

Tesis Doctoral

Soluciones de Einstein de materia y energía oscura asintóticamente de Sitter

Sánchez García, Iván Eduardo

2015-03-25

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Sánchez García, Iván Eduardo. (2015-03-25). Soluciones de Einstein de materia y energía oscura asintóticamente de Sitter. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Sánchez García, Iván Eduardo. "Soluciones de Einstein de materia y energía oscura asintóticamente de Sitter". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2015-03-25.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

*Soluciones de Einstein de materia y energía oscura
asintóticamente de Sitter.*

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Físicas.

por Iván Eduardo Sánchez García

Director de Tesis: Dr. Osvaldo Pablo Santillán.

Consejero de Estudios: Dr. Claudio Simeone.

Lugar de Trabajo: Depto. de Matemática - Depto. de Física de la Facultad de
Ciencias Exactas y Naturales, U.B.A.

Buenos Aires, 25 de Marzo del 2015

Resumen: En esta tesis, se han investigado modelos cosmológicos con y sin interacción en el sector oscuro, en la métrica espacialmente plana de Friedmann-Robertson-Walker. En primer lugar, se ha trabajado con un grupo de transformaciones de simetría interna, que preserva la forma de las ecuaciones de Einstein, y que permiten relacionar magnitudes características de un fluido, como su densidad de energía y presión, con magnitudes geométricas como la tasa de expansión. Hemos utilizado estas transformaciones para construir cosmologías de taquiones fantasmas y complementarios a partir de taquiones estándar. Es decir, las transformaciones de invariancia de forma (TIF) generan nuevas cosmologías a partir de una conocida, que denominaremos “semilla”; en particular aplicamos las TIF al taquión ordinario y se obtuvieron dos especies de taquiones conocidos, como el taquión fantasma y el complementario. Hemos mostrado que las TIF nos permiten pasar de una cosmología no estable a una estable y vice versa. Además, hemos aplicado estas transformaciones, a modo de ejemplo, a un potencial que va como el inverso del campo al cuadrado, $V \propto \phi^2$ y generado todo el campo de taquiones extendidos. También, calculamos el espectro de potencia del campo gravitatorio para un tipo particular de taquión con constante cosmológica y lo comparamos con el modelo Λ CDM. Hemos encontrado, que el espectro de potencias del taquión estándar con constante cosmológica, difiere en varios ordenes de magnitud con el modelo de concordancia. En el caso del campo de taquiones complementario con constante, coincide con dicho modelo cuando el índice barotrópico toma el valor $\gamma_0 = 1,91$. Por otro lado, hemos considerado dos modelos, en donde interactúan materia y energía oscura, más un término de radiación y otro de bariones desacoplados. Hallamos la densidad de energía del sector oscuro y la densidad de energía total en función del corrimiento al rojo z . Hemos aplicado el método estadístico de χ^2 a la base de datos de la función Hubble para restringir los parámetros del modelo y analizar su validez, comparando ambos modelos con el modelo Λ CDM. También, incluimos el término de radiación desacoplado para analizar el comportamiento de la energía oscura de los modelos, en la era de recombinación, y examinar su cantidad en la época dominada por la radiación. Hemos obtenido que los modelos satisfacen la estricta cota $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,009$ a 2σ , por lo que son consistentes con los análisis recientes, de las mediciones de anisotropía de la radiación cósmica de fondo (RCF), hechos por Planck. Además, son consistentes con las futuras cotas que podrían alcanzarse con los experimentos Euclid y CMBPol. Ambos modelos también cumplen la severa cota $\Omega_x(z \simeq 10^{10}) < 0,04$ a 2σ de la época de nucleosíntesis del “Big Bang”. También, se estimó la edad actual del universo y se examinó el problema de la edad cósmica, a grandes corrimientos al rojo, asociado con el antiguo quasar APM 08279 + 5255.

Palabras clave: Transformaciones invariantes de forma, campo de taquiones, perturbaciones cosmológicas, interacción, materia y energía oscura.

Asymptotically de Sitter Einstein solutions for dark matter and dark energy

Abstract: In this thesis, we have investigated certain cosmological models with and without interaction in the dark sector, considering a spatially flat metric of Friedmann-Robertson-Walker type. First we illustrated how form-invariance transformations (FITs) can be used to construct phantom and complementary tachyon cosmologies from standard tachyon field universes. We show how these transformations act on the Hubble expansion rate, and the energy density and pressure of the tachyon field. Then we use the FIT to generate three different families of the tachyon field. In other words, the FIT generates new cosmologies from a known “seed” one; in particular, we apply the FIT to the ordinary tachyon field to obtain two types of tachyon species, denoted as the phantom and complementary tachyons. We see that the FIT allows us to pass from a nonstable cosmology to a stable one and vice versa. Finally, as an example, we apply the transformations to an inverse-square potential, $V \propto \phi^2$, and we are able to generate the extended tachyon field. In addition, we use the power spectrum of the gravitational potential to compare a particular tachyon field with a cosmological constant model, for different barotropic indexes γ_0 , with the well studied Λ CDM model. For this purpose we solve the differential equation that describes the perturbations numerically and plot the power spectrum at $a = 1$ for each case. We find that the power spectrum of the standard tachyon field differs in many magnitude orders from the Λ CDM. Nevertheless the one with $\gamma_0 = 1,91$, which corresponds to a complementary tachyon field, coincides with the concordance model. Therefore, we conclude that this is an effective method to distinguish between the different γ_0 values for the tachionization Λ CDM model and the fiducial model. On the other hand, we investigate two cosmological scenarios with two interacting components, dark matter and variable vacuum energy (VVE) densities, plus two decoupled components, one is a baryon term while the other behaves as a radiation component, and compare these models with the Λ CDM model. We consider a linear interaction in the derivative dark component density. We apply the χ^2 method to the observational Hubble data for constraining the cosmological parameters and analyze the amount of dark energy in the radiation era for the models. It turns out that our models fulfill the severe bound of $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,009$ at 2σ level, so is consistent with the recent analysis that includes cosmic microwave background anisotropy measurements from Planck survey, the future constraints achievable by Euclid and CMBPol experiments, reported for the behavior of the dark energy at early times, and fulfill the stringent bound $\Omega_x(z \simeq 10^{10}) < 0,04$ at 2σ level in the big-bang nucleosynthesis epoch. We also examine the cosmic age problem at high redshift associated with the old quasar APM 08279+5255 and estimate the age of the universe today for each model.

Keywords: form-invariance transformations, tachyon field, cosmological perturbations, interaction, dark matter and dark energy.

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia por su carácter de incondicional en el apoyo y el aliento. Quisiera agradecer a Romina por caminar a mi lado y su paciencia, en estos últimos años. A Camilo mi hijo, por el amor, el enseñarme a valorar y aprovechar cada instante de trabajo. A mis compañeros de carrera y amigos, que siempre estuvieron, pero más que nunca en las malas, cuando la finalización de este trabajo parecía perdida y sus palabras de aliento fueron la caricia justa, Diego, Martín, Seba, Emi, Luz, César, Fede y otros que no estuvieron, pero con la certeza de que podía contar con ellos. También a aquellos que me brindaron un consejo o al menos me escucharon en lo que fue esa procesión acelerada de golpear puertas. A mis compañeros de oficina, Belén y Florencia por su grata compañía y en especial a Edgar por su indispensable ayuda, colaboración y amistad. Por el trabajo realizado en conjunto los primeros años, a Luis Chimento y Martín Richarte. Quisiera hacer un agradecimiento especial a la persona sin la cual no habría podido terminar este trabajo, a mi director el Dr. Osvaldo P. Santillán por su predisposición y su confianza ciega, aún sin conocerme, lo cual habla por sí sólo de su grandeza como persona. También agradecerle por todo lo que aprendí en este poco tiempo de trabajo juntos. Quiero reconocer el apoyo al departamento de Física de la UBA y al Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló (IMAS), por concederme el lugar donde se realizó este trabajo doctoral. Por último agradecer al CONICET por la financiación.

*...la naturaleza no tiene fin alguno prefijado,
y que todas las causas finales son, sencillamente, ficciones humanas.*

Baruch Spinoza.

Índice general

1. Introducción general	13
2. Introducción a la cosmología	19
2.1. Nociones de relatividad general	19
2.2. Isotropía y homogeneidad	21
2.3. Geometría del espacio tiempo	22
2.4. Universo de de-Sitter y Universo fantasma	26
2.5. Ley de Hubble y corrimiento al rojo de galaxias distantes	27
2.6. Resumen de la historia térmica del universo	28
2.7. Algunos problemas en la teoría del Big Bang	31
2.8. Universo inflacionario	33
3. Observaciones Cosmológicas	37
3.1. Supernova	37
3.1.1. Determinación de Distancia	37
3.1.2. Supernova Tipo Ia	38
3.1.3. Descubrimiento de la Aceleración del Universo	39
3.2. Radiación Cósmica de Fondo	43
3.3. Oscilaciones Acústicas Bariónicas	46
3.4. Estimación de parámetros cosmológicos a través de análisis estadístico	48
3.4.1. Función χ^2	48
4. Materia y energía oscura	51
4.1. Materia oscura	51
4.1.1. Historia e indicaciones tempranas	51
4.1.2. Evidencias	55
4.1.3. Posibles candidatos a materia oscura	55
4.2. Energía oscura	59
4.2.1. Constante cosmológica	59
4.2.2. Modelos de campo escalar	63
5. Extensión del campo de taquiones	69
5.1. Motivación	69
5.2. SIF en un universo plano de FRW	70

5.3.	TIF lineales	71
5.3.1.	Identidad y dualidad	72
5.3.2.	Fluido perfecto	72
5.4.	Cosmología de taquiones extendidos	74
5.4.1.	Ley de potencia para un campo de taquiones	76
6.	Perturbaciones cosmológicas	79
6.1.	Clasificación de las perturbaciones	80
6.2.	Transformaciones de gauge	82
6.3.	Sistemas de coordenadas	83
6.3.1.	Gauge longitudinal	84
6.3.2.	Gauge síncrono	84
6.4.	Ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas	85
6.5.	Perturbaciones Hidrodinámicas	87
6.6.	Caracterizando las perturbaciones	88
7.	Espectro de potencia en una cosmología de taquiones extendidos	91
7.1.	Motivación	91
7.2.	Perturbaciones cosmológicas escalares	92
7.3.	Taquionización del modelo Λ CDM	94
7.4.	Análisis del espectro de potencia	96
8.	Interacción en el sector oscuro	101
8.1.	Motivación	101
8.2.	Evolución del sector oscuro	102
8.2.1.	Descripción por medio de un fluido efectivo	102
8.2.2.	Estabilidad asintótica	104
8.3.	Interacciones lineales y no lineales	105
9.	Interacción entre materia oscura y energía de vacío variable	107
9.1.	Motivación	107
9.2.	El Modelo	108
9.2.1.	Modelo I: Interacción $Q = \alpha\rho'$	109
9.2.2.	Modelo II: Interacción $Q = \alpha\rho\rho'$	111
9.3.	Observaciones	112
9.3.1.	Modelo I	113
9.3.2.	Modelo II	119
9.4.	El problema de la edad	121
10.	Síntesis y Conclusiones	127
A.	Espectro de potencia para perturbaciones cuánticas	139

Capítulo 1

Introducción general

Hacia fines del siglo XX observaciones del comportamiento de Supernovas Tipo Ia arrojaron un resultado inesperado, la expansión del universo es acelerada [1]. Este descubrimiento afectó a los paradigmas de la física en general y de la cosmología en particular, dado que puso en tela de juicio la posibilidad de que el universo culminará en una Gran Implosión (también conocida como Gran Colapso o *Big Crunch* en inglés). Estas observaciones se hicieron más firmes, con el correr del tiempo, con la obtención de nuevos datos. Este resultado, en un futuro muy lejano, nos llevará a la imposibilidad de seguir viendo cualquier otra estrella o galaxia en cielo. Esta nueva teoría del fin del universo, recibió el nombre de Gran Desgarramiento o, su denominación en inglés *Big Rip*.

Estas observaciones astronómicas revelaron evidencia sobre la existencia de un aspecto repulsivo, hasta el momento desconocido, en la gravedad [2] - [6]. Varias observaciones detalladas del brillo de supernovas distantes [1], insinúan la presencia de una componente de presión negativa en el universo, la cual produciría la expansión acelerada. Esta componente, de la cual se desconoce su naturaleza, se ha denominado energía oscura [7]. Dicha energía es la responsable de aportar alrededor de un 72 % de la energía total del universo [8].

La combinación de varias observaciones astronómicas nos demuestra que nuestro universo está formado, mayormente, por tres componentes [8]. La más abundante, como se ha mencionado, es la energía oscura. Luego sigue la materia oscura, con más de un 23 % y por último la materia bariónica con menos de 5 %.

Tanto la materia, como la energía oscura, son consideradas dos piezas faltantes del rompecabezas cósmico que representa el universo. Ellas dos, representan el 95 % de la densidad de energía total que se necesita para poder describir la dinámica cosmológica observada. Se sabe que ambas no poseen un origen bariónico. La materia oscura surge como una propuesta para entender la discrepancia entre la masa gravitatoria y la masa visible, de las galaxias o cúmulos de galaxias observados [9], [10], [11]. A pesar del progreso observacional que se ha dado en las últimas décadas, toda la evidencia de la materia oscura se basa en la gravedad de las interacciones. Dada la universalidad de la gravedad, esta evidencia resulta escasa para determinar qué es la materia oscura. Al mismo tiempo, su identidad tiene implicacio-

nes de largo alcance: en astrofísica, las propiedades de la materia oscura determinan cómo se forma la estructura e impactan el pasado y la futura evolución del universo; en la física de partículas, la materia oscura podrá ser una evidencia empírica importante para las nuevas partículas que puedan encontrarse. Hay indicios de que pueden estar vinculadas a ayudar a entender la ruptura de simetría electrodébil. Por lo tanto, comprender la identidad de la materia oscura es de suma importancia en ambos campos y uno de los estudios sobre el universo, a gran y pequeña escala.

La materia oscura es fundamental en el origen de la formación de estructuras que puede observarse hoy, en el universo. El modelo estándar se encuentra extensamente estudiado, tanto por la teoría de perturbaciones lineales, como por las simulaciones cosmológicas numéricas [12]- [15]. Las simulaciones cosmológicas son una de las más poderosas herramientas para la investigación de la evolución no lineal de estructuras a gran escala del universo. El estudio del espectro de potencias ofrece una gran cantidad de información sobre la densidad del campo de materia, que es reflejado por varias observaciones.

Como ya comentamos, la expansión se ha atribuido a una componente de energía oscura con presión negativa, que domina el universo a tiempos tardíos. La forma más simple de la energía oscura corresponde a la constante cosmológica (ver [16], [17], [18]). El llamado modelo de la concordancia (o modelo Λ CDM) se ajusta con precisión a los datos actualmente observados y por lo tanto es un excelente candidato para describir el universo observado. Sin embargo, el modelo de concordancia sufre de dos problemas fundamentales: el problema del ajuste fino y el de la coincidencia, que detallaremos más adelante. Estos problemas pueden ser aliviados mediante modelos que posean una densidad de energía oscura que evolucione dinámicamente. Es decir, que la ecuación de estado de la energía oscura cambie con el tiempo, como por ejemplo en la etapa de inflación cosmológica. Los campos escalares que surgen de forma natural en la física de partículas, incluyendo la teoría de cuerdas, pueden actuar como candidatos para la energía oscura. Hasta aquí, se ha propuesto una amplia variedad de modelos de energía oscura manejada por un campo escalar. Estos incluyen la quintaesencia, campos fantasmas, K-esencia, taquiones, condensado de fantasmas, quintom, entre otros [19].

En particular, el campo de taquiones ha cobrado una gran relevancia en la última década. Fue propuesto por primera vez en el contexto de la teoría de cuerdas [20], [21]. Luego se propuso en cosmología, como modelo para explicar la inflación temprana [22], [23]. Tras el importante hallazgo de una expansión acelerada del universo, se convirtió en uno de los candidatos de la energía oscura a tiempos tardíos. En los trabajos [24], [25], se encuentra fundamentada la extensión a tres clases de taquiones, clasificados según el valor de su índice barotrópico γ_0 . El campo de taquiones estándar con $0 < \gamma_0 < 1$, el campo de taquiones complementario con $\gamma_0 > 1$ y el campo de taquiones fantasma con $\gamma_0 < 0$.

Por otro lado, se han propuestos modelos cosmológicos, para el sector oscuro, que consideran una interacción entre ambos fluidos. Teniendo en cuenta los mecanismos que gobiernan la naturaleza de ambas componentes oscuras, se ha propuesto la existencia de un intercambio de energía entre ellas, es decir, asumir que la materia

oscura es influida por la presencia de la energía oscura no solo a través una expansión gravitatoria del universo, sino que también se les permite interactuar entre sí [26], transfiriendo energía e impulso de una componente a la otra. Un acoplamiento entre la materia oscura y la energía oscura modifica el fondo de la evolución del sector oscuro, dando lugar a una dinámica cosmológica rica, en comparación con los modelos no interactuantes. Esta evolución del sector oscuro puede hacer posible la obtención de cotas para cualquier tipo de interacción, en la era dominada por la radiación como ser recombinación o el proceso de nucleosíntesis primordial. Permitiendo que estos modelos resulten de gran interés a la hora de describir el comportamiento y dinámica de la materia y energía oscura [27], [28].

Es posible encontrar nuevas pistas sobre las propiedades de la materia y la energía oscura, que nos permitan entender la evolución cosmológica actual y futura, si nos remitimos al estudio del pasado. Para ello, se observan corrimientos al rojo lo suficientemente grandes, teniendo en cuenta los límites que establece la nucleosíntesis primordial. Por ejemplo, la fracción de la energía oscura en la era de recombinación debe cumplir con el límite $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,1$ (la cantidad de energía oscura, en ese momento, no debía superar el 10 % de la energía total del universo) para que el modelo de energía oscura estudiado, resulte coherente con los datos provenientes de la nucleosíntesis del *Big Bang* (NBB).

Las limitaciones actuales sobre la cantidad de energía oscura en los primeros tiempos del universo, provienen de la misión Planck, los datos cosmológicos analizados han dado lugar a una cota superior de $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,009$ con un nivel de confianza (NC) de 95 % [6]. Además, las predicciones sobre las observaciones futuras, tales como Euclides o CMBPol, serán capaces de limitar la fracción de energía oscura temprana. El análisis conjunto sobre la base de datos de Euclides + CMBPol conduce a $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,00092$, mientras que el análisis conjunto de los datos de Euclides + Planck será menos restrictivo $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,0022$ [29].

A continuación, teniendo en cuenta que estas consideraciones generales dieron origen a lo estudiado en este trabajo, se presentará un resumen del esquema de la tesis.

En el Cap. 2, se hace una breve introducción a los fundamentos de la cosmología moderna, pasando por una pequeña revisión a la relatividad general, describiendo cada una de las eras evolutivas y presentando una revisión cronológica de los sucesos más representativos de dichas eras.

En el Cap. 3, se hace una revisión de las observaciones más determinantes de la cosmología moderna, aquellas observaciones que han cambiado la forma en que miramos el universo. Sobre todo las observaciones que dieron origen al descubrimiento de la energía oscura. En primer lugar se hace un repaso de la supernova SNe Ia que permitió determinar la expansión acelerada del universo, luego se revisa la radiación cósmica de fondo y algunas de sus implicancias, para terminar con las Oscilaciones Acústicas Bariónicas.

En el Cap. 4, se aborda el estudio, por un lado de la materia oscura y por otro de la energía oscura. Se revisan las características más relevantes de la materia oscura, que tipo de rastros y/o efectos deja en la evolución del universo, además de los

posibles candidatos a la misma. Se discute el modelo de la concordancia o Λ CDM, cuáles son sus ventajas y cuáles son los problemas que lo acosan y que dieron motivos para estudiar otros modelos de energía oscura, como aquellos asociados a un campo escalar.

En el Cap. 5, se demuestra que las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio-tiempo plano de FRW poseen una simetría de invarianza de forma (SIF) realizada por las transformaciones de invarianza de forma (TIF), que de hecho son generadas por una función invertible de la densidad de energía. Se muestra que estas transformaciones actúan sobre la tasa de expansión de Hubble, la densidad de energía, y la presión del fluido cósmico; y forman una estructura de grupo de Lie. Cada representación de este grupo está asociada con un fluido en particular y en consecuencia a una determinada cosmología, de modo que, la SIF define un conjunto de modelos cosmológicos equivalentes. Centramos nuestra investigación en una TIF generada por una función lineal, $\bar{\rho} = n^2\rho$. En particular, se muestra cómo estas transformaciones actúan sobre un campo de taquiones. Aplicamos las TIF al taquión estándar y se obtienen dos especies más de taquiones, el taquión denominado fantasma y el complementario. Además, vemos que las TIF nos permiten pasar de una cosmología no estable a una estable y viceversa. Por último, como ejemplo, aplicamos las transformaciones a un fluido cosmológico con un potencial que va como el inverso al cuadrado del campo, $V \propto \phi^{-2}$, y generamos un campo de taquiones extendido.

En el Cap. 6, se hace un repaso sobre la teoría de las perturbaciones gravitatorias lineales, en un universo en expansión. Se hace una clasificación de las mismas, en los distintos tipos de *gauge*, en particular el gauge longitudinal y el síncrono. Se muestran las ecuaciones de movimiento para una métrica perturbada y se hace una caracterización de las perturbaciones.

En el Cap. 7, se utiliza el espectro de potencia del potencial gravitatorio para comparar un campo de taquiones estándar más el agregado de una constante cosmológica, para diferentes índices barotrópicos γ_0 , con el bien estudiado modelo Λ CDM, para una cosmología espacialmente plana de FRW. Para ello, se resuelve la ecuación diferencial que describe las perturbaciones de manera numérica y se traza el espectro de potencia actual, $a = 1$, en cada caso. Mostramos que este es un método eficaz para distinguir entre los diferentes valores de γ_0 , del modelo estudiado, y poder compararlo con el Λ CDM.

En el Cap. 8, se realiza una investigación detallada de los modelos con transferencia de energía entre la materia y la energía oscura, se presentan las motivaciones que dieron su origen. Se analiza el mecanismo de interacción en el sector oscuro por medio de un método alternativo basado en la ecuación de la fuente, esto permite estudiar una gran variedad de interacciones lineales y no lineales por igual, generalizando la mayoría de los trabajos encontrados en la literatura.

En el Cap. 9, nuevamente utilizamos un escenario de FRW, en este caso para estudiar diferentes interacciones en el sector oscuro, más el agregado de dos componentes desacopladas, una es un término bariónico mientras que la otra se comporta como una componente de radiación. En primer lugar, consideramos una interacción lineal proporcional a la densidad de energía derivada de la componente oscura,

$Q = \alpha\rho'$ y luego consideramos una interacción no lineal dada por $Q = \alpha\rho'$. En ambos casos aplicamos el método χ^2 a los datos observacionales de Hubble para limitar los parámetros cosmológicos y analizamos la cantidad de energía oscura en la era de la radiación para cada modelo, comparando con las restricciones observacionales dadas por Planck mission, y con las futuras restricciones alcanzables por los experimentos de Euclides y CMBPol. También analizamos si los modelos cumplen la estricta restricción, $\Omega_x(z \simeq 10^{10}) < 0,04$ a un nivel de 2σ , dada por la época de nucleosíntesis primordial.

En el último capítulo, el número 10, se hace un recuento general de los resultados obtenidos, a lo largo del trabajo doctoral, y las conclusiones globales a las que se arribo. Finalmente, se detalla una serie de posibles modificaciones a las investigaciones realizadas en esta tesis, como parte de un trabajo futuro. Por ejemplo, el estudio de otras bases de datos, así como la implementación de códigos de programación más versátiles como C++ o FORTAN.

Capítulo 2

Introducción a la cosmología

En este capítulo, veremos una breve introducción a la cosmología, que nos permita repasar y comprender algunos conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo. Para ello es necesario abordar, en primer instancia, nociones básicas de la relatividad general, que a través de un marco matemático nos permitan dar cuenta de la geometría del espacio-tiempo para un determinado tipo de fuente, como es el caso de un fluido ideal perfecto.

2.1. Nociones de relatividad general

La Relatividad General (RG) es la teoría de gravedad más aceptada actualmente, explica los fenómenos gravitacionales como consecuencias de la curvatura en el espacio-tiempo generada por el contenido de materia presente. Una de sus bases fundamentales es el denominado Principio de Equivalencia de Einstein que generaliza el Principio de Equivalencia Débil ¹ y que puede escribirse como:

“En cada punto del espacio-tiempo en el que exista un campo gravitatorio arbitrario, es siempre posible escoger un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, en un entorno suficientemente pequeño del punto, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en los sistemas inerciales de la relatividad especial en ausencia de fuerzas gravitatorias”.

El cambio fundamental que introdujo la RG es el de transformar el concepto de fuerza de atracción al de deformación (o mejor curvatura) del espacio-tiempo. Por lo tanto, una partícula no experimenta una aceleración por la fuerza sino que sigue una trayectoria en geodésicas en un espacio-tiempo curvo. El ente que realiza esta curvatura en el espacio-tiempo es cualquier forma de materia-energía.

La construcción de la teoría gravitatoria de Einstein se basa en postulados. Estos fueron desarrollados buscando que las ecuaciones dinámicas den los límites correspondientes, es decir coincidan a bajas energías y velocidades, con la gravedad

¹La equivalencia entra masa inercial y masa gravitacional de un cuerpo.

Newtoniana y la Relatividad Especial [30]- [32].

Postulado 1: *El espacio-tiempo está descrito por una variedad 4-dimensional Θ y una métrica Lorentziana g sobre Θ .*

La curvatura en la variedad esta descrita por el tensor de curvatura de Riemann \mathbf{R} , que en componentes puede escribirse como

$$R_{\beta\gamma\sigma}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\beta}^{\delta} - \Gamma_{\delta\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\gamma\beta}^{\delta}, \quad (2.1)$$

donde $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ son los símbolos de Christoffel o conexiones afín, que se pueden escribir en función de la métrica y sus derivadas

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\{\partial_{\gamma}g_{\delta\beta} + \partial_{\beta}g_{\delta\gamma} - \partial_{\delta}g_{\beta\gamma}\}, \quad (2.2)$$

con $g_{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico. Este tensor determina la noción de distancia diferencial (o elemento de línea) entre dos puntos del espacio-tiempo: $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$, donde x^{α} son las coordenadas generales sobre el espacio-tiempo.

Postulado 2: *Conservación local de la energía: Existe un tensor simétrico $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\phi) = T_{\beta\alpha}$ que es función de los campos de materia ϕ y sus derivadas, tal que:*

I. $T_{\alpha\beta} = 0$ sobre $U \subset \Theta$ si y sólo si $\phi_j = 0$ para todo j sobre U .

II. $\nabla_{\beta}T^{\alpha\beta} = 0$.

Por último, se encuentra el postulado de las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales nos van a dar las relaciones entre la geometría (curvatura) y los campos de materia.

Postulado 3: *La métrica sobre la variedad espacio-tiempo (Θ, \mathbf{g}) esta determinada por las ecuaciones de campo de Einstein*

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

siendo $R_{\alpha\beta}$ el tensor de Ricci ($R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\nu\beta}^{\nu}$), R el escalar de curvatura ($R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$), $T_{\alpha\beta}$ el tensor de energía-momento.

Definiendo el tensor de Einstein como

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (2.4)$$

usando las identidades de Bianchi se tiene que el tensor de Einstein tiene derivada covariante nula

$$\nabla_{\beta}G^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.5)$$

como también puede verse del postulado 2, con la derivada covariante del tensor energía-momento.

El movimiento de una partícula es descrito por su trayectoria en el espacio-tiempo, $x^\alpha(\lambda)$, donde λ es una parametrización arbitraria del camino que satisface la ecuación de la geodésica, la cual se escribe

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0. \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) se aplica para: Partículas con masa, en cuyo caso usualmente se toma como parámetro λ el tiempo propio, tal que el correspondiente vector tangente V^α está normalizado, $g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = -1$; partículas sin masa, en cuyo caso el vector tangente, usualmente denotado por k^α es nulo, *i.e.*, $g_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0$.

2.2. Isotropía y homogeneidad

Un principio fundamental de la cosmología (*El principio cosmológico*) asegura que el universo, cuando se observa a escalas del orden de cientos de megapársecs, es isótropo (invariancia frente a las rotaciones) y homogéneo (invariancia frente a traslaciones). La isotropía significa que sin importar en qué dirección se esté observando, veremos las mismas propiedades en el universo. La homogeneidad quiere decir que cualquier punto del universo luce igual y tiene las mismas propiedades que cualquier otro punto dado. Por lo tanto, si dos observadores situados en dos lugares diferentes del universo observan un mismo punto al mismo tiempo, cada uno de ellos, al medir las propiedades de ese punto (como la velocidad, la densidad, etc.) obtendrá los mismos valores sin que su posición afecte en las mediciones.

Otra implicación es que las estructuras discretas más grandes en el universo (como los cúmulos y supercúmulos de galaxias) se encuentran en equilibrio mecánico. Por otro lado, un universo homogéneo e isótropo a gran escala implica que estas estructuras discretas conforman un continuo de materia.

Bajo las hipótesis de isotropía y homogeneidad, la única evolución posible del universo es una expansión o contracción global. En ese caso, en un instante determinado, la velocidad a la que dos puntos del universo se separan o acercan debe ser proporcional a su separación. Lo cual fue corroborado por las observaciones de Hubble, entre los años 20 y 30 del siglo pasado, las cuales dieron lugar a la ley de Hubble.

Actualmente, existe una gran cantidad de evidencia en favor de la hipótesis de homogeneidad e isotropía del universo en una escala de $3000 h^{-1} Mpc$ donde $h = 0,7$. Inhomogeneidades en la densidad del universo temprano conducirían a anisotropías en la distribución de temperatura, lo cual contradice la gran uniformidad obtenida, observacionalmente, por la radiación cósmica de fondo (RCF) de una parte en 10^4 . Estas pequeñas desviaciones de la homogeneidad son muy importantes y juegan un papel crucial en el desarrollo de las estructuras existentes en la actualidad. La Sonda Wilkinson de Anisotropía en Microondas (WMAP) muestra que las fluctuaciones en la temperatura, Fig. 2.1, del fondo de microondas son tan pequeñas como del orden de $\Delta T = 10^{-5} K$ [33], [34].

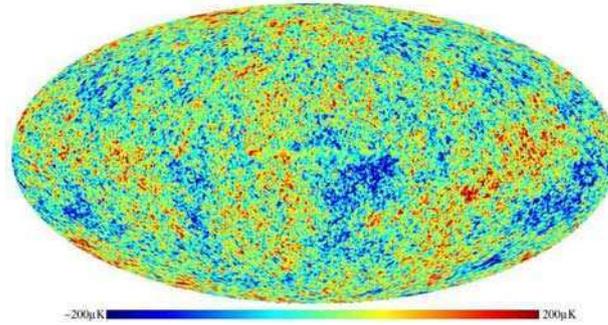


Figura 2.1: Mapa de la radiación del fondo de microondas medida por WMAP. La diferencia máxima entre los puntos azules y rojos es de unos $400\mu K$.

2.3. Geometría del espacio tiempo

Como mencionamos anteriormente, el Modelo Estándar de la Cosmología está basado en dos principios: La homogeneidad y la isotropía del universo. Estos postulados permiten escribir el elemento de línea en un universo maximalmente simétrico por medio de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, la cual está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.7)$$

como puede observarse, se encuentra separada la parte temporal de la espacial, donde $a(t)$ es el factor de escala que se normalizó de modo que sea igual a la unidad en la época actual, y t es el tiempo cósmico.

Las coordenadas r , θ y ϕ se conocen como coordenadas comóviles. Cuando se encuentran multiplicadas por el factor de escala se obtienen las coordenadas físicas. En este trabajo se consideró que las coordenadas comóviles tienen unidades de longitud, por lo tanto el $a(t)$ es adimensional. Podría haberse considerado el caso contrario.

Las ecuaciones de Einstein nos permiten determinar el factor de escala, siempre que se especifique el contenido de materia del universo. La constante κ en la métrica (2.7) describe la geometría de la sección espacial del espacio-tiempo, con los universos cerrado, plano y abierto que corresponden a $\kappa = 1, 0, -1$, respectivamente, como puede observarse en la Fig. 2.2. El caso de $\kappa = 1$ corresponde a una curvatura positiva de geometría esférica. Para $\kappa = 0$ la parte espacial a una geometría plana Euclidiana sin curvatura. Cuando $\kappa = -1$ corresponde a curvatura negativa con una geometría hiperbólica.

Las ecuaciones diferenciales para el factor de escala y la densidad de energía, se desprenden de las ecuaciones de Einstein (2.3). Los términos que derivan del tensor de curvatura, están dados por

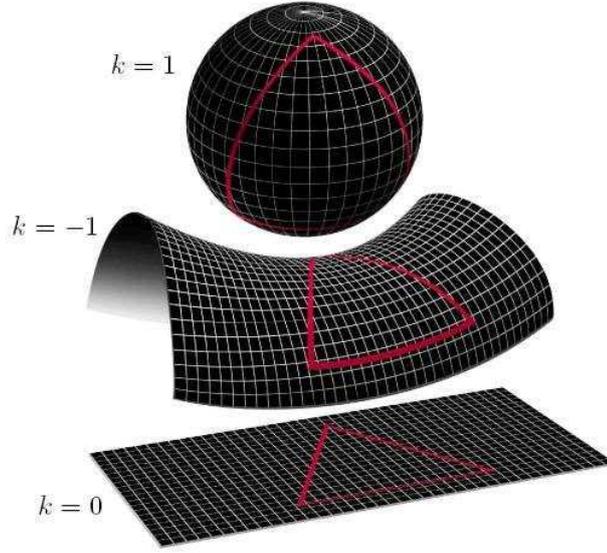


Figura 2.2: Geometría espacial del universo. Con $\kappa = 1$ corresponde a un universo cerrado, $\kappa = -1$ a uno abierto y $\kappa = 0$ a uno plano.

$$R_0^0 = \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (2.8)$$

$$R_j^i = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} \right) \delta_j^i, \quad (2.9)$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right), \quad (2.10)$$

donde los dos primeros, R_0^0 y R_j^i , corresponden al tensor de Ricci, y R es el escalar de curvatura. Los puntos denotan derivadas con respecto al tiempo t .

En la aproximación newtoniana, el campo gravitacional es directamente proporcional a la masa. En la relatividad general, la masa es sólo una de varias fuentes responsable de la curvatura del espacio-tiempo. El tensor de energía-momento, T_ν^μ , incluye todas las formas posibles de fuentes (energía) que pueden curvar el espacio-tiempo. Este tensor describe la densidad y el flujo de energía y momento dentro de una región, permitiéndonos plantear las ecuaciones de Einstein. Para ello, vamos a considerar como fuente para el universo un fluido ideal perfecto. El tensor de energía-momento T_ν^μ adquiere la siguiente forma diagonal

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (2.11)$$

donde ρ y p son la densidad de energía y presión del fluido totales, la suma de todas las especies presentes en el universo a una dada época, respectivamente. Por

lo tanto, de la ecuación (2.3), usando la métrica de FRW Ec. (2.7) se desprenden las ecuaciones de Friedmann

$$3H^2 = 8\pi G\rho - \frac{3\kappa}{a^2}, \quad (2.12)$$

$$2\dot{H} = -8\pi G(\rho + p) + \frac{2\kappa}{a^2}, \quad (2.13)$$

donde H es el factor de expansión de Hubble, $H = \dot{a}/a$. Las unidades del parámetro de Hubble son $[\text{tiempo}]^{-1}$. Actualmente, es una constante H_0 que puede ser parametrizada por una constante adimensional h , donde $H_0 = 100 h km s^{-1} Mpc^{-1}$ con $h \in (0, 1)$. A partir de ahora, consideraremos unidades geométricas, $8\pi G = 1$.

El tensor de energía-momento se conserva en virtud de las identidades de Bianchi, lo cual nos lleva a la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) puede ser derivada de las ecuaciones (2.12) y (2.13), lo cual significa que sólo dos de las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) son independientes. Eliminando el término κ/a^2 , de las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(\rho + 3p)}{6}. \quad (2.15)$$

Aquí la expansión acelerada ($\ddot{a}(t) > 0$) ocurre cuando se viola la condición de energía fuerte, $\rho + 3p < 0$.

Podemos escribir (2.12) en la forma

$$\Omega(t) - 1 = \frac{\kappa}{(aH)^2}, \quad (2.16)$$

donde $\Omega(t) \equiv \rho/\rho_c$ es el parámetro de densidad adimensional y $\rho_c(t) = 3H^2$ es la densidad crítica. La densidad de materia, claramente determina la geometría espacial de nuestro universo, *i.e.*,

$$\Omega > 1 \quad \text{ó} \quad \rho > \rho_c \quad \Rightarrow \quad \kappa = +1, \quad (2.17)$$

$$\Omega = 1 \quad \text{ó} \quad \rho = \rho_c \quad \Rightarrow \quad \kappa = 0, \quad (2.18)$$

$$\Omega < 1 \quad \text{ó} \quad \rho < \rho_c \quad \Rightarrow \quad \kappa = -1. \quad (2.19)$$

Diversas observaciones han mostrado que el universo actual, es muy cercano a una geometría espacial plana, donde el parámetro de densidad total es $\Omega_T = \sum_i \Omega_i \simeq 1$ [4], [35], [36]. Por lo tanto, en el resto del trabajo consideraremos un universo espacialmente plano, $\kappa = 0$.

Teniendo en cuenta la evolución de un universo lleno con un fluido barotrópico perfecto, caracterizado por una ecuación de estado que relaciona la presión del fluido con su densidad de la forma

$$p = w\rho, \quad (2.20)$$

donde w se asume constante y puede vincularse linealmente con el índice barotrópico del fluido $w = \gamma - 1$. De las ecuaciones de Einstein (2.12) y (2.13), considerando la Ec. (2.20), podemos obtener la densidad de energía en función del factor de escala,

$$\rho \propto a^{-3(w+1)}, \quad (2.21)$$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad (2.22)$$

$$H = \frac{2}{3(w+1)(t-t_0)}, \quad (2.23)$$

donde t_0 es constante. Notamos que esta solución es válida para $w \neq -1$. Para el caso de que un gas de partículas ultrarelativistas (radiación), por ejemplo fotones o neutrinos, dominó el universo, se tiene $w_r = 1/3$. Mientras que si es dominado por un fluido o gas no relativista (denominado materia), que se comporta como polvo, donde los efectos de la presión resultan despreciables, entonces $w_m \simeq 0$ es una buena aproximación. En estos casos, tenemos

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho \propto a^{-4}, \quad (2.24)$$

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3}}, \quad \rho \propto a^{-3}, \quad (2.25)$$

respectivamente. Los ejemplos anteriores, dados por las Ecs. (2.24) y (2.25), se corresponden con una expansión desacelerada del universo, como puede observarse de la Ec. (2.15). De esta misma ecuación vemos que para que exista una expansión acelerada, debe cumplirse que la ecuación de estado $w + 1 < 2/3$. Por lo tanto, para explicar la aceleración actual observada del universo, es necesario una especie de energía exótica, denominada *energía oscura*, con una ecuación de estado que satisfaga la última condición dada.

Considerando un universo lleno de radiación, de materia, de energía oscura (como constante cosmológica) y curvatura, donde está última puede considerarse como un parámetro densidad, $\Omega_\kappa(a) = \kappa/(aH)^2$. La ecuación de Friedmann (2.12), tomando los valores actuales de los parámetros densidad, se puede escribir

$$H^2(a) = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{x0} + \frac{\Omega_{\kappa0}}{a^2} \right), \quad (2.26)$$

bajo la consideración de un universo plano, $\Omega_\kappa \simeq 0$, donde Ω_{r0} , Ω_{m0} y Ω_{x0} son los parámetros densidad de la radiación, la materia y la energía oscura, respectivamente.

La historia de la expansión del universo es una “competición” entre las diferentes componentes. A tiempos tempranos, alrededor de los 3s después del Big Bang y hasta la edad de 50.000 años, el universo se encontraba dominado por la radiación. Pero a medida que el universo se expandía, y la densidad de energía de radiación disminuía como a^{-4} , el universo entraba en una etapa dominada por la materia, donde la atracción gravitatoria causaba un período de desaceleración. Sin embargo, la expansión del espacio no se detenía y la densidad de materia disminuía debido al factor a^{-3} , cediendo lugar a la densidad de energía oscura que se volvía dominante

frente la gravedad, a la edad aproximada de los 9 billones de años y llegando hasta la actualidad, unos 13,7 billones de años.

Por otro lado es interesante analizar qué sucede en un caso de gravedad Newtoniana. Si consideramos una esfera homogénea cuyo radio y densidad de energía son a y ρ , respectivamente. La ecuación de Newton para una partícula puntual de masa m , sobre esta esfera, está dada por

$$m\ddot{a} = -\frac{m}{a^2} \left(\frac{a^3 \rho}{6} \right), \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho}{6}. \quad (2.27)$$

Comparando con la ecuación (2.15) de Einstein, notamos la ausencia del término de presión, p , el cual, aparece en las ecuaciones de Einstein en virtud de los efectos relativistas. La condición $w < -1/3$, significa que requerimos una presión negativa para dar un aumento en la aceleración de expansión. Por lo que deducimos que la gravedad Newtoniana, sólo tiene en cuenta una expansión desacelerada del universo [19].

2.4. Universo de de-Sitter y Universo fantasma

Un universo cosmológico de de Sitter, es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein, la cual fue encontrada por Willem de Sitter. Modela un universo espacialmente plano, que no considera materia ordinaria, donde la dinámica se halla gobernada por una constante cosmológica, la cual se puede identificar como energía oscura o como un campo de inflación en el universo temprano. De acuerdo con los modelos de inflación y las observaciones actuales del universo acelerado, los modelos de concordancia de la cosmología están convergiendo a un modelo consistente, donde la mejor descripción para nuestro universo se alcanza con un universo de Sitter, alrededor de un tiempo de $t = 10^{-33}s$ después de la singularidad del Big Bang, y lejos en el futuro.

A partir de la ecuación de conservación de la energía (2.14), se puede ver que la densidad de energía ρ resulta constante si $w = -1$. En este caso, el parámetro de Hubble también es constante, Ec. (2.12), dando la evolución del factor de escala:

$$a \propto e^{Ht}, \quad (2.28)$$

el cual representa el universo de de-Sitter. Como veremos más adelante, esta expansión exponencial también se alcanza al incluir una constante, Λ (modelo de la Concordancia), en las ecuaciones de Einstein.

Hasta el momento, hemos limitado nuestra atención a ecuaciones de Estado con: $w \geq -1$. Pero observaciones recientes sugieren que una ecuación de estado con w menor que -1 también puede ser posible [6], [34]. Esta ecuación específica de estado corresponde a lo que se denomina energía oscura fantasma (“Phantom”). Puede observarse que la Ec. (2.22), describe un universo en contracción para $w < -1$. Hay otra solución de expansión dada por

$$a(t) = (t_s - t)^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad (2.29)$$

donde t_s es constante. Esto corresponde a una solución super-inflacionaria, donde crecen la tasa de Hubble y el escalar de curvatura,

$$H = \frac{n}{t_s - t}, \quad n = -\frac{2}{3(1+w)} > 0, \quad (2.30)$$

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) = \frac{6n(2n+1)}{(t_s - t)^2}. \quad (2.31)$$

La tasa de Hubble diverge para $t \rightarrow t_s$, la cual corresponde a una densidad de energía infinitamente grande a un tiempo finito en el futuro. La curvatura también crece hacia el infinito a medida que $t \rightarrow t_s$. Esta situación es referida como singularidad de “Big rip”. Es decir, la expansión del universo alcanzará el infinito a un tiempo finito, provocando una expansión acelerada sin límites. Esta aceleración superará la velocidad de la luz (ya que implica la expansión del universo mismo, no de partículas que se mueven dentro de él), haciendo que el universo observable se encoja, como la luz y la información emitida por las estrellas distantes no pueda “alcanzar” la expansión. A medida que el universo observable se contraiga, los objetos dejarán de interactuar entre sí a través de las fuerzas fundamentales, y finalmente, la expansión evitará cualquier acción de fuerzas entre las partículas, incluso dentro de los átomos, *destrozando* el universo. Esto caracteriza al *Big Rip* como un posible fin del universo. Esta conclusión catastrófica no es inevitable en este tipo de modelos, y se puede evitar en modelos específicos de campos fantasmas con la inclusión de un potencial de corte [37]. También habría que considerar la importancia de los efectos cuánticos, en la medida en que la curvatura del universo se hace cada vez más grande, ya que podrían modificar fundamentalmente la estructura de la singularidad.

2.5. Ley de Hubble y corrimiento al rojo de galaxias distantes

Entre 1925-1929 Hubble mostró el distanciamiento de galaxias lejanas, midiendo su distancia r y relacionándola con la velocidad $v \propto r$. Este fenómeno se conoció como el corrimiento hacia el rojo del espectro de una galaxia. Este corrimiento hacia el rojo fue mayor para galaxias presumiblemente más lejanas. Por lo tanto, una galaxia lejana, se distancia más rápido de la Tierra, que una más cercana. Considerando dos galaxias separadas por la distancia r , la velocidad relativa entre ambas viene dada por $v \propto r$, lo cual se llama la ley de Hubble y matemáticamente se escribe como

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (2.32)$$

donde, como ya mencionamos H_0 es la constante de Hubble actual. Las observaciones hechas por las misiones Planck [6] y WMAP-9 [34] dan los valores $H_0 = 67,3 \pm 1,2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y $H_0 = 70,0 \pm 2,2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, respectivamente.

El descubrimiento de la ley de Hubble marcó el comienzo de la era de una cosmología cuantitativa, en la que las teorías del universo podrían ser objeto de prueba observacional. Desde los días de Hubble, los avances en la tecnología han permitido a los astrónomos medir la luz proveniente de un espacio cada vez más lejano y más antiguo. Nuestras ideas sobre la historia de la expansión del universo han ido convergiendo gradualmente en una imagen unificada denominada el modelo del “Big Bang”.

A primera vista, parece que la ley de Hubble es una violación del principio cosmológico, porque todas las galaxias se alejan de nosotros, lo que se podría ver como un lugar privilegiado en el universo. De hecho, lo que vemos en nuestra galaxia es exactamente lo que se esperaría en un universo que está experimentando una expansión homogénea e isotrópica. Vemos cada vez más distantes las galaxias que se alejan de nosotros; pero los observadores en cualquier otra galaxia también verían distanciarse cada vez más las galaxias que los rodean.

