tipo oscilador armónico, los niveles pertenecientes a una misma capa (o banda) N están degenerados en energía. Esta degeneración desaparece en un modelo con un confinamiento lineal.

El nivel de energía más baja, con $N = 0$ corresponde al estado fundamental. Todos los quarks están en el estado $(0s)$ y entonces la configuración del estado es $(0s)^3$. La parte orbital de la función de onda del barión es completamente simétrica y por lo tanto la parte de spin-sabor también debe serlo, en consecuencia estos bariones pertenecen al $[\mathbf{56}, 0^+]$. Para este multiplete se puede concluir que los bariones del decuplete tienen spin $S = 3/2$ (Fig. 3.1) y los bariones del octete (Fig. 3.2) tienen spin $S = 1/2$. En el contexto de la presente tesis a estos estados los llamaremos bariones “fundamentales” o “no-excitados”.

El primer estado excitado, $N = 1$, debe tener una configuración $(0s)^2(0p)$, con $l^P = 1^-$. Con esta configuración, es posible formar funciones de onda simétricas o mixta-simétricas. De todas formas, la función de onda simétrica es un estado espurio y es proporcional a la coordenada del centro de masa \mathbf{R}^1 . Entonces el primer estado excitado de paridad negativa pertenece al multiplete $[\mathbf{70}, 1^-]$.

El nivel $N = 2$ es más complicado ya que están permitidos tres estados de quarks, es decir, $(0s)^2(1s)$, $(0s)^2(1d)$ y $(0s)(0p)^2$, ya que todos tienen la misma energía. Algunas de estas funciones de onda son espurias. Se pueden tomar combinaciones lineales de estas funciones de onda de tal forma de obtener estados no-espurios. La Tabla 3.1 muestra las combinaciones lineales apropiadas, siendo el resto estados espurios.

¹ Corresponde al movimiento interno de los quarks ocupando el estado fundamental pero al centro de masa moviéndose en un estado $(0p)$ [58].

Multiplete $SU(6)$	N	l	P	Configuración del oscilador armónico
56	0	0	+	$ \mathbf{[3]}(0s)^3\rangle$
70	1	1	-	$ \mathbf{[2, 1]}(0s)^2(0p)\rangle$
56'	2	0	+	$\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{[3]}(0s)^2(1s)\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \mathbf{[3]}(0s)(0p)^2\rangle$
70	2	0	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} \mathbf{[2, 1]}(0s)^2(1s)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{[2, 1]}(0s)(0p)^2\rangle$
56	2	2	+	$\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{[3]}(0s)^2(0d)\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \mathbf{[3]}(0s)(0p)^2\rangle$
70	2	2	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} \mathbf{[2, 1]}(0s)^2(0d)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{[2, 1]}(0s)(0p)^2\rangle$
20	2	1	+	$ \mathbf{[1^3]}(0s)(0p)^2\rangle$

Tab. 3.1: Configuraciones del modelo de capas para quarks con un confinamiento tipo oscilador armónico y $N_c = 3$.

En la Fig. 3.3 se indica en forma esquemática el tipo de espectro de energía que se obtiene de estos modelos, mientras que en la Tabla 3.2 se indica cuáles estados de bariones observados experimentalmente se pueden asociar con los predichos por los mismos. Cabe

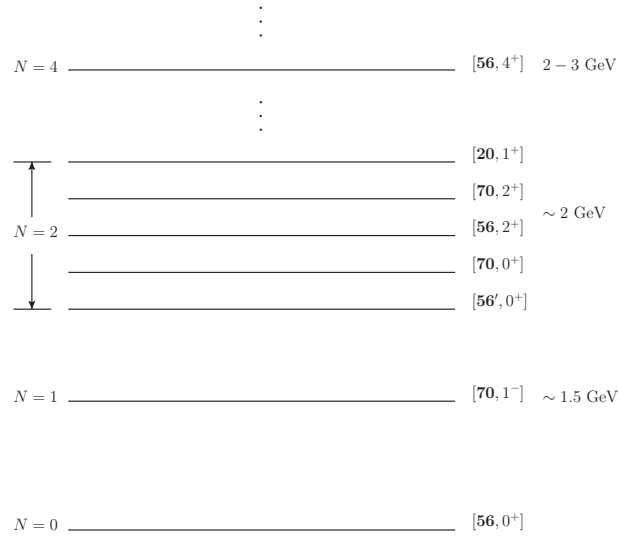


Fig. 3.3: Niveles más bajos del espectro de bariones graficados esquemáticamente. Una indicación de las masas aproximadas de los bariones pertenecientes a los niveles $N = 1, 2$ y 4 está escrita en la parte derecha de la figura.

mencionar que en el caso de los pares de octetes de $J = 1/2$ y $J = 3/2$ del $[\mathbf{70}, 1^-]$ esto debe tomarse como meramente indicativo dado que, en general, estados con idénticos números cuánticos se pueden mezclar. Volveremos sobre este punto en la Sec. 5.1. Como ya se ha mencionado, para obtener una descripción más precisa de las propiedades de los estados observados dentro de los modelos de quarks no-relativistas, es importante tener en cuenta las interacciones quark-quark más allá de la aproximación de Hartree [60]. Sin embargo,

$SU(6) \times O(3)$ irrep	$SU(3) \times SU(2)$ irrep	J^P	$\mathcal{S} = 0$	$\mathcal{S} = -1$		$\mathcal{S} = -2$	$\mathcal{S} = -3$
				$I = 0$	$I = 1$		
[56, 0 ⁺]	² 8	1/2 ⁺	$N(939)$	$\Lambda(1116)$	$\Sigma(1193)$	$\Xi(1318)$	
	⁴ 10	3/2 ⁺	$\Delta(1232)$		$\Sigma(1385)$	$\Xi(1533)$	$\Omega(1672)$
[70, 1 ⁻]	² 8	3/2 ⁻	$N(1520)$	$\Lambda(1690)$	$\Sigma(1580) **$	$\Xi(1820)?$	
		1/2 ⁻	$N(1535)$	$\Lambda(1670)$	$\Sigma(1620) **$		
	⁴ 8	1/2 ⁻	$N(1650)$	$\Lambda(1800)$	$\Sigma(1750)$		
		3/2 ⁻	$N(1700)$?	$\Sigma(1670)$		
	² 10	5/2 ⁻	$N(1675)$	$\Lambda(1830)$	$\Sigma(1775)$		
		1/2 ⁻	$\Delta(1620)$				
		3/2 ⁻	$\Delta(1700)$				
	² 1	1/2 ⁻		$\Lambda(1405)$			
		3/2 ⁻		$\Lambda(1520)$			
	[56', 0 ⁺]	² 8	1/2 ⁺	$N(1440)$	$\Lambda(1600)$		
⁴ 10		3/2 ⁺	$\Delta(1600) **$		$\Sigma(1690) **?$		
[56, 2 ⁺]	² 8	3/2 ⁺	$N(1720)$	$\Lambda(1890)$?		
		5/2 ⁺	$N(1680)$	$\Lambda(1820)$	$\Sigma(1915)$		
	⁴ 10	1/2 ⁺	$\Delta(1910)$				
		3/2 ⁺	$\Delta(1920)$		$\Sigma(2080) **$		
		5/2 ⁺	$\Delta(1905)$				
		7/2 ⁺	$\Delta(1950)$		$\Sigma(2030)$		
[70', 0 ⁺]	² 8	1/2 ⁻	$N(1710)$	$\Lambda(1800)$	$\Sigma(1880) **$		
	⁴ 8	3/2 ⁻	$N(1540)*?$				
	² 10	1/2 ⁻	$\Delta(1550)*$				
	² 1	1/2 ⁻	$N(2100) **$				
[70, 2 ⁺]	² 8	5/2 ⁻		$\Lambda(2110)$			
	⁴ 8	7/2 ⁻	$N(1990) **?$				

Tab. 3.2: Resonancias de bariones observadas experimentalmente.

dado que nuestro interés es simplemente introducir la clasificación general de los mismos con vistas a su descripción en el marco de la expansión $1/N_c$, esto no es necesario.

3.3. Generalización al caso de N_c grande

Como se mencionó en la Sec. 2.3, para N_c grande los bariones están compuestos de N_c quarks de valencia con una función de onda completamente antisimétrica en los índices de color. El correspondiente número bariónico está dado por

$$B = \frac{N_c}{3}, \quad (3.17)$$

ya que cada quark lleva un número bariónico igual a $1/3$. Veamos ahora cómo generalizar los resultados de la sección anterior. Por conveniencia, en lo que sigue analizaremos en forma separada el caso de los bariones en el estado fundamental (no-excitados) y el de los excitados.

3.3.1. Bariones en el estado fundamental

En este caso la parte orbital y de spin-sabor deben ser simétricas cada una por separado ante el intercambio de dos quarks cualesquiera, ya que los N_c quarks se hallan en el estado fundamental ($0s$). La irrep simétrica se indica como $[\mathbf{N}_c]$. Su diagrama de Young se muestra

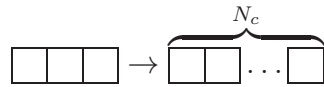


Fig. 3.4: Diagramas de Young para las irrep simétricas de los grupos de permutaciones S_3 y S_{N_c} [30].

en la Fig. 3.4. Para $N_c = 3$ corresponde al **56** de $SU(6)$. La descomposición de la representación simétrica de $SU(6)$ en sus contenidos $SU(2) \times SU(3)$ se puede escribir en término de diagramas de Young como

$$\begin{aligned} \overbrace{\square \square \dots \square}^{N_c} &= \left(S = \frac{1}{2}; \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array} \right) \oplus \left(S = \frac{3}{2}; \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \end{array} \right) \\ &\oplus \dots \oplus \left(S = \frac{N_c}{2}; \square \square \dots \square \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde las irreps de $SU(2)$ están representadas por sus correspondientes valores de spin S como en la Tabla 3.3. Esta descomposición es una generalización natural de la Ec. (3.4). Se puede inferir que en el límite $N_c \rightarrow \infty$ se tiene una torre infinita de estados bariónicos. Si solo se consideran bariones no-extraños, se tiene una torre de estados bariónicos con spin e isospin

$$S = I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N_c}{2}. \quad (3.19)$$

$SU(3)$	$SU(2)$	$SU(6)$	$O(3)$	$SU(6) \times O(3)$
10 S	$\otimes \frac{3}{2} \mathbf{S}$		$2_2^+ \mathbf{S}$	[56, 2⁺]
8 M	$\otimes \frac{1}{2} \mathbf{M}$	56 S	$\otimes 0_2^+ \mathbf{S}$	[56', 0⁺]
			$0_0^+ \mathbf{S}$	[56, 0⁺]
10 S	$\otimes \frac{1}{2} \mathbf{M}$		$2_2^+ \mathbf{M}$	[70, 2⁺]
8 M	$\otimes \frac{3}{2} \mathbf{M}$	70 M	$\otimes 0_2^+ \mathbf{M}$	[70, 0⁺]
8 M	$\otimes \frac{1}{2} \mathbf{M}$		$1_1^- \mathbf{M}$	[70, 1⁻]
1 A	$\otimes \frac{1}{2} \mathbf{M}$			
8 M	$\otimes \frac{1}{2} \mathbf{M}$	20 A	$\otimes 1_2^+ \mathbf{A}$	[20, 1⁺]
1 A	$\otimes \frac{3}{2} \mathbf{S}$			

Tab. 3.3: Pasos para formar funciones de onda simétricas de $SU(6) \times O(3)$ para $N = 0, 1, 2$. Los subíndices indican el valor apropiado de N , y la simetría \mathbf{S} , \mathbf{M} , \mathbf{A} se especifica para cada estado. Las irreps de $SU(3)$ son nombradas por sus dimensiones **10**, **8** ó **1** o, equivalentemente, por su simetría \mathbf{S} , \mathbf{M} ó \mathbf{A} . Las irreps de $SU(2)$ se denotan por el valor de spin total $3/2$ ó $1/2$ relacionado con el valor del operador de Casimir de $SU(2)$. Las etiquetas \mathbf{S} , \mathbf{M} , \mathbf{A} representan simétrico, mixto-simétrico y antisimétrico respectivamente [59].

Esta torre, cuya dimensión crece a medida que N_c lo hace, se reduce a N y Δ para $N_c = 3$.

Para bariones con n_S quarks extraños, es útil introducir el “grand spin” \vec{K} definido por

$$\vec{K} = \vec{S} + \vec{I}, \quad (3.20)$$

donde $K = n_S/2$. El isospin para cada valor de K es [31]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \left(K = 0, I = \frac{1}{2} \right) \oplus \left(K = \frac{1}{2}, I = 0, 1 \right) \\ \oplus \left(K = 1, I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \oplus \dots, \quad (3.21)$$

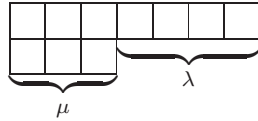
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \left(K = 0, I = \frac{3}{2} \right) \oplus \left(K = \frac{1}{2}, I = 1, 2 \right) \\ \oplus \left(K = 1, I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \oplus \dots, \quad (3.22)$$

donde se puede ver que la Ec. (3.21) corresponde a bariones con $S = 1/2$ y la Ec. (3.22) a bariones $S = 3/2$, que es consistente con la Ec. (3.4). Entonces cuando $N_c = 3$ estas representaciones se reducen al octete y decuplete de $SU(3)$.

La dimensión de una irrep de $SU(3)$ está dada por [61]

$$d_{R=(\lambda, \mu)} = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2), \quad (3.23)$$

donde λ y μ se corresponden a



Se puede ver directamente usando la Ec. (3.23), que la dimensión de cada irrep de $SU(3)$ en su descomposición (3.18) depende de N_c .

En las Figs. 3.5 y 3.6 se muestra la extensión para N_c grande de los diagramas de peso de la simetría de sabor que corresponden al octete y decuplete cuando $N_c = 3$. Contrariamente al caso de $SU(2)$, los diagramas de peso de $SU(3)$ varían con N_c . Como consecuencia, la identificación de los bariones que corresponden a aquellos de $N_c = 3$ no es únivoca. Lo usual entonces es identificar los bariones de $N_c = 3$ con la parte superior de los diagramas de peso para N_c grande, los cuales corresponden a bariones con extrañeza pequeña. Sin embargo, la hipercarga varía como

$$Y = \mathcal{S} + B = \mathcal{S} + \frac{N_c}{3}, \quad (3.24)$$

donde \mathcal{S} es la extrañeza. Esto significa que la hipercarga de un nucleón o una Δ para N_c grande es igual a $N_c/3$.

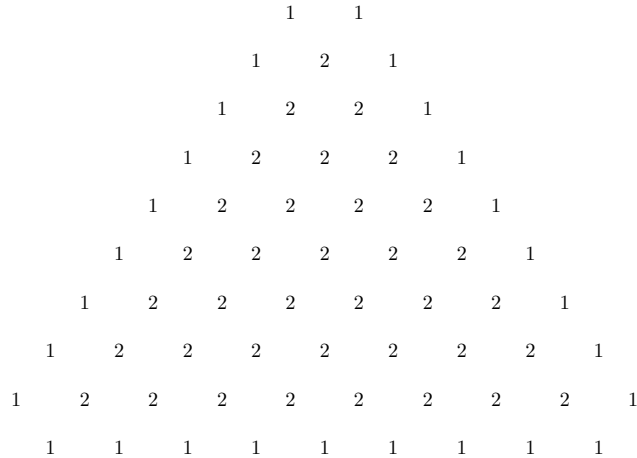


Fig. 3.5: Diagramas de peso de $SU(3)$ para el octete de bariones generalizado (Ec. (3.21)). Los números denotan la multiplicidad de los pesos. El lado más largo contiene $\frac{1}{2}(N_c + 1)$ pesos [7].

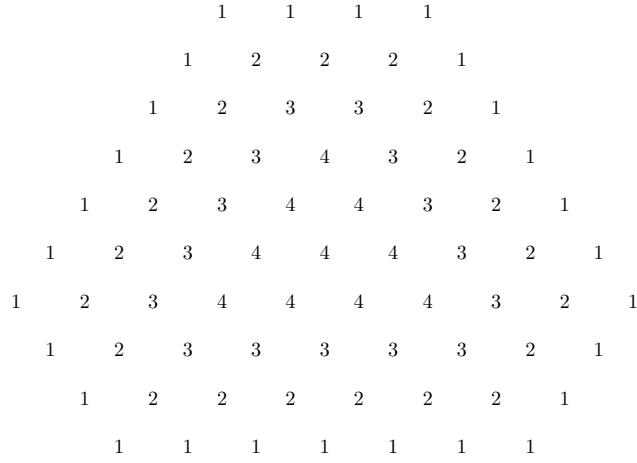


Fig. 3.6: Diagramas de peso de $SU(3)$ para el decuplete de bariones generalizado (Ec. (3.22)). Los números denotan la multiplicidad de los pesos. El lado más largo contiene $\frac{1}{2}(N_c - 1)$ pesos [7].

3.3.2. Bariones excitados

Para $N_c = 3$, la parte de spin-sabor o la parte orbital de la función de onda de un barión puede ser simétrica, mixta-simétrica o antisimétrica ante el intercambio de dos quarks. Para N_c grande se presentan aquí solamente las generalizaciones de los casos simétrico y mixto-simétrico ya que no es necesario conocer la generalización del caso de la irrep **20** de $SU(6)$ en lo que sigue.

La parte orbital

Para generalizar la parte orbital, consideraremos que el número de quarks excitados en los bariones es el mismo que para $N_c = 3$. Esto significa que el número de quarks en el estado fundamental es de orden N_c para excitaciones bajas. En esta sección se considerarán excitaciones para $N = 1$ y 2.

La generalización a N_c arbitrario de un estado simétrico es trivial porque es único como muestra la Fig. 3.4. No ocurre lo mismo con la generalización del estado mixto-simétrico, ya que éste no es único. Por lo tanto, cuando se quiere generalizar la representación mixta-simétrica **[2,1]** de S_3 al caso de N_c grande, se debe hacer de manera que se puedan recuperar los estados para $N_c = 3$ en el límite correspondiente. En la Sec. 3.2.2 se mostró que para $N_c = 3$ las coordenadas de Jacobi se pueden usar como base de las irreps simétrica **[3]** y mixta-simétrica **[2,1]** de S_3 . Las coordenadas de Jacobi de un sistema con N_c partículas son

$$\tilde{\mathbf{x}}_{N_c} = \frac{1}{N_c} \sum_{t=1}^{N_c} \mathbf{x}_t, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_s = \frac{1}{\sqrt{s(s+1)}} \left(\sum_{t=1}^s \mathbf{x}_t - s\mathbf{x}_{s+1} \right), \quad 1 \leq s \leq N_c - 1 \quad (3.26)$$

Se puede ver que tomando $s = 1$ y 2 en la Ec. (3.26) se obtienen las Ecs. (3.9) y (3.10) respectivamente.

La coordenada del centro de masa Ec. (3.8) es una función simétrica por construcción y por lo tanto puede usarse como base de vectores para la representación simétrica $[\mathbf{N}_c]$. Las coordenadas internas (3.26) forman un subespacio invariante para la representación mixta-simétrica $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ [61]. Esta observación sugiere que la única solución posible es elegir la irrep $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ de S_{N_c} para describir los estados excitados. De lo contrario, se obtendrían funciones de onda orbitales con simetría mixta que no se reducirían a $[\mathbf{2}, \mathbf{1}]$ cuando se toma $N_c = 3$.

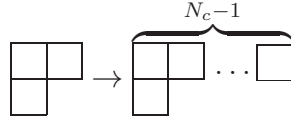


Fig. 3.7: Diagrama de Young de la irrep mixta-simétrica $[\mathbf{2}, \mathbf{1}]$ de S_3 generalizado a $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ del grupo de permutaciones S_{N_c} [30].

La Tabla 3.1 muestra que para $N_c = 3$ se pueden tener configuraciones con uno o dos quarks excitados. La generalización a N_c grande nos da las configuraciones $(0s)^{N_c-1}(0p)$ para $N = 1$ y $(0s)^{N_c-1}(1s)$, $(0s)^{N_c-1}(0d)$, $(0s)^{N_c-2}(0p)^2$ para $N = 2$, etc. Como en el caso de $N_c = 3$, es necesario remover la coordenada del centro de masa de la función de onda para satisfacer la invariancia traslacional, de esta manera se obtienen las configuraciones mostradas en la Tabla 3.4.

Multiplete de $SU(6)$	N	L	P	Configuración de oscilador armónico
56	0	0	+	$ [\mathbf{N}_c](0s)^{N_c}\rangle$
70	1	1	-	$ [\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}](0s)^{N_c-1}(0p)\rangle$
56'	2	0	+	$\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}} [\mathbf{N}_c](0s)^{N_c-1}(1s)\rangle - \sqrt{\frac{1}{N_c}} [\mathbf{N}_c](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$
70	2	0	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} [\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}](0s)^{N_c-1}(1s)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} [\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$
56	2	2	+	$\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}} [\mathbf{N}_c](0s)^{N_c-1}(0d)\rangle - \sqrt{\frac{1}{N_c}} [\mathbf{N}_c](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$
70	2	2	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} [\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}](0s)^{N_c-1}(0d)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} [\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$

Tab. 3.4: Configuraciones para el modelo de quarks con un confinamiento tipo oscilador armónico y N_c partículas.

La parte de spin-sabor

En la Sec. 3.3.1 se discutió la descomposición de la irrep simétrica de $SU(6)$ en sus subgrupos $SU(2) \times SU(3)$. Al generalizar para el caso de la irrep **70** de $SU(6)$ esta descomposición tiene la forma [31]

$$\begin{aligned}
\overbrace{\begin{array}{c} \square \square \dots \square \\ \square \square \dots \square \\ \square \end{array}}^{N_c-1} &= \left(S = \frac{1}{2}; \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \end{array} \dots \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right) \oplus \left(S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array} \dots \begin{array}{c} \square \square \square \square \\ \square \end{array} \right) \\
&\oplus \left(S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array} \dots \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} \right) \oplus \left(S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \end{array} \dots \begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \end{array} \right) \\
&\oplus \dots \oplus \left(S = \frac{N_c}{2} - 1; \overbrace{\begin{array}{c} \square \square \dots \square \\ \square \end{array}}^{N_c} \right) \\
&\oplus \left(S = \frac{N_c}{2} - 1, \frac{N_c}{2}; \overbrace{\begin{array}{c} \square \square \dots \square \\ \square \end{array}}^{N_c-1} \right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Los tres primeros términos corresponden a los de la Ec. (3.5) donde se pueden reconocer el singlete, el octete y el decuplete de $SU(3)$ para N_c grande. En efecto, el valor de isospin para cada valor de “grand spin” K de la primera irrep de $SU(3)$ escrita del lado derecho de la Ec. (3.27) se puede escribir como

$$\begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \end{array} \rightarrow (K = \frac{1}{2}, I = 0) \oplus (K = 1, I = \frac{1}{2}) \oplus \dots, \tag{3.28}$$

donde se puede ver que para esta irrep se tiene $K \neq 0$. Para $N_c = 3$, esta irrep corresponde al singlete de $SU(3)$. Los otros términos de la Ec. (3.28) existen solamente para $N_c > 3$. Para cada multiplete de simetría mixta, esto nos lleva a una torre infinita de estados excitados.

4. BARIONES CON SABORES LIVIANOS EN EL MARCO DE LA EXPANSIÓN EN $1/N_C$

4.1. Introducción

Como se mencionó en el Capítulo 1, el interés por la aplicación de la expansión en $1/N_c$ al estudio de las propiedades de los bariones se debió, en gran medida, al descubrimiento [12, 14] de la existencia, en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, de una simetría dinámica cuya correspondiente álgebra es un álgebra contraída de spin-sabor $SU(2N_f)_c$ donde N_f es el número de sabores. Para los bariones no-excitados esto implica que los mismos forman un conjunto infinito de estados degenerados. Además, cuando $N_c \rightarrow \infty$, el álgebra de $SU(2N_f)$ usada para la clasificación de los bariones no-excitados en los modelos de quarks se torna en un álgebra de $SU(2N_f)_c$. Por lo tanto se puede usar la simetría $SU(2N_f)$ para la clasificación de bariones no-excitados para N_c grande [19]. Dado que la simetría $SU(2N_f)_c$ está rota al orden $1/N_c$ los estados de bariones degenerados se desdoblan al orden $1/N_c$.

En cuanto al sector de bariones excitados, también allí es posible mostrar la existencia de torres de estados degenerados correspondientes a irreps de la simetría de spin-sabor contraída [30, 31, 36, 37] en el límite $N_c \rightarrow \infty$. Sin embargo, ni aún en dicho límite esta simetría coincide con la simetría $SU(2N_f) \times O(3)$, que según lo visto en el capítulo anterior, es utilizada en los modelos de quarks no-relativistas. Esto hace que una irrep de $SU(2N_f) \times O(3)$ pueda contener, en general, más de una irrep de $SU(2N_f)_c$. Como consecuencia de esto, por ejemplo, en la expansión del operador de masa para los estados del multiplete $[70, 1^-]$ aparecen operadores de $\mathcal{O}(N_c^0)$ que dan lugar a la ruptura de la degeneración de las masas aún para $N_c \rightarrow \infty$ [29]. Sin embargo, existe numerosa evidencia de que lo que domina la ruptura de simetría de spin-sabor en las masas son los efectos hiperfinos tipo spin-spin que son de orden $1/N_c$, mientras que los efectos de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$, como por ejemplo el spin-órbita, son substancialmente menos importantes. Por lo tanto, un esquema basado en el uso de la simetría aproximada $SU(2N_f) \times O(3)$ resulta ser muy conveniente, al menos desde el punto de vista fenomenológico. Por este motivo, dicho esquema ha sido utilizado para analizar no solo las masas de los bariones excitados [34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44], sino también los anchos de decaimiento fuerte [28, 38, 47, 48, 49] y la amplitudes de helicidad electromagnética (EM) [50, 51, 52, 53] de los multipletes más bajos.

En este capítulo se estudiará primero cómo aparece la simetría $SU(2N_f)_c$ en el sector de bariones no-excitados. Luego, se introducirá el “método de operadores” para construir una expansión en $1/N_c$ asociada a los observables bariónicos en términos de productos de generadores de $SU(2N_f)$. Finalmente, se mostrará cómo extender este método al análisis de

las propiedades de los bariones excitados.

4.2. Condiciones de consistencia para N_c grande en el sector de bariones no-excitados

Comencemos por recordar que, según lo visto en el Capítulo 2, las reglas de conteo de potencias para N_c grande implican que la amplitud del proceso de dispersión barión-mesón es de $\mathcal{O}(N_c^0)$ (ver por ej. la Fig. 2.17). También se ha visto que el vértice mesón-barión (ver por ej. la Fig. 2.16) es de $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$. Con esta información analicemos ahora los diagramas de la Fig. 4.1. Ellos representan, a nivel hadrónico, los diagramas que dan

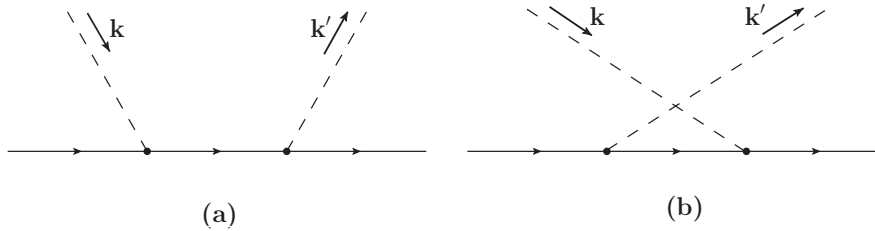


Fig. 4.1: Diagramas dominantes para el proceso de dispersión $B + \pi \rightarrow B + \pi$.

las contribuciones dominantes a la amplitud del proceso de dispersión barión-mesón. Cada uno de dichos diagramas contiene dos vértices barión-mesón y, por consiguiente, dan una contribución de $\mathcal{O}(N_c)$. De no existir algún tipo de cancelación esto lleva a una contradicción con las reglas de conteo y a una violación de la unitariedad. Las condiciones de consistencia para N_c grande surgen de la necesidad de que exista dicha cancelación y, a su vez, implican que los bariones para N_c grande deben satisfacer una simetría $SU(2N_f)_c$ cuando $N_c \rightarrow \infty$.

En lo que sigue nos restringiremos por simplicidad al caso $N_f = 2$ y consideraremos el proceso de dispersión elástico pión-nucleón. Siendo el pión un pseudoescalar, el acoplamiento derivativo del mismo con los bariones está dado por

$$\frac{\partial^\mu \pi^a}{f_\pi} (A_\mu^a)_{BB} \quad (4.1)$$

donde f_π es la constante de decaimiento del pión que, según lo visto en el Capítulo 2, es de $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$. Por otro lado, $(A_\mu^a)_{BB} = \langle B | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 T^a q | B \rangle$ son los elementos de matriz de la corriente axial del barión. Dichos elementos de matriz son de $\mathcal{O}(N_c)$, ya que hay N_c líneas de quarks “dentro” del barión. Por lo tanto, y de acuerdo con el resultado ya mencionado, el vértice pión-barión es de $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$. Ahora bien, dado que en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ el barión es infinitamente más masivo que el pión, el acoplamiento barión-pión se reduce al acoplamiento estático barión-pión. Es decir que en dicho límite solo las componentes espaciales del acoplamiento son relevantes. En este caso, los elementos de matriz de la corriente axial se pueden escribir como

$$A^{ia} = g N_c X^{ia}, \quad (4.2)$$

con $i, a = 1, 2, 3$. Aquí, tanto g como X^{ia} son de $\mathcal{O}(N_c^0)$. Notemos además que el conjunto de operadores X^{ia} transforman entre sí como vectores (iso-vectores) ante transformaciones espaciales (iso-spinoriales). Utilizando la Ec. (4.2) la forma explícita de la contribución de los diagramas de la Fig. 4.1 a la amplitud de dispersión pión-barión viene dada por [14]

$$\mathcal{A} = -i \frac{N_c^2 g^2}{f_\pi^2} \frac{k^i k'^j}{k^0} [X^{ia}, X^{jb}], \quad (4.3)$$

donde se ha utilizado, además, el propagador no-relativista para el estado bariónico intermedio. Por supuesto, el producto de matrices X implica una suma sobre dichos estados. Esta suma está tomada sobre todos los posibles estados de spin e isospin de los bariones degenerados con el nucleón. Si el único estado intermedio posible es precisamente el nucleón entonces la amplitud resultante es de $\mathcal{O}(N_c)$ lo cual lleva, como ya hemos mencionado, a la violación de unitariedad y las reglas de conteo de 't Hooft para N_c grande. El único modo de obtener una teoría consistente es que existan otros estados intermedios de bariones degenerados con el nucleón en el límite $N_c \rightarrow \infty$, de manera que la suma de lugar a una cancelación que haga que la amplitud de dispersión sea, a lo sumo, de $\mathcal{O}(N_c^0)$. Se obtiene entonces el siguiente vínculo

$$N_c [X^{ia}, X^{jb}] \leq \mathcal{O}(N_c^0). \quad (4.4)$$

Expandiendo el operador X^{ia} en términos de $1/N_c$ resulta

$$X^{ia} = X_0^{ia} + \frac{1}{N_c} X_1^{ia} + \frac{1}{N_c^2} X_2^{ia} + \dots \quad (4.5)$$

La condición de consistencia a primer orden en QCD para N_c grande está dada entonces por

$$[X_0^{ia}, X_0^{jb}] = 0. \quad (4.6)$$

Generalizando el formalismo para el caso de N_f sabores se obtiene entonces que, en el límite $N_c \rightarrow \infty$, los operadores S^i y T^a junto con los asociados a X^{ia} se pueden identificar con los generadores del álgebra contraída del grupo de spin-sabor $SU(2N_f)_c$, donde N_f es el número de sabores. Dicho álgebra está dado por

$$\begin{aligned} [S^i, T^a] &= 0, \\ [S^i, S^j] &= i\epsilon^{ijk} S^k, & [T^a, T^b] &= if^{abc} T^c, \\ [S^i, X_0^{ja}] &= i\epsilon^{ijk} X_0^{ka}, & [T^a, X_0^{ib}] &= if^{abc} X_0^{ic}, \\ [X_0^{ia}, X_0^{jb}] &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

y surge de tener en cuenta que, además de satisfacer la Ec. (4.6), los operadores X_0^{ia} deben transformar como la irrep adjunta de los grupos de spin y de sabor.

Es importante comparar este álgebra con el álgebra de $SU(2N_f)$. Los generadores S^i , T^a y los generadores de spin-sabor G^{ia} satisfacen el álgebra de spin-sabor [19]

$$\begin{aligned} [S^i, T^a] &= 0, \\ [S^i, S^j] &= i\epsilon^{ijk} S^k, & [T^a, T^b] &= if^{abc} T^c, \\ [S^i, G^{ja}] &= i\epsilon^{ijk} G^{ka}, & [T^a, G^{ib}] &= if^{abc} G^{ic}, \\ [G^{ia}, G^{jb}] &= \frac{i}{4} \delta^{ij} f^{abc} T^c + \frac{i}{2N_f} \delta^{ab} \epsilon^{ijk} S^k + \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} d^{abc} G^{kc}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Es fácil ver que el álgebra contraída se obtiene de la anterior mediante la identificación

$$X_0^{ia} = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{G^{ia}}{N_c}. \quad (4.9)$$

lo cual hace que solamente la relación de conmutación $[G^{ia}, G^{jb}]$ sea afectada por esta contracción. En efecto, al dividir por N_c^2 el lado izquierdo se convierte en $[X_0^{ia}, X_0^{jb}]$ y el lado derecho tiende a cero, obteniéndose en consecuencia la relación de consistencia Ec. (4.6) en el límite para $N_c \rightarrow \infty$.

Dashen *et al.* [16] resolvieron la Ec. (4.6), lo cual equivale a encontrar las irrep de $SU(2N_f)_c$. A diferencia de $SU(2N_f)$, este grupo no es compacto por lo que sus irreps no son de dimensión finita. Tomando el caso particular de $SU(4)_c$ los vectores base de cada irrep forman torres de estados degenerados a los cuales es posible asociar bariones de distinto spin-isospin (S, I) . Haciendo uso del “grand spin” \vec{K} definido en la Ec. (3.20), la primera torre corresponde a $K = 0$, $S = I$, es decir esta formada por los estados

$$(S, I) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \dots \quad (4.10)$$

El caso con $K = 1/2$ tiene asociada la torre

$$(S, I) = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right), \dots, \quad (4.11)$$

mientras que para $K = 1$ se tiene

$$(S, I) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), \dots, \quad (4.12)$$

y para $K = 3/2$ se tiene

$$(S, I) = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 3\right), \dots \quad (4.13)$$

Es posible hacer una identificación con los estados físicos asumiendo que, como en el capítulo anterior, $K = n_S/2$. Por ejemplo, la torre con $K = 0$ contiene a los bariones con

extrañeza $\mathcal{S} = 0$, es decir el nucleón $N = (1/2, 1/2)$ y la $\Delta = (3/2, 3/2)$. La torre $K = 1/2$ contiene a los bariones con $\mathcal{S} = -1$ como $\Lambda = (1/2, 0)$, $\Sigma = (1/2, 1)$ y $\Sigma^* = (3/2, 1)$, la torre $K = 1$ bariones con $\mathcal{S} = -2$ como $\Xi = (1/2, 1/2)$, y la $\Xi^* = (3/2, 1/2)$, y la torre con $K = 3/2$ el barión con $\mathcal{S} = -3$, $\Omega = (3/2, 0)$. El resto de los estados presentes dentro de estas torres son estados espurios, es decir están asociados a bariones que existen para $N_c > 3$ pero no para $N_c = 3$.

Hasta aquí se ha considerado lo que sucede en el límite estricto $N_c \rightarrow \infty$. Sin embargo, es posible derivar otras condiciones de consistencia que permiten estudiar las correcciones en $1/N_c$ a los elementos de matriz bariónicos [14, 15]. Estas nuevas condiciones de consistencia surgen de considerar, por ej., correcciones al propagador fermiónico en la dispersión pión-nucleón, o la amplitud de dispersión del proceso $\pi + N \rightarrow N + n\pi$ con $n \geq 2$. No se darán más detalles aquí sobre este método, llamado de “relaciones de consistencia”, ya que los mismos resultados se pueden obtener utilizando el “método de operadores” que se discute en detalle en la próxima sección.