Cuando las galaxias se mueven en relación a nosotros, se observa el cambio en la longitud de onda de la luz emitida por esas galaxias. Para describir esto, es conveniente definir un corrimiento al rojo denotado por z . El corrimiento al rojo es una cantidad adimensional definida como el cambio en la longitud de onda de la luz, dividida por la longitud de onda de la luz:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_c}{\lambda_c}, \quad (2.33)$$

donde λ_c es la longitud de onda emitida, y λ_0 es la longitud de onda observada.

El corrimiento al rojo z es un observable que puede ser relacionado con el factor de escala $a(t)$ a través de

$$z + 1 = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a}, \quad (2.34)$$

recordamos la convención de que $a_0 = 1$. El corrimiento al rojo que observamos, para un objeto distante, depende sólo de los factores de escala relativos en el momento de la emisión y en el tiempo de observación. No depende de cómo se realizó la transición entre un $a(t_e)$ y un $a(t_0)$, cómo tampoco si la expansión fue gradual o abrupta.

2.6. Resumen de la historia térmica del universo

Como sabemos, la radiación cósmica de fondo que observamos hoy en día nos brinda importantes indicios de cómo fue el universo en el pasado. Es decir, el universo tiene una historia térmica, y de los varios aspectos que se pueden considerar, ésta por ejemplo el hecho de que la expansión cosmológica preserva las propiedades de cuerpo negro de una distribución de fotones, como se observa en la Fig. 2.3. La etapa anterior a los fotones también posee un espectro de Planck, pero con una temperatura alta, que se puede relacionar con el corrimiento al rojo de la siguiente manera, $T(z) = T_0(1 + z) = 2,73(1 + z)K$, [31]. Esto implica que el universo estaba muy caliente en el pasado, cuando el factor de escala se encontraba cercano a cero.

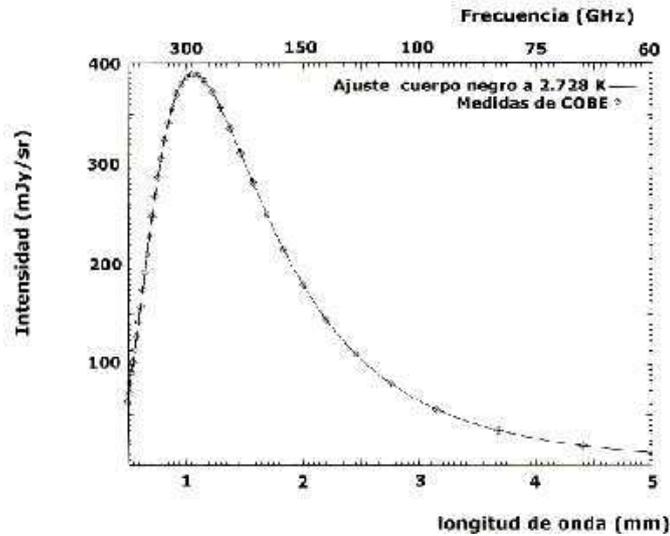


Figura 2.3: Datos observacionales de la RCF obtenidos por COBE y ajustados por un espectro de cuerpo negro.

Justo después del Big Bang, el universo se hallaba muy caliente y los procesos que se daban eran de muy altas energías; por ejemplo, cuando la temperatura era alrededor de $k_B T \sim 1 \text{ MeV}$ hubo creación de pares electrones-positrones. Las partículas de masa m pueden ser generadas a temperaturas $T \gtrsim m$ debido a la producción de pares.

Esta posibilidad de reconstrucción del pasado del universo, nos ha permitido identificar nueve eras fundamentales (las más conocidas), de las cuales las dos primeras son hipótesis teóricas, ya que no se poseen datos observacionales para esos estadios. A continuación, se hará un resumen de estas épocas o estadios por los que ha atravesado el universo, hasta alcanzar lo hoy observado.

- *Gravedad cuántica* ($T \simeq 10^{19} \text{ GeV}$): En esta etapa, el universo poseía toda su energía concentrada en una escala microscópica, por lo tanto para describir esta era se necesita considerar una teoría que unifique la RG con la mecánica cuántica, cosa que aún no se ha podido alcanzar. Sin embargo, se utilizan distintas teorías para poder describir este estadio. La teoría más prometedora es la teoría de cuerdas.
- *Bariogénesis* ($T \in [10^2, 10^{19}] \text{ GeV}$): Se cree que esta etapa es la responsable de la asimetría entre bariones y anti-bariones, que se da durante los primeros instantes de la creación del universo y que puede observarse hoy en día. De acuerdo a las teorías de gran unificación (GUT) este proceso se lleva a cabo a temperaturas del orden de 10^{15} GeV .
- *Inflación* ($T \simeq 10^{15} \text{ GeV}$): La etapa inflacionaria del universo, fue propuesta para resolver algunos problemas originales del modelo del Big Bang. Se asume

que durante la evolución, en los primeros instantes, el universo paso a través de un período de expansión espacial super-lumínico, modificando las condiciones del Big Bang, y haciendo que el universo alcanzará una geometría plana a través de fluctuaciones en la densidad de energía, necesarias para crear las estructuras observadas hoy en día. Los datos astronómicos recopilados por experimentos observacionales, representan un apoyo muy fuerte a favor de la existencia de tal período. Sin embargo, tales evidencias no son concluyentes, es decir no se conoce evidencia fundamental del campo energético que produce la inflación en el universo. En la próxima sección haremos un breve resumen sobre el modelo más utilizado en inflación.

- *Transición electro-débil* ($T \simeq 100\text{GeV}$): Ruptura de la simetría electro-débil. Origen de las masas de los bosones de la fuerza débil Z^0 , W^\pm .
- *Transición de fase QCD* ($T \simeq 0,3\text{GeV}$): Confinamiento de quarks y gluones en hadrones.
- *Nucleosíntesis primordial* ($T \simeq 0,1 - 1\text{MeV}$): Desacople de los neutrinos del baño térmico. La nucleosíntesis primordial o Nucleosíntesis de Big Bang (NBB) se denomina al período en el cual se forman determinados elementos ligeros: el usual H (el hidrógeno ligero), su isótopo el deuterio (2H o D), los isótopos del helio 3He y 4He y los isótopos del litio 7Li y 6Li y algunos isótopos inestables o radiactivos como el tritio 3H , y los isótopos del berilio, 7Be y 8Be , en cantidades despreciables. La nucleosíntesis duró sólo unos tres minutos (durante el período entre 100 y 300 segundos del inicio de la expansión del espacio), después de lo cual la temperatura y la densidad del universo cayeron por debajo de lo que se requería para la fusión nuclear. Los resultados de la abundancia de masa son, un 75 % de H , un 25 % de 4He y un 0,01 % de Deuterio y el resto se reparte entre los elementos antes mencionados. De hecho, NBB es la fuente más grande de deuterio en el universo, cualquier deuterio producido en las estrellas se destruye casi inmediatamente (mediante la fusión en 4He); así la presente abundancia de deuterio en la universo puede ser considerado un “límite inferior” de la cantidad de deuterio creado por el Big Bang. Por lo tanto, ha sido posible gracias a las observaciones, estimar la cantidad de deuterio y compararlo con el calculado teóricamente, mediante el uso de la física nuclear y de las tasas de reacción conocidas, siendo uno de los triunfos del modelo del Big Bang. En la Fig. 2.4 se observan las curvas teóricas de la abundancia de elementos livianos en función de la densidad de bariones.
- *Igualdad materia-radiación* ($T \simeq 3eV$): Se equiparan la cantidad de materia con la densidad de radiación.
- *Recombinación* ($T \simeq 3000K$): En la cosmología, la recombinación se refiere a la época en la que electrones y protones cargados se combinaron para formar átomos de hidrógeno eléctricamente neutros. Después del Big Bang, el universo

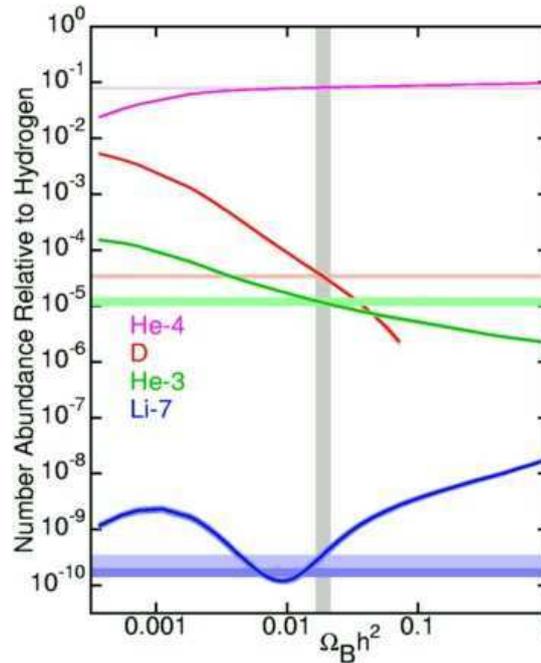


Figura 2.4: Se muestran las curvas de las predicciones teóricas de abundancia de elementos contra la densidad de bariones.

era un caliente y denso plasma de fotones, electrones y protones. Este plasma era opaco a la radiación electromagnética, por lo que el camino libre medio de cada fotón era muy corto. A medida que el universo se expandía, también se enfriaba, hasta el punto de que la formación de hidrógeno neutro se vio favorecida energéticamente, y la fracción de electrones y protones libres en comparación con hidrógeno neutro se redujo a unas pocas partes en 10000. Cuando esto se produjo, los fotones se vieron desacoplados de la materia y viajaron libremente, constituyendo lo que observamos hoy, la radiación cósmica de fondo. La recombinación se produjo cuando el universo tenía unos 378.000 años de edad, o en un corrimiento al rojo de $z \simeq 1,100$.

- *Después de recombinación:* Etapa dominada por materia, formación de estructuras, expansión desacelerada del universo. Luego, el universo entra en una etapa de expansión acelerada, dominada por la energía oscura.

2.7. Algunos problemas en la teoría del Big Bang

Históricamente, han surgido varios problemas dentro de la teoría del Big Bang. Algunos de ellos sólo tienen interés histórico y han sido aliviados, ya sea por medio de modificaciones a la teoría o como resultado de observaciones más precisas. En

este apartado nombraremos algunos de los problemas que presenta el modelo.

1. *Problema del horizonte*: El problema del horizonte, también llamado problema de la causalidad, resulta del hecho de que la información no puede viajar más rápido que la luz, de manera que dos regiones en el espacio separadas por una distancia mayor que la velocidad de la luz multiplicada por la edad del universo no pueden estar causalmente conectadas. En este sentido, la isotropía observada, en todas las direcciones, por la radiación cósmica de fondo resulta un problema. Ya que usando el modelo y yendo para atrás en el tiempo, resulta imposible que regiones tan distantes, hoy en día, hayan estado conectadas causalmente en el pasado. La pregunta que surge es ¿cómo estas regiones estuvieron causalmente conectadas en el pasado?
2. *Problema de la planitud*: La densidad de materia presente en el universo, se encuentra muy cercana de la densidad crítica, o lo que es lo mismo, en una buena aproximación el universo hoy es espacialmente plano. Dado que las diferencias con respecto a la densidad crítica aumentan con el tiempo,

$$|\Omega_\kappa(t)| = \left| \frac{\kappa}{a^2 H^2} \right| \propto \dot{a}^{-2}. \quad (2.35)$$

Si paso de una etapa dominada por la radiación que evoluciona con $t^{1/2}$, a otra posterior dominada por materia con $t^{2/3}$, es de esperar que en el pasado, la densidad haya estado aún más cercana a la crítica. Gracias a las observaciones, se ha medido que en los primeros momentos del universo la densidad era diferente a la crítica tan sólo en una parte en 1015. Lo que representa un enorme ajuste fino sobre la condición inicial de planitud del universo.

3. *Monopolos magnéticos*: Las teorías de la gran unificación predicen defectos topológicos en el espacio, que se manifestarían como monopolos magnéticos encontrándose en el espacio con una densidad mucho mayor a la observada. De hecho, hasta ahora, no se ha dado con ningún monopolo. Este problema también queda resuelto mediante la inflación cósmica, dado que ésta elimina todos los puntos defectuosos del universo observable de la misma forma que conduce la geometría hacia su forma plana. Es posible que aún así pueda haber monopolos pero se ha calculado que apenas habría una cantidad ínfima y no observable en todo caso, por cada universo visible.
4. *Fluctuaciones de densidad Primordiales*: En la teoría del Big Bang las inhomogeneidades en la densidad de energía dieron origen a las estructuras actuales del universo. Sin embargo, estas inhomogeneidades no tienen un origen claro, es decir no se tiene una clara explicación de como surgen dichas inhomogeneidades.

La solución a algunos de estos problemas viene por medio de lo que se denomina teoría inflacionaria. Por ejemplo, una solución al problema del horizonte es proporcionada por un escenario inflacionario, que vamos a examinar en la próxima sección.

La idea básica es la de *desacoplar* el tamaño causal del radio de Hubble, de modo que el tamaño real de la región del horizonte, en la era dominada por la radiación, sea mucho mayor que la del Radio de Hubble. Tal situación se produce si el radio de Hubble comóvil disminuye lo suficiente en el universo temprano. La condición correspondiente para que suceda es: $\ddot{a} > 0$. Esto quiere decir que el universo entra en una etapa acelerada.

2.8. Universo inflacionario

Como vimos en la sección 2.7 la etapa inflacionaria se corresponde con una fase acelerada del universo. Estamos interesados en una fase inflacionaria que tiene lugar en los inicios del universo, caracterizada por diferentes escalas de energía. Una inflación, en los inicios del universo, debe terminar para dar lugar a una fase dominada por la densidad de radiación cosmológica [38].

La solución estándar de los problemas planteados anteriormente, y que permite dar cuenta de una expansión acelerada en los primeros momentos del universo, es la introducción de un campo escalar sin masa ϕ , denominado inflatón, con un potencial $V(\phi)$. La dinámica del campo escalar esta gobernada por la acción

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right), \quad (2.36)$$

donde $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$. El tensor de energía-momento que se obtiene al variar la acción Ec. (2.36), respecto a la métrica, esta dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right). \quad (2.37)$$

En la métrica isótropa y homogénea de FRW, el tensor de energía-momento es el de un fluido perfecto con densidad de energía y presión

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.38)$$

que llenan el universo temprano. La ecuación de movimiento para el campo escalar (ecuación de Klein-Gordon), se obtiene variando la acción (2.36) respecto al campo. Luego, usando las ecuaciones de Friedmann, se obtiene el sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica del campo escalar y la de la geometría cosmológica,

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.39)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.40)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2. \quad (2.41)$$

La ecuación (2.41) se puede derivar de las dos primeras ecuaciones (2.39) y (2.40), por lo tanto resulta redundante. El sistema dinámico, dado por las ecuaciones anteriores, no siempre da una expansión acelerada, pero si lo hace en el régimen denominado *slow-roll*, cuando la energía potencial del campo escalar domina sobre la energía cinética, $|\dot{H}| \ll H^2$, lo cual nos lleva a

$$\dot{\phi} \ll V(\phi). \quad (2.42)$$

El requisito necesario para tener un modelo inflacionario viable es que $V(\phi)$ debe ser grande y casi plano para permitir el lento balanceo (*slow-roll*) en el movimiento del campo de inflación, lo que implica

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}|. \quad (2.43)$$

Estas expresiones, (2.42) y (2.43), son las denominadas condiciones de *slow-roll*, las cuales pueden ser escritas en términos de los parámetros de *slow-roll*

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad \eta_\phi = \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}, \quad (2.44)$$

siendo $V' = \partial V / \partial \phi$, donde la condición $\{\varepsilon_\phi, \eta_\phi\} \ll 1$ define el proceso inflacionario [38]. Estos parámetros muestran donde la inflación puede ocurrir a partir de un potencial dado. Por ejemplo si se tiene $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$, estos se satisfacen pidiendo $\phi^2 > 2M_{Pl}^2$, [ver la primer ecuación de Ec. (2.44)]. Una vez alcanzado el mínimo para la validez de estas condiciones la inflación llegara a su fin.

Al final de la era de inflación, $\{\varepsilon_\phi, \eta_\phi\} \rightarrow 1$, el campo de inflación decae en partículas relativistas, específicamente en fotones, donde la temperatura del universo aumenta hasta alcanzar el máximo, llamada temperatura de recalentamiento T_R .

La inflación resuelve varios problemas en la cosmología del Big Bang que fueron señalados en la sección anterior. Tiene el efecto importante de resolver heterogeneidades, anisotropía y la curvatura del espacio. Esto pone al universo en un estado muy simple, en el que está completamente dominado por el campo inflatón y las únicas heterogeneidades significativas son las débiles fluctuaciones cuánticas en el inflatón. La inflación también diluye partículas pesadas exóticas, como los monopolos magnéticos predichos por muchas extensiones del modelo estándar de física de partículas.

En un universo en expansión, las densidades de energía generalmente decrecen según se incrementa el volumen del universo. Por ejemplo, la densidad de la materia (polvo) “fría” ordinaria es proporcional a la inversa del volumen: cuando las dimensiones lineales se duplican, la densidad de energía cae en un factor de ocho. La densidad de energía en la radiación cae incluso más rápidamente según se expande el universo: cuando las dimensiones lineales se duplican, la densidad de energía de radiación cae en un factor de dieciséis. Durante la inflación, la densidad de energía en el campo inflatón ϕ es casi constante. Sin embargo, la densidad de energía en heterogeneidades, curvatura, anisotropías y partículas exóticas está descendiendo,

por lo que con una inflación suficiente, estas se hacen insignificantes. Esto deja un universo vacío, plano y simétrico, como lo observamos hoy en día, que es llenado de radiación cuando la inflación termina.

Un requisito clave es que la inflación tiene que continuar lo suficiente para reproducir el universo observable. Este requisito está generalmente pensado para satisfacerse si el universo se expandió con un factor de al menos 10^{26} durante la inflación. Al final de la inflación, ocurre un proceso llamado recalentamiento, en el que las partículas inflatón decaen en la radiación. No se conoce cuando duró la inflación, pero normalmente se piensa que fue extremadamente corta comparado con la edad del universo. Asumiendo que la escala de energía de inflación está entre 10^{15} y $10^{16}eV$, como se sugiere en los modelos más simples, el período de inflación responsable del universo observable, probablemente duró unos 10-33 segundos.

Capítulo 3

Observaciones Cosmológicas

3.1. Supernova

Las Supernovas Tipo Ia son un violento punto final en la evolución estelar, el resultado de una destrucción termonuclear, una acreción de carbono-oxígeno de una estrella enana blanca acercándose al límite de Chandrasekhar, la máxima masa teórica que una enana blanca puede alcanzar antes de que la presión de degeneración electrónica ceda ante el colapso gravitatorio. Como la enana blanca extrae materia de una compañera binaria y se aproxima a esta masa límite, la temperatura del núcleo de la estrella se incrementa alcanzando la fusión nuclear en su interior. La energía cinética liberada por la combustión nuclear - unos $10^{44}J$ - es suficiente para liberar a la estrella, dando como resultado una violenta explosión y la aparición de una onda de impacto con billones de veces el brillo de nuestro sol, eclipsando cómodamente la galaxia en la cual reside la enana blanca.

Las SNe Ia son además extraordinarios ejemplos de una clase de objetos conocidos como “velas de criterio”, objetos con un brillo intrínseco uniforme. Para la SNe Ia, se presume que esta homogeneidad es debida a la masa de estallido de la enana blanca (i.e., la masa de Chandrasekhar, $\sim 1,4$ masas solares) [39] y consecuentemente la cantidad de combustible disponible para quemar. Esto hace de la SNe Ia el mejor (o por lo menos el más práctico) de los ejemplos de “velas de criterio” en el universo distante, objetos a los cuales la distancia puede ser inferida de sólo una medición del brillo aparente en el cielo. Esto les permite ser usadas para trazar directamente la tasa de expansión del universo.

3.1.1. Determinación de Distancia

El principio subyacente para usar las velas de criterio, para delimitar los parámetros cosmológicos a través de los efectos observacionales de la energía oscura, es medir la historia de la expansión $H(a) \equiv \dot{a}/a$ y compararla con (2.26), cabe remarcar que si se esta contrastando con algún otro modelo teórico, justamente el $H(z)$ debe ser distinto. El factor de escala se puede medir fácilmente via el corrimiento al rojo de objetos astronómicos, z . Cuando estos objetos son observados, la longitud de onda

de los fotones de radiación se encuentra corrida al rojo debido a la expansión del universo por un factor $1/a = 1+z$ [39]. La distancia d a un objeto con un corrimiento al rojo z es

$$d = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.1)$$

Esta distancia es la distancia entre dos puntos medidos a lo largo de un camino definido al tiempo presente. Usando (2.26) se tiene

$$d = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_{r0}(1+z')^4 + \Omega_{x0}(1+z')^{3(1+w)}}}, \quad (3.2)$$

donde la ecuación se encuentra escrita en términos de z en lugar de a . Relacionada con esta distancia d , hay otra variedad de distancias que dependen de la manera en que son realizadas las mediciones de dichas distancias. En particular, para la SNe Ia la distancia por luminosidad d_L usada se escribe,

$$d_L \equiv d(1+z). \quad (3.3)$$

Esta distancia de luminosidad puede ser estimada [40], independientemente para un objeto, conociendo la luminosidad intrínseca bolométrica L de la observación de la densidad de flujo bolométrico f del mismo objeto

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}. \quad (3.4)$$

Tomando mediciones de un gran conjunto de objetos astronómicos distribuidos en el corrimiento al rojo, los cuales se conocen como velas de criterio (como la SNe Ia), se pueden medir directamente los parámetros de interés y como ya hemos dicho, trazar la historia de la expansión a través de la relación entre la distancia y el corrimiento al rojo.

Otra técnica relacionada con las velas de criterio, usa una medición de distancia diferente, utiliza las dimensiones de objetos conocidos en lugar de la luminosidad. Esos tamaños l bajo un ángulo θ dan la distancia de diámetro angular $d_A = l/\theta$, que se relaciona con d_L como $d_A = d_L/(1+z)^2 = d/(1+z)$. Un ejemplo de este método son las Oscilaciones Acústicas Bariónicas (OAB) en el espectro de galaxias, que detallaremos más adelante.

3.1.2. Supernova Tipo Ia

Una de las mejores velas de criterio conocidas es la Supernova Tipo Ia, SNe Ia. El esquema de clasificación para la SNe -Ia, Ib, Ic, II, etc,- es mayoritariamente un accidente histórico. Las SNe Tipo I fueron originariamente aquellos eventos en los que no se encontró hidrógeno en sus espectros; SNe Tipo II tiene prominentes líneas de hidrógeno (H). El H libre que se encontraba en las Tipo I fue subdividido mucho tiempo atrás, antes de que se produzca el evento: la Tipo Ia nuestra una fuerte

absorción de Si , la Tipo Ib no muestra absorción de Si pero en su lugar tiene He , y la Tipo Ic puede mostrar He e Si . Todos los tipos de SN excepto las SNe Ia se cree que son el resultado de catastróficos colapsos estelares, sobre su mismo núcleo, de masas en el rango de $8 - 10M_{\odot}$.

La SNe Ia tiene un mecanismo físico diferente, es el resultado de una destrucción termonuclear de carbono-oxígeno ($C-O$) que reside en una estrella enana blanca de un sistema binario. Habiendo ganado materia de su compañera cercana via acreción, la masa de la enana blanca se vuelve mayor que la que puede soportar por la presión de degeneración electrónica, en ese punto la temperatura del núcleo de la enana blanca se incrementa y la combustión de C resulta en una deflagración subsónica. Esta fusión de C aumenta la temperatura, un incremento que no es regulado por la propia enana blanca, donde la presión de degeneración es independiente de la temperatura. Luego, la llama de combustión dada por la fusión de C se acelera hacia una detonación supersónica [41], [42], dando como resultado una SN.

Existen muchos detalles sobre la naturaleza de la explosión de la SNe Ia que aún permanecen ocultos, en particular el rol exacto que juega la detonación frente a la deflagración. De todas maneras, una vez que la explosión ha ocurrido, los resultados de la curva de luz observada - la evolución de la luminosidad de la SN como función del tiempo - son ampliamente gobernados por un conocimiento relativamente bueno de la física nuclear involucrada. La curva de luz es alimentada por decaimiento radiactivo del ^{56}Ni , produciéndose dentro del primer segundo de la explosión y transformándose en ^{56}Co con una vida media de ~ 6 días, y luego éste dando lugar al ^{56}Fe con una vida media de ~ 77 días. Este decaimiento radiactivo deposita rayos gamma energéticos dentro de lo eyectado por la SN, lo cual es calentado y radiativamente termalizado para producir la curva de luz observada. Fotométricamente, la SNe Ia alcanza un máximo de luz en un período de aproximadamente 20 días, seguido por una rápida caída de alrededor de tres ordenes de magnitud en el primer mes y de ahí en más con una magnitud por mes.

El modelado de la explosión de la SNe Ia es aún un problema complejo, requiere el conocimiento de la física interior de la enana blanca a punto de explotar, para relacionarla con lo observado: las curvas de luz y el espectro. Dadas las complicaciones, mucho del entendimiento de las SNe Ia se encuentra motivado por las observaciones, aunque recientes progresos teóricos están comenzando a obtener mayor profundidad [43].

3.1.3. Descubrimiento de la Aceleración del Universo

Las Supernovas Tipo Ia son aparentemente ideales como velas de criterio - por su brillo, uniformidad, y porque además poseen una conveniente duración de aproximadamente un mes, en el cual pueden ser encontradas y observadas -. Esto las hace observacionalmente atractivas y prácticas como velas de criterio calibradas, una realización que se remonta décadas atrás [40]. Años de búsqueda e investigación son requeridos para encontrar sólo un puñado de SNe Ia distantes. El avance en este campo sólo ha venido, con el paso de los años, a través del progreso tecnológico.

El esfuerzo de una búsqueda substancial culminó a finales de los noventa cuando dos mediciones diferentes para una SNe Ia distante [44], [45] hicieron el mismo descubrimiento: un alto corrimiento al rojo en la SNe Ia, 40 % más débil - o equivalentemente más distante - de lo que se esperaba para un universo plano dominado por materia. Esto indicaba que la expansión del universo se había visto incrementada a lo largo de los últimos $\sim 5 - 7 \text{Gyr}$, una evidencia directa convincente de un universo acelerado. Cuando estas observaciones son combinadas con un análisis de la radiación cósmica de fondo, emerge una consistente descripción de un universo plano dominado por “energía oscura” responsable de un $\sim 70 - 75 \%$ de esta energía, que se opone al efecto gravitatorio de frenado y acelerando la tasa de expansión del universo.

En astronomía, dado que las distancias son enormes, se necesita utilizar métodos indirectos para poder medirlas. A partir de la experiencia común sabemos que una vela, cuando es alejada del observador, aparece disminuida con el incremento de la distancia. Por lo tanto, la luminosidad aparente de un objeto luminoso puede ser medida de la distancia al observador si su luminosidad absoluta es conocida. En otras palabras, la relación entre la distancia, el brillo percibido por el observador y el brillo intrínseco actual pueden ser determinados con precisión si la geometría del espacio es conocida. En consecuencia, el brillo y el tamaño angular, de un objeto luminoso percibido por observadores, son usados para estimar distancias entre los objetos.

El brillo estelar de objetos se identifica con la magnitud aparente m , la cual no es más que el flujo f , recibido en la tierra, normalizado a un flujo de referencia f_0 (por ejemplo, de una de las estrellas de Vega), en una escala logarítmica:

$$m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{f}{f_0} \right). \quad (3.5)$$

El sol, por ejemplo, tiene $m \sim -26,7$ y la luna llena tiene $\sim 12,6$. La magnitud aparente es claramente dependiente de la distancia al objeto.

Por otro lado, la magnitud absoluta M es relacionada con la luminosidad intrínseca L de un objeto.

$$M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \right), \quad (3.6)$$

donde L_0 es una luminosidad de referencia. Como ya se ha mencionado, para una Supernova Ia, el brillo dado por la explosión se puede observar por varios días obteniéndose una curva de luz; un gráfico de magnitud relativa, en diferentes bandas, como función del tiempo. Se puede observar que la magnitud se incrementa hasta alcanzar un máximo de brillo y luego decrece lentamente. La magnitud debe ser corregida por efectos de extinción o enrojecimiento por polvo. En términos de la magnitud absoluta, se cree que todas las Supernovas Tipo Ia tienen un máximo común de $M = -19,3$ el cual es independiente del corrimiento al rojo.

Las dos magnitudes que se definieron con anterioridad, la aparente y la absoluta, se relacionan por el módulo de la distancia μ o equivalentemente por la distancia

por luminosidad d_L ,

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} (d_L(z)/Mpc) + 25, \quad (3.7)$$

donde un mayor μ corresponde a un menor brillo del objeto.

Una comprensión más profunda de los bajos corrimientos al rojo que presentan las Supernovas, ha permitido crear modelos empíricos detallados para ajustar las curvas de luz y determinar el módulo de la distancia de la SNe Ia. Paquetes de ajuste como el SALT (Spectral Adaptive Lightcurve Template) o el MLCS (Multicolor Light Curve Shape fitter) establecen los módulos, usando las correcciones de las formas existentes, entre el brillo y las curvas de luz. Mas precisamente, el decrecimiento del brillo en el B (Azul por sus siglas en inglés), después de 15 días es una buena predicción de luminosidad [1]. Existen varios códigos diferentes de ajuste y todos dan resultados consistentes.

Las compilaciones, o los conjuntos de datos, de Supernova se presentan como tablas con los corrimientos al rojo para cada Supernova, los módulos de distancia y sus errores, así también otros parámetros que no son relevantes para el trabajo.

Por lo tanto, se obtiene una determinación observacional de la función $\mu_{obs}(z)$. Una base de datos de Supernova usada es la Union2 [46] que se compone del corrimiento al rojo de 557 SNe Ia hasta el $z = 1,4$. La Fig. 3.1 muestra el gráfico del módulo de la distancia con sus errores como función del corrimiento al rojo. Como se discutió, la distancia por luminosidad está relacionada con el parámetro de Hubble como se muestra en (3.3). Por otro lado, el módulo de distancia teórico $\mu_{teo}(z)$ es

$$\mu_{teo}(z) = 5 \log_{10} \left[c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] = 5 \log_{10} \left[\frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (3.8)$$

donde, c es la velocidad de la luz en $[m/s]$ y se define $E(z) = H(z)/H_0$.

A nivel teórico, los datos de la SNe Ia son utilizados para encontrar los parámetros que mejor ajustan $\mu_{teo}(z)$ con los observacionales $\mu_{obs}(z)$.

En la Fig. 3.2 son presentados los datos de Supernova y las curvas teóricas para las funciones $\mu_{teo}(z)$ del modelo Λ CDM con diferentes valores de Ω_Λ , Ω_{rad} y Ω_M , relacionadas por $\Omega_\Lambda + \Omega_{rad} + \Omega_M = 1$. En esta figura, se puede ver que el mejor ajuste del modelo corresponde para una constante cosmológica alrededor de $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$. Que la Supernova aparezca más débil de lo que sería en un universo lleno de materia, trae como consecuencia la presencia de una energía oscura, de presión negativa que justifica este corrimiento. En las ecuaciones de Einstein esto se obtiene fácilmente con la inclusión de la constante Λ , como desarrollaremos más adelante. A bajos corrimientos al rojo, las tres curvas coinciden, por lo tanto, es necesario usar los datos de la Supernova a grandes corrimientos, para discriminar los parámetros del modelo que mejor ajustan y subrayar la presencia de una energía oscura que justifique la expansión acelerada. De todas maneras, el corrimiento al rojo no puede ser demasiado grande ya que los efectos de la energía oscura son relevantes a tiempos tardíos.

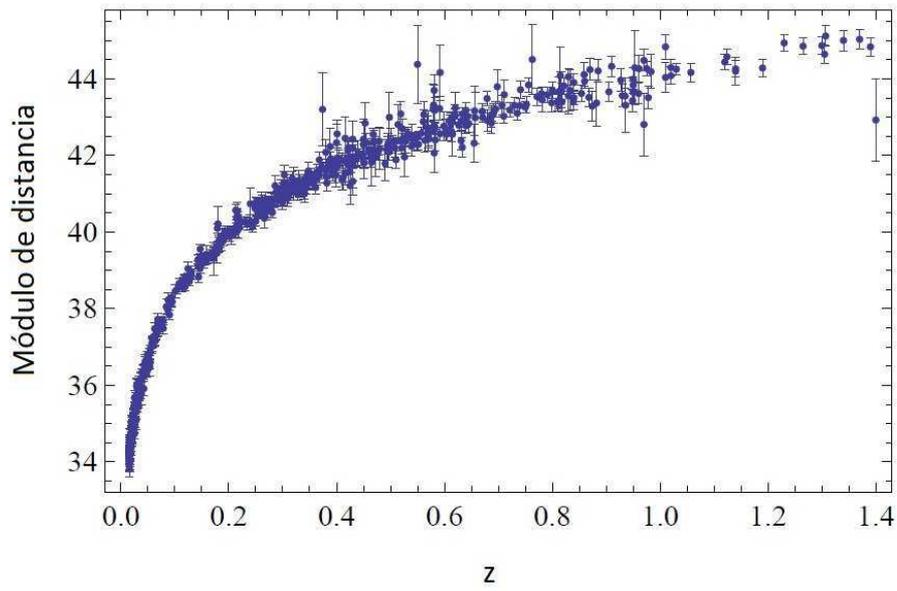


Figura 3.1: Conjunto de datos Union2: módulo de distancia con barras de error como función del corrimiento al rojo.

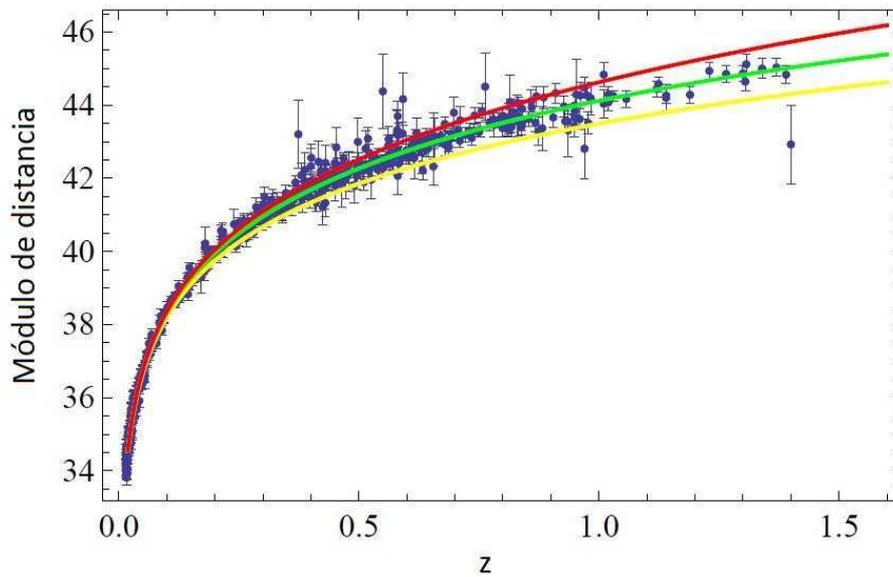


Figura 3.2: Conjunto de datos Union2 y las curvas teóricas para una cosmología plana. En amarillo domina materia y radiación, $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 1$ y $\Omega_{x0} = 0$; en verde, $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 0,28$ y $\Omega_{x0} = 0,72$; en rojo $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 0,01$ y $\Omega_{x0} = 0,99$.

3.2. Radiaci3n C3smica de Fondo

La radiaci3n c3smica de fondo (RCF) es una radiaci3n t3rmica que se encuentra distribuida casi uniformemente en todo el universo. Es otra evidencia a favor de la aceleraci3n c3smica. Cuando el universo era mucho m3s joven y mucho m3s caliente, los 3tomos neutros no eran estables. La materia bari3nica estaba totalmente ionizada y se encontraba estrechamente acoplada con los fotones, formando un plasma. Como el universo se expanda, la temperatura disminuy3 y en torno, a una temperatura de $T_{rec} \simeq 0,32eV$ y un corrimiento al rojo de $z_{rec} \simeq 1376$ [47], ocurri3 el fen3meno de recombinaci3n. En ese momento, los electrones y los protones formaron 3tomos de hidr3geno estables, por primera vez en la historia del universo. La recombinaci3n es por convenci3n determinada, como el momento en que la mitad inicial de los electrones libres X_e encuentran su forma bajo el 3tomo neutro. Casi inmediatamente despu3s, los fotones se desacoplan, en $z_{dec} = 1091 \pm 0,91$ [33] y a una temperatura de $T_{dec} = 0,26eV$. El desacople de una especie de parta culas se define como el instante, en que la tasa de interacciones Γ , de estas parta culas con las dem3s, cae por debajo de la tasa de expansi3n del universo,

$$\Gamma(z_{dec}) = H(z_{dec}). \quad (3.9)$$

Durante la recombinaci3n, X_e repentinamente disminuy3 y lo hizo a una tasa $\Gamma_{Thom} = \sigma_{Thom} n_e X_e$, con n_e la densidad de electrones y σ_{Thom} la secci3n transversal de dispersi3n de Thomson. Desde el momento en que $\Gamma_{Thom} < H$, los fotones dejaron de interactuar con los bariones y su camino libre medio se hizo enorme. A partir de ese momento, comenzaron su recorrido libre desde la 3ltima superficie de dispersi3n hasta hoy en d3a, esto es lo que observamos con la RCF.

Esta radiaci3n primitiva fue predicha por primera vez por Gamow en 1948 y por casualidad descubierta por Penzias y Wilson en 1965. El espectro observado era muy uniforme y ahora se sabe que es el de un cuerpo negro de temperatura $T \simeq 2,725$. Mucho m3s tarde, se detectaron algunas anisotropas en la temperatura, del orden de $10^4 - 10^5 K$. El corrimiento al rojo del desacople es una funci3n de la densidad de bariones y de materia.

La mayor parte del tiempo, los datos de la RCF se presentan con la forma de un espectro de potencia, de las anisotropas en la temperatura. Las anisotropas en la temperatura se describen por dos campos, representados por una funci3n en una esfera, que se pueden desarrollar en arm3nicos esf3ricos.

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.10)$$

El par de 3ngulos (θ, ϕ) puede ser reemplazado por la direcci3n de observaci3n \vec{n} . Como las fluctuaciones son el resultado de un proceso estoc3stico, no podemos hacer predicciones acerca de cualquier a_{lm} particular, s3lo los valores medios se pueden calcular, y el promedio debe hacerse sobre las diferentes posibles realizaciones del proceso aleatorio. Para comparar la teor3a con el experimento, debemos hacer una

hipótesis, ya que tenemos un solo universo a nuestra disposición. Suponemos que el promedio estadístico sobre un conjunto del universo es igual a un promedio espacial sobre partes desconectadas del universo. Suponiendo isotropía y homogeneidad del proceso estocástico primordial, tenemos:

$$\langle a_{lm} \cdot a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (3.11)$$

El valor medio de los a_{lm} y el C_l son momentos multipolares y forman el espectro de la RCF. La Fig. 3.3 muestra el espectro de potencia; donde se muestra el producto $l(l+1)C_l/2\pi$ en $[\mu K]^2$ como función de los multipolos.

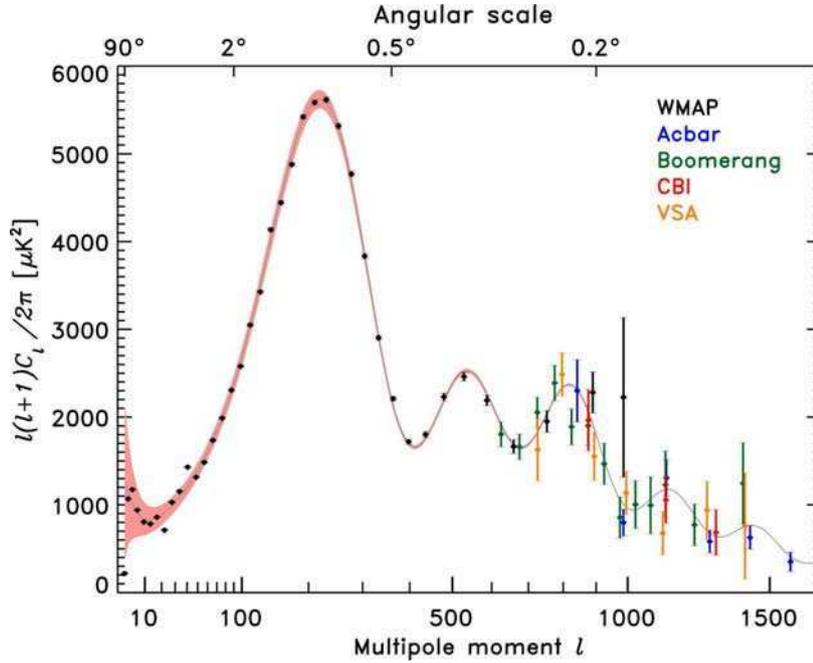


Figura 3.3: Espectro de potencia angular de la anisotropía en la temperatura de la RCF como función de los multipolos l según mediciones de WMAP, Acbar, Boomerang, CBI y VSA.

Una discusión completa de las anisotropías, su física subyacente y sus características, está más allá del alcance de este trabajo. Un tratamiento detallado se puede encontrar en [47]. Las anisotropías pueden dividirse en primarias, que se deben a efectos que ocurrieron en la última dispersión o antes, y las secundarias, causadas por las interacciones entre los fotones de la RCF y el fondo después del desacople. El espectro se puede descomponer en tres regiones, que son afectadas por diferentes fenómenos:

- $l < l_{dec} \simeq 90$ es la región que corresponde a escalas angulares grandes $\theta > 2$. La longitud de onda de los modos en la fuente, de estas anisotropías, eran más grandes que el horizonte en el desacoplamiento, y por lo tanto no eran afectados por ninguna física causal. Esta región se llama *meseta Sachs-Wolf*.

- $90 < l < 900$ y los 3ngulos que se encuentran entre $0,2 < \theta < 2$. Esta regi3n es descripta por la f3sica de un plasma a $3000K$ antes del desacoplamiento y se denomina la regi3n ac3stica.
- $l > 900$ y 3ngulos $\theta < 0,2$, es la regi3n llamada *seda de amortiguaci3n*. Las fluctuaciones se cancelan a partir de esta escala, ya que antes del desacoplamiento, el estrecho acoplamiento entre los electrones y los fotones no es infinito. Los fotones poseen un camino libre medio que suprime las muy peque1as escalas de anisotrop3as.

Los principales picos en el espectro de la Fig. 3.3 se llaman los picos ac3sticos y est3n presentes en la regi3n ac3stica. Estos picos se cree que son las consecuencias de las perturbaciones primordiales establecidas por la inflaci3n. Estas primeras perturbaciones excitan las ondas de sonido en el plasma relativista del universo temprano. Las caracter3sticas de las perturbaciones son consecuencia de la velocidad del sonido en el plasma inicial. En un fluido con una presi3n p y una densidad de energ3a ρ , la velocidad del sonido es: $c_s^2(z) = dp/d\rho$.

La recombinaci3n del gas de hidr3geno neutro disminuy3 bruscamente la velocidad del sonido y puso fin a la propagaci3n de la onda que luego se congel3 en la distribuci3n de fotones. En el tiempo entre el final de la inflaci3n y el desacoplamiento, modos de diferente longitud de onda completaron diferentes n3meros de per3odos de oscilaciones. Esto se traduce en una serie de picos y valles en el espectro de energ3a de anisotrop3a. El primer pico, situado a unos $l \simeq 220$ corresponde a la escala del modo que alcanz3 un m3ximo en el momento de z_{dec} . Por el contrario, modos perturbados con menor longitud de onda podr3an ser cero a z_{dec} y se espera que las anisotrop3as sean muy peque1as para el l correspondiente. El segundo pico, por el contrario, es el resultado de un modo que alcanz3 un m3nimo, y el resto de los picos siguiendo de esta manera.

Una escala importante que ajusta la posici3n de los picos es la distancia com3vil que una onda de sonido puede viajar hasta el desacoplamiento; el horizonte de sonido com3vil es

$$r_s(z_{dec}) = \int_0^{\eta(z_{dec})} c_s(z_{dec}) d\eta = \int_{z_{dec}}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz. \quad (3.12)$$

Estimaciones de WMAP-7 [33] nos dan un valor de $r_s(z_{dec}) = 146,8 \pm 1,8 Mpc$. Adem3s, el 3ngulo subtendido por el horizonte de sonido en el desacoplamiento es

$$\theta_A = \frac{r_s(z_{dec})}{d_L(z_{dec})}, \quad (3.13)$$

donde la distancia com3vil d_L viene dada por la Ec. (3.3). θ_A es la escala angular caracter3stica de los picos del espectro de potencias. La posici3n del primer pico en el espacio l de multipolos est3 3ntimamente relacionada con θ_A , m3s precisamente con el 3ndice ac3stico caracter3stico $l_A \equiv \pi/\theta_A$.

La distancia del 3ltimo scattering R viene dada por

$$R = \sqrt{\Omega_m} \int_0^{z_{dec}} \frac{dz}{H(z)}, \quad (3.14)$$

donde los datos de WMAP-7 restringen $R = 1,725 \pm 0,018$ y $l_A = 302,09 \pm 0,76$. Los resultados del análisis estadístico sobre los datos, se muestra en la Fig. 3.4.