4.3. Método de expansión de operadores para bariones no-excitados

Consideremos un operador de QCD de un cuerpo tal como, por ej., $\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 T^a q$. Este operador es de un cuerpo ya que actúa solo sobre una línea de quark. Por ejemplo, en la Fig. 4.2, su acción está representada por una cruz en la línea de quark de la parte superior de la figura. Su elemento de matriz se obtiene insertando el operador en cualquiera de las N_c líneas de quarks del barión. Como cada diagrama de Feynman que representa esta inserción es de $\mathcal{O}(N_c^0)$ y existen N_c formas posibles de hacer la misma, el operador de un cuerpo de QCD tiene un elemento de matriz que, a lo sumo, es de $\mathcal{O}(N_c)$. Es importante notar que, dado que pueden haber cancelaciones entre las N_c posibles formas de inserción, podría ocurrir que el elemento de matriz sea de $\mathcal{O}(N_c^p)$ con $p < 1$. Un operador de QCD de un cuerpo que

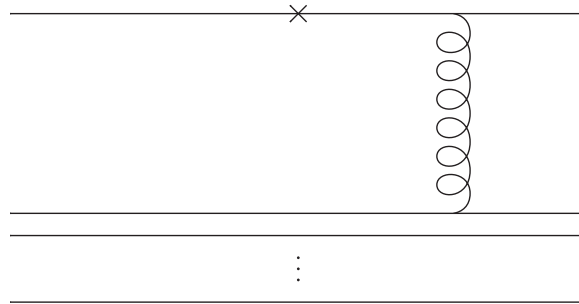


Fig. 4.2: Una ilustración de un operador efectivo de dos cuerpos generado a partir de un operador de QCD de un cuerpo, representado por una cruz. Se puede ver que al menos un gluón debe intercambiarse entre la primera línea de quark en donde actúa el operador de un cuerpo de QCD y la segunda línea de quark para generar un operador efectivo de dos cuerpos.

transforme según una dada representación del grupo $SU(2) \times SU(N_f)$ se puede escribir como una expansión en serie de operadores (efectivos) de n cuerpos, que involucran n líneas de quarks. Debido al teorema de Wigner-Eckart, estos operadores se pueden descomponer en productos de coeficientes dinámicos desconocidos y operadores efectivos, que son expresados por medio de productos apropiados de generadores del grupo como se muestra en [19]. Es decir,

$$\mathcal{O}_{QCD}^{1-cuerpo} = \sum_{n,\ell} C_\ell^{(n)} \mathcal{O}_\ell^{(n)}. \quad (4.14)$$

donde la suma es sobre todos los posibles operadores efectivos de n cuerpos $\mathcal{O}_\ell^{(n)}$, $0 \leq n \leq N_c$, con los mismos números cuánticos de spin y sabor que el operador $\mathcal{O}_{QCD}^{1-cuerpo}$ y donde $C_\ell^{(n)}$ son coeficientes dinámicos desconocidos. Estos operadores efectivos deben contener un factor $1/N_c^{n-1}$. Este factor proviene del hecho que, como ilustra la Fig. 4.2, se necesitan al menos $n - 1$ intercambios de gluones entre quarks para generar operadores efectivos de n cuerpos en la expansión en $1/N_c$ a partir de un operador de QCD de un cuerpo.

Como ya se ha mencionado al final de la sección anterior, existen dos maneras de expandir un operador de QCD en potencias de $1/N_c$. El método de “relaciones de consistencia” está basado en el uso de los generadores del álgebra contraída de spin-sabor $SU(2N_f)_c$ para construir los productos de operadores. En cambio, el “método de operadores” utiliza los generadores del álgebra de spin-sabor $SU(2N_f)$ representada en términos de operadores del modelo de quarks en capas para N_c grande. Esto hace que, en general, resulte más sencillo obtener los operadores correspondientes a los distintos órdenes de la expansión en $1/N_c$. Por este motivo, en lo que sigue utilizaremos este último método.

En el “método de operadores” la expansión de un operador de QCD de un cuerpo Ec. (4.14) resulta

$$\mathcal{O}_{QCD}^{1-cuerpo} = \sum_{p,q,n} C^{(n)} \frac{1}{N_c^{n-1}} (S^i)^p (T^a)^q (G^{ia})^{n-p-q}. \quad (4.15)$$

donde se entiende que los números cuánticos de spin e isospin están debidamente acoplados.

Para analizar la dependencia con N_c de cada uno de los términos de la expansión Ec. (4.14) se debe tener en cuenta que la misma puede surgir de dos maneras diferentes:

- El factor explícito $1/N_c^{n-1}$ que hace que, por ej., el término $n = 0$ sea una $\mathcal{O}(N_c)$.
- Una dependencia implícita debida a que los elementos de matriz de los generadores del grupo $SU(2N_f)$ pueden tener una dependencia no trivial en N_c que varía para estados diferentes del multiplete de spin-sabor de bariones. Por ejemplo, si se considera la torre de bariones Ec. (3.19), los estados más bajos de la torre tienen spin e isospin de $\mathcal{O}(N_c^0)$ pero los estados más altos de la torre tienen spin e isospin del orden de $\mathcal{O}(N_c)$. Asimismo todos los estados en dicha torre tienen elementos de matriz de G^{ia} de $\mathcal{O}(N_c)$, motivo por el cual se suele denominar a este operador *coherente*. Esto implica que los elementos de matriz de los operadores $\mathcal{O}^{(n)}$ son, en general, iguales a una $\mathcal{O}(N_c^p)$, con $p \leq n$.

Es importante remarcar que la expansión en $1/N_c$ de un operador pierde predecibilidad si el factor explícito $1/N_c^{n-1}$ es en todos los casos cancelado por el factor implícito que proviene de los elementos de matriz de los operadores $\mathcal{O}^{(n)}$. Esto se debe a que, en dicho caso todos los términos en la expansión son igualmente importantes y deben ser tenidos en cuenta.

Es posible generalizar la expansión en $1/N_c$ a operadores de m cuerpos de QCD. Como estos operadores actúan sobre m quarks dentro del barión, su elemento de matriz es al menos de orden N_c^m . En tal caso, se puede expandir un operador de QCD de m cuerpos en términos de operadores efectivos de n cuerpos con coeficientes de orden $1/N_c^{n-m}$.

A primera vista puede parecer que existe una gran cantidad de productos de generadores que aparecen en la expansión de la Ec. (4.15). Sin embargo, es posible mostrar que cuando se consideran los elementos de matriz de dichos productos en la irrep simétrica no todos ellos son independientes. Para comprender el origen de estas relaciones entre operadores es conveniente comenzar por introducir los operadores de creación y aniquilación q_α^\dagger y q_α donde $\alpha = 1, \dots, N_f$ representan los N_f sabores de quarks con spin arriba, y $\alpha = N_f + 1, \dots, 2N_f$, los N_f sabores de quarks con spin abajo. Como la parte de color de la función de onda del barión es antisimétrica, se puede omitir el número cuántico de color de los operadores de quark. Así, estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación bosónicas

$$\left[q^\alpha, q_\beta^\dagger \right] = \delta^\alpha_\beta, \quad (4.16)$$

ya que la parte de spin-sabor de la función de onda Ec. (3.1) debe ser simétrica para bariones no-excitados. Recordemos que dado que para los estados no excitados la función de onda orbital es simétrica, la función de onda de spin-sabor también debe serlo. De esta manera se pueden escribir los operadores de quark de n cuerpos en términos de estos operadores de quark de creación y aniquilación y luego clasificarlos.

Primeramente se tiene el operador de cero cuerpos $\mathbf{1}$, que es independiente de q y q^\dagger ya que no actúa en los quarks del barión. A continuación están los operadores de un cuerpo. Existen cuatro operadores de este tipo: el operador número de quarks

$$q^\dagger q = \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger q_j = N_c \mathbf{1}, \quad (4.17)$$

y los generadores de $SU(2N_f)$

$$\mathbf{S}^i = \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger (S^i \otimes \mathbf{1}) q_j, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{T}^a = \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger (\mathbf{1} \otimes T^a) q_j,$$

$$\mathbf{G}^{ia} = \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger (S^i \otimes T^a) q_j. \quad (4.19)$$

La Ec. (4.17) muestra que el operador número de quarks se puede reescribir en términos del operador identidad de cero cuerpos. En conclusión, hay tres operadores de un cuerpo independientes, \mathbf{S}^i , \mathbf{T}^a y \mathbf{G}^{ia} .

En cuanto a los operadores de dos cuerpos notemos que estos actúan sobre dos quarks e involucran dos operadores de creación y aniquilación q y q^\dagger . Estos operadores de dos cuerpos se pueden escribir como productos de generadores de spin-sabor de bariones, por ejemplo,

$$\mathbf{S}^i \mathbf{T}^a = \sum_{j,j'} \left(q_j^\dagger S^i q_j \right) \left(q_{j'}^\dagger T^a q_{j'} \right), \quad (4.20)$$

donde cada operador de un cuerpo actúa en una línea de quark independientemente. Sin embargo, este operador no es un operador puro de dos cuerpos ya que cuando $j = j'$ el correspondiente término actúa sobre una sola línea de quark y se reduce a un operador de un cuerpo. El operador que es dos cuerpos puro es

$$\sum_{j \neq j'} \left(q_j^\dagger S^i q_j \right) \left(q_{j'}^\dagger T^a q_{j'} \right), \quad (4.21)$$

ya que tiene elementos de matriz nulos entre estados de un solo quark. Se debe notar que es posible permutar los operadores de creación y aniquilación pues se trata de operadores bosónicos. Es decir que el operador puro de dos cuerpos Ec. (4.21) se puede llevar a la forma de orden normal

$$q^\dagger q^\dagger S^i T^a q q \quad (4.22)$$

Esto se puede generalizar a n cuerpos. Los operadores relevantes son del tipo

$$q^\dagger \dots q^\dagger \mathcal{T} q \dots q, \quad (4.23)$$

donde \mathcal{T} es un tensor de traza nula y completamente simétrico. El tensor \mathcal{T} debe ser de traza nula para obtener operadores de n cuerpos puros y simétricos ya que la parte de spin-sabor de la función de onda para bariones del estado fundamental es simétrica. Operadores tensoriales antisimétricos o mixto-simétricos dan lugar a elementos de matriz nulos.

A pesar de que solo los operadores puros de n cuerpos (es decir, aquellos ordenados normalmente) son relevantes en la expansión en $1/N_c$ del operador de QCD Ec. (4.14), los elementos de matriz de los mismos son más difíciles de calcular que los de productos de generadores de spin-sabor. Por otra parte, el inconveniente con estos últimos es que la identificación de los productos independientes es no-trivial. Sin embargo, esta identificación se ve facilitada por la existencia de “identidades de operadores” [19]. En efecto, cuando los productos de operadores se reescriben en forma normal, pueden aparecer tensores \mathcal{T} que no son de traza nula o completamente simétricos, de manera que algunas combinaciones lineales de productos de operadores son equivalentes a operadores de menos cuerpos o se anulan idénticamente en la irrep totalmente simétrica asociada a los bariones no-excitados. Las “identidades de operadores” describen a aquellas combinaciones de productos de operadores que son redundantes y, por lo tanto, pueden ser eliminadas de la expansión de operadores. El

conjunto completo de “identidades de operadores” fue determinado en la Ref. [19]. Con estas identidades, que se indican en la Tabla 4.1 para el caso general de $SU(2N_f)$, es posible trabajar directamente con operadores productos de generadores lo que, como ya se ha comentado, facilita los cálculos al momento de determinar los elementos de matriz correspondientes.

$2 \{S^i, S^i\} + N_f \{T^a, T^a\} + 4N_f \{G^{ia}, G^{ia}\} = N_c (N_c + 2N_f) (2N_f - 1)$	(1, 1)
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{2}{N_f} \{S^i, G^{ic}\} + \frac{1}{4} d^{abc} \{T^a, T^b\} = (N_c + N_f) \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) T^c$	(1, adj)
$\{T^a, G^{ia}\} = (N_c + N_f) \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) S^i$	(3, 1)
$\frac{1}{N_f} \{S^k, T^c\} + d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = 2(N_c + N_f) \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) G^{kc}$	(3, adj)
$4N_f(2 - N_f) \{G^{ia}, G^{ia}\} + 3N_f^2 \{T^a, T^a\} + 4(1 - N_f^2) \{S^i, S^i\} = 0$	(1, 1)
$(4 - N_f) d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{3}{4} N_f d^{abc} \{T^a, T^b\} - 2 \left(N_f - \frac{4}{N_f}\right) \{S^i, G^{ia}\} = 0$	(1, adj)
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = -3 \{T^a, T^b\} \quad (\bar{a}a)$	(1, $\bar{a}a$)
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = \{T^a, T^b\} \quad (\bar{s}s)$	(1, $\bar{s}s$)
$\epsilon^{ijk} \{S^i, G^{jc}\} = f^{abc} \{T^a, G^{kb}\}$	(3, adj)
$d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} = \left(1 - \frac{2}{N_f}\right) (\{S^k, T^c\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\})$	(3, adj)
$\epsilon^{ijk} \{G^{ia}, G^{jb}\} = f^{acg} d^{bch} \{T^g, G^{kh}\} \quad (\bar{a}s + \bar{s}a)$	(3, $\bar{a}s + \bar{s}a$)
$\{T^a, G^{ib}\} = 0 \quad (\bar{a}a)$	(3, $\bar{a}a$)
$\{G^{ia}, G^{ja}\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) \{S^i, S^j\} \quad (S = 2)$	(5, 1)
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = \left(1 - \frac{2}{N_f}\right) \{S^i, G^{jc}\} \quad (S = 2)$	(5, adj)
$\{G^{ia}, G^{jb}\} = 0 \quad (S = 2, \bar{a}a)$	(5, $\bar{a}a$)

Tab. 4.1: Identidades de $SU(2N_f)$: la segunda columna da las propiedades de transformación de las identidades ante el grupo $SU(2) \times SU(N_f)$ [19].

4.3.1. Un ejemplo: el operador de masa

Como ejemplo de la expansión de operadores para N_c grande, aplicada a bariones no excitados, se analizará el operador de masa de bariones para $N_f = 3$. en el límite en que la simetría $SU(3)$ es exacta, es decir que los quarks up, down y strange tienen la misma masa. La generalización al caso en que se incluye la ruptura de simetría de sabor se puede encontrar en la Ref. [19, 20]. Como se ha asumido que la simetría de $SU(2N_f)$ es exacta, el operador de masa debe transformar como un singlete de spin-sabor (1, 1). Como consecuencia de esto, todos los operadores $\mathcal{O}_\ell^{(n)}$ en la expansión Ec. (4.14) deben ser escalares de $SU(2N_f)$.

Hay un operador de cero cuerpos que transforma como $(1, 1)$ ante transformaciones del grupo $SU(2) \times SU(N_f)$, es el operador identidad $\mathbf{1}$,

$$\mathcal{O}^{(n)} = \mathbf{1}. \quad (4.24)$$

No hay operadores de un cuerpo que transformen como un singlete de spin-sabor. Estudiando los operadores de dos cuerpos resulta que, en principio, se pueden construir tres operadores de este tipo: S^2 , T^2 y G^2 . Sin embargo, si se observa la Tabla 4.1 tomando $N_f = 3$, se puede ver que hay dos identidades de operadores que transforman como $(1, 1)$. Esto quiere decir que de los tres operadores solo uno de ellos es independiente. Por ejemplo si tomamos como independiente el operador S^2 , entonces T^2 y G^2 pueden expresarse en términos del primero y ser eliminados de la expansión. Luego

$$\mathcal{O}^{(2)} = \frac{S^2}{N_c}, \quad (4.25)$$

Aplicando sucesivamente las identidades de dos cuerpos, se puede ver que no hay operadores de tres cuerpos en esta expansión. En general, hay un único operador de n cuerpos para cada n par [20],

$$\mathcal{O}^{(n)} = \frac{S^n}{N_c^{n-1}}, \quad (4.26)$$

que transforma como $(1, 1)$.

La expansión en $1/N_c$ del operador de masa en el límite de simetría de sabor es entonces

$$M^{(1,1)} = C_0 N_c \mathbf{1} + C_2 \frac{1}{N_c} S^2 + C_4 \frac{1}{N_c^3} S^4 + \dots + C_{N_c-1} \frac{1}{N_c^{N_c-2}} S^{N_c-1}, \quad (4.27)$$

donde hemos usado que N_c es impar. Resulta evidente de la Ec. (4.27) que la expansión en $1/N_c$ es predictiva solo si $S = \mathcal{O}(N_c^0)$, es decir para bariones situados en la base de la torre dada por la Ec. (4.10). Para bariones situados en la parte superior de esta torre, con $S = \mathcal{O}(N_c)$, los distintos términos de la expansión Ec. (4.27) son del mismo orden y deben ser todos tenidos en cuenta. Notemos, además, que la separación entre las masas de dos bariones con spin $S = \mathcal{O}(N_c^0)$, es de orden $1/N_c$ y es de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$ para bariones con spin $S = \mathcal{O}(N_c)$. La Fig. 4.3 da una ilustración de la corrección en $1/N_c$ del operador de masa Ec. (4.27) de los bariones del estado fundamental.

4.4. Método de expansión de operadores para bariones excitados

Dado el éxito obtenido en la aplicación de la expansión en $1/N_c$ al estudio de las propiedades de los bariones no-excitados surgió un gran interés en extender estos análisis al sector de bariones excitados. Como se vio en la Sec. 4.2, la expansión en $1/N_c$ de QCD para los bariones no-excitados se basa en las condiciones de consistencia para N_c grande. Estas condiciones implican la existencia una simetría contraída $SU(2N_f)_c$ para los bariones no-excitados

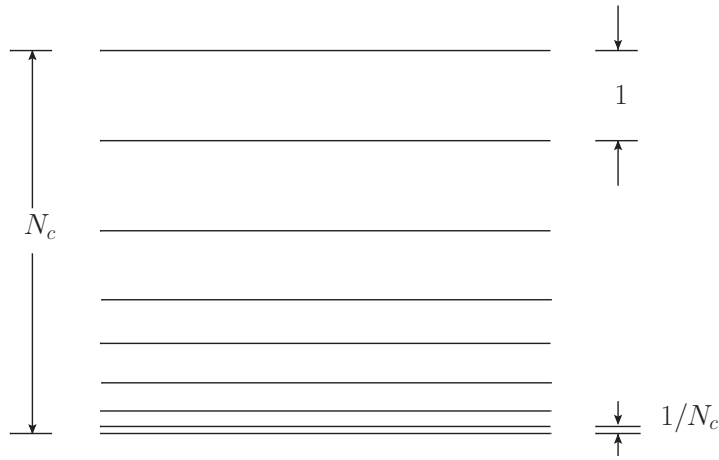


Fig. 4.3: Separación entre masas de la torre de estados bariónicos no-excitados para $N_f = 2$ y N_c grande, es decir aquellos con $K = 0$, $S = I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N_c}{2}$. El operador S^2/N_c da una separación entre masas de $\mathcal{O}(1/N_c)$ entre bariones con spin $S \sim \mathcal{O}(N_c^0)$ y una separación de $\mathcal{O}(N_c^0)$ entre bariones con spin $S \sim \mathcal{O}(N_c)$. La separación de masas entre bariones con spin $S = \frac{1}{2}$ y $S = \frac{N_c}{2}$ es $\sim \mathcal{O}(N_c)$ [7].

que puede relacionarse con la simetría usual $SU(2N_f)$ usada en el modelo de quarks cuando $N_c \rightarrow \infty$. Se puede plantear el interrogante de si los bariones excitados también satisfacen condiciones de consistencia como los bariones del estado fundamental. Pirjol y Yan mostraron que una simetría contraída $SU(2N_f)_c$ surge también para estados excitados [30]. Cabe señalar que en dicho trabajo se supuso que los estados excitados son angostos. Sin embargo, las reglas de conteo de 't Hooft para N_c grande predicen que los correspondientes anchos de decaimiento son de orden N_c^0 , por lo tanto los bariones excitados no son estables en el límite $N_c \rightarrow \infty$ [11]. A pesar de esto, un tratamiento alternativo [33] que considera a los estados excitados como resonancias presentes en las amplitudes de dispersión mesón-barión (y que por lo tanto da cuenta en forma consistente de los anchos de decaimiento correspondientes) también encuentra que, para $N_c \rightarrow \infty$, los mismos aparecen en multipletes característicos de $SU(2N_f)_c$.

La extensión del “método de operadores” utilizado en la presente tesis para el estudio de bariones excitados se basa en ideas similares a la del modelo de quarks en capas con simetría $SU(2N_f) \times O(3)$ donde la función de onda del barión está dividida en una parte simétrica del “carozo” y otra para el quark excitado. Como ya se ha señalado, la simetría $SU(2N_f) \times O(3)$, no es exacta ni aún en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. Esto hace que, por ejemplo, en la expansión del operador de masa para los estados del multiplete $[70, 1^-]$ aparezcan operadores de $\mathcal{O}(N_c^0)$ que dan lugar a la ruptura de la degeneración de las masas incluso para $N_c \rightarrow \infty$. A pesar de este inconveniente, el método de la expansión en $1/N_c$ se ha aplicado con éxito para el estudio de algunos multipletes excitados, el $[70, 1^-]$ [34, 35, 39, 40] para la banda $N = 1$, el $[56', 0^+]$ [38], el $[56, 2^+]$ [41] y el $[70, l^+]$ ($l = 0, 2$) [42, 44] para la banda $N = 2$ y el $[56, 4^+]$ [43] perteneciente a la banda $N = 4$. Los buenos resultados obtenidos en todas estas aplicaciones indican que los efectos de ruptura de simetría a $\mathcal{O}(N_c^0)$, que son principalmente

debidos a la “mezcla de configuraciones”, son pequeños al menos para el caso de los estados excitados considerados.

Consideremos bariones excitados con una energía de excitación de orden 1, lo que significa que el número n de quarks excitados es pequeño, es decir $n \ll N_c$. Estos bariones están compuestos de $\mathcal{O}(N_c)$ quarks en el estado fundamental (el “carozo”) y $\mathcal{O}(N_c^0)$ quarks excitados. En este marco, los $N_c - n$ quarks del carozo son descritos por una función de onda simétrica, como quarks del estado fundamental [29]. Esto quiere decir que las partes espacial y de spin-sabor de la función de onda del carozo son simétricas ante el intercambio de dos quarks cualesquiera.

En lo que sigue consideraremos el caso de un solo quark excitado que lleva impulso angular orbital l . Además nos limitaremos aquí por simplicidad al caso $N_f = 2$. La generalización a $N_f = 3$ es bastante directa y será detallada para los casos de interés en el Capítulo 6. La función de onda total se obtiene acoplando la función de onda de spin-sabor de simetría apropiada a la de impulso angular orbital, es decir

$$|J, J_3; I, I_3; l, S\rangle_{\mathbf{SIM}} = \sum_m \langle l, m; S, J_3 - m | J, J_3 \rangle |l, m\rangle |S, J_3 - m; I, I_3\rangle_{\mathbf{SIM}}. \quad (4.28)$$

donde para los casos de interés $\mathbf{SIM} = \mathbf{S}, \mathbf{MS}$

Para obtener las funciones de onda de spin-sabor de simetría apropiada comenzaremos por introducir una notación conveniente. Los números cuánticos de spin y sabor correspondientes al quark excitado serán indicados en minúsculas, mientras que los números cuánticos de spin e isospin resultantes del acoplamiento de los $N_c - 1$ quarks restantes (que están en una irrep totalmente simétrica de $SU(4)$ ($SU(6)$) y forman lo que llamamos el “carozo” del barión para N_c grande) serán indicados S_c e I_c respectivamente. Notemos que $S_c = I_c$ para estados en la irrep completamente simétrica de $SU(4)$ ($SU(6)$). Entonces, para un estado dado del carozo, el acoplamiento con los grados de libertad de spin e isospin del quark excitado da como resultado

$$\begin{aligned} |S, S_3; I, I_3; S_c\rangle &= \sum_{s_3, i_3} \langle S_c, S_3 - s_3; 1/2, s_3 | S, S_3 \rangle \langle I_c = S_c, I_3 - i_3; 1/2, i_3 | I, I_3 \rangle \\ &\times |S_c, S_3 - s_3; I_c = S_c, I_3 - i_3\rangle |1/2, s_3; 1/2, i_3\rangle \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sin embargo estos estados forman una representación reducible de $SU(4)$, ya que no están en una irrep del grupo de las permutaciones. En efecto, son combinación lineal de la irrep \mathbf{S} y la \mathbf{MS} . Esto se puede entender si notamos que el producto directo de la función de onda del carozo con la del quark excitado se puede representar de la siguiente manera usando diagramas de Young:

$$\overbrace{\square \square \dots \square}^{N_c-1} \otimes \square^* = \overbrace{\square \square \dots \square^*}^{N_c} \oplus \overbrace{\square \square \dots \square^*}_{\mathbf{MS}}, \quad (4.30)$$

donde el tableau marcado con un asterisco representa al quark excitado.

Por lo tanto, los estados totalmente simétricos están dados por (ver por ej. Ref. [40])

$$|S, S_3; I, I_3\rangle_{\mathbf{S}} = \sum_{\xi=\pm\frac{1}{2}} C_{\mathbf{S}}(S, \xi) |S, S_3; I, I_3; S_c = S + \xi\rangle, \quad (4.31)$$

donde

$$C_{\mathbf{S}}(S, \pm\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{(2S+1 \mp 1)(N_c+1 \pm (2S+1))}{2N_c(2S+1)}}, \quad (4.32)$$

mientras que los estados de simetría $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ (**MS**) están dados por (ver por ej. Ref. [34, 40])

$$|S, S_3, I, I_3\rangle_{\mathbf{MS}} = \sum_{\xi=\pm\frac{1}{2}} C_{\mathbf{MS}}(I, S, \xi) |S, S_3; I, I_3; S_c = S + \xi\rangle, \quad (4.33)$$

donde

$$C_{\mathbf{MS}}(I, S, \pm\frac{1}{2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = S \pm 1 \\ 0 & \text{si } I = S \mp 1 \\ \pm \sqrt{\frac{(2S+1 \pm 1)(N_c+1 \pm (2S+1))}{2N_c(2S+1)}} & \text{si } I = S \end{cases} \quad (4.34)$$

Una vez encontradas las funciones de onda apropiadas para obtener los elementos de matriz asociados a los observables bariónicos de interés, es necesario generalizar la expansión (4.15) incluyendo los generadores del grupo ortogonal $SO(3)$ l^i . La expansión de un operador de QCD de un cuerpo es entonces

$$\mathcal{O}_{QCD}^{1-cuerpo} = \sum_n C_n \mathcal{O}^{(n)}, \quad (4.35)$$

con

$$\mathcal{O}^{(n)} = \frac{1}{N_c^{n-1}} \mathcal{O}_l^{(k)} \otimes \mathcal{O}_{SF}^{(k)}, \quad (4.36)$$

donde $\mathcal{O}_l^{(k)}$ y $\mathcal{O}_{SF}^{(k)}$ son respectivamente tensores de rango k en $SO(3)$ y $SU(4)$ que se pueden expresar en términos de productos de los generadores l^i , S^i , T^a y G^{ia} . Sin embargo, dado que en general la función de onda bariónica de spin-sabor está dividida en una parte simétrica del carozo y un quark excitado, cada generador debe escribirse como la suma de dos términos, uno actuando en la parte del carozo y el otro actuando en la parte del quark excitado. Se tiene entonces

$$S^i = S_c^i + s^i; \quad T^a = T_c^a + t^a; \quad G^{ia} = G_c^{ia} + g^{ia}, \quad (4.37)$$

donde S_c^i , T_c^a y G_c^{ia} son operadores del carozo y s^i , t^a y g^{ia} los correspondientes operadores del quark excitado. Se puede ver que para el caso de estados excitados asociados a irrep simétricas la separación (4.36) no es necesaria [41, 48].

Una vez obtenidos los operadores básicos es necesario construir productos de los mismos que tengan los números cuánticos adecuados para el observable que se desea estudiar. A partir de los distintos productos posibles se obtienen las bases de operadores con las cuales se expresan las combinaciones lineales como las dadas en la Ec. (4.35). En los capítulos siguientes se explicará este procedimiento en detalle para los casos de interés de la presente tesis de doctorado.

5. ANÁLISIS GLOBAL DE MASAS Y DECAIMIENTOS DE BARIONES NO-EXTRAÑOS PERTENECIENTES AL $[\mathbf{70}, 1^-]$ -PLETE

5.1. Introducción

Como se explicó en la Introducción a la tesis, el objetivo general de este trabajo está vinculado con la realización de un análisis consistente de diversos observables asociados al multiplete $[\mathbf{70}, 1^-]$ que en el pasado han sido estudiados en forma independiente [34, 35, 39, 40, 43, 47, 53, 67]. El multiplete de interés está constituido por los siguientes estados: dos $\mathbf{8}_{1/2}$, dos $\mathbf{8}_{3/2}$, un $\mathbf{8}_{5/2}$, un $\mathbf{10}_{1/2}$, un $\mathbf{10}_{3/2}$, un $\mathbf{1}_{1/2}$ y un $\mathbf{1}_{3/2}$ siendo el multiplete de estados excitados mejor conocido experimentalmente, ya que se conocen 18 de los 30 estados de isospin posibles. La información acerca de los estados no-extraños es particularmente buena, tal es así que se conocen todas las masas y una buena cantidad de los anchos de decaimiento fuerte y de las amplitudes de helicidad electromagnética (EM). Por este motivo resulta conveniente realizar en una primera etapa un análisis donde solo se tengan en cuenta los estados no-extraños, es decir los que pertenecen a la irrep $\mathbf{20}$ de $SU(4)$ de spin-sabor. Dicho análisis será detallado en el presente capítulo. La información experimental disponible se indica en la Tabla 5.1.

En lo que sigue mostraremos como implementar la expansión en $1/N_c$ en el caso de las masas y los decaimientos de los bariones excitados de interés, utilizando un formalismo unificado basado en el uso de operadores escritos en una base esférica, para luego mostrar los resultados obtenidos tras realizar un análisis global de estos observables y una discusión de los mismos.

Partícula	Masa [MeV]	Ancho [MeV]	Ancho parcial [%]		$A_{\frac{1}{2}}^N$			
			Onda-S	Onda-D	$A_{\frac{1}{2}}^p$	$A_{\frac{1}{2}}^n$	$A_{\frac{3}{2}}^p$	$A_{\frac{3}{2}}^n$
					[$10^{-3} \times \text{GeV}^{-\frac{1}{2}}$]			
$N(1535)$	1538(18)	150(25)	$\pi N : 45(10)$ $\eta N : 42(10)$	$\pi\Delta : 2(2)$	90(25)	-46(27)		
$N(1520)$	1523(8)	113(13)	$\pi\Delta : 15(5)$	$\pi N : 60(5)$ $\pi\Delta : 13(3)$ $\eta N : ?$	-24(9)	-59(9)	166(5)	-139(11)
$N(1650)$	1660(20)	150(30)	$\pi N : 70(20)$ $\eta N : 10(5)$	$\pi\Delta : 13(13)$	53(16)	-15(21)		
$N(1700)$	1700(50)	175(75)	$\pi\Delta : 50(40)$	$\pi N : 12(5)$ $\pi\Delta : 10(10)$ $\eta N : ?$	-18(13)	0(50)	-2(24)	-3(44)
$N(1675)$	1678(8)	148(18)		$\pi N : 40(5)$ $\pi\Delta : 50(15)$ $\eta N : ?$	19(8)	-43(12)	15(9)	-58(13)
$\Delta(1620)$	1645(30)	140(10)	$\pi N : 25(5)$	$\pi\Delta : 45(15)$ $\eta\Delta : -$	27(11)			
$\Delta(1700)$	1720(50)	300(100)	$\pi\Delta : 38(13)$ $\eta\Delta : -$	$\pi N : 15(5)$ $\pi\Delta : 10(5)$ $\eta\Delta : -$	104(15)		85(22)	

Tab. 5.1: Bariones excitados no-extraños pertenecientes al $[70, 1^-]$ con sus anchos parciales de decaimiento y sus amplitudes de helicidad EM obtenidas del PDG [62]. Los casos en que el dato no es indicado el PDG se indican con un signo de interrogación mientras que si el decaimiento no es permitido por espacio de fases se indica por una barra horizontal

5.2. Estados y observables de interés

En esta sección estudiaremos las funciones de onda, algunas de las cuales quedan definidas a través de ciertos ángulos que llamaremos de mezcla, y los observables de interés particular de esta parte del trabajo, es decir, las masas, los anchos de decaimiento fuerte y las amplitudes de helicidad EM. Para ello describiremos brevemente el formalismo correspondiente tanto a la construcción de los estados como a la obtención de los operadores pertinentes.

5.2.1. Estados $[20', 1^-]$ para N_c arbitrario

De acuerdo a la Ec. (4.28), los estados pertenecientes al multiplete $[20', 1^-]$ de $SU(4) \times O(3)$ se expresan

$$|J, J_3; I, I_3; l, S\rangle_{\mathbf{MS}} = \sum_m \langle l, m; S, J_3 - m | J, J_3 \rangle |l, m\rangle |S, J_3 - m; I, I_3\rangle_{\mathbf{MS}}, \quad (5.1)$$

donde la función de spin-sabor \mathbf{MS} que resulta de acoplar el quark excitado al carozo está dada en Ec. (4.33).

Las mezclas de estados mencionadas más arriba son inducidas por interacciones que rompen la simetría spin/isospin. Estas mezclas se dan entre los pares de estados que están en los dos octetes con el mismo $J = 1/2$ o $3/2$. Las mismas están definidas de acuerdo con:

$$\begin{pmatrix} N_J \\ N'_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{2J} & \sin \theta_{2J} \\ -\sin \theta_{2J} & \cos \theta_{2J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2N_J^* \\ {}^4N_J^* \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

donde $N_J^{(l)}$ son autoestados de masa. Los ángulos de mezcla están determinados por la diagonalización de las matrices de masa correspondientes. Los autovalores y ángulos de mezcla (autovectores) están dados por:

$$m_{N_J, N'_J} = \frac{M_2^J + M_4^J}{2} \pm \text{sign}(M_2^J - M_4^J) \sqrt{\left(\frac{M_2^J - M_4^J}{2}\right)^2 + (M_{24}^J)^2}, \quad (5.3)$$

$$\theta_{2J} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2M_{24}^J}{M_2^J - M_4^J}\right) \pmod{\pi}, \quad (5.4)$$

donde $M_2^J = \langle {}^2N_J^* | \sum_i C_i M_i | {}^2N_J^* \rangle$, etc, siendo $\sum_i C_i M_i$ el operador de masa del cual hablaremos más en detalle en la sección 5.2.3.

Los ángulos pueden definirse de forma de pertenecer al intervalo $[0, \pi)$ eligiendo convenientemente la fase de los estados físicos.

Hay cuatro posibles asignaciones de los estados N_J y N'_J con los estados físicos. Estas son:

$$\begin{aligned} \text{Set 1} &= \{N_{1/2} = N(1535), N'_{1/2} = N(1650), N_{3/2} = N(1520), N'_{3/2} = N(1700)\} \\ \text{Set 2} &= \{N_{1/2} = N(1650), N'_{1/2} = N(1535), N_{3/2} = N(1520), N'_{3/2} = N(1700)\} \\ \text{Set 3} &= \{N_{1/2} = N(1535), N'_{1/2} = N(1650), N_{3/2} = N(1700), N'_{3/2} = N(1520)\} \\ \text{Set 4} &= \{N_{1/2} = N(1650), N'_{1/2} = N(1535), N_{3/2} = N(1700), N'_{3/2} = N(1520)\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Debe notarse que en trabajos previos [34, 35, 36] los ángulos de mezcla se definieron usando alguna asignación específica. Por ejemplo, en Ref. [36] están definidos en las Ecs. (18) y (19), que se corresponde solamente con la definición Ec. (5.4) cuando los estados son asignados de acuerdo al Set 1 en Ec. (5.5).

5.2.2. Bases de operadores asociados a los observables de interés

Como se mostró en el Capítulo 4, un operador local de QCD singlete de color, expresado en términos de los campos de quarks y gluones y que tiene propiedades de transformación de una representación irreducible bajo transformaciones de isospin y rotaciones, puede expandirse en el subespacio de estados bariónicos en potencias de $1/N_c$ como una expansión que consiste en operadores compuestos contruídos con productos de tensores de $SU(4) \times O(3)$ [19, 29]. Estos operadores tensoriales tienen una potencia bien definida en el conteo $1/N_c$, como se describió anteriormente. Por lo tanto, un operador de QCD tiene una expansión en $1/N_c$ dada por la Ec. (4.14).

El orden en $1/N_c$ de los operadores compuestos está determinado por el número de cuerpos (n -cuerpos) o el grado de este, que está dado por el número de campos de quarks necesario para construir un operador con las mismas propiedades de transformación [71], y por el orden en N_c de los elementos de matriz de los operadores tensoriales que aparecen como factores. Como fue mencionado, un operador de n -cuerpos requiere del intercambio de $n - 1$ gluones para producirse, por lo tanto el orden (“naive”) en $1/N_c$ está dado por:

$$\nu(\mathcal{O}^{(n)}) = n - 1 - \kappa, \quad (5.6)$$

donde κ depende del orden en $1/N_c$ de los factores, y n satisface $n \leq N_c$. Los coeficientes $C_\ell^{(n)}$ en Ec. (4.14) son coeficientes dinámicos desconocidos de $\mathcal{O}(N_c^0)$, que están determinados por la dinámica de QCD.

En el subespacio de los estados **MS** de interés, una base de operadores compuestos puede construirse a partir de distinguir dos conjuntos de generadores de acuerdo a si actúan en el carozo o en el “quark excitado” que corresponde al índice de spin-sabor asociado a la segunda fila del tableaux de Young (4.30). Los generadores que actúan sobre el carozo serán indicados por $\{S_c^{[1,0]}, T_c^{[0,1]}, G_c^{[1,1]}\}$ y aquellos que actúan sobre el quark excitado por $\{l^{[1,0]}, s^{[1,0]}, t^{[0,1]}, g^{[1,1]}\}$. Aquí se ha utilizado la notación $\mathcal{O}^{[j,i]}$ donde j e i indican, respectivamente, el spin y el isospin asociado al operador \mathcal{O} . Entonces, los operadores de n -cuerpos pueden escribirse como productos de n generadores de $SU(4)$ actuando solamente en el carozo, o $n - 1$ generadores $SU(4)$ actuando en el carozo y al menos un generador de $SU(4) \times O(3)$ actuando en el quark excitado. Debe notarse que el orden κ que aparece en Ec. (5.6) toma el valor $\kappa = 0$ para todos los generadores excepto el generador G_c para el cual $\kappa = 1$.

5.2.3. Operadores de masa

La construcción de la base de operadores se lleva a cabo teniendo en cuenta una serie de reglas que permiten reducir al mínimo la lista a considerar. Lo primero que se tiene que cumplir es que el producto de operadores tenga los números cuánticos adecuados de tal forma que el operador total de spin-sabor esté acoplado a la representación de interés. En el caso del operador de masa esto implica que el producto de los operadores de spin-sabor acoplados a los operadores de momento angular produzcan un operador que transforme como un escalar ante transformaciones de spin e isospin.

La segunda regla es que el producto de dos o más generadores actuando en el quark excitado siempre puede reducirse al operador identidad o a combinaciones lineales de estos generadores. Esto implica que en cualquier producto de operadores que se construya solo basta incluir un generador actuando sobre el quark excitado. Denominaremos genéricamente λ a dicho operador. Es decir,

$$\lambda = s^{[1,0]}, t^{[0,1]}, g^{[1,1]} \quad (5.7)$$

Un tercer conjunto de reglas surge de las identidades para elementos de matriz de los generadores de $SU(4)$ tomados entre estados pertenecientes a la representación simétrica que aparecen en la Tabla 4.1. Notemos que las funciones de onda del carozo pertenecen a dicha representación. Por lo tanto, los generadores que actúan sobre el carozo deben satisfacer las identidades mencionadas. En lo que sigue denominaremos genéricamente Λ_c a estos operadores. Es decir,

$$\Lambda_c = S_c^{[1,0]}, T_c^{[0,1]}, G_c^{[1,1]} \quad (5.8)$$

Finalmente, dado que al momento de emplear efectivamente el presente formalismo para el análisis de observables físicos uno va a tomar nuevamente $N_c = 3$, no es necesario considerar operadores de más de tres cuerpos.

Del empleo de estas reglas se desprende que la forma general de los operadores a considerar es

$$1-C \rightarrow \lambda \quad , \quad \Lambda_c \quad (5.9)$$

$$2-C \rightarrow \frac{1}{N_c} \lambda_1 (\Lambda_c)_2 \quad , \quad \frac{1}{N_c} (\Lambda_c)_1 (\Lambda_c)_2 \quad (5.10)$$

$$3-C \rightarrow \frac{1}{N_c^2} \lambda_1 (\Lambda_c)_2 (\Lambda_c)_3 \quad , \quad \frac{1}{N_c^2} (\Lambda_c)_1 (\Lambda_c)_2 (\Lambda_c)_3 \quad (5.11)$$

En estas ecuaciones se han agrupado a los operadores según el número de cuerpos (n -C) que afectan. El factor en N_c explícito se debe a las reglas mencionadas en el Capítulo 4 que indican que un operador efectivo de n -cuerpos debe estar acompañado de un factor $1/N_c^{n-1}$. Con todo esto en mente es posible proceder a la construcción de la base de operadores de masa, teniendo en cuenta además que la lista se puede reducir aún más luego de realizar el cálculo explícito de los elementos de matriz. Esto último resulta de eliminar aquellos operadores cuyos elementos de matriz sean linealmente dependientes del resto de los operadores de la base cuando se especializa en el caso $N_c = 3$.

La base de operadores de masa hasta orden $1/N_c$ ha sido contruída en [35]. La misma se muestra en la Tabla 5.2 donde se incluyen también los factores de normalización que hacen que los operadores tengan elementos de matriz de tamaño natural. La lista contiene un operador de $\mathcal{O}(N_c^0)$, que es el operador identidad u operador número bariónico. Hay además dos operadores de $\mathcal{O}(N_c^0)$, los cuales involucran el acoplamiento del momento angular l . El primero corresponde en el modelo de quarks a la precesión de Thomas debida a la

interacción spin-órbita, que para bariones en la representación \mathbf{S} es de $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ pero en la representación \mathbf{MS} es de $\mathcal{O}(N_c^0)$, y el segundo operador involucra el acoplamiento de las corrientes axiales del carozo y del quark excitado a través de un tensor de rango dos $l^{[2,0]} \equiv (l^{[1,0]} l^{[1,0]})^{[2,0]}$. Finalmente hay cuatro operadores de $\mathcal{O}(N_c^{-1})$: M_4 es una combinación lineal de dos operadores de $\mathcal{O}(N_c^0)$, M_5 es un operador de 2-cuerpos de interacción de spin-órbita que involucra el spin del carozo, M_6 es la interacción hiperfina del carozo que se sabe juega un papel central en la ruptura de simetría spin-sabor de las masas, M_7 es la interacción hiperfina entre el carozo y el quark excitado que en estados con $l = 1$ se espera que de elementos de matriz suprimidos, y M_8 es la versión de M_3 sin sabor. Los elementos de matriz de la base de operadores fueron dados (con diferentes normalizaciones) en la Tabla II de Ref. [35].

n -C	Operador	Orden en $1/N_c$
0	$M_1 = N_c \mathbf{1}$	-1
1	$M_2 = \frac{6}{5} \sqrt{6} (ls)^{[0,0]}$	
2	$M_3 = \frac{144}{5} \sqrt{6} \frac{1}{N_c} \left(l^{(2)} (gG_c)^{[2,0]} \right)^{[0,0]}$	0
2	$M_4 = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \left(- (ls)^{[0,0]} + \frac{12}{N_c+3} \left(l (tG_c)^{[1,0]} \right)^{[0,0]} \right)$	
2	$M_5 = \frac{9}{5} \frac{1}{N_c} (lS_c)^{[0,0]}$	
2	$M_6 = -\frac{9}{2\sqrt{2}} \frac{1}{N_c} (S_c S_c)^{[0,0]}$	
2	$M_7 = 3\sqrt{3} \frac{1}{N_c} (sS_c)^{[0,0]}$	
2	$M_8 = 6\sqrt{6} \frac{1}{N_c} \left(l^{(2)} (sS_c)^{[2,0]} \right)^{[0,0]}$	1

Tab. 5.2: Base de operadores de masa. Aquí usamos notación $l^{(2)} \equiv l^{[2,0]}$ para simplificar.

Dado que para $N_c = 3$ hay siete masas posibles y dos ángulos de mezcla, deben existir al menos nueve operadores de masa independientes. Hasta orden $\mathcal{O}(N_c^0)$ hay solamente tres operadores, y por lo tanto seis relaciones independientes entre los parámetros. Como fue notado en Ref. [36], dos de estas relaciones determinan los valores de los ángulos de mezcla, que son $\theta_1 = \cos^{-1}(-\sqrt{2/3}) = 2,526 \text{ rad}$ y $\theta_3 = \cos^{-1}(-\sqrt{5/6}) = 2,721 \text{ rad}$ en nuestra convención (notar que nuestra convención difiere de la usada en [32, 36, 37]). Debe notarse que usando las fórmulas de masa que incluyen correcciones de hasta $\mathcal{O}(N_c^0)$, se pueden identificar los estados de nucleón del trabajo de Pirjol y Schat [36] de la siguiente manera: $N_{1/2} = N_{1/2}^{T=1}$, $N'_{1/2} = N_{1/2}^{T=0}$, $N_{3/2} = N_{3/2}^{T=2}$, $N'_{3/2} = N_{3/2}^{T=1}$, donde T indica la torre a la cual el estado pertenece, como es explicado en [36]. Así, hay cuatro valores posibles para los ángulos de mezcla a $\mathcal{O}(N_c^0)$ (ver la Fig. 3 de su trabajo). Las mismas corresponden a

las cuatro asignaciones posibles dadas por Ec. (5.5) e implican básicamente cambiar cada ángulo en $\pi/2$.

Las restantes cuatro relaciones involucran solamente a las masas físicas y son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 M_{N_{1/2}} &= M_{N'_{3/2}} \\
 M_{N_{3/2}} &= M_{N_{5/2}} \\
 M_{N_{5/2}} - \frac{1}{10}M_{N'_{1/2}} &= 3 \left(\frac{1}{2}M_{\Delta_{1/2}} - \frac{1}{5}M_{\Delta_{3/2}} \right) \\
 M_{\Delta_{1/2}} &= \frac{1}{6}M_{N_{1/2}} + \frac{5}{6}M_{N_{5/2}}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Numéricamente, estas relaciones se satisfacen mejor con la asignación dada por el Set 3, lo que está en acuerdo con los resultados de Ref. [36] donde esta asignación fue indicada por “Assignment No.1”. Sin embargo, tal como se discute más adelante, al tener en cuenta correcciones de $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ y realizar los ajustes combinados con los decaimientos y las amplitudes EM una asignación diferente resulta favorecida. La interacción hiperfina juega un papel central al modificar los valores de los ángulos de mezcla a primer orden permitiendo así una identificación de estados diferente.

A orden $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ hay ocho operadores, lo que significa que hay una relación independiente entre los parámetros de masa que puede corroborarse. Expresada en términos de las masas físicas y los ángulos de mezcla esta relación resulta

$$\begin{aligned}
 3 \left(M_{N_{1/2}} + M_{N'_{1/2}} - 4M_{N_{3/2}} - 4M_{N'_{3/2}} + 6M_{N_{5/2}} + 8M_{\Delta_{1/2}} - 8M_{\Delta_{3/2}} \right) = & \tag{5.13} \\
 \left[13 \cos 2\theta_1 + \sqrt{32} \sin 2\theta_1 \right] \left(M_{N'_{1/2}} - M_{N_{1/2}} \right) - 4 \left[\cos 2\theta_3 - \sqrt{20} \sin 2\theta_3 \right] \left(M_{N'_{3/2}} - M_{N_{3/2}} \right).
 \end{aligned}$$

Es importante destacar que si bien la forma explícita de esta ecuación difiere de la Ec. (5) de Ref. [68], esto se debe a la manera en que las correcciones de orden mayor o igual a $1/N_c^2$ son consideradas. Por lo tanto ambas son válidas a orden $1/N_c$.

La Fig. 5.1 muestra la correlación entre los ángulos si la asignación de estados es la dada por el Set 1 en Ec. (5.5). Para las otras asignaciones posibles solo se debe sumar correspondientemente $\frac{\pi}{2}$ a los ángulos. Es interesante notar que esta figura es muy similar a la Fig. 1 (izquierda) de Ref. [68] la cual fue obtenida a partir de la correspondiente Ec. (5). En virtud de lo comentado más arriba, esto puede tomarse como una indicación de que las correcciones en $1/N_c^2$ y superiores son en verdad pequeñas.

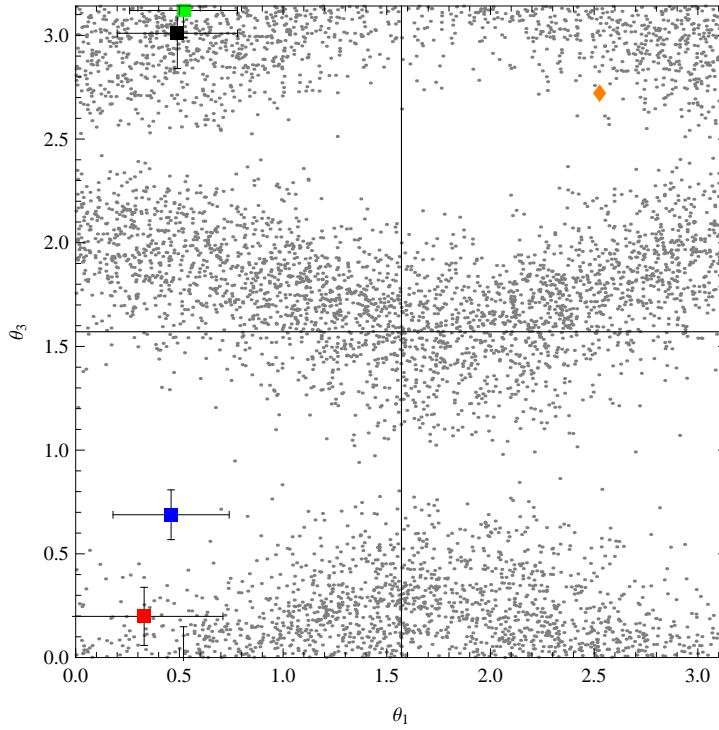


Fig. 5.1: Distribución de los valores posibles de los ángulos θ_1 y θ_3 : Los ángulos a $\mathcal{O}(N_c^0)$ están representados por el diamante naranja; los ángulos consistentes con la Ec. (5.13) usando las masas empíricas y la asignación de estados definida en (5.5) como Set 1 están representados por la distribución de puntos grises (para otras asignaciones hay que sumar $\pi/2$ correspondientemente a los ángulos), y los ángulos correspondientes al análisis global obtenido en este trabajo están representados en negro, rojo, azul y verde respectivamente para las asignaciones Set 1 al 4.

5.2.4. Decaimientos fuertes

Los anchos parciales de decaimiento de los bariones excitados de paridad negativa via emisión de un mesón π o η están dados por [47]:

$$\Gamma^{[l_P, I_P]} = \frac{k_P^{1+2l_P}}{8\pi^2 \Lambda^{2l_P}} \frac{M_B}{M_{B^*}} \left| \frac{\sum_n C_n^{[l_P, I_P]} \mathcal{B}_n(l_P, I_P, S, I, J^*, I^*, S^*)}{\sqrt{(2J^* + 1)(2I^* + 1)}} \right|^2, \quad (5.14)$$

donde el asterisco se refiere al barión excitado, $l_P = 0$ o 2 es el momento angular del mesón e I_P es su isospin, y Λ es una escala arbitraria introducida por convenciencia de forma que todas las cantidades en la suma sean adimensionales. Para los cálculos se tomó $\Lambda = 200$ MeV. El momento lineal del mesón emitido está dado por la expresión

$$k_P = \frac{\sqrt{M_{B^*}^4 + M_B^4 + m_M^4 - 2M_{B^*}^2 m_M^2 - 2M_B^2 m_M^2 - 2M_B^2 M_{B^*}^2}}{2M_{B^*}}, \quad (5.15)$$

siendo m_M la masa del correspondiente mesón. $\mathcal{B}_n(l_P, I_P, S, I, J^*, I^*, S^*)$ son elementos de matriz reducidos definidos via el teorema de Wigner-Eckart como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \langle S, S_3; I, I_3 \mid \left(\mathcal{B}_{[m_P, I_{P_3}]}^{[l_P, I_P]} \right)_n \mid J^*, J_3^*; I^*, I_3^*; S^* \rangle_{\mathbf{MS}} &= \frac{(-1)^{l_P - J^* + S + I_P - I^* + I}}{\sqrt{(2S+1)(2I+1)}} \times \\ &\langle l_P, m_P; J^*, J_3^* \mid S, S_3 \rangle \langle I_P, I_{P_3}; I^*, I_3^* \mid I = S, I_3 \rangle \mathcal{B}_n(l_P, I_P, S, I, J^*, I^*, S^*). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Los operadores $\left(\mathcal{B}_{[m_P, I_{P_3}]}^{[l_P, I_P]} \right)_n$ provienen del hecho que el operador bariónico admite una expansión en $1/N_c$ y tiene la forma general:

$$\mathcal{B}_{[m_P, I_{P_3}]}^{[l_P, I_P]} = \left(\frac{k_P}{\Lambda} \right)^{l_P} \sum_n C_n^{[l_P, I_P]}(k_P) \left(\mathcal{B}_{[m_P, I_{P_3}]}^{[l_P, I_P]} \right)_n, \quad (5.17)$$

donde el factor $(k_P/\Lambda)^{l_P}$ se incluye para tener en cuenta la dependencia con el momento dominante del mesón en la función de onda. Los coeficientes adimensionales $C_n^{[l_P, I_P]}$ son desconocidos y tienen información de la dinámica del proceso.

Estos elementos de matriz reducidos se pueden calcular en términos de los elementos de matriz reducidos de los operadores de spin-sabor, a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(l_P, I_P, S, I, J^*, I^*) &= (-1)^{j+J^*+l_P+J+1} \widehat{\mathcal{J}}^* \widehat{l}_P \begin{Bmatrix} J^* & S^* & l^* \\ j & l_P & S \end{Bmatrix} \\ &\times_{\mathbf{S}} \langle S; I \mid \mathcal{G}_n^{[j, I_P]} \mid S^*; I^* \rangle_{\mathbf{MS}}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde hemos tomado en cuenta que $\vec{J}^* = \vec{S}^* + \vec{l}^*$, siendo $l^* = 1$ en el presente caso. Aquí $\widehat{t} \equiv \sqrt{2t+1}$.

Los operadores $\mathcal{G}_n^{[j, I_P]}$ son operadores de spin-sabor que producen la transición desde la representación mixta-simétrica de $SU(4)$ hacia la irrep simétrica.

Debe notarse que las fórmulas de arriba son válidas si los estados físicos tienen spin del quark S^* bien definido. Sin embargo, los estados físicos son mezclas de los estados de spin de quarks $S^* = J^* \pm 1/2$, y por lo tanto deben modificarse al tener en cuenta las mezclas correspondientes de los elementos de matriz reducidos. Esto por supuesto solo ocurre para los estados $N_{1/2}$ y $N_{3/2}$, lo cual hace que los correspondientes anchos parciales dependan de θ_1 y θ_3 .

Notemos que el análisis estará restringido a los decaimientos onda S y onda D, dado que la única transición posible onda G (decaimiento $N_{5/2} \rightarrow \Delta\pi$) aún no ha sido determinada experimentalmente.

La construcción de la base de operadores $\mathcal{B}_n^{[l_P, I_P]}$ sigue pasos similares a los utilizados en el caso de las masas solo que ahora los operadores de spin-sabor considerados deben conectar las representaciones mixta-simétrica con la simétrica. Dado que los generadores del grupo de spin-sabor actuando sobre las funciones de onda completas no pueden producir esta transición se obtiene un conjunto de reglas adicionales. Estas reglas son:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\Lambda_c \\ (\Lambda_c)_1 (\Lambda_c)_2 &= -\lambda_1 (\Lambda_c)_2 - \lambda_2 (\Lambda_c)_1 + \text{operador 1-C}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

En consecuencia, solo los siguientes tipos de operadores deben ser considerados

$$1\text{-C} \quad \lambda \quad (5.20)$$

$$2\text{-C} \quad \frac{1}{N_c} \lambda_1 (\Lambda_c)_2 \quad (5.21)$$

$$3\text{-C} \quad \frac{1}{N_c^2} \lambda_1 (\Lambda_c)_2 (\Lambda_c)_3 \quad (5.22)$$

Mesón/onda parcial	$n\text{-C}$	Operador	$\mathcal{O}(1/N_c)$
π Onda-S	1	$O_1^{[0,1]} = (\xi g)^{[0,1]}$	0
	2	$O_2^{[0,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s T_c)^{[1,1]} \right)^{[0,1]}$	1
		$O_3^{[0,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (t S_c)^{[1,1]} \right)^{[0,1]}$	1
		$O_4^{[0,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g S_c)^{[1,1]} \right)^{[0,1]}$	1
π Onda-D	1	$O_1^{[2,1]} = (\xi g)^{[2,1]}$	0
	2	$O_2^{[2,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s T_c)^{[1,1]} \right)^{[2,1]}$	1
		$O_3^{[2,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (t S_c)^{[1,1]} \right)^{[2,1]}$	1
		$O_4^{[2,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g S_c)^{[1,1]} \right)^{[2,1]}$	1
	3	$O_5^{[2,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g S_c)^{[2,1]} \right)^{[2,1]}$	1
		$O_6^{[2,1]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[2,1]} \right)^{[2,1]}$	0
		$O_7^{[2,1]} = \frac{1}{N_c^2} \left(\xi \left(s (\{S_c, G_c\})^{[2,1]} \right)^{[2,1]} \right)^{[2,1]}$	1
	$O_8^{[2,1]} = \frac{1}{N_c^2} \left(\xi \left(s (\{S_c, G_c\})^{[2,1]} \right)^{[3,1]} \right)^{[2,1]}$	1	
η Onda-S	1	$O_1^{[0,0]} = (\xi s)^{[0,0]}$	0
	2	$O_2^{[0,0]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[1,0]} \right)^{[0,0]}$	1
η Onda-D	1	$O_1^{[2,0]} = (\xi s)^{[2,0]}$	0
	2	$O_2^{[2,0]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[1,0]} \right)^{[2,0]}$	1
		$O_3^{[2,0]} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[2,0]} \right)^{[2,0]}$	1

Tab. 5.3: Base de operadores de los decaimientos fuertes tomada de [47] y reproducida en [78]. Los índices superiores $^{[L,I]}$ denotan momento angular e isospin y como están acoplados.

La base de operadores para los decaimientos fuertes $\mathcal{B}_n^{[l_P, I_P]} = \alpha_n^{[l_P, I_P]} \mathcal{O}_n^{[l_P, I_P]}$ hasta orden $1/N_c$ ha sido obtenida en [47], y se muestra aquí en la Tabla 5.3. El vector ξ provoca la transición de la irrep de $O(3)$ (orbital) $l = 1$ (barión excitado) a la irrep $l = 0$ (barión no-excitado). Está definido por sus elementos de matriz reducidos: $\langle l = 0 || \xi || l = 1 \rangle = \sqrt{3}$ [53]. Los coeficientes $\alpha_n^{[l_P, I_P]}$ se utilizan para definir operadores normalizados de tal forma que, para $N_c = 3$, el elemento de matriz más grande sea igual a 1 para operadores de $\mathcal{O}(N_c^0)$ e igual $1/3$ para operadores de $\mathcal{O}(1/N_c)$.

Todos los operadores $\mathcal{O}(N_c^0)$ son de 1-cuerpo excepto por uno de los operadores de onda D con emisión de un π que es de 2-cuerpos. Para decaimientos onda S con emisión de π hay un $\mathcal{O}(N_c^0)$ y tres $\mathcal{O}(N_c^{-1})$. Para decaimientos onda D con emisión de π hay dos $\mathcal{O}(N_c^0)$ y seis $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ (dos de los cuales son de 3-cuerpos). Para decaimientos onda S con emisión de η hay un $\mathcal{O}(N_c^0)$ y un $\mathcal{O}(N_c^{-1})$.

5.2.5. Amplitudes de helicidad electromagnética

Las amplitudes de helicidad asociadas con la producción de fotones por el decaimiento de bariones excitados se indican usualmente por A_λ^N donde N es el estado inicial del nucleón y λ es la helicidad total como explicaremos en breve. Estas amplitudes de helicidad pueden expandirse en términos de las componentes multipolares eléctrica y magnética A_λ^{ML} y A_λ^{EL} respectivamente. Las componentes multipolares de las amplitudes de helicidad EM de los estados $[20', 1^-]$ pueden expresarse en términos de los elementos de matriz de los operadores efectivos como sigue [53]:

$$\begin{aligned}
 A_\lambda^{ML} &= \sqrt{\frac{3\alpha N_c}{4\omega}} (-1)^{L+1} \eta(B^*) \sum_{n,I} C_{n,L}^{[ML,I]}(\omega) \\
 &\quad \times \left\langle J^*, \lambda; I^*, I_3; S^* \mid (\mathcal{B}_n)_{[1,0]}^{[L,I]} \mid 1/2, \lambda - 1; 1/2, I_3 \right\rangle, \\
 A_\lambda^{EL} &= \sqrt{\frac{3\alpha N_c}{4\omega}} (-1)^L \eta(B^*) \sum_{n,I} \left[\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} C_{n,L-1}^{[EL,I]}(\omega) + \sqrt{\frac{L}{2L+1}} C_{n,L+1}^{[EL,I]}(\omega) \right] \\
 &\quad \times \left\langle J^*, \lambda; I^*, I_3; S^* \mid (\mathcal{B}_n)_{[1,0]}^{[L,I]} \mid 1/2, \lambda - 1; 1/2, I_3 \right\rangle, \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Notar que, debido a la conservación de la paridad, solamente los multipolos $E1$, $M2$ y $E3$ están permitidos. Por otra parte, $\lambda = 1/2, 3/2$ es la helicidad definida en la dirección del versor \hat{z} que coincide con el momento del fotón, y $\omega = (M_{B^*}^2 - M_N^2)/2M_{B^*}$ es la energía de este último en el sistema de referencia del barión excitado B^* . Estas amplitudes corresponden a la definición estándar usada por el “Particle Data Group” [62], que incluye un factor de un signo $\eta(B^*)$ que se deriva de la amplitud de decaimiento fuerte del barión excitado a un estado πN haciendola independiente de la convención de fases usada para definir los estados excitados. Los signos

$$\eta(B^*) = (-1)^{J^*-1/2} \text{sign}(\langle l_\pi N || H_{QCD} || J^* I^* \rangle) \quad (5.24)$$

son por otro lado dependientes de la convención. La suma sobre n es sobre todos los operadores de base disponibles con los números cuánticos $[L, I]$ apropiados. El factor $\sqrt{N_c}$ aparece como es usual para elementos de matriz de transición entre estados de barión excitado y fundamental [69]. Para los multipolos eléctricos hay una combinación de los coeficientes $C_{n,L-1}^{[EL,I]}$ y $C_{n,L+1}^{[EL,I]}$, que debido a que los operadores que aparecen en esos multipolos no aparecen en los multipolos magnéticos, se puede reemplazar por un único término sin ninguna pérdida de generalidad. Por lo tanto, en lo que sigue solamente usaremos un coeficiente $C_{n,L-1}^{[EL,I]}$. Estos y los coeficientes $C_{n,L}^{[ML,I]}$ se determinarán a partir de los ajustes a los valores empíricos de las amplitudes de helicidad. Con el fin de simplificar la notación los coeficientes a continuación se indicarán como $C_n^{[XL,I]}$ y los operadores como $XL_n^{(I)}$, donde $X = E$ o M , e $I = 0, 1$.

Como en el caso de los decaimientos, se deben tener en cuenta los efectos de las mezclas de estados para las amplitudes físicas.

Las reglas de construcción de operadores de amplitud de helicidad electromagnética siguen ideas similares a las expuestas en los dos casos anteriores. La base correspondiente de operadores y sus elementos de matriz asociados fueron obtenidos en Ref. [53]. Por conveniencia la lista está dada en la Tabla 5.4 a continuación. En dicha lista los operadores de segundo orden $E1_5^{(1)}$, $E1_6^{(1)}$, y $M2_4^{(1)}$ involucran combinaciones lineales con operadores de orden N_c^0 con el objetivo de eliminar las proyecciones de los primeros en el subespacio de estos los últimos.

Al igual que para el caso de las masas, que son lineales en los acoplamientos efectivos, hay relaciones lineales para los foto-acoplamientos que son independientes de estos acoplamientos efectivos. Las relaciones a primer orden que involucran tanto bariones neutros como cargados aparecen en el Apéndice II de Ref. [78]. Actualmente la verificación de los mismos resulta dificultosa debido a que los errores en los valores experimentales de las amplitudes son aún muy grandes.

Operador	$\mathcal{O}(1/N_c)$	n -C
$E1_1^{(0)} = (\xi s)^{[1,0]}$	0	1
$E1_2^{(0)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[0,0]} \right)^{[1,0]}$	1	2
$E1_3^{(0)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[1,0]} \right)^{[1,0]}$	1	2
$E1_4^{(0)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[2,0]} \right)^{[1,0]}$	1	2
$E1_1^{(1)} = (\xi t)^{[1,1]}$	0	1
$E1_2^{(1)} = (\xi g)^{[1,1]}$	0	1
$E1_3^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[2,1]} \right)^{[1,1]}$	0	2
$E1_4^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s T_c)^{[1,1]} \right)^{[1,1]}$	1	2
$E1_5^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[0,1]} \right)^{[1,1]} + \frac{1}{4\sqrt{3}} E1_1^{(1)}$	1	2
$E1_6^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[1,1]} \right)^{[1,1]} + \frac{1}{2\sqrt{2}} E1_2^{(1)}$	1	2
$M2_1^{(0)} = (\xi s)^{[2,0]}$	0	1
$M2_2^{(0)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[1,0]} \right)^{[2,0]}$	1	2
$M2_3^{(0)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[2,0]} \right)^{[2,0]}$	1	2
$M2_1^{(1)} = (\xi g)^{[2,1]}$	0	1
$M2_2^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[2,1]} \right)^{[2,1]}$	0	2
$M2_3^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s T_c)^{[1,1]} \right)^{[2,1]}$	1	2
$M2_4^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[1,1]} \right)^{[2,1]} + \frac{1}{2\sqrt{2}} M2_1^{(1)}$	1	2
$E3_1^{(0)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s S_c)^{[2,0]} \right)^{[3,0]}$	1	2
$E3_1^{(1)} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G_c)^{[2,1]} \right)^{[3,1]}$	0	2

Tab. 5.4: Base de operadores EM. Notar que el índice superior indica el isospin del operador.

5.3. Análisis y discusión de los resultados

Como se discutió en la introducción a este capítulo, el objetivo central del mismo consiste en llevar a cabo un análisis global y consistente de las masas, los decaimientos fuertes y las amplitudes de helicidad EM asociadas con los bariones no-extraños de paridad negativa y energías de excitación más bajas.

El procedimiento utilizado para realizar los ajustes es el siguiente. Se comienza por proveer un cierto conjunto de valores iniciales para los parámetros asociados con los operadores de masas. A partir de ellos se obtienen los valores teóricos de las mismas junto con los ángulos de mezcla, que dependen de los mismos parámetros que las masas. Luego, con estos valores de los ángulos y un conjunto de valores iniciales para los parámetros de los decaimientos fuertes, se obtienen las predicciones teóricas para los anchos fuertes y los signos asociados para el cálculo de las amplitudes de helicidad EM, Ec. (5.24). Finalmente, usando los mismos ángulos de mezcla junto con los signos fuertes anteriormente determinados y un conjunto de valores para los parámetros asociados a las amplitudes de helicidad, se obtienen las predicciones teóricas para las amplitudes de helicidad EM. Con todas estas predicciones teóricas f_i^{teo} , y los valores empíricos considerados f_i^{emp} y sus errores asociados dados en la Tabla 5.1, se calcula la función $\chi_{gdl}^2 = \sum_i [(f_i^{teo} - f_i^{emp})/\Delta f_i^{emp}]^2/n_{gdl}$. Aquí, $i = 1, \dots, N_{emp}$ corre por los diferentes valores empíricos conocidos que se utilizaron para el cálculo y $n_{gdl} = N_{emp} - N_{pi}$, donde N_{pi} es el número total de parámetros independientes usados en el ajuste. Este procedimiento se repite de forma iterativa usando diferentes conjuntos de valores para los parámetros de masas, decaimientos fuertes y amplitudes de helicidad hasta que se encuentra un mínimo (global) de la función χ_{gdl}^2 . La minimización se realiza utilizando el programa MINUIT [66].

Usando el procedimiento descrito más arriba, se realizaron ajustes para las cuatro asignaciones posibles de estados Ec. (5.5). Se halla que en todos los casos se pueden obtener valores de $\chi_{gdl}^2 < 1$. Sin embargo, estos ajustes tienen características cualitativamente bien diferentes. Esto puede verse resumido en las Figs. 5.2 y 5.3, que representan a los coeficientes asociados con los operadores de masas, decaimientos fuertes y amplitudes de helicidad EM respectivamente.

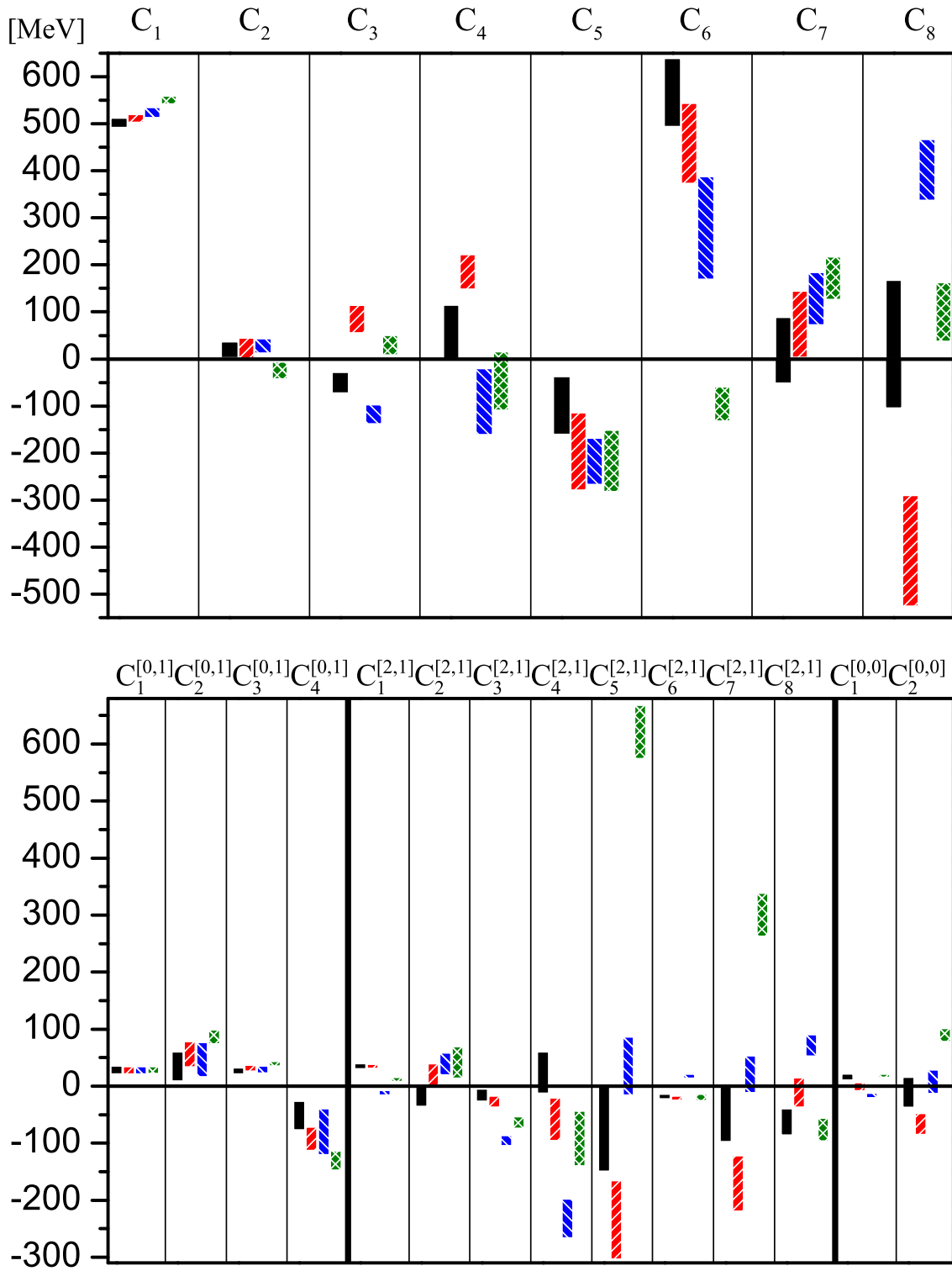


Fig. 5.2: Coeficientes con errores obtenidos del ajuste global para las diferentes asignaciones: negro, rojo, azul y verde respectivamente para los Sets 1 al 4.