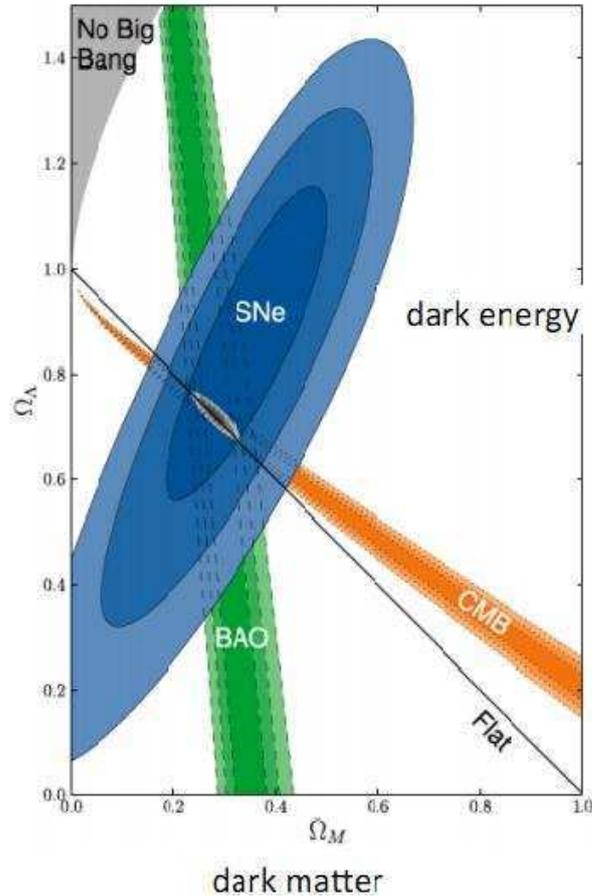


Figura 3.4: Contornos de probabilidad en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_m$ obtenido con la base de datos de RCF, SNe y OAB.

3.3. Oscilaciones Acústicas Bariónicas

Debido a que el universo contiene una fracción significativa de bariones, ciertas teorías cosmológicas predicen que las oscilaciones acústicas en el plasma primordial imprimen el espectro de potencia, de la materia no relativista, de la anisotropía en la temperatura de la RCF. También, que han dejado una huella en distribución a gran escala de las galaxias. Las oscilaciones acústicas de bariones son reliquias congeladas remanentes de la etapa de pre-desacoplamiento del universo.

La detección de las OAB fue posible gracias al incremento de las galaxias observadas, por ejemplo con los proyectos *2dF Redshift Survey* ó *the Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). En las Figuras 3.5 y 3.6 vemos la marca de las OAB en la

función de correlación de dos puntos $\xi(s)$ mediante un pico, el *Pico Acústico de Bariones* (PAB), en una escala de distancia comóvil de $s \simeq 105 \text{ Mpc}/h$ y el espectro de potencias de la materia $P(k)$, donde se produce una serie de oscilaciones.

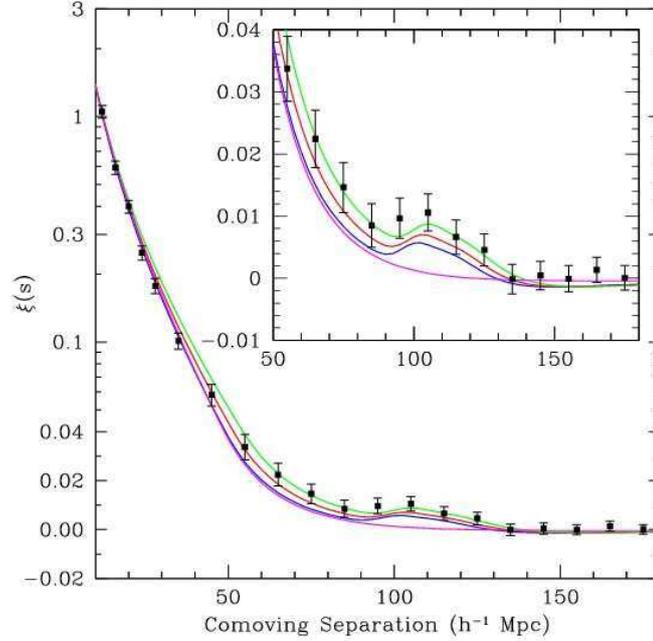


Figura 3.5: Función de correlación con curvas teóricas para $\Omega_b h^2 = 0,024$ para diferentes $\Omega_m h^2$, $\Omega_m h^2 = 0,12$ (curva de arriba), $\Omega_m h^2 = 0,13$ (la segunda curva), $\Omega_m h^2 = 0,14$ (la tercera) y con $\Omega_b = 0$ (la más baja).

Las OAB pueden proporcionar una medición del parámetro de Hubble y la distancia angular diametral, ya que pueden ser medidas en las direcciones radial y tangencial. La escala característica de OAB es fijada por el horizonte de sonido en el desacoplamiento, que ya hemos calculado en la ecuación (3.12). Si consideramos una sola densidad de perturbación esférica en el plasma primordial, esta se propagará hasta desacoplarse. En este momento, los fotones comienzan su recorrido libre y la onda bariónica se detiene. El radio característico del frente esférico $r_s(z_{dec})$, se forma cuando la onda bariónica es impresa sobre la distribución de bariones, bajo la forma de un exceso en la densidad. Esos lugares de sobre-densidades tienen estadísticamente más posibilidades para formar galaxias.

En el estudio de las OAB, el ajuste numérico del espectro de potencia observado, de las galaxias, a un dado corrimiento al rojo, se hace al restringir la distancia $d_v(z)$, definida como

$$d_v(z) \equiv \left[d^2(z) \frac{c_s(z)}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (3.15)$$

donde $d(z)$ viene dada por la Ec. (3.1).

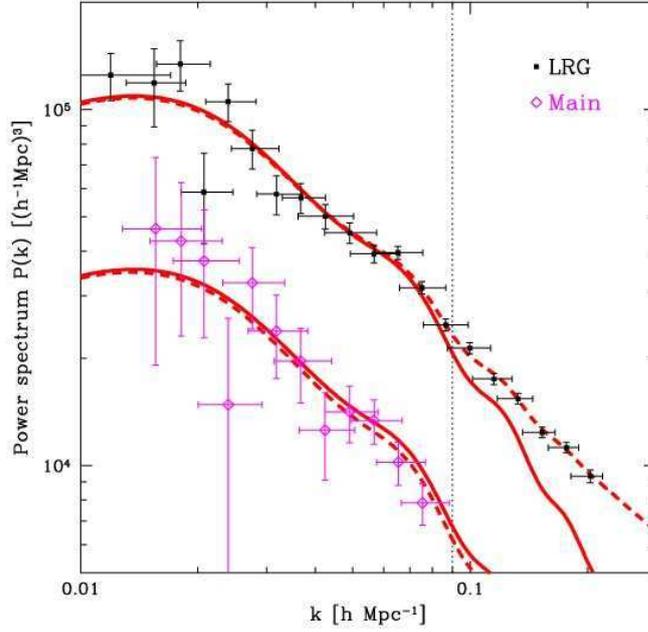


Figura 3.6: Curvas del espectro de potencias de las OAB.

3.4. Estimación de parámetros cosmológicos a través de análisis estadístico

Durante los últimos veinte años, la cosmología ha cambiado mucho debido al aumento y disponibilidad progresiva que se ha dado en el conjunto de datos, con el cual se cuenta. Junto con esto, fue necesario un tratamiento estadístico elaborado de estos datos.

El cálculo de probabilidades y la estadística de los mismos, resultan cruciales para responder a diferentes tipos de preguntas. Estas se pueden dividir en la prueba de hipótesis o en la estimación de parámetros, en este caso cosmológicos. El primer tipo es el caso cuando tenemos una hipótesis particular y analizamos para comprobar su compatibilidad con los datos. En cuanto a la estimación de los parámetros, es una situación en la que ya tenemos un modelo, que consideramos como correcto, que se caracteriza por algunos parámetros libres que queremos ajustar. Por ejemplo, podemos considerar el modelo Λ CDM y deseamos obtener el valor más probable para Ω_m . Un problema adicional también será dar el intervalo de confianza en torno al valor más probable.

3.4.1. Función χ^2

Consideramos N mediciones independientes $X_{obs}(z_i)$, a corrimientos al rojo z_i conocidos con desviaciones estándar σ_i conocidas. El modelo teórico considerado es

$X_{teo}(z_i, \theta)$, con θ los parámetros del modelo. La función $\chi^2(\theta)$ que depende de los parámetros del modelo se define como:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{[X_{teo}(z_i, \theta) - X_{obs}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.16)$$

La función $\chi^2(\theta)$ cuantifica la discrepancia entre las predicciones teóricas y observaciones a un valor particular de los parámetros θ .

Los valores pequeños de χ^2 indican un buen ajuste, de manera similar un valor grande de χ^2 corresponde a una gran diferencia entre la predicción teórica y los datos observados. El conjunto de parámetros θ_0 que minimiza χ^2 son los parámetros que mejor ajustan. Los casos en que los datos estén correlacionados, los datos y sus errores no son independientes o no tengan una distribución gaussiana, la función χ^2 se vuelve

$$\chi^2(\theta) = \sum_{ij}^N [X_{teo}(z_i, \theta) - X_{obs}(z_i)] C_{ij}^{-1} [X_{teo}(z_j, \theta) - X_{obs}(z_j)], \quad (3.17)$$

donde $C_{ij} = cov[X_i, X_j]$ es la matriz de covarianza, que describe la covarianza entre los datos. La ecuación (3.17) es siempre válida y se reduce a (3.16) si los datos no están correlacionados, debido a que la matriz de covarianza es diagonal en este caso.

Una vez que se encuentra el mínimo de la χ^2 , por lo general se quiere definir cierta región de confianza alrededor de los valores de mejor ajuste de parámetros. Parece razonable hacerlo mediante la búsqueda de una región en el espacio de parámetros que contenga un determinado porcentaje de la distribución de probabilidad. Una elección natural es que esta región se encuentre rodeada de superficies constantes de χ^2 . Si nos movemos en el espacio de parámetros a partir del valor mínimo, la χ^2 se incrementará. La χ_{min}^2 debe ser aumentada en un cierto valor $\Delta\chi^2$ de tal manera que la región límite $\chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$ contenga el porcentaje elegido. Los valores $\Delta\chi^2$ para un dado porcentaje elegido y un dado grado de libertad se pueden encontrar mediante las propiedades de la distribución χ^2 y se encuentran listados en tablas.

Podemos definir la función probabilidad $\mathcal{L}(\theta)$ de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\chi^2(\theta)\right], \quad (3.18)$$

donde si reemplazamos la forma general de χ^2 , Ec. (3.17), en la función de probabilidad (3.18) obtenemos

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{ij} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp [X_{teo}(z_i, \theta) - X_{obs}(z_i)] C_{ij}^{-1} [X_{teo}(z_j, \theta) - X_{obs}(z_j)]. \quad (3.19)$$

La función de probabilidad maximiza al mismo conjunto de parámetros θ_0 en la que $\chi^2(\theta)$ se minimiza. En la estadística bayesiana, las regiones de confianza son regiones R en el espacio de parámetros tales que la $\int_R \mathcal{L}(\theta) d\theta = l$, dondel l representa el nivel de confianza requerido. La mayoría de las veces, las regiones de confianza son etiquetadas por 1, 2 y 3σ y corresponden a la probabilidad $l = \{68,3\%, 95,4\%, 99,7\%\}$.

Capítulo 4

Materia y energía oscura

4.1. Materia oscura

Una de las revelaciones más sorprendentes del siglo veinte es el descubrimiento de que la materia bariónica ordinaria no es la forma dominante de materia. Por el contrario, una nueva forma de materia extraña, denominada “Materia oscura”, llena nuestro universo, y es alrededor de cinco veces más abundante que la materia ordinaria. Aunque todavía falta detectar este material extraño en el laboratorio, hay una gran cantidad de evidencia que apunta a la necesidad de su existencia.

Una comprensión completa de la materia oscura requiere la utilización de varias ramas de la física y la astronomía. La creación de materia oscura durante la expansión caliente del universo, se entiende a través de la mecánica estadística y la termodinámica. La física de partículas es necesaria para proponer candidatos a la materia oscura y explorar sus posibles interacciones con la materia ordinaria. La relatividad general, la astrofísica, y la cosmología dictan cómo la materia oscura debe actuar, a escalas grandes, y cómo el universo puede ser visto como un laboratorio para estudiar, esta pieza fundamental en el desarrollo y comprensión de la cosmología, la materia oscura.

4.1.1. Historia e indicaciones tempranas

Los astrónomos siempre han confiado en la fotometría para realizar una estimación sobre la masa, específicamente a través de la bien definida masa de luminosidad (M/L). La astronomía visual se basa en la luz emitida desde los objetos lejanos. Por ejemplo, la relación M/L para el Sol es $M/L = 5,1 \times 10^3 kg/W$; ya que este número no es muy instructivo, por lo general se mide la masa de luminosidad en función de la masa del sol y su luminosidad tal que $M_{\odot}/L_{\odot} = 1$ por definición. Así, mediante la medición de la salida de luz de un objeto (por ejemplo, una galaxia o un cúmulo de galaxias) se puede utilizar la bien definida M/L para estimar la masa del objeto.

A principios de la década de 1930, Oort descubrió que el movimiento de las estrellas en la Vía Láctea, insinuaba la presencia de mucha más masa galáctica, de lo que nadie había predicho anteriormente. Mediante el estudio del desplazamiento

Doppler de estrellas, que se mueven cerca del plano galáctico, Oort era capaz de calcular sus velocidades. Por lo tanto, el hecho sorprendente fue el descubrimiento de que las estrellas estaban moviéndose lo suficientemente rápido como para escapar de la atracción gravitatoria, de la masa luminosa en la galaxia. Oort postula, que debe haber más masa presente dentro de la Vía Láctea para poder sostener estas estrellas en las órbitas observadas. Sin embargo, Oort observó que otra posible explicación fue que el 85 % de la luz proveniente del centro galáctico, fue oscurecida por el polvo y la materia interpuesta o que las mediciones de la velocidad de las estrellas en cuestión, no eran correctas.

Casi al mismo tiempo que Oort hizo su descubrimiento, en Suiza el astrónomo Zwicky encontró indicios similares de falta de masa, pero en una escala mucho más grande. Zwicky estudió el cúmulo Coma, que se encuentra alrededor de los $99 Mpc$ (322 millones de años luz) de la Tierra, y utilizando desplazamientos Doppler en los espectros galácticos observados, fue capaz de calcular la velocidad de dispersión de las galaxias en el cúmulo de Coma. Conociendo las dispersiones de velocidad de las galaxias individuales (es decir, la energía cinética), Zwicky empleó el teorema del virial para calcular la masa del cúmulo. Suponiendo sólo las interacciones gravitacionales y la gravedad newtoniana ($F \propto 1/r^2$), el teorema virial da la siguiente relación entre energía cinética y potencial:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle, \quad (4.1)$$

donde $\langle T \rangle$ es la energía cinética media y $\langle U \rangle$ es el promedio de la energía potencial. Zwicky encontró que la masa total del cúmulo era $M_c \simeq 4,5 \times 10^{13} M_\odot$. Puesto que él observó aproximadamente 1.000 nebulosas en el clúster, Zwicky calculó que la masa media de cada nebulosa era $M_n \simeq 4,5 \times 10^{10} M_\odot$. Este resultado fue sorprendente, porque una medida de la masa del clúster, mediante relaciones estándar M/L para nebulosas, dio una masa total para el cúmulo de aproximadamente el 2 % de este valor. En esencia, las galaxias sólo representaban una pequeña fracción de la masa total; la gran mayoría de la masa del cúmulo de Coma, por alguna razón desconocida, no era observada.

Unos 40 años después de los descubrimientos de Oort, Zwicky, y otros, Vera Rubin y colaboradores llevaron a cabo un amplio estudio de las curvas de rotación de 60 galaxias aisladas [48]. Las galaxias elegidas estaban orientadas de tal manera que el material en un lado del núcleo galáctico se acercaba a nuestra galaxia, mientras que el material en el otro lado se alejara. Así, el análisis de líneas espectrales (Doppler) dio la velocidad de rotación de las regiones observadas de la galaxia. Además, la posición a lo largo de la línea espectral dio información angular sobre la distancia del punto observado al centro de la galaxia. Lo ideal sería apuntar a las estrellas individuales para determinar sus velocidades de rotación; sin embargo, individualizar estrellas en galaxias distantes es difícil, por lo que Rubin utilizó las nubes de gas rico en hidrógeno y helio que rodean las estrellas calientes, como trazadores del perfil de rotación.

Se suponía que las órbitas de las estrellas dentro de una galaxia imitaban las

rotaciones de los planetas dentro de nuestro sistema solar. En el sistema solar,

$$v(r) = \sqrt{G \frac{m(r)}{r}}, \quad (4.2)$$

donde $v(r)$ es la velocidad de rotación del objeto con un radio r , G es la constante gravitacional, y $m(r)$ es la masa total contenida dentro de r (para el sistema solar esencialmente es la masa del sol), que se deriva simplemente de fijar la fuerza gravitacional igual a la fuerza centrípeta (siendo órbitas planetarias más o menos circulares). Por lo tanto, $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$, lo que significa que la velocidad de un cuerpo en rotación debería disminuir a medida que su distancia aumenta respecto del centro.

Los resultados de Rubin mostraron una desviación extrema de las predicciones debidas a la gravedad Newtoniana y a la distribución de materia por luminosidad. Los datos recogidos mostraron que las curvas de rotación de estrellas son “planas”, es decir, las velocidades de las estrellas seguirán en aumento con la distancia desde el centro galáctico hasta alcanzar un límite (que se muestra en la Figura 4.1). Una manera intuitiva de entender este resultado es a través de un modelo simplificado: considerar la galaxia como una esfera uniforme de masa y aplicar la ley de Gauss para la gravedad,

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = 4\pi G M_{enc}, \quad (4.3)$$

donde el lado izquierdo es el flujo del campo de gravedad a través de una superficie cerrada y el lado derecho es proporcional a la masa total encerrada por dicha superficie. Como el radio de las superficies gaussianas aumenta, y más masa se ve encerrada, entonces el campo gravitatorio crecerá; aquí las velocidades pueden crecer o permanecer constante como una función del radio r (el comportamiento exacto depende del perfil de masa $M(r)$). Si disminuye o permanece constante, mientras la superficie de Gauss crece, entonces la gravedad caerá, dando lugar a una velocidad de rotación más pequeña a medida que aumenta r . En las afueras de la galaxia, donde hay un claro descenso de la densidad de masa de luminosidad (la mayoría se encuentra en el bulbo central de la galaxia), se espera una velocidad de rotación pequeña. Por lo tanto, si las velocidades de rotación se mantienen constantes al aumentar el radio, la masa interior del radio debe necesariamente aumentar. Puesto que la densidad de masa luminosa cae más allá del bulbo central de la galaxia, la masa faltante debe ser no luminosa. “La conclusión es ineludible: la masa, a diferencia de luminosidad, no se concentra cerca del centro de las galaxias espirales. Por lo tanto, la distribución de la luz en una galaxia no es en absoluto una guía para la distribución de masa” [48].

En la década de 1970, otra manera de sondear la cantidad y la distribución de la materia oscura fue descubierta: lentes gravitatorias. La lente gravitatoria es una consecuencia de la teoría de Einstein de la Relatividad, que postula que el universo existe dentro de un tejido flexible del espacio-tiempo. Los objetos con masa curvan esta tela, que afecta a los movimientos de los cuerpos a su alrededor (los objetos

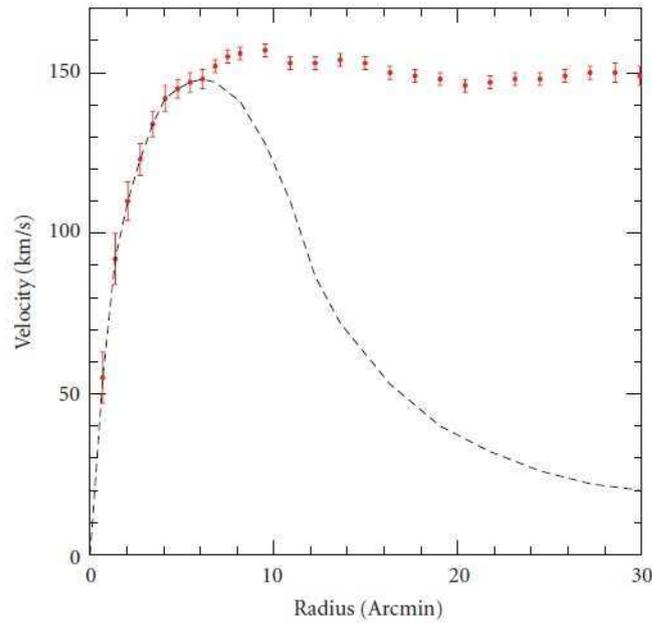


Figura 4.1: Los puntos son los resultados observados de la velocidad de rotación en la galaxia NGC 3198, comparados con los valores esperados.

siguen geodésicas sobre esta superficie curva). El camino de la luz se ve afectada de manera similar; la luz se dobla cuando se enfrentan a objetos masivos, sigue geodésicas. Para observar los efectos de las lentes gravitacionales, los cosmólogos y astrónomos buscan un objeto masivo cercano (a menudo un cúmulo de galaxias), detrás de la cual se encuentra un objeto luminoso distante (a menudo una galaxia). Si la galaxia distante se encontrará ubicada directamente detrás el clúster, un completo “anillo de Einstein” aparecería. Sin embargo, la probabilidad de que los dos objetos brillantes se encuentren perfectamente alineados entre sí y con la Tierra, es muy baja; por lo tanto, las galaxias distorsionadas generalmente aparecen como anillos de Einstein parciales.

En 1979, Walsh *et al.* fueron los primeros en observar esta forma de lente gravitacional, gracias al Nacional Kitt Peak Observatorio.

Podemos estudiar la imagen distorsionada de una galaxia distante y hacer conclusiones acerca de la cantidad de masa dentro del cúmulo utilizado de lente, usando la expresión para θ_E ,

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_L d_S}}, \quad (4.4)$$

donde M es la masa de la lente, c es la velocidad de la luz, y d_{LS} , d_L y d_S son la distancia entre la lente y la fuente, la distancia a la lente, y la distancia a la fuente, respectivamente. Los físicos han encontrado que esta masa calculada es mucho mayor que la masa que se puede inferir a partir de la luminosidad de un cúmulo.

4.1.2. Evidencias

Para explicar la materia oscura, los científicos primeramente centraron su investigación en objetos astrofísicos compuestos de materia ordinaria, la materia bariónica. Los posibles candidatos incluían, enanas marrones, estrellas de neutrones, agujeros negros, y planetas; a todos estos candidatos se les dio el nombre de MACHO por sus siglas en inglés (Massive Compact Halo Objects).

Para la búsqueda de estos objetos se utilizaron dos colaboraciones, entre otras, la Colaboración MACHO y la Sonda EROS-2, las cuales buscan *microlensings* gravitacionales. La Colaboración MACHO ha observado cuidadosamente y analizado estadísticamente los cielos, se estudiaron 11,9 millones de estrellas, con sólo 13 – 17 posibles eventos de lente detectados [49]. En abril de 2007, la Sonda EROS-2 informó incluso menos eventos, la observación de una muestra de 7 millones de estrellas brillantes con un solo candidato encontrado [50]. Este número tan bajo de posibles MACHOs sólo puede dar cuenta de un porcentaje muy pequeño de la masa no luminosa de nuestra galaxia, lo cual revela que la mayor cantidad de materia oscura no puede existir en la forma de objetos astrofísicos bariónicos.

Evidencia importante respecto a la existencia y cantidad de materia oscura, ha sido suministrada por las observaciones de nucleosíntesis primordial y las mediciones de RCF. De considerar la NBB, resulta que la relación Deuterio/Hidrógeno (D/H) es fuertemente dependiente de la densidad total de bariones en el universo, por lo que la medición en la abundancia de D/H da la abundancia total de bariones. En [51] se obtienen dos valores posibles para $\Omega_b h^2$ dependiendo de qué observación de deuterio es considerada, $\Omega_b h^2 = 0,0229 \pm 0,0013$ y $\Omega_b h^2 = 0,0216^{+0,0020}_{-0,0021}$, lo cual sólo representa alrededor del 20 % de la densidad de materia total. Por otro lado, los valores para la densidad de materia total y de bariones, obtenidos por WMAP-9 de medir las anisotropías en la temperatura de la RCF son, $\Omega_m h^2 = 0,1364 \pm 0,0045$ y $\Omega_b h^2 = 0,02264 \pm 0,00050$ respectivamente [34]. La primera observación esencial es que estos dos valores resultan diferentes; la materia bariónica no es la única forma de materia en el universo. De hecho, la densidad de la materia oscura es $\Omega_{dm} h^2 = 0,1138 \pm 0,0045$, es decir alrededor del 83 % de la densidad de masa total. Un análisis de la RCF permite una discriminación entre la materia oscura y la materia ordinaria, precisamente porque las dos componentes actúan de manera diferente. En la Fig. 4.2 se puede observar que pequeñas variaciones en la cantidad de bariones, no da curvas que se ajusten con los datos observacionales, [33].

4.1.3. Posibles candidatos a materia oscura

Los candidatos a materia oscura no bariónica, deben satisfacer una serie de condiciones: deben ser estables en escalas de tiempo cosmológicas (de lo contrario habrían decaído en partículas observables), deben interactuar muy débilmente con la radiación electromagnética (de lo contrario no calificarían como materia oscura), y deben tener la densidad de energía observada (alrededor de los $\Omega_{dm} h^2 = 0,1138 \pm 0,0045$) y garantizar que la materia oscura sea fría (esta condición puede relajarse liguera-

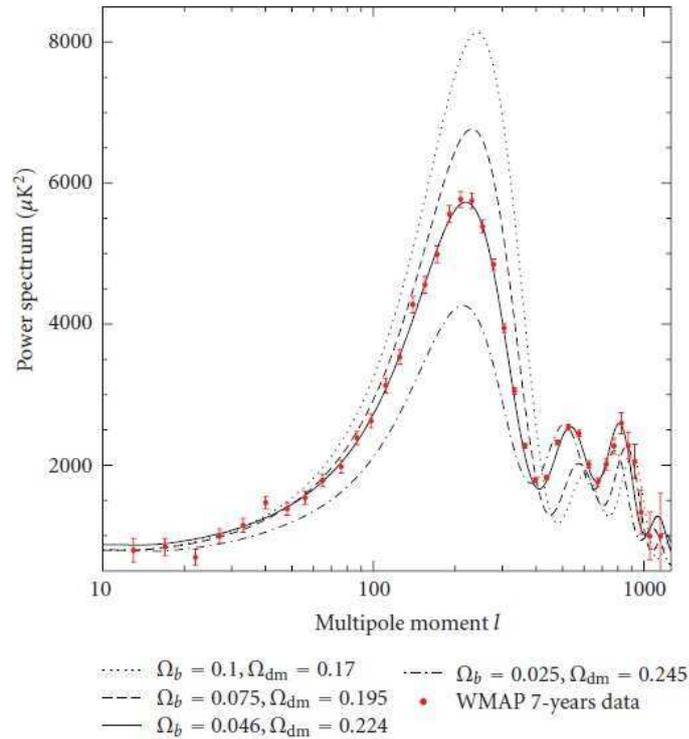


Figura 4.2: Espectro de potencia de las anisotropías de la RCF, para distintos valores de Ω_b y Ω_{dm} , comparados con los datos obtenidos por WMAP-7.

mente y admitir materia oscura con una presión muy débil actualmente). Desde ya, que la o las partículas asociadas no deben entrar en conflicto con las observaciones presentes o las cotas impuestas por las mismas. Un acoplamiento de materia oscura por medio de interacciones débiles no violaría las cotas observacionales y sería factible para generar un mecanismo viable de producción. Esta interacción resulta interesante ya que la materia oscura podría ser producida en el universo temprano, de la misma forma que los neutrinos. Existe una lista de posibles candidatos, entre los cuales se encuentran agujeros negros primordiales, axiones, neutrinos estériles, y las partículas masivas de la interacción débil (WIMPs en su siglas en inglés), que son las que detallaremos brevemente a continuación.

- *agujeros negros primordiales*: Los agujeros negros primordiales deben haberse formado antes de la era de la nucleosíntesis del Big Bang, ya que de lo contrario, hubieran sido considerados como materia bariónica. Tal creación temprana, de un gran número de agujeros negros, que justifique la densidad de materia oscura hoy observada sólo es posible en ciertos modelos cosmológicos un tanto forzados [52].
- *Axiones*: La existencia de los axiones [9] se postuló por primera vez para resolver el problema de la simetría CP fuerte de la cromodinámica cuántica (QCD

por sus siglas del inglés). Dichos pseudo-escalares también se encuentran naturalmente en las teorías de supercuerdas. Los axiones son pseudo bosones de Nambu-Goldstone asociados (mayormente) con la ruptura espontánea de la nueva simetría global “Peccei-Quinn” (PQ) $U(1)$ [53], a una escala f_a . Aunque resultan ser muy ligeros $m_a \simeq 10^{-5} GeV$, los axiones podrían constituir la materia oscura fría, ya que no fueron producidos térmicamente. A temperaturas muy por encima de la transición de fase de QCD, los axiones se encuentran sin masa, y el campo de axiones puede tomar cualquier valor, parametrizado por el “ángulo de desalineación” θ_i . A una $T \lesssim 1 GeV$, los axiones desarrollan masa m_a debido a los efectos del instantón. A menos que el campo de axiones se encuentre en el mínimo de potencial ($\theta_i = 0$), comenzará a oscilar una vez que la m_a sea comparable al parámetro de Hubble H . Estas oscilaciones coherentes transforman la energía originalmente almacenada en el campo de axiones en cuantos físicos de axiones. La contribución de este mecanismo para la densidad presente del axión es

$$\Omega_a h^2 = \kappa_a (f_a/10^{12} GeV)^{1,175} \theta_i^2, \quad (4.5)$$

donde el factor numérico κ_a se sitúa aproximadamente entre cero y 0,5. Si $\theta_i \sim O(1)$, la Ec. (4.5) hará saturar la densidad de materia oscura para $f_a \sim 10^{11} GeV$, esto correspondería a una masa de axiones alrededor de $0,1 MeV$. Sin embargo, si la temperatura post-inflacionaria de recalentamiento $T_R > f_a$, se formarían cuerdas cósmicas durante la transición de fase PQ a $T \simeq f_a$. Su decaimiento dará una contribución adicional a Ω_a , que es comúnmente mayor que la obtenida en la Ec. (4.5) [54], lo que lleva a un valor menor de f_a , es decir, una m_a mayor. Por otro lado, los valores de f_a cerca de la escala de Planck, pueden llegar a ser posibles si θ_i es por alguna razón muy pequeño. El acoplamiento juega un rol fundamental en la búsqueda de axiones. De hecho, los axiones pueden transformarse en fotones cuando se propagan en un campo magnético externo, de alguna manera similar a oscilaciones de neutrinos. Tanto mediciones astrofísicas como de laboratorio, imponen fuertes restricciones a las propiedades de un axión hipotético con masa baja de aproximadamente $1 eV$. En la búsqueda de esta partícula se encuentra el *Axion Dark Matter eXperiment* (ACMX), el cual buscará una señal de masa, en la región cercana, a los μeV .

- *Neutrinos y neutrinos “esteriles”*: Los neutrinos son los únicos candidatos detectados que cumplen el rol de materia oscura no bariónica. La masa no nula de los mismos tiene una cota superior, $\sum m_\nu < 0,17 eV$, dada por los experimentos de oscilaciones de neutrinos. Sin embargo, las cotas cosmológicas muestran que su masa cae dentro del rango de materia oscura caliente y esto conduce a una cierta tensión con la formación de estructura [54], ya que se requiere de partículas no relativistas con baja energía cinética. Un singlete de neutrinos $SU(2) \times U(1)$ de masa alrededor de los keV [55] podría aliviar el problema de los neutrinos calientes, en la formación de estructura. Si estos

neutrinos no fueran producidos térmicamente, a través de la mezcla con los neutrinos estándar, podrían eventualmente decaer en un neutrino estándar y un fotón, que es lo que se observa.

- *WIMPs*: Son partículas masivas de interacción débil, χ . Son partículas con una masa que puede ir desde los 10GeV a unos pocos TeV , y con una sección eficaz débil. Dentro de la cosmología estándar, su factor de densidad actual se puede calcular de forma fiable, si las WIMPs se encuentran en equilibrio térmico y químico, con la “sopa” de partículas calientes del Modelo Estándar (ME), después de la inflación. En este caso, su densidad podría verse exponencialmente suprimida a los $T < m_\chi$. Por tanto, los WIMPs abandonan el equilibrio térmico (“freeze out”) una vez que la tasa de las reacciones que cambia partículas del ME en WIMPs o viceversa, se vuelva menor que la tasa de expansión de Hubble del universo. Después del *freeze out*, el factor de densidad WIMP permanece esencialmente constante; si el universo tiene una evolución adiabática luego del desacoplamiento de las WIMPs, esto implica un número constante de WIMPs en relación a la densidad de entropía. El factor de densidad actual está dado aproximadamente por [9]

$$\Omega_\chi \propto \frac{T_0^3}{M_{Pl}^3 \langle \sigma_A v \rangle}. \quad (4.6)$$

Aquí T_0 es la temperatura de la RCF, M_{Pl} es la masa de Planck, σ_A es la sección eficaz total de aniquilación de un par WIMPs en partículas del ME, v es la velocidad relativa entre las dos WIMPs, y $\langle \dots \rangle$ denota el promedio térmico. El freeze out sucede a una temperatura $T_F \simeq m_\chi/20$, casi independientemente de las propiedades del WIMP. Esto significa que las WIMPs son no relativistas cuando se desacoplan del plasma térmico; también implica que la Ec. (4.6) es aplicable si $T_R > T_F$.

El candidato aparentemente más obvio a ser un WIMP, es el neutrino pesado. Sin embargo, un doblete de neutrino $SU(2)$ tendría demasiado pequeña la densidad si su masa fuera superior a $M_Z/2$, como lo requieren los datos obtenidos por LEP. Se puede suprimir la sección eficaz de aniquilación, y por lo tanto aumentar la densidad, postulando la mezcla entre un doblete pesado $SU(2)$ y algunos neutrinos estériles. Sin embargo, también se tiene que pedir la estabilidad del neutrino; no es obvio por qué un neutrino masivo no debería decaer.

El mejor candidato a ser WIMP actualmente es, la super-partícula ligera (SPL) de los modelos supersimétricos [56] con exacta paridad-R (que garantiza la estabilidad de la SPL). La búsqueda de isótopos exóticos implica que una SPL estable debe ser neutra. Esto deja básicamente dos candidatos posibles entre las supercompañeras de partículas del ME, como los neutrinos estériles, y el neutralino.

La búsqueda experimental de las WIMPs se centra en la detección de energías a través de colisiones raras de WIMP con un núcleo. El experimento DAMA ha reportado una fluctuación del flujo de WIMPs en la órbita terrestre alrededor del sol. Sin embargo, este resultado no fue confirmado por otros experimentos y es altamente cuestionado por la comunidad científica.

4.2. Energía oscura

Como vimos en el Capítulo 3, diferentes evidencias observacionales dan cuenta de la actual aceleración del universo, y con ello de la posible existencia de energía oscura, como causante de la expansión acelerada. La primera evidencia directa de la expansión acelerada, como ya mencionamos, fue proporcionada por la magnitud absoluta de la SNe Ia en función de los datos del corrimiento al rojo [1]. Una de las características fundamentales de la energía oscura es que su ecuación de estado cumple con la condición $\omega_x < -1/3$, es decir tiene suficiente presión negativa para justificar la aceleración. Donde la densidad de energía, de esta componente, puede escribirse como $\rho_x \propto a^{-3(\omega_x+1)}$.

Aquí presentaremos diversos modelos de energía oscura, el modelo de la concordancia o Λ CDM con sus problemas principales, y modelos que consisten en introducir un campo escalar.

4.2.1. Constante cosmológica

La constante cosmológica Λ , fue originalmente introducida por Einstein en 1917 con el objetivo de lograr un universo estático. Tras el descubrimiento de Hubble de la expansión del universo en 1929, Einstein se refirió a la inclusión de la constante como el peor error de su vida, la constante no fue necesaria y fue removida. Sin embargo, el descubrimiento de la aceleración cósmica en la década de 1990 ha renovado el interés en la constante cosmológica.

Por otro lado, desde el punto de vista de la física de partículas, la constante cosmológica surge naturalmente como la densidad de energía del vacío. En este caso, la escala de energía de Λ es mucho mayor que la obtenida por observación de la constante de Hubble actual H_0 . Esto constituye el “problema constante cosmológica” [16], el cual viene siendo estudiado activamente incluso desde antes del descubrimiento de la expansión acelerada del universo en 1998. Ha habido un buen número de intentos para resolver este problema. Una lista incompleta incluye: mecanismos de cancelación [57], [58], gravedad modificada [59], [60], gravedad cuántica [61], gravedad en dimensiones superiores [62] y teoría de cuerdas [63], [64]. Otro problema, también importante, es el problema del ajuste fino asociado con la constante cosmológica Λ .

Introducción de Λ

El tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ y el tensor de momentos de la energía $T^{\mu\nu}$ satisfacen las identidades de Bianchi $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$ y la conservación de energía $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Puesto

que la métrica $g^{\mu\nu}$ es constante con respecto a derivadas covariantes ($\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$), existe la libertad de añadir el término $\Lambda g_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de Einstein. Entonces las ecuaciones de Einstein modificadas están dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Usando la métrica de FRW dada por (2.7), las Ecs. de Einstein modificadas (4.7) se escriben

$$3H^2 = 8\pi G\rho - \frac{3\kappa}{a^2} + \Lambda, \quad (4.8)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p) + \Lambda. \quad (4.9)$$

Podemos observar que la constante cosmológica contribuye negativamente al término de presión, es decir genera un efecto repulsivo. Introduciendo una densidad de energía y presión modificadas

$$\hat{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{4\pi G} = \rho + \rho_\Lambda, \quad \hat{p} = p - \frac{\Lambda}{4\pi G} = p - p_\Lambda, \quad (4.10)$$

encontramos que las Ecs. (4.8) y (4.9) se reducen a las Ecs. (2.12) y (2.15) respectivamente. De las Ecs. (4.10), la ecuación de estado para la Constante Cosmológica resulta ser

$$w_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1. \quad (4.11)$$

Esta es una característica importante de la constante cosmológica, que determina su impacto en la dinámica del universo. De hecho, la condición (4.11) viola la condición de energía fuerte ($\rho + 3p \geq 0$) y es capaz de contrarrestar la fuerza gravitatoria de los otros fluidos cósmicos. Otra consecuencia importante, de la Constante Cosmológica, es que la densidad de energía ρ_Λ siempre es la misma, a través de la historia de expansión del universo.

El modelo Λ CDM, resulta de considerar la constante cosmológica Λ con materia oscura fría (CDM es *Cold Dark Matter*), en un universo plano. Este modelo representa el *modelo de concordancia* del Big Bang que explica las observaciones cósmicas de la RCF, así como la estructura a gran escala del universo y las observaciones de supernovas, arrojando un poco de claridad sobre la aceleración de la expansión del universo. Es el modelo conocido más sencillo que está de acuerdo con la gran mayoría de las observaciones. En función de los parámetros de densidad, se puede escribir la Ec. (4.8) en función del corrimiento al rojo z como

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{dm}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}, \quad (4.12)$$

donde $\Omega_{dm} = \Omega_m + \Omega_b$ y $\Omega_{dm} + \Omega_\Lambda = 1$, como ya vimos $\Omega_{dm} = \rho_{dm}/3H_0^2$ y $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/3H_0^2$. En la Tabla 4.1 se recopilan las estimaciones de los parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM reportados por los proyectos WMAP-9 y Planck. Estos parámetros incluyen la densidad de bariones Ω_b , la densidad de materia oscura Ω_m , la densidad de energía oscura Ω_Λ y la constante actual de Hubble H_0 .

	WMAP-7	WMAP-9	WMAP-9+BAO+ H_0	Planck	Planck+lensing
$\Omega_b h^2$	$0,02249 \pm 0,00056$	$0,02264 \pm 0,00050$	$0,02266 \pm 0,00043$	$0,02207 \pm 0,00033$	$0,02217 \pm 0,00033$
$\Omega_m h^2$	$0,1120 \pm 0,0056$	$0,1138 \pm 0,0045$	$0,1157 \pm 0,0023$	$0,1196 \pm 0,0031$	$0,1186 \pm 0,0031$
Ω_Λ	$0,727 \pm 0,030$	$0,721 \pm 0,025$	$0,712 \pm 0,010$	$0,686 \pm 0,020$	$0,693 \pm 0,019$
H_0	$70,4 \pm 2,5$	$70,0 \pm 2,2$	$69,33 \pm 0,88$	$67,4 \pm 1,4$	$67,9 \pm 1,5$

Cuadro 4.1: Estimaciones actuales de los parámetros cosmológicos del modelo Λ combinado con los datos de WMAP-9 y Planck.

Las observaciones realizadas por [6], [33] y [34] no descartan la posibilidad de una energía oscura dinámica. Indican que el parámetro $w_x = p_x/\rho_x$, de la ecuación de estado para la energía oscura, se encuentra cercano a -1 dentro del $\pm 10\%$, si se supone constante, mientras que es mucho más pobremente restringida si varía con el tiempo [65]. Se puede notar, que los modelos con energía de vacío variable, pueden aparecer en la práctica con una “ecuación de estado eficaz” no trivial $w = w(t)$, que puede ser ajustada por las observaciones. De hecho, la característica básica es que la evolución del parámetro $w = w(a)$ alcance el valor $w \rightarrow -1$ en el momento actual. Entre otros resultados, esta ecuación de estado efectiva puede ser derivada de un modelo de constante cosmológica variable $\Lambda(t)$ [66], como si se tratara de un modelo tipo quintaesencia con conservación de la energía oscura [67], o de la existencia de otras entidades de energía oscura, mezcladas con una $\Lambda(t)$, como por ejemplo, en el caso del modelo Λ XCDM [68].

Estos modelos con $\Lambda(t)$ son utilizados, como posibles candidatos, para aliviar dos problemas teóricos fundamentales que se presentan en el modelo Λ CDM, el problema del ajuste fino y el problema de la coincidencia cósmica.

- *Ajuste fino*: Si la constante cosmológica proviene de una densidad de vacío, entonces sufre un gran problema de ajuste fino. Observacionalmente sabemos que Λ es del orden del valor del parámetro actual de Hubble H_0 , que es

$$\Lambda \simeq H_0^2 = (2,13h \times 10^{-42} \text{GeV})^2. \quad (4.13)$$

El cual corresponde a una densidad crítica dada por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda m_{Pl}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (4.14)$$

Mientras tanto, la densidad de energía del vacío, evaluada en la suma de las energías del punto cero, de los campos cuánticos con masa m , está dado por

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (4.15)$$

Esto muestra una divergencia ultravioleta: $\rho_{vac} \propto k^4$. Sin embargo, se espera que la teoría cuántica de campos sea válida hasta alguna escala de corte k_{max} , en cuyo caso la integral (4.15) es finita:

$$\rho_{vac} \approx \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (4.16)$$

Para el caso de la relatividad general se espera que sea válido hasta justo por debajo de la escala de Planck: $m_{pl} = 1,22 \times 10^{19} GeV$. Por tanto, si tomamos $k_{max} = m_{pl}$, encontramos que la densidad de energía del vacío, en este caso, se estima como

$$\rho_{vac} \approx 10^{74} GeV^4, \quad (4.17)$$

que es cerca de 10^{121} órdenes de magnitud mayor que el valor observado, dado por la Ec. (4.13). Incluso si tomamos una escala de energía de QCD para el k_{max} , obtenemos $\rho_{vac} \approx 10^{-3} GeV^4$, que sigue siendo mucho mayor que ρ_{Λ} . Esta discrepancia entre la energía de vacío teórica y la observada, es lo que se conoce como el problema del ajuste fino.

- *Coincidencia*: Otro hecho interesante, que resulta difícil de explicar en el modelo Λ CDM es que hoy, tanto la materia no relativista como la energía oscura tienen densidades de energía comparables, del mismo orden. Esto es sorprendente ya que la materia y la energía oscura dependen de manera muy distinta respecto al corrimiento al rojo z . Para la radiación es $\Omega_r \propto (1+z)^4$, para la CDM y bariones $\Omega_m \propto (1+z)^3$, y para la constante cosmológica $\Omega_{\Lambda} = const..$

Al comienzo la evolución cósmica del universo estaba dominada por la radiación, la radiación hoy aporta menos del 1% de la densidad de energía total. La contribución de la energía oscura era insignificante en el pasado, y recientemente se ha convertido en una componente dominante, donde en el futuro será la única componente que domine la expansión cósmica, como se muestra en la Fig. 4.3.

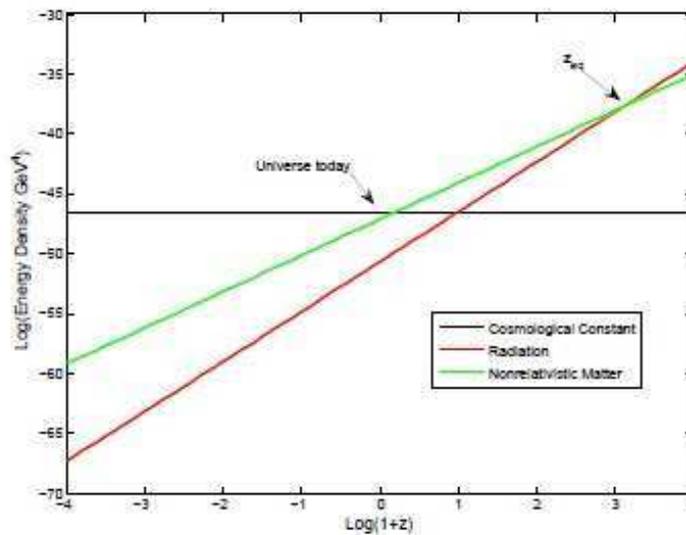


Figura 4.3: Se muestra la evolución de las densidades de energías de materia oscura fría (curva verde), radiación (curva roja) y energía oscura (curva negra).

Es muy corto el período de tiempo en que las densidades de energía, de materia y constante cosmológica, son comparables. No está claro por qué nos ha tocado vivir en esta estrecha ventana de tiempo. Esto es lo que se conoce como el problema de la “coincidencia” [69], [70], [71].

4.2.2. Modelos de campo escalar

Un enfoque alternativo para el rompecabezas de la energía oscura, es asumir que, de alguna manera, el problema de la constante cosmológica se resuelve estableciendo $\Lambda = 0$, y que la aceleración cósmica presente es causada por otra componente, con una ecuación de estado negativa y donde la densidad de energía varía.

La constante cosmológica corresponde a un fluido con una ecuación de estado constante $w = -1$. Las observaciones cosmológicas, que limitan el valor actual de w , ubicándolo cerca del de la constante cosmológica, dicen relativamente poco sobre la evolución temporal de w . Por lo tanto, podemos considerar una situación en la que la ecuación de estado de la energía oscura cambie con el tiempo, como en la etapa inflacionaria del universo.

Los campos escalares surgen de forma natural en la física de partículas, incluyendo la teoría de cuerdas, y estos pueden actuar como posibles candidatos de energía oscura. Hasta el momento, se ha propuesto una amplia variedad de modelos de energía oscura con campo escalar. Estos incluyen modelos de quintesencia, fantasmas, K-esencia, taquiones y condensados fantasmas, entre otros. En esta sección, vamos a describir brevemente algunos de estos modelos.

Quintesencia

La quintesencia es descrita por un campo escalar ordinario ϕ mínimamente acoplado a la gravedad, pero como veremos, con potenciales particulares que conducen a la inflación a tiempo tardío. La acción para la quintesencia está dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (4.18)$$

donde $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ y $V(\phi)$ es el potencial del campo. En un espacio-tiempo plano de FRW, la variación de la acción (4.18) con respecto a ϕ da

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.19)$$

El tensor de energía-momento del campo, se obtiene de variar la acción (4.18) en términos de la métrica $g^{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right], \quad (4.20)$$

donde se consideró que $\delta\sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. De la Ec. (4.20) se obtiene la densidad de energía y la presión del campo escalar, a través de $\rho = -T_0^0$ y $p = T_i^i$,

llegando a las Ecs. (2.38), pero para un campo escalar, ahora a cargo de la expansión acelerada del universo a tiempos tardíos. Las ecuaciones de Friedmann se escriben

$$3H^2 = 8\pi G \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (4.21)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G \left[\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (4.22)$$

Recordamos que la ecuación de continuidad (2.14), se puede derivar de la combinación de estas dos ecuaciones (4.21) y (4.22). A partir de la Ec. (4.22) podemos ver que el universo se acelera para $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Esto quiere decir que se necesita de un potencial plano para hacer crecer una expansión acelerada. En el contexto de la energía oscura, las condiciones de slow-roll, obtenidas para el caso inflacionario en la sección 2.8, no son totalmente confiables, ya que en este caso existen la materia y la energía oscura. Sin embargo, todavía pueden proporcionar una buena medida para comprobar la existencia de una solución con una expansión acelerada, si definimos el parámetro de slow-roll en función de la derivada temporal del factor de Hubble, $\epsilon = -\dot{H}/H^2$. Esta es una buena medida para comprobar la existencia de una expansión acelerada, ya que son consideradas las contribuciones de ambas fuentes, la energía oscura y la materia oscura.

La ecuación de estado para el campo ϕ está dada por

$$w_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (4.23)$$

En este caso, la ecuación de continuidad (2.14) puede escribirse en su forma integral

$$\rho = \rho_0 \exp \left[- \int 3(1 + w_\phi) \frac{da}{a} \right], \quad (4.24)$$

donde ρ_0 es una constante de integración. Se puede notar que la ecuación de estado para el campo ϕ varía en la región $-1 \leq w_\phi \leq 1$. El límite de slow-roll, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, se corresponde con $w_\phi = -1$, dando una densidad de energía $\rho = \text{const.}$ en la Ec. (4.24). En el caso de un fluido duro, caracterizado por $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$, lo que se tiene es $w_\phi = 1$, en cuyo caso la densidad de energía evoluciona como $\rho \propto a^{-6}$ a partir de (4.24). En otros casos la densidad de energía se comporta como

$$\rho \propto a^{-m}, \quad 0 < m < 6. \quad (4.25)$$

Dado que $w_\phi = -1/3$ es la frontera de aceleración y desaceleración, el universo exhibe una expansión acelerada para $0 \leq m < 2$.

Es interesante encontrar un potencial de campo escalar, que nos lleve a una ley de potencias en el factor de escala, $a(t) \propto t^p$, donde la expansión acelerada ocurre para $p > 1$. A partir de la Ec. (2.13) obtenemos la relación (2.41), $\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2$, de donde podemos encontrar $V(\phi)$ y ϕ expresados en términos de H y \dot{H} ,

$$V(\phi) = \frac{3H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right), \quad \phi = \int \left[-\frac{\dot{H}}{4\pi G} \right]^{1/2} dt. \quad (4.26)$$

Tomando el signo positivo de $\dot{\phi}$, el potencial que nos lleva a una expansión del tipo ley de potencia resulta

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi}{m_{pl}}\right), \quad (4.27)$$

donde V_0 es una constante. El campo evoluciona de la forma $\phi \propto \ln t$. El resultado obtenido en (4.27) muestra que el potencial exponencial puede ser usado como energía oscura cuando $p > 1$.

Una lista parcial de los modelos de quintesencia más utilizados se muestra en la Tabla 4.2.

Potencial de quintesencia	Referencias
$V_0 \exp(-\lambda\phi)$	[72], [73]
$m^2\phi^2, \lambda\phi^4$	[74]
$V_0/\phi^\alpha, \alpha > 0$	[72]
$V_0 \exp(\lambda\phi^2)/\phi^\alpha$	[75]
$V_0(\cosh \lambda\phi - 1)^p$	[76]
$V_0 \sinh^{-\alpha}(\lambda\phi)$	[77]
$V_0(\exp(\alpha k\phi) + \exp(\beta k\phi))$	[78]
$V_0[(\phi - B)^\alpha + A] \exp(-\lambda\phi)$	[79]

Cuadro 4.2: Potenciales de modelos de quintesencia.

Campo de taquiones

Desde hace unos cuantos años se ha sugerido que los condensados de taquiones, en cierto tipo de teoría de cuerdas, podrían tener interesantes consecuencias cosmológicas. En los trabajos [21], [80] se muestra que el decaimiento de las D-branas producen un gas sin presión, con densidad de energía finita, que se comporta como polvo. Un campo de taquiones tiene un ecuación de estado interesante que interpola suavemente entre -1 y 0 [23]. Esto ha llevado a que se hagan muchos intentos por construir un modelo cosmológico viable de taquiones, como un candidato adecuado para el inflatón a altas energías. Sin embargo, la inflación dada por taquiones, en modelos de teoría de cuerdas abiertas, se encuentra plagada de dificultades asociadas con la densidad de perturbaciones y el recalentamiento¹. Por otro lado, además los taquiones pueden actuar como una fuente de energía oscura, dependiendo de la forma del potencial [81] - [86]. De aquí en adelante, vamos a considerar el taquión como un campo del cual es posible obtener modelos de energía oscura viables.

¹Estos problemas pueden ser aliviados considerando D-branas con una métrica particular.

El lagrangiano efectivo de un campo de taquiones es descrito por

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} V(\phi) \sqrt{1 + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}, \quad (4.28)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial de taquiones. Para un espacio-tiempo plano de FRW, de la acción (4.28), se puede obtener la densidad de energía y la presión

$$\rho = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad p = -V(\phi) \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}. \quad (4.29)$$

A partir de las ecuaciones (2.12) y (2.14) se pueden obtener las siguientes ecuaciones de movimiento

$$3H^2 = 8\pi G \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\ddot{\phi}}{1 - \dot{\phi}^2} + 3H\dot{\phi} + \frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.31)$$

Combinando estas Ecs., (4.30) y (4.31), se obtiene

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \left(1 - \frac{3}{2}\dot{\phi}^2\right). \quad (4.32)$$

De la Ec. (4.32) se observa que una expansión acelerada del universo ocurre para $\dot{\phi}^2 < 2/3$. La ecuación de estado para el taquión esta dada por

$$w_\phi = \dot{\phi}^2 - 1. \quad (4.33)$$

La dinámica del taquión resulta ser muy diferente de la dinámica del campo escalar. A pesar de la inclinación del potencial, la ecuación de estado del taquión varia entre 0 y -1 , en cuyo caso la densidad de energía del taquión se comporta, a partir de (4.24), como $\rho \propto a^{-m}$ con $0 < m < 3$.

Podemos expresar el potencial $V(\phi)$ y el campo ϕ en términos de H y \dot{H} , como se hizo en el caso de quintesencia. De las Ecs. (4.30) y (4.32) encontramos $\dot{H}/H^2 = -(3/2)\dot{\phi}^2$. Luego, utilizando la Ec. (4.30) obtenemos

$$V(\phi) = \frac{3H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2}\right)^{1/2}, \quad \phi = \int \left[-\frac{2\dot{H}}{3H^2}\right]^{1/2} dt. \quad (4.34)$$

El potencial que lleva a una ley de potencias del tipo $a \propto t^p$ es

$$V(\phi) = \frac{2p}{4\pi G} \left(1 - \frac{2}{3p}\right)^{1/2} \phi^{-2}. \quad (4.35)$$

En este caso, la evolución del taquión esta dada por $\phi = \sqrt{2/3}pt$ (donde se eligió la constante de integración igual a cero). El potencial que va como el inverso al cuadrado de la potencia, Ec. (4.35), corresponde al caso de soluciones de escaleo [84], [86]. Los potenciales que no poseen tanta inclinación, comparados con $V \propto \phi^{-2}$, llevan a una expansión acelerada. Más adelante, veremos como transformaciones internas en las ecuaciones de Einstein nos permiten encontrar dos nuevas especies de taquiones, a saber, el taquión *complementario* y el taquión *fantasma*.

Capítulo 5

Extensión del campo de taquiones

5.1. Motivación

El campo de taquiones puede desempeñar un papel importante en los modelos inflacionarios [81], [83], [87] - [91], así como en la actual expansión acelerada, simulando el efecto de la energía oscura [81], [83], [84], [92] - [94], dependiendo de la forma del potencial de taquiones [81] - [83], [85], [86], [95]. El taquión es un campo inestable que se vuelve importante en la teoría de cuerdas a través de su papel en el Lagrangiano de Dirac-Born-Infeld, ya que se utiliza para describir la acción de D-branas [96]. Se ha demostrado, que el campo de taquiones puede desempeñar un rol importante en la cosmología, independientemente del hecho de que puede ser un campo inestable [20], [22], [23], [97]. Además, se señaló en [81] que el lagrangiano de los taquiones puede acomodarse en la forma de una quintesencia, cuando las derivadas de los campos son pequeñas.

Hace varios años, se propuso que el Lagrangiano de taquiones podía extenderse, de tal manera, que el índice barotrópico podría tomar cualquier valor generando nuevas especies de taquiones, llamadas taquiones fantasmas y taquiones complementarios, [24]. El campo de taquiones estándar, también puede describir una transición entre un régimen acelerado y uno desacelerado, comportándose como un campo de inflación en los primeros tiempos y como un campo de materia en los últimos momentos. El campo de taquiones complementario siempre se comporta como un campo de materia. El campo de taquiones fantasma se caracteriza por una rápida expansión, donde su densidad de energía aumenta con el tiempo [94], [98] - [100].

Por otro lado, las transformaciones de invarianza de forma (TIF), implican variables internas o externas, de tal manera que las transformaciones preservan la forma de las ecuaciones dinámicas, es decir, tienen una simetría de invarianza de forma (SIF) [101], [102]. Ejemplos de esto son la dualidad-T [103] o “el factor de escala dual” en teoría de cuerdas [104].

Una nueva especie de simetría interna, que permite conservar la forma de una cosmología de Friedmann, espacialmente plana, fue encontrada por [105] - [107]. Allí se demostró que las ecuaciones que rigen la evolución de cosmologías de FRW,

tienen un grupo de TIF. Las TIF que preservan la forma de esas ecuaciones relacionan cantidades de un fluido, la densidad de energía y la presión, con cantidades geométricas tales como el factor de escala y la tasa de expansión de Hubble. Las SIF introducen un concepto alternativo de la equivalencia entre diferentes problemas físicos, lo que significa que en esencia, un conjunto de modelos cosmológicos son equivalentes cuando sus ecuaciones dinámicas son invariantes de forma bajo la acción de algún grupo de simetría interna [101].

La SIF hace posible encontrar soluciones exactas en varios contextos y generar nuevas cosmologías partiendo de una conocida, que denominaremos “semilla” [107] - [110].

En el trabajo [101], el principal objetivo fue investigar las SIF que presentan las ecuaciones de Einstein en un espacio-tiempo de FRW, con varias fuentes tales como un fluido perfecto y un campo escalar homogéneo, particularmente cuando este último fue accionado por un potencial dependiente linealmente de la densidad de energía cinética del campo escalar. Se partió de soluciones cosmológicas semilla, y se utilizaron las TIF para obtener nuevas cosmologías.

En este capítulo vamos a demostrar que las TIF aplicadas al campo de taquiones estándar, que se utiliza como una semilla, puede generar el campo de taquiones complementario y el campo de taquiones fantasma. El principal objetivo es mostrar que el campo de taquiones extendido, es una consecuencia de la simetría interna que permite conservar la forma de las ecuaciones de Einstein, en un espacio-tiempo de FRW. Además se mostrará que las TIF permiten pasar de una cosmología estable a una no estable y viceversa, en un universo estático de Einstein [111], [112]. En particular, vamos a analizar el campo de taquiones, impulsado por un potencial que depende inversamente del cuadrado del campo escalar. Comenzando con una cosmología particular y utilizando las TIF para obtener una nueva diferente, por ejemplo pasando de una forma acelerada a un escenario super-acelerado.

5.2. SIF en un universo plano de FRW

Vamos a investigar una simetría interna contenida en las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo de FRW espacialmente plano

$$3H^2 = \rho, \quad (5.1)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (5.2)$$

donde, como ya se ha mencionado, $H = \dot{a}/a$ es la tasa de expansión de Hubble y $a(t)$ es el factor de escala. Suponemos que el universo está lleno de un fluido perfecto con una densidad de energía ρ y presión p . Las dos ecuaciones de Einstein independientes tienen tres cantidades desconocidas (H, p, ρ) , por lo tanto, el sistema de ecuaciones (5.1) - (5.2) tiene un grado de libertad. Esto permite introducir las TIF que involucran a esas cantidades,

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\rho), \quad (5.3)$$

$$\bar{H} = \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)^{1/2} H, \quad (5.4)$$

$$\bar{p} + \bar{\rho} = \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} \frac{d\bar{\rho}}{d\rho} (\rho + p). \quad (5.5)$$

Por lo tanto, las TIF (5.3) - (5.5) generadas por la función invertible $\bar{\rho}(\rho)$, conservan la forma del sistema de ecuaciones (5.1) - (5.2) y la cosmología de FRW presenta una SIF. Las TIF (5.3) - (5.5) “mapean” soluciones de una cosmología definida, a través de las variables (H, p, ρ) , en soluciones de otro sistema de ecuaciones, definiendo una cosmología diferente identificada con las variables barradas $(\bar{H}, \bar{p}, \bar{\rho})$, formando una estructura de grupo de Lie [101].

Las TIF (5.3) - (5.5) tienen una estructura de grupo de Lie generada por la función real invertible $\bar{\rho}(\rho)$. La identidad es inducida por la transformación $\bar{\rho} = \rho$. La composición de dos TIF consecutivas, que es inducida por $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\rho)$, es asociativa, por lo que teniendo en cuenta el mapa anterior se puede escribir fácilmente $\bar{\bar{\rho}} = \bar{\bar{\rho}}(\bar{\rho})$ para la segunda composición,

$$\bar{\bar{H}} = \left(\frac{\bar{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} \bar{H} = \left(\frac{\bar{\bar{\rho}}}{\rho} \right)^{1/2} H, \quad (5.6)$$

$$\bar{\bar{p}} + \bar{\bar{\rho}} = \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\bar{\rho}}} \right)^{1/2} \frac{d\bar{\bar{\rho}}}{d\bar{\rho}} (\bar{\rho} + \bar{p}) = \left(\frac{\rho}{\bar{\bar{\rho}}} \right)^{1/2} \frac{d\bar{\bar{\rho}}}{d\rho} (\rho + p), \quad (5.7)$$

donde se usó que $\bar{\bar{\rho}} = \bar{\bar{\rho}}(\bar{\rho})$. Finalmente, las transformaciones inversas de las TIF (5.4) y (5.5), inducidas por $\rho = \rho(\bar{\rho})$, son obtenidas a partir de las Ecs. (5.6) y (5.7), tomando $\bar{\bar{\rho}} = \rho$.

5.3. TIF lineales

La SIF de las ecuaciones de Einstein se evidencia a través de las TIF (5.3) - (5.5), que a su vez forman un grupo de Lie. La simetría anteriormente mencionada muestra una equivalencia entre las cosmologías barradas y las no barradas.

Aquí presentamos las TIF inducidas por una función lineal generada por $\bar{\rho} = n^2 \rho$, siendo n una constante. Luego de esta elección, las Ecs. (5.3) - (5.5) se vuelven

$$\bar{\rho} = n^2 \rho, \quad (5.8)$$

$$\bar{H} = nH, \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = a^n, \quad (5.9)$$

$$(\bar{\rho} + \bar{p}) = n(\rho + p). \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la transformación lineal (5.8) conduce a una combinación lineal de las variables ρ , H , p y a una transformación en la potencia del factor de escala, obtenido luego de haber integrado $\bar{H} = nH$. Por último, la Ec. (5.10) da la regla de transformación para la presión del fluido

$$\bar{p} = -n^2 \rho + n(\rho + p). \quad (5.11)$$

En el caso de considerar dos universos, cada uno de ellos lleno con un fluido perfecto, para los cuales se asume una ecuación de estado $\bar{p} = (\bar{\gamma} - 1)\bar{\rho}$ y $p = (\gamma - 1)\rho$ respectivamente, el índice barotrópico γ se transforma como

$$\bar{\gamma} = \frac{(\bar{\rho} + \bar{p})}{\bar{\rho}} = \frac{\rho + p}{n\rho} = \frac{\gamma}{n}, \quad (5.12)$$

después de usar la Ec. (5.8) junto con la Ec. (5.10).

La existencia de una estructura de grupo de Lie abre la posibilidad de conectar el factor de escala a , de una cosmología semilla, con el factor de escala $\bar{a} = a^n$, de una cosmología diferente.

5.3.1. Identidad y dualidad

Una transformación particularmente simple es generada por la identidad $\bar{\rho} = \rho$ con $n^2 = 1$. A partir de las Ecs. (5.9) y (5.10), se inducen las transformaciones

$$\bar{H} = H, \quad \bar{\rho} + \bar{p} = \rho + p, \quad \bar{a} = a, \quad (5.13)$$

$$\bar{H} = -H, \quad \bar{\rho} + \bar{p} = -(\rho + p) \quad \bar{a} = 1/a. \quad (5.14)$$

La forma de la transformación identidad nos lleva a la *identidad* $\bar{a} = a$ y a la transformación dual dada por $\bar{a} = 1/a$ con $\bar{\gamma} = (\bar{\rho} + \bar{p})/\bar{\rho} = -(\rho + p)/\rho = -\gamma$ donde la materia asociada, viola la condición de energía débil $\rho + p < 0$. Existe una dualidad entre los escenarios de expansión ($H > 0$ y $\dot{H} < 0$) y de contracción ($H < 0$ y $\dot{H} > 0$), y también hay una dualidad entre las cosmologías que se contraen ($H < 0$ y $\dot{H} < 0$) y las expansiones super-aceleradas ($H > 0$ y $\dot{H} > 0$). En el último caso, la densidad de energía $\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \geq 0$ es una función creciente del tiempo. En particular, si ρ y p son divergentes, la transformación dual intercambia un final de tipo *Crunch* por un final de tipo *Big Rip*.

5.3.2. Fluido perfecto

Para ilustrar las principales características del grupo de Lie, representada por medio de la SIF, comenzamos por la elección de una solución particular de las ecuaciones (5.1) - (5.2) para un fluido perfecto, “solución semilla”, donde se le aplican las TIF (5.8) - (5.11) para la obtención de un nuevo conjunto de soluciones. Si adoptamos una ecuación de estado constante $p = (\gamma - 1)\rho$ para el fluido perfecto y seleccionamos la solución semilla correspondiente a un universo de FRW dominado por materia, es decir, $\gamma = 1$ y $p = 0$, se tienen las soluciones de las Ecs. (5.1) - (5.2) que están dadas por

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad a = a_0 \left[\sqrt{\frac{3\rho_0}{4}} \Delta t \right]^{2/3}, \quad (5.15)$$

donde ρ_0 es la densidad de energía a $a = a_0$. Ahora, a partir de la Ec. (5.8) se obtiene

$$\bar{\rho}_0 \left(\frac{\bar{a}_0}{\bar{a}} \right)^{3\bar{\gamma}} = n^2 \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (5.16)$$

Teniendo en cuenta que $\bar{a}^{3\bar{\gamma}} = a^{3n\bar{\gamma}} = a^{3\gamma} = a^3$ (ver Ecs. (5.9) y (5.12) para $\gamma = 1$), la última ecuación (5.16) da las reglas de transformación para la siguiente combinación de constantes ρ_0 and a_0^3 ,

$$\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^{3\bar{\gamma}} = n^2 \rho_0 a_0^3, \quad (5.17)$$

que combinada con $\bar{\gamma} = 1/n$, se vuelve

$$\bar{\gamma}^2 \bar{\rho}_0 \bar{a}_0^{3\bar{\gamma}} = \rho_0 a_0^3. \quad (5.18)$$

Luego, utilizando las transformaciones, $\bar{\rho} = \rho/\bar{\gamma}^2$, $\bar{a} = a^{1/\bar{\gamma}}$ y (5.18) en la solución semilla (5.15), nos encontramos con la densidad de energía y el factor de escala de otro modelo cosmológico, de un fluido que se caracteriza por el índice barotrópico $\bar{\gamma}$,

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \left(\frac{\bar{a}_0}{\bar{a}} \right)^{3\bar{\gamma}}, \quad \bar{a} = \bar{a}_0 \left[\sqrt{\frac{3\bar{\gamma}^2 \bar{\rho}_0}{4}} \Delta t \right]^{2/3\bar{\gamma}}. \quad (5.19)$$

Removiendo la barra, este factor de escala se vuelve una solución general de las ecuaciones de Friedmann para la fuente $\rho = \rho_0 (a_0/a)^{3\gamma}$.

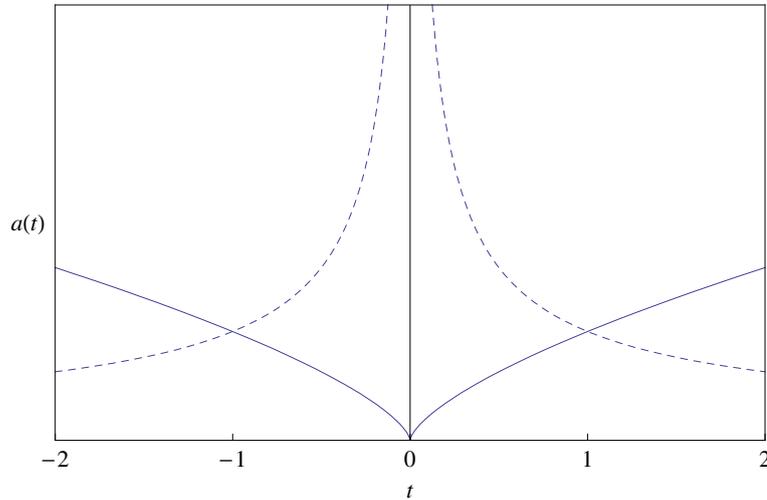


Figura 5.1: Las líneas continuas representan el factor de escala $a = t^{|n|}$, con $0 < n < 1$, para el universo cosmológico estándar. Mientras que las punteadas, representan dos nuevas soluciones obtenidas a través de las TIF, dadas por $a = t^{-|n|}$.

Se pueden graficar los factores de escala (5.15) y (5.18) considerando que la transformación que lleva de uno a otro es la identidad-dualidad $n^2 = 1$ analizada en la Sección 5.3.1.

Una solución de la forma de (5.15), con $\gamma > 0$ describe para $t > 0$ un universo estándar que se expande por siempre después del big bang a $t = 0$, pero la rama $t < 0$ describe una solución que se contrae para la cual $t = 0$ representa un big crunch, ver Fig. 5.1. Ahora, al aplicar la transformación obtenemos una nueva solución con $\bar{\gamma} < 0$ la cual se contrae en la rama $t > 0$, pero se expande en la $t < 0$. Precisamente, este último es un universo fantasma, ya que es una solución que se expande y viola la condición de energía débil. Más aún, alcanza la singularidad a un tiempo finito, la cual es una propiedad inherente de muchos universos fantasmas. Entonces, el universo fantasma es el dual del universo descrito por la rama con $t < 0$ de la solución original [107].

5.4. Cosmología de taquiones extendidos

Vamos a analizar como transforma un campo de taquiones al aplicarle las TIF dadas por las Ecs. (5.8) - (5.10). Si consideramos un campo escalar ϕ de taquiones con un potencial auto-interactuante $V(\phi)$, la densidad de energía y la presión del fondo, para un condensado de taquiones, en una cosmología de FRW plana, vienen dadas por las Ecs. (4.29), que volvemos a escribir a continuación

$$\rho_\phi = \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad p_\phi = -V\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}. \quad (5.20)$$

Las correspondientes ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon son

$$3H^2 = \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (5.21)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}(1 - \dot{\phi}^2) + \frac{1 - \dot{\phi}^2}{V} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (5.22)$$

La ecuación de estado para el taquión es $p = (\gamma - 1)\rho$, por lo tanto el índice barotrópico es

$$\gamma = \dot{\phi}^2. \quad (5.23)$$

con $0 < \gamma < 1$ para las Ecs. (5.20). La velocidad del sonido es $c_s^2 = 1 - \gamma > 0$, y usando (5.23), podemos escribir

$$c_s^2 = 1 - \dot{\phi}^2. \quad (5.24)$$

A partir de las ecuaciones (5.8) y (5.11), la densidad de energía y presión transformadas del campo de taquiones están dadas por

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{V}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} = \frac{n^2 V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (5.25)$$

$$\bar{p} = -\bar{V}\sqrt{1 - \dot{\phi}^2} = -\left(1 - \frac{\dot{\phi}^2}{n}\right) \frac{n^2 V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (5.26)$$

Por lo tanto, encontramos que el campo de taquiones, el potencial, el índice barotrópico y la velocidad del sonido transforman de manera lineal bajo las TIF (5.8) - (5.10),

$$\dot{\bar{\phi}}^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{n}, \quad \bar{V} = n^2 V \sqrt{\frac{1 - \dot{\phi}^2/n}{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (5.27)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{n}, \quad \bar{c}_s^2 = \frac{n - \dot{\phi}^2}{n}, \quad (5.28)$$

y el campo escalar transforma como $\bar{\phi} = \phi/\sqrt{n}$.

Consideramos que las Ecs. (5.20), con un índice de barotrópico $0 < \gamma < 1$, como el taquión semilla, llamado taquión ordinario o estándar. Utilizando la primera ecuación de (5.28) podemos obtener un índice barotrópico $\bar{\gamma} = \gamma/n < 0$. Entonces, la densidad de energía y la presión, de la cosmología barrada, están dadas por

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{V}}{\sqrt{1 + \dot{\bar{\phi}}^2}}, \quad \bar{p} = -\bar{V}\sqrt{1 + \dot{\bar{\phi}}^2}. \quad (5.29)$$

Estos fluidos representados por la Ec. (5.29) con presión negativa e índice barotrópico negativo, describen cosmologías fantasmas. Además, también podemos obtener $1 < \bar{\gamma} = \gamma/n$, bajo la condición $n < \gamma$, aplicando la regla de transformación (5.28) para el índice barotrópico del taquión semilla $0 < \gamma < 1$. Entonces, en este caso la densidad de energía y la presión del fluido barrado resultan

$$\bar{\rho} = \frac{i |\bar{V}|}{i\sqrt{\dot{\bar{\phi}}^2 - 1}} = \frac{|\bar{V}|}{\sqrt{\dot{\bar{\phi}}^2 - 1}}, \quad (5.30)$$

$$\bar{p} = -i |\bar{V}| i\sqrt{\dot{\bar{\phi}}^2 - 1} = |\bar{V}| \sqrt{\dot{\bar{\phi}}^2 - 1}, \quad (5.31)$$

donde los fluidos dados por las Ecs. (5.30) y (5.31), describen evoluciones de cosmologías en expansión no aceleradas.

Se utilizó el campo de taquiones ordinario, Ecs. (5.20) con $0 < \gamma < 1$, como una semilla. Con la aplicación de la SIF Ecs. (5.25) - (5.28) encontramos las dos especies de campos de taquiones dadas en [24], el taquión fantasma Ecs. (5.29) con un $\gamma < 0$ y el taquión complementario Ecs. (5.30) y (5.31) con $1 < \gamma$. Por lo tanto, las transformaciones de invarianza de forma permiten extender la familia del campo de taquiones.

Por otro lado, bajo la presunción de que el universo podría haber comenzado en un estado asintóticamente estático de Einstein, dentro del contexto de un universo en inflación, los autores Gibbons [111] y Barrow *et. al.* [112], muestran que el universo estático de Einstein, que contenga un fluido perfecto, es siempre neutralmente estable

para la condición $c_s^2 > 1/5$. Por lo tanto, las TIF Ec. (5.28) nos permiten pasar de una cosmología no estable a una estable y viceversa. Por ejemplo, si usamos un índice barotrópico $\gamma_0 = 6/7$ como una solución semilla con $c_s^2 = 1/7$, utilizando la regla de transformación Ec. (5.28), podemos obtener una cosmología estable con $c_s^2 = 5/7 > 1/5$ si $n = 3$.

5.4.1. Ley de potencia para un campo de taquiones

Vamos a asumir que el potencial depende del inverso del campo de taquiones al cuadrado,

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\phi^2}, \quad (5.32)$$

siendo V_0 una constante. Este potencial divergente en $\phi = 0$, imita el comportamiento de un potencial típico del condensado de la teoría de cuerdas bosónica. La Ec. (5.32), conduce a la expansión de ley de potencia $a(t) = kt^\delta$, con k constante, si ϕ es la única fuente [81], [87]. El campo de taquiones y el índice barotrópico son

$$\phi = \left(\frac{2}{3\delta}\right)^{1/2} t, \quad 0 < \gamma_0 < 1, \quad (5.33)$$

con

$$\delta = \frac{1}{3} \left[1 + \sqrt{1 + 4\beta}\right], \quad \beta = \left(\frac{3V_0}{4}\right)^2. \quad (5.34)$$

Por esta razón, la expansión de ley de potencia parece ser un buen ejemplo para ilustrar cómo a partir de una solución semilla, que se caracteriza por valores particulares de los parámetros V_0 , γ_0 y k , la SIF nos ayuda a encontrar el campo escalar y el factor de escala, impulsados por el potencial que depende de la inversa del campo al cuadrado (5.32), para cualquier otro valor de estos parámetros. La aplicación de las TIF (5.8) - (5.10) a la solución semilla (5.33), (5.34) y el uso de las Ecs. (5.23), (5.27) y (5.28) nos permiten obtener las reglas de transformación para V_0 y γ_0

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\gamma_0}{n}, \quad (5.35)$$

$$\bar{V}_0 = nV_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{\gamma_0}{n}}{1 - \gamma_0}}. \quad (5.36)$$

Por lo tanto, el campo de taquiones transformado para un índice barotrópico $\bar{\gamma} < 0$, esta dado por

$$\bar{\phi} = \left(\frac{2}{-3|\bar{\delta}|}\right)^{1/2} t, \quad \bar{\delta} = \frac{1}{3} \left[1 - \sqrt{1 + 4\bar{\beta}}\right]. \quad (5.37)$$

Estas soluciones del campo de taquiones, Ec. (5.37), describen cosmologías fantasmas. Hay que tener en cuenta que si $n = -1$ en las Ecs. (5.35) y (5.36) podemos obtener los resultados de [92] para el taquión fantasma.

Por otro lado, si el índice barotrópico transformado es $1 < \bar{\gamma}$, obtenemos

$$\bar{\phi} = \left(\frac{2}{3\bar{\delta}} \right)^{1/2} t, \quad \bar{\delta} = \frac{1}{3} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4|\bar{\beta}|} \right]. \quad (5.38)$$

Este tipo de solución del campo de taquiones $1 < \gamma_0$ se llama la solución de taquiones complementaria, la cual representa materia dura con una cosmología desacelerada.

El factor de escala $a(t) = kt^\delta$ se transforma como $\bar{a} = a^n$, por lo que el campo escalar transformado es $\bar{a} = \bar{k}t^{\bar{\delta}}$ con $\bar{k} = k^n$ y $\bar{\delta} = n\delta$. La condición para tener una solución inflacionaria es $1 < \delta$ y es representada por las soluciones (5.33). Obsérvese, que el exponente de la solución de la ley de potencias puede tomar valores positivos o negativos, siempre que $n \in \mathfrak{R}$. Podemos ver que este exponente está directamente relacionado con el índice barotrópico del fluido de taquiones, $\delta = 2/3\gamma_0$, por lo tanto, el cambio de n es equivalente a permitir que los $\bar{\gamma}_0$ varíen dentro de los \mathfrak{R} . Este simple hecho nos lleva a una conclusión notable, hay nuevas especies de taquiones y la SIF de las ecuaciones de Einstein ha revelado su existencia.

Capítulo 6

Perturbaciones cosmológicas

La teoría de las perturbaciones gravitatorias lineales, en un universo en expansión (perturbaciones cosmológicas), se ha convertido en un tema fundamental de la cosmología moderna. Se utiliza para describir el crecimiento de estructuras en el universo, para calcular las fluctuaciones de la RCF, y en muchas otras consideraciones.

Existe gran evidencia observacional de que el universo es homogéneo e isótropo en todas las escalas de tiempos tempranos. Generalmente, se asume la existencia de pequeñas perturbaciones primordiales, que lentamente incrementan su amplitud debido a la inestabilidad gravitacional para formar las estructuras, y que se observan en la actualidad a escalas de galaxias y cúmulos de galaxias. El crecimiento de estas perturbaciones primordiales, es un problema ideal para ser resuelto mediante la aplicación de la teoría lineal de perturbaciones gravitatorias.

Para explicar las estructuras no lineales que se observan hoy, en la escala de las galaxias y cúmulos, se requiere de perturbaciones iniciales en el universo. Es bastante natural suponer, que las perturbaciones comienzan en un momento muy temprano con una amplitud pequeña y que gradualmente van creciendo en el tiempo.

El crecimiento de las perturbaciones en un universo en expansión, es consecuencia de la inestabilidad gravitatoria. Un pequeño exceso de densidad, ejercerá una fuerza de atracción gravitatoria extra en la materia circundante. En consecuencia, la perturbación se incrementará y a su vez, producirá una fuerza de atracción mayor. En un fondo no expansivo, esto llevaría a una inestabilidad del tipo exponencial. Sin embargo, en un universo en expansión, el aumento de la fuerza está parcialmente contrarrestada por la expansión. Esto, en general, da lugar a un crecimiento tipo ley de potencia en lugar de un crecimiento exponencial de las perturbaciones.

Matemáticamente, el problema de describir el crecimiento de pequeñas perturbaciones en el contexto de la relatividad general, se reduce a la solución de las ecuaciones de Einstein linealizadas sobre un fondo en expansión. En principio, esto puede ser una tarea sencilla (aunque más bien tediosa), sin embargo, se va complicando con los temas relacionados con la libertad de *gauge*, es decir, la elección de las coordenadas del fondo. Las variables físicas deben ser independientes de esta elección. En este trabajo desarrollaremos un formalismo que utiliza las variables que son independientes de las coordenadas del fondo, es decir, variables invariantes de

gauge. No todas las métricas perturbadas corresponden a un espacio-tiempo perturbado. Es posible obtener una forma no homogénea para la métrica $g_{\mu\nu}(x, t)$ en un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, mediante una elección inadecuada de las coordenadas. Por lo tanto, es importante ser capaz de distinguir entre inhomogeneidades físicas (geométricas) y meros artificios de las coordenadas.

Existen varios enfoques para este problema. Uno puede fijar el sistema de coordenadas basado únicamente en algunos requisitos geométricos específicos. Uno puede escoger condiciones simples sobre las coordenadas (que en general no fijan todas las coordenadas) y realizar un seguimiento cuidadoso de los modos físicos y los artificios de las coordenadas (modos de gauge), ejemplo de este enfoque es el habitual gauge síncrono. Sin embargo, es más conveniente el abordaje de la invariancia de gauge en el que se tienen en cuenta las variables de la métrica que son independientes de la elección de coordenadas.

Como en electrodinámica, para la gravedad linealizada también hay un número infinito de variables invariantes de gauge. En este trabajo, elegiremos una base de variables invariantes de gauge, para que las ecuaciones de movimiento adquieran una forma particularmente simple. Las variables que elegimos coincidirán con las dos funciones que se utilizan para describir las perturbaciones de la métrica en un gauge particular, el gauge longitudinal (o el conforme newtoniano). Las ecuaciones de movimiento invariantes de gauge son idénticas a las ecuaciones de Einstein perturbadas en este gauge. La diferencia con el gauge síncrono es que fija totalmente las coordenadas.

En el gauge síncrono, la interpretación de las perturbaciones cuya longitud de onda es mayor que el tamaño del horizonte no siempre es fácil. Una forma más elegante para tratar con el problema del gauge es eliminar la dependencia del gauge enteramente, en lugar de solo especificarla y entenderla. El acercamiento de la invariancia de gauge a las perturbaciones gravitacionales fue iniciado por Bardeen [113] y Gerlach-Sengupta [114], que se basa en un trabajo previo de Hawking [115], entre otros.

6.1. Clasificación de las perturbaciones

En este apartado supondremos que el espacio-tiempo que caracteriza a nuestro universo es homogéneo e isotrópico a gran escala, pero contiene desviaciones de dicho comportamiento a nivel microscópico. En lo que sigue nos dedicaremos a caracterizar dichas fluctuaciones. En este caso, es conveniente dividir la métrica en dos partes, la primera es la métrica del fondo, la otra describe cómo el espacio-tiempo “real” se desvía del modelo de fondo idealizado. La segunda parte se denomina la perturbación [116]. El hecho observacional de que el universo a grandes escalas es casi homogéneo e isotrópico, hace que esta consideración resulte razonable. Además, se ha demostrado en la literatura, que las soluciones de las ecuaciones de campo linealizadas en cosmologías de FRW, se pueden ver como linealizaciones de las soluciones

completas de las ecuaciones no lineales. El elemento de línea es

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)}(x)dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j), \quad (6.1)$$

donde η es el tiempo conforme $d\eta = a^{-1}dt$. Eligiendo la métrica de FRW, donde $\gamma_{ij} = \delta_{ij}[1 + \kappa(x^2 + y^2 + z^2)/4]^{-2}$, recordando que el caso en que $\kappa = 0$ corresponde a una hipersuperficie espacial plana a $\eta = const.$. Las ecuaciones de Einstein, (2.3), para la métrica (6.1) en tiempo conforme, se escriben

$$3(a' + \kappa a^2) = 8\pi GT_0^0 a^4, \quad (6.2)$$

$$3(a'' + \kappa a) = 4\pi GT a^3, \quad (6.3)$$

donde $a' \equiv da/d\eta$ y $T \equiv T_\mu^\mu$.

Para un modelo de universo un poco más realista, debemos incluir las perturbaciones, donde el elemento de línea completo quedaría representado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)}dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (6.4)$$

donde $\delta g_{\mu\nu}$ describe la perturbación. La métrica completa puede ser desacoplada en una parte de fondo y una parte perturbada

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

Las perturbaciones métricas se pueden clasificar en tres tipos distintos: escalares, vectoriales y tensoriales. Esta clasificación se refiere a la manera en que se construyen los campos, de los cuales $\delta g_{\mu\nu}$ transforma en virtud de las transformaciones de coordenadas en el espacio tridimensional sobre una hipersuperficie a tiempo constante. Tanto las perturbaciones vectoriales como tensoriales no presentan inestabilidades. Las vectoriales decaen cinemáticamente en un universo en expansión, mientras que las perturbaciones tensoriales nos llevan a las ondas gravitatorias que no se acoplan a las inhomogeneidades en la densidad de energía y presión. Las perturbaciones escalares pueden hacer crecer las inhomogeneidades que, a su vez, tienen un efecto importante en la dinámica de la materia.

Perturbaciones escalares. Hay dos maneras posibles que cantidades escalares puedan ser parte de $\delta g_{\mu\nu}$, ya sea por qué se encuentren multiplicadas por un tensor, o tomando las derivadas covariantes de una función escalar. En un universo espacialmente plano ($\kappa = 0$), las derivadas covariantes, notadas por un punto y coma, se convierten en derivadas parciales ordinarias, denotados por una coma con el índice correspondiente.

Para completar la especificación general de una perturbación métrica escalar, necesitamos dos funciones escalares más. La primera da δg_{00} , y la derivada tridimensional covariante da la segunda, δg_{i0} . Entonces, la forma más general de las perturbaciones métricas escalares se construye con cuatro cantidades escalares ϕ , ψ , B y E , que son funciones de las coordenadas espaciales y del tiempo,

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{;i} \\ -B_{;i} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{;ij}) \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

A partir de la Ec. (6.4) y de la (6.6), obtenemos la forma más general de un elemento de línea para un fondo y las perturbaciones métricas escalares

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\phi)d\eta^2 - 2B_{;i} dx^i d\eta - ((1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{;ij}) dx^i dx^j], \quad (6.7)$$

Perturbaciones vectoriales. Las perturbaciones de vectores se construyen utilizando dos vectores de tres componentes S_i y F_i , que satisfacen las condiciones $S_{i;^i} = F_{i;^i} = 0$. Donde subimos y bajamos índices usando la métrica tridimensional γ^{ij} y γ_{ij} respectivamente. La métrica más general para perturbaciones vectoriales viene dada por

$$\delta g_{\mu\nu} = -a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i;j} + F_{j;i} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Las perturbaciones vectoriales, están relacionados con los movimientos de rotación del fluido. Al igual que en la teoría de Newton, decaen muy rápidamente y no son muy interesantes desde el punto de vista cosmológico.

Perturbaciones tensoriales. Las perturbaciones tensoriales se construyen usando un tensor simétrico h_{ij} , que satisface las condiciones $h_i^i = 0$ y $h_{ij;^j} = 0$. Estas condiciones implican que h_{ij} , no contiene partes que se transforman como escalares o vectores. Por lo tanto, la métrica para perturbaciones tensoriales es

$$\delta g_{\mu\nu} = -a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Las perturbaciones tensoriales h_{ij} no tienen análogo en la teoría newtoniana. Describen las ondas gravitacionales, que son los grados de libertad propios del campo gravitatorio. En la aproximación lineal las ondas gravitatorias no inducen perturbaciones en un fluido perfecto.

Contando el número de funciones independientes que se utilizó para formar $\delta g_{\mu\nu}$, nos encontramos con que tenemos cuatro funciones para las perturbaciones escalares, cuatro funciones para las perturbaciones de vectores y dos funciones para las perturbaciones del tensor (este tensor simétrico tiene seis componentes independientes y hay cuatro condiciones). Por lo tanto, tenemos diez funciones sumando todas, que coincide con el número de componentes independientes de $\delta g_{\mu\nu}$.

En la aproximación lineal, las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan de forma independiente, por lo tanto pueden considerarse por separado. En lo que sigue nos concentramos en las perturbaciones escalares ya que son las que exhiben inestabilidades y pueden conducir a la formación de la estructura [116].

6.2. Transformaciones de gauge

Considerando la transformación de coordenadas [117]

$$x^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (6.10)$$

donde ξ^μ son funciones pequeñas infinitesimales del espacio y del tiempo. Podemos escribir las componentes espaciales de este vector infinitesimal, $\xi^\mu \equiv (\xi^0, \xi^i)$, como $\xi^i = \xi_\perp^i + \zeta^i$, donde ξ_\perp^i es un vector de tres componentes con divergencia igual a cero ($\xi_{\perp,i}^i = 0$) y ζ es una función escalar.

Para las perturbaciones escalares, la métrica toma la forma (6.7). Bajo un cambio de coordenadas tenemos

$$\phi \longrightarrow \widehat{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)', \quad B \longrightarrow \widehat{B} = B + \zeta' - \xi^0, \quad (6.11)$$

$$\psi \longrightarrow \widehat{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \quad E \longrightarrow \widehat{E} = E + \zeta. \quad (6.12)$$

Entonces, sólo ξ^0 y ζ contribuyen a las transformaciones de perturbaciones escalares y eligiéndolas adecuadamente podemos hacer que dos de las cuatro funciones ϕ , ψ , B , E sean cero. Las combinaciones lineales, invariantes de gauge, más simples de estas funciones, que abarcan el espacio bidimensional de las perturbaciones físicas, son

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a}[a(B - E)]', \quad \Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E). \quad (6.13)$$

Es fácil ver que no cambian bajo las transformaciones de coordenadas, y si Φ y Ψ desaparecen en un sistema de coordenadas particular, van a ser cero en cualquier otro sistema de coordenadas. Esto significa que podemos distinguir inmediatamente inhomogeneidades físicas de perturbaciones ficticias. Si ambas Φ y Ψ son iguales a cero, las perturbaciones de la métrica (si están presentes) son ficticias y se pueden quitar mediante un cambio de coordenadas.

Se puede construir un número infinito de variables invariantes de gauge, ya que cualquier combinación de Φ y Ψ será también invariante de gauge. Nuestra elección de estas variables se justifica sólo por razón de conveniencia. Como con el campo eléctrico y el campo magnético en la electrodinámica, los potenciales Φ y Ψ son las combinaciones más sencillas posibles y satisfacen las ecuaciones de movimiento más simples.

6.3. Sistemas de coordenadas

La libertad de gauge tiene su manifestación más importante en las perturbaciones escalares. Lo cual puede ser utilizado para imponer dos condiciones sobre las funciones ϕ , ψ , B , E . Esto es posible ya que se tiene libertad para elegir las dos funciones ξ^0 y ζ . La imposición de las condiciones de gauge es equivalente a fijar un sistema de coordenadas. En lo que sigue vamos a describir dos opciones particulares de gauge. En primer lugar, el gauge longitudinal (o conforme newtoniano) y en segundo lugar el gauge síncrono, que es el que se utiliza con mayor frecuencia en la literatura.