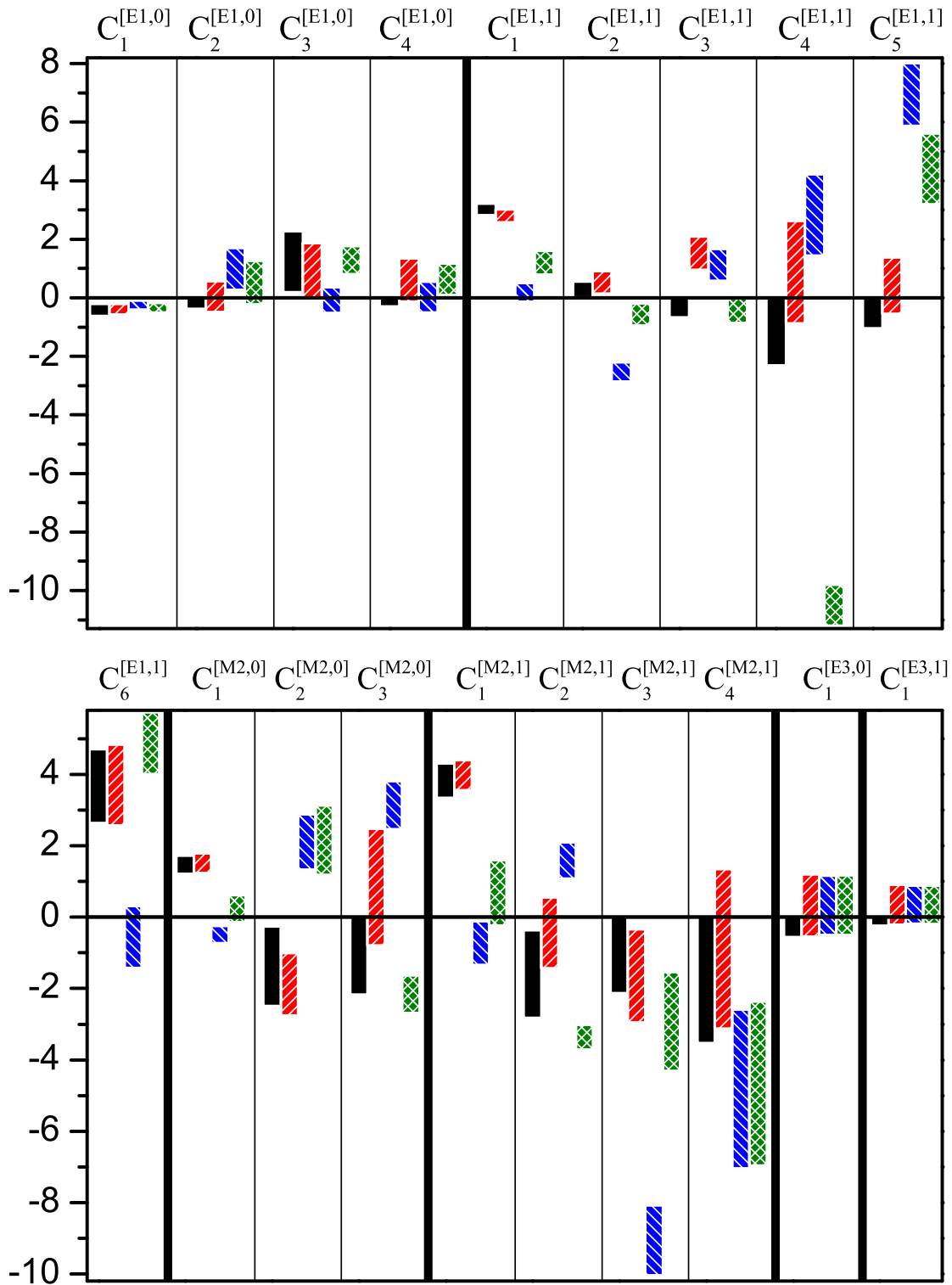


Fig. 5.3: Coeficientes con errores obtenidos del ajuste global para las diferentes asignaciones de estados: negro, rojo, azul y verde respectivamente para los Sets 1 a 4.

A fin de decidir cuales asignaciones son aceptables desde un punto de vista físico es necesario considerar un cierto número de criterios. El primero tiene que ver con la naturalidad de los coeficientes. De hecho, si se asume que la expansión en $1/N_c$ es un marco apropiado, todos los coeficientes deben ser “naturales” en magnitud, es decir, tener una correlación directa con el orden de la expansión. Debe notarse que en el caso de los decaimientos fuertes y las amplitudes de helicidad este criterio debe aplicarse a cada onda parcial por separado. Un segundo criterio está relacionado con la idea que, tanto en las amplitudes fuertes como en las EMs, cuando haya operadores de 1-cuerpo que puedan contribuir a la expansión, estos no deben quedar suprimidos con respecto a operadores de 2-cuerpos. Esta idea se basa en el hecho que en las descripciones basadas en modelos de quarks de estas amplitudes, donde se asume por construcción el predominio de los operadores de 1-cuerpo, son bastante exitosas. Finalmente, el tercer criterio tiene en cuenta la importancia de la interacción hiperfina en la descripción de las masas. De hecho, esta interacción juega un papel crucial en la explicación de las masas de los singletes $\Lambda(1405)$ y $\Lambda(1520)$, cuyas masas son “empujadas hacia abajo” por la interacción hiperfina como se muestra en [39, 40, 72]. El resultado de la aplicación de estos criterios a los resultados que se muestran en las Figs. 5.2 y 5.3 está resumido en la Tabla 5.5. De esta tabla se puede concluir que la asignación preferida para los estados es la dada por el Set 1.

Set		1	2	3	4
Naturalidad	M	✓	✓	✓	✓
	D	✓	✓	×	×
	EM	✓	✓	✓	×
Dominio 1-C	D	✓	×	×	×
	EM	✓	✓	×	×
Térm. HF	M	✓	✓	✓	×

Tab. 5.5: Resumen de la aplicación de los criterios discutidos en el texto a los resultados mostrados en las Figs. 5.2 y 5.3. M , D y EM son para masas, decaimientos y amplitudes de helicidad EM respectivamente, y HF es para hiperfino.

Esta asignación es la que ha sido adoptada en los trabajos previos de modelos de quarks [70, 72, 73] y en varios análisis en la expansión $1/N_c$, [28, 34, 35, 36, 47, 53]. El análisis aquí presentado fortalece aún más la elección de esta asignación, la cual será utilizada en lo que resta de este trabajo de tesis.

Los resultados numéricos para los coeficientes de los operadores correspondientes al análisis dado por el Set 1 están dados en la Tabla 5.3. Se consideraron dos posibilidades: el Ajuste 1

	Masa [MeV]		Decaimientos			amplitudes EM		
	A 1	A 2		A 1	A 2	A 1	A 2	
C_1	497(5)	497(3)	$C_1^{[0,1]}$	23(2)	22(2)	$C_1^{[E1,0]}$	-0.4(0.2)	-0.4(0.2)
C_2	20(17)	28(11)	$C_2^{[0,1]}$	35(27)	25(12)	$C_2^{[E1,0]}$	0.2(0.6)	-
C_3	-50(22)	-48(10)	$C_3^{[0,1]}$	27(6)	26(5)	$C_3^{[E1,0]}$	1(1)	0.7(0.7)
C_4	57(58)	32(27)	$C_4^{[0,1]}$	-52(26)	-41(16)	$C_4^{[E1,0]}$	0.4(0.7)	-
C_5	-99(61)	-98(32)	$C_1^{[2,1]}$	3.6(0.2)	3.6(0.2)	$C_1^{[E1,1]}$	3.0(0.2)	3.1(0.2)
C_6	567(72)	577(41)	$C_2^{[2,1]}$	-2(2)	-	$C_2^{[E1,1]}$	0.3(0.3)	0.3(0.2)
C_7	-4(13)	-	$C_3^{[2,1]}$	-2(1)	-2(1)	$C_3^{[E1,1]}$	-0.1(0.6)	-
C_8	3(11)	-	$C_4^{[2,1]}$	2(4)	-	$C_4^{[E1,1]}$	0(2)	-
Ángulos			$C_5^{[2,1]}$	-8(8)	-	$C_5^{[E1,1]}$	-0.1(0.9)	-
Ajuste 1			$C_6^{[2,1]}$	-1.6(0.2)	-1.5(0.2)	$C_6^{[E1,1]}$	4(1)	3.8(0.7)
Ajuste 2			$C_7^{[2,1]}$	-5(5)	-	$C_1^{[M2,0]}$	1.5(0.3)	1.5(0.3)
θ_1	0.49(0.29)	0.40(0.13)	$C_8^{[2,1]}$	-6(2)	-7(2)	$C_2^{[M2,0]}$	-1(1)	-1.6(0.8)
θ_3	3.01(0.17)	2.96(0.05)	$C_1^{[0,0]}$	16(6)	18(2)	$C_3^{[M2,0]}$	0(2)	-
Ajuste 1			$C_2^{[0,0]}$	-11(27)	-	$C_1^{[M2,1]}$	3.8(0.5)	3.8(0.4)
Ajuste 2						$C_2^{[M2,1]}$	-1.6(1.2)	-2.2(0.6)
χ_{gdl}^2	0.39	0.34				$C_3^{[M2,1]}$	-1(1)	-
gdl	4	21				$C_4^{[M2,1]}$	-1(2)	-
						$C_1^{[E3,0]}$	0.3(0.9)	-
						$C_1^{[E3,1]}$	0.3(0.6)	-

Tab. 5.6: Resultados de los ajustes para el Set 1. Los parámetros ajustados son aquellos asociados con las bases de operadores para las masas, los decaimientos y las amplitudes de helicidad. Los parámetros de los últimos dos son adimensionales. Los resultados para dos de los ajustes son dados. En el Ajuste 1 (A 1) todos los operadores fueron incluidos mientras que para el Ajuste 2 (A 2) los operadores cuyos coeficientes son compatibles con cero fueron desestimados.

incluye todos los operadores independientes que aparecen en las bases de cada observable, mientras que en el Ajuste 2, aquellos operadores cuyos coeficientes son compatibles con cero fueron removidos. Más específicamente, el Ajuste 2 se obtiene a partir de tomar los resultados

del Ajuste 1 y remover aquellos operadores cuyos coeficientes son compatibles con cero de manera subsecuente. En el caso en que en algún paso intermedio hubiera más de un operador en esta situación, se removieron aquellos con mayor error relativo.

		Masas [MeV]		
Partícula		Empírica	Ajuste 1	Ajuste 2
$N(1535)$		1538(18)	1539	1539
$N(1520)$		1523(8)	1523	1523
$N(1650)$		1660(20)	1659	1658
$N(1700)$		1700(50)	1697	1718
$N(1675)$		1678(8)	1678	1678
$\Delta(1620)$		1645(30)	1651	1646
$\Delta(1700)$		1720(50)	1703	1701
		Ancho parcial [MeV]		
Canal		Empírico	Ajuste 1	Ajuste 2
π Onda-S	$N(1535) \rightarrow \pi N$	68(19)	61.5	61.4
	$N(1520) \rightarrow \pi \Delta$	17(6)	15.0	14.6
	$N(1650) \rightarrow \pi N$	105(37)	95.4	88.3
	$N(1700) \rightarrow \pi \Delta$	88(79)	133	149
	$\Delta(1620) \rightarrow \pi N$	35(7)	35.6	36.3
	$\Delta(1700) \rightarrow \pi \Delta$	113(53)	137	128
π Onda-D	$N(1535) \rightarrow \pi \Delta$	3(3)	2.0	2.02
	$N(1520) \rightarrow \pi N$	68(9)	66.0	72.6
	$N(1520) \rightarrow \pi \Delta$	14(3)	12.4	9.36
	$N(1650) \rightarrow \pi \Delta$	19(19)	22.8	19.5
	$N(1700) \rightarrow \pi N$	21(13)	20.5	26.0
	$N(1700) \rightarrow \pi \Delta$	18(19)	20.4	24.2
	$N(1675) \rightarrow \pi N$	59(10)	59.7	57.7
	$N(1675) \rightarrow \pi \Delta$	73(24)	82.0	58.2
	$\Delta(1620) \rightarrow \pi \Delta$	64(22)	75.3	74.1
$\Delta(1700) \rightarrow \pi N$	45(21)	44.7	47.0	
$\Delta(1700) \rightarrow \pi \Delta$	30(18)	33.5	30.2	
η Onda-S	$N(1535) \rightarrow \eta N$	63(18)	63.0	65.3
	$N(1650) \rightarrow \eta N$	15(8)	15.0	12.6

Tab. 5.7: Resultados para las masas y los anchos parciales para los ajustes del Set 1.

	Amplitud EM $[10^{-3} \times \text{GeV}^{-\frac{1}{2}}]$			$\eta(B^*)$
	Empírica	Ajuste 1	Ajuste 2	
$A_{\frac{1}{2}}^p[N(1535)]$	90(30)	90.0	92.8	1
$A_{\frac{1}{2}}^n[N(1535)]$	-46(27)	-46.0	-47.7	1
$A_{\frac{1}{2}}^p[N(1520)]$	-24(9)	-24.0	-26.1	-1
$A_{\frac{1}{2}}^n[N(1520)]$	-59(9)	-59.0	-57.5	-1
$A_{\frac{3}{2}}^p[N(1520)]$	150(15)	150	151	-1
$A_{\frac{3}{2}}^n[N(1520)]$	-139(11)	-139	-142	-1
$A_{\frac{1}{2}}^p[N(1650)]$	53(16)	53.0	43.0	-1
$A_{\frac{1}{2}}^n[N(1650)]$	-15(21)	-15.0	-17.5	-1
$A_{\frac{1}{2}}^p[N(1700)]$	-18(13)	-18.0	-17.2	1
$A_{\frac{1}{2}}^n[N(1700)]$	0(50)	0.0	30.9	1
$A_{\frac{3}{2}}^p[N(1700)]$	-2(24)	-2.0	2.5	1
$A_{\frac{3}{2}}^n[N(1700)]$	-3(44)	-3.1	14.2	1
$A_{\frac{1}{2}}^p[N(1675)]$	19(8)	19.0	13.0	-1
$A_{\frac{1}{2}}^n[N(1675)]$	-43(12)	-43.0	-40.0	-1
$A_{\frac{3}{2}}^p[N(1675)]$	15(9)	15.0	18.3	-1
$A_{\frac{3}{2}}^n[N(1675)]$	-58(13)	-58.0	-56.6	-1
$A_{\frac{1}{2}}^N[\Delta(1620)]$	27(11)	27.0	27.2	1
$A_{\frac{1}{2}}^N[\Delta(1700)]$	104(15)	104	96.7	1
$A_{\frac{3}{2}}^N[\Delta(1700)]$	85(22)	85.0	95.5	1

Tab. 5.8: Resultados para las amplitudes EM de los ajustes al Set 1. La última columna muestra los signos de la amplitud fuerte correspondiente necesaria en la Ec. (5.23).

Es interesante comparar los coeficientes obtenidos en el presente análisis global con aquellos obtenidos en Ref. [35, 47, 53] en donde los ajustes fueron realizados de manera independiente para cada propiedad bariónica. Al hacer esta comparación se debe tener en mente que algunos valores empíricos fueron considerados a pesar de sus estimaciones empíricas no son sumamente confiables. En el caso de los decaimientos fuertes se observa que salvo por algunas excepciones los coeficientes obtenidos en el análisis global y el independiente son bastante similares cuando se tienen en cuenta las barras de error. Una excepción son los coeficientes $C_i^{[0,1]}$, con $i = 2, 3, 4$, que muestran una degeneración en el análisis independiente. Tal degeneración desaparece en el presente análisis global. Las otras excepciones están relacionadas con los coeficientes $C_{7,8}^{[2,1]}$ asociados a operadores de 3-cuerpos que no fueron

tenidos en cuenta en Ref. [47]. Mientras que en este análisis se observa que efectivamente $C_7^{[2,1]}$ es compatible con cero, $C_8^{[2,1]}$ resulta ser comparable al coeficiente del operador de 1-cuerpo correspondiente. Por otro lado, notemos que $C_2^{[2,1]}$ que era no-nulo en análisis previos, resulta ser compatible con cero en nuestro estudio. Finalmente, $C_2^{[0,0]}$ que no estaba incluido en los análisis independientes es también compatible con cero aquí. Haciendo una comparación entre el presente trabajo y trabajos anteriores en decaimientos EM [53], se nota que los valores de los coeficientes no cambian de manera apreciable. En la mayoría de los casos los valores medios son muy similares, y se solapan con los errores. Es interesante recordar la regla de Moorhouse [74], que establece que para transiciones EM de los estados del protón excitado con spin del quark $S^* = 3/2$ están suprimidos. La explicación de la regla basada en el modelo de quarks proviene de considerar el acoplamiento del fotón a los quarks constituyentes a través de la fuerza isoescalar/isovectorial determinada por las cargas de los quarks. La mezcla de estados y la presencia de operadores de 2-cuerpos aportan violaciones a la regla. La Tabla 5.9 da el contenido del spin del quarks de los estados del protón que se determinan de los ángulos de mezcla obtenidos en los ajustes del Set 1 y marcados con una tilde sin la regla se satisface apreciablemente. Esta verificación representa una buena prueba para la identificación de los estados correspondientes al Set 1. Para los Sets 3 y 4 la única manera en que las supresiones actúan es a través de términos extra en los operadores de 2-cuerpos como se muestra en la Fig. 5.3, que se espera que sea no-natural. El caso del $p(1675)$ es una prueba sin ambigüedades ya que no se ve afectado por las mezclas [74].

Protón excitado	$(S^* = \frac{1}{2}, S^* = \frac{3}{2})$ contenido	Regla de Moorhouse
p(1535)	(0.90, 0.43)	no suprimido
p(1650)	(-0.43, 0.90)	✓
p(1520)	(0.99, -0.13)	no suprimido
p(1700)	(0.13, 0.99)	✓
p(1675)	(0.0, 1.0)	✓

Tab. 5.9: Comprobación de la regla de Moorhouse para las amplitudes de helicidad del protón.

Para los decaimientos fuertes se obtienen algunas reglas de selección a primer orden, i.e., cuando los ángulos de mezcla son los obtenidos a partir de la expansión de las masas hasta el orden $\mathcal{O}(N_c^0)$ y a primer orden en las amplitudes de decaimiento (operadores de 1-cuerpo). Por ejemplo, los decaimientos onda S $N_{1/2} \rightarrow \eta N$, $N'_{1/2} \rightarrow \pi N$, $N_{3/2} \rightarrow \pi \Delta$, y los decaimientos onda D $N'_{1/2} \rightarrow \pi \Delta$ están suprimidos. Esto puede corroborarse usando las Tablas D.2, D.3 y D.4 del Apéndice D. Ya que el ángulo θ_1 cambia en más que $\pi/2$ al pasar del primer orden al segundo orden, se espera que para los nucleones $J = 1/2$ las reglas de selección se no se satisfagan bien. De hecho los decaimientos $N_{1/2} \rightarrow \eta N$, $N'_{1/2} \rightarrow \pi N$ no están nada suprimidos, mientras que el decaimiento onda D $N'_{1/2} \rightarrow \pi \Delta$ está bastante

suprimido con respecto al correspondiente onda S, $N'_{1/2} \rightarrow \pi N$, pero esto es simplemente debido a que es una onda parcial superior. El cambio importante en el ángulo θ_1 de primer orden a segundo orden se debe de al hecho que los operadores de masas de orden $\mathcal{O}(N_c^0)$ son bastante débiles y el operador de masas hiperfino (segundo orden) es bastante fuerte, llevando a un reordenamiento considerable en la composición de los estados del nucleón $J = 1/2$. Finalmente la supresión del decaimiento onda S $N_{3/2} \rightarrow \pi\Delta$ debería satisfacerse bien porque el ángulo θ_3 no cambia apreciablemente de primer orden a segundo orden. Este parece ser de hecho el caso ya que el decaimiento onda D $N_{3/2} \rightarrow \pi\Delta$ tiene una tasa similar al mismo decaimiento onda S.

6. ANÁLISIS INDEPENDIENTE DE LOS DECAIMIENTOS FUERTES DEL MULTIPLETE $[70, 1^-]$ COMPLETO

6.1. Introducción

Dados los resultados obtenidos en el capítulo anterior es de interés generalizar las ideas allí aplicadas al caso en que se consideran también bariones con extrañeza. Sin embargo, dada la ausencia de trabajos previos en donde se hubieran analizado en forma independiente los decaimientos fuertes asociados, es necesario realizar primeramente este tipo de estudios. Esto será considerado en el presente capítulo.

6.2. Expansión $1/N_c$ para bariones con simetría $SU(3)$ de sabor

En esta sección presentamos las herramientas para la aplicación de la expansión en $1/N_c$ al análisis de los anchos parciales de decaimiento del multiplete completo de bariones $[70, 1^-]$ de $SU(6) \times O(3)$. En particular, recordaremos brevemente la construcción de la base de estados y el formalismo para los decaimientos.

Por los motivos ya explicados en el Capítulo 5 haremos aquí también la aproximación de despreciar configuraciones de mezclas (i.e., mezclas de $[\mathbf{MS}, 1^-]$ con otros multipletes). Los estados del multiplete $[\mathbf{MS}, 1^-]$ se construyen de manera totalmente análoga a lo descrito en capítulos anteriores: un estado de la representación fundamental (quark excitado) se acopla con un estado de la representación totalmente simétrica \mathbf{S} (carozo) con número bariónico $N_c - 1$. El carozo tiene spin $S_c = S + \eta$ donde S es el spin del estado \mathbf{MS} de $SU(6)$ y $\eta = \pm 1/2$. La representación de $SU(3)$ del carozo está determinada por S_c y está dada por $R_c = (p_c, q_c) = (2S_c, \frac{N_c - 1 - 2S_c}{2})$. Los estados de $[\mathbf{MS}, l^-]$ se leen entonces [34, 35, 39, 40, 67],

$$|JJ_3; R(Y, I I_3); S\rangle_{\mathbf{MS}} = \sum_{\eta=\pm 1/2} C_{\mathbf{MS}}(R, S, \eta) \langle lm, S S_3 | JJ_3\rangle \langle S_c S_{c3}, 1/2 s_3 | SS_3\rangle \times$$

$$\left\langle \begin{array}{c} R_c \\ Y_c I_c I_{c3} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{3} \\ y i i_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} R \\ Y I I_3 \end{array} \right. \right\rangle |S_c S_{c3}; R_c(Y_c, I_c I_{c3})\rangle |1/2 s_3; \mathbf{3}(y, i i_3)\rangle |lm\rangle \quad (6.1)$$

donde está implícita la suma sobre índices repetidos, y $S_c = S + \eta$ en la suma. l es el número cuántico del barión con respecto al grupo $O(3)$, igual a 1 en nuestro caso, y J es el spin del barión. R indica la representación de $SU(3)$ del barión. Los coeficientes $C_{\mathbf{MS}}(R, S, \eta)$ están dados por Ec. (4.34), en donde es necesario reemplazar I por I_R , que denota el isospin del estado con extrañeza cero en la representación irreducible R de $SU(3)$. Para $R = (p, q)$,

$I_R = p/2$. En lo que sigue indicaremos algunos números cuánticos de los bariones excitados con un supraíndice $*$.

Para $N_c = 3$ se obtienen los estados del **70**-plete $l^P = 1^-$, que como se mencionó en el Capítulo 5, consisten en los siguientes multipletes ${}^{2S+1}R_J$: ${}^2\mathbf{8}_{1/2}$, ${}^2\mathbf{8}_{3/2}$, ${}^4\mathbf{8}_{1/2}$, ${}^4\mathbf{8}_{3/2}$, ${}^4\mathbf{8}_{5/2}$, ${}^2\mathbf{10}_{1/2}$, ${}^2\mathbf{10}_{3/2}$, ${}^2\mathbf{1}_{1/2}$, ${}^2\mathbf{1}_{3/2}$. Para N_c arbitrario, la identificación de los estados está dada en la Tabla C.1 del apéndice C. Los estados **1** y **10** tienen estados de carozo que para $N_c = 3$ son puramente $S_c = 0$ y 1 respectivamente. Como ya hemos visto, los estados **8**'s con el mismo J pero diferente S se pueden mezclar. En el límite de simetría $SU(3)$ exacta, solo dos ángulos describen estas posibles mezclas. Sin embargo debido a la ruptura de simetría $SU(3)$ provocada por la masa del quark “strange” pueden existir mezclas más generales. En particular los siguientes conjuntos de estados pueden presentar mezclas entre sus miembros: $\{N({}^2\mathbf{8}_J), N({}^4\mathbf{8}_J)\}$, $\{\Sigma({}^2\mathbf{8}_J), \Sigma({}^4\mathbf{8}_J), \Sigma({}^2\mathbf{10}_J)\}$, $\{\Xi({}^2\mathbf{8}_J), \Xi({}^4\mathbf{8}_J), \Xi({}^2\mathbf{10}_J)\}$ y $\{\Lambda({}^2\mathbf{8}_J), \Lambda({}^4\mathbf{8}_J), \Lambda({}^2\mathbf{1}_J)\}$. Los ángulos de mezcla pueden determinarse en primera instancia a través de los decaimientos y luego pueden acotarse a través de las masas [34, 35, 39, 40] y acoplamientos electromagnéticos, como ya se ha realizado en el sector no-extraño [78]. Mientras que en el límite de simetría $SU(3)$ los dos ángulos de mezcla son $\mathcal{O}(N_c^0)$, los efectos de ruptura de simetría $SU(3)$ son $\mathcal{O}(m_s - m_{u,d})$. El parámetro adimensional que mide el orden de ruptura de simetría $SU(3)$ se indicará por ϵ , donde $\epsilon \propto (m_s - m_{u,d})$. Estimamos que en la práctica su valor puede tomarse como $\epsilon \sim 1/3$. Por lo tanto, los ángulos que intervienen en la mezcla entre las componentes de la representación octete deben diferir por correcciones $\mathcal{O}(\epsilon)$, mientras que los ángulos que intervienen en la mezcla de diferentes representaciones de $SU(3)$ son $\mathcal{O}(\epsilon)$. Desafortunadamente, la disponibilidad de datos empíricos para los decaimientos fuertes no es suficiente como para realizar un análisis que tenga en cuenta todos los posibles ángulos. Es por esto que, en lo que sigue, las posibles mezclas entre estados pertenecientes a multipletes de $SU(3)$ de distinta dimensión no serán tenidos en cuenta. El análisis independiente en $1/N_c$ de las masas del **70**-plete muestra que ésta es una aproximación razonable [39, 40] en el caso estudiado. En este trabajo, los estados $\Sigma''_J = \Sigma({}^2\mathbf{10}_J)$, $\Xi''_J = \Xi({}^2\mathbf{10}_J)$ y $\Lambda''_J = \Lambda({}^2\mathbf{1}_J)$ son tomados como estados “puros”, mientras que los otros estados físicos se obtienen como mezclas entre estados octete de acuerdo con

$$\begin{pmatrix} B_J \\ B'_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{B_{2J}} & \sin \theta_{B_{2J}} \\ -\sin \theta_{B_{2J}} & \cos \theta_{B_{2J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2B_J \\ {}^4B_J \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

donde para cada valor de $J = 1/2, 3/2$ tenemos diferentes ángulos, i.e. $\theta_{N_{2J}}$, $\theta_{\Lambda_{2J}}$, $\theta_{\Sigma_{2J}}$ y $\theta_{\Xi_{2J}}$. Notar que la Ec. (6.2) generaliza la Ec. (5.2) al resto de los bariones de la representación octete.

Los estados del **70**-plete establecidos de acuerdo con el “Particle Data Group” (PDG) [62] junto con sus anchos parciales de decaimiento están dados en las Tablas 6.1 y 6.2. Debe notarse que solamente el estado $N(1675)$ con $J = 5/2$ puede decaer en una onda parcial G. Dado que, como ya fue mencionado en el Capítulo 5, no existe información experimental disponible respecto de este decaimiento, en lo que sigue consideraremos solo decaimientos en ondas parciales S y D.

Las amplitudes de decaimiento en ondas parciales via un mesón pseudoescalar pueden

expresarse en la forma más general como:

$$\mathcal{M}(l_P, Y_P, I_P, B_{GS}, B^*) = (-1)^{l_P} \sqrt{2M_{B^*}} \langle B_{GS} | \mathcal{B}_{(Y_P, I_P)}^{[l_P, R_P]} | B^* \rangle, \quad (6.3)$$

donde P refiere al mesón pseudoescalar perteneciente a la representación octete ($d_{R_P} = \mathbf{8}$)¹. B^* y B_{GS} son respectivamente los estados de barión excitado y fundamental (GS es por “ground state”), l_P es la onda parcial, e Y_P , I_P son los números cuánticos del mesón pseudoescalar. El factor que involucra a la constante de decaimiento del mesón, $\sqrt{N_c}/F_P = \mathcal{O}(N_c^0)$, que naturalmente aparece en las expresiones de la amplitud de decaimiento [77] se absorbe en los operadores bariónicos $\mathcal{B}_{(Y_P, I_P)}^{[l_P, R_P]}$. Estos operadores representan los vértices efectivos $B^* B_{GS} P$, y pueden expandirse en serie de potencias de $1/N_c$, y del parámetro de ruptura de simetría $SU(3)$ (ϵ). La expansión se lleva a cabo utilizando una base de operadores efectivos y tiene la forma general dada por la Ec. (5.17). Los \mathcal{B}_n representan a los operadores de la base, y son ordenados en potencias de $1/N_c$ y ϵ . Como ya mencionamos, los $C_n(k_P)$ son coeficientes efectivos, que codifican la dinámica de QCD, y quedan determinados al ajustar los resultados teóricos a los datos experimentales de los anchos parciales. Los operadores son definidos y normalizados de manera que los coeficientes C_n 's sean todos $\mathcal{O}(N_c^0)$. Esta normalización se realiza por separado para cada onda parcial. Se tomó $\Lambda = 200$ MeV consistentemente con lo hecho en el análisis de los bariones sin extrañeza.

La base de operadores está expresada en términos de operadores de spin-sabor \mathcal{G}_n :

$$\mathcal{B}_n^{[l_P, R_P]} = (\xi \mathcal{G}_n^{[j_n, R_P]})^{[l_P, R_P]}, \quad (6.4)$$

con la notación que indica el acoplamiento de los momentos angulares. Al igual que lo visto en el Capítulo 5, ξ es un tensor de $O(3)$ que produce la transición desde la representación con $l = 1$ del barión excitado hacia la representación con $l = 0$ del barión fundamental. \mathcal{G}_n es un operador de spin-sabor, que produce la transición del estado inicial del barión de la representación \mathbf{MS} de $SU(6)$ hacia el estado final de barión fundamental, que es un estado simétrico. Los elementos de matriz reducidos (EMRs) del operador ξ se definieron en el Capítulo 5.

El ancho parcial está dado entonces en términos de los elementos de matriz reducidos de los operadores \mathcal{B}_n como sigue:

$$\begin{aligned} \Gamma^{[l_P, Q_P]} &= \frac{k_P}{8\pi^2} \left(\frac{k_P}{\Lambda} \right)^{2l_P} \frac{M_B}{M_{B^*}} \frac{\widehat{I}^2}{(\widehat{I}^* \widehat{J}^*)^2} \\ &\times \left| \sum_n C_n^{[l_P, R_P]}(k_P) \sum_\gamma \left\langle \begin{array}{cc} R^* & R_P \\ Y^* I^* & Y_P I_P \end{array} \parallel \begin{array}{c} R \\ Y I \end{array} \right\rangle_\gamma \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{B}_n^\gamma(\{S, Q\}, \{(l, S^*)J^*, Q^*\}, \{l_P, Q_P\}) \right|^2, \quad (6.5) \end{aligned}$$

¹ A partir de este momento utilizaremos el abuso de notación de indicar a una dada irrep de $SU(3)$ por su dimensión, es decir $d_R \leftrightarrow R$.

donde hemos usado la notación usual para los factores isoescales de $SU(3)$ (ver Apéndice C) y $Q \equiv \{R, Y, I\}$. Adicionalmente, γ indica las posibles multiplicidades en los acoplamientos $R^* \otimes R_P \rightarrow R$. En Ec. (6.5) la posibilidad de tener mezclas entre estados $S^* = 1/2$ y $3/2$ en el caso $R^* = \mathbf{8}$, se puede tener en cuenta simplemente reemplazando \mathcal{B}_n^γ por la correspondiente combinación lineal de los EMRs. El mismo procedimiento puede aplicarse en el caso en que se quisiera tener en cuenta las mezclas entre estados de diferentes representaciones R^* , i.e., $\mathbf{1}$, $\mathbf{8}$ y $\mathbf{10}$ inducidas por la ruptura de simetría $SU(3)$.

Tab. 6.1: Datos empíricos para los canales de los decaimientos de las partículas Λ del $[70, 1^-]$ obtenidos del PDG.

Nombre PDG	Estado	Masa [MeV]	Ancho total [MeV]	Ancho parcial [%]	
				Onda-S	Onda-D
$\Lambda(1670)$	$\Lambda_{1/2}$	1670(10)	38(13)	$\bar{K}N : 25(5)$ $\eta\Lambda : 17.5(7.5)$ $\pi\Sigma : 40(15)$	
$\Lambda(1690)$	$\Lambda_{3/2}$	1690(5)	60(10)		$\bar{K}N : 25(5)$ $\pi\Sigma : 30(10)$
$\Lambda(1800)$	$\Lambda'_{1/2}$	1785(65)	300(100)	$\bar{K}N : 32.5(7.5)$	
$\Lambda(1830)$	$\Lambda_{5/2}$	1820(10)	85(25)		$\bar{K}N : 6.5(3.5)$ $\pi\Sigma : 55(20)$ $\pi\Sigma^* > 15$
$\Lambda(1405)$	$\Lambda''_{1/2}$	1406(4)	50(2)	$\pi\Sigma : 100$	
$\Lambda(1520)$	$\Lambda''_{3/2}$	1519(1)	16(1)		$\bar{K}N : 45(1)$ $\pi\Sigma : 42(1)$

Tab. 6.2: Datos empíricos para los canales de los decaimientos de las partículas Σ del $[70, 1^-]$ obtenidos del PDG.

Nombre PDG	Estado	Masa [MeV]	Ancho total [MeV]	Anchos parciales	
				Onda-S	Onda-D
$\Sigma(1670)$	$\Sigma_{3/2}$	1675(10)	60(20)		$\bar{K}N : 10(3)$ $\pi\Lambda : 10(5)$ $\pi\Sigma : 45(15)$
$\Sigma(1750)$	$\Sigma'_{1/2}$	1765(35)	110(50)	$\bar{K}N : 25(15)$ $\pi\Sigma < 8$ $\eta\Sigma : 35(20)$	
$\Sigma(1775)$	$\Sigma_{5/2}$	1775(5)	120(15)		$\bar{K}N : 40(3)$ $\pi\Lambda : 17(3)$ $\pi\Sigma : 3.5(1.5)$ $\pi\Sigma^* : 10(2)$

Para expresar los EMRs de los operadores \mathcal{B}_n^γ en términos de los EMRs de los generadores del grupo de spin-sabor conviene distinguir entre operadores que preservan simetría $SU(3)$ y operadores de ruptura de simetría $SU(3)$. Para los operadores que preservan la simetría se tiene:

$$\mathcal{B}_n^\gamma(\{S, Q\}, \{(l, S^*)J^*, Q^*\}, \{l_P, Q_P\}) = (-1)^{j_n + J^* + l + S} \frac{\widehat{J}^* \widehat{l}_P}{\sqrt{d_R}} \left\{ \begin{array}{ccc} J^* & S^* & l \\ j_n & l_P & S \end{array} \right\} \langle S, R \| \mathcal{G}_n^{[j_n, R_P]} \| S^*, R^* \rangle_\gamma, \quad (6.6)$$

donde d_R es la dimensión de la representación R de $SU(3)$ (ver Ec. (3.23)) y, además se puede identificar un símbolo 6-j de $SU(2)$ y el EMR del operador de spin-sabor.