6.3.1. Gauge longitudinal

El gauge longitudinal está definido por las condiciones $B_l = E_l = 0$. A partir de (6.11), se deduce que estas condiciones fijan el sistema de coordenadas de forma única. De hecho, la condición $E_l = 0$ es violada por cualquier $\zeta \neq 0$, y usando este resultado vemos que cualquier transformación temporal con $\xi^0 \neq 0$ destruye la condición $B_l = 0$. Por lo tanto no hay libertad de coordenadas extra que preserven $B_l = E_l = 0$. En el correspondiente sistema de coordenadas, la métrica toma la forma

$$ds^2 = a^2 [(1 + 2\phi_l)d\eta^2 - (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (6.14)$$

Si la parte espacial del tensor energía-momento es diagonal, esto es $\delta T_j^i \propto \delta_j^i$, tenemos $\phi_l = \psi_l$ (véase la sección siguiente) y no queda más que una variable escalar para caracterizar las perturbaciones de la métrica. La variable ϕ_l es una generalización del potencial de Newton, lo que explica la elección del nombre “gauge conforme Newtoniano” para este sistema de coordenadas. Como puede verse a partir de (6.13), las variables invariantes de gauge tienen una interpretación física muy simple: se trata de las amplitudes de las perturbaciones de la métrica en el sistema de coordenadas conforme Newtoniano.

6.3.2. Gauge sincrónico

Las coordenadas sincrónico, donde $\delta g_{0\nu} = 0$, han sido usadas ampliamente en la literatura. En nuestra notación, corresponden a una elección de gauge $\phi = 0$ y $B = 0$. Esto no fija las coordenadas de manera única, existe toda un clase de sistemas de coordenadas sincrónico. A partir de (6.11), se sigue que si las condiciones $\phi = 0$ y $B = 0$ se satisfacen en algún sistema de coordenadas $x^\mu \equiv (\eta, x^i)$, entonces también se van a satisfacer por otro sistema de coordenadas \hat{x}^μ , relacionado con x^μ por

$$\hat{\eta} = \eta + \frac{C_1}{a}, \quad \hat{x}^i = x^i + C_{1,i} \int \frac{d\eta}{a} + C_{2,i}, \quad (6.15)$$

donde $C_1 \equiv C_1(x^j)$ y $C_2 \equiv C_2(x^j)$ son funciones arbitrarias de las coordenadas espaciales. Esta libertad en las coordenadas residuales nos lleva a modos de gauge en apariencia no físicos, que dificultan la interpretación de los resultados, especialmente a escalas mayores que el radio de Hubble.

Si conocemos una solución para perturbaciones en términos de variables invariantes de gauge, entonces el comportamiento de las perturbaciones en el sistema de coordenadas sincrónico, podría ser también en el gauge conforme Newtoniano, puede ser fácilmente determinado sin necesidad de resolver las ecuaciones de Einstein nuevamente. Usando las definiciones (6.13) tenemos

$$\Phi = \frac{1}{a} [aE'_s]', \quad \Psi = \psi_s - \frac{a'}{a} E'_s. \quad (6.16)$$

Estas Ecs. (6.16) se pueden resolver para expresar ψ_s y E_s en términos de los potenciales invariantes de gauge:

$$E_s = \int \frac{1}{a} \left(\int^\eta a \Phi d\hat{\eta} \right) d\eta, \quad \psi_s = \Psi + \frac{a'}{a^2} \int a \Phi d\eta. \quad (6.17)$$

6.4. Ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas

Para derivar la forma general de las ecuaciones que describen las pequeñas perturbaciones cosmológicas, tenemos que linealizar las ecuaciones de Einstein (2.3). Donde el tensor de Einstein en la métrica de FRW se escribe,

$${}^{(0)}G_0^0 = 3a^{-2}(\mathcal{H}^2 + \kappa), \quad {}^{(0)}G_i^0 = 0, \quad {}^{(0)}G_j^i = a^{-2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \kappa)\delta_i^j, \quad (6.18)$$

donde $\mathcal{H} = a'/a$ usando el tiempo conforme. La forma de ${}^{(0)}G_\nu^\mu$ usando el tiempo físico se puede obtener insertando el cambio de variables $t = t(\eta)$ en el tensor métrico del tiempo conforme. Luego, las ecuaciones para el fondo son

$${}^{(0)}G_\nu^\mu = 8\pi G {}^{(0)}T_\nu^\mu. \quad (6.19)$$

El tensor energía-momento para el fondo, ${}^{(0)}T_\nu^\mu$, debe satisfacer las propiedades de simetría ${}^{(0)}T_0^i = {}^{(0)}T_i^0 = 0$ y ${}^{(0)}T_j^i \propto \delta_j^i$.

Para una métrica con pequeñas perturbaciones, el tensor de Einstein se puede escribir

$$G_\nu^\mu = {}^{(0)}G_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu + \dots, \quad (6.20)$$

y el tensor de energía-momento de igual manera, $T_\nu^\mu = {}^{(0)}T_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu + \dots$. Las ecuaciones de movimiento para pequeñas perturbaciones lineales son

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu, \quad (6.21)$$

donde δ denota los términos lineales en la métrica y en las fluctuaciones de materia.

Para perturbaciones de la métrica del tipo escalar, con un elemento de línea dado por (6.7) (en tiempo conforme), después de unos cálculos tediosos, se pueden obtener las ecuaciones de Einstein perturbadas

$$\begin{aligned} \delta G_0^0 &= 2a^{-2} [-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi + \psi') + \nabla^2[\psi - \mathcal{H}(B - E')] + 3\kappa\psi] = 8\pi G \delta T_0^0, \\ \delta G_i^0 &= 2a^{-2} [\mathcal{H}\phi + \psi' - \kappa(B - E')]_{;i} = 8\pi G \delta T_i^0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i &= -2a^{-2} \left[\left(\phi(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + \mathcal{H}\phi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' - \kappa\psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right) \delta_j^i \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} D_{;ij} \right] = 8\pi G \delta T_j^i, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$D = (\phi - \psi) + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \quad (6.24)$$

donde $D = \Phi - \Psi$.

Podemos notar, que si usamos el tiempo físico t en lugar del tiempo conforme η , para δG_i^0 y δG_0^i aparece un factor de a extra, $\delta G_i^0(t) = a(t)\delta G_i^0(\eta(t))$.

La parte derecha e izquierda de las ecuaciones de Einstein perturbadas (6.21) no son, separadamente, invariantes bajo transformaciones de gauge. Se puede mostrar que bajo las transformaciones (6.10), δG_ν^μ transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta G_0^0 &\longrightarrow \delta G_0^0 - ({}^{(0)}G_0^0)' \xi^0, & \delta G_i^0 &\longrightarrow \delta G_i^0 - \left({}^{(0)}G_0^0 - \frac{1}{3}G_k^k \right) \xi^0{}_{;i}, \\ \delta G_j^i &\longrightarrow \delta G_j^i - ({}^{(0)}G_j^i)' \xi^0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

El mismo tipo de transformación resulta válida para δT_ν^μ si consideramos (6.19).

Podemos reescribir δG_ν^μ en términos de las variables invariantes de gauge Φ y Ψ , si sustituimos ϕ y ψ como funciones de Φ , Ψ y $(B - E')$ usando (6.13). Con esto podemos construir las variables invariantes de gauge ${}^{(ig)}\delta G_\nu^\mu$ y ${}^{(ig)}\delta T_\nu^\mu$ correspondientes a δG_ν^μ y δT_ν^μ usando (6.25).

$${}^{(ig)}\delta G_\nu^\mu = 8\pi G {}^{(ig)}\delta T_\nu^\mu. \quad (6.26)$$

Ahora ambos lados de la ecuación son invariantes de gauge.

A partir de la Ec. (6.26) obtenemos la forma general de las ecuaciones invariantes de gauge para las perturbaciones cosmológicas (en el tiempo conforme), expresadas en términos de los potenciales invariantes de gauge

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3\kappa\Psi = 4\pi G a^2 {}^{(ig)}\delta T_0^0, \quad (6.27)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{;i} = 4\pi G a^2 {}^{(ig)}\delta T_i^0, \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \left(\Phi(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \kappa\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right) \delta_j^i \\ - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{;kj} = -4\pi G a^2 {}^{(ig)}\delta T_j^i. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Para cerrar el sistema de ecuaciones, necesitamos ecuaciones de movimiento para la materia formuladas de manera invariante de gauge. Por ejemplo, a continuación se discutirá un fluido perfecto y el campo escalar.

6.5. Perturbaciones Hidrodinámicas

Vamos a considerar un fluido perfecto, para el cual el tensor de energía-momento puede ser descrito en términos de tres funciones, la densidad de energía ρ , la presión p y la cuadri-velocidad u^μ ,

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu. \quad (6.30)$$

Para un fluido perfecto, el esfuerzo anisotrópico, representado por las componentes espaciales no diagonales del tensor, es cero.

Las ecuaciones de movimiento invariantes de gauge para las perturbaciones hidrodinámicas, vienen dadas por las Ecs. (6.27) - (6.29) pero con ${}^{(ig)}\delta T_0^0 = {}^{(ig)}\delta\rho$, ${}^{(ig)}\delta T_i^0 = (\rho_0 + p_0){}^{(ig)}\delta u_i/a$ y ${}^{(ig)}\delta T_j^i = -{}^{(ig)}\delta p\delta_j^i$ respectivamente. Donde ρ_0 y p_0 son los valores del fondo de la densidad de energía ρ y la presión p .

La ausencia de componentes espaciales no diagonales, en el tensor de energía-momento, conduce a una simplificación importante de este conjunto de ecuaciones. Se desprende de la ecuación $i \neq j$ que $\Phi = \Psi$. Con esta identificación, las ecuaciones de perturbaciones escalares se convierten en

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - 3(\mathcal{H}^2 - \kappa)\Phi = 4\pi G a^2 {}^{(ig)}\delta\rho, \quad (6.31)$$

$$(a\Phi)',_i = 4\pi G a^2 (\rho_0 + p_0) {}^{(ig)}\delta u_i, \quad (6.32)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - \kappa)\Phi = 4\pi G a^2 {}^{(ig)}\delta p. \quad (6.33)$$

En el límite newtoniano, la Ec. (6.31) es la ecuación de Poisson habitual, para el potencial gravitatorio, inducida por alguna densidad de perturbación. Esto apoya la interpretación de Φ como la generalización relativista del potencial newtoniano gravitacional ϕ . La Ec. (6.31) generaliza la ecuación de Poisson tomando en cuenta la expansión del universo. Como la ecuación es similar a la ecuación del calor, es posible encontrar su función de Green y por lo tanto también su solución general si consideramos el lado derecho como una dada función fuente. Hay que tener en cuenta que (6.31) se cumple siempre que la teoría de perturbación lineal sea válida. Este requiere $|\phi| \ll 1$ pero no necesariamente que $|\delta\rho/\rho| \ll 1$. Para escalas grandes, mayores que el radio de Hubble, $|\phi| \ll 1$ puede ser cierto incluso si $|\delta\rho/\rho| > 1$.

En general, la presión p depende no sólo de la densidad de energía ρ , sino también de la entropía S . Dada $p(\rho, S)$, la presión de fluctuación δp se puede expresar en términos de la densidad de energía y entropía perturbadas, $\delta\rho$ y δS , respectivamente,

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \delta S \equiv c_s^2 \delta\rho + \tau \delta S. \quad (6.34)$$

Para materia hidrodinámica, c_s puede ser interpretada como la velocidad del sonido. Usando la relación (6.34) en las Ecs. (6.31) y (6.33) y combinando ambas, tenemos

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' - c_s^2\nabla^2\Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)(\mathcal{H}^2 - \kappa)]\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S. \quad (6.35)$$

En particular, para perturbaciones puramente adiabáticas, el término de la fuente en la Ec. (6.35) desaparece. Desafortunadamente, la Ec. (6.35) no se puede resolver con exactitud para una ecuación de estado arbitraria $p(\rho)$. Sin embargo, resulta posible derivar una solución asintótica tanto para perturbaciones con longitud de onda larga y longitud de onda corta. Para esto, es conveniente reescribir la ecuación en una forma ligeramente diferente. El término de fricción proporcional a Φ' puede ser eliminado si consideramos el siguiente cambio de variables

$$\Phi = 4\pi G(\rho_0 + p_0)^{1/2}u = (4\pi G)^{1/2} \left[\frac{\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \kappa}{a^2} \right]^{1/2} u. \quad (6.36)$$

Luego de un cálculo tedioso, de la Ec. (6.35), podemos obtener una ecuación de movimiento para u

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = \aleph, \quad (6.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\sqrt{3}\mathcal{H}}{\sqrt{2a(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \kappa)^{1/2}}} = \frac{1}{a} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + p_0} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{3\kappa}{8\pi G a^2 \rho_0} \right)^{1/2} \\ \aleph &= (4\pi G)^{1/2} \frac{a^3}{(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \kappa)^{1/2}} \tau \delta S = \frac{a^2}{(\rho_0 + p_0)^{1/2}} \tau \delta S. \end{aligned} \quad (6.38)$$

La Ec. (6.35) o equivalentemente la Ec. (6.37) determinan la evolución de las perturbaciones en un universo hidrodinámico.

6.6. Caracterizando las perturbaciones

En un momento dado en el tiempo, las pequeñas inhomogeneidades se pueden caracterizar por la distribución espacial del potencial gravitatorio Φ o por las fluctuaciones de la densidad de energía $\delta\rho/\rho_0$. Resulta conveniente tratarlos como campos aleatorios, para lo cual se usará la notación común $f(\mathbf{x})$. Subdividiendo un universo infinito en un conjunto de grandes regiones espaciales, podemos considerar una configuración particular $f(\mathbf{x})$ dentro de alguna región, como una realización de un proceso aleatorio. Esto significa que el número relativo de regiones donde ocurre una dada configuración $f(\mathbf{x})$ puede ser descrito por una función de distribución de probabilidad. Entonces promediando sobre el conjunto estadístico es equivalente a promediar sobre todo el volumen del universo infinito.

Es conveniente describir el proceso aleatorio usando el método de Fourier. La expansión de Fourier de una función $f(\mathbf{x})$ en una dada región de volumen V , puede escribirse como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}). \quad (6.39)$$

En el caso de una función adimensional f los coeficientes de Fourier complejos, $f_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} + ib_{\mathbf{k}}$, tienen dimensión $cm^{3/2}$. Para que f sea real se requiere $f_{-\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}^*$

y las partes real e imaginaria de $f_{\mathbf{k}}$ deben satisfacer $a_{-\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}$ y $b_{-\mathbf{k}} = -b_{\mathbf{k}}$. Los coeficientes $a_{\mathbf{k}}$ y $b_{\mathbf{k}}$ pueden tomar valores diferentes en las distintas regiones del espacio.

La variancia σ_k^2 caracteriza enteramente el correspondiente proceso Gaussiano y todas las funciones de correlación pueden ser expresadas en términos de σ_k^2 . La variancia depende sólo de $k = |\mathbf{k}|$, siendo la misma para ambas variables independientes $a_{\mathbf{k}}$ y $b_{\mathbf{k}}$, $\sigma_k^2/2$. Por ejemplo, para el valor de expectación del producto de coeficientes de Fourier encontramos

$$\langle f_{\mathbf{k}} f'_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}} a'_{\mathbf{k}'} \rangle + i(\langle a_{\mathbf{k}} b'_{\mathbf{k}'} \rangle + \langle a'_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}} \rangle) - \langle b_{\mathbf{k}} b'_{\mathbf{k}'} \rangle = \sigma_k^2 \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}. \quad (6.40)$$

Aquí $\delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} = 1$ para $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ y en otro caso igual a cero.

Pasando al continuo, cuando $V \rightarrow \infty$, la suma en (6.39) es reemplazada por una integral

$$f(\mathbf{x}) = \int f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (6.41)$$

y donde la Ec. (6.40) se vuelve

$$\langle f_{\mathbf{k}} f'_{\mathbf{k}'} \rangle = \sigma_k^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (6.42)$$

donde $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ es la función delta de Dirac.

Alternativamente, un campo aleatorio Gaussiano puede ser caracterizado por una función correlación de dos puntos

$$\xi_f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv \langle f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) \rangle. \quad (6.43)$$

Esta función nos dice qué tan grandes son las fluctuaciones del campo en diferentes escalas. En el caso homogéneo e isótropo, la función de correlación depende sólo de la distancia entre los puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} , es decir, $\xi_f = \xi_f(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$. Sustituyendo (6.41) en la Ec. (6.43) y tomando el promedio sobre todo el ensamble, además usando (6.42), encontramos

$$\xi_f(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \int \frac{\sigma_k^2 k^3}{2\pi^2} \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{dk}{k}, \quad (6.44)$$

donde $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. La varianza adimensional se escribe

$$\Delta_f^2(k) \equiv \frac{\sigma_k^2 k^3}{2\pi^2}, \quad (6.45)$$

es aproximadamente la amplitud al cuadrado típica de las fluctuaciones, a escalas de $\lambda \sim 1/k$.

Así, en el caso del proceso aleatorio Gaussiano, sólo necesitamos saber σ_k^2 o, equivalentemente, $\Delta_f(k)$. Para pequeñas perturbaciones los modos de Fourier evolucionan de forma independiente. Por lo tanto, la distribución espacial de inhomogeneidades permanece Gaussiana y sólo su espectro cambia con el tiempo. Cuando las perturbaciones entran en el régimen no lineal, diferentes modos de Fourier empiezan

a “interactuar”. Como resultado, el análisis estadístico de la estructura no lineal se vuelve muy complicado.

En este caso se consideran únicamente pequeñas inhomogeneidad, y el espectro se caracteriza por la varianza del potencial gravitacional $\sigma_k^2 \equiv |\Phi_k|^2$ o equivalentemente con la varianza adimensional

$$\Delta_{\Phi}^2(k) \equiv \frac{|\Phi_k|^2 k^3}{2\pi^2}. \quad (6.46)$$

En lo que sigue llamaremos a $\Delta_{\Phi}^2(k)$ el espectro de potencia.

Capítulo 7

Espectro de potencia en una cosmología de taquiones extendidos

7.1. Motivación

La gran mayoría de las pruebas cosmológicas concuerdan, que el tipo más simple de densidad de energía oscura, resulta ser la constante cosmológica, indicada con Λ . La cosmología estándar suele estar etiquetada como modelo Λ CDM o modelo de concordancia. A pesar de su llamativo éxito observacional, el valor actual de la constante cosmológica es en gran parte poco atractivo desde el punto de vista teórico. El modelo Λ CDM sufre de una gran variedad de problemas, como ya hemos mencionado en la sección 4.2.1, que van desde consideraciones de gravedad cuántica al problema del ajuste fino y el problema de la coincidencia, [81], [118].

El modelo estándar de la concordancia ha sido bien estudiado. La formación de estructuras de materia oscura para este modelo está relativamente bien entendida, gracias a los cálculos teóricos de perturbaciones lineales, como a las simulaciones numéricas cosmológicas [12] - [15].

Las simulaciones cosmológicas son una de las herramientas más poderosas para la investigación de la evolución, lineal y no lineal, de las estructuras a gran escala del universo. El estudio del espectro de potencia ofrece una gran cantidad de información sobre la densidad del campo de materia, y que se refleja en varias mediciones, como en las lentes cosmológicas débiles.

En los últimos años se prestó cierta atención a los taquiones, como responsables de conducir cosmologías en expansión. Algunas de las razones, como ya hemos mencionado, son que pueden desempeñar un papel importante en los modelos de inflación, así como en la presente expansión acelerada, simulando el efecto de la energía oscura, [81] - [94], dependiendo de la forma del potencial de taquiones [81], [83], [87], [95]. Estos escenarios están inspirados en algunos modelos cosmológicos provenientes de la teoría de cuerdas [96].

En la referencia [24] se consideran tres clases de taquiones, que se clasifican en función del valor de su índice barotrópico γ_0 (como desarrollamos en el capítulo 5). De la misma manera, en [94] se muestra que, en el caso límite de Λ pequeña, el campo de taquiones estándar y el complementario, tienden al modelo Λ CDM. En ese trabajo, al agregado de un campo de taquiones a la constante cosmológica, se lo denomina “taquionización” del modelo Λ CDM.

La taquionización de los modelos cosmológicos, que se describirán a continuación, constituyen una gran clase de escenarios que contienen al modelo Λ CMD como límite particular. Es natural buscar efectos observables que permitan distinguir un modelo propuesto del Λ CMD. Uno de estos efectos es el espectro de potencia, del potencial gravitatorio de las fluctuaciones primordiales, por ejemplo para cosmologías de taquiones. Estas perturbaciones son responsables de la estructura a gran escala del universo y, debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones de Einstein, podría observarse una desviación apreciable entre los dos modelos.

El objetivo del presente capítulo es comparar el espectro de potencia para ambos tipos de modelos, el modelo de la concordancia y el modelo de taquionización del Λ CDM. La organización es como sigue. En la Sección 2 discutiremos brevemente los principales aspectos del espectro de potencia de las fluctuaciones primordiales en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, y mostraremos la ecuación diferencial que describe las perturbaciones. En la Sección 3 haremos una revisión de las tres clases de modelos, de taquionización del Λ CDM, en términos de su índice barotrópico, junto con las ecuaciones que los definen. En la Sección 4 se caracteriza, a través de métodos numéricos, el espectro de potencia de las fluctuaciones primordiales para este modelo, y se lo compara con el modelo Λ CDM.

7.2. Perturbaciones cosmológicas escalares

Las pequeñas perturbaciones escalares en un escenario de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano, en el gauge conforme newtoniano, están representadas por el elemento de línea [119]

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (7.1)$$

donde $a(\eta)$ es el factor de escala como función del tiempo conforme η . En este gauge, las variables Φ y Ψ son invariantes gauge. En las situaciones en las que la parte espacial del tensor de energía-momento es diagonal, como ya vimos en el Capítulo 6, se deduce que $\Phi = \Psi = \phi$, con ϕ el potencial newtoniano. Por lo tanto, sólo queda libre una variable de la métrica perturbada ϕ . Como puede verse a partir de (7.1), las cantidades invariantes gauge Φ y Ψ se pueden interpretar como la amplitud de las perturbaciones métricas, en el sistema de coordenadas conforme newtoniano.

A continuación, vamos a considerar un fluido perfecto con una ecuación de estado, para cada especie de fluido, con una forma barotrópica $p = (\gamma_0 - 1)\rho$. Como ya vimos, las componentes espaciales no diagonales del tensor de energía-momento desaparecen, para un fluido perfecto. En esta situación $\Phi = \Psi$ en la Ec. (7.1), como

se comentó anteriormente. El general de las ecuaciones que describen la evolución de las pequeñas perturbaciones en un universo hidrodinámico [116], se puede escribir de la forma de la Ec. (6.37). Consideraremos $\aleph = 0$, ya que es una cantidad que depende de la perturbación de entropía y, en este caso, nos centraremos únicamente en perturbaciones adiabáticas. Por lo tanto la Ec. (6.37) se escribe ¹

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0. \quad (7.2)$$

Recordamos que la prima, $'$, denota la derivada con respecto al tiempo conforme y c_s^2 es la velocidad del sonido del fluido. En este régimen, adiabático, la ecuación (7.2) se vuelve homogénea y las variables u y θ son las variables Mukhanov-Sasaki definidas, en el Capítulo 6, a través de las siguientes relaciones

$$u = \frac{\Phi}{4\pi G \sqrt{\rho_0 + p_0}}, \quad \theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + p_0} \right)^{1/2}. \quad (7.3)$$

Podemos reescribir la Ec. (7.2), donde pasaremos de una dependencia de u respecto al tiempo conforme, $u(\eta)$, a una referencia respecto al factor de escala, $u(a)$. Para ello las derivadas se escriben

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{d\eta} = a' \frac{du}{da} = a\dot{a} \frac{du}{da}, \\ u'' &= a\dot{a} \frac{d}{da} \left(a\dot{a} \frac{du}{da} \right) = a\dot{a}^2 \frac{du}{da} + a^2 \ddot{a} \frac{du}{da} + a^2 \dot{a}^2 \frac{d^2 u}{da^2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

de la misma manera, se reescriben las derivadas de θ ,

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{d\theta}{d\eta} = a\dot{a} \frac{d\theta}{da}, \\ \theta'' &= a\dot{a}^2 \frac{d\theta}{da} + a^2 \ddot{a} \frac{d\theta}{da} + a^2 \dot{a}^2 \frac{d^2 \theta}{da^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Usando la definición de θ dada por la Ec. (7.3), y derivando respecto al factor de escala, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{da} &= -\frac{1}{a^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + p_0} \right)^{1/2} = -\frac{1}{a} \theta, \\ \frac{d^2 \theta}{da^2} &= \frac{2}{a^2} \theta. \end{aligned} \quad (7.6)$$

A partir de la combinación de las Ecs. (7.5) y (7.6), la división entre θ'' y θ se escribe

$$\frac{\theta''}{\theta} = \dot{a}^2 - a\ddot{a}. \quad (7.7)$$

¹También se ha estudiado el espectro cuántico de las fluctuaciones. Para no entorpecer la continuidad de la exposición, los resultados parciales se hallan en el Apéndice A.

Por lo tanto, la Ec. (7.2) se puede reescribir, a partir de las Ecs. (7.4), (7.7) y usando que $\dot{a} = aH$ y $\ddot{a} = a(\dot{H} + H^2)$, de la forma

$$a^2 \frac{d^2 u}{da^2} + a \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \frac{du}{da} - \frac{c_s^2}{a^2 H^2} \nabla^2 u + \frac{\dot{H}}{H^2} u = 0. \quad (7.8)$$

Ahora, si aplicamos la solución de fondo a la ecuación anterior y consideramos una solución de onda plana de la forma $u_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, la ecuación (7.8) se puede escribir como

$$a^2 \frac{d^2 u_{\mathbf{k}}}{da^2} + a \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \frac{du_{\mathbf{k}}}{da} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2 H^2} u_{\mathbf{k}} + \frac{\dot{H}}{H^2} u_{\mathbf{k}} = 0. \quad (7.9)$$

7.3. Taquionización del modelo Λ CDM

Al lagrangiano que describe el campo escalar de taquiones ϕ ,

$$L = V(\phi) \sqrt{1 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}, \quad (7.10)$$

le agregamos una constante cosmológica Λ distinta de cero. Como ya vimos, la densidad de energía y presión para un condensado de taquiones viene dado por las Ecs. (5.20), para una cosmología de FRW plana. En este caso, las ecuaciones de Friedmann y de conservación se escriben

$$3H^2 = \Lambda + \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (7.11)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}(1 - \dot{\phi}^2) + \frac{1 - \dot{\phi}^2}{V} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (7.12)$$

Recordando que la ecuación de estado para cada especie de fluido toma la forma barotrópica $p = (\gamma_0 - 1)\rho$, con γ el índice barotrópico,

$$\gamma = \dot{\phi}^2, \quad (7.13)$$

donde $0 < \gamma < 1$ para las Ecs. (5.20). La velocidad del sonido es $c_s^2 = 1 - \gamma > 0$, y usando la Ec. (7.13), podemos escribir

$$c_s^2 = 1 - \dot{\phi}^2. \quad (7.14)$$

Si el potencial del campo de taquiones es el siguiente

$$V(\phi) = \frac{\Lambda \sqrt{1 - \gamma_0}}{\sinh^2 \frac{\sqrt{3\gamma_0 \Lambda}}{2} \phi}, \quad (7.15)$$

entonces, se pueden encontrar algunas soluciones exactas de la ecuación de campo (7.12), al asumir una dependencia lineal del campo de taquiones con el tiempo cosmológico de la forma

$$\phi = \phi_0 t, \quad \dot{\phi}^2 = \phi_0^2 = \gamma_0, \quad (7.16)$$

la cual es consistente con la Ec. (7.13). Para esta elección, el parámetro de Hubble y su derivada están dados por

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \coth \frac{\sqrt{3\gamma_0^2 \Lambda}}{2} t, \quad \dot{H} = -\frac{\gamma_0 \Lambda}{2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\sqrt{3\gamma_0^2 \Lambda}}{2} t}. \quad (7.17)$$

Integrando el parámetro de Hubble dado por (7.17), se obtiene el siguiente factor de escala

$$a = a_0 \left[\sinh \frac{\sqrt{3\gamma_0^2 \Lambda}}{2} t \right]^{2/3\gamma_0}, \quad (7.18)$$

donde fijaremos $a_0 = 1$ para el factor de escala actual. Las Ecs. (7.17) para el parámetro de Hubble y su derivada, se pueden escribir en términos del factor de escala como

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \gamma_0 \frac{1}{1 + a^{3\gamma_0}} \quad a^2 H^2 = \frac{\Lambda}{3} a^2 \frac{1 + a^{3\gamma_0}}{a^{3\gamma_0}}. \quad (7.19)$$

Las fórmulas recién derivadas, son válidas para el taquión estándar. Sin embargo, existen dos nuevos tipos de campos de taquiones extendidos [24], [25], como ya hemos visto en el Capítulo 5, en él se demuestra que estos dos nuevos tipos de taquiones podrían derivarse del campo de taquiones estándar ($0 < \gamma < 1$), a través del uso de un argumento de simetría [101]. En lo siguiente, consideraremos el campo de taquiones estándar y el complementario ($1 < \gamma$).

El campo de taquiones complementario ϕ_c esta caracterizado por $1 < \dot{\phi}_c^2 = \gamma_0$ y su potencial puede deducirse a partir del taquión estándar, reemplazando $1 - \gamma_0 \rightarrow -(1 - \gamma_0)$ en la Ec. (7.15), dando como resultado

$$V(\phi_c) = \frac{\Lambda \sqrt{\gamma_0 - 1}}{\sinh^2 \frac{\sqrt{3\gamma_0 \Lambda}}{2} \phi_c}. \quad (7.20)$$

Al asumir nuevamente una dependencia lineal del campo de taquiones con el tiempo cosmológico, la Ec. (7.16), podemos obtener el mismo parámetro de Hubble y su derivada, las Ecs. (7.17) con $1 < \gamma_0$. Teniendo en cuenta que, en estas condiciones y por el uso de la Ec. (7.14), la velocidad del sonido resulta $c_s^2 = \gamma_0 - 1$.

En la Fig. 7.1 el factor de escala a se representa como una función de t , para el modelo Λ CDM y para los campos de taquiones estándar y complementario, con diferentes valores de γ_0 . Los campos de taquiones estándar y complementario para valores de $\gamma_0 \approx 1$ ($\gamma_0 = 0,99$ y $\gamma_0 = 1,01$) están muy cerca del modelo Λ CDM. Para estos dos valores se infiere, a partir de (7.1), que los factores de escala cósmicos

aumentan con el tiempo, y no hay diferencia razonable entre las soluciones mencionadas y la evolución temporal del factor de escala en el modelo de la concordancia. Los dos campos de taquiones aquí se comportan como campos de materia, responsables del régimen desacelerado del universo.

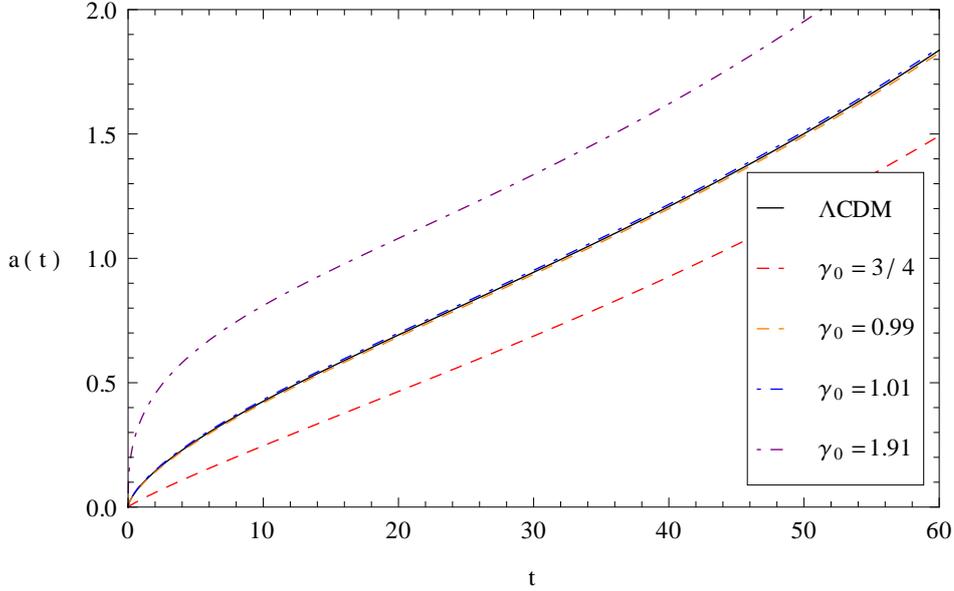


Figura 7.1: Gráfico del factor de escala cósmico como función del tiempo para el campo de taquiones estándar ($\gamma_0 = 3/4$ y $\gamma_0 = 0,99$) y el complementario ($\gamma_0 = 1,01$ y $\gamma_0 = 1,91$).

El campo de taquiones estándar con $\gamma_0 = 0,75$ desempeña el papel de un campo de inflación, el cual decae en materia. El análisis de la Fig. 7.1 muestra que la evolución en el tiempo del factor de escala es menos acentuada que la del modelo de concordancia.

Por otra parte, en el campo de taquiones complementario, con $\gamma_0 = 1,91$, que se encuentra cerca de representar materia dura ($\gamma_0 = 2$), el aumento en el tiempo de a es mucho más acentuado que el del modelo Λ CDM. Para un análisis detallado ver [94].

7.4. Análisis del espectro de potencia

Uno de los temas centrales de la cosmología contemporánea es la explicación del origen de inhomogeneidades primordiales, que sirven como semillas para la formación de estructura. Antes de la llegada de la cosmología inflacionaria, las perturbaciones iniciales eran postulas y su espectro diseñado para adaptarse a los datos de las observaciones. De este modo, prácticamente cualquier observación podría ser “explicada”, o descrita con mayor precisión, disponiendo de las condiciones iniciales apropiadas.

En contraste, la cosmología inflacionaria realmente explica el origen de la falta de homogeneidad primordial y predice su espectro. De este modo se hace posible probar la teoría, mediante la comparación de sus predicciones, con las observaciones.

De acuerdo con la teoría inflacionaria actual, las fluctuaciones cuánticas primordiales generan el inicio para la formación de estructuras a gran escala. Así, el espectro de potencia primordial debe ser coherente con las fluctuaciones mínimas de energía, permitida por la mecánica cuántica, es decir, hay que preservar las fluctuaciones de vacío. Este requisito se cumple si las condiciones iniciales para la variable $u_{\mathbf{k}}$ [116], [117], la amplitud de Fourier de la variable de Mukhanov u descripta por la Ec. (7.3), presentan las formas

$$u_{\mathbf{k}}(a) = -\frac{i}{\sqrt{c_s}k^{3/2}}, \quad \frac{du_{\mathbf{k}}}{da}(a) = \frac{\sqrt{c_s}}{a^2 H k^{1/2}}. \quad (7.21)$$

Reemplazando las ecuaciones dadas en (7.19) en la Ec. (7.9), obtenemos la ecuación de movimiento de las perturbaciones para un modelo de taquionización del Λ CDM, que se escribe

$$a^2 \frac{d^2 u_{\mathbf{k}}}{da^2} + a \left(2 - \frac{3}{2} \frac{\gamma_0}{1 + a^{3\gamma_0}} \right) \frac{du_{\mathbf{k}}}{da} + \frac{3}{1 + a^{3\gamma_0}} \left(\frac{c_s^2 k^2}{\Lambda} \frac{a^{3\gamma_0}}{a^2} - \frac{\gamma_0}{2} \right) u_{\mathbf{k}} = 0. \quad (7.22)$$

La ecuación anterior es tanto válida para el taquión estándar como para el complementario, cada uno con sus respectivas velocidades del sonido e índices barotrópicos. Además se puede obtener la constante cosmológica en términos de factor de Hubble actual, dando como resultado $\Lambda = 3/2H_0^2$.

En lo que sigue, nos vamos a referir siempre al espectro de potencia adimensional, $\Delta^2(k, a)$ [117], utilizando la Ec. (6.46) con el cambio de variable propuesto en (7.3), resultando

$$\Delta_{\phi}^2(k, a) = 16\pi^2(\rho + p) |u_{\mathbf{k}}(a)|^2 k^3, \quad (7.23)$$

donde $u_{\mathbf{k}}$ será el obtenido, para cada caso, luego de resolver numéricamente la ecuación diferencial (7.22), con las condiciones iniciales dadas por las Ecs. (7.21).

Ahora procederemos a presentar los resultados obtenidos. Nuestro objetivo es comparar los resultados, del espectro de energías, obtenidos para la taquionización de la constante cosmológica, para diferentes valores de gamma, con el modelo Λ CDM.

Investigamos el espectro de potencia del modelo taquionizado, resolviendo la ecuación (7.22) de manera numérica, con las condiciones iniciales (7.21). Luego, comparamos los espectros de potencia obtenidos para los diferentes γ_0 , con el espectro de potencia del modelo de la concordancia, correspondiente a los siguientes parámetros cosmológicos: $\Omega_{m0} = 0,30$ para el contenido total de materia, una contribución de la constante cosmológica especificada por $\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0}$ y la constante de Hubble $H_0 = 71 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Estos parámetros se encuentran en correspondencia con los obtenidos por la *Planck mission* [6] y WMAP-9 [34].

La Figura 7.2 describe el espectro de potencia adimensional Ec. (7.23) para la taquionización del modelo Λ CDM, para el campo de taquiones estándar y complementario con $\gamma_0 = 3/4$, $\gamma_0 = 0,99$ y $\gamma_0 = 1,01$, $\gamma_0 = 2$, respectivamente, y para el

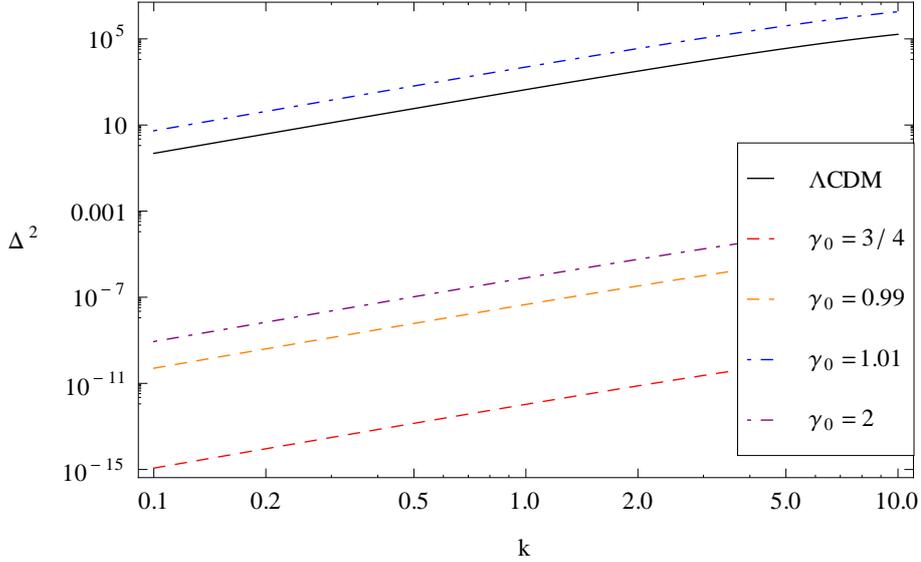


Figura 7.2: Gráfico de los espectros de potencia adimensionales como función de k a $a = 1$, para los campos de taquiones estándar ($\gamma_0 = 3/4$ y $\gamma_0 = 0,99$) y complementario ($\gamma_0 = 1,01$ y $\gamma_0 = 2$).

modelo de la concordancia. Estas curvas son la solución numérica de la ecuación (7.9) con las condiciones iniciales correspondientes (7.21) para los casos anteriores.

El hecho más evidente de esta figura es la gran discrepancia existente entre el espectro de potencia, de todas las curvas. Como se puede observar, a partir de estos resultados, hay una fuerte dependencia del espectro de potencia con el índice de barotrópico γ_0 . Por ejemplo, al cambiar de un índice barotrópico $\gamma_0 = 3/4$ a $\gamma_0 = 0,99$ el espectro de potencia adimensional varía en unos cuantos órdenes de magnitud. Comparando con el modelo Λ CDM, se puede ver que todas las curvas se encuentran estrictamente por debajo del modelo de concordancia, con la excepción de una con $\gamma_0 = 2$ que se encuentra por arriba. La Fig. 7.2 también muestra que la curva más baja corresponde a la que tiene menor índice barotrópico ($\gamma_0 = 3/4$) y estas aumentan a medida que el γ_0 aumenta.

La Figura 7.3 describe el espectro de potencia para el campo de taquiones complementario para $\gamma_0 = 1,82$, $\gamma_0 = 1,91$ y $\gamma_0 = 2$ y para el modelo con constante cosmológica Λ . Se observa que la curva del campo de taquiones complementario con $\gamma_0 = 1,91$ coincide, tiene la misma forma y amplitud, con el modelo de la concordancia. Puede verse en la Figura 7.4, que hay una diferencia fraccional muy pequeña, entre los espectros de potencia del taquión complementario, con $\gamma_0 = 1,91$, y el del modelo Λ CDM.

A partir de la Figura 7.1 y de [94], se puede inferir que los modelos con $\gamma_0 = 0,99$ y $\gamma_0 = 1,01$ pueden parecerse mucho al modelo Λ CDM, en relación a las curvas del

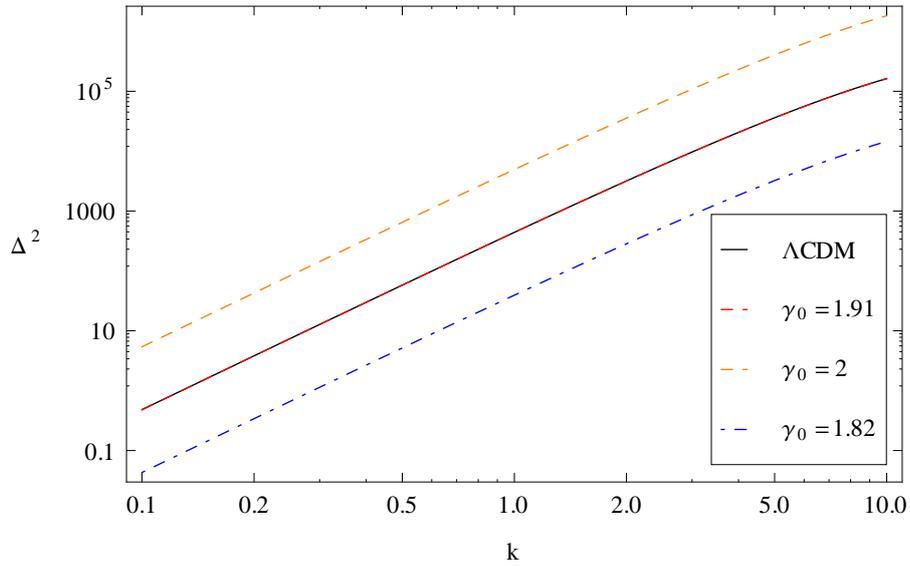


Figura 7.3: Gráfico de los espectros de potencia adimensionales como función de k a $a = 1$, para los campos de taquiones complementarios con $\gamma_0 = 1,82$, $\gamma_0 = 1,91$ y $\gamma_0 = 2$.

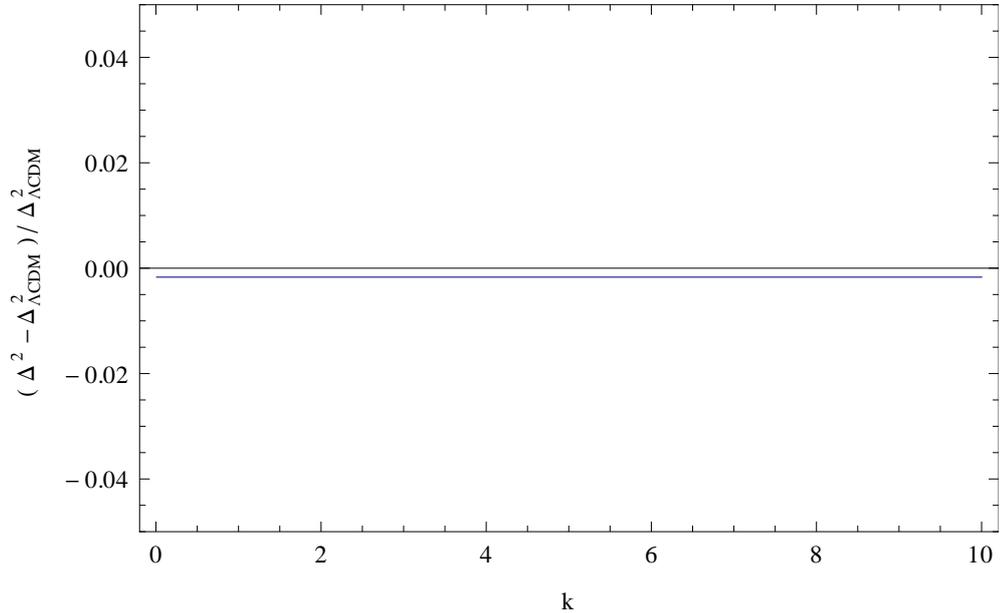


Figura 7.4: Gráfico de la diferencia fraccional entre el espectro de potencia del taquión complementario, con $\gamma_0 = 1,91$, y el del modelo ΛCDM .

factor de escala. Pero cuando se tienen en cuenta las perturbaciones de densidad, la Fig. 7.2 muestra que los dos modelos con dichos índices barotrópicos difieren considerablemente entre sí y con el modelo de la concordancia. Este resultado es físicamente relevante ya que implica que la formación de estructura a gran escala, que estos modelos predicen, está lejos de lo que observamos en la actualidad. El único caso especial, como indicamos anteriormente, son los que tienen índice barotrópico muy cerca de $\gamma_0 = 1,91$, es decir, la formación de estructura para un modelo de taquionización del modelo Λ CDM con índice $\gamma_0 = 1,91$ coincide con el modelo de la concordancia y por lo tanto con dichas observaciones.

Capítulo 8

Interacción en el sector oscuro

8.1. Motivación

Para investigar los mecanismos que gobiernan la dinámica de la evolución del universo, desde su fase inicial hasta su reciente fase acelerada, generalmente se tienen en cuenta dos tipos de modelos, denominados respectivamente, modelos en interacción y modelos unificados. Los aspectos de la evolución en los que nos vamos a concentrar, son aquellos conectados a las descripciones teóricas de la materia oscura y energía oscura.

En los modelos de interacción, la fuente de las ecuaciones de Einstein que describen la dinámica del universo a gran escala, incluye un agregado de diferentes fluidos materiales y campos escalares que se conservan de forma individual o interactúan entre ellos. Esto es en principio la más simple, y tal vez la más obvia hipótesis y es de hecho, la que ha proporcionado más avances en el conocimiento del fenómeno de la aceleración reciente del universo [81], [85], [90], [120]. A raíz de las evidencias observacionales, en este trabajo consideraremos cuatro componentes fundamentales: radiación, bariones, materia oscura y energía oscura. Dada la similitud dinámica entre bariones y la materia oscura, en este caso vamos a hacer un modelo simplificado y sustituir ambas componentes por un polvo casi sin presión, mientras que la energía oscura se describirá por un fluido con una ecuación de estado lineal. Tampoco consideraremos la radiación. Esto permitirá que concentremos nuestra investigación sobre modelos de dos fluidos con transferencia de energía.

Si a escalas cosmológicas la gravedad es modelada con la teoría de la RG y se supone que el universo es homogéneo e isótropo, se llega a que la aceleración actual es impulsada por la energía oscura. La materia oscura es actualmente detectada por medio de sus efectos gravitacionales y existe una degeneración inevitable entre la materia oscura y la energía oscura, ya que el tensor de Einstein resulta proporcional a la suma del tensor energía-momento y no distingue entre la materia oscura y de la energía oscura por separado, sólo “ve” la suma del contenido material del universo. Esto implica que puede existir un acoplamiento entre la materia oscura y la energía oscura dentro del marco de la RG sin violar las cotas observacionales actuales, por

lo que resulta interesante desarrollar formas de contrastar tal interacción, como veremos en el próximo capítulo.

La idea de este capítulo será mostrar que existe un método alternativo para encontrar la densidad total cuando se tienen componentes oscuras en interacción (en general se seguirá lo propuesto en el trabajo [26]). Se analizarán los casos donde la transferencia de energía es lineal y también los casos donde es no lineal. El objetivo de este método es poder facilitar el estudio de los modelos en interacción y los modelos unificados (donde con un sólo fluido se interpolan varias eras cosmológicas) y así caracterizar los mecanismos por los cuales se rige la evolución dinámica del universo desde un régimen temprano hasta la era reciente de expansión acelerada.

8.2. Evolución del sector oscuro

8.2.1. Descripción por medio de un fluido efectivo

Consideremos un universo en expansión modelado por una mezcla de dos fluidos que interactúan, materia oscura y energía oscura con densidades de energía ρ_m y ρ_x , y las presiones p_m y p_x respectivamente. Debido a la transferencia de energía entre ambas componentes oscuras, y a las ecuaciones de Einstein en un universo espacialmente plano de FRW, se tiene

$$3H^2 = \rho_m + \rho_x, \quad (8.1)$$

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_x + 3H(\rho_m + p_m + \rho_x + p_x) = 0. \quad (8.2)$$

La ecuación de conservación (8.2) evidencia la interacción entre las componentes que admiten el intercambio mutuo de energía y momento.

Para las dos componentes oscuras asumimos ecuaciones de estado $p_m = (\gamma_m - 1)\rho_m$ y $p_x = (\gamma_x - 1)\rho_x$, donde los índices barotrópicos γ_m y γ_x son constantes. La materia oscura está compuesta de componentes casi sin presión con un índice de barotrópico $\gamma_m \approx 1$ y la energía oscura tiene un índice barotrópico que satisface la condición $\gamma_x < \gamma_m$. Muchos de los resultados, serán válidos incluso cuando incluimos la posibilidad de energía oscura fantasma $\gamma_x < 0$. La densidad de energía total ρ y la ecuación de conservación para el modelo de interacción de los dos fluidos, son

$$\rho = \rho_m + \rho_x, \quad (8.3)$$

$$\rho' = -\gamma_m \rho_m - \gamma_x \rho_x, \quad (8.4)$$

donde la prima denota una derivada sobre la nueva variable temporal $' \equiv d/d\eta = d/3Hdt = d/d\ln(a/a_0)^3$ y a_0 es el valor de referencia para el factor de escala que consideraremos $a_0 = 1$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (8.3)-(8.4) obtenemos la densidad de energía para cada componente oscura como función de ρ y su derivada ρ'

$$\rho_m = -\frac{\gamma_x \rho + \rho'}{\Delta\gamma}, \quad \rho_x = \frac{\gamma_m \rho + \rho'}{\Delta\gamma}, \quad (8.5)$$

donde $\Delta\gamma = \gamma_m - \gamma_x > 0$ denota el determinante del sistema lineal de ecuaciones (8.3)-(8.4).

En este punto, se introduce una transferencia de energía entre los dos fluidos mediante la separación de la ecuación de conservación para el sistema, Ec. (8.4), en las dos ecuaciones

$$\rho'_m + \gamma_m \rho_m = -Q, \quad (8.6)$$

$$\rho'_x + \gamma_x \rho_x = Q. \quad (8.7)$$

En las Ecs. (8.6)-(8.7) al introducir el acoplamiento entre las componentes oscuras, se consideró que la función Q tiene contenido el factor de $3H$ que daría la forma $3HQ$, donde la función de interacción o término de interacción Q da cuenta de la transferencia de energía entre los dos fluidos. Por lo tanto, la dinámica de ρ_m y ρ_x está determinada por el factor de escala en lugar de H . Derivando la primera (8.6) o la segunda ecuación de (8.7) y combinándola con la Ec. (8.6) o con la Ec. (8.7), se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para la densidad total de energía:

$$\rho'' + (\gamma_m + \gamma_x)\rho' + \gamma_m\gamma_x\rho = Q\Delta\gamma, \quad (8.8)$$

que se denominará la *ecuación de la fuente*.

Lo interesante de este método es que el problema de dos fluidos en interacción se redujo al problema de un único fluido efectivo con densidad de energía total ρ y presión total $p = p_m + p_x$, cuya ecuación de estado toma la siguiente forma

$$p(\rho, \rho') = -\rho - \rho'. \quad (8.9)$$

Esto permite considerar una descripción efectiva en términos de un único fluido con una ecuación de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ y una ec. de conservación global $\rho' + \gamma\rho = 0$, implicando que el índice barotrópico efectivo $\gamma = (\gamma_m\rho_m + \gamma_x\rho_x)/\rho$ se mueve en el rango $\gamma_x < \gamma < \gamma_m$.

En resumen, dada una interacción Q , la densidad de energía total ρ del modelo de un fluido efectivo se determina resolviendo la ecuación de la fuente Ec. (8.8). Una vez que sabemos ρ , somos capaces de encontrar la ecuación de estado efectiva Ec. (8.9) y el factor de escala mediante la integración de la ecuación de Friedmann $3H^2 = \rho$, sin saber ρ_m y ρ_x por separado. Ambas densidades de energía se calculan fácilmente mediante la sustitución de ρ y ρ' en la Ec. (8.5). Por ejemplo, en el caso en que no haya interacción, $Q = 0$, la densidad de energía del modelo de fluido efectivo es $\rho = c_1/a^{3\gamma_m} + c_2/a^{3\gamma_x}$. Para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2 (condiciones iniciales), $\rho \rightarrow c_2/a^{3\gamma_x}$, el factor de escala $a \rightarrow t^{2/3\gamma_x}$ y la solución tipo ley de potencia $t^{2/3\gamma_x}$ se vuelve atractor.

Básicamente, hemos demostrado que un modelo de dos fluidos en interacción puede ser visto como un modelo de un fluido eficaz o equivalentemente considerado como uno unificado, cuyas ecuaciones dinámicas están dadas por las dos ecuaciones de Einstein independientes

$$3H^2 = \rho, \quad \dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (8.10)$$

Estas ecuaciones no pueden determinar las tres cantidades a , p , y ρ porque tenemos un grado de libertad. Por lo general, el sistema de ecuaciones (8.10) se cierra con una ecuación de estado $p = p(\rho)$. Cuando se supone que el tensor de energía-momento efectivo T_{ik} se divide en dos componentes oscuras, $T_{ik} = T_{ik}^m + T_{ik}^x$, las Ecs. de (8.10) se convierten en las Ecs. (8.1) y (8.2), que no permiten determinar las cinco cantidades a , ρ_m , ρ_x , p_m y p_x . Por lo tanto se necesita introducir una ecuación de estado para cada componente oscura $p_m = (\gamma_m - 1)\rho_m$ y $p_x = (\gamma_x - 1)\rho_x$. Luego, cambiando estas ecuaciones de estado se obtiene un conjunto muy grande de modelos en interacción que son equivalentes a uno unificado, lo que significa que la descomposición en la materia oscura y la energía oscura no es única.

8.2.2. Estabilidad asintótica

El conocimiento de soluciones estables tipo ley de potencia $a = t^{2/3\gamma_s}$ para el modelo de dos fluidos en interacción resulta muy útil ya que estas soluciones atractoras determinan el comportamiento asintótico del índice barotrópico efectivo $\gamma = -2\dot{H}/3H^2 = \gamma_s$. Estas soluciones están relacionadas con un universo que se acerca a un estado estacionario, i.e., se corresponden con la existencia de soluciones tipo atractor γ_s , ya que para tiempos grandes γ tiende al valor asintótico (constante) γ_s . Sobre el atractor se cumple

$$\gamma_s = \frac{\gamma_m \rho_{ms} + \gamma_x \rho_{xs}}{\rho_{ms} + \rho_{xs}} = \frac{r_s \gamma_m + \gamma_x}{1 + r_s}, \quad (8.11)$$

donde r es el cociente entre las densidades de energía, $r = \rho_m/\rho_x$, que asintóticamente en el régimen se vuelve una constante $r_s = \rho_{ms}/\rho_{xs}$, permitiendo así que se alivie el problema de la coincidencia: por qué las proporciones de materia (aglutinada por efectos gravitatorios) y la energía oscura resultan comparables en la actualidad [26]. Para el caso $\gamma_s = 0$, se encuentra un estado final tipo de Sitter con $H = cte$ y $r_s = -\gamma_x/\gamma_m$.

Vamos a investigar la estabilidad de la solución constante γ_s de la ecuación de evolución del índice barotrópico efectivo. Además, vamos a encontrar las condiciones de estabilidad de las soluciones γ_s y obtener el atractor cuando la transferencia de energía entre ambas componentes oscuras es generada por una interacción separable. Para este fin, deducimos la ecuación diferencial para γ diferenciando $\rho' = -\gamma\rho$ y mediante la sustitución de ρ' y $\rho'' = (\gamma^2 - \gamma')\rho$ en la ecuación de la fuente (8.8), tenemos

$$\gamma' - (\gamma - \gamma_m)(\gamma - \gamma_x) = -\frac{\Delta\gamma}{\rho}Q. \quad (8.12)$$

En primer lugar, se supone que una solución constante $\gamma = \gamma_s$ de la ecuación (8.12) con $\gamma_x < \gamma_s < \gamma_m$ existe, y después de eso, impondrá la condición de estabilidad para que γ_s sea estable. Una clase de interacción que satisface el requisito de existencia de la solución γ_s se puede escribir de la siguiente manera:

$$Q(\gamma_s) = \frac{(\gamma_s - \gamma_m)(\gamma_s - \gamma_x)}{\Delta\gamma}\rho, \quad (8.13)$$

siendo $Q(\gamma_s) < 0$. El valor negativo de $Q(\gamma_s)$ sobre la solución estacionaria indica que la energía se transfiere desde la componente de energía oscura hacia la materia oscura. La solución tipo ley de potencia $a = t^{2/3\gamma_s}$ se obtiene luego de integrar $\gamma_s = -2\dot{H}/3H^2$.

En lo que sigue, el análisis de estabilidad se realizará sobre interacciones que tengan la forma $Q = Q(\rho_m, \rho_x, \rho'_m, \rho'_x, \rho, \rho', \rho'')$. Mediante el uso de las ecuaciones (8.5) y $\rho' = -\gamma\rho$ con $\rho'' = (\gamma^2 - \gamma')\rho$, obtenemos que $\rho_{m,x} = \rho_{m,x}(\rho, \rho')$ y $\rho'_{m,x} = \rho'_{m,x}(\rho', \rho'')$, entonces la interacción se convierte en $Q = Q(\gamma, \gamma', \rho)$. Para simplificar adoptamos la condición de separabilidad para la función Q , es decir $Q(\gamma, \gamma', \rho) = \rho Q(\gamma, \gamma')$, lo que permite escribir el término de interacción de la forma

$$Q(\gamma, \gamma', \rho) = \frac{(\gamma - \gamma_m)(\gamma - \gamma_x)}{\Delta\gamma} F(\gamma, \gamma')\rho, \quad (8.14)$$

donde la función F depende de γ y γ' . Se debe enfatizar que diversos modelos, descritos por la interacción (8.14), han sido analizados en la literatura, véase por ejemplo [121]- [132], entre otros.

Combinando las Ecs. (8.12) y (8.14), se puede escribir la ecuación de evolución para el índice barotrópico efectivo

$$\gamma' = -(\gamma - \gamma_m)(\gamma - \gamma_x)(F - 1). \quad (8.15)$$

En conclusión, cuando la función F cumple con las siguientes condiciones

$$F(\gamma = \gamma_s, \gamma' = 0) = 1, \quad (8.16)$$

$$\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma}\right)_{(\gamma_s, 0)} = -\frac{(\gamma_s - \gamma_m)(\gamma_s - \gamma_x)F_\gamma(\gamma_s, 0)}{1 + (\gamma_s - \gamma_m)(\gamma_s - \gamma_x)F_{\gamma'}(\gamma_s, 0)} < 0, \quad (8.17)$$

donde F_γ y $F_{\gamma'}$ representan las derivadas parciales de F con respecto a γ y a γ' respectivamente, entonces γ_s es una solución estable o atractor. En otras palabras, cuando se cumple la condición (8.16) la solución γ_s se convierte una solución constante estacionaria de la Ec. (8.15). Además, γ_s es estable siempre que se cumpla la condición de estabilidad (8.17).

8.3. Interacciones lineales y no lineales

Varios modelos cosmológicos investigados en la literatura se describen por una interacción lineal en función de las densidades de energía ρ_m , ρ_x y la densidad total de energía ρ [121] - [132]. Desde el inicio hemos visto de las Ecs. (8.5), que ρ_m y ρ_x son funciones lineales de ρ y su derivada ρ' . Esto nos anima a investigar combinaciones lineales de ρ_m , ρ_x , ρ , ρ' , y las derivadas de todos estos términos. Se comienza por proponer una interacción lineal que resulte de una combinación lineal de todos los términos mencionados

$$Q_l = c_1\rho_m + c_2\rho_x + c_3\rho'_m + c_4\rho'_x + c_5\rho + c_6\rho' + c_7\rho'', \quad (8.18)$$

pero de forma tal que Q_l verifique las condiciones dadas por las Ecs. (8.16) y (8.17). Este tipo de interacción también es motivado por el hecho que la ecuación de la fuente (8.8) se vuelve una ecuación diferencial lineal de segundo orden para ρ . Este tipo de acoplamiento general sólo fue introducido en la ref. [26]. El término de interacción (8.18) contiene varios casos que fueron analizados en la literatura, por ejemplo, la elección $Q_l = c_1\rho_m + c_2\rho_x$ que fue estudiada en las refs. [121], [128], el caso $Q_l = c_5\rho$ fue abordado en [130], [131], el término $Q_l = c_1\rho_m$ fue contemplado en [133] mientras que $Q_l = c_2\rho_x$ fue examinado en [123] - [127]. En el próximo capítulo estudiaremos la interacción lineal donde todos los coeficientes de (8.18) son cero salvo el $c_6 \neq 0$, es decir $Q_l = c_6\rho'$ [28].

Supongamos que la transferencia de energía entre las componentes de materia oscura y de energía oscura es producida por la siguiente “interacción no lineal” [26],

$$Q_{nl} = \frac{j_1\rho_m^2 + j_2\rho_m\rho_x + j_3\rho_x^2}{\rho} + Q_l + \frac{f(\eta)\rho^\nu}{\Delta\gamma}, \quad (8.19)$$

donde el término Q_l está dado por la Ec. (8.18), $f(\eta)\rho^\nu$ es un término atípico proporcional a una función $f(\eta)$ bien definida, que depende del factor de escala $\eta = \ln a^3$ siendo ν constante.

Usando la Ec. (8.5), reemplazándola en (8.19) y manipulando un poco los términos, se puede llegar a una expresión más compacta de Q_{nl} que dependa solo de ρ y sus derivadas,

$$Q_{nl} = \frac{k_1\rho'^2 + \rho(k_2\rho + k_3\rho' + k_4\rho'')f(\eta)\rho^{\nu+1}}{\rho\Delta\gamma}, \quad (8.20)$$

donde las constantes k_i son combinaciones de las viejas constantes que aparecen en (8.19).

En parte del próximo capítulo analizaremos y estudiaremos una interacción no lineal, dada por $Q_{nl} = k\rho\rho'$, que no ha sido estudiada en la literatura, [27].

Capítulo 9

Interacción entre materia oscura y energía de vacío variable

9.1. Motivación

Desde hace alrededor de quince años se encuentran disponibles estudios de alta calidad de los datos cosmológicos; el brillo de una clase de supernovas (SNIa) [1] [134] [135] [136], los espectros de la radiación cósmica de fondo [4] [137], las oscilaciones acústicas de bariones, dadas por una muestra luminosa de galaxias con el Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [35] [36] [138]. Estos estudios, han convergido hacia una historia de la expansión cósmica, que implica una geometría espacial plana y un período de aceleración reciente del universo. Esta fase de expansión rápida, se ha atribuido a una componente misteriosa de energía con presión negativa, que representa a más de los 70 % de la energía total del universo. A pesar de la calidad y cantidad de los datos de observación, la comprensión de la naturaleza fundamental de la componente de energía oscura es aún desconocida. Como ya lo hemos mencionado en diversas ocasiones, el tipo más simple de energía oscura corresponde a una constante cosmológica Λ positiva.

La evidencia indica que en la historia cosmológica del universo, la materia y el espacio-tiempo pueden haber emergido de una singularidad y que evolucionaron a través de cuatro eras diferentes: la inflación temprana, radiación y las eras dominadas por materia y energía oscura. Durante las etapas de radiación y materia oscura, la expansión se ralentiza mientras que en la inflación y las eras de energía oscura se acelera. La necesidad de una componente de materia oscura ha sido evidenciada a través de la colisión astrofísica de galaxias, del espectro de potencia de un clúster de materia o de la distribución masa en lentes gravitacionales [9] [139]. Hoy en día, las observaciones astrofísicas sugieren que la materia oscura es una componente sustancial de la densidad total de materia del universo y representa casi 23 % de la materia de energía total del mismo. Esta componente invisible no bariónica es el principal agente responsable de la formación a gran escala de la estructura en el universo.

Teniendo en cuenta los mecanismos que gobiernan la naturaleza de ambas componentes oscuras, se podría proponer la existencia de un intercambio de energía entre ellas, es decir, asumir que la materia oscura siente la presencia de la energía oscura a través de una expansión de la gravedad del universo, y viceversa, pudiendo interactuar entre sí [140], [141]. Un acoplamiento entre la materia oscura y la energía oscura cambia la evolución del sector oscuro, dando lugar a una rica dinámica cosmológica en comparación con modelos no interactuantes.

En el marco de modelos de interacción, la fuente de ecuaciones de Einstein que describe la dinámica del universo a gran escala incluye un agregado de diferentes fluidos materiales, que se conservan individualmente o en la interacción [142], siendo esta la hipótesis más simple para empezar. Siguiendo las evidencias observacionales vamos a considerar cuatro componentes fundamentales: radiación, bariones, materia oscura y energía oscura.

Contrastar a estos modelos con los datos observacionales, podría llevarnos a nuevos conocimientos sobre las propiedades de la materia oscura y la energía oscura. Por ejemplo, la fracción de la energía oscura en la época de recombinación debe cumplir con el límite $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,1$, en orden de que el modelo de energía oscura sea coherente con los datos de la nucleosíntesis del Big Bang. Desentrañar la naturaleza de la oscuridad, así como sus propiedades a un alto corrimiento al rojo podría dar una guía invaluable para la física detrás de la reciente aceleración del universo [143] - [146]. Las actuales limitaciones en la cantidad de energía oscura en los primeros tiempos provienen de la Misión Planck, los datos cosmológicos analizados han llevado a un límite superior de $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,009$ con 95 % del nivel de confianza [6]. Además, las futuras observaciones, como Euclides o CMBPol podrán ser capaces de restringir aún más la fracción de los principios de la energía oscura. El análisis conjunto sobre la base de datos de Euclides+CMBPol conduce a $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,00092$ mientras que el análisis conjunto de los datos de Euclides+Planck será menos restrictivo dando $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,0022$ [29].

El objetivo de este capítulo es examinar el intercambio de energía entre la materia oscura y la energía oscura en un modelo con una interacción lineal en la derivada de la densidad de energía y otro modelo con una interacción proporcional al producto de la densidad del sector oscuro y su derivada, en ambos modelos aparecen dos componentes más desacopladas. Restringiremos el conjunto cósmico de parámetros, de cada modelo, mediante los datos actualizados de Hubble y los límites severos reportados por la Misión Planck sobre la energía oscura temprana.

9.2. El Modelo

Consideramos un universo isótropo y homogéneo espacialmente plano descrito por un espacio-tiempo de FRW. El universo está constituido por cuatro componentes, una muy cercana a la radiación, la materia bariónica, materia oscura y la energía de vacío variable (EVV), las dos últimas interactúan y las primeras componentes se encuentran desacopladas. La evolución del universo de FRW se rige por la ecuación

de Friedmann y de conservación,

$$3H^2 = \rho_T = \rho_r + \rho_b + \rho_m + \rho_x, \quad (9.1)$$

$$\dot{\rho}_r + 3H\gamma_r\rho_r = 0, \quad \dot{\rho}_b + 3H\gamma_b\rho_b = 0, \quad (9.2)$$

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_x + 3H(\gamma_m\rho_m + \gamma_x\rho_x) = 0. \quad (9.3)$$

La ecuación de estado para cada especie, con densidad de energía ρ_i , y presión p_i , toma la forma barotrópica $p_i = (\gamma_i - 1)\rho_i$, donde la constante γ_i indica el índice barotrópico para cada componente $i = \{x, m, b, r\}$, con $\gamma_x = 0$, $\gamma_b = 1$, mientras γ_r y γ_m van a ser estimadas. Por lo tanto, ρ_x juega el rol de energía de vacío o de constante cosmológica variable, ρ_b representa la materia bariónica sin presión, ρ_r se encuentra cerca a la componente de radiación y ρ_m puede ser asociada con la materia oscura.

Resolviendo el sistema lineal, la ecuación (9.3) junto con $\rho = \rho_m + \rho_x$, podemos adquirir ambas densidades oscuras como funciones de ρ y ρ' , como ya lo hemos mostrado en el capítulo anterior,

$$\rho_m = -\frac{\gamma_x\rho + \rho'}{\gamma_m - \gamma_x}, \quad \rho_x = \frac{\gamma_m\rho + \rho'}{\gamma_m - \gamma_x}, \quad (9.4)$$

donde hemos utilizado la variable $\eta = \ln(a/a_0)^3$ con a_0 el valor actual del factor de escala ($a_0 = 1$). Suponemos que no hay interacción entre la radiación, los bariones y el sector oscuro, por lo que la densidad de energía se conserva y la prima indica diferenciación con respecto a la nueva variable temporal $' \equiv d/d\eta$. Bajo esta situación, las Ecs. (9.2) conducen a las densidades de energía de la radiación y de la materia bariónica, $\rho_r \sim a^{-3\gamma_r}$ y $\rho_b \sim a^{-3}$, respectivamente.

Con el fin de continuar con el análisis de la interacción en el sector oscuro, introducimos una transferencia de energía entre los dos fluidos, mediante la separación de la ecuación de conservación como

$$\rho'_m + \gamma_m\rho_m = -Q, \quad \rho'_x + \gamma_x\rho_x = Q. \quad (9.5)$$

En las Ecs. dadas en (9.5) al introducir el acoplamiento entre las componentes oscuras, se consideró que la función Q tiene contenido el factor $3H$ que daría la forma $3HQ$, donde Q indica el intercambio de energía entre las dos componentes oscuras. A partir de las Ecs. (9.4) y (9.5), obtenemos la ecuación fuente [140] de la densidad de energía ρ del sector oscuro

$$\rho'' + (\gamma_m + \gamma_x)\rho' + \gamma_m\gamma_x\rho = Q(\gamma_m - \gamma_x). \quad (9.6)$$

9.2.1. Modelo I: Interacción $Q = \alpha\rho'$

Aquí, la interacción Q entre ambas componentes oscuras toma la forma, $Q = \alpha\rho'$, siendo α la constante de acoplamiento que mide la fuerza de la interacción en el sector oscuro. Este tipo de interacción es ahora analizado bajo el punto de vista

de las nuevas observaciones y da lugar a un modelo de energía oscura que puede ser visto como una constante cosmológica variable o el decaimiento de energía de vacío [66], [148]. El objetivo de esta sección es explorar este modelo caracterizado por una constante cosmológica variable, y restringir sus parámetros con las limitaciones observacionales provenientes del comportamiento de la energía oscura en los primeros tiempos.

Reemplazando la forma específica de Q en la ecuación de la fuente (9.6), nos lleva a una ecuación diferencial de segundo orden para la densidad de energía total ρ . Insertando $\gamma_x = 0$ en la ecuación (9.6) e integrando, se obtiene una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\rho' = \gamma_m[(\alpha - 1)\rho + \mathcal{C}], \quad (9.7)$$

donde \mathcal{C} es una constante de integración. De esto último, podemos ver que la sustitución de la Ec. (9.7) en la segunda ecuación de (9.4) da la energía oscura de este modelo, que puede ser considerada como una EVV,

$$\rho_x = \alpha\rho + \mathcal{C} = \Lambda. \quad (9.8)$$

En el futuro, cuando la energía oscura domina toda la dinámica del universo, será $\rho_T \approx \rho_x$, por lo que la ecuación (9.8) tiende al bien conocido modelo de $\Lambda(H)$, con $\Lambda \simeq \alpha H^2 + \mathcal{C}$, [66], [147] [148].

Con el fin de obtener $\rho(a)$ necesitamos expresar la ecuación diferencial lineal de primer orden (9.7) como una integración de cuadratura de la siguiente manera,

$$\rho = \frac{\mathcal{K}}{1 - \alpha}(1 + z)^{3(1-\alpha)\gamma_m} + \frac{\mathcal{C}}{1 - \alpha}, \quad (9.9)$$

donde \mathcal{K} es una constante de integración. Escribimos ρ en términos del corrimiento al rojo z , teniendo en cuenta la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo, $z + 1 = 1/a$. Utilizando los parámetros actuales de densidad $\Omega_{i0} = \rho_{i0}/3H_0^2$, junto con la condición de planitud, $1 = \Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{x0} + \Omega_{m0}$, podemos escribir las constantes de integración \mathcal{K} y \mathcal{C} en términos de los parámetros de densidad de observación:

$$\mathcal{K} = 3H_0^2\Omega_{m0}, \quad (9.10)$$

$$\mathcal{C} = 3H_0^2[\Omega_{x0} - \alpha(\Omega_{x0} + \Omega_{m0})]. \quad (9.11)$$

En este caso, la densidad de energía total $\rho_T/3H_0^2$ está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\rho_T}{3H_0^2} &= (1 - \Omega_{b0} - \Omega_{x0} - \Omega_{m0})(1 + z)^{3\gamma_r} + \Omega_{b0}(1 + z)^3 \\ &+ \frac{\Omega_{m0}}{1 - \alpha}(1 + z)^{3(1-\alpha)\gamma_m} + \Omega_{x0} + \left(1 - \frac{1}{1 - \alpha}\right)\Omega_{m0}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

De esta manera, el modelo tiene siete parámetros independientes (H_0 , Ω_{b0} , Ω_{x0} , Ω_{m0} , α , γ_r , γ_m) que especificaremos completamente. A partir de (9.12) se puede

ver que el universo está dominado por radiación en los primeros tiempos, donde las componentes oscuras resultan insignificantes. Luego de esta época, pasa a dominar la materia bariónica sin presión seguida por una era gobernada por la materia oscura cuando $(1 - \alpha)\gamma_m \simeq 1$. Por último, el universo exhibe una fase de de Sitter en los momentos finales. La interacción permite una transición suave entre la era dominada por la materia oscura, en un pasado distante (régimen intermedio), y la etapa de aceleración en los momentos finales. Para los casos límite, cuando $z \rightarrow -1$ las densidades de energía van a $\rho_m \rightarrow 0$ y $\rho_x \rightarrow \frac{C}{1-\alpha}$, y cuando $z \rightarrow \infty$, $\rho_m \rightarrow \infty$ y $\rho_x \rightarrow \infty$, si $\alpha < 1$; como podremos verificar en la siguiente sección, mediante el uso de los valores mejor ajustados de los parámetros cosmológicos.

9.2.2. Modelo II: Interacción $Q = \alpha\rho\rho'$

Aquí, la interacción no lineal Q entre ambas componentes oscuras es $Q = \alpha\rho'\rho$, donde α nuevamente es la constante de acoplamiento. Esta interacción no fue examinada anteriormente en la literatura y da lugar a un escenario donde la EVV también puede ser vista como una constante cosmológica variable [66], [148]. El propósito de este apartado, al igual que el anterior, es explorar este modelo caracterizado por una EVV y restringirlo observacionalmente con el comportamiento de la energía oscura a tiempos tempranos.

Mediante la sustitución de la forma específica de Q en la ecuación de origen (9.6), se convierte en una ecuación diferencial no lineal de segundo orden en la densidad total de energía ρ . Insertando $\gamma_x = 0$ en la última ecuación puede conseguirse la primer integral

$$\rho' = \gamma_m \left[\frac{\alpha}{2} \rho^2 - \rho + \mathcal{D} \right], \quad (9.13)$$

donde \mathcal{D} es la constante de integración. Reemplazando la Ec. (9.13) en la Ec. (9.4), se obtiene que $\rho_x = [\alpha\rho^2/2 + \mathcal{D}] = \Lambda$, por lo que la energía oscura puede ser considerada como una EVV proporcionada en tiempos tardíos $\rho_T \simeq \rho_x = 3H^2$ y entonces $\Lambda \simeq (\alpha H^4/2 + \mathcal{D})$ [66], [148]. Con el fin de obtener $\rho(a)$, tenemos que expresar la ecuación diferencial no lineal de primer orden (9.13) como una integración por cuadratura. Resolviendo la Ec. (9.13) bajo la condición de $1 > 2\alpha\mathcal{D}$ podemos obtener la densidad de energía total del sector oscuro

$$\rho = \frac{\mathcal{K}(1 + \mathcal{R})a^{-3\gamma_m\mathcal{R}} + \mathcal{R} - 1}{\alpha[\mathcal{K}a^{-3\gamma_m\mathcal{R}} - 1]}, \quad (9.14)$$

donde $\mathcal{R} = \sqrt{1 - 2\alpha\mathcal{D}}$, \mathcal{K} es una constante de integración. Usando los parámetros de densidad presentes $\Omega_{i0} = \rho_{i0}/3H_0^2$ y la condición de planitud, $1 = \Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{x0} + \Omega_{m0}$, podemos escribir las constantes de integración \mathcal{K} y \mathcal{D} en términos de los parámetros de densidad:

$$\mathcal{K} = \frac{3\alpha H_0^2(\Omega_{x0} + \Omega_{m0}) - (1 - \mathcal{R})}{3\alpha H_0^2(\Omega_{x0} + \Omega_{m0}) - (1 + \mathcal{R})},$$

$$\mathcal{D} = 3H_0^2\Omega_{x0} - \frac{\alpha}{2}[3H_0^2(\Omega_{x0} + \Omega_{m0})]^2. \quad (9.15)$$

La densidad de energía total está dada por

$$\begin{aligned} \rho_T = 3H_0^2(1 - \Omega_{b0} - \Omega_{x0} - \Omega_{m0})a^{-3\gamma_r} + 3H_0^2\Omega_{b0}a^{-3} \\ + \frac{\mathcal{K}(1 + \mathcal{R})a^{-3\gamma_m\mathcal{R}} + \mathcal{R} - 1}{\alpha[\mathcal{K}a^{-3\gamma_m\mathcal{R}} - 1]}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

El universo está dominado por la radiación en los primeros tiempos. Después de esta época, domina la materia bariónica sin presión seguida de una era dominada por la materia oscura cuando $\gamma_m\mathcal{R} \simeq 1$, terminando con una fase de de Sitter en los momentos finales, Ec. (9.16), como en el caso del modelo anterior. Para ver que la materia oscura domina la evolución del universo durante un corto período de tiempo, se utiliza la densidad de energía del sector oscuro (9.14) y encontramos $\rho = (1/\alpha) - (\mathcal{R}/\alpha)[1 + x/(1-x)]$, donde $x = \mathcal{K}a^{-3\gamma_m\mathcal{R}}$. Cuando x es considerado pequeño, la Ec. (9.14) conduce a $\rho \simeq (1 - \mathcal{R})/\alpha - (2\mathcal{R}/\alpha)x$ junto con $\rho_m = -\rho'/\gamma_m \simeq (2\mathcal{R}/\alpha\gamma_m)x'$. Usando $x' = -\mathcal{K}\gamma_m\mathcal{R}a^{-3\gamma_m\mathcal{R}}$, obtenemos que $\rho_m \simeq -(2\mathcal{R}^2\mathcal{K}/\alpha\gamma_m)a^{-3\gamma_m\mathcal{R}} > 0$ con tal que $\mathcal{K} < 0$; tal hecho se puede verificar mediante el uso de los valores que mejor ajustan los parámetros cosmológicos, que veremos en la sección siguiente.

9.3. Observaciones

Vamos a efectuar una estimación cualitativa de los parámetros cosmológicos para ambos modelos, con una interacción en el sector oscuro dada por $Q = \alpha\rho'$ para el primer caso y con $Q = \alpha\rho\rho'$ para el segundo, además de las componentes de radiación y materia bariónica desacopladas. Utilizaremos los datos observacionales $H(z)$ [149], [150], [152] - [156], que se pueden ver en la Tabla 9.1. Los valores de la función $H(z)$ se obtienen directamente de las observaciones cosmológicas, por lo que esta función juega un papel fundamental en la comprensión de las propiedades del sector oscuro. De la relación $dt/dz = -(1+z)H(z)$ [150] una medición de la edad diferencial dz/dt a diferentes corrimientos al rojo, permite obtener el factor de Hubble. El método estadístico requiere la recopilación de los H_{obs} observados [156] y el mejor valor para el tiempo presente $z = 0$, ajustado según [151]. La bibliografía [33], [34], [157] nos muestra H_{obs} para diferentes corrimientos al rojo con la correspondiente incerteza 1σ . La distribución de probabilidad para los parámetros θ es

$$P(\theta) = \aleph \exp^{-\chi^2(\theta)/2}, \quad (9.17)$$

(ver por ejemplo, [158]) siendo \aleph una constante de normalización. Los parámetros del modelo son determinados mediante la minimización de

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^{N=29} \frac{[H(\theta; z_i) - H_{obs}(z_i)]^2}{\sigma^2(z_i)}, \quad (9.18)$$

donde $H_{obs}(z_i)$ es el valor de $H(z)$ observado al corrimiento z_i , $\sigma(z_i)$ es la correspondiente incerteza 1σ y $H(\theta, z_i)$ es la función de Hubble (9.12) y (9.16), respectivamente para cada modelo, evaluada a z_i . La función χ^2 alcanza su valor mínimo al mejor ajuste del valor θ_c y el ajuste se considera bueno cuando se cumple $\chi_{min}^2(\theta_c)/(N - n) \leq 1$ donde n es el número de parámetros [158]. Aquí, como puede verse de la Tabla 9.1, $N = 29$ es el número de datos y $n = 2$. La función χ^2 es una variable aleatoria que depende de N y presenta $N - n$ grados de libertad.

En este caso se considerarán $\theta_I = (H_0, \Omega_{b0}, \Omega_{x0}, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_r, \gamma_m)$ y $\theta_{II} = (H_0, \Omega_{b0}, \Omega_{x0}, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_m)$, para cada modelo respectivamente, más las restricciones sobre los parámetros de densidad que aseguran la condición de planitud ($\Omega_{r0} = 1 - \Omega_{b0} - \Omega_{x0} - \Omega_{m0}$); por lo tanto tenemos siete parámetros independientes para el modelo I y seis para el modelo II. Para un dado par (θ_1, θ_2) de parámetros independientes, fijando los otros, vamos a realizar el análisis estadístico mediante la minimización de la función χ^2 para obtener los valores de mejor ajuste de las variables aleatorias.

Por otro lado, los contornos o niveles de confianza con el 68,3% de probabilidad en el plano (θ_1, θ_2) están contruidos de un conjunto de puntos aleatorios que verifican la desigualdad $\Delta\chi^2 = \chi^2(\theta) - \chi_{min}^2(\theta_c) \leq 2,30$. Esta desigualdad define una región acotada cuyo borde se corresponde con una elipse cerrada centrada en el mejor ajuste θ_c dentro del plano conformado por los parámetros a estimar, así pues la barra de error de 1σ puede identificarse con la distancia entre el punto de mejor ajuste θ_c y borde de la elipse definido por $\Delta\chi^2 = 2,30$. En forma similar, el nivel de confianza al 95,4% asociado con la barra de error 2σ de los datos cumple con la condición $\Delta\chi^2 \leq 6,17$.

9.3.1. Modelo I

Los niveles de confianza obtenidos con la función estándar χ^2 , para dos parámetros independientes, se muestran en la Fig. 9.1, mientras que los resultados de la estimación se resumen brevemente en la Tabla 9.2; reportando sus correspondientes barras de error marginales 1σ [159]. En el número 1 de la Tabla 9.2, nos encontramos con el mejor ajuste a $(H_0, \alpha) = (70,45_{-2,16}^{+2,13} \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}; 0,00007_{-0,06000}^{+0,06604})$ con $\chi_{d.o.f}^2 = 0,709$, que cumple la condición esperada $\chi_{d.o.f}^2 < 1$. En 3, obtenemos el mejor ajuste a los parámetros independientes $(\Omega_{x0}, \Omega_{m0}) = (0,733_{-0,072}^{+0,068}; 0,222_{-0,107}^{+0,108})$ con $\chi_{d.o.f}^2 = 0,758$ mediante el uso de los priores $(H_0; \Omega_b; \alpha; \gamma_r; \gamma_m) = (69; 0,0449; 0,0001; 4/3; 1,014)$; por lo que los valores obtenidos para Ω_{x0} y Ω_{m0} están de acuerdo con los datos obtenidos por Planck Mission [6] o con los datos provenientes desde el proyecto WMAP-9 [34] [ver Fig. 9.2]. De hecho, los datos de Planck+WMAP indican que la cantidad de energía de vacío es $0,685_{-0,016}^{+0,018}$ a un NC de 68%, los datos de Planck+WMAP+high L nos llevan a $0,6830_{-0,016}^{+0,017}$ a un NC de 68%, mientras que el análisis estadístico en conjunto sobre Planck+WMAP+high L+BAO da $0,692 \pm 0,010$ al nivel 1σ [6]. El ajuste aproximado sobre los valores presentes de materia oscura con 68% muestra que los datos que da Wiggle-Z dan $\Omega_{m0} = 0,309_{-0,035}^{+0,041}$, mientras que el experimento Boss parece aumentar la cantidad de materia oscura

z	$H(z)$	1σ	referencias
0.000	73.8	2.4	[151]
0.070	69	19.6	[154]
0.100	69	12	[150]
0.120	68.6	26.2	[154]
0.170	83	8	[150]
0.179	75	4	[152]
0.199	75	5	[152]
0.200	72.9	29.6	[154]
0.270	77	14	[150]
0.280	88.8	36.6	[154]
0.350	76.3	5.6	[156]
0.352	83	14	[152]
0.400	95	17	[150]
0.440	82.6	7.8	[155]
0.480	97	62	[149]
0.593	104	13	[152]
0.600	87.9	6.1	[155]
0.680	92	8	[152]
0.730	97.3	7.0	[155]
0.781	105	12	[152]
0.875	125	17	[152]
0.880	90	40	[149]
0.900	117	23	[150]
1.037	154	20	[152]
1.300	168	17	[150]
1.430	177	18	[150]
1.530	140	14	[150]
1.750	202	40	[150]
2.300	224	8	[153]

 Cuadro 9.1: Datos de Hubble $H_{obs}(z_i)$ vs. corrimiento al rojo z_i .

ra en 0,019%, así $\Omega_{m0} = 0,315_{-0,015}^{+0,015}$; mientras los datos del análisis estadístico en conjunto de 6dF+SDSS+BOSS+Wiggle-Z nos lleva a $\Omega_{m0} = 0,307_{-0,011}^{+0,010}$ a un nivel de confianza de 68% [6], por lo que nuestro resultado para Ω_{m0} se superpone con los datos de observación [ver Fig. 9.2]. Además, nos encontramos con el mejor ajuste a $(\Omega_{x0}, \gamma_m) = (0,759_{-0,067}^{+0,066}; 1,049_{-0,460}^{+0,181})$ con $\chi_{d.o.f}^2 = 0,762$, señalando que la materia oscura no se trata de un fluido sin presión, siempre que el índice barotrópico sea ligeramente mayor que la unidad [cf. Tabla 9.2]. Además, el análisis estadístico conduce a $(\Omega_{b0}, \Omega_{x0}) = (0,045_{-0,104}^{+0,107}; 0,733_{-0,074}^{+0,070})$ con $\chi_{d.o.f}^2 = 0,758$, que se

encuentra en acuerdo con los datos observacionales $\Omega_{b0} = 0,035 \pm 0,001$ provenientes de WMAP-9 [34] y con $\Omega_{b0} = 0,034 \pm 0,001$ a un NC de 68 % de Planck Mission [6]. En cuanto al valor actual del parámetro de Hubble, nos encontramos con que varía en un intervalo, $H_0 \in [69,92_{-2,15}^{+2,11}; 70,77_{-2,27}^{+2,29}] \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Desde el análisis de Planck+WMAP+high L, se encontró que $H_0 = (67,3 \pm 1,2) \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ a un NC de 68 % [6]. Un valor menor de H_0 se ha encontrado en otros experimentos de RCF, sobre todo a partir de los recientes análisis de WMAP-9. Ajustando el modelo Λ CDM para los datos de WMAP-9, se encontró $H_0 = (70,0 \pm 2,2) \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ al 68 % [34]. Entonces, una de nuestras mejores estimaciones $H_0 = 69,92_{-2,15}^{+2,11} \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ a un NC de 68 % está en perfecto acuerdo con los valores reportados por WMAP-9 y los datos de Planck+WMAP+high L.

Nivel de confianza 2D para $Q = \alpha\rho'$			
Nº	Priors	Mejor ajuste	$\chi^2_{d.o.f}$
1	$(\Omega_b, \Omega_x, \Omega_m, \gamma_r, \gamma_m) = (0.049, 0.741, 0.209, 4/3, 1.005)$	$(H_0, \alpha) = (70,45_{-2,16}^{+2,13}, 0,00007_{-0,06000}^{+0,06604})$	0.709
2	$(\Omega_b, \Omega_x, \Omega_m, \alpha, \gamma_r) = (0.044, 0.744, 0.212, 0.00001, 4/3)$	$(H_0, \gamma_m) = (70,77_{-2,27}^{+2,29}, 1,005_{-0,048}^{+0,045})$	0.707
3	$(H_0, \Omega_b, \alpha, \gamma_r, \gamma_m) = (69, 0.0449, 0.0001, 4/3, 1.014)$	$(\Omega_x, \Omega_m) = (0,733_{-0,072}^{+0,068}, 0,222_{-0,107}^{+0,108})$	0.758
4	$(H_0, \Omega_m, \alpha, \gamma_r, \gamma_m) = (69, 0.222, 0.00001, 4/3, 1.014)$	$(\Omega_b, \Omega_x) = (0,045_{-0,104}^{+0,107}, 0,733_{-0,074}^{+0,070})$	0.758
5	$(H_0, \Omega_b, \Omega_m, \alpha, \gamma_r) = (69, 0.031, 0.210, 0.00001, 1.325)$	$(\Omega_x, \gamma_m) = (0,759_{-0,067}^{+0,066}, 1,049_{-0,460}^{+0,181})$	0.762
6	$(\Omega_b, \Omega_x, \alpha, \gamma_r, \gamma_m) = (0.053, 0.692, 0.00001, 4/3, 0.95)$	$(H_0, \Omega_m) = (69,92_{-2,15}^{+2,11}, 0,254_{-0,015}^{+0,014})$	0.757

Cuadro 9.2: Se muestra los resultados obtenidos para los niveles de confianza 2-D obtenidos en Fig. 9.1 variando dos parámetros cosmológicos.

Parámetros cosmológicos para $Q = \alpha\rho'$					
Nº	$q(z=0)$	$\omega_{effx}(z=0)$	$\omega_{effT}(z=0)$	$\Omega_x(z \approx 1100)$	$\Omega_x(z \approx 10^{10})$
1	-0.61	-0.9998	-0.7402	$4,0 \times 10^{-5}$	$1,5 \times 10^{-11}$
2	-0.59	-0.9999	-0.7428	$7,3 \times 10^{-6}$	$7,7 \times 10^{-12}$
3	-0.59	-0.9997	-0.7298	$7,0 \times 10^{-5}$	$7,8 \times 10^{-11}$
4	-0.59	-0.9990	-0.7301	$8,1 \times 10^{-6}$	$2,6 \times 10^{-11}$
5	-0.62	-0.9999	-0.7490	$8,8 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-10}$
6	-0.56	-0.9998	-0.7047	$6,1 \times 10^{-6}$	$3,5 \times 10^{-12}$

Cuadro 9.3: Se muestran los parámetros cosmológicos derivados de los valores mejor ajustados a los NC de 2-D obtenidos en la Tabla 9.2.

En este modelo analizaremos el comportamiento de los parámetros de densidad Ω_x, Ω_m y Ω_r , en los diferentes estadios del universo. Para valores cercanos a $z = 0$, ver Fig. 9.3, en particular, la energía oscura es la principal fuente responsable de la aceleración del universo. Lejos de $z = 0$ el universo está dominado por la materia oscura y en los primeros tiempos la componente de radiación es la que entra en acción, controlando toda la dinámica del universo alrededor de $z \simeq 10^3$ [cf. Fig. 9.4]. Como era de esperar la fracción de la radiación actualmente es despreciable; su valor varía en el rango $10^{-6} \leq \Omega_{r0} \leq 10^{-4}$.