En cuanto a los operadores que dan cuenta de la ruptura de $SU(3)$ conviene notar que a primer orden en la masa de los quarks los mismos pueden expresarse como:

$$(\mathcal{M}_f^8 \mathcal{G}_m^{[j_m, R_m]})_{\gamma_m}^{R_P}, \quad (6.7)$$

donde \mathcal{M}_f^8 es la componente octete de las masas de los quarks (trabajamos en el límite de simetría de isospin exacta). Ya que en nuestro caso $R_P = \mathbf{8}$, R_m puede ser $\mathbf{1}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{10}$, $\overline{\mathbf{10}}$ o $\mathbf{27}$. Solo $R_m = \mathbf{1}$, $\mathbf{8}$ involucran operadores de spin-sabor de 1-cuerpo, mientras que $\mathbf{10}$, $\overline{\mathbf{10}}$ y $\mathbf{27}$ involucran operadores de 2-cuerpos. Hay por lo tanto (y en principio), un número significativo de operadores de ruptura de $SU(3)$. Sin embargo, dado que la información disponible para los anchos de decaimiento parciales que es sensible a los efectos de ruptura

de $SU(3)$ es muy limitada, aquí solo consideraremos una base truncada de tales operadores, a saber, los de 1-cuerpo. A menos de una constante global a ser absorbida en el procedimiento de normalización, la forma más general de los EMRs de los operadores de ruptura de $SU(3)$ es [49]

$$\mathcal{B}_n^\gamma(\{S, Q\}, \{(l, S^*)J^*, Q^*\}, \{l_P, Q_P\}) = (-1)^\varphi \frac{\widehat{J}^* \widehat{l}_P}{d_R^{1/2}} \begin{Bmatrix} J^* & S^* & l \\ j_m & l_P & S \end{Bmatrix} \left\langle \begin{array}{c} \mathbf{8} & R_m \\ 0 & 0 & Y_P & I_P \end{array} \parallel \begin{array}{c} R_P \\ Y_P & I_P \end{array} \right\rangle_{\gamma_n} \langle S, R \parallel \mathcal{G}_m^{[j_m, R_m]} \parallel S^*, R^* \rangle_\gamma \quad (6.8)$$

donde $\varphi = j_m + J^* + l + S$.

La base de operadores se normaliza de forma tal que los coeficientes C_n sean todos de $\mathcal{O}(N_c^0 \times \epsilon^0)$ y su tamaño natural para una dada onda parcial sea el mismo. De esta forma, con solo comparar los valores de los coeficientes, se puede inferir si el operador correspondiente está dando una contribución acorde a su conteo en potencias de $1/N_c$ y ϵ . Los efectos de ruptura de simetría $SU(6)$ se ven reflejados en el momento k_P , los cuales son tenidos en cuenta por los operadores de decaimiento y por lo tanto codificados en los coeficientes efectivos C_n . En el caso de los decaimientos del **56**-plete, donde todos los efectos de ruptura de $SU(6)$ son de $\mathcal{O}(1/N_c)$ o de $\mathcal{O}(\epsilon)$, las dependencias en k_P son de orden superior en las expansiones respectivas. Por esta razón tales efectos se tienen en cuenta simplemente por la expansión en sí si uno desprecia la dependencia en k_P de los coeficientes C_n . En el caso del **70**-plete, los efectos de $\mathcal{O}(N_c^0)$ en la separación de las masas son pequeños, y por lo tanto se espera que un argumento similar tenga validez para despreciar la dependencia en el momento.

6.3. Base de operadores

Los operadores de transición desde la representación **MS** hacia la **S** de spin-sabor (\mathcal{G}_n) se contruyen usando productos tensoriales entre los generadores de $SU(6)$ Λ_c y λ , que actúan en el carozo y en el quark excitado respectivamente. Las reglas de reducción establecidas en la Tabla 4.1 son usadas para reducir el número de productos de generadores del carozo, y los productos del tipo $\lambda_\alpha \lambda_\beta$ (α, β, \dots , índices de los generadores de $SU(6)$) pueden reducirse a operadores de 1-cuerpo. Además, usando que cualquier generador de $SU(6)$ $\Lambda = \Lambda_c + \lambda$ tiene elementos de matriz nulos entre estados **MS** y **S**, se obtiene las reglas dadas por Ec. (5.19), ya que estas reglas son válidas para ambos casos. Por lo tanto, la forma general que toma la base de operadores es la misma que la dada por (5.20) a (5.22).

Para el caso de los decaimientos fuertes se obtiene que solamente hay un operador de 1-cuerpo,

$$\mathcal{G}^{(1)} = g^{[1,8]}, \quad (6.9)$$

que indentificamos con la corriente axial del quark excitado en el lenguaje del modelo de quarks. Por otro lado los operadores de 2-cuerpos pueden contruirse a partir de productos $\lambda \times \Lambda_c$, que pueden acoplarse a los momentos angulares $j = 0, 1, 2$. Para $l = 1$, l_P puede

ser 0, 2, 4, y por lo tanto $j = 1, 2$. Además deben acoplarse a un $\mathbf{8}$ de $SU(3)$ para los decaimientos que involucran mesones pseudoescalares en $R_P = \mathbf{8}$. Los siguientes son posibles monomios que pueden aparecer en los operadores de 2-cuerpos:

$$\begin{aligned} & (s T^c)^{[1, \mathbf{8}]}, (t S^c)^{[1, \mathbf{8}]}, (s G^c)^{[j, \mathbf{8}]}, (g S^c)^{[j, \mathbf{8}]}, \\ & (t G^c)^{[1, \mathbf{8}]}, (g T^c)^{[1, \mathbf{8}]}, (g G^c)^{[j, \mathbf{8}]}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde $j = 1, 2$, y el acoplamiento de dos $\mathbf{8}$'s a $\mathbf{8}$ tiene dos posibilidades, llamadas acoplamientos tipo f y d . Hay cuatro de estos casos en esta lista de operadores, y por lo tanto el número total de monomios posibles es igual a catorce. Este conjunto de operadores de 2-cuerpos puede reducirse usando indentidades de operadores, obteniéndose nueve operadores independientes, a saber:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (s T^c)^{[1, \mathbf{8}]} & \mathcal{G}_2^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (t S^c)^{[1, \mathbf{8}]} & \mathcal{G}_3^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (s G^c)^{[1, \mathbf{8}]} \\ \mathcal{G}_4^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (g S^c)^{[1, \mathbf{8}]} & \mathcal{G}_5^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (g T^c)_{\gamma=1}^{[1, \mathbf{8}]} & \mathcal{G}_6^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (g T^c)_{\gamma=2}^{[1, \mathbf{8}]} \\ \mathcal{G}_7^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (s G^c)^{[2, \mathbf{8}]} & \mathcal{G}_8^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (g S^c)^{[2, \mathbf{8}]} & \mathcal{G}_9^{(2)} &= \frac{1}{N_c} (g G^c)_{\gamma=1}^{[2, \mathbf{8}]} . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Hasta aquí, hemos discutido los operadores que intervienen en el límite de simetría $SU(3)$ exacta. Como se mencionó anteriormente para los operadores de ruptura de simetría (SB) de $SU(3)$, Ec.(6.7), \mathcal{G}_m puede pertenecer a $\mathbf{1}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{10}$, $\overline{\mathbf{10}}$ o $\mathbf{27}$ de $SU(3)$. Los operadores de interes aquí son los de 1-cuerpo, que son $\mathcal{O}(N_c^0 \times \epsilon)$. La base de operadores de ruptura de simetría $SU(3)$ de un cuerpo se construye a partir de los siguientes tres monomios:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(SB)} &= (t_8 s)^{[1, \mathbf{8}]} \\ \mathcal{G}_2^{(SB)} &= (t_8 g)_{\gamma=2}^{[1, \mathbf{8}]} - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{G}^{(1)} \\ \mathcal{G}_3^{(SB)} &= (t_8 g)_{\gamma=1}^{[1, \mathbf{8}]} . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Notar que $\mathcal{G}_1^{(SB)}$ se acopla solamente al mesón η . Por conveniencia $\mathcal{G}_2^{(SB)}$ ha sido definido de manera tal que los canales con emisión de un mesón π no sean afectados. $\mathcal{G}_3^{(SB)}$ automáticamente cumple esa propiedad.

Una base de operadores de 3-cuerpos se puede construir siguiendo un procedimiento similar. Sin embargo, no vamos a considerar tal base debido a que el número de parámetros a ajustar se incrementa significativamente y como vamos a ver en lo que sigue del capítulo, es posible obtener ajustes satisfactorios considerando solamente operadores de hasta 2-cuerpos.

La lista de operadores que constituyen la base usada en este capítulo está dada en la Tabla 6.3. En lo que sigue se asume que el número de quarks extraños en los bariones es de $\mathcal{O}(N_c^0)$, mientras que el número de quarks u y d es de $\mathcal{O}(N_c)$. Esto se refleja en el conteo de potencias de $1/N_c$ en las amplitudes de decaimiento que involucran bariones extraños. Ya que los únicos bariones extraños incluidos como datos en el análisis tienen extrañeza $\mathcal{S} = -1$, se presume que es una suposición razonable. Se tiene entonces la siguiente regla general para el

conteo de potencias en $1/N_c$: las amplitudes de bariones no-extraños que decaen via emisión de mesones π o η son todas de $\mathcal{O}(N_c^0)$ a menos de correcciones de $\mathcal{O}(1/N_c)$, mientras que las amplitudes de decaimiento via emisión de mesones K son de $\mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$. Similarmente, las amplitudes de decaimiento de bariones extraños via emisión de mesones π son de $\mathcal{O}(N_c^0)$, y via emisión de mesones K son de $\mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$ excepto para los bariones singlete $\Lambda(1405)$ y $\Lambda(1520)$ donde la relación está invertida. Estas propiedades pueden deducirse de la dependencia en $1/N_c$ de los factores isoescalares. Una situación similar ocurre con los operadores de ruptura de simetría $SU(3)$ usados aquí, excepto que para estos las amplitudes con emisión de mesones π son idénticamente cero.

Tab. 6.3: Operadores efectivos para los decaimientos de los bariones del **70**-plete. El primer conjunto de operadores representan a los operadores con simetría $SU(3)$ y el segundo conjunto de operadores corresponden a los de ruptura de simetría $SU(3)$. $l = 0$ para los decaimientos onda-S y $l = 2$ para los onda-D.

Operador	n-C	Orden
$\mathcal{B}_1 = (\xi g)^{[l, \mathbf{8}]}$	1	N_c^0
$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s T^c)^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^0
$\mathcal{B}_3 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (t S^c)^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^{-1}
$\mathcal{B}_4 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G^c)^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^0
$\mathcal{B}_5 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g S^c)^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^{-1}
$\mathcal{B}_6 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g T^c)_{\gamma=1}^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^0
$\mathcal{B}_7 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g T^c)_{\gamma=2}^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^0
$\mathcal{B}_8 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (s G^c)^{[2, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^0
$\mathcal{B}_9 = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g S^c)^{[2, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^{-1}
$\mathcal{B}_{10} = \frac{1}{N_c} \left(\xi (g G^c)_{\gamma=1}^{[2, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	2	N_c^0
$\mathcal{B}_1^{SB} = \left(\xi (t_8 s)_{\gamma=1}^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	1	ϵ
$\mathcal{B}_2^{SB} = \left(\xi (t_8 g)_{\gamma=2}^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]} - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{B}_1$	1	ϵ
$\mathcal{B}_3^{SB} = \left(\xi (t_8 g)_{\gamma=1}^{[1, \mathbf{8}]} \right)^{[l, \mathbf{8}]}$	1	ϵ

Para N_c arbitrario el número de operadores $SU(3)$ simétricos que conforman la base es igual a siete para las ondas S y a diez para las ondas D. Los EMRs \mathcal{B}_n^γ se muestran en las Tablas E.5 y E.6 del Apéndice E. Estas tablas también tienen los factores de normalización (α_n) necesarios para que cada operador tenga elementos de matriz de tamaño natural. Como se explicó anteriormente, estos son elegidos de manera tal que el mayor EMR de spin-isospin de los operadores $\mathcal{O}(N_c^0)$ sea igual a uno en magnitud cuando son evaluados en $N_c = 3$, e igual a $1/3$ para el caso en que los operadores sean $\mathcal{O}(1/N_c)$. Similarmente, este criterio para la normalización es implementado en los operadores de ruptura. Notar que los EMRs de spin-isospin son definidos con una suma sobre γ del producto de B_n^γ con los correspondientes factores isoescalares (ver Ec.(6.5)).

Los factores isoescalares necesarios para los cálculos explícitos de los elementos de matriz para los diferentes canales están dados en el Apéndice C.

Resulta que los EMR de los operadores dados en las Tablas E.5 y E.6 para N_c arbitrario son linealmente dependientes cuando se restringen a los estados del multiplete $[70, 1^-]$ (de acuerdo con la Tabla C.1 del Apéndice C). Para los operadores $SU(3)$ simétricos se encuentra la siguiente base luego de eliminar las dependencias lineales. Para los canales onda S la base a primer orden (orden dominante, o “leading order” (LO) en inglés) está dada por $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6\}$ y la base a segundo orden (“next to leading order” (NLO)) está dada por $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_6\}$. Además la base de operadores de ruptura es $\{\mathcal{B}_1^{SB}, \mathcal{B}_2^{SB}, \mathcal{B}_3^{SB}\}$. Para los decaimientos onda D la base a LO está dada por $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_8\}$ y la base a NLO está dada por $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_9\}$ y los operadores de ruptura $\{\mathcal{B}_1^{SB}, \mathcal{B}_2^{SB}, \mathcal{B}_3^{SB}\}$. Si se tienen en cuenta solo los elementos de matriz asociados a datos experimentales disponibles, se encuentra que uno de los operadores onda D de ruptura puede eliminarse debido a su dependencia lineal con los otros. Elegiremos en este caso eliminar el tercero de ellos. Los factores de normalización para los operadores de ruptura son los siguientes: para los operadores onda S son $\alpha_1^{SB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_2^{SB} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\alpha_3^{SB} = \sqrt{\frac{6}{5}}$, y para los operadores onda D que se usaron en los cálculos numéricos se tienen las normalizaciones $\alpha_1^{SB} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{21}}$ y $\alpha_2^{SB} = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

Además es relevante mencionar la notación usada para los coeficientes adimensionales que acompañan a los operadores en la expansión. Para denotarlos usamos las expresiones C_{Si} , $i = 1, \dots, 10$ para los coeficientes de los operadores onda S de no ruptura, C_{Di} , $i = 1, \dots, 10$ para los de operadores onda D, B_{Si} y B_{Di} $i = 1, \dots, 3$ para los coeficientes que acompañan a los operadores de ruptura onda S y onda D respectivamente.

Respecto de la mezcla de estados es interesante observar lo siguiente. Como se mencionó en el Capítulo 5, en el límite de N_c grande y simetría de sabor exacta los ángulos de mezcla son independientes de los valores de los coeficientes de las masas. Para estos valores de los ángulos, existen varios decaimientos fuertes de bariones no-extraños que se anulan a orden $1/N_c$. En el presente caso otro canal que queda suprimido en dicho límite es el $\Lambda(1700) \rightarrow \pi N$. Sin embargo, al igual que cuando no se tienen en cuenta los bariones extraños, los ángulos de mezcla difieren significativamente del caso del límite estricto

para N_c grande, primeramente debido a las contribuciones de orden superior en $1/N_c$ en la interacción hiperfina, que contribuye mucho más a las masas que los operadores $\mathcal{O}(N_c^0)$ (interacciones del tipo spin-órbita), que en el límite estricto de N_c grande dan los ángulos límite. La desviación de estas cancelaciones en las amplitudes de decaimiento son explicadas entonces primeramente por las mezclas, pero también por efectos de orden superior en $1/N_c$.

Es útil evaluar el potencial poder predictivo del análisis presentado aquí. El número de posibles amplitudes de decaimiento diferentes es el siguiente: 17 en $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8}$, 12 en $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10}$ o $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{8}$, 13 en $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{10}$, y 4 en $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{8}$. Por lo tanto, hay 87 amplitudes de decaimiento onda S y 153 onda D. Teniendo en cuenta las predicciones para las masas no conocidas del $\mathbf{70}$ -plete [39, 40], es posible estimar que el número de decaimientos permitidos luego de considerar el tamaño del espacio de fases es 52 para onda S y 94 para onda D. Para los decaimientos onda S, hay un total de siete transiciones posibles $R_{B^*} \rightarrow R_B$, que es una más que el número de operadores de no-ruptura onda S a NLO. Esto implica una relación global entre las amplitudes en el límite de simetría $SU(3)$ exacta. Hemos incluido ocho operadores, por lo tanto hay 79 relaciones en principio. Para los decaimientos onda D hay doce transiciones $R_{B^*} \rightarrow R_B$, que en el límite de simetría $SU(3)$, siendo diez los operadores de la base se llega a dos relaciones. El número de canales diferentes en el límite de simetría de isospin es igual a 153, y por lo tanto, con los once operadores que incluimos, hay en principio 143 relaciones entre estas amplitudes. La mayoría de estas relaciones representan una verificación de la simetría $SU(3)$ y las desviaciones debidas a los operadores de 1-cuerpo, como es de esperarse. Con la información disponible para los anchos parciales de decaimiento podemos considerar un número limitado de relaciones a primero orden, que discutiremos en breve.

6.4. Análisis y discusión de los resultados

Solo una fracción de los posibles canales de decaimiento de los bariones de paridad negativa han sido determinados experimentalmente [62]. Esta base de datos relativamente pobre impone limitaciones significativas en la precisión y robustez de las conclusiones del análisis. De los 87 anchos parciales diferentes onda S y los 153 onda D que serían posibles en el $[\mathbf{70}, 1^-]$ (respectivamente 52 y 94 teniendo en cuenta el espacio de fase), solamente 16 anchos parciales onda S y 25 onda D son conocidos, y algunos de ellos solo como cotas.

Una comprobación consistente de la viabilidad del análisis en $1/N_c$ se basa en la verificación de las relaciones independientes de los coeficientes, es decir, de las relaciones que se cumplen independientemente de los valores de los coeficientes C_n . Las mismas existen a cada orden en la expansión, y pueden expresarse en términos de los anchos reducidos de decaimientos parciales definidos más abajo. Estas relaciones proveen predicciones para los anchos parciales desconocidos con la precisión del orden de la expansión. Debido a que los mismos son cuadráticos en los coeficientes, el número total de relaciones independientes de estos es $N_{\text{rel}} = N_{\text{ap}} - N_{\text{coef}}(N_{\text{coef}} + 1)/2$, donde N_{rel} es el número de relaciones, N_{ap} es el número de anchos parciales, y N_{coef} el número de coeficientes C_n . Con el número de canales mencionado anteriormente, y el número de operadores involucrados a LO en $1/N_c$, donde

los efectos de ruptura de $SU(3)$ no son tenidos en cuenta en este orden de la expansión, se encuentra que hay 81 relaciones para decaimientos onda S y 143 para onda D. La cantidad de decaimientos es menor debido a la supresión de canales por falta de espacio de fase, y el número de decaimientos conocidos experimentalmente es menor aún. Varias de estas relaciones están dadas más abajo en forma de cocientes. Algunas de ellas pueden corroborarse y algunas dan predicciones a LO para los ángulos de mezcla. No discutiremos las relaciones a NLO; en principio hay 51 para decaimientos onda S y 108 para onda D, sin tener en cuenta las supresiones de canales por considerar el espacio de fase.

Ahora discutiremos algunas relaciones que pueden corroborarse con los datos conocidos de los anchos parciales. La lista no es exhaustiva. Los anchos reducidos se definen como $\tilde{\Gamma} = \Gamma/f_{ef}$, donde $f_{ef} = \frac{k_P}{8\pi^2} \frac{M_B}{M_{B^*}} \left(\frac{k_P}{\Lambda}\right)^{2l_P}$. Estos son básicamente las raíces cuadradas de las amplitudes de decaimiento con el factor centrífugo removido. Para los decaimientos onda S se obtienen los cocientes mostrados en la Tabla 6.4. Estos resultados muestran que hay una discrepancia significativa en la predicción para el ángulo de mezcla θ_1 que resulta de los decaimientos no-extraños contra los extraños. Los ángulos de mezcla tienen correcciones debido a la ruptura de simetría $SU(3)$ que son de hecho importantes como se verá en los resultados a NLO.

Tab. 6.4: Decaimientos onda-S: cocientes de anchos reducidos independientes de los coeficientes a LO.

Cociente	Cociente LO	Empírico	Predicción
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1535) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(N(1650) \rightarrow \pi N)}$	$\left(\frac{\sqrt{2} \cos \theta_1 - \sin \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{2} \sin \theta_1}\right)^2$	0.7(0.3)	$\theta_1 = \begin{cases} 0.3(0.1) \\ 1.7(0.1) \end{cases}$
$\frac{\tilde{\Gamma}(\Delta(1620) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Delta(1700) \rightarrow \pi \Delta)}$	2/5	0.30(0.15)	
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1535) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Delta(1620) \rightarrow \pi N)}$	$3 + \cos 2\theta_1 - \sqrt{8} \sin 2\theta_1$	2.1(0.7)	$\theta_1 = \begin{cases} 0.3(0.1) \\ 1.6(0.1) \end{cases}$
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1535) \rightarrow \eta N)}{\tilde{\Gamma}(N(1650) \rightarrow \eta N)}$	$\left(\frac{\cos \theta_1 + \sqrt{2} \sin \theta_1}{\sqrt{2} \cos \theta_1 - \sin \theta_1}\right)^2$	7.3(4.4)	$\theta_1 = \begin{cases} 0.6_{-0.2}^{+0.1} \\ 1.3_{-0.1}^{+0.2} \end{cases}$
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1520) \rightarrow \pi \Delta)}{\tilde{\Gamma}(\Delta(1620) \rightarrow \pi N)}$	$3 - 2 \cos 2\theta_3 + \sqrt{5} \sin 2\theta_3$	0.8(0.3)	$\theta_3 = \begin{cases} 2.3(0.1) \\ 3.0(0.1) \end{cases}$
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1650) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Lambda(1670) \rightarrow \pi \Sigma)}$	$\left(\frac{\cos \theta_1 + \sqrt{2} \sin \theta_1}{\sqrt{2} \cos \theta_1 - \sin \theta_1}\right)^2$	6(4)	$\theta_1 = \begin{cases} 0.6_{-0.2}^{+0.1} \\ 1.3_{-0.1}^{+0.2} \end{cases}$
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1650) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1750) \rightarrow \eta \Sigma)}$	1	0.8(0.6)	

Para los decaimientos onda D la mayoría de las relaciones que se pueden derivar involucran a los ángulos de mezcla. Algunas de aquellas que no involucran a los ángulos de mezcla y que pueden corroborarse están recopiladas en la Tabla 6.5. Hemos considerado relaciones que pueden corroborarse cuando se tienen en cuenta solamente operadores de 1-cuerpo. Algebraicamente, esto se corresponde con un modelo de quarks con emisión de un mesón acoplado al quark excitado, en el límite de simetría $SU(6)$ exacta. Por ejemplo, las relaciones que pueden predecir los ángulos de mezcla dan ángulos muy diferentes de aquellos obtenidos a partir del ajuste. De hecho, veremos que un operador de 2-cuerpos a LO es importante para los ajustes de los anchos onda D.

Tab. 6.5: Decaimientos onda-D: cocientes de anchos reducidos independientes de los coeficientes a LO.

Cociente	Cociente LO	Empírico
$\frac{\tilde{\Gamma}(\Lambda(1830) \rightarrow \pi\Sigma)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1775) \rightarrow \pi\Lambda)}$	3	2.7(1.4)
$\frac{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1670) \rightarrow \pi\Lambda)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1670) \rightarrow \pi\Sigma)}$	1/2	0.12(0.10)
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1675) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Lambda(1830) \rightarrow \pi\Sigma)}$	1	0.8(0.4)
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1675) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1775) \rightarrow \pi\Lambda)}$	3	2.3(0.6)
$\frac{\tilde{\Gamma}(N(1675) \rightarrow \pi N)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1775) \rightarrow \pi\Sigma)}$	3/2	7(4)
$\frac{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1775) \rightarrow \pi\Sigma)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1775) \rightarrow \pi\Sigma^*)}$	8/7	0.06(0.03)
$\frac{\tilde{\Gamma}(\Lambda(1690) \rightarrow \pi\Sigma)}{\tilde{\Gamma}(\Sigma(1670) \rightarrow \pi\Lambda)}$	3	4.8(3.7)

En lo que sigue discutiremos los resultados obtenidos para los anchos parciales a partir de los ajustes. Los coeficientes y los ángulos de mezcla obtenidos se representan en la Tabla 6.6. Las Tablas 6.7 a 6.11 muestran los anchos teóricos cuyos valores experimentales son conocidos junto con los predichos. El ajuste a LO es realizado utilizando la base de operadores $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6\}$ para las amplitudes onda S y $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_8\}$ para las onda D. No se incluyen efectos de ruptura de simetría $SU(3)$. Los elementos de matriz no están expandidos en $1/N_c$. Ambos decaimientos, onda S y onda D, son ajustados simultáneamente ya que los dos dependen de los ángulos de mezcla θ_1 y θ_3 , los cuales son incluidos como parámetros del ajuste. Como una comprobación realizamos un ajuste de los decaimientos del sector no-extraño, con resultados similares a aquellos obtenidos en trabajos previos [47] (notemos que los valores experimentales de los anchos han cambiado ligeramente con respecto a aquellos análisis y el presente). En particular, el principal problema con ese ajuste es la discrepancia en el decaimiento $N(1535) \rightarrow \eta N$. Cuando todos los canales con datos

empíricos disponibles son incluidos, el χ_{gdl}^2 es bastante grande, predominantemente debido a la dificultad de describir los canales η como así también varios de los canales de decaimiento de hiperones excitados. Por ejemplo, si se quisiera tener ángulos de mezcla $\theta_{1,3}$ similares a aquellos del análisis del sector no-extraño, se deben remover los canales $\Lambda(1670) \rightarrow \bar{K}N$ y $\Lambda(1690) \rightarrow \bar{K}N$. De hecho, en los modelos de quark estos canales hace ya largo tiempo que han sido clasificados como difíciles de describir [75]. La cuestión de los efectos de ruptura grandes se manifiesta claramente por las deficiencias de los ajustes a LO, como así también por las relaciones a LO discutidas anteriormente. En particular se encuentra que el resultado para el decaimiento onda S $\Delta(1700) \rightarrow \pi\Delta$ es bastante sensible a la remoción de los canales Λ mencionados, y que otros decaimientos también son afectados significativamente. De hecho se observa luego de analizar los ajustes a NLO, que los canales Λ y η mencionados no se pueden describir consistentemente a LO. Esto se puede explicar en base a la estabilidad de los coeficientes de los operadores dominantes y de los ángulos de mezcla en el ajuste a LO. Se observa del ajuste a LO que los operadores dominantes para los decaimientos onda S son el de 1-cuerpo \mathcal{B}_1 y el otro importante, pero de menor contribución, es el de 2-cuerpos \mathcal{B}_6 . Para los decaimientos onda D son el operador \mathcal{B}_1 y el de 2-cuerpos \mathcal{B}_8 .

Tab. 6.6: Parámetros de los ajustes a LO y NLO. Notar ambigüedades en algunos ángulos; el resto de los parámetros difieren dentro de los errores, por lo tanto se muestran los parámetros correspondientes al primero de los ángulos citados en los casos ambigüos.

Coef onda-S	LO	NLO	Coef onda-D	LO	NLO
C_{S1}	20.2(1.1)	18.6(1.6)	C_{D1}	2.83(0.13)	2.55(0.16)
C_{S2}	0.5(1.3)	-3.22(0.97)	C_{D2}	0.07(0.08)	-0.28(0.08)
C_{S3}	0	1.7(6.1)	C_{D3}	0	-0.43(0.95)
C_{S4}	0	9.7(2.7)	C_{D5}	0	2.23(0.29)
C_{S6}	-6.2(1.2)	-7.2(2.0)	C_{D6}	0.02(0.17)	-0.22(0.19)
B_{S1}	0	31(17)	C_{D8}	1.22(0.14)	1.26(0.13)
B_{S2}	0	8(18)	C_{D9}	0	0.09(0.85)
B_{S3}	0	-9(17)	B_{D1}	0	1.16(0.97)
			B_{D2}	0	5.5(0.5)
Ángulo	LO	NLO		LO	NLO
θ_{N_1}	0.56(0.08)	0.33(0.08)	χ_{dgl}^2	4.7	1.2
θ_{N_3}	$\begin{cases} 2.91(0.06) \\ 2.28(0.06) \end{cases}$	$\begin{cases} 2.76(0.08) \\ 2.36(0.09) \end{cases}$	gdl	30	18
θ_{Λ_1}	$= \theta_{N_1}$	0.99(0.08)			
θ_{Λ_3}	$= \theta_{N_3}$	1.57(0.07)			
θ_{Σ_1}	$= \theta_{N_1}$	$\begin{cases} 2.99(0.15) \\ 0.28(0.16) \end{cases}$			
θ_{Σ_3}	$= \theta_{N_3}$	2.96(0.31)			

A partir del análisis de los resultados obtenidos en los ajustes, se desprenden el conjunto de observaciones que se detallan en lo que resta de esta sección. En primer lugar es importante notar que los operadores de 1-cuerpo \mathcal{B}_1 son dominantes para onda S y onda D. Esto apoya la imagen del modelo de quarks en el cual el mesón es predominantemente emitido por el quark excitado. Si bien los operadores de 2-cuerpos son menos importantes, estos resultan ser relevantes para obtener buenos ajustes. Estos operadores en particular codifican la dinámica de largo alcance de los decaimientos. A LO tienen coeficientes menores o mucho menores que los de 1-cuerpo \mathcal{B}_1 , y a NLO sus coeficientes son en general más chicos que el tamaño natural. Es relevante notar que esta conclusión se obtiene bajo el criterio de seleccionar los ajustes que tienen coeficientes estables a LO a medida que se mueven al ajuste NLO. Por lo tanto, se puede concluir que los ajustes consistentes a NLO en $1/N_c$ son posibles. También se puede notar que tales ajustes son de hecho los que tienen menor χ^2 entre los que se hallaron en este trabajo.

Como se muestra en la Tabla 6.6, varios operadores tienen coeficientes consistentes con cero dentro del error. Eliminando esos operadores es posible realizar un ajuste a NLO donde los coeficientes de los operadores significativos no cambien considerablemente, y que tenga un $\chi_{gd}^2 \sim 1.2$.

Para los ángulos de mezcla de los nucleones, los análisis independientes previos del sector no-extraño dan como resultado $\theta_{N_1} = 0.39(0.11)$ y $\theta_{N_3} = 2.82$ o $2.38(0.11)$. Comparando estos valores con los obtenidos en el presente análisis, $\theta_{N_1} = 0.33(0.08)$ y $\theta_{N_3} = 2.76$ o $2.36(0.09)$, se puede notar que la ambigüedad en el ángulo θ_{N_3} persiste tanto a nivel LO como a NLO. Una ambigüedad similar se halla a NLO para el ángulo de mezcla θ_{Σ_1} . Según hemos visto en el Capítulo 5, al menos para el caso de los nucleones estas ambigüedades desaparecen al realizar el análisis consistente de masas y decaimientos.

Tab. 6.7: Anchos de decaimiento para los estados de Nucleón del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

	$N(1535)$			$N(1520)$			
	πN	ηN	$\pi\Delta$	$\pi\Delta$	πN	ηN	
OP	S	S	D	S	D	D	D
LO	54	30	0.26	15.8	8	78	0.1
NLO	60	62	2	15.9	11	70	0.26
Exp	68(19)	63(18)	3(3)	17(6)	14(3)	68(9)	0.26(0.05)

	$N(1650)$					$N(1700)$					
	πN	ηN	$K\Lambda$	$\pi\Delta$		$\pi\Delta$	πN	ηN	$K\Lambda$	$K\Sigma$	
OP	S	S	S	D	OP	S	D	D	D	D	D
LO	139	2.7	9.3	4.1	LO	205	5.8	24.8	1	0.27	~ 0
NLO	108	18	11.5	1.6	NLO	266	18	28.7	0.24	~ 0	~ 0
Exp	105(37)	15(8)	12(7)	19(19)	Exp	-	-	21(13)	-	1.5(1.5)	-

	$N(1675)$			
	πN	ηN	$K\Lambda$	$\pi\Delta$
OP	D	D	D	D
LO	51	2.8	~ 0	72
NLO	50.7	6.5	~ 0	96
Exp	59(10)	-	0.75(0.75)	-

Los efectos de ruptura de simetría $SU(3)$ son anormalmente grandes en magnitud por aproximadamente un factor dos. En particular se manifiestan en los canales η , donde los ajustes a LO dan descripciones muy pobres. Un problema similar se presenta en el análisis de los decaimientos no-extraños [47]. El canal onda S $N(1535) \rightarrow \eta N$, que es muy importante, es demasiado pequeño a LO por un factor dos, mientras que el canal onda S $N(1650) \rightarrow \eta N$ está disminuído a LO por un factor cuatro. Por otro lado los canales πN son bien descriptos a LO para ambas resonancias.

El decaimiento onda S $\Lambda(1405) \rightarrow \pi\Sigma$ está bien descripto en todos los ajustes. Es sensible a la presencia del operador de 2-cuerpos \mathcal{B}_6 . Por otro lado el decaimiento onda D $\Lambda(1520) \rightarrow \pi\Sigma$ está bien descripto a LO mientras que el decaimiento $\Lambda(1520) \rightarrow \bar{K}N$ no lo está. Esto es un claro ejemplo de los efectos de ruptura de simetría.

Tab. 6.8: Anchos de decaimiento para los estados Λ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

	$\Lambda(1670)$					$\Lambda(1690)$				
	$\bar{K}N$	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\pi\Sigma^*$		$\pi\Sigma^*$	$\bar{K}N$	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	
OP	S	S	S	D	OP	S	D	D	D	D
LO	104	0.1	1.3	0.15	LO	13	9	61	~ 0	8.9
NLO	8.8	5.5	14	1.2	NLO	98	~ 0	15.4	~ 0	13
Exp	9.4(3.6)	6.6(3.6)	15(8)	-	Exp	-	-	15(4)	-	18(7)

	$\Lambda(1800)$					$\Lambda(1830)$				
	$\bar{K}N$	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\pi\Sigma^*$		$\bar{K}N$	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	$K\Xi$	$\pi\Sigma^*$
OP	S	S	S	D	D	D	D	D	D	
LO	41	29.4	147	2.5	2.6	3.6	70	~ 0	54.6	
NLO	97.7	85	96	0.7	11.9	10	38.5	~ 0	72.3	
Exp	98(40)	-	-	-	5.5(3.4)	-	47(22)	-	-	

	$\Lambda(1405)$		$\Lambda(1520)$	
	$\pi\Sigma$		$\bar{K}N$	$\pi\Sigma$
OP	S		D	D
LO	50		2.7	8.2
NLO	50		6.7	6.8
Exp	50(5)		7.0(0.5)	6.5(0.5)

En cuanto a los decaimientos $\Lambda(1670) \rightarrow \bar{K}N$ (onda S) y $\Lambda(1690) \rightarrow \bar{K}N$ (onda D) se puede notar lo siguiente. Estos son difíciles de describir a LO si se requiere que los ángulos $\theta_{N_{1,3}}$ tengan valores similares a los obtenidos en el ajuste de los decaimientos del sector no-extraño o al ajuste a NLO presentado en este capítulo. A NLO estos decaimientos son mejor descritos debido a los efectos de ruptura de simetría $SU(3)$, en particular los relacionados a los ángulos de mezcla.

El decaimiento onda S $\Delta(1700) \rightarrow \pi\Delta$ es particularmente sensible al operador de 2-cuerpos \mathcal{B}_2 . Asimismo se encuentra que es muy sensible a la inclusión o no de los canales Λ mencionados anteriormente en el ajuste a LO.