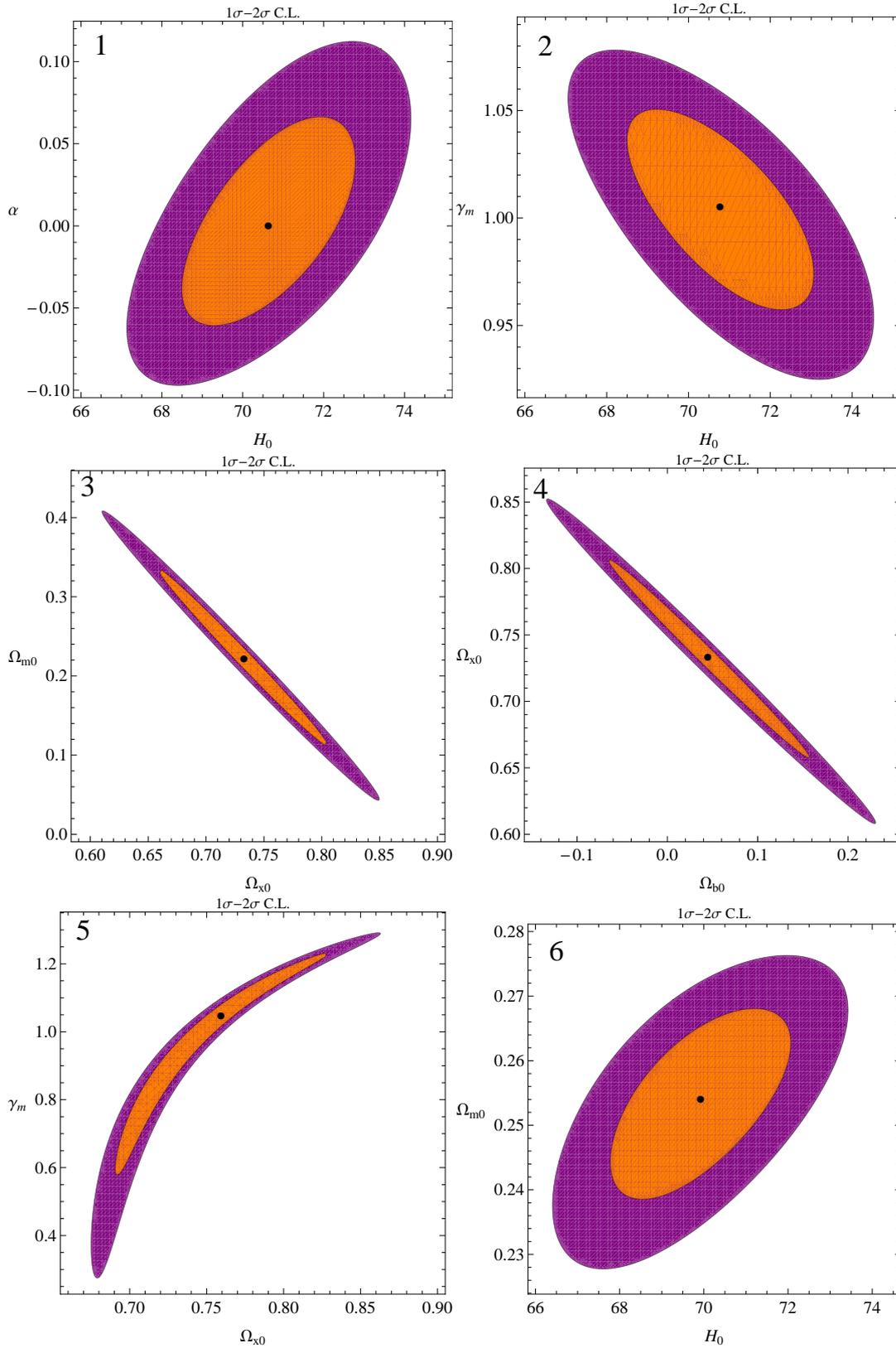


Figura 9.1: Niveles de confianza en 2-D asociados con 1σ , 2σ para diferentes planos de θ con la interacción $Q = \alpha\rho'$.

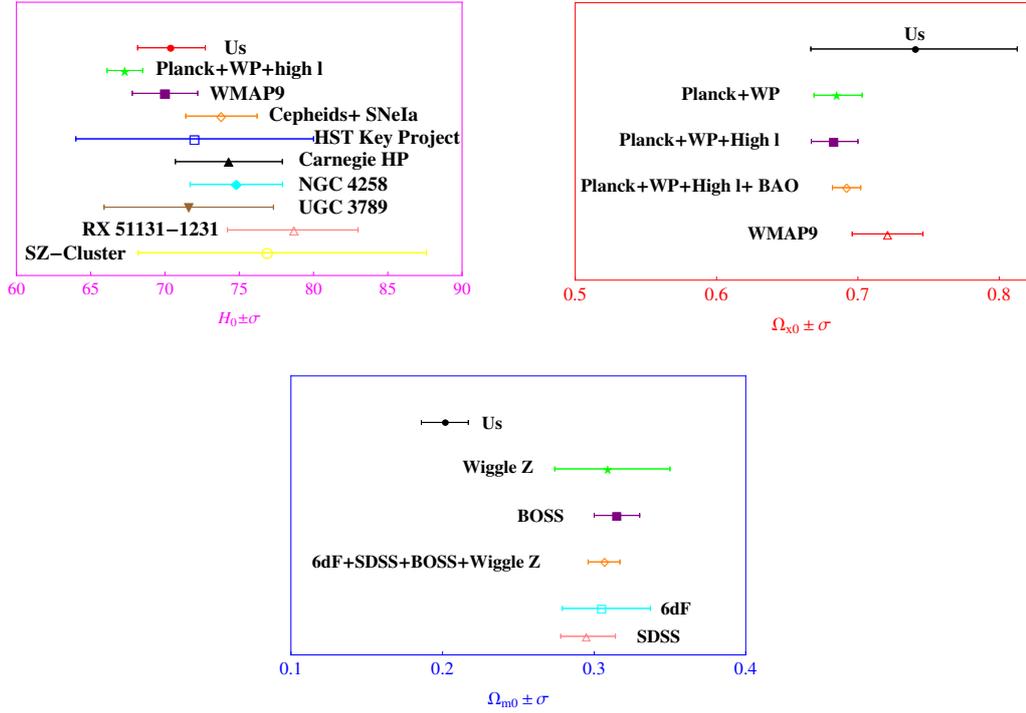


Figura 9.2: Comparación del parámetro de Hubble, y las cantidades de materia y energía oscura, con sus estimaciones de errores $\pm\sigma$, de un número diferente de métodos.

Existen otros parámetros cosmológicos relevantes [véase la Tabla 9.3], como el parámetro actual de desaceleración $q(z=0) = q_0$. La Figura 9.3 muestra el comportamiento del parámetro de desaceleración, de los parámetros de densidad y de la ecuación de estado, con el corrimiento al rojo. En particular, el valor actual de $q(z=0) \in [-0,62; -0,56]$ como se establece en el reporte de WMAP-9 [34]. La ecuación de estado total, $w_{effT} = -1 + \sum_j \gamma_j \Omega_j$, no cruza la barrera fantasma ni la ecuación de estado efectiva de la energía oscura, $w_{effT} = -[\alpha\rho' + \rho_x]/\rho_x$. Sus valores a $z=0$ varían sobre el siguiente intervalo $w_{effT0} \in [-0,749, -0,705]$ y para w_{effx0} se encuentra alrededor de $-0,99$ [ver Fig. 9.3].

En este trabajo, vamos a analizar otro tipo de restricción, que viene dada por la física detrás de la época de recombinación o la de nucleosíntesis del Big Bang [143] - [146], esto puede ser considerado como una herramienta complementaria para el examen de nuestro modelo. Como es bien sabido, la fracción de la energía oscura en la época de recombinación debe cumplir con el estricto límite $\Omega_x(z \simeq 1100) < 0,01$ [160], para que el modelo sea consistente con los datos observacionales de NBB. Parte de la luz sobre este tema, podría provenir de los modelos de energía oscura temprana (EOT), el descubrimiento de la naturaleza de la EO, con alto corrimiento al rojo, así como sus propiedades, dan una valiosa guía para la física detrás del reciente in-

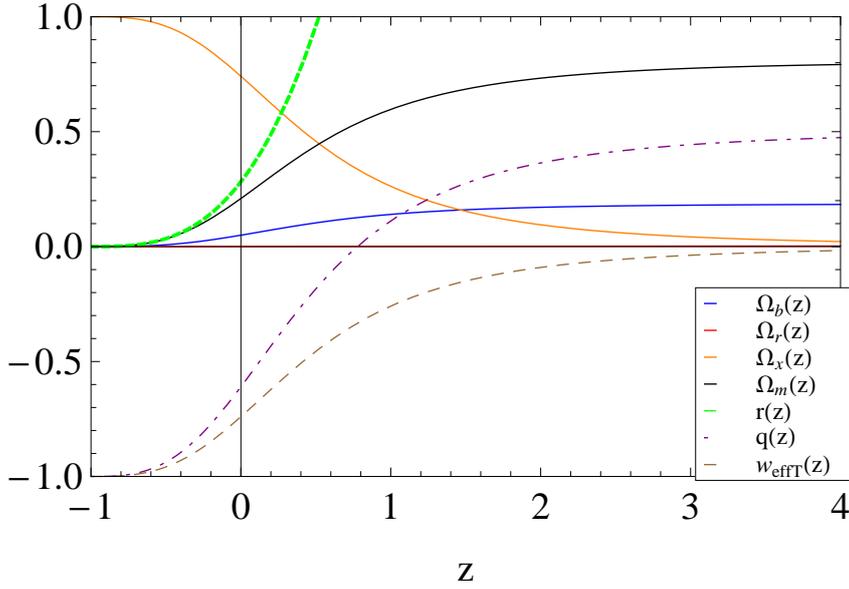


Figura 9.3: Gráfico de $\Omega_b(z)$, $\Omega_r(z)$, $\Omega_x(z)$, $\Omega_m(z)$, $r(z)$, $q(z)$ y $\omega_{effT}(z)$, usando el mejor ajuste de los valores obtenidos con los datos de Hubble para diferentes planos de θ .

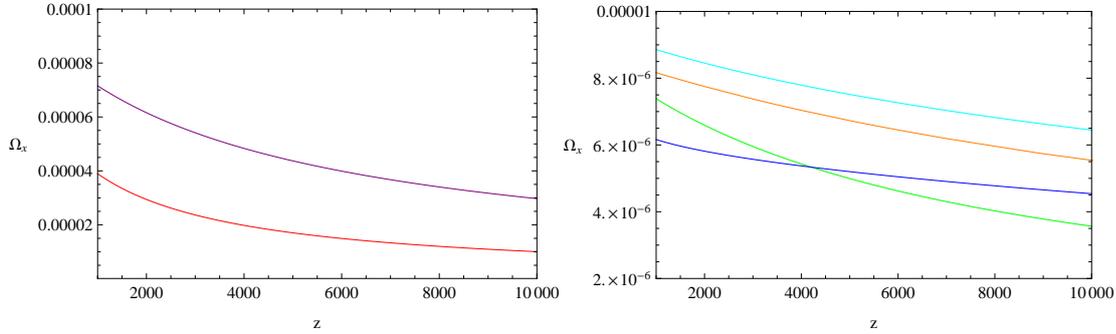


Figura 9.4: Gráfico de $\Omega_x(z)$ para $z \in [10^3, 10^4]$ usando los valores del mejor ajuste obtenidos con los datos de Hubble para diferentes planos de θ . En el gráfico de la izquierda, los colores rojo y púrpura corresponden a los casos 1 y 3 respectivamente. En el gráfico de la derecha, el caso 2 está en color verde, el caso 4 en naranja, el 5 en cian y el 6 en azul.

cremento en la velocidad del universo [161]. Las últimas restricciones a EOT vienen de los datos de Planck+WMAP+high L: $\Omega_{eot} < 0,009$ a un NC de 95 % [6]. En el futuro, las mediciones de la RCF pondrán restricciones adicionales sobre EOT. Hemos encontrado que $\Omega_x(z \simeq 10^3)$ cae sobre el intervalo $[10^{-6}, 10^{-5}]$, por lo que nuestras estimaciones satisfacen la cota reportada por la Misión Planck [véase la Tabla 9.3]. Además, WMAP7+SPT+BAO+SNe conduce a $\Omega_{eot} < 0,014$, y WMAP+SPT da

$\Omega_{eot} < 0,013$ [162]. Nuestro valor que cae sobre $\Omega_x(z \simeq 1100) \leq 10^{-6}$ a un nivel de 1σ , se encuentra por debajo de los límites alcanzados con el método de previsión aplicado al proyecto Euclides [29]; se espera que este estudio limite a $\Omega_{eot} < 0,024$. Además, el modelo cumple con la cota reportada del análisis en conjunto basado en los datos de Euclides+CMBPol, $\Omega_{eot} < 0,00092$ [véase la Tabla 9.3]. Nuestra estimación de $\Omega_x(z \simeq 1100)$ es menor que los límites obtenidos por el valor medio del enfoque estándar de la matriz de Fisher aplicado a los experimentos de Euclides y CMBPol [29], [163]. En la época de nucleosíntesis, alrededor de $z = 10^{10}$, tenemos que $\Omega_x \in [10^{-12}; 10^{-10}]$ al NC 1σ , por lo que el modelo está en concordancia con los procesos convencionales de NBB que ocurrieron a una temperatura de 1Mev [164].

Como es bien sabido, en los inicios del universo, la contribución más importante está dada por la densidad de energía de radiación, que se comporta como $\rho \propto (1+z)^4$, mientras que la contribución del sector oscuro es insignificante. Por otra parte, para un futuro distante ($z < 0$), la contribución dominante estará compuesta por la densidad de la energía oscura, mientras que las otras fuentes pueden ser ignoradas. Bajo el último límite, la densidad de la energía oscura del modelo se comporta como $\rho_x(z) = \Lambda \approx \alpha H^2(z) + C$. De esta manera, cuando $z \rightarrow -1$ el modelo va a un estadio de de Sitter, una era dominada por una constante cosmológica efectiva, $H \approx H_0 \sqrt{\Omega_{x0} + (1 - 1/(1 - \alpha))\Omega_{m0}}$. La restricción hecha para la interacción $Q = \alpha\rho'$, nos da una constante de interacción $\alpha = 0,00007_{-0,06000}^{+0,06604}$ que se superpone al encontrado en [66]. Aún así, vale la pena mencionar que este resultado indicaría que la interacción discutida es muy poco probable. Sin embargo, la ventaja de este modelo es que sólo propone la forma de la interacción entre los dos fluidos, y esto nos permite describir las características básicas de una cosmología temprana y final.

9.3.2. Modelo II

Minimizando la función χ^2 obtenemos los valores que mejor ajustan a las variables aleatorias $\theta_{II} = (H_0, \Omega_{b0}, \Omega_{x0}, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_m)$. Los parámetros que mejor ajustan θ_c son aquellos cuyos valores cumplen $\chi_{\min}^2(\theta_c)$ lo cual lleva al mínimo local de la distribución $\chi^2(\theta)$. Si la condición $\chi_{d.o.f}^2 = \chi_{\min}^2(\theta_c)/(N - n) \leq 1$ se satisface, entonces los datos son consistentes con el modelo considerado $H(z|\theta)$ [158].

Nivel de confianza 2D para $Q = \alpha\rho\rho'$			
N	Priors	Mejor ajuste	$\chi_{d.o.f}^2$
I	$(\Omega_{b0}, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_m) = (0,051, 0,219, 10^{-6}, 1,010)$	$(H_0, \Omega_{x0}) = (70,40_{-2,24}^{+2,31}, 0,73 \pm 0,01)$	0,725
II	$(\Omega_{b0}, \Omega_{x0}, \alpha, \gamma_m) = (0,049, 0,74, 10^{-7}, 1,014)$	$(H_0, \Omega_{m0}) = (70,79_{-2,19}^{+2,11}, 0,202_{-0,016}^{+0,015})$	0,703
III	$(\Omega_{x0}, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_m) = (0,74, 0,21, 10^{-7}, 1,014)$	$(H_0, \Omega_{b0}) = (70,79_{-2,17}^{+2,18}, 0,041_{-0,016}^{+0,015})$	0,703
IV	$(\Omega_{b0}, \Omega_{x0}, \Omega_{m0}, \gamma_m) = (0,049, 0,73, 0,220, 1,010)$	$(H_0, \alpha) = (70,30_{-2,04}^{+2,05}, [7,5_{-7,61}^{+7,21}] \times 10^{-7})$	0,724
V	$(H_0, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_m) = (69,04, 0,20, 10^{-7}, 1,036)$	$(\Omega_{b0}, \Omega_{x0}) = (0,059_{-0,107}^{+0,113}, 0,74_{-0,07}^{+0,07})$	0,753
VI	$(H_0, \Omega_{b0}, \Omega_{m0}, \alpha) = (68,5, 0,043, 0,205, 10^{-8})$	$(\Omega_{x0}, \gamma_m) = (0,77_{-0,06}^{+0,07}, 1,047_{-0,452}^{+0,192})$	0,794

Cuadro 9.4: Se muestra los resultados obtenidos para los niveles de confianza 2-D obtenidos en Fig. 9.5 variando dos parámetros cosmológicos.

Mission	Bound- on- $\Omega_x [z \simeq 10^3]$
Us	$\leq 0,000001$
Euclid	$< 0,024$
CMBPol	$< 0,0025$
SPT	$< 0,02$
WMAP7	$< 0,018$
WMAP7+ACT	$< 0,025$
WMAP7+SPT	$< 0,013$
WMAP7+SPT+BAO+SNe	$< 0,014$
Planck+WP	$< 0,010$
Planck+WP+high-L	$< 0,009$
Planck+Euclid	$< 0,0022$
CMBPol+Euclid	$< 0,00092$

Cuadro 9.5: Comparación de estimaciones diferentes o simultaneas de la fracción de energía oscura a tiempos tempranos.

Los NC de dos dimensiones obtenidos con una función estándar χ^2 de dos parámetros, se muestran en la Fig. 9.5, y la estimación de estos parámetros, se resume brevemente en la Tabla 9.4; donde se reportan las correspondientes barras de error marginal 1σ [159]. Encontramos el mejor ajuste a $(\Omega_{b0}, \Omega_{x0}) = (0,059_{-0,107}^{+0,113}; 0,74_{-0,07}^{+0,07})$ con $\chi_{d.o.f}^2 = 0,753$ a través del uso de los priores $(H_0, \Omega_{m0}, \alpha, \gamma_m) = (69,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}; 0,20; 10^{-7}; 1,036)$; los valores de Ω_{b0} y Ω_{x0} se encuentran de acuerdo con los datos obtenidos por Planck mission [6] y el proyecto WMAP-9 [34] [ver Fig. 9.2]. En efecto, los datos de Planck+WMAP indican que $\Omega_{x0} = 0,685_{-0,016}^{+0,018}$ a un NC de 68%; los datos de Planck+WMAP+high L conducen a $\Omega_{x0} = 0,6830_{-0,016}^{+0,017}$ a 68% de NC [6] [ver Fig. 9.2]. Obtenemos el mejor ajuste a $(H_0, \Omega_{m0}) = (70,79_{-2,19}^{+2,11} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, 0,202_{-0,016}^{+0,015})$ junto con $\chi_{d.o.f}^2 = 0,703 < 1$. En el caso de la materia oscura, los datos de WiggleZ dan $\Omega_{m0} = 0,309_{-0,035}^{+0,041}$ mientras que los datos en conjunto 6dF+SDSS+ BOSS+ WiggleZ conducen a $\Omega_{m0} = 0,307_{-0,011}^{+0,010}$ a un NC de 68% [6], mostrando una discrepancia sobre Ω_{m0} no mayor que el 0,32% [ver Figs. 9.2 y 9.6]. El análisis lleva a $(\Omega_{x0}, \gamma_m) = (0,77_{-0,06}^{+0,07}, 1,047_{-0,452}^{+0,192})$, señalando que la materia oscura no es un fluido sin presión siempre que el índice de barotrópico sea mayor que la unidad [ver Tabla 9.4]. En cuanto el parámetro de Hubble, nos encontramos con que varía en un intervalo, $H_0 \in [70,30_{-2,04}^{+2,05}; 70,79_{-2,17}^{+2,18}] \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Ajustando el modelo Λ CDM para los datos de WMAP-9, encontramos $H_0 = (70,0 \pm 2,2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a un NC de 68% [34], que concuerda con nuestra mejor estimación $H_0 = 70,30_{-2,04}^{+2,05} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a un NC de 68%. En la Fig. 9.2, se muestran las bandas de H_0 que incluyen los datos de las mega bases NGC4258, SZ clusters, y otras (ver Ref. [6]). En la Figura 9.6 se muestra el parámetro de desaceleración, los parámetros de densidad, y las ecuaciones de estado con el corrimiento al rojo. El valor actual de $q(z=0) \in [-0,62; -0,59]$ como se establece en el reporte de WMAP-9 [34]. Nuevamente, la ecuación de estado total, $w_{\text{eff}} = -1 + \sum_j \gamma_j \Omega_j$, no

cruza la línea fantasma, tampoco lo hace la ecuación de estado para la energía oscura efectiva, $w_{\text{eff}x} = -[\alpha\rho\rho' + \rho_x]/\rho_x$. Los valores a $z = 0$ varían sobre los intervalos, $w_{\text{eff}0} \in [-0,74, 0,72]$ y $w_{\text{eff}x0} \in [-0,99, -0,97]$, respectivamente.

Un modelo de interacción materia oscura-EVV tiene que ser restringido con la física detrás de las épocas de recombinación o la nucleosíntesis de Big Bang [143], [144], [145]. Como ya se mencionó, la fracción de energía oscura en la etapa de recombinación debe cumplir la estricta condición $\Omega_{\text{eot}} = \Omega_x(z \simeq 1100) < 0,01$. Las mediciones futuras de la RCF pondrán restricciones adicionales sobre la energía oscura temprana; las últimas restricciones sobre la EOT vienen de los datos de Planck+WMAP+high L: $\Omega_{\text{eot}} < 0,009$ con un NC de 95% [6]. Encontramos que $\Omega_x(z \simeq 10^3) \in [10^{-6}, 10^{-5}]$, por lo que nuestras estimaciones satisfacen el reporte dado por Planck misión [véase la Tabla 9.5]. Además, la medición de la temperatura de la RCF, a pequeña escala, desde el SPT mejora sobre WMAP-7 solo por un factor de 3.5 [182], mientras WMAP7+SPT+BAO+SNe conduce a $\Omega_{\text{eot}} < 0,014$, y WMAP+SPT da $\Omega_{\text{eot}} < 0,013$ [162]. Nuestro valor de $\Omega_x(z \simeq 1100) \leq 10^{-6}$ al nivel de 1σ está por debajo de los límites alcanzados con el método de pronóstico aplicado al proyecto Euclides [29]; este estudio será capaz de limitar a $\Omega_{\text{eot}} < 0,024$. Este modelo cumple con los límites reportados por los datos en conjunto de Euclides+CMBPol, $\Omega_{\text{eot}} < 0,00092$ [ver la Tabla 9.5]. Nuestra estimación sobre $\Omega_x(z \simeq 1100)$ es mucho menor que aquella obtenida por el valor medio del enfoque estándar de la matriz de Fisher aplicado a los experimentos de Euclides y CMBPol [29], [163]. Alrededor de $z = 10^{10}$ (NBB), obtenemos que $\Omega_x \in [10^{-34}; 10^{-33}]$ al nivel de 1σ , por lo que los procesos de NBB convencionales que se produjeron a una temperatura de 1MeV, se cumplen [164].

9.4. El problema de la edad

Bajo la hipótesis de que el universo no puede ser más joven que sus componentes (véase [165]), dirigimos nuestra atención hacia el problema de la edad del universo. El problema de la edad se vuelve serio cuando consideramos la edad del universo a un gran corrimiento al rojo. Algunos de los objetos viejos descubiertos, poseen un alto corrimiento al rojo (OHROs por sus siglas en inglés), por ejemplo, los 3,5 Gyr de la vieja galaxia LBDS 53W091 con un corrimiento al rojo de $z = 1,55$ [166], [167], los 4,0 Gyr de la vieja galaxia LBDS 53W069 con $z = 1,43$ [168], los 4,0 Gyr de la vieja galaxia en radio 3C 65 a $z = 1,175$ [169], y el alto corrimiento al rojo del quasar B1422+231 a $z = 3,62$ cuyo mejor ajuste para la edad es de 1,5 Gyr con un límite inferior de 1,3 Gyr [170]. Además, el viejo quasar APM 08279+5255 a $z = 3,91$, cuya edad se estima entre 2,0 – 3,0 Gyr [171], [172], el cual es utilizado ampliamente. Para esta edad cósmica, seguimos la Ref. [173] y utilizamos el límite inferior estimado en 2,0 Gyr a $z = 3,91$. Para dar más solidez a nuestro análisis, utilizamos los datos de rayos gamma en 0,62 Gyr GRB 090423, a un corrimiento al rojo de $z = 8,2$ [174], [175] detectada por el Telescopio Burst Alert (BAT, por sus siglas en inglés) en el satélite Swift en 2009. Hay algunos trabajos que han examinado

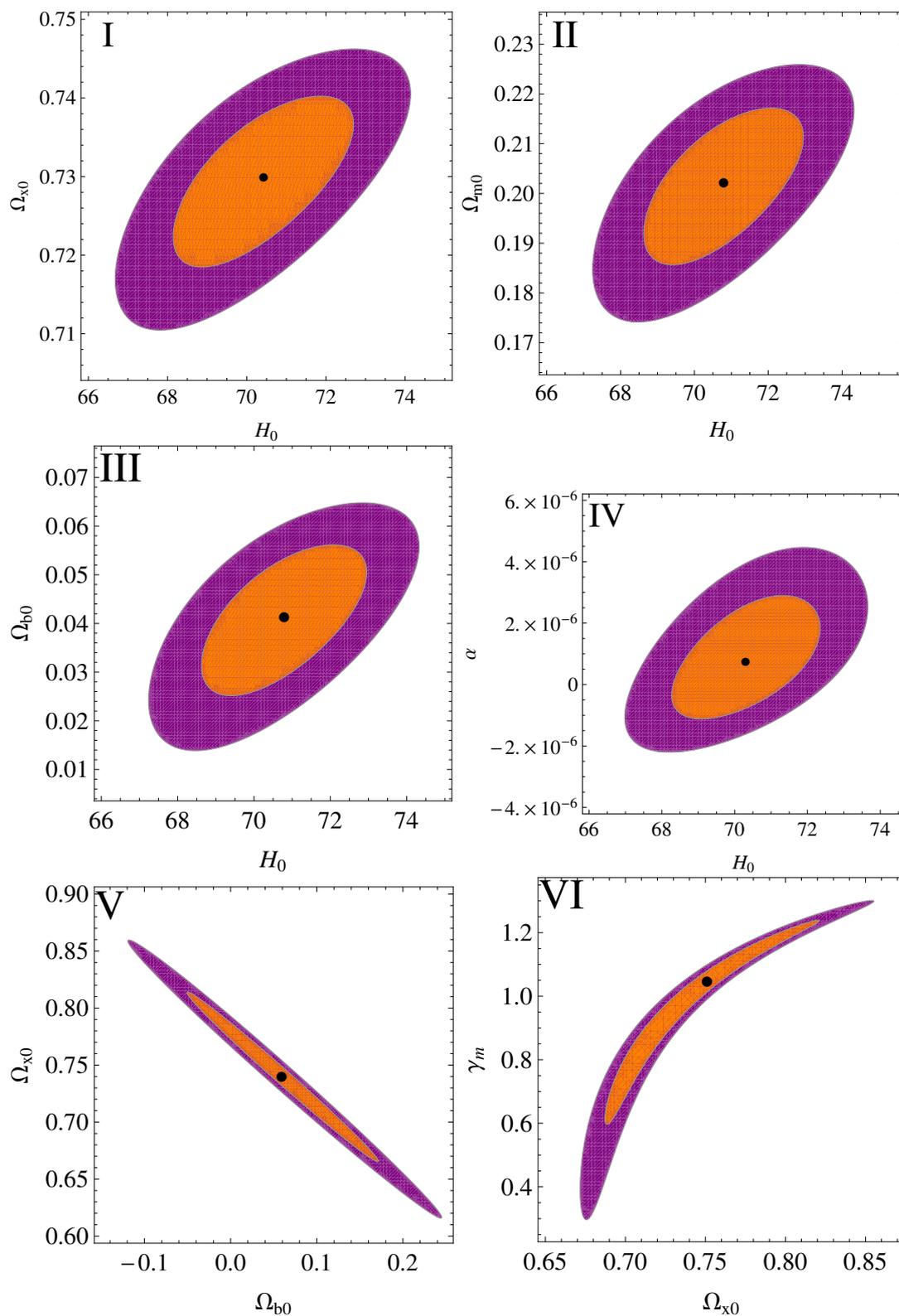


Figura 9.5: Niveles de confianza en 2-dimensiones asociados con 1σ , 2σ para diferentes planos de θ con la interacción $Q = \alpha\rho\rho'$.

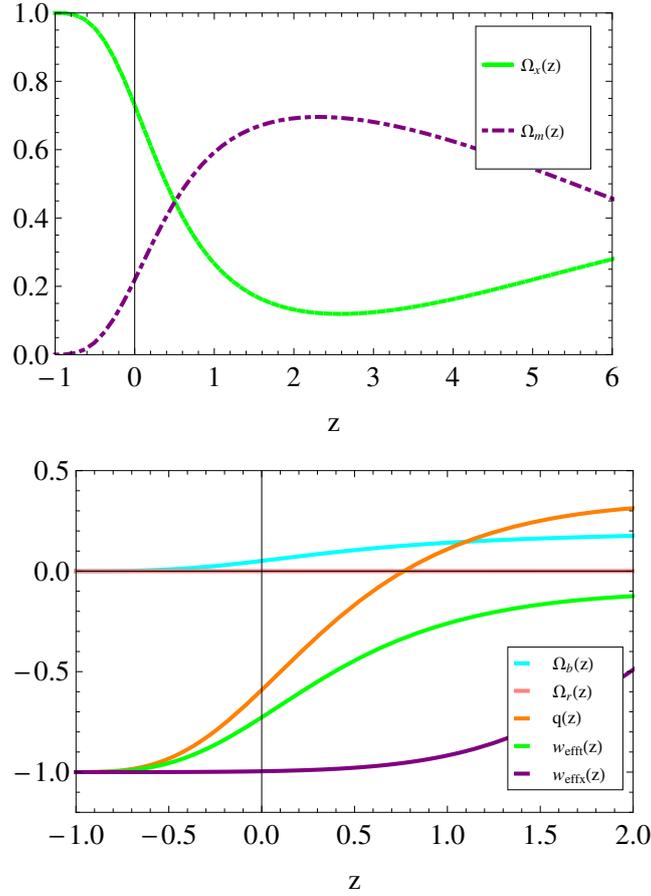


Figura 9.6: Panel de arriba: se gráfica Ω_x y Ω_m en términos del corrimiento al rojo z . Panel de abajo: se gráfica Ω_b , Ω_r , w_{eff} , w_{effx} , y q en términos de z .

el problema de la edad cósmica en el marco de los modelos de energía oscura, ver por ejemplo, [165], [176]- [179] y sus referencias. En esta sección, nos gustaría tener en cuenta el problema de la edad en un modelo de interacción en el sector oscuro.

Dado un modelo cosmológico, la edad cósmica de nuestro universo a un corrimiento al rojo z se puede obtener a partir del parámetro de edad adimensional

$$T_z(z) = H_0 t(z) = H_0 \int_z^\infty \frac{dz'}{(z'+1)H(z')}. \quad (9.19)$$

A cualquier corrimiento al rojo, la edad cósmica del universo debe ser mayor o igual que la edad del objeto más viejo a un gran corrimiento al rojo

$$T_z(z) \geq T_{\text{obj}} = H_0 t_{\text{obj}}, \text{ or } S(z) = \frac{T_z(z)}{T_{\text{obj}}} \geq 1, \quad (9.20)$$

donde t_{obj} es la edad del OHRO. Vale la pena señalar que a partir de la Ec. (9.19), $T_z(z)$ es independiente de la constante de Hubble H_0 . Por el contrario, a partir de la

Ec. (9.20), T_{obj} es proporcional a H_0 que consideramos como los H_0 corespondientes a cada uno de los casos analizados.

En la Tabla 9.6, mostramos la relación $S(z) = T_z(z)/T_{obj}$ a los corrimientos al rojo $z = 1,175; 1,43; 1,55; 3,62; 3,91; 8,2$ teniendo en cuenta los valores de mejor ajuste obtenidos en la última sección. Nos encontramos con que $T_z(z) > T_{obj}(z)$ a $z = 1,175; 1,43; 1,55; 3,62; 8,2$, pero $T_z(z) < T_{obj}(z)$ a $z = 3,91$, por lo que el viejo quasar APM 08279+5255 no puede ser acomodado como los demás objetos viejos. Esto se repitió para todos los casos (véase la Tabla 9.6). Para este modelo, como lo es para el modelo Λ CDM u otros modelos [173], [180], [181], el problema de la edad podría ser aliviado teniendo en cuenta otro tipo de interacción, por ejemplo, una interacción no-lineal entre las componentes oscuras y relajando levemente la condición de planitud. Este hecho será explorado en un trabajo futuro.

N°	$S(1,175)$	$S(1,43)$	$S(1,55)$	$S(3,62)$	$S(3,91)$	$S(8,2)$	t_0
1	1.3425	1.1486	1.2255	1.1928	0.8167	1.0237	$13,840^{+0,121}_{-0,070}$
2	1.3462	1.1519	1.2291	1.1974	0.8199	1.0294	$13,852^{+1,006}_{-0,905}$
3	1.3356	1.1408	1.2164	1.1757	0.8045	1.0029	$13,948 \pm 2,180$
4	1.3355	1.1408	1.2163	1.1757	0.8045	1.0033	$13,949 \pm 2,671$
5	1.3107	1.1147	1.1861	1.1153	0.7609	0.9201	$13,911 \pm 1,110$
6	1.3776	1.1854	1.2681	1.2809	0.8806	1.1514	$13,944 \pm 0,412$

Cuadro 9.6: Se muestra el radio $S(z) = T_z(z)/T_{obj}$ a $z = 1,175; 1,43; 1,55; 3,62; 3,91; 8,2$ y la edad actual del universo (en Gyr) para los seis casos analizados.

En la Tabla 9.6, vemos que el valor de S a $z = 3,91$ es de alrededor de 0,8, para todos los casos, lo que se encuentra lejos de poder resolver el problema de la edad cósmica. Además, la Fig. 9.7 muestra las curvas $T(z)$ para todos los casos analizados. Para el caso 1 corresponde la curva de color rojo, para el caso 2 el verde, el caso 3 el púrpura, el caso 4 el naranja, el 5 el cian y para el caso 6 el azul, mientras los puntos negros corresponden a la edad adimensional de los OHROs bajo la asunción de $H_0 = 70,63 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

Adicionalmente, hemos calculado la edad actual del universo t_0 en unidades Gyr, los valores obtenidos $t_0 \in [13,840^{+0,121}_{-0,070}; 13,949 \pm 2,671]\text{Gyr}$ están en concordancia con los datos actuales estimados por Planck Mission [6] o con los datos procedentes del proyecto WMAP-9 [34] [ver tabla 9.6]. De hecho, los datos de Planck+WMAP indican que la edad cósmica actual es $13,817 \pm 0,048 \text{ Gyr}$ a un NC de 68 %, los datos de Planck+WMAP+high L dan $13,813 \pm 0,047 \text{ Gyr}$ a un NC de 68 %, mientras que el análisis estadístico conjunto sobre Planck+WMAP+high L+BAO da $13,798 \pm 0,037 \text{ Gyr}$ a 1σ de nivel de confianza [6]. Un valor bajo de t_0 se ha encontrado en el reciente análisis de WMAP-9, $13,75 \pm 0,12 \text{ Gyr}$ [34].

En esta sección, sólo hemos analizado el modelo con una interacción entre la materia y la energía oscura, dada por $Q = \alpha\rho'$. No hemos estudiado el caso $Q = \alpha\rho\rho'$ ya que su resolución numérica resulta más compleja que el modelo lineal, dejando esto como un posible análisis en un trabajo futuro.

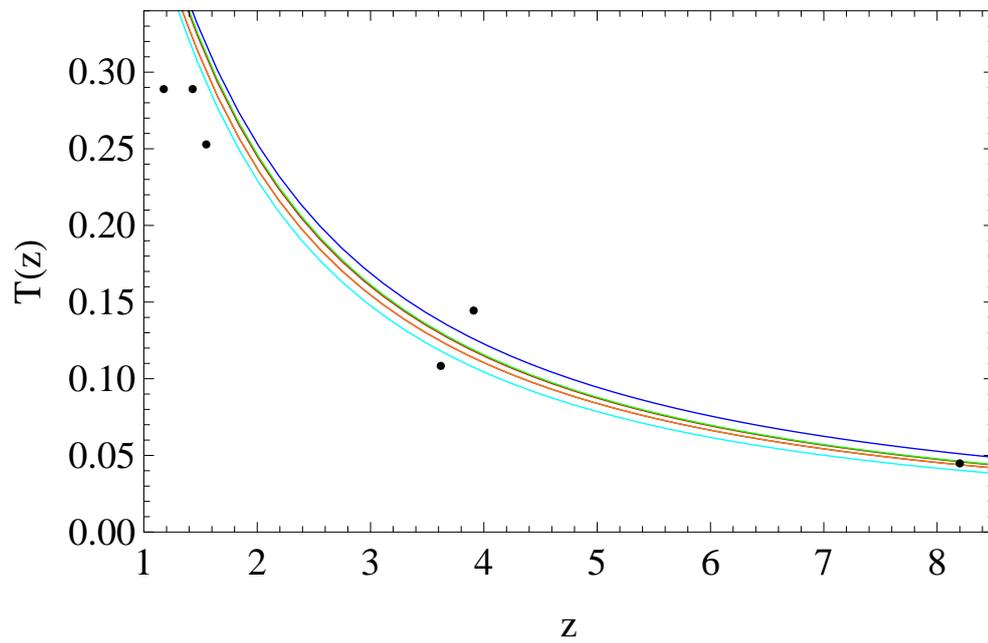


Figura 9.7: La edad cósmica T en función del corrimiento al rojo z . El gráfico muestra las seis curvas de edad cósmica para los casos 1 – 6. Los puntos negros representan la edad sin dimensiones de OHROs, bajo el supuesto de $H_0 = 70,63 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, que corresponde al caso 1.

Capítulo 10

Síntesis y Conclusiones

En la presente tesis doctoral se estudiaron ciertas temáticas de especial relevancia en la cosmología moderna. Nuestra atención se centra principalmente, por un lado, en el estudio de campos escalares, campos de taquiones, a través de simetrías internas en las ecuaciones de Einstein, y cómo estos afectan la dinámica del universo. Por otro lado, también se ha estudiado la interacción de dos fluidos en el sector oscuro, analizando el comportamiento de estas componentes en diferentes etapas de la expansión.

En el Capítulo 5, hemos presentado las simetrías de invarianza de forma, que conservan la forma de las ecuaciones de EKG, para un universo de FRW espacialmente plano y hemos mostrado que la TIF tiene estructura de grupo de Lie. Centramos nuestras investigaciones en la transformación de invarianza de forma lineal generada por $\bar{\rho} = n^2\rho$ para mostrar de una manera muy intuitiva la dualidad existente entre una cosmología que se contrae y otra que se expande. Hemos encontrado la solución exacta para un fluido perfecto con la ecuación de estado lineal.

Resumiendo, hemos utilizado la estructura de grupo de Lie de la SIF contenida en las ecuaciones de Einstein y utilizado una representación lineal de este grupo, generada por la transformación $\bar{\rho} = n^2\rho$. Hemos aplicado la TIF inducida a una cosmología semilla y se ha mostrado cómo obtener un gran conjunto de cosmologías impulsadas por un campo escalar, evitando el cálculo de la integración directa de las ecuaciones de campo de EKG [101].

Como parte de una investigación a largo plazo [101], [140] hemos demostrado aquí que las transformaciones de invarianza de forma se pueden utilizar como herramientas para la generación de nuevas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein. En este caso, mostrando la existencia de dos nuevas clases de campos de taquiones. Estos taquiones extendidos se derivaron del campo estándar de taquiones ($0 < \gamma < 1$): el campo de taquiones complementario ($1 < \gamma$) y el taquíon fantasma ($\gamma < 0$), lo que confirma el trabajo realizado por [24]. Además, hemos visto que las transformaciones de invarianza de forma nos permiten pasar de un universo estático de Einstein inestable a uno estable [111], [112].

En particular, hemos aplicado el método para la obtención de campos de taquiones fantasma y complementarios en cosmologías de FRW, poniendo el acento en

campos que van como una ley de potencia generados por un potencial que cae como el campo al cuadrado. Hemos encontrado que la TIF transforma los factores de escala semilla de $a = kt^\delta$ en soluciones que van como $a = k^n t^{n\delta}$. A modo de ejemplo, si partimos de un modelo desacelerado con $2/3 < \delta < 1$, podemos conseguir un modelo tipo ley de potencia inflacionario con $\delta > 1$ o un (modelo phantom) modelo super acelerado con $\delta < 0$. Por lo tanto, hemos demostrado cómo TIF generan nuevas cosmologías a partir de una solución semilla.

Además, en el Cap. 7, siguiendo la línea del estudio de campos de taquiones, hemos analizado el espectro de potencia para los modelos de taquiones presentados en [94], a través de métodos numéricos, mediante la utilización de las Ecs. (7.21) como condiciones iniciales. Los resultados obtenidos refuerzan la idea de la referencia [94] de que los taquiones complementarios pueden ser de interés desde el punto de vista cosmológico. El espectro de potencia del taquión estándar y el complementario se comparó con el espectro del modelo Λ CDM, teniendo en cuenta que los parámetros cosmológicos se encuentren en acuerdo con los obtenidos en WMAP-9 [34] y la Misión Planck [6]. Se encontró que ambos espectros son cuantitativamente diferentes y se pueden distinguir, incluso para los pequeños valores de la constante cosmológica Λ . El espectro de potencia obtenido depende fuertemente del valor del índice barotrópico γ_0 del campo de taquiones en consideración, aunque el comportamiento cualitativo de la curva del espectro de potencia es similar para todos los casos. Por ejemplo, el espectro de potencia para el caso con $\gamma_0 = 3/4$ difiere en varios órdenes de magnitud de uno con un $\gamma_0 = 0,99$. También hemos encontrado que el modelo de taquiones que mejor concuerda, el espectro de potencia, con el modelo de la concordancia es el que posee índice barotrópico $\gamma_0 = 1,91$, el cual corresponde a un taquión complementario. Las curvas para el espectro de potencia correspondiente a $\gamma_0 < 1,91$ se encuentran estrictamente por debajo del modelo Λ CDM, mientras que lo contrario es válido para $1,91 < \gamma_0 < 2$. Nuestros resultados sugieren que puede ser interesante el estudio de otras consecuencias cosmológicas de los modelos de taquiones complementarios. Dejamos esto para una investigación futura.

Por otro lado, en parte del Capítulo 9, hemos investigado cosmologías que presentan dos fluidos en interacción en el sector oscuro, y dos componentes desconectadas, una que podría imitar un término de radiación y el otra que es una componente bariónica. Hemos hallado las cotas para el conjunto de los parámetros cosmológicos mediante el uso de los datos observacionales actualizados del Hubble (ver Tabla 9.1) y los severos límites a la energía oscura, impuestos por las distintas observaciones, que se encuentran en los primeros tiempos del universo. Hemos introducido una interacción lineal entre la materia oscura y la densidad de energía oscura, que es proporcional a la derivada de la densidad de energía del sector oscuro, $Q = \alpha\rho'$, que permite resolver la ecuación de la fuente para la densidad total de energía en dicho sector. El modelo interpola entre una era dominada por la radiación en los primeros tiempos y una fase de de Sitter en un futuro lejano, pasando a través de un régimen de materia oscura fría.

En el lado observacional, en el caso de NC 2D, hemos hecho seis restricciones estadísticas con los datos actualizados del Hubble [ver Fig. 9.3 y la Tabla

9.2]. Usando los priores $(H_0, \Omega_b, \alpha, \gamma_r, \gamma_m) = (69, 0,0449, 0,0001, 4/3, 1,014)$, los valores de mejor ajuste para los parámetros actuales de densidad están dados por $(\Omega_{x0}, \Omega_{m0}) = (0,733_{-0,072}^{+0,068}, 0,222_{-0,107}^{+0,108})$; por lo que los resultados obtenidos están de acuerdo con los datos publicados por Planck Mission [6] o con los datos procedentes del proyecto WMAP-9 [34] [ver Fig. 9.2]. Además, se encontró que $H_0 \in [69,92_{-2,15}^{+2,11}; 70,77_{-2,27}^{+2,29}] \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ de manera que estos valores caen dentro del NC de 1σ reportado por Planck+WMAP+high L [6] y del reciente análisis del WMAP-9 [34]. Uno de los valores de mejor ajuste del índice barotrópico de la materia oscura, $\gamma_m = 1,049$, tiene una pequeña diferencia con el índice de un fluido considerado polvo, $\gamma = 1$, por lo que la materia oscura en este caso podría considerarse un fluido con presión distinta de cero. Por otra parte, el parámetro de desaceleración actual obtenido $q(z = 0) \in [-0,62, -0,56]$ se encuentra de acuerdo con [34] y la ecuación estado total en la actualidad, $w_{effT}(z = 0) \in [-0,749, -0,705]$; de hecho, $-1 \leq w_{effT} \leq 0$, y por lo tanto no atraviesa la barrera fantasma [ver Fig. 9.3], mientras que la fracción de radiación en el momento actual Ω_{r0} varía entre 2×10^{-6} a 0,0001 para los seis casos que se mencionan en la Tabla 9.2. Además, el resultado obtenido para el factor α mostró que la interacción asociada es muy poco probable. Un análisis más detallado sobre este tema podría hacerse con la modificación de algún parámetro - como el prior correspondiente al índice barotrópico γ_m - y analizar cómo repercute sobre el valor de α .

También hemos limitado el comportamiento de la energía oscura en la era de la recombinación y la comparamos con las últimas cotas observacionales, procedentes de los datos de Planck+WMAP+high L, SPT, y ACT, entre otras observaciones. Hemos encontrado que $\Omega_x(z \simeq 10^3) \in [10^{-6}, 10^{-5}]$, por lo tanto, nuestras estimaciones satisfacen las estrictas cotas reportadas por Planck Mission, $\Omega_{eot} < 0,009$ a un NC de 95 % [6] [véase la Tabla 9.3] y también estuvo de acuerdo con la medición de la temperatura de la RCF a pequeña escala realizada por SPT [182] o con el límite superior establecido por los datos de WMAP-7+SPT+BAO+SNe [162]. Por otra parte, el valor de $\Omega_x(z \simeq 10^3)$ obtenido en este trabajo es consistente con las futuras restricciones alcanzables por los experimentos Euclides y CMBPol, [29], [163]. Alrededor de $z = 10^{10}$, en la época de nucleosíntesis primordial, la energía oscura encontrada cumple con el límite superior fuerte $\Omega_x(z \simeq 10^{10}) < 0,04$ a un NC de 68 % [164], por lo que los procesos estándar de NBB y la bien medida abundancia de elementos ligeros, no presentan conflicto, entre lo esperado por el modelo y las observaciones.

Además, hemos obtenido que la edad del universo $t_0 \in [13,840_{-0,070}^{+0,121}, 13,949 \pm 2,671]$ Gyr que se encuentra de acuerdo con lo reportado por el proyecto WMAP-9 [34] y el reportado por la Misión Planck, [6].

Por último, también en el Cap. 9, hemos estudiado la interacción entre materia oscura y EVV junto con las componentes de bariones y de fotones desacoplados en un universo de FRW plano. La nueva interacción no lineal en el sector oscuro, dada por $Q = \alpha\rho\rho'$, nos permitió interpolar entre un régimen de materia oscura tibia en los primeros tiempos, después de la etapa dominada por la radiación inicial, y terminando, al igual que la interacción lineal, en una fase de de Sitter.

El análisis estadístico realizado con los datos del Hubble actualizados [ver Figuras 9.5 - 9.6 y la Tabla 9.4], nos permitió estudiar el comportamiento de la energía oscura en la era de la recombinación y compararla con los últimos límites procedentes de los datos de Planck+WMAP+high L, SPT, y ACT, entre otros experimentos. Hemos encontrado que $\Omega_x(z \simeq 10^3) \in [10^{-6}, 10^{-5}]$, por lo que nuestras estimaciones satisfacen los estrictos límites reportados por la Misión Planck, $\Omega_{eot} < 0,009$ a un NC de 95 % [6] [véase la Tabla 9.5], que también se encuentra de acuerdo con la medición de la temperatura de la RCF a pequeña escala proveniente de SPT [182] o con el límite superior establecido por los datos WMAP-7+SPT+BAO+SNE [162]. Además, el valor $\Omega_x(z \simeq 10^3) \simeq 10^{-6}$ obtenido aquí será compatible con las futuras restricciones alcanzables por los experimentos Euclides y CMBPol, [29], [163]. También se puso de manifiesto que la energía oscura alrededor de $z = 10^{10}$ (NBB) cumple el límite superior fuerte de $\Omega_x(z \simeq 10^{10}) < 0,04$ en el nivel 1σ [164], por lo que nuevamente los procesos estándar de NBB y las mediciones de la abundancia de elementos ligeros no son perturbados. Queda, para una posible parte de un trabajo futuro, el estudio y el cálculo de la edad del universo, a través de alguna herramienta numérica que permita resolver dichas ecuaciones.

En el Cap. 9 hemos podido estudiar fluidos en interacción en el sector oscuro, con una interacción lineal de la forma $Q = \alpha\rho'$ y una interacción no lineal $Q = \alpha\rho\rho'$. En las etapas del universo donde la densidad de radiación y de materia bariónica pueden ser despreciadas en relación a la densidad del sector oscuro, las ecuaciones para la densidad de energía oscura ρ_x , que escritas en términos del parámetro de Hubble, quedan $\rho_x \simeq \Lambda(H) \simeq \mathcal{C} + \alpha 3H^2$ y $\rho_x \simeq \Lambda(H) \simeq \mathcal{D} + \alpha 3H^4$, respectivamente. Ambas constantes cosmológicas variables han sido estudiadas, con menor profundidad, en [66], [147] y [148], pero no fueron derivadas de dos fluidos en interacción como en estos casos, Refs. [27] y [28].

Como parte del trabajo futuro, siguiendo esta línea, se prevé realizar un análisis comparativo entre ambos modelos en interacción, a través del cálculo de los parámetros *Statefinder*. Además de ser posible estudiar otros tipos de interacción, buscando aliviar el problema de la coincidencia. También se puede mejorar el método de análisis computacional, a través de la utilización de lenguajes de programación más versátiles, como el FORTRAN o el C++. Permitiendo la incorporación de nuevas bases de datos observacionales, para hacer el análisis estadístico más restrictivo, por ejemplo, los datos de la RCF o de las OAB, entre otros.

Publicaciones a las que dio origen esta tesis

- Iván Sánchez G., Osvaldo P. Santillán, *Power spectra in extended tachyon cosmologies*, [arXiv:1502.01060].
- Iván Sánchez G., *Extended tachyon field using form invariance symmetry*, Phys. Rev. D **90**, 027308 (2014).
- Iván Sánchez G., *Dark matter and variable vacuum energy*, General Relativity and Gravitation **46**, 1769 (2014).
- Luis P. Chimento, Martín G. Richarte, Iván Sánchez G., *Interacting Dark Sector with Variable Vacuum Energy*, Physics Rev. D **88**, 087301 (2013).
- Luis P. Chimento, Martín G. Richarte, Iván Sánchez G., *Form Invariance Symmetry Generates a Large Set of FRW Cosmologies*, Modern Physics Letter A **28**, 1250236 (2013).

Índice de figuras

2.1.	Mapa de la radiación del fondo de microondas medida por WMAP. La diferencia máxima entre los puntos azules y rojos es de unos $400\mu K$.	22
2.2.	Geometría espacial del universo. Con $\kappa = 1$ corresponde a un universo cerrado, $\kappa = -1$ a uno abierto y $\kappa = 0$ a uno plano.	23
2.3.	Datos observacionales de la RCF obtenidos por COBE y ajustados por un espectro de cuerpo negro.	29
2.4.	Se muestran las curvas de las predicciones teóricas de abundancia de elementos contra la densidad de bariones.	31
3.1.	Conjunto de datos Union2: módulo de distancia con barras de error como función del corrimiento al rojo.	42
3.2.	Conjunto de datos Union2 y las curvas teóricas para una cosmología plana. En amarillo domina materia y radiación, $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 1$ y $\Omega_{x0} = 0$; en verde, $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 0,28$ y $\Omega_{x0} = 0,72$; en rojo $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} = 0,01$ y $\Omega_{x0} = 0,99$.	42
3.3.	Espectro de potencia angular de la anisotropía en la temperatura de la RCF como función de los multipolos l según mediciones de WMAP, Acbar, Boomerang, CBI y VSA.	44
3.4.	Contornos de probabilidad en el plano $\Omega_{\Lambda} - \Omega_m$ obtenido con la base de datos de RCF, SNe y OAB.	46
3.5.	Función de correlación con curvas teóricas para $\Omega_b h^2 = 0,024$ para diferentes $\Omega_m h^2$, $\Omega_m h^2 = 0,12$ (curva de arriba), $\Omega_m h^2 = 0,13$ (la segunda curva), $\Omega_m h^2 = 0,14$ (la tercera) y con $\Omega_b = 0$ (la más baja).	47
3.6.	Curvas del espectro de potencias de las OAB.	48
4.1.	Los puntos son los resultados observados de la velocidad de rotación en la galaxia NGC 3198, comparados con los valores esperados.	54
4.2.	Espectro de potencia de las anisotropías de la RCF, para distintos valores de Ω_b y Ω_{dm} , comparados con los datos obtenidos por WMAP-7.	56
4.3.	Se muestra la evolución de las densidades de energías de materia oscura fría (curva verde), radiación (curva roja) y energía oscura (curva negra).	62

5.1.	Las líneas continuas representan el factor de escala $a = t^{ n }$, con $0 < n < 1$, para el universo cosmológico estándar. Mientras que las punteadas, representan dos nuevas soluciones obtenidas a través de las TIF, dadas por $a = t^{- n }$	73
7.1.	Gráfico del factor de escala cósmico como función del tiempo para el campo de taquiones estándar ($\gamma_0 = 3/4$ y $\gamma_0 = 0,99$) y el complementario ($\gamma_0 = 1,01$ y $\gamma_0 = 1,91$).	96
7.2.	Gráfico de los espectros de potencia adimensionales como función de k a $a = 1$, para los campos de taquiones estándar ($\gamma_0 = 3/4$ y $\gamma_0 = 0,99$) y complementario ($\gamma_0 = 1,01$ y $\gamma_0 = 2$).	98
7.3.	Gráfico de los espectros de potencia adimensionales como función de k a $a = 1$, para los campos de taquiones complementarios con $\gamma_0 = 1,82$, $\gamma_0 = 1,91$ y $\gamma_0 = 2$	99
7.4.	Gráfico de la diferencia fraccional entre el espectro de potencia del taquión complementario, con $\gamma_0 = 1,91$, y el del modelo Λ CDM.	99
9.1.	Niveles de confianza en 2-D asociados con 1σ , 2σ para diferentes planos de θ con la interacción $Q = \alpha\rho'$	116
9.2.	Comparación del parámetro de Hubble, y las cantidades de materia y energía oscura, con sus estimaciones de errores $\pm\sigma$, de un número diferente de métodos.	117
9.3.	Gráfico de $\Omega_b(z)$, $\Omega_r(z)$, $\Omega_x(z)$, $\Omega_m(z)$, $r(z)$, $q(z)$ y $\omega_{effT}(z)$, usando el mejor ajuste de los valores obtenidos con los datos de Hubble para diferentes planos de θ	118
9.4.	Gráfico de $\Omega_x(z)$ para $z \in [10^3, 10^4]$ usando los valores del mejor ajuste obtenidos con los datos de Hubble para diferentes planos de θ . En el gráfico de la izquierda, los colores rojo y púrpura corresponden a los casos 1 y 3 respectivamente. En el gráfico de la derecha, el caso 2 está en color verde, el caso 4 en naranja, el 5 en cian y el 6 en azul.	118
9.5.	Niveles de confianza en 2-dimensiones asociados con 1σ , 2σ para diferentes planos de θ con la interacción $Q = \alpha\rho\rho'$	122
9.6.	Panel de arriba: se gráfica Ω_x y Ω_m en términos del corrimiento al rojo z . Panel de abajo: se gráfica Ω_b , Ω_r , w_{eff} , w_{effx} , y q en términos de z	123
9.7.	La edad cósmica T en función del corrimiento al rojo z . El gráfico muestra las seis curvas de edad cósmica para los casos 1 – 6. Los puntos negros representan la edad sin dimensiones de OHROs, bajo el supuesto de $H_0 = 70,63 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, que corresponde al caso 1.	125

Índice de cuadros

4.1. Estimaciones actuales de los parámetros cosmológicos del modelo Λ combinado con los datos de WMAP-9 y Planck.	61
4.2. Potenciales de modelos de quintesencia.	65
9.1. Datos de Hubble $H_{obs}(z_i)$ vs. corrimiento al rojo z_i	114
9.2. Se muestra los resultados obtenidos para los niveles de confianza 2-D obtenidos en Fig. 9.1 variando dos parámetros cosmológicos.	115
9.3. Se muestran los parámetros cosmológicos derivados de los valores mejor ajustados a los NC de 2-D obtenidos en la Tabla 9.2.	115
9.4. Se muestra los resultados obtenidos para los niveles de confianza 2-D obtenidos en Fig. 9.5 variando dos parámetros cosmológicos.	119
9.5. Comparación de estimaciones diferentes o simultaneas de la fracción de energía oscura a tiempos tempranos.	120
9.6. Se muestra el radio $S(z) = T_z(z)/T_{obj}$ a $z = 1,175; 1,43; 1,55; 3,62; 3,91; 8,2$ y la edad actual del universo (en Gyr) para los seis casos analizados.	124

Listado de Nomenclatura

Λ CDM: Lambda Cold Dark Matter, constante cosmológica con materia oscura fría.

NBB: Nucleosíntesis de Big Bang.

NC: Nivel de Confianza.

FRW: Friedmann-Robertson-Walker.

SIF: Simetría de Invarianza de Forma.

TIF: Transformaciones de Invarianza de Forma.

RG: Relatividad General.

RCF: Radiación Cósmica de Fondo.

WMAP: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

COBE: COsmic Background Explorer.

SPT: South Pole Telescope.

GUT: Grand Unification Theory (Teoría de Gran Unificación).

QCD: Quantum ChromoDynamics.

OAB: Oscilaciones Acústicas Bariónicas.

SN: Super Nova.

SALT: Spectral Adaptive Lightcurve Template.

MLCS: Multicolor Light Curve Shape fitter.

SDSS: Sloan Digital Sky Survey.

MACHO: MAssive Compact Halo Objects.

WIMP: Weakly Interacting Massive Particle.

ME: Modelo Estándar.

SPL: Super-Partícula Ligera.

EVV: Energía de Vacío Variable.

EOT: Energía Oscura Temprana.

BAT: Burst Alert Telescopy.

OHRO: Old High Redshipt Object.

Apéndice A

Espectro de potencia para perturbaciones cuánticas

Pasemos ahora a la resolución de las fluctuaciones cuánticas. El método para estudiar estas fluctuaciones fue desarrollado en [189]. Siguiendo su método descomponemos al taquión ϕ en una solución clásica y una fluctuación cuántica $\alpha(t)$

$$\phi \rightarrow \phi(t) + \alpha(t), \quad (\text{A.1})$$

mientras que la perturbación escalar de la métrica en el gauge longitudinal es

$$g = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)a^2\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (\text{A.2})$$

Las perturbaciones α y el potencial Newtoniano Φ no son independientes [189]. Es conveniente por ello introducir la siguiente cantidad

$$\zeta = \frac{H}{\dot{\phi}}\alpha + \Phi. \quad (\text{A.3})$$

Esta cantidad es relevante dado que queda congelada al salir del horizonte durante el proceso inflacionario, y luego al reingresar al horizonte imprime anisotropías en la radiación cósmica de fondo. Las ecuaciones que gobiernan estas perturbaciones se obtienen al linealizar las ecuaciones de Einstein, pero toman una forma más sencilla si se define la variable

$$v = z\zeta, \quad z = \frac{a\gamma^{3/2}\dot{\phi}}{H}. \quad (\text{A.4})$$

La ecuación que describe los modos de Fourier v_k de v toma la forma

$$v_k'' + (c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z})v_k = 0. \quad (\text{A.5})$$

Aquí el apóstrofe indica la derivada con respecto al tiempo conforme η .

Consideremos ahora las soluciones de la ecuación (A.5) para el espacio tiempo taquiónico descrito en el Cap. 7. El factor para dicha solución se aproxima al de de Sitter

$$a \sim a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2}t \gg 1,$$

para tiempos largos, mientras que para tiempos cortos tiene la forma

$$a \sim a_0 \left(\frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} \right)^{\frac{2}{3\gamma_0}} t^{\frac{2}{3\gamma_0}}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1.$$

Sin embargo para resolver (A.5) es necesario expresar dichos factores en términos del tiempo conforme η definido por

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}.$$

Es importante remarcar que no hay una correspondencia biunívoca entre a y η correspondiente a la solución considerada. Sin embargo, para tiempos cortos y largos esta correspondencia es uno a uno y se tiene que

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \gg 1, \\ \eta &= \frac{2}{a_0 \gamma_0 \sqrt{3\Lambda}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3\gamma_0-2}{2}}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para el caso particular $\gamma_0 = 3/2$ la potencia de la última forma debe ser reemplazada por un logaritmo. Vale la pena notar en esta instancia que para valores pequeños de $a(t)$ el tiempo conforme η se vuelve grande tan solo cuando $\gamma_0 \leq 3/2$, mientras que en otro caso también toma valores pequeños. Este segundo caso difiere del comportamiento que se evidencia en soluciones cercanas a de Sitter y es relevante al discutir las condiciones asintóticas de Bunch-Davies para este modelo, como se verá a continuación.

En lo que sigue es conveniente introducir el parámetro de rodado lento definido por

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3\gamma_0}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3\gamma_0}}. \quad (\text{A.7})$$

En los regímenes mencionados más arriba (A.7) tiene el siguiente comportamiento

$$\begin{aligned} \epsilon &\sim 0, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \gg 1, \\ \epsilon &\sim \frac{3\gamma_0}{2} \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Esto sugiere que este parámetro toma valores acotados durante toda la evolución del espacio tiempo-taquiónico considerado.

Esta ecuación representa una partícula con una masa dependiente del tiempo conforme η . La dependencia en η viene dada por el factor

$$\frac{z''}{z} = 2a^2 H^2 (1 + \epsilon) = 2a^2 H^2 \left\{ 1 + \frac{3\gamma_0}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3\gamma_0}} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

y debe tenerse en cuenta también que

$$2a^2 H^2 = \frac{2a^2 \Lambda}{3} \frac{1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3\gamma_0}}{\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3\gamma_0}}.$$

A partir de la primera (A.6), teniendo en cuenta que para tiempos largos $a(t)$ toma valores grandes, se deduce inmediatamente que

$$2a^2 H^2 \sim \frac{2}{\eta^2}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \gg 1,$$

mientras que a partir de la segunda (A.6) y teniendo en cuenta que $a(t)$ toma valores pequeños para tiempos cortos se sigue que

$$2a^2 H^2 \sim \frac{2a_0^2 \Lambda}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_0-2} \sim \frac{8}{3\gamma_0^2} \frac{1}{\eta^2}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \frac{z''}{z} &= \frac{2}{\eta^2}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \gg 1, \\ \frac{z''}{z} &= \frac{8}{3\gamma_0^2} \left(1 + \frac{3\gamma_0}{2}\right) \frac{1}{\eta^2}, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación a resolver toma la siguiente forma en los límites considerados

$$\begin{aligned} v_k'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) v_k &= 0, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \gg 1, \\ v_k'' + \left[c_s^2 k^2 - \frac{8}{3\gamma_0^2} \left(1 + \frac{3\gamma_0}{2}\right) \frac{1}{\eta^2}\right] v_k &= 0, \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A partir de (A.10) se deduce el siguiente comportamiento asintótico de las soluciones

$$\begin{aligned} v_k &\simeq \sqrt{-\eta} \left(c_1(k) H_{\nu_1}^{(1)}(-c_s k \eta) + c_2(k) H_{\nu_1}^{(2)}(-c_s k \eta) \right), \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \gg 1, \\ v_k &\simeq \sqrt{\eta} \left(d_1(k) H_{\nu_2}^{(1)}(c_s k \eta) + d_2(k) H_{\nu_2}^{(2)}(c_s k \eta) \right), \quad \frac{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}{2} t \ll 1, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde las $H^{(1,2)}$ son las funciones de Hankel definidas por $H_\nu^{(1,2)} = J_\nu \pm iN_\nu$, con J_ν y N_ν las funciones de Bessel usuales. Los valores de ν_i vienen dados por

$$\nu_1 = \frac{3}{2}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{3\gamma_0^2} \left(1 + \frac{3\gamma_0}{2}\right)}. \quad (\text{A.12})$$

Sin embargo, el comportamiento de esta ecuación para valores

$$t_c \sim \frac{2}{\gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}, \quad (\text{A.13})$$

no es fácil de determinar. A pesar de esta complicación (A.10) sugiere que

$$\frac{z''}{z} = \frac{f(\eta)}{\eta^2},$$

siendo $f(\eta)$ una función complicada pero que toma valores controlados, del orden de los valores de ν_i . Basados en esta observación heurística procederemos a hacer la siguiente aproximación cruda. Dicha aproximación consiste en extender el rango de validez de ambas (A.10) hasta el valor crítico t_c definido en (A.13). Además, si bien la relación entre η y a no es unívoca, la relación entre $a(t)$ y t si lo es. Por ese motivo, en el tiempo crítico t_c la condición de contorno a imponer es la continuidad de v_k y de sus derivadas con respecto al tiempo. Para ello es necesario expresar η como función de t en el rango correspondiente. Esta aproximación suele utilizarse en mecánica cuántica al aproximar una subida de potencial por un escalón.

Consideremos primero el caso $\gamma_0 < 2/3$. En este caso tenemos que para valores de t pequeños, $a(t)$ es pequeño y $\eta \gg 1$. A partir de la primera (A.11) se deduce que asintóticamente

$$v_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left(d_1(k) e^{i(k\eta - \frac{\pi\nu_2}{2} - \frac{\pi}{4})} + d_2(k) e^{-i(k\eta - \frac{\pi\nu_2}{2} - \frac{\pi}{4})} \right),$$

La condición de Bunch y Davies implica que

$$v_k \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{ik\eta},$$

de donde se deduce que

$$d_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(\nu_2 + \frac{1}{2})}, \quad d_2(k) = 0.$$

Los coeficientes $c_i(k)$ pueden deducirse al aplicar las condiciones de contorno en $t = t_c$ descritas en el párrafo anterior, el resultado es

$$c_1(k) = -\frac{d_1(k)\pi c_s k}{4i} \left[\frac{d(\sqrt{-\eta} H_{\nu_1}^{(2)}(-c_s k \eta))}{d\eta} \Big|_{\eta_1} H_{\nu_2}^{(1)}(c_s k \eta_2) - H_{\nu_1}^{(2)}(-c_s k \eta_1) \frac{d(\sqrt{-\eta} H_{\nu_2}^{(1)}(c_s k \eta))}{d\eta} \Big|_{\eta_2} \right], \quad (\text{A.14})$$

$$c_2(k) = \frac{d_1(k)\pi c_s k}{4i} \left[\frac{d(\sqrt{-\eta} H_{\nu_1}^{(1)}(-c_s k \eta))}{d\eta} \Big|_{\eta_1} H_{\nu_2}^{(1)}(c_s k \eta_2) - H_{\nu_1}^{(1)}(-c_s k \eta_1) \frac{d(\sqrt{-\eta} H_{\nu_2}^{(1)}(c_s k \eta))}{d\eta} \Big|_{\eta_2} \right], \quad (\text{A.15})$$

donde hemos definido

$$\eta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{a_0 \sqrt{\Lambda}}, \quad \eta_2 = \frac{2}{a_0 \gamma_0 \sqrt{3\Lambda}}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim -H_\nu^{(2)}(x) \sim -\frac{i2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}, \quad x \ll 1, \quad (\text{A.16})$$

se deduce que

$$v_k \sim i(c_2(k) - c_1(k)) \frac{2^\nu}{\pi \eta^{\nu-1/2}} \frac{\Gamma(\nu)}{(-c_s k)^\nu}.$$

Vemos entonces que la diferencia con el caso de Sitter está dado por el valor de los $c_i(k)$, los cuales dependen de γ_0 y de k .

Para el caso $\gamma_0 > 2/3$ la condición de Bunch-Davies no se satisface, dado que $\eta \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto es un reflejo de la no linealidad del lagrangiano que describe el taquión. Nuestra propuesta consiste sin embargo en extender la solución hallada a todo el rango de γ_0 . En otras palabras, asumimos que la solución se comporta bien al variar γ_0 . Ahora bien, recordando la definición $v_k = z\zeta_k$, se deduce que

$$\zeta_k \sim \frac{H}{a\gamma_0^2} i(c_2(k) - c_1(k)) \frac{2^{3/2}}{\pi \eta} \frac{\Gamma(3/2)}{(-c_s k)^{3/2}},$$

lo cual en un régimen cercano a de Sitter da

$$\zeta_k \sim \frac{\Lambda}{3\gamma_0^2} i(c_2(k) - c_1(k)) \frac{2^{3/2}}{\pi} \frac{\Gamma(3/2)}{(-c_s k)^{3/2}}.$$

El espectro de potencias en esta situación es entonces

$$P_\zeta = \frac{1}{2\pi^2} \zeta_k \zeta_k^* k^3 = \frac{\Lambda^2}{9\gamma_0^4} (c_2(k) - c_1(k))(c_2(k) - c_1(k))^* \frac{2}{\pi^3} \frac{\Gamma^2(3/2)}{(c_s)^3}$$

Este espectro de potencias no es independiente de k , dado que los coeficientes $c_i(k)$ si dependen de k no solo en fase, sino en amplitud. Para valores de k pequeños se sigue de (A.16) junto con (A.15) que

$$P_\zeta \sim \frac{1}{k^{\frac{1}{2} + \nu_2}}, \quad (\text{A.17})$$

con ν_2 dado en (A.12), el cual depende de γ_0 . Es decir que a longitudes de onda larga, el espectro difiere considerablemente del caso de Sitter. Para valores de k largos en cambio, las funciones $\sqrt{-\eta} H_\nu^i$ se comportan como una solución de onda plana y en consecuencia

$$P_\zeta \sim A,$$

siendo A una constante que depende de γ_0 . Es decir que para longitudes de onda corta el espectro de potencias no depende de k , y la única diferencia con el caso de Sitter es la amplitud, la cual depende del parámetro γ_0 .

Bibliografía

- [1] A.G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron J.* **116** (1998) 1009 [arXiv:astro-ph/9805201].
- [2] R. Knop *et al.*, *Astrophys. J.* **598** (2003) 102.
- [3] A. Riess *et al.* *Astrophys. J.* **607** (2004) 665.
- [4] D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suplem.*, **170**, (2007) 377.
- [5] E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suplem.* **192** (2011) 18.
- [6] P.A.R. Ade *et al.*, PLANCK Collab. Cosmological parameters [arXiv:1303.5076].
- [7] D. Huterer, M.S. Turner, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 081301 [arXiv:astro-ph/9808133].
- [8] Y. Wang, *Dark energy: Observational and theoretical approaches*, Cambridge University Press (2010).
- [9] Manuel Drees, Gilles Gerbier, [arXiv:1204.2373].
- [10] Varun Sahni, *Lect. Notes Phys.* **653**:141-180, (2004).
- [11] Jonathan L. Feng, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **48**:495–545 (2010).
- [12] Douglas H. Rudd, Andrew R. Zentner, Andrey V. Kravtsov, *Astrophys. J.* **672**: 19-32 (2008).
- [13] C. Fedeli, K. Dolag, L. Moscardini, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, V. **419**, I. 2, 1588-1602 (2012).
- [14] Simeon Bird, Matteo Viel, Martin G. Haehnelt, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, V. **420**, I. 3, 2551-2561 (2012).
- [15] K. Heitmann, M. White, C. Wagner, S. Habib, D. Higdon, *Astrophys. J.* **715**: 104-121, (2010) [arXiv:1304.7849v2].
- [16] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1, (1989).

-
- [17] P. J. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 559, (2003).
- [18] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.*, **380**, 235, (2003).
- [19] Edmund J. Copeland, M. Sami, Shinji Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**:1753-1936, (2006).
- [20] A. Mazumdar, S. Panda and A. Perez-Lorenzana, *Nucl. Phys. B* **614**, 101 (2001).
- [21] A. Sen, *JHEP* **0204**, 048 (2002).
- [22] Y. S. Piao, R. G. Cai, X. M. Zhang and Y. Z. Zhang, *Phys. Rev. D* **66**, 121301, (2002).
- [23] G. W. Gibbons, *Phys. Lett. B* **537**, 1, (2002).
- [24] L. P. Chimento, *Phys. Rev. D* **69**, 123517 (2004).
- [25] Iván E. Sánchez G., *Physical Review D* **90**, 027308 (2014).
- [26] L. P. Chimento, *Phys. Rev. D* **81**, 043525 (2010).
- [27] L. P. Chimento, M. G. Richarte and I. Sánchez G., *Phys. Rev. D* **88**, 087301 (2013).
- [28] Iván E. Sánchez G., *General Relativity and Gravitation* **46**, 1769 (2014).
- [29] Lukas Hollenstein, Domenico Sapone, Robert Crittenden, Bjoern Malte Schaefer, *JCAP* **0904**, 012, (2009).
- [30] B. Schutz, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, (2009).
- [31] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, (2008).
- [32] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press, (2010).
- [33] E. Komatsu, *et al.*, [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [34] G. Hinshaw *et al.*, [arXiv:1212.5226v3].
- [35] J. K. Adelman-McCarthy, *et al.*, [SDSS Collaboration], [arXiv:0707.3413].
- [36] M. Tegmark, *et al.*, *Astrophys. J.* **606** (2004) 702.
- [37] S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* **68**, 023509 (2003).
- [38] D. Langlois, *Lectures on Cosmology: Accelerated Expansion of the Universe*, Lecture Notes Phys. 800, Ed. G. Wolschin, Springer, Berlin (2010).

- [39] A. Choudhuri, *Astrophysics for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [40] M. Sullivan, *Lectures on Cosmology: Accelerated Expansion of the Universe*, Lecture Notes Phys. 800, Ed. G. Wolschin, Springer, Berlin (2010).
- [41] A. M. Khokhlov, *Astron. Astrophys.* **245**, 114 68 (1991).
- [42] W. Hillebrandt and J. C. Niemeyer, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **38**, 191 (2000).
- [43] D. Kasen, F. Roepke and S. E. Woosley, Arxiv e-prints (2009).
- [44] S. Perlmutter, *et al.*, *Astrophys. J.* **483**, 565 (1997).
- [45] B. P. Schmidt, *et al.*, *Astrophys. J.* **507**, 46 (1998).
- [46] N. Suzuki, *et al.*, *Astrophys. J.* **746**, 85 (2012).
- [47] R. Durrer, *The Cosmic Microwave Background*, Cambridge University Press, (2008).
- [48] V. C. Rubin, *Scientific American*, vol. **248**, no. 6, pp. 96–108, (1983).
- [49] C. Alcock, R. A. Allsman, D. R. Alves, *et al.*, *Astrophysical Journal*, vol. **542**, no.1, pp. 281–307, (2000).
- [50] P. Tisserand, L. Le Guillou, C. Afonso, *et al.*, *Astronomy and Astrophysics*, vol. **469**, no. 2, pp. 387–404, (2007).
- [51] R. H. Cyburt, *Physical Review D*, vol. **70**, no. 2, Article ID 023505, (2004).
- [52] K. Kohri, D.H. Lyth and A. Melchiorri, *JCAP* **0804**, 038 (2008).
- [53] R. D. Peccei, H. R. Quinn, *Phys. Rev. D* **16**, 1791 (1977).
- [54] G. Bertone, *Particle Dark Matter*, Cambridge University Press, (2010).
- [55] A. Kusenko, *Phys. Rep.* **481**, 1 (2009).
- [56] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, *Phys. Rep.* **267**, 195 (1996).
- [57] A. D. Dolgov, [arXiv:astro-ph/9708045].
- [58] A. D. Dolgov, F. R. Urban, *Phys. Rev. D* **77**, 083503 (2008).
- [59] Van der Bij, J. J. H. Van Dam and Y. J. Ng, *Physica* **116 A**, 307 (1982).
- [60] W. Buchmuller and N. Dragon, *Phys. Lett. B* **207**, 292 (1988).

-
- [61] E. Baum, Phys. Lett. B **133**, 185 (1983); S.W. Hawking, Phys. Lett. B **134**, 403 (1984); S. R. Coleman, Nucl. Phys. B **310**, 643 (1988).
- [62] S. Kachru, M. Schulz, and E. Silverstein, Phys. Rev. D **62**, 045021 (2000); N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper, and R. Sundrum, Phys. Lett. B **480**, 193 (2000).
- [63] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde and S. P. Trivedi, Phys. Rev. D **68**, 046005 (2003).
- [64] J. L. Feng, J. March-Russell, S. Sethi and F. Wilczek, Nucl. Phys. B **602**, 307 (2001).
- [65] T.M. Davis *et al.*, Astrophys. J. **666**, 716, (2007).
- [66] Spyros Basilakos, Manolis Plionis and Joan Solà, Physical Review D **80**, 083511 (2009).
- [67] J. Solà, H. Štefančić, Phys. Lett. B **624**, 147, (2005); Mod. Phys. Lett. A **21**, 479, (2006).
- [68] F. Bauer, J. Solà, H. Stefancic, Phys. Lett. B **678**, 427 (2009).
- [69] J. Grande, J. Solà, H. Stefancic, J. Phys. A **40**, 6935-6940, (2007).
- [70] Spyros Basilakos, Astronomy and Astrophysics, Vol. **508**, pp.575-582 (2009).
- [71] N. Sivanandam, Physical Review D **87**, 083514 (2013).
- [72] B. Ratra, P. J. Peebels, Phys. Rev. D **37**, 3406 (1988).
- [73] P. G. Ferreira, M. Joyce, Phys. Rev. D **58**, 023503 (1998).
- [74] J. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, I. Waga, Phys. Rev. Lett. **75**, 2077 (1995).
- [75] P. Brax, J. Martin, Phys. Rev. D **61**, 103502 (2000); Phys. Lett. B **468**, 40 (1999).
- [76] V. Sahni, L. Wang, Phys. Rev. D **62**, 103517 (2000).
- [77] V. Sahni, A. A. Starobinsky, IJMP D **9**, 373 (2000).
- [78] T. Barreiro, E. J. Copeland, N. J. Nunes, Phys. Rev. D **61**, 127301 (2000).
- [79] A. Albrecht, C. Skordis, Phys. Rev. Lett. **84**, 2076 (2000).
- [80] A. Sen, JHEP **0207**, 065 (2002).
- [81] T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **66**, 021301 (2002).
- [82] J. S. Bagla, H. K. Jassal, T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **67**, 063504 (2003).

- [83] L. R. W. Abramo, F. Finelli, Phys. Lett. B **575**, 165 (2003).
- [84] J. M. Aguirregabiria, R. Lazkoz, Phys. Rev. D **69**, 123502 (2004).
- [85] Z. K. Guo, Y. Z. Zhang, JCAP **0408**, 010 (2004).
- [86] E. J. Copeland, M. R. Garousi, M. Sami, S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **71**, 043003 (2005).
- [87] A. Feinstein, Phys.Rev.D **66**, 063511 (2002).
- [88] C. Campuzano, S. del Campo, and R. Herrera, Phys. Lett. B **633**, 149 (2006).
- [89] S. Chattopadhyay, U. Debnath, and G. Chattopadhyay, Astroph. Space Science **314**, 41 (2008).
- [90] S. del Campo, R. Herrera, and A. Toloza, Phys. Rev. D **79**, 083507 (2009).
- [91] R. K. Jain, P. Chingangbam, and L. Sriramkumar, Nucl. Phys. B **852**, 366 (2011).
- [92] J. M. Aguirregabiria, L.P. Chimento and R. Lazkoz, Phys.Rev.D **70**, 023509 (2004).
- [93] G. Calcagni, and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **74**, 043528 (2006).
- [94] L. P. Chimento, M. Forte, G.M. Kremer, M. O. Ribas, Gen. Rel. Grav. **42**, 1523-1535, [arXiv:0809.1919v2] (2010).
- [95] Rudinei C. de Souza, Gilberto M. Kremer, Physical Review D **89**, 027302 (2014).
- [96] A. Sen, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1797 (2002); JHEP **9910**, 008 (1999); M. R. Garousi, Nucl. Phys. B **584**, 284 (2000); JHEP **0305**, 058 (2003); E. A. Bergshoeff, M. de Roo, T. C. de Wit, E. Eyras, S. Panda, JHEP **0005**, 009 (2000); D. Kutasov and V. Niarchos, Nucl. Phys. B **666**, 56 (2003).
- [97] S. Mukohyama, Phys. Rev. D **66**, 024009 (2002); L. Kofman and A. Linde, JHEP **0207**, 004 (2002); M. Sami, Mod. Phys. Lett. A **18**, 691 (2003); J. M. Cline, H. Firouzjahi and P. Martineau, JHEP **0211**, 041 (2002); Z. K. Guo, Y. S. Piao, R. G. Cai and Y. Z. Zhang, Phys. Rev. D **68**, 043508 (2003); S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **571**, 1 (2003); E. Elizalde, J. E. Lidsey, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B **574**, 1 (2003); D. A. Steer and F. Vernizzi, Phys. Rev. D **70**, 043527 (2004); V. Gorini, A. Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, Phys. Rev. D **69**, 123512 (2004); B. C. Paul and M. Sami, Phys. Rev. D **70**, 027301 (2004); L. R. Abramo, F. Finelli and T. S. Pereira, arXiv:astro-ph/0405041; G. Calcagni and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **70**, 103514 (2004).

-
- [98] Shang-Gang Shi, Yun-Song Piao, Cong-Feng Qiao, JCAP **0904**, 027, (2009).
- [99] Rachan Rangdee, Burin Gumjudpai, Astrophysics and Space Science **349**, 975-984 (2014).
- [100] Bohdan Novosyadlyj, arXiv:1311.0227v3 [astro-ph.CO] (2014).
- [101] Luis P. Chimento, Martín G. Richarte, Iván E. Sánchez G., Mod. Phys. Lett. A **28**, No. 4 (2013) 1250236.
- [102] F. Gieres, “Symmetries in Physics”, Eds. F.Gieres, M.Kibler, C.Lucchese and O.Piguet, (Editions Frontieres, 1998).
- [103] M. B. Green, J. H. Schwartz, E. Witten, Superstring theory (Cambridge University Press, 1987); J. Polchinski, String Theory I- II (Cambridge University Press, 1998).
- [104] G. Veneziano, Phys. Lett. B **265**, 287-294 (1991); A. A. Tseytlin, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1721-1732 (1991).
- [105] L. P. Chimento, Phys. Rev. D **65**, 063517 (2002).
- [106] L. P. Chimento, Phys. Lett. B **633**, 9-13, (2004).
- [107] L.P. Chimento and R. Lazkoz, Int. J. Mod. Phys. D **14** (2005) 587-598.
- [108] M. Forte, arXiv:1404.6536v1 [gr-qc] (2014).
- [109] L. P. Chimento, M. Forte, R. Lazkoz and M. G. Richarte, Phys.Rev.D **79** 043502 (2009).
- [110] T. Charters and J.P. Mimoso, JCAP **1008** (2010) 022.
- [111] G. W. Gibbons, Nucl. Phys. B **292**, 784 (1987).
- [112] J. D. Barrow, G. F. R. Ellis, R. Maartens and C. G. Tsagas, Class. Quantum Grav. **20**, L155 (2003).
- [113] J. Bardeen, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [114] U. Gerlach, U. Sengupta, Phys. Rev. D **18**, 1789 (1978).
- [115] S. Hawking, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).
- [116] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, R. H. Phys. Rep. **215**, 203 (1992).
- [117] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, (2005).

- [118] S. Carroll, W. Press and E. Turner, Annual review of astronomy and astrophysics. Vol. **30** (A93-25826 09-90) 499.
- [119] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7-25 (1995).
- [120] M. Quartin, M. O. Calvao, S. E. Jorás, R. R. R. Reis and I. Waga, *JCAP* **05**, 007 (2008).
- [121] J. D. Barrow, *T. Clifton Phys. Rev. D* **73**, 103520 (2006).
- [122] T. Koivisto *Phys. Rev. D* **72**, 043516 (2005).
- [123] L. P. Chimento, M. Forte, G. M. Kremer, *Gen. Relativ. Gravit.* 1-13 (2008) DOI 10.1007/s10714-008-0694-5.
- [124] S. H. Pereira, J. F. Jesus, arXiv:0811.0099v2.
- [125] D. Pavón, B. Wang, *Gen. Rel. Grav.* **41**, 1 (2009).
- [126] J. Chen, Y. Wang, arXiv:0904.2808v4 [gr-qc].
- [127] B. M. Jackson, A. Taylor, A. Berera, arXiv:0901.3272v2 [astro-ph.CO].
- [128] H.M. Sadjadi, M. Alimohammadi, *Phys. Rev. D* **74**, 103007 (2006).
- [129] G. Caldera-Cabral, R. Maartens, arXiv: 0812.1827v1 [gr-qc].
- [130] Zimdahl W., Pavón D., Chimento L. P. *Phys. Lett. B* **521**, 133 (2001).
- [131] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavón, W. Zimdahl, *Phys. Rev. D* **67**, 083513 (2003).
- [132] J. Valiviita, E. Majerotto, R. Maartens, *JCAP* **0807**, 020 (2008).
- [133] L. Amendola, *Phys. Rev. D* **62**, 043511 (2000); L. Amendola, G.C. Campos, R. Rosenfeld, *Phys. Rev. D* **75**, 083506 (2007).
- [134] A. G. Riess, *et al.*, *Astrophys. J.* **117** (1999) 707.
- [135] S. Perlmutter, *et al.*, (The Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **517** 56586 (1999).
- [136] P. Astier, *et al.*, *Astron. Astrophys.* **447** (2006) 31.
- [137] D. N. Spergel, *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175.
- [138] M. Tegmark, *et al.*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 103501.
- [139] K. Garrett and G. Duda, *Advances in Astronomy*, 968283 (2011).
- [140] L. P. Chimento, *Phys. Rev. D* **81**, 043525 (2010).

-
- [141] L. P. Chimento, M. G. Richarte, (2014) [arXiv:1402.6371v1 [astro-ph.CO]].
- [142] X. Chen, Y. Gong, E. N. Saridakis, *Int. J. Theor. Phys.* **53**, 469-481 (2014).
- [143] L. P. Chimento, M. G. Richarte, *Phys. Rev. D* **85**, 127301 (2012).
- [144] L. P. Chimento, M. G. Richarte, *Phys. Rev. D* **86**, 103501 (2012).
- [145] L. P. Chimento, M. G. Richarte, *Eur. Phys. J. C* **73**, (2013) 2497.
- [146] L. P. Chimento, M. G. Richarte, I. Sánchez G., *Phys.Rev. D* **88**, 087301 (2013);
- [147] S. Basilakos, *Astronomy & Astrophysics* **12575** (2009).
- [148] J. A. S. Lima, S. Basilakos, F. E. M. Costa, *Phys. Rev. D* **86** 103534 (2012).
- [149] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski and S. A. Stanford, *JCAP* **1002** (2010) 008 [arXiv:0907.3149 [astro-ph.CO]].
- [150] J. Simon, L. Verde, R. Jimenez, *Phys. Rev. D* **71** 123001 (2005) [astro-ph/0412269].
- [151] A. G. Riess, *et al.*, *Astrophys. J.* **699** (2009) 539 [arXiv:0905.0695 [astro-ph.CO]].
- [152] M. Moresco, *et al.*, *JCAP* **1208** (2012) 006.
- [153] N. G. Busca, *et al.*, (2012) [arXiv:1211.2616 [astro-ph.CO]].
- [154] C. Zhang, *et al.*, (2012) [arXiv:1207.4541 [astro-ph.CO]].
- [155] C. Blake, *et al.*, *MNRAS* **425** (2012) 405.
- [156] C. H. Chuang, Y. Wang, (2012) [arXiv:1209.0210 [astro-ph-CO]].
- [157] O. Farooq and B. Ratra, [arXiv:1301.5243 [astro-ph.CO]].
- [158] Press, W. H., *et al.*, *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [159] D. S. Sivia and J. Skilling, *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*, Oxford University Press Inc., (2006).
- [160] M. Doran, G. Robbers, *JCAP* **0606** (2006) 026, [arXiv:astro-ph/0601544].
- [161] E. Calabrese, D. Huterer, E.V. Linger, A. Melchiorri and L. Pagano, *Phys. Rev. D* **83** 123504 (2011).
- [162] Z. Hou *et al.*, [arXiv: 1212.6267]

- [163] E. Calabrese, R. de Putter, D. Huterer, E.V. Linger, A. Melchiorri, *Phys. Rev. D* **83** 023011 (2011).
- [164] E. L. Wright, *The Astrophysical Journal*, **664** 633-639, 2007.
- [165] J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, *Astrophys. J.* **521**, L87 (1999).
- [166] J. Dunlop et al., *Nature* **381**, 581 (1996).
- [167] H. Spinrad et al., *Astrophys. J.* **484**, 581 (1997).
- [168] J. Dunlop, in *The Most Distant Radio Galaxies*, edited by H. J. A. Rottgering, P. Best and M. D. Lehnert, Kluwer, Dordrecht (1999), page 71.
- [169] A. Stockton, M. Kellogg and S. E. Ridgway, *Astrophys. J.* **443**, L69 (1995).
- [170] Y. Yoshii, T. Tsujimoto and K. Kawara, *Astrophys. J.* **507**, L113 (1998).
- [171] G. Hasinger, N. Scharrel and S. Komossa, *Astrophys. J.* **573**, L77 (2002).
- [172] S. Komossa, G. Hasinger, astro-ph/0207321.
- [173] H. Wei, S. N. Zhang, *Phys. Rev. D* **76**, 063003 (2007), [astro-ph/0707.2129].
- [174] N. R. Tanvir, D. B. Fox, A. J. Levan, E. Berger, K. Wiersema, J. P. U. Fynbo, A. Cucchiara and T. Kruhler *et al.*, *Nature* **461**, 1254 (2009) [arxiv.org/abs/0906.1577].
- [175] R. Salvaterra, M. Della Valle, S. Campana, G. Chincarini, S. Covino, P. Dvanzo, A. Fernandez-Soto and C. Guidorzi *et al.*, [arxiv.org/abs/0906.1578].
- [176] M. L. Tong, Y. Zhang, (2009) [arXiv:0906.3646 [gr-qc]].
- [177] R. J. Yang and S. N. Zhang, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **407**, 1835 (2010).
- [178] L. P. Chimento, M. Forte, M. G. Richarte, *The European Physical Journal C*, Volume **73**, 2285 (2013).
- [179] L. P. Chimento, M. Forte, M. G. Richarte, *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1250235 (2013).
- [180] Jinglei Cui and Xin Zhang, *Phys.Lett.B* **690**, 233-238, (2010).
- [181] Mónica Forte, (2013) [arXiv:1311.3921v1 [gr-qc]].
- [182] C. L. Reichardt, R. de Putter, O. Zahn, Z. Hou, [arXiv:1110.5328].
- [183] Y. Wang, “Dark energy”, Wiley-vch Verlag GmbH and Co. KGaA, ISBN 978-527-40941-9 (2010); “Dark energy: Observational and theoretical approaches”, edited by Pilar Ruiz-Lapuente, Cambridge University Press 2010.

- [184] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, California (1990).
- [185] R. H. Cyburt, B.D. Fields, K. A. Olive and E. Skillman, *Astropart. Phys.* **23**, 313 (2005).
- [186] K. Liao, Z. Li, J. Ming, Z. H. Zhu, *Phys. Lett. B* **718** (2013) 1166-1170.
- [187] E. Gaztañaga, A. Cabré, and L. Hui. *MNRAS*, **399** (2009) 1663.
- [188] Riess, A. G., *et al.* 2011, *ApJ*, **730**, 119.
- [189] J. Garriga, V. F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 219 (1999) [arXiv:hep-th/9904176].