Tab. 6.9: Anchos de decaimiento para los estados Σ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

$\Sigma(1670)$						
	$\pi\Sigma^*$		$\bar{K}N$	$\pi\Lambda$	$\pi\Sigma$	
OP	S	D	D	D	D	
LO	2.7	1.5	2.2	4.7	47	
NLO	7.3	2.3	2.2	5.2	26.8	
Exp	-	-	6(3)	6(4)	27(13)	

$\Sigma(1750)$						
	$\bar{K}N$	$\pi\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\eta\Sigma$	$\bar{K}\Delta$	$\pi\Sigma^*$
OP	S	S	S	S	D	D
LO	45.2	50	5.4	14.2	~ 0	0.43
NLO	34	21	4.2	31	~ 0	0.8
Exp	28(21)	-	4.4(4.4)	39(28)	-	-

$\Sigma(1775)$						
	$\bar{K}N$	$\pi\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\eta\Sigma$	$\bar{K}\Delta$	$\pi\Sigma^*$
OP	D	D	D	D	D	D
LO	40	27	3.5	0.1	1.6	7.1
NLO	55.7	14.8	0.5	0.23	4.6	9.4
Exp	48(7)	20(4)	4(2)	-	-	12(3)

 Tab. 6.10: Anchos de decaimiento para los estados Ξ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

$\Xi(1820)$					
	$\pi\Xi^*$		$\bar{K}\Lambda$	$\bar{K}\Sigma$	$\pi\Xi$
OP	S	D	D	D	D
LO	4.2	2.4	11	13.6	4.5
NLO	4.2	3.4	17.5	28.8	0.15
Exp	-	-	-	-	-

Tab. 6.11: Anchos de decaimiento para los estados Δ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

	$\Delta(1620)$		$\Delta(1700)$			
	πN	$\pi\Delta$	$\pi\Delta$		πN	$K\Sigma$
	S	D	S	D	D	D
OP	S	D	S	D	D	D
LO	32.5	66	196	22	23	~ 0
NLO	35.2	58.6	150	50	32	~ 0
Exp	35(7)	64(22)	113(53)	30(18)	45(21)	-

La situación de los decaimientos asociados al estado $N(1700)$ requiere una cierta discusión. Dicha resonancia está reportada en el PDG con tres estrellas. Ya que los fotoacoplamientos y los electro-acoplamientos de los estados $p(1700)$ y $n(1700)$ son pequeños [53, 62], el acceso al estado $N(1700)$ por estos observables es limitado. En nuestros ajustes incluimos la estimación del PDG para el canal πN . Sin embargo, si este canal no es tenido en cuenta como dato no se observan cambios significativos en los ajustes. El ancho parcial predicho para la onda S de $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$ es grande mientras el canal onda D tiene un ancho pequeño. En particular es posible una estimación del ancho parcial del decaimiento $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$ a partir del ancho total πNN siempre que se asuma que este canal proviene principalmente del canal $\pi\Delta$ onda S, si es que se quiere obtener un ajuste razonable a NLO. Sin embargo esto afecta el ajuste de manera significativa, por lo que se ha decidido no incluir como dato del presente análisis la estimación de los anchos parciales $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$, dejando esto como un problema abierto. Un problema similar al que se tiene con el estado $N(1700)$ se encuentra para el decaimiento $\Lambda(1690) \rightarrow \pi\Sigma^*$, donde la estimación empírica para este ancho parcial, asumida solo onda S y estimada a partir de suponer que este canal es el más importante en los decaimientos $\pi\pi\Lambda$ y $\pi\pi\Sigma$, es de alrededor de 20 MeV, mientras que los ajustes predicen un valor del orden de los 100 MeV. Dando esa estimación como dato del ajuste se tienen efectos similares que los obtenidos para el decaimiento $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$. Por lo tanto no se ha incluido este ajuste tampoco. En pocas palabras, la inclusión de cada uno por separado de estos canales onda S como datos del ajuste conduce a los mismos valores de los coeficientes dentro de los errores. Los principales cambios por no incluir a ninguno de ellos se observan en los valores de los coeficientes onda S, que de forma indirecta alteran de manera apreciable al ángulo θ_{N_1} .

Del presente análisis se pueden obtener predicciones para los canales desconocidos de los estados del **70**-plete. En lo que sigue discutiremos algunas de ellas. Poco puede concluirse de las predicciones con anchos parciales pequeños, excepto por el hecho que es de esperar que los canales correspondientes sean prácticamente inaccesibles experimentalmente. La predicción para el ancho parcial onda D $N(1675) \rightarrow \pi\Delta$ de 95 MeV es consistente con el valor tentativo indicado en el PDG, el cual no ha sido usado como dato del presente análisis. Los anchos parciales onda S $\Lambda(1800)$ a $\eta\Lambda$ y a $\pi\Sigma$ dan como resultado valores aproximadamente iguales

a los datos empíricos para el canal $\overline{K}N$, y están en acuerdo con el ancho total. El ancho parcial onda D $\Lambda(1830) \rightarrow \pi\Sigma^*$ da como resultado el valor más grande, y está en acuerdo con la cota empírica inferior del 15%. El ancho total predicho es aproximadamente 130 MeV, a compararse con la estimación del PDG de 60 a 110 MeV. Para el ancho onda D $\Xi(1820)$ el PDG da un ancho total de $\sim 25(15)$ MeV [62]. Las predicciones dadas en la Tabla 6.10 son dependientes de la elección del ángulo de mezcla θ_{Ξ_3} que no puede determinarse a partir de este análisis. Las predicciones están dadas para la elección $\theta_{\Xi_3} = \theta_{N_3} = 2.76$. Los canales dominantes son el $\overline{K}\Sigma$ y $\overline{K}\Lambda$. El ancho total predicho es de alrededor de un factor dos más grande que el dado por el PDG. Si se impone al ajuste que el valor del ancho total sea reproducido, el ángulo de mezcla toma un valor $\theta_{\Xi_3} \sim 1.9$.

Se observa que varios de los canales donde puede haber efectos de ruptura de simetría $SU(3)$ dan valores de anchos parciales significativos, y por lo tanto pueden ser accesibles empíricamente. Tales canales son los canales onda S $\Lambda(1690) \rightarrow \pi\Sigma^*$, $\Lambda(1800) \rightarrow \eta\Lambda$, $\Lambda(1800) \rightarrow \pi\Sigma$, $\Sigma(1670) \rightarrow \pi\Sigma^*$, y $\Sigma(1750) \rightarrow \pi\Lambda$, y los onda D $N(1675) \rightarrow \eta N$, $\Lambda(1830) \rightarrow \eta\Lambda$, $\Lambda(1830) \rightarrow \pi\Sigma^*$, $\Sigma(1670) \rightarrow \pi\Sigma^*$ y $\Sigma(1775) \rightarrow \overline{K}\Delta$. Todos estos canales que involucran mesones π no se ven afectados por los operadores de ruptura de 1-cuerpo, y darían información adicional sobre los efectos de ruptura al nivel de operadores de 2-cuerpos.

Como último comentario se puede mencionar que es posible obtener un ajuste con un valor de $\chi_{gd}^2 \sim 1$ variando el factor que proviene del potencial de barrera centrífuga. Sin embargo, esto no aporta ningún cambio significativo en el resultado del análisis.

7. ANÁLISIS GLOBAL DE MASAS Y DECAIMIENTOS FUERTES DE TODOS LOS BARIONES DEL $[70, 1^-]$ -PLETE

7.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar los resultados de un primer estudio consistente de las masas y decaimientos del conjunto completo de bariones pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$. La falta de datos experimentales acerca de las amplitudes de helicidad electromagnética de gran cantidad de estos bariones hace que las mismas no sean incluidas en este primer análisis. El punto de partida será entonces el análisis de los decaimientos fuertes realizado en el capítulo anterior junto con el análisis equivalente para las masas realizado en [39, 40]. Por conveniencia comenzaremos haciendo una breve revisión del tratamiento de las masas y estados allí utilizado para luego presentar los resultados de nuestro análisis y compararlos con aquellos de los ajustes independientes.

7.2. Masas y estados de los bariones del $[70, 1^-]$ -plete

Como se mencionó en el Capítulo 6, si bien el límite de simetría $SU(3)$ exacta solo los octetes con el mismo J pueden mezclarse, mezclas mas generales pueden aparecer cuando se toman en cuenta efectos de ruptura de simetría de sabor. Es decir que mientras que para los nucleones la matriz de mezcla es de 2×2 (y por lo tanto parametrizable en términos de un ángulo de mezcla) para partículas con extrañeza las matrices son en general de 3×3 . Ellas dan cuenta de las mezclas entre octetes y decupletes en el caso de las partículas Σ_J y Ξ_J con $J = 1/2, 3/2$ y entre octetes y singletes para las $\Lambda_{J=1/2, 3/2}$. En el análisis de los decaimientos fuertes realizado en el Capítulo 6 las mezclas entre distintos multipletes de sabor fueron despreciadas. Las matrices de 2×2 resultantes fueron entonces parametrizadas en términos de un ángulo de mezcla para cada tipo de partícula, siendo estos ángulos considerados como parámetros del ajuste. Sin embargo, al realizar un ajuste simultáneo de masas y decaimientos esto último ya no es posible. Tal como se discutió en el Capítulo 5, en este caso los estados asociados a cada partícula se obtienen a partir de considerar el operador de masas. En este primer cálculo consistente se utilizará para ello el procedimiento sugerido en [39, 40] en el cual las contribuciones de ruptura de simetría de sabor a dicho operador son tratadas en forma perturbativa. En las dos subsecciones siguientes se presentan los detalles de la base de operadores de masa y el método perturbativo a utilizar.

7.2.1. Operador de masa

En términos de los operadores de la base, el operador de masa de los bariones pertenecientes al $\mathbf{70}$ -plete a orden $1/N_c$ y orden ϵN_c^0 tiene la forma más general,

$$M_{[\mathbf{70}, 1^-]} = \sum_{i=1}^{11} C_i O_i + \sum_{i=1}^4 D_i B_i, \quad (7.1)$$

donde C_i y D_i son coeficientes desconocidos a determinarse a partir de ajustar numéricamente los valores experimentales. A continuación damos la base de operadores de masa obtenida en Ref. [39, 40] escrita en la notación tensorial utilizada en la presente tesis.

Tab. 7.1: Lista de operadores utilizados como base del operador de masa del $\mathbf{70}$ -plete.

Operador
$O_1 = N_c \mathbf{1}$
$O_2 = -\sqrt{3}(ls)^{[0,1]}$
$O_3 = \frac{3\sqrt{5}}{N_c} (\ell(gG_c))^{[0,1]}$
$O_4 = -\frac{8\sqrt{6}}{N_c+1} (\ell(tG_c))^{[0,1]}$
$O_5 = -\frac{\sqrt{3}}{N_c} (lS_c)^{[0,1]}$
$O_6 = -\frac{\sqrt{3}}{N_c} (S_c S_c)^{[0,1]}$
$O_7 = -\frac{\sqrt{3}}{N_c} (sS_c)^{[0,1]}$
$O_8 = \frac{2\sqrt{5}}{N_c} (\ell(sS_c))^{[0,1]}$
$O_9 = \frac{18\sqrt{2}}{N_c^2} (\{gS_c, lG_c\})^{[0,1]}$
$O_{10} = -\frac{4\sqrt{6}}{N_c^2} (\{S_c, tG_c\})^{[0,1]}$
$O_{11} = \frac{18\sqrt{2}}{N_c^2} \left((lg)^{[1,8]} (\{S_c, G_c\})^{[1,8]} \right)^{[1,1]}$
$\overline{B}_1 = t^{[1,8]} - \frac{1}{2\sqrt{3}N_c} O_1$
$\overline{B}_2 = T_c^{[1,8]} - \frac{N_c-1}{2\sqrt{3}N_c} O_1$
$\overline{B}_3 = -\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{3}N_c} (gG_c)_{\lambda=2}^{[0,8]} + \frac{5(N_c^2-9)}{8\sqrt{3}N_c^2(N_c-1)} O_1 +$ $-\frac{5}{6(N_c-1)} O_6 - \frac{5}{18} O_7$
$\overline{B}_4 = -3\sqrt{3}(lG_c)^{[0,8]} + \frac{3}{2} O_2$

La misma consta de 11 operadores $SU(3)$ simétricos y de 4 operadores de ruptura. Estos últimos están definidos de manera tal que sus EM sean nulos para estados con $\mathcal{S} = 0$. La lista

contiene tres operadores de orden N_c^0 , que son los operadores O_1 , O_3 y O_4 . El operador de 1-cuerpo O_2 es el conocido operador spin-órbita, mientras que los otros dos son operadores de 2-cuerpos e involucran operadores con índices de sabor. Debe destacarse que, a $\mathcal{O}(N_c^0)$ es posible construir un cuarto operador independiente [37]. Sin embargo, el mismo puede ser tenido en cuenta por el resto de los operadores considerados en Ref. [39, 40]. Por lo tanto, y para facilitar la comparación con los resultados obtenidos en dicho análisis de masas independiente optamos aquí por utilizar la misma base de operadores. Los operadores O_5 a O_{11} son de $\mathcal{O}(1/N_c)$. El operador O_6 es el conocido operador hiperfino, que juega un papel importante a la hora de describir las masas de los bariones del $\mathbf{70}$ -plete. Notemos también que entre estos operadores hay tres operadores de 3-cuerpos, que son O_9 , O_{10} y O_{11} . También podemos clasificarlos según el momento angular. Los operadores (O_1, O_6, O_7, O_{10}) tienen momento angular orbital $l = 0$, los operadores $(O_2, O_4, O_5, O_9, O_{11})$ tienen $l = 1$ y (O_3, O_8) tienen $l = 2$.

Como en el caso de los decaimientos, consideraremos efectos de ruptura hasta orden ϵ . Notemos que para $N_c = 3$, ϵ y $1/N_c$ son similares, y por lo tanto correcciones de orden ϵ/N_c son irrelevantes. A orden ϵ los operadores efectivos son operadores que transforman como la irrep octete de $SU(3)$. Por lo tanto, los operadores de ruptura más generales pueden tomarse como combinaciones lineales de operadores octete y operadores singlete. Los operadores de ruptura de simetría $\overline{B}_{1,\dots,4}$ tienen elementos de matriz nulos entre estados de bariones no-extraños. Notar que el operador \overline{B}_2 está compuesto por dos términos de $\mathcal{O}(N_c)$, $T_c^{[1,8]}$ y el operador O_1 . Sin embargo, los términos de $\mathcal{O}(N_c)$ se cancelan y \overline{B}_2 es finalmente de $\mathcal{O}(N_c^0)$.

En el Apéndice E están dados los elementos de matriz tanto para los operadores $SU(3)$ simétricos como para los operadores de ruptura (Tablas E.1 a E.4).

7.2.2. Tratamiento perturbativo del problema

En esta sección describiremos el tratamiento perturbativo de las masas y los estados físicos del $\mathbf{70}$ -plete. Para ello notemos que a partir de la inspección de la Ec. (7.1) podemos escribir al operador de masa de la siguiente manera:

$$M_{\mathbf{70}} = M_{\mathbf{70}}^1 + M_{\mathbf{70}}^8, \quad (7.2)$$

donde $M_{\mathbf{70}}^1$ es un operador que transforma como un escalar de $SU(3)$ y $M_{\mathbf{70}}^8$ como la irrep adjunta.

Si suponemos que se cumple que $(M_{\mathbf{70}}^8)_{ij} \ll (M_{\mathbf{70}}^1)_{ij}$, $i, j = 1, 2$ para N e $i, j = 1, 2, 3$ para Λ y Σ , podemos tomar a $M_{\mathbf{70}}^8$ como una perturbación de $M_{\mathbf{70}}^1$. Aquí, $(M_{\mathbf{70}}^{\mathbf{R}})_{ij}$, $\mathbf{R} = \mathbf{1}, \mathbf{8}$ son los elementos de matriz de los respectivos operadores en la base de estados con spin bien definido. Por lo tanto, aplicando la teoría de perturbaciones usual de la mecánica cuántica, para el caso no-degenerado, se tiene que las masas y los estados vienen dados por:

$$m_i^{\mathbf{70}} = m_i^1 + (M_{\mathbf{70}}^8)_{ii}, \quad (\text{no suma}) \quad (7.3)$$

$$|e_i^{\mathbf{70}}\rangle = \frac{|e_i^{\mathbf{1}}\rangle + \sum_{j \neq i} \frac{(M_{\mathbf{70}}^{\mathbf{S}})_{ij}}{m_i^{\mathbf{1}} - m_j^{\mathbf{1}}} |e_j^{\mathbf{1}}\rangle}{\sqrt{1 + \sum_{j \neq i} \left(\frac{(M_{\mathbf{70}}^{\mathbf{S}})_{ij}}{m_i^{\mathbf{1}} - m_j^{\mathbf{1}}} \right)^2}}. \quad (7.4)$$

Los operadores efectivos que forman parte del operador $M_{\mathbf{70}}^{\mathbf{S}}$ se definen de manera tal de tener elementos de matriz nulos entre estados no-extraños. Por lo tanto, la Ec. (7.4) se reduce a $|e_i^{\mathbf{70}}\rangle = |e_i^{\mathbf{1}}\rangle$ para los mismos. Los estados y las masas del nucleón están dados por las mismas expresiones que en el caso de simetría $SU(2)$, con la diferencia que ahora la cantidad de operadores a tener en cuenta es mayor. En este esquema, dados los valores para los coeficientes C_1 a C_{11} y D_1 a D_4 los estados quedan completamente determinados. Esto a su vez permite el cálculo de los anchos de decaimientos fuertes una vez propuesto un conjunto de valores para los coeficientes de los operadores asociados a los mismos.

7.3. Análisis y discusión de resultados

En esta sección presentamos y analizamos los resultados obtenidos en este primer ajuste global de las masas y los decaimientos fuertes de todos los bariones pertenecientes al multiplete $[\mathbf{70}, 1^-]$ basado en el formalismo perturbativo descrito en la sección anterior. Como primer paso para llevar adelante dicho análisis se realizó un estudio numérico de los posibles ajustes de los parámetros de masas y decaimientos fuertes utilizando los mismos datos experimentales que en los ajustes del Capítulo 6. Como conclusión del mismo se observó la dificultad de obtener una descripción adecuada de las masas conocidas de los bariones a menos que el decaimiento $\Lambda(1690) \rightarrow \overline{K}N$ (D) fuera excluído de la lista de datos experimentales a ajustar. Por lo tanto, en lo que sigue se presentarán los resultados de un ajuste en el que dicho dato no es utilizado. Más adelante se discutirá el posible origen de esta dificultad así como potenciales mejoras al presente cálculo que permitan superarla.

En la Tabla 7.2 se dan los valores de los coeficientes de las masas y de los decaimientos fuertes para los operadores incluidos en el ajuste. Para el caso de las masas estos son los 11 operadores $SU(3)$ simétricos y los 4 operadores de ruptura que aparecen en Tabla 7.1. Para el caso de los decaimientos fuertes, la base es la misma dada en el Capítulo 6 para el caso a NLO, tanto la de operadores $SU(3)$ simétricos como la de operadores de ruptura. En ambos casos se indican también los coeficientes resultantes de los análisis de masas y decaimientos tomados de Ref. [39, 40] y Tabla 6.6, respectivamente.

Tab. 7.2: Parámetros del ajuste global y del independiente.

Masas	Global	Ind	Dec	Global	Ind
	[MeV]	[MeV]			
			Onda-S		
C_1	454(6)	449(2)	C_{S1}	18.2(1.5)	18.6(1.6)
C_2	66(17)	52(15)	C_{S2}	-5.7(1.7)	-3.22(0.97)
C_3	151(43)	116(44)	C_{S3}	5.8(4.5)	1.7(6.1)
C_4	98(108)	110(16)	C_{S4}	15.9(6.9)	9.7(2.7)
C_5	133(73)	74(30)	C_{S6}	-8.9(1.6)	-7.2(2.0)
C_6	450(39)	480(15)	B_{S1}	56(16)	31(17)
C_7	-198(51)	-159(50)	B_{S2}	-9(12)	8(18)
C_8	63(74)	3(55)	B_{S3}	-13(14)	-9(17)
C_9	79(250)	71(51)	Onda-D		
C_{10}	-87(65)	-84(28)	C_{D1}	2.55(0.23)	2.55(0.16)
C_{11}	96(200)	-44(43)	C_{D2}	-0.25(0.10)	-0.28(0.08)
D_1	-83(53)	-81(36)	C_{D3}	-0.5(1.1)	-0.43(0.95)
D_2	-171(13)	-194(17)	C_{D5}	1.99(0.52)	2.23(0.29)
D_3	43(35)	-15(30)	C_{D6}	-0.15(0.29)	-0.22(0.19)
D_4	-12(11)	-27(19)	C_{D8}	1.29(0.17)	1.26(0.13)
			C_{D9}	-2.4(1.4)	0.09(0.85)
			B_{D1}	1.4(1.1)	1.16(0.97)
			B_{D2}	5.0(1.0)	5.5(0.5)
		Glob		Ind	
χ_{gdl}^2		1.3		1.3	
gdl		25		18	

En la Tabla 7.3 se dan los valores para las masas de los bariones del $\mathbf{70}$ -plete que se obtienen a partir de el presnte ajuste, junto con los valores experimentales en el caso que existan. En este caso también se dan los resultados del ajuste independiente de Ref. [39, 40] para facilitar la comparación con los mismos.

Tab. 7.3: Masas predichas por la expansión $1/N_c$ tanto para el análisis independiente como para el análisis global. Los valores experimentales de las masas para todos los estados con determinación de tres o más estrellas en [62] se muestran en la segunda columna.

Estado	Masas [MeV]		
	Expt.	Global	Ind
$N_{1/2}$	1538(18)	1541	1541
$\Lambda_{1/2}$	1670(15)	1666	1667
$\Sigma_{1/2}$		1666	1637
$\Xi_{1/2}$		1792	1779
$N_{3/2}$	1523(15)	1539	1532
$\Lambda_{3/2}$	1690(15)	1680	1676
$\Sigma_{3/2}$	1675(15)	1672	1667
$\Xi_{3/2}$	1823(15)	1818	1815
$N'_{1/2}$	1660(20)	1652	1660
$\Lambda'_{1/2}$	1785(65)	1807	1806
$\Sigma'_{1/2}$	1765(35)	1774	1755
$\Xi'_{1/2}$		1946	1927
$N'_{3/2}$	1700(50)	1700	1699
$\Lambda'_{3/2}$		1856	1864
$\Sigma'_{3/2}$		1820	1769
$\Xi'_{3/2}$		1993	1980
$N_{5/2}$	1678(15)	1656	1671
$\Lambda_{5/2}$	1820(15)	1796	1836
$\Sigma_{5/2}$	1775(15)	1802	1784
$\Xi_{5/2}$		1967	1974
$\Delta_{1/2}$	1645(30)	1656	1645
$\Sigma''_{1/2}$		1796	1784
$\Xi''_{1/2}$		1936	1922
$\Omega_{1/2}$		2076	2061
$\Delta_{3/2}$	1720(50)	1723	1720
$\Sigma''_{3/2}$		1858	1847
$\Xi''_{3/2}$		1993	1973
$\Omega_{3/2}$		2128	2100
$\Lambda''_{1/2}$	1407(15)	1407	1407
$\Lambda''_{3/2}$	1520(15)	1521	1520

En la Tabla 7.4 se dan los valores de los contenidos de los estados en el subespacio de spin-sabor obtenidos en el presente análisis junto con los del análisis independiente de masas de Ref. [39, 40].

Tab. 7.4: Contenido de spin-sabor predicho por la expansión en $1/N_c$ para el ajuste global y el ajuste independiente [39, 40].

Estado	Estados ajuste Global				Estados ajuste Ind			
	² ₁	² ₈	⁴ ₈	² ₁₀	² ₁	² ₈	⁴ ₈	² ₁₀
$N_{1/2}$		0.96	0.28			0.82	0.57	
$\Lambda_{1/2}$	-0.04	0.98	0.19		-0.21	0.90	0.37	
$\Sigma_{1/2}$		0.93	0.35	0.1		0.52	0.81	0.27
$\Xi_{1/2}$		0.97	0.19	0.1		0.85	0.44	0.29
$N_{3/2}$		0.92	-0.40			-0.99	0.10	
$\Lambda_{3/2}$	0.04	0.93	-0.36		0.18	-0.98	0.09	
$\Sigma_{3/2}$		0.93	-0.35	0.07		-0.98	-0.01	-0.19
$\Xi_{3/2}$		0.95	-0.31	0.07		-0.98	0.03	-0.19
$N'_{1/2}$		-0.28	0.96			-0.57	0.82	
$\Lambda'_{1/2}$	0.008	-0.19	0.98		0.10	-0.38	0.92	
$\Sigma'_{1/2}$		-0.29	0.77	0.57		-0.83	0.54	0.17
$\Xi'_{1/2}$		-0.16	0.81	0.57		-0.46	0.87	0.18
$N'_{3/2}$		0.40	0.92			-0.10	-0.99	
$\Lambda'_{3/2}$	0.008	0.36	0.93		0.01	-0.09	-0.99	
$\Sigma'_{3/2}$		0.28	0.75	0.60		0.01	-0.57	-0.82
$\Xi'_{3/2}$		0.25	0.76	0.60		-0.02	-0.57	-0.82
$N_{5/2}$			1.00				1.00	
$\Lambda_{5/2}$			1.00				1.00	
$\Sigma_{5/2}$			1.00				1.00	
$\Xi_{5/2}$			1.00				1.00	
$\Delta_{1/2}$				1.00				1.00
$\Sigma''_{1/2}$		0.06	-0.57	0.82		-0.14	-0.31	0.94
$\Xi''_{1/2}$		0.06	-0.57	0.82		-0.14	-0.31	0.94
$\Omega_{1/2}$				1.00				1.00
$\Delta_{3/2}$				1.00				1.00
$\Sigma''_{3/2}$		-0.29	-0.53	0.80		-0.19	-0.80	0.57
$\Xi''_{3/2}$		-0.29	-0.53	0.80		-0.19	-0.80	0.57
$\Omega_{3/2}$				1.00				1.00
$\Lambda''_{1/2}$	1.00	0.04	0.004		0.97	0.23	0.04	
$\Lambda''_{3/2}$	1.00	-0.04	0.008		0.98	0.18	-0.01	

Las Tablas 7.5 a 7.9 contienen los valores de los anchos de decaimientos fuertes. Para facilitar la comparación de los resultados, se han incluido nuevamente los valores obtenidos en el ajuste independiente, junto con los resultados obtenidos en el ajuste global. En el caso que exista el dato experimental y sea considerado confiable, este también ha sido incluido.

Tab. 7.5: Anchos de decaimiento para los estados de Nucleón del $\mathbf{70}$ -plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

	$N(1535)$			$N(1520)$			
	πN	ηN	$\pi\Delta$	$\pi\Delta$	πN	ηN	
OP	S	S	D	S	D	D	D
Ind	60	62	2	15.9	11	70	0.26
Glob	56	61	1.7	17.0	11	73	0.26
Exp	68(19)	63(18)	3(3)	17(6)	14(3)	68(9)	0.26(0.05)

	$N(1650)$					$N(1700)$					
	πN	ηN	$K\Lambda$	$\pi\Delta$		$\pi\Delta$	πN	ηN	$K\Lambda$	$K\Sigma$	
OP	S	S	S	D	OP	S	D	D	D	D	D
Ind	108	18	11.5	1.6	Ind	266	18	28.7	0.24	~ 0	~ 0
Glob	114	18	12.5	1.2	Glob	320	17	24.2	0.27	~ 0	~ 0
Exp	105(37)	15(8)	12(7)	19(19)	Exp	-	-	21(13)	-	1.5(1.5)	-

	$N(1675)$			
	πN	ηN	$K\Lambda$	$\pi\Delta$
OP	D	D	D	D
Ind	50.7	6.5	~ 0	95.7
Glob	51.6	6.6	~ 0	91.6
Exp	59(10)	-	0.75(0.75)	-

Tab. 7.6: Anchos de decaimiento para los estados Λ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

	$\Lambda(1670)$					$\Lambda(1690)$				
	\overline{KN}	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\pi\Sigma^*$		$\pi\Sigma^*$	\overline{KN}	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	
OP	S	S	S	D	OP	S	D	D	D	D
Ind	8.8	5.5	14	1.2	Ind	98	~ 0	15.4	~ 0	13
Glob	9.5	5.8	19	0.9	Glob	19	13	104	~ 0	15
Exp	9.4(3.6)	6.6(3.6)	15(8)	-	Exp	-	-	-	-	18(7)

	$\Lambda(1800)$					$\Lambda(1830)$				
	\overline{KN}	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\pi\Sigma^*$		\overline{KN}	$\eta\Lambda$	$\pi\Sigma$	$K\Xi$	$\pi\Sigma^*$
OP	S	S	S	D	D	D	D	D	D	
Ind	97.7	85	96	0.7	11.9	10	38.5	~ 0	72.3	
Glob	32.9	118	75	1.1	11.1	10	41.4	~ 0	69.2	
Exp	98(40)	-	-	-	5.5(3.4)	-	47(22)	-	-	

	$\Lambda(1405)$	$\Lambda(1520)$	
	$\pi\Sigma$	\overline{KN}	$\pi\Sigma$
OP	S	D	D
Ind	50	6.7	6.8
Glob	50	6.8	6.8
Exp	50(5)	7.0(0.5)	6.5(0.5)

Tab. 7.7: Anchos de decaimiento para los estados Σ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

$\Sigma(1670)$					
	$\pi\Sigma^*$		$\bar{K}N$	$\pi\Lambda$	$\pi\Sigma$
OP	S	D	D	D	D
Ind	7.3	2.3	2.2	5.2	26.8
Glob	2.5	2.4	1.7	5.9	31.7
Exp	-	-	6(3)	6(4)	27(13)

$\Sigma(1750)$						
	$\bar{K}N$	$\pi\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\eta\Sigma$	$\bar{K}\Delta$	$\pi\Sigma^*$
OP	S	S	S	S	D	D
Ind	34	21	4.2	31	~ 0	0.8
Glob	0.5	49	5.5	16	1.1	10.6
Exp	28(21)	-	4.4(4.4)	39(28)	-	-

$\Sigma(1775)$						
	$\bar{K}N$	$\pi\Lambda$	$\pi\Sigma$	$\eta\Sigma$	$\bar{K}\Delta$	$\pi\Sigma^*$
OP	D	D	D	D	D	D
Ind	55.7	14.8	0.5	0.23	4.6	9.4
Glob	54.3	15.9	0.3	0.23	4.2	9.0
Exp	48(7)	20(4)	4(2)	-	-	12(3)

Tab. 7.8: Anchos de decaimiento para los estados Ξ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

$\Xi(1820)$					
	$\pi\Xi^*$		$\bar{K}\Lambda$	$\bar{K}\Sigma$	$\pi\Xi$
OP	S	D	D	D	D
Ind	4.2	3.4	17.5	28.8	0.15
Glob	9.7	3.7	18.1	28.5	0.64
Exp	-	-	-	-	-

Tab. 7.9: Anchos de decaimiento para los estados Δ del **70**-plete cuyas masas son conocidas experimentalmente. Valores en MeV.

	$\Delta(1620)$		$\Delta(1700)$			
	πN	$\pi\Delta$	$\pi\Delta$		πN	$K\Sigma$
	S	D	S	D	D	D
OP	S	D	S	D	D	D
Ind	35.2	58.6	150	50	32	~ 0
Glob	36.1	60.6	125	44	31	~ 0
Exp	35(7)	64(22)	113(53)	30(18)	45(21)	-

En lo que sigue discutiremos algunas de las características principales del ajuste realizado. En cuanto a los coeficientes para los parámetros de masas y decaimientos se observa que en términos generales los mismos son similares a los obtenidos en los análisis independientes. En el caso particular de las masas se observa la misma jerarquía de valores destacándose nuevamente la importancia del operador spin-spin. Una situación similar ocurre en el caso de los parámetros asociados a los decaimientos onda S, encontrándose un buen acuerdo con los valores reportados en el Capítulo 6 cuando los errores estimados son tenidos en cuenta. Finalmente los coeficientes de decaimiento onda D obtenidos en el presente ajuste global también son mayoritariamente parecidos a los del ajuste independiente. El único caso donde se puede observar una cierta diferencia es en el coeficiente C_{D9} cuyo valor central en el análisis global es mas apreciable.

En cuanto a las masas de los bariones, el ajuste global resulta ser de una calidad similar a la del ajuste independiente observándose solo en algunos casos una cierta discrepancia respecto de los valores experimentales. Debe notarse sin embargo, que aún para el caso de la $\Sigma(1775)$ donde esta discrepancia es más notable, el valor calculado no supera la cota experimental por más de ~ 15 MeV. Respecto de los contenidos de spin-sabor se observa que en algunos casos las mezclas entre estados **8** y **10** es mayor de lo esperado lo cual puede tomarse como una primera indicación de la necesidad de ir más allá de la aproximación perturbativa en futuros análisis globales. Al igual que en el análisis independiente las $\Lambda(1405)$ y $\Lambda(1520)$ resultan ser estados puramente singlete. Por otra parte es interesante extraer los ángulos de mezcla para los nucleones a partir del correspondientes contenidos de spin-sabor. Resulta así $\theta_{N_1} \simeq 0.28$ y $\theta_{N_3} \simeq 2.74$. Estos valores se comparan muy bien con los obtenidos en el análisis independiente de los decaimientos realizado en el Capítulo 6. Asimismo, no difieren sustancialmente de los obtenidos en el análisis global de las propiedades de los bariones no-extraños observándose solo que θ_{N_3} es algo menor. Existen esencialmente dos casos sobre los cuales se tienen datos experimentales establecidos de los anchos fuertes y para los que se observan diferencias significativas entre los resultados del análisis independiente y el global. En el caso de $\Sigma(1750) \rightarrow \bar{K}N$ (onda S) el ajuste global predice un valor que está algo por debajo de la banda experimental. El otro caso es el ya mencionado $\Lambda(1690) \rightarrow \bar{K}N$ (onda D) cuyo valor en el análisis global está varias veces por encima del valor experimental,

el cual no fue incluido entre los datos a ajustar. Como se mencionó al principio de esta sección, al incluir este dato no fue posible encontrar ajustes que dieran lugar a valores razonables de las masas de los bariones. Particularmente serio resulta ser el caso de la masa de la $N(1700)$ para la cual los ajustes realizados incluyendo el dato para el decaimiento $\Lambda(1690) \rightarrow \overline{K}N$ (onda D) dan valores muy por debajo del valor consignado en el PDG. Esto puede considerarse como otra indicación de la necesidad de permitir mezclas de estados más allá de la aproximación perturbativa aquí utilizada. Cabe también mencionar que, al igual que en el Capítulo 6, para describir los decaimientos fuertes se utilizó aquí una base de operadores simplificada. Es posible que la inclusión de alguno de los operadores de tres cuerpos o de ruptura de simetría que no fueron considerados en este análisis también contribuya a obtener una mejor descripción de los anchos conocidos. Finalmente, las predicciones para los anchos de decaimiento fuerte son en general similares a las obtenidas del ajuste independiente del Capítulo 6. Por lo tanto, valen aquí la mayor parte de las observaciones mencionadas al final del mismo, en particular aquella relacionada al decaimiento $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$. Al igual que allí la correspondiente estimación experimental del ancho mencionado no fue incluida al realizar el presente ajuste. El caso en que hay mayor discrepancia entre las predicciones de uno y otro cálculo es el del ancho de decaimiento $\Lambda(1690) \rightarrow \pi\Sigma^*$, lo cual probablemente esté asociado con las diferencias en la composición de esta partícula Λ .

8. CONCLUSIONES

En esta tesis se han estudiado algunas propiedades de los bariones pertenecientes al primer multiplete de paridad negativa en el marco de la expansión $1/N_c$ de QCD. En el Capítulo 2 se presenta una breve introducción a QCD y su extensión a un número de colores arbitrario. En el Capítulo 3 se muestra cómo se clasifican los bariones con sabores livianos dentro de los modelos de quarks. En el Capítulo 4 se indica de qué manera aparece la simetría de spin-sabor contraída en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, y cómo esto permite establecer la expansión en $1/N_c$ de los operadores asociados a los observables bariónicos. A partir del Capítulo 5 comienza la parte central de este trabajo de tesis doctoral. Allí se presenta el análisis consistente de las masas, los decaimientos fuertes y las amplitudes de helicidad electromagnética realizado para los bariones no-extraños pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$ junto con la correspondiente discusión de los resultados. En el Capítulo 6 se presenta el análisis independiente de los decaimientos fuertes para el conjunto completo de los bariones pertenecientes al mismo multiplete junto con la discusión de los resultados obtenidos. Por último, en el Capítulo 7 se presentan los resultados de un primer análisis global de las masas y los decaimientos fuertes para el mismo conjunto de bariones, junto con la discusión de los mismos. A partir de lo expuesto en los capítulos correspondientes, podemos extraer algunas conclusiones generales del presente trabajo de tesis de doctorado.

Respecto al ajuste global de los bariones no-extraños pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$ se puede observar lo siguiente. Como es sabido, la determinación de la estructura de spin-sabor de los bariones de paridad negativa es de importancia fundamental en el estudio de los bariones excitados, ya que sirve para revelar la dinámica de QCD responsable de sus propiedades. En este sentido, la estructura de los nucleones $J=1/2$ y $3/2$ es particularmente interesante ya que viniendo de a pares pueden mezclarse, siendo esta mezcla una medida sensible a esa dinámica. La conexión entre los estados teóricos y los observados es a priori un problema con una cuadruple indeterminación. La física es definitivamente diferente para cada caso, como se ha mostrado en este trabajo a través del análisis global de los observables considerados. El estudio lleva a la conclusión de que existe una asignación favorecida, basada en tres criterios presentados en la Sección 5.3. El Set 1 es aceptable bajo todos ellos, mientras que el Set 2 viene segundo, fallando solo en un criterio, a saber que los operadores de 2-cuerpos dominan sobre los de 1-cuerpo en los decaimientos fuertes. El Set 1 por otro lado es el favorecido en la versiones más simples del modelo de quarks con supresión de la interacción spin-órbita, lo que indica que la dinámica aparentemente más simple es la más realista. En lo que concierne a los ángulos de mezcla, en este trabajo se encuentra que $(\theta_1, \theta_3) = (0.49(0.29), 3.01(0.17))$ y $(0.40(0.13), 2.96(0.05))$ para los Ajustes 1 y 2 respecti-

vamente. Por comparación con un análisis independiente previo de los decaimientos fuertes usando la expansión $1/N_c$ [47], se obtuvo el valor $\theta_1 = 0.39(0.11)$ y θ_3 exhibía una doble degeneración $\theta_3 = (2.38, 2.82)(0.11)$. En este sentido el presente análisis global es importante para remover esta degeneración en los valores para θ_3 . Es útil comparar los resultados obtenidos en este análisis con aquellos obtenidos en los estudios basados en el modelo de quarks [73] y en el enfoque que utiliza la simetría $SU(6)_W$ [64, 65]. En nuestro estudio obtenemos valores de θ_3 similares a los de aquellos trabajos, mientras que para θ_1 son algo menores. En el caso de los ajustes de Ref. [64, 65] esto puede deberse al hecho de que los valores empíricos de los anchos parciales de los bariones $N_{1/2}$ han cambiado en el tiempo transcurrido desde dichas publicaciones.

Con respecto al análisis de los decaimientos fuertes del conjunto completo de los bariones pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$ se puede concluir lo expuesto a continuación. Este trabajo ha extendido estudios previos basados en la expansión en $1/N_c$ de los anchos parciales de los bariones de paridad negativa de menor energía [47] al incluir en el análisis aquellos canales de decaimiento bien establecidos de los bariones con extrañeza. El análisis fue llevado a cabo al primer orden en la expansión $1/N_c$ y al primer orden en la ruptura de simetría $SU(3)$. Para realizar los ajustes se consideraron las siguientes aproximaciones. Entre los operadores simétricos solo se incluyeron aquellos de 1 y 2-cuerpos, y de los operadores de ruptura solo los de 1-cuerpo. Además, se despreciaron las mezclas entre estados pertenecientes a multipletes de $SU(3)$ de distinta dimensión. Estas aproximaciones son necesarias para limitar la cantidad de parámetros a ajustar en relación a los datos empíricos disponibles. Un foco importante del análisis estuvo en la ruptura de simetría $SU(3)$, cuya importancia se hace notar a partir de las violaciones a LO de las relaciones independientes de los coeficientes y de los resultados obtenidos en el análisis a NLO. Por otro lado, la expansión en $1/N_c$ parece funcionar bastante bien, ya que los coeficientes a NLO de los operadores simétricos $SU(3)$ son en general de tamaño natural o más chicos. Esto concuerda con las conclusiones obtenidas en trabajos anteriores donde se había analizado el sector no-extraño. Cabe mencionar la existencia de otras soluciones al ajuste a NLO donde el χ^2 no es significativamente mayor que el presentado en este trabajo. Tales soluciones tienen sin embargo coeficientes a NLO anormalmente grandes y llevan a una expansión inconsistente en $1/N_c$. Un problema interesante que queda abierto a partir de este análisis son los dos decaimientos onda S $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$ y $\Lambda(1690) \rightarrow \pi\Sigma^*$, cuyas predicciones son bastante grandes, y están muy correlacionadas. Contar con información más precisa de estos anchos tiene el potencial de modificar los resultados de los coeficientes onda S y del ángulo de mezcla θ_{N_1} a la vez. Una conclusión del análisis que merece destacarse es el hecho que si bien los operadores de 1-cuerpo juegan un papel central en ambos decaimientos onda S y D, como se esperaría del enfoque del modelo de quarks, los operadores de 2-cuerpos son cruciales para obtener una descripción satisfactoria del conjunto de los decaimientos.

Por último, respecto del análisis global de las masas y los decaimientos fuertes del conjunto completo de los bariones pertenecientes al multiplete $[70, 1^-]$ se ha llevado a cabo un ajuste de la mayor parte de los valores empíricos de dichos observables en el marco de la aproximación perturbativa al tratamiento de los operadores de masa asociados a la ruptura

de simetría de sabor propuesto en la Ref. [40]. Se puede observar que las características principales de los ajustes independientes se siguen conservando también en el ajuste global. Con respecto a los operadores considerados, solo se encuentra una sutil diferencia en el caso del operador \mathcal{B}_9 onda D, cuya importancia parece ser levemente mayor en el caso del análisis global con respecto al análisis independiente de los decaimientos. En cuanto a las masas observamos que ambos ajustes dan resultados similares, con la única observación hecha en el caso de la masa de la partícula $\Sigma(1775)$, cuyo valor calculado supera al valor de la cota experimental por poco menos de 15 MeV. Respecto a los contenidos de spin-sabor se observa que en algunos casos las mezclas entre estados **8** y **10** son mayores de lo esperado lo cual puede tomarse como una indicación de la necesidad de ir más allá de la aproximación perturbativa en futuros análisis globales. Es interesante mencionar que las partículas $\Lambda(1405)$ y $\Lambda(1520)$ resultan ser puramente estados singlete, en acuerdo con lo obtenido en el ajuste independiente. Por otro lado, de este ajuste se obtienen en el sector no-extraño los ángulos de mezcla $\theta_{N_1} \simeq 0.28$ y $\theta_{N_3} \simeq 2.74$, lo que es compatible con lo obtenido en el análisis independiente de los decaimientos fuertes del Capítulo 6, y siendo solo θ_{N_3} algo menor que el obtenido en el análisis global de bariones no-extraños del Capítulo 5. En el presente análisis se ha excluido el valor experimental del ancho de decaimiento fuerte $\Lambda(1690) \rightarrow \bar{K}N$ como dato a ajustar. La inclusión del mismo da lugar a dificultades para la descripción de las masas conocidas de los bariones, en particular la de la $N(1700)$. Es posible que ésto se deba a la aproximación perturbativa, y que una solución al problema sea la realización de un tratamiento de las matrices de mezcla que vaya más allá de la misma. Para las predicciones de los anchos fuertes, valen la mayor parte de las observaciones realizadas en el ajuste independiente de los decaimientos fuertes, ya que la mayoría de los valores son muy similares. En particular, se mantiene la observación sobre el decaimiento $N(1700) \rightarrow \pi\Delta$, y al igual que en ese ajuste, no se ha considerado la estimación experimental del mismo para realizar los ajustes globales. En resumen, concluimos que este trabajo sienta las bases para la caracterización global de las masas y decaimientos fuertes de los bariones del **70**-plete y abre el camino para mejoras posteriores que permitan un ajuste consistente más satisfactorio de estos observables. Algunas de las propuestas que hacemos para lograr ésto son, por ejemplo, utilizar una base de operadores más completa para el caso de los decaimientos fuertes, y/o considerar las mezclas de estados de manera más precisa. Por último, también consideramos pertinente para el progreso de los futuros análisis la determinación más precisa de los datos experimentales existentes, así como la obtención de información experimental de aquellos que aún no son conocidos.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Noberto Scoccola por ayudarme a alcanzar este logro tan importante.

Al los Dres. José L. Goity y Chandana P. Jayalath por toda su colaboración durante este trabajo de doctorado.

Al Dr. Miguel Socolovsky por sus aportes.

A Pablo Allen y a Mariano Paulin, por ayudarme con el texto.

A mis amistades, las más cercanas y las no tan cercanas, las que están hace mucho y las que están hace no tanto.

A mis compañeros de trabajo tanto del ámbito docente como del doctorado. En especial a mis compañeros de oficina, los que fueron pasando y los que están, que nos bancamos mutuamente en las buenas y en las malas.

A mi familia, entera. A mis tres hermanos, a mi vieja y a mi viejo en particular, que no hace ni falta decir que esto lo logré en gran parte por ellos. En especial a mi viejo, que la viene luchando hace rato como un campeón de la vida.

Por último y que incluye a todo lo anterior pero hace mucho más grande al grupo. A la patria, que sin dudas que es el otro.

Apéndice

A. TEOREMA DE WIGNER-ECKART Y CONVENCIONES ADOPTADAS

A.1. Teorema de Wigner-Eckart para $SU(2)$

Los elementos de matriz de operadores tensoriales esféricos en la base de autoestados del momento angular pueden expresarse como el producto de dos factores: un elemento de matriz reducido, que es independiente de la orientación (proyección) del momento angular y un coeficiente de Wigner (o coeficiente de Clebsch-Gordan). A continuación se da la convención de fase relacionada con el teorema de Wigner-Eckart que se utilizó en los cálculos del presente trabajo.

$$\langle j'm' | \mathbf{T}(kq) | jm \rangle = \frac{(-1)^{k-j+j'}}{\sqrt{2j'+1}} \langle kq; jm | j'm' \rangle \langle j' || \mathbf{T}(k) || j \rangle, \quad (\text{A.1})$$

donde $\langle j' || \mathbf{T}(k) || j \rangle$ es el elemento de matriz reducido del operador tensorial $\mathbf{T}(kq)$ de rango k en coordenadas esféricas, y $\langle kq; jm | j'm' \rangle$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan convencionales [63].

A.2. Teorema de Wigner-Eckart para $SU(3)$

El teorema de Wigner-Eckart para operadores tensoriales “esféricos” de $SU(3)$ puede escribirse de manera completamente análoga al de $SU(2)$ [79]. Es decir

$$\left\langle \begin{array}{c} (p, q) \\ YII_3 \end{array} \left| T_{(Y'I'I'_3)}^{[p',q']} \right| \begin{array}{c} (p'', q'') \\ Y''I''I''_3 \end{array} \right\rangle = \sum_{\gamma} \left\langle \begin{array}{cc} (p'', q'') & (p', q') \\ Y''I''I''_3 & Y'I'I'_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} (p, q) \\ YII_3 \end{array} \right\rangle_{\gamma} \frac{\langle (p, q) || T^{[p',q']} || (p'', q'') \rangle_{\gamma}}{\sqrt{d_R}}. \quad (\text{A.2})$$

donde d_R es la dimensión de la representación irreducible (irrep) $R = (p, q)$ de $SU(3)$ correspondiente, dada por la Ec. (3.23)

Los coeficientes de Clebsch-Gordan (CG) de $SU(3)$ pueden escribirse como un producto de un coeficiente de CG de $SU(2)$ y un factor isoescalar

$$\left\langle \begin{array}{cc} (p'', q'') & (p', q') \\ Y''I''I''_3 & Y'I'I'_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} (p, q) \\ YII_3 \end{array} \right\rangle_{\gamma} = \langle I''I''_3, I'I'_3 | II_3 \rangle \left\langle \begin{array}{cc} (p'', q'') & (p', q') \\ Y''I'' & Y'I' \end{array} \left\| \begin{array}{c} (p, q) \\ YI \end{array} \right\rangle_{\gamma} \quad (\text{A.3})$$

Aquí, $\gamma = 1, \dots, \gamma_{\text{máx}}$ es la multiplicidad de la irrep (p, q) en el producto de Kroenecker de las irreps (p'', q'') y (p', q') , i.e. $(p'', q'') \otimes (p', q')$, Por ejemplo, el producto de dos representaciones octete a una representación octete, i.e. $(1, 1) \otimes (1, 1) \rightarrow (1, 1)$, da como resultado en

el estado final un octete con multiplicidad dos, es decir $\gamma = 1, 2$ en este caso. Para una dada representación (p, q) , la hipercarga (Y) y el isospin (I) están acotados. El rango de valores para Y viene dado por

$$\frac{-(q + 2p)}{3} \leq Y \leq \frac{(p + 2q)}{3} \quad (\text{A.4})$$

y para un dado valor de Y , el rango de valores de I está dado por

$$\left| \frac{Y}{2} + \frac{p - q}{3} \right| \leq I \leq \frac{p + q}{2} - \frac{1}{2} \left| Y - \frac{p - q}{3} \right|. \quad (\text{A.5})$$

B. ELEMENTOS DE MATRIZ REDUCIDOS (EMRS) DE LOS GENERADORES DE SPIN-SABOR Y MOMENTO ANGULAR ÓRBITAL

B.1. EMR de operadores de $SU(4) \times O(3)$

A continuación se dan las expresiones explícitas de los elementos de matriz reducidos para los generadores del grupo de simetrías $SU(4) \times O(3)$.

Para los operadores actuando sobre la parte orbital se obtiene

$$\langle l' || l^{[1,0]} || l \rangle = -\sqrt{l(l+1)(2l+1)}\delta_{ll'} . \quad (\text{B.1})$$

Para los operadores actuando sobre el quark excitado se obtiene (notar que dado que los estados tienen $s = i = 1/2$, el ket $|[1/2, 1/2]\rangle$ se indica simplemente como $|1/2\rangle$)

$$\langle 1/2 || s^{[1,0]} || 1/2 \rangle = \langle 1/2 || t^{[0,1]} || 1/2 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} , \quad (\text{B.2})$$

$$\langle 1/2 || g^{[1,1]} || 1/2 \rangle = \langle 1/2 || s^{[1,0]} || 1/2 \rangle \langle 1/2 || t^{[0,1]} || 1/2 \rangle = \frac{3}{2} . \quad (\text{B.3})$$

Para los operadores actuando sobre el carozo se obtiene (notar que dado que los estados del carozo tienen $S_c = I_c$, el ket $|[S_c, I_c]\rangle$ se indica simplemente como $|S_c\rangle$)

$$\langle S'_c || S_c^{[1,0]} || S_c \rangle = \langle S'_c || T_c^{[0,1]} || S_c \rangle = \sqrt{S_c(S_c+1)(2S_c+1)}\delta_{S_c S'_c} , \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \langle S'_c || G_c^{[1,1]} || S_c \rangle &= \frac{\sqrt{(2S'_c+1)(2S_c+1)}}{4} \\ &\times \sqrt{(N_c+1)^2 - (S'_c - S_c)^2(S'_c + S_c + 1)^2} . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.2. EMR de operadores de $SU(6) \times O(3)$

A continuación se dan los elementos de matriz reducidos de los generadores del espacio de quark excitado y del carozo.

Para los generadores de quark excitado se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle 1/2 \| s^{[1,0]} \| 1/2 \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}}, \\
 \langle (1,0) \| t^{[0,1]} \| (1,0) \rangle &= 2, \\
 \langle (1,0) \| g^{[1,1]} \| (1,0) \rangle &= \sqrt{6}.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Para los generadores del carozo se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle S'_c \| S_c^{[1,0]} \| S_c \rangle &= \sqrt{S_c(S_c+1)(2S_c+1)} \delta_{S_c S'_c}, \\
 \frac{\langle (2, (N_c-3)/2) \| T_c^{[0,1]} \| (2, (N_c-3)/2) \rangle}{\sqrt{d(2, (N_c-3)/2)}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{19+N_c(N_c+4)}{3}}, \\
 \frac{\langle (0, (N_c-1)/2) \| T_c^{[0,1]} \| (0, (N_c-1)/2) \rangle}{\sqrt{d(0, (N_c-1)/2)}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(N_c-1)(N_c+5)}{3}}, \\
 \frac{\langle (0, (N_c-1)/2, 0) \| G_c^{[1,1]} \| (0, (N_c-1)/2, 0) \rangle}{\sqrt{d(0, (N_c-1)/2)}} &= 0, \\
 \frac{\langle (2, (N_c-3)/2, 1) \| G_c^{[1,1]} \| (0, (N_c-1)/2, 0) \rangle}{\sqrt{d(2, (N_c-3)/2)}} &= -\sqrt{\frac{(N_c+3)(N_c+1)}{4}}, \\
 \frac{\langle (0, (N_c-1)/2, 1) \| G_c^{[1,1]} \| (2, (N_c-3)/2, 1) \rangle}{\sqrt{d(0, (N_c-1)/2)}} &= -\sqrt{3 \frac{(N_c+5)(N_c-1)}{4}}, \\
 \frac{\langle (4, (N_c-5)/2, 0) \| G_c^{[1,1]} \| (2, (N_c-3)/2, 1) \rangle}{\sqrt{d(4, (N_c-5)/2)}} &= -\sqrt{3 \frac{(N_c+5)(N_c-1)}{4}}, \\
 \frac{\langle (2, (N_c-3)/2, 1) \| G_c^{[1,1]} \| (2, (N_c-3)/2, 1) \rangle_\gamma}{\sqrt{d(2, (N_c-3)/2)}} &= \begin{cases} 2(N_c+2) \sqrt{\frac{2}{(19+N_c(N_c+4))}} & \gamma = 1 \\ -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3(N_c^2-9)(N_c+1)(N_c+7)}{(19+N_c(N_c+4))}} & \gamma = 2 \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

C. FACTORES ISOESCALARES DE $SU(3)$

Este apéndice proporciona los factores isoescalares necesarios para los cálculos efectuados en este trabajo. Estos corresponden a la emisión de mesones pertenecientes a la representación $\mathbf{8}$ de $SU(3)$, y están dados para las irreps de $SU(3)$ de interés para N_c arbitrario. Denotaremos a los factores isoescalares por:

$$\left\langle \begin{array}{cc} (p, q) & (1, 1) \\ Y & I \end{array} \parallel \begin{array}{cc} (p', q') \\ Y' & I' \end{array} \right\rangle_{\gamma}, \quad (\text{C.1})$$

donde las irreps de $SU(3)$ son identificadas en términos de dos etiquetas que definen los tableaux de Young, dadas por (p, q) , donde $p + 2q = N_c$. Para bariones, las correspondencias entre multipletes para N_c arbitrario (impar) y para $N_c = 3$ son las siguientes: $(p = 0, q = \frac{N_c-3}{2}) \rightarrow \mathbf{1}$, $(p = 1, q = \frac{N_c-1}{2}) \rightarrow \mathbf{8}$, y $(p = 3, q = \frac{N_c-3}{2}) \rightarrow \mathbf{10}$.

Tab. C.1: Correspondencias entre representaciones para N_c impar arbitrario. Expuestos están los multipletes de $SU(3)$ para N_c genérico y los correspondientes para $N_c = 3$, a saber $\mathbf{1}$, $\mathbf{8}$ y $\mathbf{10}$.

1 Baryons		8 Baryons		10 Baryons		Mesons	
$(p, q) = (0, \frac{N_c-3}{2})$		$(p, q) = (1, \frac{N_c-1}{2})$		$(p, q) = (3, \frac{N_c-3}{2})$		$(p, q) = (1, 1)$	
Estado	(Y, I)	Estado	(Y, I)	Estado	(Y, I)	Estado	(Y, I)
Λ	$(\frac{N_c-3}{3}, 0)$	N	$(\frac{N_c}{3}, \frac{1}{2})$	Δ	$(\frac{N_c}{3}, \frac{3}{2})$	π	$(0, 1)$
		Σ	$(\frac{N_c-3}{3}, 1)$	Σ^*	$(\frac{N_c-3}{3}, 1)$	η	$(0, 0)$
		Λ	$(\frac{N_c-3}{3}, 0)$	Ξ^*	$(\frac{N_c-6}{3}, \frac{1}{2})$	K	$(1, \frac{1}{2})$
		Ξ	$(\frac{N_c-6}{3}, \frac{1}{2})$	Ω	$(\frac{N_c-9}{3}, 0)$	\bar{K}	$(-1, \frac{1}{2})$

Las Tablas C.2 a C.6 dan los factores isoescalares de interés. La primer fila de las tablas indican el estado de barión excitado, y la segunda fila el barión final y el mesón. Los argumentos de los factores isoescalares están en el orden $(B^*, P \parallel B)$, donde B^* , P y B son los números cuánticos del barión excitado, el mesón y el barión final respectivamente.

Tab. C.2: Factores isoescalares para los decaimientos $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8}$. Los valores listados deben multiplicarse por $f_1 = \frac{1}{(N_c+3)}$ y $f_2 = \frac{1}{(N_c+3)} \sqrt{\frac{(N_c-1)}{(N_c+7)}}$ para obtener los factores isoescalares para $\gamma = 1$ y $\gamma = 2$, respectivamente.

		N			
		ηN	πN	$K\Sigma$	$K\Lambda$
$\gamma = 1$		N_c	3	$\sqrt{3(N_c-1)}$	$\sqrt{3(N_c+3)}$
$\gamma = 2$		3	$-(N_c+6)$	$\frac{N_c+15}{\sqrt{3(N_c-1)}}$	$-\sqrt{3(N_c+3)}$

		Λ			
		$\bar{K}N$	$\pi\Sigma$	$\eta\Lambda$	$K\Xi$
$\gamma = 1$		$-\sqrt{\frac{3(N_c+3)}{2}}$	0	N_c-3	$3\sqrt{\frac{N_c-1}{2}}$
$\gamma = 2$		$\sqrt{\frac{3(N_c+3)}{2}}$	$-\sqrt{\frac{(N_c+3)^3}{3(N_c-1)}}$	6	$\frac{9-N_c}{\sqrt{2(N_c-1)}}$

		Σ				
		$\bar{K}N$	$\eta\Sigma$	$\pi\Sigma$	$\pi\Lambda$	$K\Xi$
$\gamma = 1$		$3\sqrt{\frac{N_c-1}{2}}$	N_c-3	$2\sqrt{6}$	0	$\sqrt{\frac{3(N_c+3)}{2}}$
$\gamma = 2$		$\frac{N_c+15}{\sqrt{2(N_c-1)}}$	$\frac{2(N_c-9)}{N_c-1}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(N_c-3)(N_c+7)}{N_c-1}$	$\sqrt{\frac{(N_c+3)^3}{N_c-1}}$	$-\frac{5N_c+3}{N_c-1} \sqrt{\frac{N_c+3}{6}}$

		Ξ			
		$\bar{K}\Sigma$	$\bar{K}\Lambda$	$\eta\Xi$	$\pi\Xi$
$\gamma = 1$		$-\sqrt{N_c+3}$	$3\sqrt{N_c-1}$	N_c-6	3
$\gamma = 2$		$\frac{5N_c+3}{3(N_c-1)} \sqrt{N_c+3}$	$\frac{9-N_c}{\sqrt{N_c-1}}$	$\frac{7N_c-15}{N_c-1}$	$\frac{N_c^2+3N_c+36}{3(N_c-1)}$

Tab. C.3: Factores isoescalares para los decaimientos $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{10}$. Los valores listados deben multiplicarse por $f_1 = \frac{1}{\sqrt{45+N_c(N_c+6)}}$ y $f_2 = \sqrt{\frac{5(N_c-3)(N_c+5)}{(N_c+1)(N_c+9)(45+N_c(N_c+6))}}$ para obtener los factores isoescalares para $\gamma = 1$ y $\gamma = 2$, respectivamente. Notar que f_2 se anula para $N_c = 3$, ya que para ese caso hay un único reacoplamiento $\mathbf{10} \otimes \mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10}$.

	Δ			Σ^*			
	$\eta\Delta$	$\pi\Delta$	$K\Sigma^*$	$\overline{K}\Delta$	$\eta\Sigma^*$	$\pi\Sigma^*$	$K\Sigma^*$
$\gamma = 1$	N_c	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{3(N_c+5)}$	$-\frac{3\sqrt{N_c+5}}{2}$	$N_c - 3$	$2\sqrt{6}$	$\sqrt{6(N_c+3)}$
$\gamma = 2$	3	$-\frac{N_c+6}{\sqrt{5}}$	$\frac{3-N_c}{\sqrt{3(N_c+5)}}$	$\frac{N_c-3}{2\sqrt{N_c+5}}$	$\frac{4(N_c+3)}{N_c+5}$	$-\frac{N_c^2+10N_c+33}{\sqrt{6(N_c+5)}}$	$\frac{3-N_c}{N_c+5}\sqrt{\frac{2(N_c+3)}{3}}$

	Ξ^*			Ω		
	$\overline{K}\Sigma^*$	$\eta\Sigma^*$	$\pi\Sigma^*$	$K\Omega$	$\overline{K}\Xi^*$	$\eta\Omega$
$\gamma = 1$	$-2\sqrt{N_c+3}$	$N_c - 6$	3	$3\sqrt{N_c+1}$	$-3\sqrt{\frac{N_c+1}{2}}$	$N_c - 9$
$\gamma = 2$	$\frac{2(N_c-3)\sqrt{N_c+3}}{3(N_c+5)}$	$\frac{5N_c+9}{N_c+5}$	$-\frac{N_c^2+9N_c+36}{3(N_c+5)}$	$\frac{(3-N_c)\sqrt{N_c+1}}{N_c+5}$	$\frac{N_c-3}{N_c+5}\sqrt{\frac{N_c+1}{2}}$	$\frac{6(N_c+1)}{N_c+5}$

Tab. C.4: Factores isoescalares para los decaimientos $\mathbf{8} \rightarrow \mathbf{10}$. Los valores listados deben multiplicarse por $f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(N_c+1)(N_c+5)}}$ para obtener los factores isoescalares.

	N		Λ	
	$\pi\Delta$	$K\Sigma^*$	$\pi\Sigma^*$	$K\Sigma^*$
	$-\sqrt{\frac{(N_c-1)(N_c+5)}{2}}$	$-2\sqrt{\frac{N_c-1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{(N_c+3)(N_c-1)}{3}}$	$-\sqrt{2(N_c-1)}$

	Σ				Ξ			
	$\overline{K}\Delta$	$\eta\Sigma^*$	$\pi\Sigma^*$	$K\Sigma^*$	$\eta\Sigma^*$	$\pi\Sigma^*$	$\overline{K}\Sigma^*$	$K\Omega$
	$\sqrt{N_c+5}$	2	$\frac{N_c+1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{2(N_c+3)}{3}}$	2	$\frac{2N_c}{3}$	$\frac{2\sqrt{N_c+3}}{3}$	$2\sqrt{N_c+1}$

Tab. C.5: Factores isoescalares para los decaimientos $\mathbf{10} \rightarrow \mathbf{8}$. Los valores listados deben multiplicarse por $f = ((N_c + 7)(N_c - 1))^{-1/2}$ para obtener los factores isoescalares.

Δ		Ξ^*			
πN	$K\Sigma$	$\bar{K}\Sigma$	$\bar{K}\Lambda$	$\eta\Xi$	$\pi\Xi$
$-\sqrt{(N_c - 1)(N_c + 5)}$	$2\sqrt{\frac{N_c + 5}{3}}$	$\frac{2\sqrt{N_c + 3}}{3}$	$2\sqrt{N_c - 1}$	-2	$-\frac{2N_c}{3}$

Σ^*				Ω
$\eta\Sigma$	$\bar{K}N$	$\pi\Sigma$	$\pi\Lambda$	$\bar{K}\Xi$
-2	$\sqrt{2(N_c - 1)}$	$-\frac{N_c + 1}{\sqrt{6}}$	$-\sqrt{(N_c + 3)(N_c - 1)}$	$\sqrt{\frac{2(N_c + 3)}{3}}$

Tab. C.6: Factores isoescalares para los decaimientos $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{8}$.

Λ			
$\bar{K}N$	$\pi\Sigma$	$\eta\Lambda$	$K\Xi$
1	$\sqrt{\frac{2}{N_c - 1}}$	$\sqrt{\frac{6}{N_c + 3}}$	$\sqrt{\frac{12}{(N_c + 3)(N_c - 1)}}$

D. ELEMENTOS DE MATRIZ DE LOS OPERADORES DE LOS
OBSERVABLES PARA EL CASO DE SIMETRÍA $SU(2)$

Tab. D.1: Elementos de matriz (sin normalizar) de los 8 operadores en la Tabla 5.2. La tercera y sexta filas corresponden a elementos de matriz no diagonales. Los elementos de cada fila deben multiplicarse por el factor global. Para obtener los elementos normalizados se debe multiplicar por los factores α_n .

Estado	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	Factor global
${}^2N_{1/2}^*$	N_c	$\frac{2N_c-3}{3\sqrt{6}N_c}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{N_c+1}$	$\frac{N_c+3}{9N_c^2}$	$-\frac{N_c+3}{9\sqrt{2}N_c^2}$	$\frac{N_c+3}{12\sqrt{3}N_c^2}$	0	1
${}^4N_{1/2}^*$	N_c	$\frac{5}{6\sqrt{6}}$	$\frac{1}{48\sqrt{3}}\frac{N_c+1}{N_c}$	0	$\frac{5}{9N_c}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9N_c}$	$-\frac{1}{6\sqrt{3}N_c}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}N_c}$	1
${}^4N_{1/2}^* - {}^2N_{1/2}^*$	0	$\frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{(2N_c-1)}{48\sqrt{6}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{N_c+1}$	$-\frac{1}{9\sqrt{2}N_c}$	0	0	$\frac{1}{24\sqrt{3}N_c}$	$\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}$
${}^2N_{3/2}^*$	N_c	$\frac{3-2N_c}{6\sqrt{6}N_c}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}(N_c+1)}$	$-\frac{N_c+3}{18N_c^2}$	$-\frac{N_c+3}{9\sqrt{2}N_c^2}$	$\frac{N_c+3}{12\sqrt{3}N_c^2}$	0	1
${}^4N_{3/2}^*$	N_c	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{60\sqrt{3}}\frac{N_c+1}{N_c}$	0	$\frac{2}{9N_c}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9N_c}$	$-\frac{1}{6\sqrt{3}N_c}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{15N_c}$	1
${}^4N_{3/2}^* - {}^2N_{3/2}^*$	0	$\frac{\sqrt{30}}{36}$	$\frac{(1-2N_c)}{96\sqrt{15}N_c}$	$-\frac{\sqrt{30}}{12(N_c+1)}$	$-\frac{\sqrt{5}}{18N_c}$	0	0	$-\frac{1}{24\sqrt{30}N_c}$	$\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}$
$N_{5/2}^*$	N_c	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}$	$\frac{1}{240\sqrt{3}}\frac{N_c+1}{N_c}$	0	$-\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9N_c}$	$-\frac{1}{6\sqrt{3}N_c}$	$\frac{1}{30\sqrt{6}N_c}$	1
$\Delta_{1/2}^*$	N_c	$-\frac{1}{3\sqrt{6}}$	0	0	$\frac{4}{9N_c}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9N_c}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}N_c}$	0	1
$\Delta_{3/2}^*$	N_c	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$	0	0	$-\frac{2}{9N_c}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{9N_c}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}N_c}$	0	1
α_n	1	$\frac{6\sqrt{6}}{5}$	$\frac{144}{5}\sqrt{6}$	$2\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{9}{2\sqrt{2}}$	$3\sqrt{3}$	$6\sqrt{6}$	

Tab. D.2: Elementos de matriz reducidos de los operadores de onda S del pión. Al igual que antes, cada elemento de matriz debe multiplicarse por el correspondiente factor global. En la última fila están dados los correspondientes factores de normalización.

Pi3n onda S	$O_1^{[0,1]}$	$O_2^{[0,1]}$	$O_3^{[0,1]}$	$O_4^{[0,1]}$	Factor global
${}^2N_{1/2}^* \rightarrow N$	-1	$-\frac{1}{2N_c}$	$-\frac{1}{2N_c}$	0	$\frac{\sqrt{(N_c+3)(N_c-1)}}{3N_c}$
${}^2N_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{\sqrt{3(N_c+5)(N_c+3)}}{\sqrt{6}N_c}$
${}^4N_{1/2}^* \rightarrow N$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3N_c}$	$\frac{1}{6N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}N_c}$	$-\sqrt{2\frac{N_c-1}{N_c}}$
${}^4N_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{1}{3N_c}$	0	$\sqrt{10\frac{N_c+5}{N_c}}$
$\Delta_{1/2}^* \rightarrow N$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{2}{3N_c}$	0	$-\sqrt{2\frac{N_c-1}{N_c}}$
$\Delta_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}N_c}$	$-\sqrt{10\frac{N_c+5}{N_c}}$
$\alpha^{[0,1]}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{6}{5}}$	

Tab. D.3: Elementos de matriz reducidos de operadores de onda D del pión. Como antes, se dan las normalizaciones y los factores globales correspondientes.

Pión onda D	$O_1^{[2,1]}$	$O_2^{[2,1]}$	$O_3^{[2,1]}$	$O_4^{[2,1]}$	$O_5^{[2,1]}$	$O_6^{[2,1]}$	$O_7^{[2,1]}$	$O_8^{[2,1]}$	Factor Global
${}^2N_{1/2}^* \rightarrow \Delta$	$-\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{10}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{30}N_c}$	$\frac{N_c-1}{2\sqrt{30}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{5}N_c^2}$	0	$5\frac{\sqrt{(N_c+3)(N_c+5)}}{2N_c}$
${}^2N_{3/2}^* \rightarrow N$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}N_c}$	0	0	0	0	0	$-5\frac{\sqrt{(N_c+3)(N_c-1)}}{3N_c}$
${}^2N_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	$-\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{10}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{N_c-1}{2\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{1}{4\sqrt{5}N_c^2}$	0	$5\frac{\sqrt{(N_c+3)(N_c+5)}}{2N_c}$
${}^4N_{1/2}^* \rightarrow \Delta$	$-\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{30}N_c}$	$\frac{N_c-1}{4\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{N_c-3}{4\sqrt{5}N_c^2}$	$\frac{\sqrt{7}}{20}\frac{N_c-1}{N_c^2}$	$-5\sqrt{\frac{N_c+5}{2N_c}}$
${}^4N_{3/2}^* \rightarrow N$	$-\frac{1}{4\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{5}N_c}$	$\frac{3}{8\sqrt{10}N_c}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{10}N_c}$	$\frac{3\sqrt{3}(N_c+2)}{8\sqrt{10}N_c}$	$-9\frac{N_c+1}{16\sqrt{5}N_c^2}$	0	$-\frac{2}{3}\sqrt{5\frac{N_c-1}{N_c}}$
${}^4N_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	$-\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{2}{3\sqrt{5}N_c}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{30}N_c}$	$\frac{N_c-1}{4\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{N_c-3}{4\sqrt{5}N_c^2}$	$-\frac{\sqrt{7}}{40}\frac{N_c-1}{N_c^2}$	$-2\sqrt{5\frac{N_c+5}{N_c}}$
$N_{5/2}^* \rightarrow N$	$-\frac{1}{4\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{5}N_c}$	$\frac{3}{8\sqrt{10}N_c}$	$\frac{1}{8\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{N_c+2}{8\sqrt{30}N_c}$	$\frac{N_c+1}{16\sqrt{5}N_c^2}$	0	$-2\sqrt{5\frac{N_c-1}{N_c}}$
$N_{5/2}^* \rightarrow \Delta$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{\sqrt{5}N_c}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{30}N_c}$	$\frac{N_c-1}{4\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{N_c-3}{4\sqrt{5}N_c^2}$	$-\frac{N_c-1}{20\sqrt{7}N_c^2}$	$5\sqrt{\frac{7}{10}\frac{N_c+5}{N_c}}$
$\Delta_{1/2}^* \rightarrow \Delta$	$\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{1}{6\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{10}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{30}N_c}$	$\frac{N_c+2}{20\sqrt{30}N_c}$	$\frac{3N_c+1}{40\sqrt{5}N_c^2}$	0	$5\sqrt{5\frac{N_c+5}{N_c}}$
$\Delta_{3/2}^* \rightarrow N$	$-\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{6\sqrt{5}N_c}$	$\frac{2}{3\sqrt{5}N_c}$	0	0	0	0	0	$-5\sqrt{2\frac{N_c-1}{N_c}}$
$\Delta_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	$\frac{1}{6\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}N_c}$	$-\frac{1}{6\sqrt{5}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{10}N_c}$	$-\frac{1}{4\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{N_c+2}{20\sqrt{30}N_c}$	$-\frac{3N_c+1}{40\sqrt{5}N_c^2}$	0	$5\sqrt{5\frac{N_c+5}{N_c}}$
$\alpha^{[2,1]}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{5}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{3\sqrt{6}}{5}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$	

Tab. D.4: Elementos de matriz reducidos de los operadores de onda S de la eta. Se dan las normalizaciones y los factores globales correspondientes.

Eta onda S	$O_1^{[0,0]}$	$O_2^{[0,0]}$	Factor global
${}^2N_{1/2}^* \rightarrow N$	1	0	$-\frac{\sqrt{(N_c+3)(N_c-1)}}{\sqrt{3N_c}}$
${}^4N_{1/2}^* \rightarrow N$	1	$-\frac{3}{2\sqrt{2N_c}}$	$-\sqrt{2\frac{N_c-1}{3N_c}}$
$\Delta_{1/2}^* \rightarrow \Delta$	1	$\frac{3}{2\sqrt{2N_c}}$	$\sqrt{2\frac{N_c+5}{3N_c}}$
$\alpha^{[0,0]}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	

Tab. D.5: Elementos de matriz reducidos de operadores de onda D de la eta. Se dan las normalizaciones y los factores globales correspondientes.

Eta onda D	$O_1^{[2,0]}$	$O_2^{[2,0]}$	$O_3^{[2,0]}$	Factor global
${}^2N_{3/2}^* \rightarrow N$	1	0	0	$5\frac{\sqrt{(N_c+3)(N_c-1)}}{\sqrt{15N_c}}$
${}^4N_{3/2}^* \rightarrow N$	1	$-\frac{3}{2\sqrt{2N_c}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2N_c}}$	$-\sqrt{\frac{N_c-1}{3N_c}}$
$N_{5/2}^* \rightarrow N$	1	$-\frac{3}{2\sqrt{2N_c}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6N_c}}$	$-\sqrt{3\frac{N_c-1}{N_c}}$
$\Delta_{1/2}^* \rightarrow \Delta$	1	$\frac{3}{2\sqrt{2N_c}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2N_c}}$	$5\sqrt{\frac{N_c+5}{15N_c}}$
$\Delta_{3/2}^* \rightarrow \Delta$	1	$\frac{3}{2\sqrt{2N_c}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2N_c}}$	$5\sqrt{\frac{N_c+5}{15N_c}}$
$\alpha^{[2,0]}$	$\frac{3}{2\sqrt{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	

Tab. D.6: Elementos de matriz reducidos de los operadores de helicidad EM. La notación ${}^{2S^*}N_{J^*}^*$ es usada para los estados de nucleón. Las columnas deben multiplicarse por los correspondientes factores globales mostrados en la última fila, donde $A \equiv ((1 - \frac{1}{N_c})(1 + \frac{3}{N_c}))^{1/2}$ y $B \equiv (1 - \frac{1}{N_c})^{1/2}$. Los factores de escala α , mostrados en la última columna de la tabla, son introducidos con el fin de obtener elementos de matriz de tamaño natural.

	${}^2N_{1/2}^*$	${}^2N_{3/2}^*$	${}^4N_{1/2}^*$	${}^4N_{3/2}^*$	${}^4N_{5/2}^*$	$\Delta_{1/2}^*$	$\Delta_{3/2}^*$	α
$E1_1^{(0)}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	0	0	0	$\frac{-3}{\sqrt{10}}$
$E1_2^{(0)}$	$\frac{-1}{2N_c}$	$\frac{-1}{N_c}$	0	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$E1_3^{(0)}$	0	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2N_c}$	$\frac{\sqrt{15}}{2N_c}$	0	0	0	$\frac{-2}{\sqrt{5}}$
$E1_4^{(0)}$	0	0	$\frac{\sqrt{5}}{2N_c}$	$\frac{1}{2N_c}$	0	0	0	$\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$
$E1_1^{(1)}$	1	2	0	0	0	$-\sqrt{2}$	2	$\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
$E1_2^{(1)}$	$\frac{-\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
$E1_3^{(1)}$	0	0	$\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{N_c+2}{4N_c}$	$\frac{N_c+2}{4\sqrt{3}N_c}$	0	0	0	$\frac{-36}{5\sqrt{5}}$
$E1_4^{(1)}$	$\frac{-1}{3\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}N_c}$	$\frac{-2\sqrt{2}}{3N_c}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3N_c}$	0	$\frac{1}{3N_c}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}N_c}$	$\frac{-\sqrt{27}}{\sqrt{40}}$
$E1_5^{(1)}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}N_c}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}N_c}$	$\frac{1}{\sqrt{3}N_c}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$
$E1_6^{(1)}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{4N_c}$	$-\sqrt{12}$
$M2_1^{(0)}$	0	$\sqrt{\frac{10}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{-3}{2\sqrt{5}}$
$M2_2^{(0)}$	0	0	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2N_c}$	$\frac{9}{4N_c}$	0	0	$\frac{-2}{3}$
$M2_3^{(0)}$	0	0	0	$\frac{3}{2N_c}$	$\frac{\sqrt{3}}{4N_c}$	0	0	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$
$M2_1^{(1)}$	0	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	0	$\frac{-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$	$\frac{-\sqrt{27}}{\sqrt{20}}$
$M2_2^{(1)}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}(N_c+2)}{4N_c}$	$\frac{N_c+2}{8N_c}$	0	0	$\frac{-12}{5}$
$M2_3^{(1)}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{-2\sqrt{2}}{3N_c}$	$\frac{\sqrt{6}}{N_c}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}N_c}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
$M2_4^{(1)}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{5}}{4N_c}$	$\frac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$
$E3_1^{(0)}$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{2}N_c}$	0	0	$-\sqrt{\frac{6}{7}}$
$E3_1^{(1)}$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \frac{N_c+2}{N_c}$	0	0	$\frac{-18\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$
Factor	A	$\frac{-A}{\sqrt{2}}$	$\frac{-B}{\sqrt{2}}$	$\frac{-B}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}B$	-B	-B	

E. ELEMENTOS DE MATRIZ DE LOS OPERADORES DE LOS OBSERVABLES PARA EL CASO DE SIMETRÍA $SU(3)$

Tab. E.1: Elementos de matriz de los operadores singlete O_1 a O_6 en el **70**-plete. Notar que a pesar que no está indicado explícitamente, en cada subespacio los elementos de matriz que no son diagonales con respecto al isospin I y a la extrañeza S se anulan.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	Factor Global
${}^2 8_{\frac{1}{2}}$	N_c	$\frac{3-2N_c}{3N_c}$	0	$\frac{2}{9} \frac{(N_c+3)(3N_c-2)}{N_c(N_c+1)}$	$-\frac{N_c+3}{3N_c^2}$	$\frac{N_c+3}{2N_c^2}$	1
${}^4 8_{\frac{1}{2}}$	N_c	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5(3N_c+1)}{48N_c}$	$\frac{5(3N_c+1)}{18(N_c+1)}$	$-\frac{5}{3N_c}$	$\frac{2}{N_c}$	1
${}^2 8_{\frac{1}{2}} - {}^4 8_{\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{5(3N_c-2)}{24\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{1}{9\sqrt{2}} \frac{5-3N_c}{N_c+1}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}N_c}$	0	$\sqrt{1 + \frac{3}{N_c}}$
${}^2 1_{\frac{1}{2}}$	N_c	-1	0	0	0	0	1
${}^2 10_{\frac{1}{2}}$	N_c	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{(3N_c+7)}{9(N_c+1)}$	$-\frac{4}{3N_c}$	$\frac{2}{N_c}$	1
${}^2 8_{\frac{3}{2}}$	N_c	$\frac{2N_c-3}{6N_c}$	0	$-\frac{1}{9} \frac{(N_c+3)(3N_c-2)}{N_c(N_c+1)}$	$\frac{N_c+3}{6N_c^2}$	$\frac{N_c+3}{2N_c^2}$	1
${}^4 8_{\frac{3}{2}}$	N_c	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3N_c+1}{12N_c}$	$\frac{3N_c+1}{9(N_c+1)}$	$-\frac{2}{3N_c}$	$\frac{2}{N_c}$	1
${}^2 8_{\frac{3}{2}} - {}^4 8_{\frac{3}{2}}$	0	$-\frac{\sqrt{5}}{6}$	$-\frac{\sqrt{5}(2-3N_c)}{48N_c}$	$-\frac{\sqrt{5}}{18} \frac{5-3N_c}{N_c+1}$	$\frac{\sqrt{5}}{6N_c}$	0	$\sqrt{1 + \frac{3}{N_c}}$
${}^2 1_{\frac{3}{2}}$	N_c	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1
${}^2 10_{\frac{3}{2}}$	N_c	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{3N_c+7}{18(N_c+1)}$	$\frac{2}{3N_c}$	$\frac{2}{N_c}$	1
${}^4 8_{\frac{5}{2}}$	N_c	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3N_c+1}{48N_c}$	$-\frac{3N_c+1}{6(N_c+1)}$	$\frac{1}{N_c}$	$\frac{2}{N_c}$	1

Tab. E.2: Elementos de matriz de los operadores singlete O_7 a O_{11} en el **70**-plete. Notar que a pesar que no está indicado explícitamente, en cada subespacio los elementos de matriz que no son diagonales con respecto al isospin I y a la extrañeza S se anulan.

O_7	O_8	O_9	O_{10}	O_{11}	Factor Global
$-\frac{(N_c+3)}{4N_c^2}$	0	$\frac{(N_c+3)(7-15N_c)}{24N_c^3}$	$-\frac{(N_c+3)(3N_c+1)}{12N_c^3}$	$-\frac{(N_c+3)(3N_c+1)}{24N_c^3}$	1
$\frac{1}{2N_c}$	$\frac{5}{3N_c}$	$\frac{5(3N_c+1)}{24N_c^2}$	$-\frac{(3N_c+1)}{3N_c^2}$	$\frac{5(3N_c+1)}{12N_c^2}$	1
0	$\frac{5}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{3N_c-2}{12\sqrt{2}N_c^2}$	0	$\frac{3N_c+1}{6\sqrt{2}N_c^2}$	$\sqrt{1 + \frac{3}{N_c}}$
0	0	0	0	0	1
$-\frac{1}{N_c}$	0	$\frac{(3N_c+7)}{6N_c^2}$	$\frac{(3N_c+7)}{6N_c^2}$	$\frac{(3N_c+7)}{12N_c^2}$	1
$-\frac{(N_c+3)}{4N_c^2}$	0	$\frac{(N_c+3)(15N_c-7)}{48N_c^3}$	$-\frac{(N_c+3)(3N_c+1)}{12N_c^3}$	$\frac{(N_c+3)(3N_c+1)}{48N_c^3}$	1
$\frac{1}{2N_c}$	$-\frac{4}{3N_c}$	$\frac{(3N_c+1)}{12N_c^2}$	$-\frac{(3N_c+1)}{3N_c^2}$	$\frac{(3N_c+1)}{6N_c^2}$	1
0	$-\frac{\sqrt{5}}{12N_c}$	$\frac{\sqrt{5}(3N_c-2)}{24N_c^2}$	0	$\frac{\sqrt{5}(3N_c+1)}{12N_c^2}$	$\sqrt{1 + \frac{3}{N_c}}$
0	0	0	0	0	1
$-\frac{1}{N_c}$	0	$-\frac{(3N_c+7)}{12N_c^2}$	$\frac{(3N_c+7)}{6N_c^2}$	$-\frac{(3N_c+7)}{24N_c^2}$	1
$\frac{1}{2N_c}$	$\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{(3N_c+1)}{8N_c^2}$	$-\frac{(3N_c+1)}{3N_c^2}$	$-\frac{(3N_c+1)}{4N_c^2}$	1

Tab. E.3: Elementos de matriz de operadores octete $B_1 = t^{[1,8]}$, $B_2 = T_c^{[1,8]}$ y $B_3 = -\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{3}N_c}(gG_c)_{\lambda=2}^{[0,8]}$ en el **70**-plete.

	B_1	B_2	B_3
${}^2 8_{\frac{1}{2}}, {}^2 8_{\frac{3}{2}}$	$\frac{N_c^3 + (7S+8I^2)N_c^2 - 3(4S+8I^2-1)N_c + 9S}{2\sqrt{3}N_c(N_c-1)(N_c+3)}$	$\frac{N_c^4 + (3S+1)N_c^3 - (S+8I^2+3)N_c^2 + 3(S+8I^2-1)N_c - 9S}{2\sqrt{3}N_c(N_c-1)(N_c+3)}$	$\frac{3N_c^3 + (13S+8I^2-3)N_c^2 - (31S+44I^2+12)N_c + 6(S+14I^2)}{-\frac{24}{5}\sqrt{3}N_c^2(N_c-1)}$
${}^4 8_{\frac{1}{2}}, {}^4 8_{\frac{3}{2}}$			
${}^4 8_{\frac{5}{2}}$	$\frac{N_c+S-4I^2}{2\sqrt{3}(N_c-1)}$	$\frac{N_c^2 + (3S-2)N_c + 4(I^2-S)}{2\sqrt{3}(N_c-1)}$	$\frac{3N_c^2 + (7S-4I^2+3)N_c - (S+20I^2)}{-\frac{24}{5}\sqrt{3}N_c(N_c-1)}$
${}^2 8_{\frac{1}{2}} -^4 8_{\frac{1}{2}}$			
${}^2 8_{\frac{3}{2}} -^4 8_{\frac{3}{2}}$	0	0	0
${}^2 1_{\frac{1}{2}}, {}^2 1_{\frac{3}{2}}$	$\frac{(3-N_c)}{\sqrt{3}(N_c+3)}$	$\frac{(N_c+5)(N_c-3)}{2\sqrt{3}(N_c+3)}$	0
${}^2 8_{\frac{1}{2}} -^2 1_{\frac{1}{2}}$			
${}^2 8_{\frac{3}{2}} -^2 1_{\frac{3}{2}}$	$-\frac{3(N_c-1)}{2\sqrt{N_c}(N_c+3)}$	$-\frac{3(N_c-1)}{2\sqrt{N_c}(N_c+3)}$	$\frac{5(3N_c+1)}{16N_c\sqrt{N_c}}$
${}^4 8_{\frac{1}{2}} -^2 1_{\frac{1}{2}}$			
${}^4 8_{\frac{3}{2}} -^2 1_{\frac{3}{2}}$	0	0	0
$10_{\frac{1}{2}}, 10_{\frac{3}{2}}$	$\frac{N_c+8S+5}{2\sqrt{3}(N_c+5)}$	$\frac{N_c^2 + (3S+4)N_c + 7S-5}{2\sqrt{3}(N_c+5)}$	$-\frac{3N_c^2 + 14(S+1)N_c + 22S-5}{\frac{24}{5}\sqrt{3}N_c(N_c+5)}$
${}^2 8_{\frac{1}{2}} -^2 10_{\frac{1}{2}}$			
${}^2 8_{\frac{3}{2}} -^2 10_{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c(N_c-1)(N_c+5)}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c(N_c-1)(N_c+5)}}$	$\frac{5(N_c+2)}{6\sqrt{6}N_c}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c(N_c-1)(N_c+5)}}$
${}^4 8_{\frac{1}{2}} -^2 10_{\frac{1}{2}}$			
${}^4 8_{\frac{3}{2}} -^2 10_{\frac{3}{2}}$	0	0	0

Tab. E.4: Elementos de matriz de operadores octete $B_4 = -3\sqrt{3}(lG_c)^{[0,8]}$ en el **70**-plete.

B_4	
$28_{\frac{1}{2}}$	$-\frac{N_c^3+(10S+14I^2-3)N_c^2-3(7S+8I^2)N_c+9(S+2I^2)}{\sqrt{3}N_c(N_c-1)(N_c+3)}$
$48_{\frac{1}{2}}$	$-\frac{5(N_c+S-4I^2)}{4\sqrt{3}(N_c-1)}$
$28_{\frac{1}{2}}-48_{\frac{1}{2}}$	$-\frac{N_c+S-4I^2}{2\sqrt{6}(N_c-1)}\sqrt{1+\frac{3}{N_c}}$
$21_{\frac{1}{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}(N_c-3)}{2(N_c+3)}$
$28_{\frac{1}{2}}-21_{\frac{1}{2}}$	$\frac{9(N_c-1)}{2(N_c+3)\sqrt{N_c}}$
$48_{\frac{1}{2}}-21_{\frac{1}{2}}$	0
$210_{\frac{1}{2}}$	$\frac{N_c+8S+5}{2\sqrt{3}(N_c+5)}$
$28_{\frac{1}{2}}-210_{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c(N_c-1)(N_c+5)}}$
$48_{\frac{1}{2}}-210_{\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{(N_c-1)(N_c+5)}}$
$28_{\frac{3}{2}}$	$\frac{N_c^3+(10S+14I^2-3)N_c^2-3(7S+8I^2)N_c+9(S+2I^2)}{2\sqrt{3}N_c(N_c-1)(N_c+3)}$
$48_{\frac{3}{2}}$	$-\frac{N_c+S-4I^2}{2\sqrt{3}(N_c-1)}$
$28_{\frac{3}{2}}-48_{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{N_c+S-4I^2}{4(N_c-1)}\sqrt{1+\frac{3}{N_c}}$
$21_{\frac{3}{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}(N_c-3)}{2(N_c+3)}$
$28_{\frac{3}{2}}-21_{\frac{3}{2}}$	$-\frac{9(N_c-1)}{4(N_c+3)\sqrt{N_c}}$
$48_{\frac{3}{2}}-21_{\frac{3}{2}}$	0
$210_{\frac{3}{2}}$	$-\frac{N_c+8S+5}{4\sqrt{3}(N_c+5)}$
$28_{\frac{3}{2}}-210_{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{N_c+3}{6N_c(N_c-1)(N_c+5)}}$
$48_{\frac{3}{2}}-210_{\frac{3}{2}}$	$\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}(N_c-1)(N_c+5)}$
$48_{\frac{5}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}(N_c+S-4I^2)}{4(N_c-1)}$

Tab. E.5: Elementos de matriz reducidos \mathcal{B}_n^γ para decaimientos onda-S.

Canal	\mathcal{B}_1	\mathcal{B}_2	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_4	\mathcal{B}_5	\mathcal{B}_6	\mathcal{B}_7	Factor Global
$({}^2 8_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8)_1$	$-\frac{12+N_c}{6\sqrt{2}}$	$\frac{\beta_1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3+N_c}{6\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{\beta_2}{\sqrt{8}}$	A_2
$({}^2 8_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8)_2$	$\frac{2N_c-3}{6\sqrt{2}}$	$\frac{3-2N_c}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{3+N_c}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{N_c}{12}$	0	0	$\frac{\beta_3}{6\sqrt{2}}$	A_3
${}^2 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10$	$-\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{3-N_c}{24N_c}$	$-\frac{1}{8N_c}$	$-\frac{1}{4\sqrt{6}N_c}$	$\frac{N_c-2}{12\sqrt{30}N_c}$	$-A_1$
$({}^4 8_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8)_1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2+N_c}{6N_c}$	$-\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{N_c+17}{12\sqrt{15}N_c}$	$-A_5$
$({}^4 8_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8)_2$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{1}{6N_c}$	$\frac{N_c-3}{12\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{1}{4\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{11-N_c}{12\sqrt{15}N_c}$	$-A_6$
${}^4 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10$	$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$-\frac{1}{6N_c}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{3N_c}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}(N_c-3)}{24N_c}$	0	$\frac{1}{4N_c}\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\frac{2-N_c}{12\sqrt{6}N_c}$	A_4
${}^2 10_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{2}{3N_c}$	$\frac{N_c+3}{12\sqrt{2}N_c}$	0	$-\frac{1}{4\sqrt{3}N_c}$	$\frac{2-N_c}{12\sqrt{15}N_c}$	A_9
$({}^2 10_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10)_1$	$\frac{21+N_c}{6\sqrt{2}}$	$\frac{\beta_4}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{21+N_c}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{3(N_c+1)}{4N_c}$	$\frac{21+N_c}{8N_c}$	0	$\frac{\beta_5}{\sqrt{8}}$	A_7
$({}^2 10_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10)_2$	$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$-\frac{1}{6N_c}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$-\frac{1}{6N_c}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}(N_c+3)}{24N_c}$	$\frac{\sqrt{5}}{8N_c}$	0	$-\frac{N_c+7}{12\sqrt{6}N_c}$	$-A_8$
${}^2 1_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4N_c}$	0	$\frac{1}{4\sqrt{2}N_c}$	0	$-\frac{N_c+3}{16\sqrt{3}N_c}$	$-\frac{N_c+7}{16\sqrt{15}N_c}$	A_5
α_n	$\sqrt{\frac{27}{10}}$	$\frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{27}{40}}$	$2\sqrt{\frac{6}{5}}$	$6\sqrt{\frac{6}{5}}$	$9\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{27}{11}\sqrt{10}$	

Tab. E.6: Elementos de matriz reducidos \mathcal{B}_n^γ para decaimientos onda-D.

Canal	\mathcal{B}_1	\mathcal{B}_2	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_4	\mathcal{B}_5	\mathcal{B}_6	\mathcal{B}_7	\mathcal{B}_8	\mathcal{B}_9	\mathcal{B}_{10}	Factor Global
$2^2 8_{\frac{1}{2}} \rightarrow 10$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$\frac{N_c-3}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}N_c}$	$\frac{2-N_c}{6\sqrt{15}N_c}$	$\frac{1-N_c}{2\sqrt{6}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}N_c}$	$\frac{1}{12\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{4} A_1$
$(^2 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 8)_1$	$-\frac{N_c+12}{3}$	β_1	$\frac{N_c+3}{3N_c}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	β_2	0	0	0	$-\frac{\sqrt{10}}{4} A_2$
$(^2 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 8)_2$	$2N_c - 3$	$\frac{3-2N_c}{N_c}$	$\frac{3+N_c}{N_c}$	$\frac{N_c}{\sqrt{2}}$	0	0	β_3	0	0	0	$-\frac{\sqrt{10}}{12} A_3$
$2^2 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$\frac{N_c-3}{6\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}N_c}$	$\frac{2-N_c}{6\sqrt{15}N_c}$	$\frac{N_c-1}{2\sqrt{6}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}N_c}$	$-\frac{1}{12\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{4} A_1$
$4^2 8_{\frac{1}{2}} \rightarrow 10$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3N_c}$	$\frac{2}{3N_c}$	$\frac{N_c-3}{6\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}N_c}$	$\frac{2-N_c}{6\sqrt{15}N_c}$	$\frac{1-N_c}{2\sqrt{6}N_c}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{N_c}$	$\frac{3+N_c}{12\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{\sqrt{10}}{8} A_4$
$(^4 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 8)_1$	-1	$-\frac{N_c+2}{N_c}$	$\frac{1}{N_c}$	$\frac{3}{\sqrt{2}N_c}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$-\frac{N_c+17}{2\sqrt{15}N_c}$	$-\frac{3\sqrt{6}}{N_c}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{3}{2N_c}$	$\frac{9}{4\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}} A_5$
$(^4 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 8)_2$	-1	$\frac{1}{N_c}$	$\frac{1}{N_c}$	$\frac{3-N_c}{2\sqrt{2}N_c}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{N_c-11}{2\sqrt{15}N_c}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{3(N_c-1)}{2N_c}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{3}{2N_c}$	$-\frac{3}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1}{6\sqrt{2}} A_6$
$4^2 8_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10$	-1	$\frac{1}{N_c}$	$-\frac{2}{N_c}$	$\frac{3-N_c}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2N_c}$	$\frac{N_c-2}{2\sqrt{15}N_c}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N_c-1}{4N_c}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{N_c}$	$-\frac{N_c+3}{8\sqrt{2}N_c}$	$\frac{1}{3} A_4$
$(^4 8_{\frac{5}{2}} \rightarrow 8)_1$	1	$\frac{N_c+2}{N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{N_c+17}{2\sqrt{15}N_c}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}N_c}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}} A_5$
$(^4 8_{\frac{5}{2}} \rightarrow 8)_2$	1	$-\frac{1}{N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	$\frac{N_c-3}{2\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{11-N_c}{2\sqrt{15}N_c}$	$\frac{N_c-1}{2\sqrt{6}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}N_c}$	$-\frac{1}{12\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}} A_6$
$4^2 8_{\frac{5}{2}} \rightarrow 10$	1	$-\frac{1}{N_c}$	$\frac{2}{N_c}$	$\frac{N_c-3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2N_c}$	$\frac{2-N_c}{2\sqrt{15}N_c}$	$\frac{N_c-1}{2\sqrt{6}N_c}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{N_c}$	$-\frac{N_c+3}{12\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{\sqrt{14}}{8} A_4$
$(^2 10_{\frac{1}{2}} \rightarrow 10)_1$	$\frac{N_c+21}{3}$	β_4	$-\frac{N_c+21}{3N_c}$	$\frac{3(N_c+1)}{\sqrt{2}N_c}$	$\frac{N_c+21}{2\sqrt{2}N_c}$	0	β_5	$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N_c+3}{N_c}$	$\frac{N_c+21}{2\sqrt{6}N_c}$	$\frac{3-N_c}{4\sqrt{2}N_c}$	$\frac{\sqrt{5}}{4} A_7$
$(^2 10_{\frac{1}{2}} \rightarrow 10)_2$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3N_c}$	$\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{N_c+3}{6\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{N_c+7}{6\sqrt{15}N_c}$	$-\frac{N_c+5}{10\sqrt{6}N_c}$	$-\frac{1}{2\sqrt{6}N_c}$	$\frac{1}{60\sqrt{2}}$	$\frac{5}{4} A_8$
$2^2 10_{\frac{3}{2}} \rightarrow 8$	1	$-\frac{1}{N_c}$	$-\frac{4}{N_c}$	$\frac{N_c+3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2N_c}$	$\frac{2-N_c}{2\sqrt{15}N_c}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{5}}{6} A_9$
$(^2 10_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10)_1$	$\frac{N_c+21}{3}$	β_4	$-\frac{N_c+21}{3N_c}$	$\frac{3(N_c+1)}{\sqrt{2}N_c}$	$\frac{N_c+21}{2\sqrt{2}N_c}$	0	β_5	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N_c+3}{N_c}$	$-\frac{N_c+21}{2\sqrt{6}N_c}$	$\frac{N_c-3}{4\sqrt{2}N_c}$	$\frac{\sqrt{5}}{4} A_7$
$(^2 10_{\frac{3}{2}} \rightarrow 10)_2$	-1	$\frac{1}{N_c}$	$\frac{1}{N_c}$	$-\frac{N_c+3}{2\sqrt{2}N_c}$	$-\frac{3}{2\sqrt{2}N_c}$	0	$\frac{N_c+7}{2\sqrt{15}N_c}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{N_c+5}{10N_c}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2N_c}$	$-\frac{1}{20\sqrt{2}}$	$\frac{5}{12} A_8$
$2^2 1_{\frac{3}{2}} \rightarrow 8$	-1	$\frac{1}{N_c}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}N_c}$	0	$-\frac{N_c+3}{4\sqrt{3}N_c}$	$-\frac{N_c+7}{4\sqrt{15}N_c}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{5}}{4} A_5$
α_n	$\sqrt{\frac{6}{7}}$	$\frac{9}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{14}}$	$\frac{12}{5}\sqrt{3}$	$\frac{4}{5}\sqrt{3}$	$6\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\frac{18}{11}\sqrt{5}$	$\frac{12}{5}\sqrt{2}$	$\frac{3}{\sqrt{8}}$	$3\sqrt{6}$	

Tab. E.7: Factores necesarios en los Cuadros E.5 y E.6

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\frac{3-N_c(N_c+5)}{3N_c}$	$-\frac{15+N_c(N_c+2)}{6\sqrt{15}N_c}$	$-\frac{3+N_c(N_c+1)}{\sqrt{15}N_c}$	$\frac{24+N_c(N_c+5)}{3N_c}$	$\frac{(N_c-19)(N_c+3)}{6\sqrt{15}N_c}$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\frac{1}{N_c} \sqrt{\frac{(N_c+1)(N_c+3)(N_c+5)}{(N_c-1)}}$	$\frac{1}{N_c} \sqrt{\frac{(N_c-1)}{(N_c+3)}}$	$\frac{1}{N_c} \sqrt{\frac{(N_c+7)}{(N_c+3)}}$	$\sqrt{\frac{(N_c+1)(N_c+5)}{N_c(N_c-1)}}$	$\sqrt{\frac{(N_c-1)}{N_c}}$

A_6	A_7	A_8	A_9
$\sqrt{\frac{(N_c+7)}{N_c}}$	$\sqrt{\frac{(N_c+5)}{N_c(45+N_c(N_c+6))}}$	$\sqrt{\frac{(N_c+9)(N_c+1)(N_c-3)}{N_c(45+N_c(N_c+6))}}$	$\sqrt{\frac{(N_c-1)(N_c+7)}{N_c(N_c+5)}}$

Bibliografía

- [1] F. J. Ynduráin, *The theory of quark and gluon interactions* (Springer-Verlag, Heildelberg, 1999).
- [2] Ver por ej. H. Rothe, *Lattice Gauge Theories: an Introduction* (World Scientific, Singapore, 2005).
- [3] C. T. H. Davies *et al.* [HPQCD Collaboration and UKQCD Collaboration and MILC Collaboration and HPQCD and Fermilab Lattice Collaborations], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 022001.
- [4] F. E. Close, *An Introduction To Quarks And Partons*, (Academic Press, London, 1979).
- [5] R. K. Bhaduri, *Models of the nucleon: from quarks to soliton* (Addison-Wesley, Redwood City, 1988).
- [6] A. V. Manohar, in Proc. of *Probing the Standard Model of Particle Interactions* (Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1999). R. Gupta, A. Morel, E. de Rafael, y F. David eds.
- [7] E. E. Jenkins, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **48** (1998) 81.
- [8] R. F. Lebed, ed. Proc. of *The Phenomenology of Large $N(c)$ QCD, Tempe, Arizona, 9-11 Jan 2002* (World Scientific, Singapore, 2002).
- [9] J. L. Goity, R. F. Lebed, A. Pich, C. L. Schat y N. N. Scoccola, eds. Proc. of *ECT* Workshop on Large N_c QCD 2004, Trento, Italy, 5-9 Jul 2004* (World Scientific, Singapore, 2005).
- [10] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
- [11] E. Witten, Nucl. Phys. B **160** (1979) 57.
- [12] J. L. Gervais y B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 87.
- [13] J.-L. Gervais y B. Sakita, Phys. Rev. D **30** (1984) 1795.
- [14] R. F. Dashen y A. V. Manohar, Phys. Lett. B **315** (1993) 425; **315** (1993) 438.
- [15] E. E. Jenkins, Phys. Lett. B **315** (1993) 431; B **315** (1993) 441; B **315** (1993) 447.

- [16] R. F. Dashen, E. E. Jenkins y A. V. Manohar, Phys. Rev. D **49** (1994) 4713 [Erratum-
ibid. D **51** (1995) 2489].
- [17] C. Carone, H. Georgi y S. Osofsky, Phys. Lett. B **322** (1994) 227.
- [18] M. A. Luty y J. March-Russell, Nucl. Phys. B **426** (1994) 71.
- [19] R. F. Dashen, E. E. Jenkins y A. V. Manohar, Phys. Rev. D **51** (1995) 3697.
- [20] E. E. Jenkins y R. F. Lebed, Phys. Rev. D **52** (1995) 282.
- [21] E. E. Jenkins, AIP Conf. Proc. 623 (2002) 36.
- [22] E. E. Jenkins y R. F. Lebed, Phys. Rev. D **62** (2000) 077901.
- [23] E. E. Jenkins y A. V. Manohar, Phys. Lett. B **335** (1994) 452.
- [24] M. A. Luty, J. March-Russell y M. J. White, Phys. Rev. D **51** (1995) 2332.
- [25] R. F. Lebed, Phys. Rev. D **51** (1995) 5039.
- [26] R. F. Lebed y D. R. Martin, Phys. Rev. D **70** (2004) 016008.
- [27] M. A. Luty, Phys. Rev. D **51** (1995) 2322.
- [28] C. D. Carone, H. Georgi, L. Kaplan y D. Morin, Phys. Rev. D **50** (1994) 5793.
- [29] J. L. Goity, Phys. Lett. B **414** (1997) 140.
- [30] D. Pirjol y T. M. Yan, Phys. Rev. D **57** (1998) 1449.
- [31] D. Pirjol y T. M. Yan, Phys. Rev. D **57** (1998) 5434.
- [32] T. D. Cohen y R. F. Lebed, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 012001.
- [33] T. D. Cohen y R. F. Lebed, Phys. Rev. D **67** (2003) 096008. T. D. Cohen y R. F. Lebed,
Phys. Rev. D **68** (2003) 056003. T. D. Cohen, . C. Dakin, A. Nellore y R. F. Lebed,
Phys. Rev. D **70** (2004) 056004.
- [34] C. E. Carlson, C. D. Carone, J. L. Goity y R. F. Lebed, Phys. Lett. B **438** (1998) 327.
- [35] C. E. Carlson, C. D. Carone, J. L. Goity y R. F. Lebed, Phys. Rev. D **59** (1999) 114008.
- [36] D. Pirjol y C. Schat, Phys. Rev. D **67** (2003) 096009.
- [37] T. D. Cohen y R. F. Lebed, Phys. Rev. D **72** (2005) 056001.
- [38] C. E. Carlson y C. D. Carone, Phys. Lett. B **484** (2000) 260.
- [39] C. L. Schat, J. L. Goity y N. N. Scoccola, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 102002.

- [40] J. L. Goity, C. L. Schat y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **66** (2002) 114014.
- [41] J. L. Goity, C. Schat y N. N. Scoccola, Phys. Lett. B **564** (2003) 83.
- [42] N. Matagne y F. Stancu, Phys. Lett. B **631** (2005) 7.
- [43] N. Matagne y F. Stancu, Phys. Rev. D **71** (2005) 014010.
- [44] N. Matagne y F. Stancu, Phys. Rev. D **74** (2006) 034014; Phys. Rev. D **84** (2011) 056013; Phys. Rev. D **85** (2012) 116003; Phys. Rev. D **86** (2012) 076007.
- [45] L. Galeta, D. Pirjol y C. Schat, Phys. Rev. D **80** (2009) 116004.
- [46] D. Pirjol y C. Schat, Phys. Rev. D **82** (2010) 114005.
- [47] J. L. Goity, C. Schat y N. Scoccola, Phys. Rev. D **71** (2005) 034016.
- [48] J. L. Goity y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **72** (2005) 034024.
- [49] J. L. Goity, C. Jayalath y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **80** (2009) 074027.
- [50] C. E. Carlson y C. D. Carone, Phys. Rev. D **58** (1998) 053005.
- [51] C. E. Carlson y C. D. Carone, Phys. Lett. B **441** (1998) 363.
- [52] J. L. Goity y N. N. Scoccola, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 062002.
- [53] N. N. Scoccola, J. L. Goity y N. Matagne, Phys. Lett. B **663** (2008) 222.
- [54] T. D. Cohen, D. C. Dakin, R. F. Lebed y D. R. Martin, Phys. Rev. D **71** (2005) 076010.
- [55] H. J. Kwee y R. F. Lebed, Phys. Rev. D **75** (2007) 016002.
- [56] H. J. Kwee y R. F. Lebed, JHEP **0710** (2007) 046.
- [57] R. F. Lebed y L. Yu, Phys. Rev. D **80** (2009) 076006.
- [58] D. Faiman y A. W. Hendry, Phys. Rev. **173** (1968) 1720.
- [59] R. Horgan y R. H. Dalitz, Nucl. Phys. B **66** (1973) 135.
- [60] S. Capstick y W. Roberts, Prog. Part. Nucl. Phys. **45** (2000) S241.
- [61] F. Stancu, *Group theory in subnuclear physics* (Clarendon Press, Oxford, 1996).
- [62] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Rev. D **86** (2012) 010001.
- [63] A. R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960).

- [64] D. Faiman y D. E. Plane, Nucl. Phys. B **50** (1972) 379.
- [65] A. J. G. Hey, P. J. Litchfield y R. J. Cashmore, Nucl. Phys. B **95** (1975) 516.
- [66] F. James, *MINUIT*, Function Minimization and Error Analysis, [<http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/>].
- [67] C. Jayalath, J. L. Goity, E. Gonzalez de Urreta y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **84** (2011) 074012.
- [68] D. Pirjol and C. Schat, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 152002
- [69] J. L. Goity, Phys. Atom. Nucl. **68**, (2005) 624 [Yad. Fiz. **68** (2005) 655].
- [70] R. Koniuk y N. Isgur, Phys. Rev. D **21** (1980) 1868 [Erratum-ibid. D **23** (1981) 818].
- [71] A. V. Manohar, *At the frontier of particle physics*, vol. 1, Shifman, M. ed. (World Scientific, Singapore, 2001) p. 507.
- [72] N. Isgur y G. Karl, Phys. Lett. B **72** (1977) 109.
- [73] N. Isgur y G. Karl, Phys. Rev. D **18** (1978) 4187.
- [74] R. G. Moorhouse, Phys. Rev. Lett. **16** (1966) 772.
- [75] R. P. Feynman, M. Kislinger y F. Ravndal, Phys. Rev. **D 3** (1971) 2706.
- [76] T. D. Cohen y R. F. Lebed, Phys. Rev. **D 70** (2004) 096015.
- [77] J. L. Goity, Phys. Atom. Nucl. **68** (2005) 624.
- [78] E. G. de Urreta, J. L. Goity y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **89** (2014) 034024
- [79] K. T. Hecht, Nucl. Phys. **62** (1965) 1.